

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 12, Issue 1

2016

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics
Moscow Institute of Architecture (State Academy)
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,
107031, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko, Professor,
The First Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation, National Research
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Executive Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University, 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI),
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University,
8 Suhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina, 1, Univerzitná,
Žilina, 010 26, Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering,
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences,
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering,
1, Akademicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics, 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University, 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University, 29, Ul.
Politechnicheskaya, St. Petersburg,
195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Rashid A. Mangushev, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering,
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities
in Radom, 29, ul. Młaczewskiego,
26-600, Radom, Poland

Anatoly V. Perelmuter, Professor
SCAD Soft,
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University,
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University,
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education,
New Delhi, India

Wacław Szczeciński, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
Tokyo University, 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University,
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems; 8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obratsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal

for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года. В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук. В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ). *Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science.* Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк). Партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН)* и *Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО)*.

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

– предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности опубликовать результаты своих исследований;

– привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;

– обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал IJCCSE»); с основной информацией о журнале, его целях и задачах, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей и пр.

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.rospr.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж, офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: kaytukov@raasn.ru; tkaytukov@gmail.com). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 12, Issue 1

2016

TABLE OF CONTENTS

Научно-исследовательский центр СтаДиО. 25 лет на фронте численного моделирования	<u>8</u>
<i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов</i>	
Об одном примере расчета трехмерного бруса на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов	<u>46</u>
<i>П.А. Акимов, О.А. Негрозов</i>	
Численное моделирование напряженно-деформированного состояния кирпичного жилого здания при взрыве бытового газа внутри помещения	<u>73</u>
<i>М.С. Барабаш, П.Н. Кирьязов, М.А. Ромашкина</i>	
Обоснование критериев предельных состояний каменных конструкций сейсмостойких зданий на основе численных исследований	<u>86</u>
<i>О.В. Кабанцев</i>	
Исследование напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с трещинами в BK SCAD Office v. 21	<u>103</u>
<i>И.С. Кукушкин, М.А. Орлова</i>	
К методике инженерного расчета свайно-плитного фундамента	<u>110</u>
<i>Р.А. Мангушев, Л.Н. Кондратьева</i>	
Численное моделирование физически нелинейной динамической реакции высотных зданий при сейсмических воздействиях уровня МРЗ	<u>117</u>
<i>В.И. Травуш, А.М. Белостоцкий, В.В. Вершинин, К.И. Островский, Н.О. Петряшев, С.О. Петряшев</i>	
Изучение процесса разрушения связей сцепления при вдавливании стержня жесткой арматуры в бетон	
Часть 1: Экспериментальные исследования	<u>140</u>
<i>В.И. Травуш, Г.Г. Кашеварова, А.С. Мартиросян, В.С. Кузьминых</i>	
The Account of Non-Uniformity of the Tension in Problems of the Statics and Dynamics of Ideally Plastic Shallow Shells	<u>147</u>
<i>Aleksandr V. Starov, Sergei Yu. Kalashnikov</i>	

Asymptotic Model of Filtration in Almost Stationary Mode <i>Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov</i>	<u>158</u>
О созыве очередного Общего собрания членов Российской академии архитектуры и строительных наук	<u>164</u>
Ушел из жизни Борис Ефимович Победря	<u>166</u>

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР СТАДИО. 25 ЛЕТ НА ФРОНТЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.М. Белостоцкий^{1,2,3}, П.А. Акимов^{1,2,3,4}

¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Настоящая статья посвящена 25-летию юбилею Научно-исследовательского центра СтаДиО (НИЦ СтаДиО). Приведена общая информация об организации, формирующая портрет центра. Представлены программные комплексы, разработкой, исследованием, развитием и сопровождением которых занимается НИЦ СтаДиО. Дается представление о выполняемых расчетно-теоретических и расчетно-экспериментальных исследованиях, возможных направлениях сотрудничества, заказчиках и выполненных работах.

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерное моделирование, программное обеспечение, наукоемкие расчетно-теоретические исследования, прочность, устойчивость, надежность, безопасность, мониторинг объектов

25-TH ANNIVERSARY OF SCIENTIFIC RESEARCH CENTRE STADYO

Alexander M. Belostotsky^{1,2,3}, Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}

¹ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

² National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

³ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁴ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to 25-th anniversary of Scientific Research Centre StaDyO (SRC “StaDyO”). General information about organization is given. Besides, developed software is under consideration as well. Several computational and theoretical studies, possible areas of cooperation, vital customers and projects are presented.

Keywords: numerical modelling, computer modelling, software, computational researches, structural analysis, strength, stability, durability, safety, monitoring

1. ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ. ПОРТРЕТ ЦЕНТРА

«Научно-исследовательский центр СтаДиО» (далее – ЗАО НИЦ СтаДиО, НИЦ СтаДиО, г. Москва) основан в 1991 году с целью разработки и развития численных методов, программно-алгоритмического обеспечения и

выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов энергетики, гражданского и промышленного строи-

тельства [2], машиностроения, биотехнологии и других высокотехнологичных отраслей.

Среди *организаторов фирмы* – группа ведущих ученых и специалистов России, традиционно сотрудничавших в исследованиях и разработках по указанным направлениям. В настоящее время в НИЦ СтаДиО работают 3 доктора наук (в том числе 2 члена-корреспондента Российской академии архитектуры и строительных наук) и 5 кандидатов наук.

Актуальные *направления деятельности* приему исторические [1], взаимосвязаны и дают синергетический эффект:

- разработка, исследование и развитие математических моделей, численных, численно-аналитических и расчетно-экспериментальных методов и реализующего программно-алгоритмического обеспечения для адекватного определения нагрузок и воздействий, напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов на значимых этапах их жизненного цикла (энергетика, гражданское и промышленное строительство, машиностроение, биотехнология и другие высокотехнологичные отрасли) [14,15,17];
- развитие, верификация/аттестация и техническое сопровождение собственных конечноэлементных и суперэлементных программных комплексов (СТАДИО, АСТРА-НОВА), освоение и верификация мировых брендов численного моделирования (ANSYS, SIMULIA Abaqus, DIANA и др.) и отечественных специализированных программ расчета строительных конструкций, зданий и сооружений (SCAD, Лира и др.);
- выполнение расчетных и расчетно-экспериментальных исследований, экспертиз и мониторинга наиболее сложных, ответственных и уникальных систем, конструкций, зданий, сооружений и комплексов (АЭС, ТЭС и ГЭС, «недоскребы», знаковые объекты Зимних Олимпийских игр 2014 года (XXII Олимпийские зимние иг-

ры) и стадионы Чемпионата мира по футболу 2018 года (XXI чемпионата мира по футболу ФИФА), многие другие) с выработкой заключений и рекомендаций по оптимизации [16];

- научно-образовательная деятельность, включающая организацию и насыщение смысловым содержанием профильных научно-образовательных центров и лабораторий в ведущих российских университетах, работу в Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), публикации статей, издание журналов, учебников, учебных пособий и монографий, организацию и участие в международных и российских симпозиумах и конференциях, подготовку научных кадров высшей квалификации (кандидатов и докторов наук).

Заказчики и потребители наукоемкой продукции и услуг НИЦ СтаДиО – Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН), Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору (Ростехнадзор), дирекции атомных электростанций (АЭС), тепловых электростанций (ТЭС), гидроэлектростанций (ГЭС) и гидроаккумулирующих электростанций (ГАЭС), нефтеперерабатывающих заводов (НПЗ) и газокomppressorных станций (ГКС), инженеринговые компании, опытно-конструкторские бюро (ОКБ), научно-исследовательские и проектно-конструкторские и изыскательские институты, центры и объединения («Атом-энергопроект», «Гидропроект», «Теплоэлектропроект», «Моспроект-1», «Моспроект-2», «Моспроект-4», Московский научно-исследовательский и проектный институт типологии, экспериментального проектирования» (МНИИТЭП), Мосинжпроект, Научно-исследовательский центр «Строительство» (Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко (ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко), Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева (НИИЖБ им. А.А. Гвоздева), Научно-

исследовательский, проектно-изыскательский и конструкторско-технологический институт оснований и подземных сооружений имени Н.М. Герсевича (НИИОСП им. Н.М. Герсевича)), Центральный ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский и проектный институт строительных металлоконструкций им. Н.П. Мельникова (ЦНИИ-ПСК им. Мельникова), Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (НИИЭС), «Мосэнергопроект», «Энергосетьпроект», ВНИПИЭнергопром, ВНИИ Атоммаш, ОКБ «Гидропресс», Подольский машиностроительный завод, Ордена Ленина Научно-исследовательский и конструкторский институт энерготехники имени Н.А. Доллежалея (НИКИЭТ), Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» имени А.Г. Иосифьяна (ВНИИЭМ), Научно-исследовательский и проектный институт нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности (ВНИПИнефть), Тюменский проектный и научно-исследовательский институт нефтяной и газовой промышленности им. В.И. Муравленко (Гипротюменнефтегаз), «Газпром добыча Надым» (до 2008 года – «Надымгазпром»), Гипрогазцентр, Сахалинморнефтегаз, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН), «Энергопроект» (Украина), Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Национальный исследовательский университет «МЭИ» (Московский энергетический институт) (НИУ МЭИ (ТУ)), Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет (ННГАСУ), Томский государственный архитектурно-строительный университет (ТГАСУ), Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ, ранее – Пермский государственный технический университет), Южно-

Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет; ЮУрГУ), Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), «Енергопроект» (Болгария), Сименс АГ (Германия), Самсунг (Южная Корея) и LG (Южная Корея) и многие другие).

Генеральный директор НИЦ СтаДиО с момента основания – Александр Михайлович Белостоцкий (сейчас – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук), заместитель директора по науке – Павел Алексеевич Акимов (член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук), заместитель директора по финансам (главный бухгалтер) – Галина Борисовна Тимакова.

2. ПРОГРАММНЫЕ КОМПЛЕКСЫ: РАЗРАБОТКА, ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЕ И СОПРОВОЖДЕНИЕ

Разработаны на протяжении последних 40 лет, успешно прошли верификацию/экспертизу / аттестацию в Федеральной службе по экологическому, технологическому и атомному надзору (Ростехнадзор; Госатомнадзор / Госстрое РФ), внедрены в ведущих проектно-конструкторских, образовательных и научно-исследовательских организациях ряда отраслей и интенсивно развиваются следующие программные комплексы: **СТАДИО** – расчеты температурных, фильтрационных и иных полей, напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности произвольных комбинированных (массивно-оболочечно-мембранно-стержневых с «жесткими» телами и с жидкостью) изо- и ортотропных систем в плоской, осесимметричной и трехмерной постановках с использованием представительного набора стержневых (прямо- и криволинейных), изгибно-мембранных, криволинейных супер- и изопараметрических конечных элементов,

современных оптимизированных численных схем (включая агрегирование, многоуровневый суперэлементный подход и «интеллектуальные» предобусловленные схемы метода сопряженных градиентов для супербольших задач [7]) и развитого сервисного обеспечения [13,36-39]:

- *СТАДИО-СТАЦ* – стационарные задачи теплопроводности, фильтрации, течения идеальной жидкости и т.п.;
- *СТАДИО-НСТАЦ* – нестационарные задачи теплопроводности, фильтрации, течения идеальной жидкости и т.п.;
- *СТАДИО-СТАТ* – линейно-упругий расчет на статические нагрузки (объемные, поверхностные, температурные, сосредоточенные и т.п.);
- *СТАДИО-ФОРМ* – определение значимой части спектра собственных частот и форм колебаний, критических нагрузок и форм потери устойчивости;
- *СТАДИО-СЕЙСМ* – квазистатический спектральный расчет на сейсмические воздействия, заданные спектрами ускорений («нормативная» линейно-спектральная методика с учетом специфики объектов исследования);
- *СТАДИО-ВИБР* – оценка параметров вынужденных установившихся колебаний для систем с ортогональным и неортогональным демпфированием;
- *СТАДИО-СПЕКТР* – динамический расчет на силовые и кинематические (типа акселерограмм) воздействия линейно-упругих систем (и систем с локальными нелинейностями) с разложением по формам собственных колебаний;
- *СТАДИО-ДИН* – прямое интегрирование по времени линейных и нелинейных (большие перемещения, эффекты пластичности, вязкопластичности и наследственности в металлах, бетоне и грунтах, поэтапное возведение, швы и макротрещины) уравнений движения при заданных статических и динамических термосиловых и сейсмических (акселерограммы) воздействиях;

- *СТАДИО-РАЗР* – решение линейных задач механики разрушения (определение коэффициентов интенсивности напряжения и J -интегралов для тел с трещинами);
- *СТАДИО-ОПТИМ* – решение задач математической оптимизации параметров нагружения и геометрических форм системы;
- *СТАДИО-СНП* – расчетная оценка прочности и армирования железобетонных конструкций по 1-му и 2-му предельным состояниям с учетом образования трещин в соответствии с положениями действующих российских строительных норм и правил (СНиП);
- *СТАДИО-Объект* – объектно-ориентированные системы автоматизированного расчета типовых конструкций и узлов (ветроэнергетических установок, деталей трубопроводов и нелинейной системы «трубопровод с изоляцией и компенсирующими подушками – грунт в траншее», шкафов управления АЭС, вибрации погружных электродвигателей и др.).

АСТРА-НОВА – автоматизированное проектирование и комплексный прочностной расчет произвольных разветвленных и протяженных низко- и высокотемпературных трубопроводных систем атомных (АСТРА-АЭС, ПНАЭ Г-7-002–86) и тепловых (АСТРА-ТЭС, РД 10-249–98) энергетических установок, нефтехимических и нефтеперерабатывающих производств (АСТРА-НЕФТЕХИМ, РТМ 38.001–94), тепловых сетей (АСТРА-ТЕПЛОСЕТЬ, РД 10-400–01), магистральных газо- и нефтепроводов (АСТРА-МАГИСТР, СНиП 2.05.06–85), трубопроводов высокого и сверхвысокого давления (АСТРА-СВД, ГОСТ Р 55600-2013) в соответствии с действующими российскими нормативными требованиями, с эффективной программной реализацией мощных численных методов и с использованием всех преимуществ САПР- и Windows-технологий [13,18,39-41]:

- *АСТРА-ДЕТАЛЬ* – расчет по выбору основных размеров деталей трубопроводов;

- *АСТРА-СТАЦ* – расчет на статическую и циклическую прочность с учетом (или автоматическим подбором) характеристик пружинных подвесок сортамента ОСТ, МВН, LISEGA, «спецпружин» ВНИПИЭТ и постоянного усилия, трения / отрыва в опорах скольжения и качения, подземных трубопроводов (со специальной изоляцией и без оной) бесканальной прокладки;
 - *АСТРА-ФОРМ* – расчет энергетически (например, сейсмически и вибрационно) значимой части спектра собственных частот и форм колебаний, в том числе, для фактического статического состояния опор (трение / отрыв);
 - *АСТРА-СЕЙСМ* – расчет на сейсмические воздействия, заданные трехкомпонентными спектрами ускорения или акселерограммами, с учетом опор с нелинейными динамическими характеристиками и вклада высших форм колебаний;
 - *АСТРА-ВИБР* – расчет на вибропрочность для установившихся режимов колебаний («отстройка» от резонансов, определение допускаемых амплитуд виброперемещений по каждой учитываемой собственной форме и оценка амплитуд виброперемещений, напряжений и нагрузок, вибропрочности и долговечности при заданных полигармонических нагрузках);
 - *АСТРА-ДИН* – расчет на переходные динамические процессы для различных переходных и аварийных режимов эксплуатации (открытие-закрытие клапанов и т.п.);
 - *АСТРА-РАЗР* – расчет последствий «мгновенных» разрывов трубопроводов, в том числе-пространственно-временное распределение гидродинамических нагрузок, движение трубопроводов с учетом больших перемещений и пластических деформаций, оценка ударных нагрузок на опоры-ограничители и близлежащие системы;
 - *АСТРА-СТАДИО* – уточненный расчет температурного и напряженно-деформированного состояния, статической, циклической и сейсмической прочности типовых деталей трубопроводов (сварных, с накладками и штампованных тройников, гнутых и секторных отводов, косых стыков, конических переходов, линзовых/сильфонных компенсаторов и сварных соединений, элементов трубопровода с изоляцией в грунте) по пространственно-оболочечным и трехмерным схемам метода конечных элементов;
 - *АСТРА-СУПЕР* – востребованный практикой и впервые реализованный в специализированном «софте» уточненный учет статических и динамических характеристик сложных подсистем (трубопроводные системы, детали, опорные конструкции и оборудование) в составе общей суперэлементной модели трубопроводной системы – формирование и использование т.н. редуцированных матриц влияния суперэлементов (Крейга-Бемптона, жесткости, масс, нагрузок);
 - *ПРЕ-АСТРА* и *ПОСТ-АСТРА* – развитое пре- и постпроцессорная обработка данных, мощная интерактивная графика (визуализация расчетных моделей, деформированного и напряженного состояний, анимация собственных форм колебаний и динамики), поиск коллизий в исходном и деформированных состояниях, встроенные и пополняемые отраслевые базы данных по физико-механическим свойствам материалов и деталям трубопроводов, интерфейс с популярными САПР и программами расчетов трубопроводов.
- Программный комплекс АСТРА-АЭС аттестован в Госатомнадзоре РФ (паспорт № 40 от 21.12.1995, рег. № 9 от 05.06.1995), версия '2009 в полном объеме аттестована в Ростехнадзоре (паспорт №292 от 14.04.2011, рег. №614 от 16.09.2009), ПК АСТРА-ТЭС, АСТРА-НЕФТЕХИМ, АСТРА-ТЕПЛОСЕТЬ и АСТРА-МАГИСТР сертифицированы в ЦПС Госстроя РФ («последний» сертификат соответствия № РОСС RU.СП15.Н00415 от 13.07.2015, срок действия до 13.07.2017).
- Общее число интенсивно эксплуатируемых рабочих мест АСТРА-НОВА на предприятиях профильных отраслей и в образовательных

организациях России, стран СНГ, Балтии и Восточной Европы превышает 300.

В расчетной практике, научных исследованиях и образовательной деятельности активно используется *мощный «сторонний» мировой и отечественный брендовый лицензионный софт численного моделирования и прочностных расчетов*, в освоении, верификации и популяризации которого НИЦ СтаДиО и Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) НИУ МГСУ принимали и принимают активное участие: ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, SIMULIA Abaqus (Standard & Explicit), SCAD, ЛИРА-САПР, ОМ «СНиП Железобетон» и др.

СиМонЭкс (совместная разработка с НИИ-ЭС) – информационно-диагностическая система мониторинга и экспертной оценки безопасности эксплуатируемых сооружений. Реализует требования нормативных правовых документов по декларированию безопасности и лицензированию деятельности по эксплуатации. Комплекс СиМонЭкс обеспечивает:

- формализацию процедуры оценки риска аварии;
- хранение и обработка в диалоговом режиме факторов безопасности;
- совместное использование в процедуре оценки уровня безопасности исходной количественной и качественной информации на основе ее ранжирования по единой шкале;
- выявление «слабых» мест эксплуатируемого сооружения;
- удобный табличный и графический диалоговый доступ к показаниям контрольно-измерительной аппаратуры (КИА);
- построение регрессионных статистических моделей для анализа данных КИА;
- интеграцию «калибровочных» математических моделей фильтрационного, температурного и напряженно-деформированного состояния сооружений (в т.ч. на основе СТАДИО).

В кооперации с НОЦ КМ НИУ МГСУ и CADFEM CIS (Россия) на «базе» универсального программного комплекса ANSYS (Mechanical, CFD) разработаны специализированные исследовательские программы (СИПК):

- **ANSYS Ветровые нагрузки** – определение средней и пульсационной составляющих ветровых нагрузок, пиковых ветровых давлений на фасадные/ограждающие конструкции, параметров пешеходная комфортность (на основе решения трехмерных стационарных и нестационарных задач строительной аэродинамики) [3];
- **ANSYS Снеговые нагрузки** – определение снеговых нагрузок, в том числе, на большепролетные покрытия сложных форм (на основе решения трехмерных задач строительной аэродинамики, снегопереноса и снегоотложения);
- **ANSYS Узлы конструкций** – уточненный расчет НДС, прочности и устойчивости конструктивных узлов (с библиотекой ГОСТов, ОСТов и ТУ, на базе трехмерных и оболочечных физически, геометрически и конструктивно нелинейных конечноэлементных моделей (КЭ-моделей));
- **ANSYS Мониторинг** – построение и обработка адаптивных пространственных статических и динамических КЭ-моделей (с решением обратных задач идентификации по данным измерений перемещений и деформаций, собственных частот/форм) для стендовых макетов системы «основание – фундаментная плита» и каркасных зданий с внесенными дефектами.

3. РАСЧЕТНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. НАПРАВЛЕНИЯ СОТРУДНИЧЕСТВА, ЗАКАЗЧИКИ, ВЫПОЛНЕННЫЕ РАБОТЫ

Специалисты НИЦ СтаДиО обладают более чем 39-летним опытом расчетно-теоретических исследований пространственного температурного и напряженно-

деформированного состояния, устойчивости, прочности и надежности трубопроводов, технологического, электротехнического и подъемно-транспортного оборудования, машин и механизмов, систем «оборудование – трубопроводы», строительных конструкций, систем «основание – наземное сооружение» и «основание – подземное сооружение» особо ответственных объектов при учете нормативно регламентированных и фактических сочетаний температурных, статических, ветровых, эксплуатационных (вибрации) и особых динамических (сейсмических, ударно-волновых, аварийных и других) воздействий. Среди объектов, для которых проводились эти исследования, можно выделить [9,23]:

- реакторные отделения, машинные залы, резервные дизель-электро-станции и испарительные градирни атомных электростанций и хранилищ отходов (Армянская (Фотография 3.1а), Курская (Фотография 3.1б), Смоленская (Фотография 3.1в), Чернобыльская (Фотография 3.1г), Ленинградская (Фотография 3.1д), Игналинская (Фотография 3.1е), Билибинская (Фотография 3.2а), Нововоронежская (Фотография 3.2б), Кольская (Фотография 3.2в), Балаковская (Фотография 3.2г), Волгодонская (Фотография 3.2д), Калининская (Фотография 3.2е), Запорожская (Фотография 3.3а), Белоярская (Фотография 3.3б), Ловиза (Фотография 3.3в), Козлодуй (Фотография 3.3г), Белене (Фотография 3.3д), Пакш (Фотография 3.3е), Темелин (Фотография 3.4а), Стендаль (Фотография 3.4б), Куданкулам (Фотография 3.4в), Тяньвань (Фотография 3.4г), Бушер (Фотография 3.4д), Аккую (Фотография 3.4е), проекты АЭС нового поколения АС-НП 500, АС-НП 1000, АС 2006, АЭС с ВВЭР-ТОИ (типовой оптимизированный и информатизированный проект двухблочной АЭС с реактором ВВЭР-1300 (водо-водяной энергетический реактор (ВВЭР)), выполняемый в современной информационной среде и в соответствии с требованиями ядерной и радиационной безопасности) и др.) [24,25];
- арочные, гравитационные и земляные плотины, подземные сооружения и здания ГЭС (Саяно-Шушенская (Фотография 3.5а), Красноярская (Фотография 3.5б), Братская (Фотография 3.5в), Богучанская (Фотография 3.5г), Зейская (Фотография 3.5д), Бурейская (Фотография 3.5е), Вилюйская (Фотография 3.6а), Катунь (Фотография 3.6б), Чиркейская (Фотография 3.6в), Волжская (Фотография 3.6г), Камская (Фотография 3.6д), Ингури (Фотография 3.6е), Худони (Фотография 3.7а), Намахвани (Фотография 3.7б), Курпсай (Фотография 3.7в), Нурек (Фотография 3.7г), Рогун (Фотография 3.7д), Плявиньская (Фотография 3.7е), Гехи (Фотография 3.8а), Хоабинь (Фотография 3.8б), Капанда (Фотография 3.8в), Тери (Фотография 3.8г), Танг-Е-Дук (Фотография 3.8д), каскад Кубанских ГЭС (Фотография 3.8е) и др.), ГАЭС (Загорская (Фотография 3.9а)), приливных ЭС, берегозащитных и иных гидросооружений;
- уникальные и типовые здания и сооружения гражданского и спортивного строительства (покрытие большой спортивной арены Лужников (Фотография 3.9б); монумент 300-летия Российского флота (Фотография 3.9в); подземная автостоянка торгово-развлекательного комплекса (ТРК) «Манежная площадь» (Фотография 3.9г); спортивно-оздоровительный комплекс (СОК) «Аквадром» (Фотография 3.9д); ледовый дворец «Мегаспорт» на Ходынке (Фотография 3.9е); спортивный комплекс «Москвич» (Фотография 3.10а); крытый бассейн санатория «Искра» (Фотография 3.10б); Ледовый дворец для хоккея с шайбой «Большой» (Фотография 3.10в), санно-бобслейная трасса «Санки» и трамплинный комплекс «Горки» в г. Сочи (объекты Зимних Олимпийских игр 2014 года);
- футбольные стадионы Чемпионата мира по футболу 2018 года (стадион «Зенит» в г. Санкт-Петербурге (Фотография 3.10г); стадион «Спартак» в г. Москве; стадионы



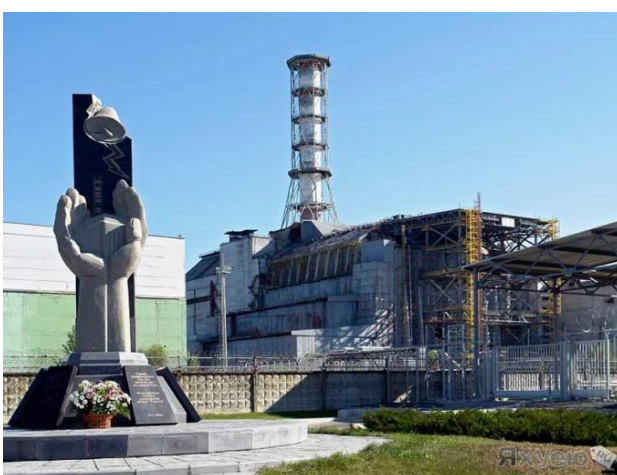
а)



б)



в)



г)



д)



е)

*Фотография 3.1. а) Армянская АЭС; б) Курская АЭС; в) Смоленская АЭС;
г) Чернобыльская АЭС; д) Ленинградская АЭС; е) Игналинская АЭС.*



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.2. а) Билибинская АЭС; б) Нововоронежская АЭС; в) Кольская АЭС; г) Балаковская АЭС; д) Волгоградская АЭС; е) Калининская АЭС.



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.3. а) Запорожская АЭС; б) Белоярская АЭС; в) Ловиза АЭС; г) Козлодуй АЭС; д) Белене АЭС; е) Паки АЭС.



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.4. а) Темелин АЭС; б) Стендаль АЭС; в) Куданкулам АЭС; г) Тяньвань АЭС; д) Бушера АЭС; е) Аккую АЭС.



а)



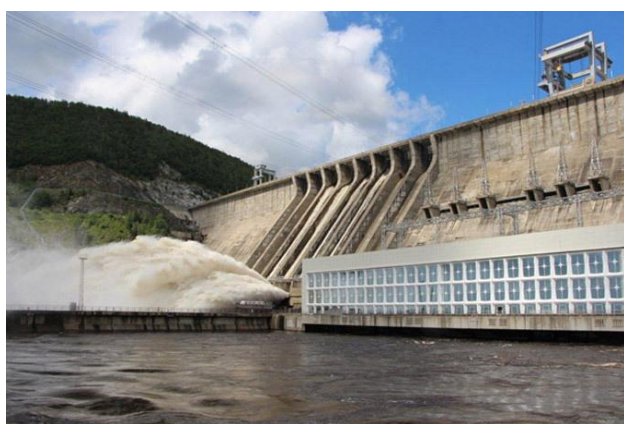
б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.5. а) Саяно-Шушенская ГЭС; б) Красноярская ГЭС; в) Братская ГЭС; г) Богучанская ГЭС; д) Зейская ГЭС; е) Бурейская ГЭС.



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.6. а) Вилуйская ГЭС; б) Катунь ГЭС; в) Чиркейская ГЭС; г) Волжская ГЭС; д) Камская ГЭС; е) Ингури ГЭС.



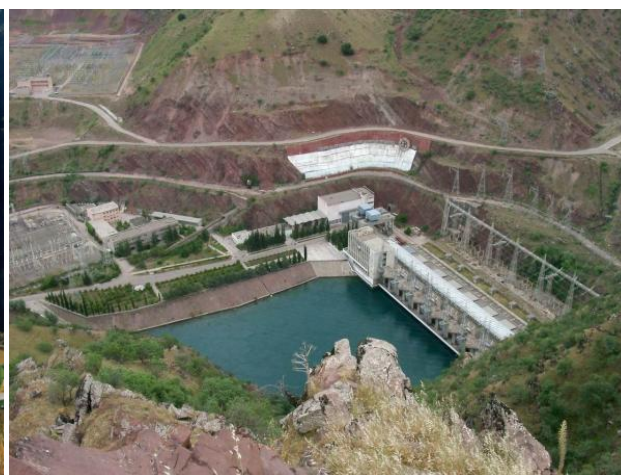
а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.7. а) Худони ГЭС; б) Намахвани ГЭС; в) Курпсай ГЭС; г) Нурек ГЭС; д) Рогун ГЭС; е) Плявиньская ГЭС.



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.8. а) Гехи ГЭС; б) Хоабинь ГЭС; в) Капанда ГЭС; г) Тери ГЭС;
д) Танг-Е-Дук ГЭС; е) каскад Кубанских ГЭС.



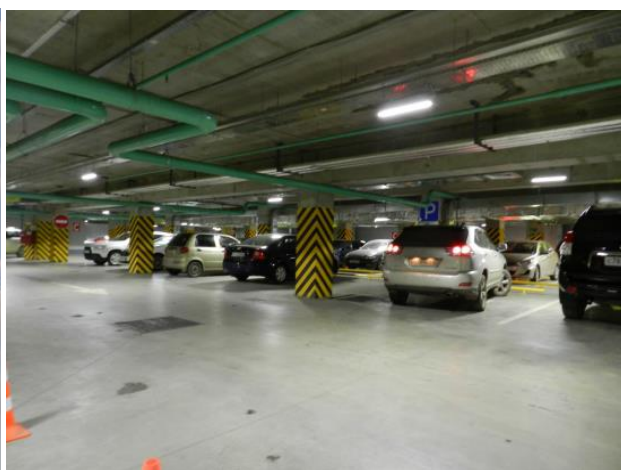
а)



б)



в)



г)



д)



е)

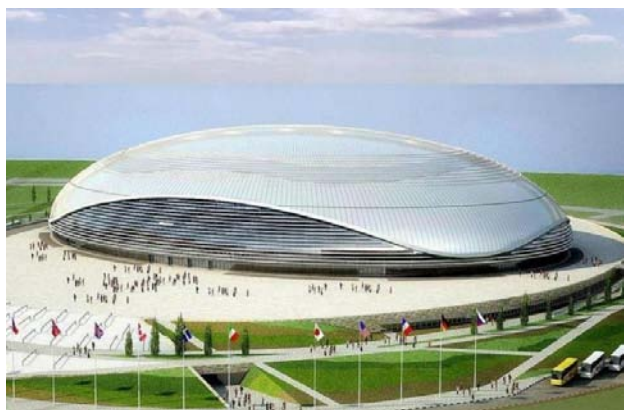
*Фотография 3.9. а) Загорская ГАЭС; б) Покрытие Большой спортивной арены Лужников;
в) Монумент 300-летия Российского флота;
г) Подземная автостоянка ТРК «Манежная площадь»;
д) Спортивно-оздоровительный комплекс «Аквадром»;
е) Ледовый дворец «Мегаспорт» на Ходынке.*



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.10. а) Спортивный комплекс «Москвич»;
 б) Крытый бассейн санатория «Искра» (Сочи); в) Большая ледовая арена;
 г) Футбольный стадион «Зенит» в г. Санкт-Петербурге к Чемпионату мира по футболу
 2018 года; д) Футбольный стадион в г. Самара к Чемпионату мира по футболу 2018 года;
 е) Футбольный стадион г. Волгограде к Чемпионату мира по футболу 2018 года.



а)



б)

Фотография 3.11. а) Футбольный стадион г. Ростов-на-Дону к Чемпионату мира по футболу 2018 года; б) Футбольный стадион г. Екатеринбург к Чемпионату мира по футболу 2018 года.

в городах: Волгоград (Фотография 3.10д), Самара (Фотография 3.10е), Нижний Новгород, Ростове-на-Дону (Фотография 3.11а), Екатеринбург (Фотография 3.11б) и Сочи (рисунки 3.1, 3.2);

- многофункциональные высотные комплексы, в том числе Московский международный деловой центр «Москва-Сити» (ММДЦ «Москва-Сити»), «Поклонная», «Профсоюзная», «Ленинградская», «Сетунь», «Обручева», «Нахимовский» и прочие объекты, расположенные в городах Москва, Волгоград, Омск, Владивосток, Краснодар, Киев, Астана;
- многоблочные торгово-развлекательные центры; многоэтажные панельные блок-секции и монолитные здания, школы и поликлиники;
- транспаранты-перетяжки с учетом начального натяжения канатов и действия ветровых нагрузок и многие др.;
- надземные и подземные трубопроводы теплосетей, магистральные
- нефтепроводы и газопроводы, нефтехимические и газовые трубопроводы и оборудование (среди последних комплексных и «прорывных» – трубопроводная система ГКС газопровода «Сахалин – Хабаровск – Владивосток»);

- ветроэнергетические установки различных типов и мощностей;
- наплавные конструкции и платформы по добыче нефти и газа на шельфе;
- сложные машиностроительные конструкции, машины и механизмы (аэрокосмические системы, транспортное, судостроение, энергомашиностроение, черная и цветная металлургия, бытовая техника и др.);
- среди решенных пионерных задач – НДС, динамика и прочность системы «НЭП – блок приводов – солнечные батареи» (НЭП – научно-энергетическая платформа) и подсистем международной космической станции (МКС) «Альфа» на стадиях выведения и орбитальной деятельности;
- различные био- и наноструктур (например, двойные линейные и замкнутые спирали ДНК).

Решены сложные, в том числе рекордные по размерности (до 200 миллионов неизвестных) трехмерные стационарные и нестационарные задачи строительной аэродинамики для определения средних и пульсационных составляющих ветровых нагрузок, ветровых нагрузок на фасадные / ограждающие конструкции, пешеходной комфортности ряда уникальных объектов [34,35]:



Рисунок 3.1. Общие виды полных КЭ-моделей (ANSYS) футбольных стадионов к ЧМ-2018 в гг. Санкт-Петербург («Зенит»), Самара, Волгоград, Нижний Новгород, Ростов-на-Дону, Екатеринбург.

- высотные здания, сооружения и комплексы (ММДЦ «Москва-Сити», «Газойл-Сити» (Фотография 3.12а), «Зодиак» (Фотография 3.12б), «Скай-форт» (Фотография 3.12в),

«Дирижабль» (Фотография 3.12г), «Рублевские огни» (Фотография 3.12д), «Обручева» (Фотография 3.12е), «Нахимовский», «Пушкино», НИУ МГСУ и Останкинская теле-

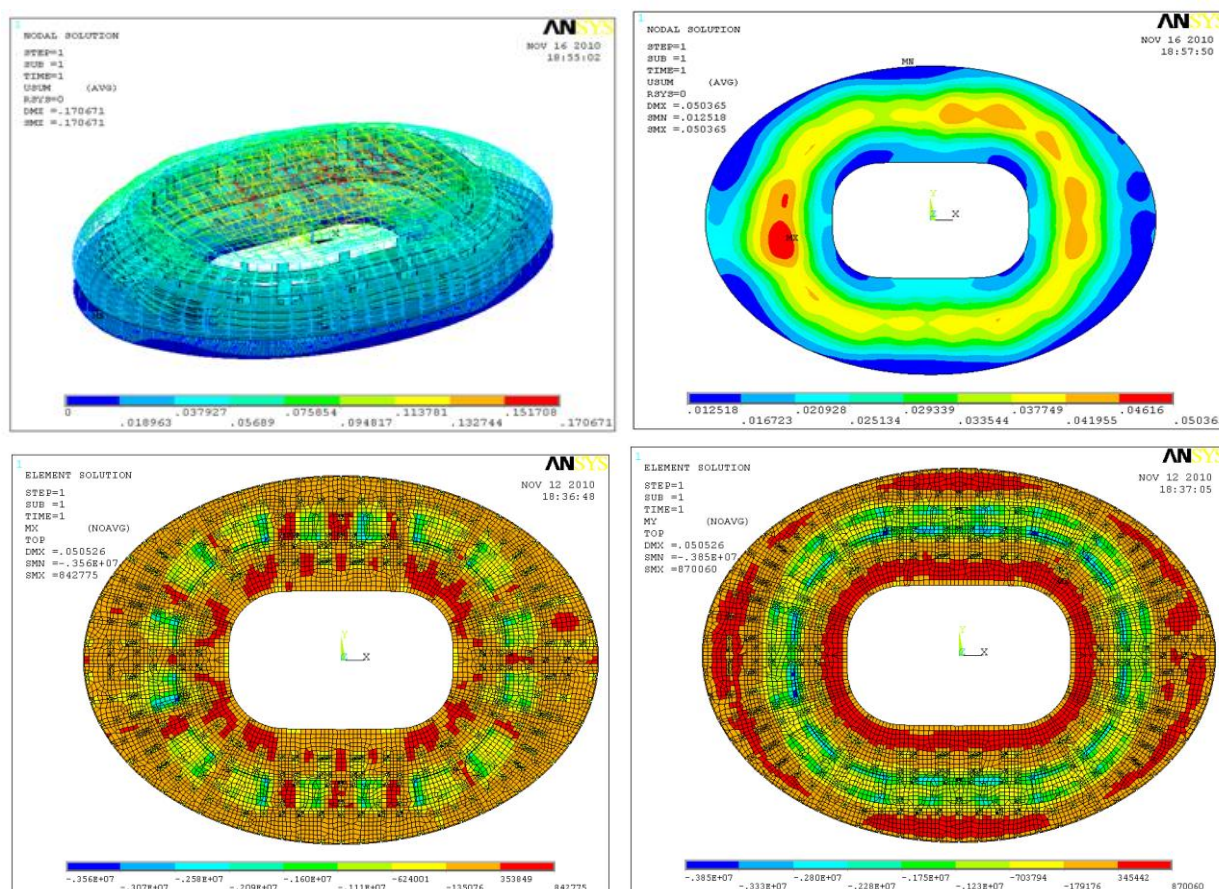


Рисунок 3.2. Результаты расчета олимпийского ледового дворца «Большой» в Сочи в ПК ANSYS.

- башня в г. Москве, «Акварин» во г. Владивостоке (Фотография 3.13а), объекты в городах Санкт-Петербург, Киев, Астана и др.);
- большепролетные здания и сооружения (стадион «Москвич» в г. Москве, стадион «Зенит» в г. Санкт-Петербурге (Фотография 3.13б), железнодорожный вокзал в г. Адлере (Фотография 3.13в), трамплинный комплекс для Зимних Олимпийских игр 2014 года в г. Сочи-2014 и др.) [33];
 - монументы и памятники (на Поклонной горе (Фотография 3.13г), «Покорителям космоса» (Фотография 3.13д) и «Рабочий и Колхозница» на ВДНХ (Фотография 3.13е) и др.);
 - комплекс основных сооружений АЭС с ВВЭР (реакторные отделения, машинные залы, испарительные градирни и пр.) при ураганном ветре и смерче (торнадо).

Для основных сооружений АЭС различного типа (ВВЭР, РБМК (реактор большой мощности канальный – серия энергетических ядерных реакторов, разработанных в СССР) и БН (энергетический реактор на быстрых нейтронах) решены задачи уточненного численного моделирования взрывных ударных волн и падения самолета.

4. ОБСЛЕДОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ, ЭКСПЕРТИЗА. НАПРАВЛЕНИЯ СОТРУДНИЧЕСТВА, ЗАКАЗЧИКИ, ВЫПОЛНЕННЫЕ РАБОТЫ

Силами сотрудников НИЦ СтаДиО и привлеченных специалистов выполнены работы по обследованию технического состояния и расчетной оценке фактической несущей способности ряда зданий, сооружений и ком-



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.12. а) ЖК «Газойл-Сити»; б) ЖК «Зодиак»; в) ЖК «Скай-форт»; г) ЖК «Дирижабль»; д) ЖК «Рублевские огни»; е) ЖК «Обручева».

плексов. На современном научно-техническом уровне исследованы состояние грунтов, фундаментов и несущих конструкций, разработаны проектные решения.

Работы велись на сооружениях Курской и Смоленской АЭС, Камской ГЭС, Зейской ГЭС и Загорской ГАЭС, в павильоне №75 ВДНХ (Фотография 4.1а), в питьевой галере-



а)



б)



в)



г)



д)



е)

Фотография 3.13. а) ЖК «Аквамарин» во г. Владивостоке; б) Стадион «Зенит» в г. Санкт-Петербурге; в) Железнодорожный вокзал в г. Адлере; г) Монумент на Поклонной горе; д) Памятник «Покорителям космоса»; е) Памятник «Рабочий и колхозница».

рее г. Ессентуки, на центральном рынке г. Ангарска (Фотография 4.1б), в гипермаркете г. Волжский, на берегозащитных сооружениях г. Сочи, на многочисленных вновь возведенных и эксплуатируемых зданиях г. Москвы (в том числе, Башня «Эволюция» ММДЦ «Москва-Сити» (Фотография 4.1в; рисунок 4.1)) и др. объектах [5].

Также проводились комплексные исследования состояния технологического оборудования и трубопроводов, машин и механизмов. Давался расчетный прогноз реального остаточного ресурса исследованного оборудования.

Благодаря своей научной репутации НИЦ СтаДиО активно привлекается для работ по верификации и аттестации программных продуктов Федеральной службой по экологическому, технологическому и атомному надзору (в настоящее время НТЦ ЯРБ Ростехнадзора; ранее – Госатомнадзором РФ, Госгортехнадзором РФ, Госэнергонадзором РФ), Госстроем РФ, Министерством Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, РААСН и другими организациями. Мы также участвуем в экспертизе научно-исследовательских работ, обеспечивающих проектирование, мониторинг [11,19-21,26,28-31] и расчеты объектов повышенной опасности.

Наша организация участвовала в разработке нормативно-методических материалов (принятые в Нормах ПНАЭ Г-7-002–86 методики уточненного расчета элементов трубопроводов, «Руководство по обоснованию прочности трубопроводов АЭС», РТМ 38.001–94 «Указания по расчету на прочность и вибрацию технологических стальных трубопроводов», «Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий» и др.).

Совместно с НОЦ КМ НИУ МГСУ выполнена и успешно прошла экспертизу в системе РААСН наукоемкая верификация программных комплексов (ПК) ANSYS Mechanical и SIMULIA ABAQUS для задач строительного профиля. НИЦ СтаДиО принял также активное участие в верификации MIDAS Civil,

MIDAS GTS и ЛИРА-САПР. Проводится верификация программных комплексов DIANA и SCAD. В рамках судебных строительно-технических экспертиз НИЦ СтаДиО выступала как головная организация при анализе причин и механизмов обрушения покрытий СОК «Трансвааль-парк» (Фотография 4.1г; рисунок 4.2)) и здания Басманного рынка (Фотография 4.1д; рисунок 4.3)), при исследовании причин локального разрушения оси оттяжки ККЦ «Крылатское» (Фотография 4.1е; рисунок 4.4) [4,5,6,32]. Эти работы велись с использованием различных программных комплексов – СТАДИО, а также ANSYS, CFX, ABAQUS, ЛИРА, SCAD, Robot Millennium.

5. ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ УСЛУГИ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ПОСТАВКА И СОПРОВОЖДЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ САПР И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Постоянно наращиваемые собственные вычислительные ресурсы НИЦ СтаДиО (современный парк компьютеров с развитой периферией, объединенных в мощную сеть) и возможности дистанционного доступа к ним позволяет выполнять сложные расчетные исследования, пре- и постпроцессорную обработку данных и оказывать информационно-вычислительные услуги заинтересованным организациям, исследователям-диссертантам и студентам.

НИЦ СтаДиО имеет успешный опыт и осуществляет проектирование, монтаж, наладку и сопровождение программно-технического комплекса САПР и вычислительной механики на базе вычислительных сетей (различной степени сложности) для проектно-конструкторских, исследовательских и образовательных организаций («Моспроект-2», «Моспроект-4», МО «Атомэнергопроект», «Мосэнергопроект», Загорская ГАЭС, ИПМ им. Келдыша РАН и др., для НИУ МГСУ – весь мировой «бренд» вычислительной ме-



а)



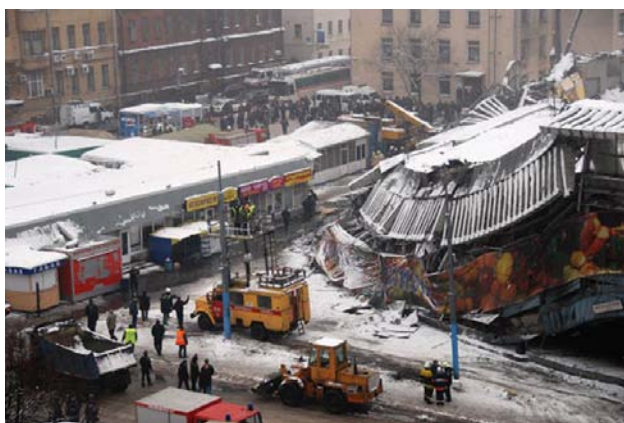
б)



в)



г)



д)



е)

*Фотография 4.1. а) Павильон №75 ВДНХ; б) Центральный рынок г. Ангарска;
в) Башня «Эволюция»; г) Обрушение покрытия СОК «Трансвааль-парк»;
д) Обрушение здания Басманного рынка;
е) Крытый конькобежный центр (ККЦ) «Крылатское».*

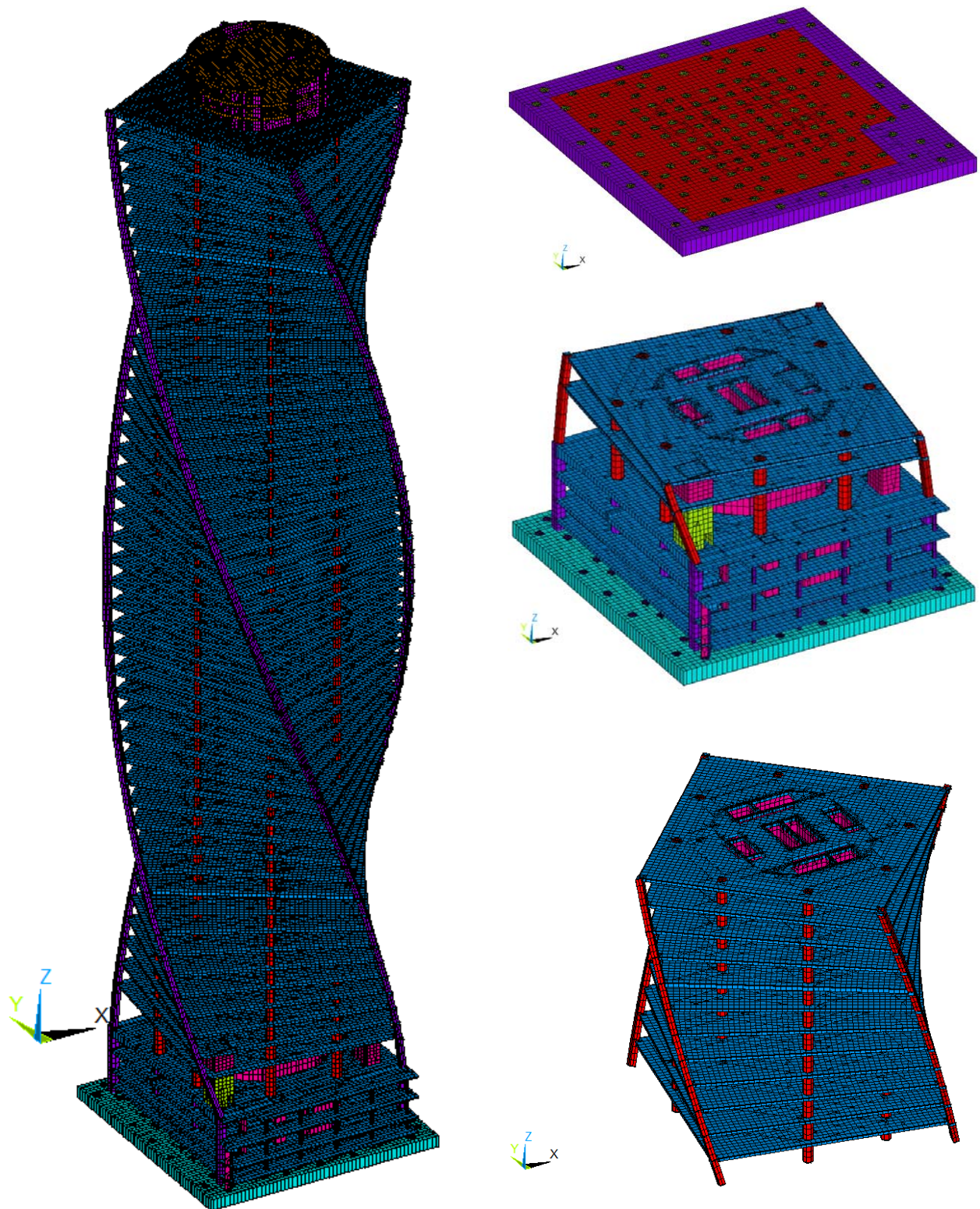


Рисунок 4.1. Фрагменты конечноэлементных моделей Башни «Эволюция» ММДЦ "Москва-Сити".

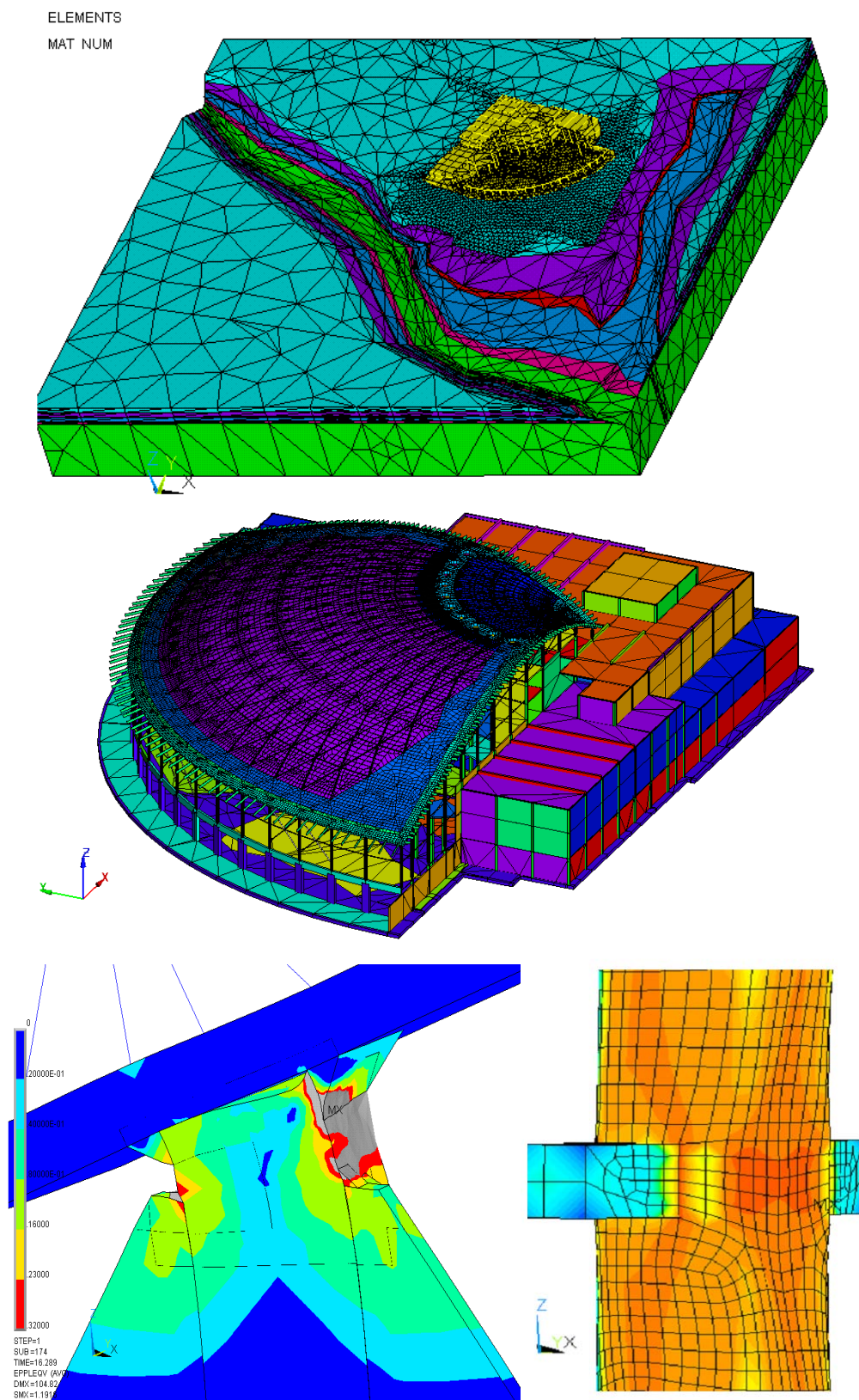


Рисунок 4.2. СОК «Трансвааль-парк». Экспертные конечноэлементные модели системы «основание-каркас-покрытие», НДС критических узлов/фрагментов (ПК СТАДИО, Robot, ANSYS, ABAQUS).

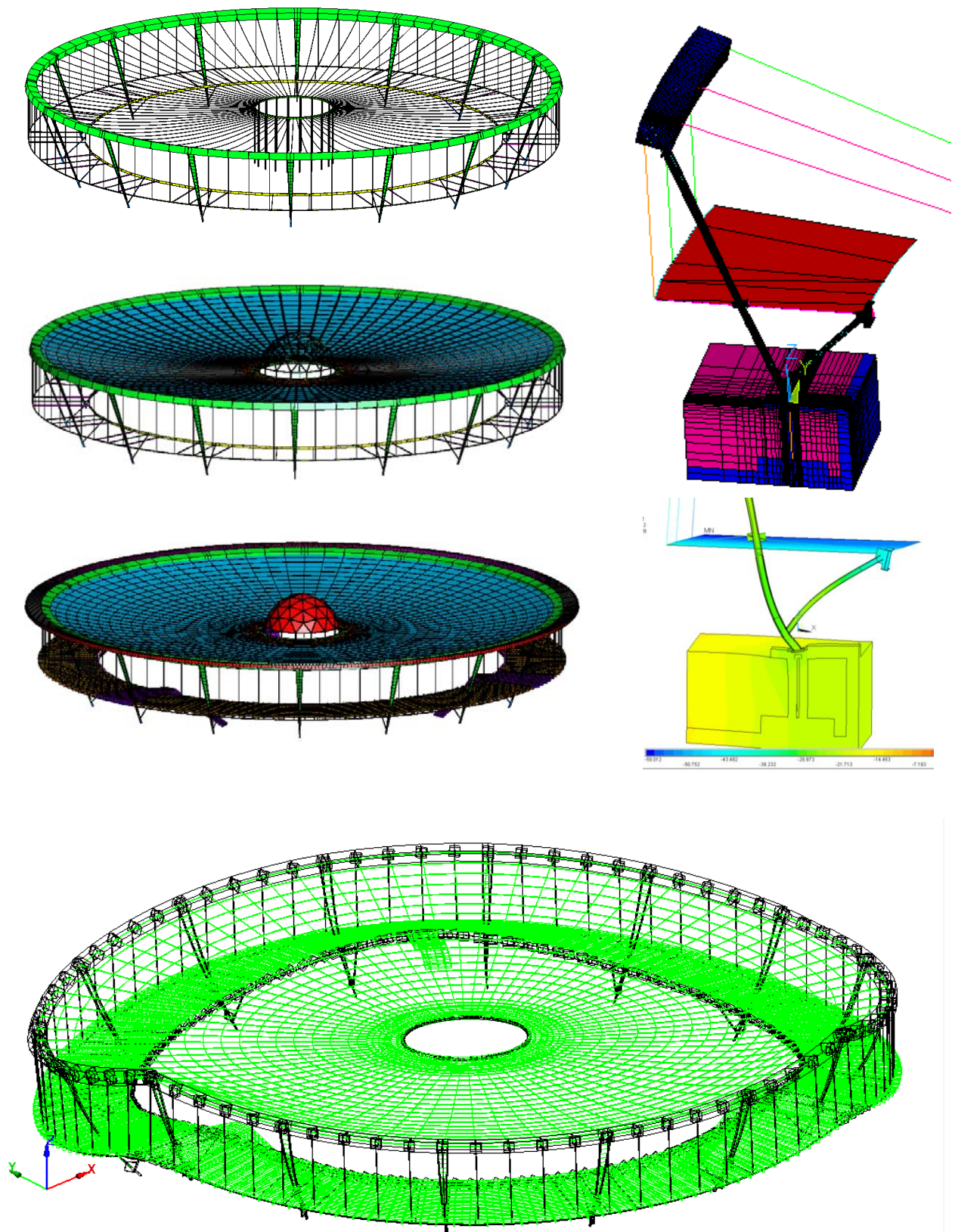


Рисунок 4.3. Здание Басманного рынка. КЭ-модели для стадий возведения (ПК СТАДИО) и трехмерный нелинейный анализ НДС в критических фрагментах (ПК ANSYS).

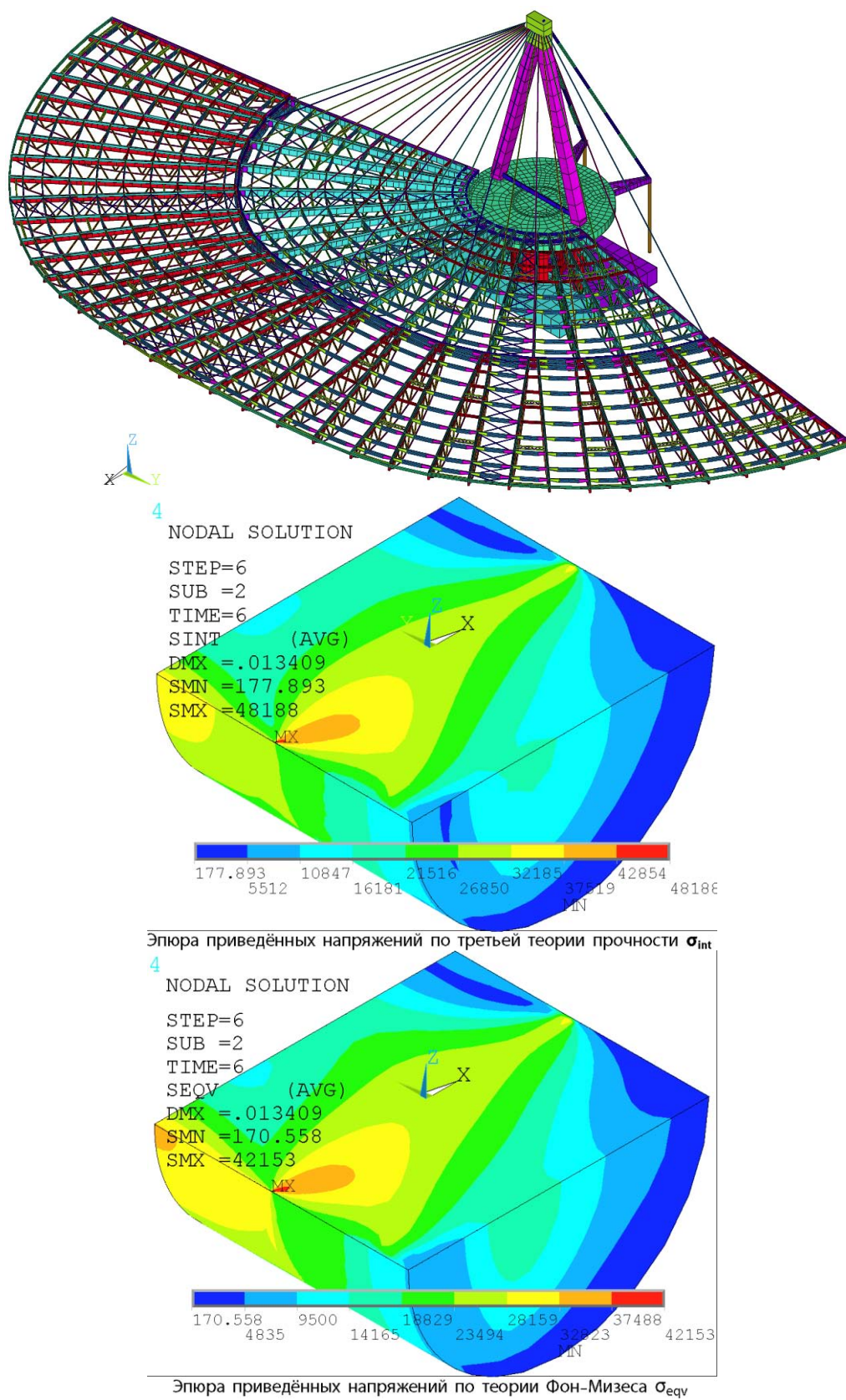


Рисунок 4.4. ККЦ «Крылатское». Общая конечноэлементная модель здания и трехмерный анализ напряжений в «пальце» оттяжки (ПК ANSYS, СТАДИО).

ханики на кластере и упакованный по последнему слову учебный класс – в рамках Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ НИУ МГСУ)).

6. КУРСЫ ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

По запросам заинтересованных организаций и лиц проводятся тематические курсы лекций и практических занятий по основным направлениям деятельности и компетенции фирмы. Среди тем, пользующихся наибольшим успехом:

- Программные системы, реализующие численные методы расчета инженерных конструкций. Обоснованный выбор под конкретные задачи и объекты;
- Автоматизированные расчеты на статическую и циклическую прочность, на сейсмические, вибрационные и динамические воздействия трубопроводных систем различных отраслей в соответствии с российскими нормативными требованиями. Реализация в программном комплексе АСТ-РА-НОВА;
- Верификация-экспертиза-аттестация программных средств численного моделирования задач механики. Опыт атомной (Гостатомнадзор – Ростехнадзор) и общестроительной (РААСН) отраслей;
- Опыт расчетного обоснования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости уникальных зданий, сооружений и комплексов (проектирование, мониторинг и экспертиза);
- Численное моделирование ветровых воздействий в зонах высотной и плотной застройки как реальная альтернатива-дополнение нормативно регламентированным испытаниям в аэродинамической трубе. Опыт и перспективы;
- Расчеты зданий и сооружений на устойчивость против прогрессирующего обру-

шения [22]. Возможные подходы, методики и программные средства.

Возможны «территориальные» варианты проведения курсов: у Заказчика (выездные), в НИЦ СтаДиО (до 5 человек) и в НОЦ КМ НИУ МГСУ (до 25 человек). Внедрена и хорошо зарекомендовала себя дистанционная интерактивная форма обучения.

7. НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ, КОНФЕРЕНЦИИ, ДИССЕРТАЦИИ И ПУБЛИКАЦИИ

Совместно с НИУ МГСУ (НОЦ КМ) регулярно проводится пользующийся популярностью в профессиональных кругах семинар «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций, зданий и сооружений», совместно с CADFEM CIS – ежегодные конференции по САПР ПГС, раз в год под эгидой РААСН и НИУ МГСУ – международная конференция «Золотовские чтения», раз в два года под эгидой РААСН – международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования зданий и сооружений» (Нижний Новгород, Пермь, Новочеркасск, Челябинск, Иркутск, Владивосток – в 2016 г.). Сотрудники НИЦ СтаДиО – активные участники «культовой» международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. BEM&FEM» (Санкт-Петербург, раз в два года, XXVI-я – в 2015 г.), постоянно действующих семинаров по расчетам зданий и сооружений (Москва, Центральный дом архитектора) и прочностному анализу оборудования и трубопроводов (Москва, НИКИЭТ, ВНИИАМ, ЦНИИТМАШ). Наши сотрудники являются членами диссертационных советов (НИУ МГСУ – по специальности «Математическое моделирование, численные методы и программные комплексы», и НИУ МЭИ – «Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры»), секций Совета НТЦ ЯРБ Ростехнадзора по аттестации ПС в атомной энергетике, научных советов РААСН «Программные ком-

плексы в строительстве и архитектуре» и «Сейсмостойкое строительство» и редколлегий ряда журналов (в частности, «ВАКовских» International Journal. for Computational Civil and Structural Engineering, ACADEMIA. Архитектура и строительство). Основные результаты научно-исследовательских работ (НИР) и разработок регулярно публикуются в научных и практических изданиях, на международных и российских конференциях и семинарах. На базе НИЦ СтаДиО организованы преддипломная практика и дипломные работы выпускников, факультативные курсы лекций и подготовка диссертаций для аспирантов и докторантов НИУ МГСУ, НИУ МЭИ, Российского университета дружбы народов (РУДН) и многих других университетов. Под руководством сотрудников НИЦ СтаДиО успешно защищено 8 кандидатских и 1 докторская диссертация, проведено оппонирование 28-и кандидатских и 7-и докторских работ. Опубликовано более 550 статей в российских и зарубежных научных изданиях с высоким уровнем цитируемости. По запросам заинтересованных организаций и лиц проводятся тематические курсы лекций и практических занятий по основным направлениям деятельности фирмы. На сайте фирмы (www.stadyo.ru) организован форум пользователей ПК и заказчиков исследований, оперативно анонсируются и освещаются новости, публикуются статьи, ведется раздел «Вопросы-ответы».

8. РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК

Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН) – федеральный научный центр, осуществляющий координацию фундаментальных исследований в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук. Среди членов РААСН – два сотрудника НИЦ СтаДиО и НОЦ КМ МГСУ – член-корреспондент РААСН П.А. Акимов (с 2014 г. – Главный ученый секретарь РААСН)

и член-корреспондент А.М. Белостоцкий (член Ученого совета РААСН).

В составе РААСН организованы и функционируют Научные советы по ряду актуальных направлений. Среди наиболее деятельных и продуктивных – «Программные средства в строительстве и архитектуре» (председатель – советник РААСН В.Н. Сидоров (Московский архитектурный институт (государственная академия) – МАРХИ), ученые секретари – П.А. Акимов, советник РААСН Т.Б. Кайтуков). На первом заседании Научного совета в 2006 году с генеральным докладом об основных направлениях деятельности и научных проблемах выступил А.М. Белостоцкий.

В задачи этого Научного совета традиционно входит обсуждение и решение задач, а также выработка рекомендаций по актуальным вопросам научно-исследовательской, проектно-конструкторской, образовательной деятельности в области компьютерного моделирования зданий и сооружений. Научным советом рассматриваются также вопросы экспертизы расчетов зданий и сооружений с использованием программных комплексов (квалификационная проверка и аттестация специалистов; экспертиза и верификация программных средств; экспертиза расчетов ответственных зданий и сооружений).

Одной из основных задач почти сразу после его основания в 2005 году стало проведение верификации программных комплексов, используемых российскими проектными, конструкторскими и научно-исследовательскими организациями для выполнения расчетов с целью оценки напряженно-деформированного состояния, прочности и живучести строительных конструкций и сооружений. К 2016 году наукоемкую процедуру верификации, в которой активную роль играло НИЦ СтаДиО, успешно прошли (с выдачей Свидетельства и Приложения) шесть программных комплексов: MicroFe, ANSYS Mechanical, MIDAS Civil, MIDAS GTS, ABAQUS, ЛираСАПР. В процессе верификации – еще несколько программных комплексов.

8. НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УНИКАЛЬНЫХ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И КОМПЛЕКСОВ

ИМ. А.Б. ЗОЛотова (НИУ МГСУ)

В НИУ МГСУ при деятельном участии НИЦ СтаДиО сформирован и успешно функционирует общеуниверситетский научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) им. проф. А.Б. Золотова – официальное открытие центра было приурочено к проведению международной научно-практической конференции 12 октября 2008 года. Научный руководитель НОЦ КМ – А.М. Белостоцкий. НОЦ КМ оснащен уникальным и «со вкусом» подобранным передовым лицензионным программным обеспечением численного моделирования температурного и напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости объектов строительства (поставщик-интегратор – НИЦ СтаДиО) [10]:

- «тяжелый» универсальный коммерческий конечноэлементный «софт» для решения наукоемких большеразмерных задач (тройка мировых лидеров – ANSYS Mechanical, MSC NASTRAN, ABAQUS);
- Программные средства, «заточенные» под строительные задачи и широко используемые в отечественной и мировой практике расчетного обоснования при проектировании – ЛИРА, SCAD, MicroFE и STARK, Robot Structure и ANSYS/CivilFEM;
- «открытая» для магистрантов, аспирантов и докторантов НИУ МГСУ исследовательская конечно-суперэлементная система моделирования статики и динамики комбинированных пространственных систем (СТАДИО);
- моделирование нелинейных грунтовых задач в статической и динамической постановке (PLAXIS);
- анализ быстропротекающих высоконелинейных динамических процессов (LS-

DYNA, ANSYS AutoDYN, ABAQUS Explicit – например, при экспертизе обрушения зданий и сооружений, для расчетов на прогрессирующее обрушение) [12,27];

- комплексный прочностной анализ трубопроводных систем атомной и тепловой энергетики, нефтехимии и нефтепереработки, теплосетей и магистральных нефте- и газопроводов (АСТРА-НОВА).

Также поставлена и освоена мощная система численного моделирования трехмерных задач гидро-газодинамики (CFD), весьма актуальная для расчетного анализа ветровых потоков и нагрузок на высотные и большепролетные здания, снегопереноса и снегоотложения, взрывных и экологических задач – ANSYS/CFD (CFX + Fluent).

Перечисленные программные средства заявлены в комплектации, отвечающей задачам НОЦ КМ НИУ МГСУ: «ограниченной» учебной (academic teaching) – классы на 25–50 мест; неограниченной исследовательской (academic research); полной «коммерческой». Передовой «софт» эксплуатируется на передовом «харде» с кластерной организацией масштабируемой (наращиваемой) мощности. Освоение возможностей, обеспечиваемых кластерной организацией доступа и вычислений (в том числе, с оптимизацией распараллеливания на ядрах-процессорах и на графических устройствах GPU [8]), позволяет эффективно решать задачи высокой размерности, особенно актуальные при численном моделировании статических и динамических, линейных и нелинейных, несвязанных и связанных задач механики деформируемых конструкций и сооружений, жидкости и газа.

Предусмотрен также «дистанционный» доступ к кластеру всем ведущими кафедрами и научным подразделениям НИУ МГСУ.

НОЦ КМ совместно с НИЦ СтаДиО способствует решению взаимосвязанных задач, дающих синергетический эффект:

- формирование новых курсов и обучение студентов профильных специальностей на программных средствах – мировых лиде-

рах – и своевременное вовлечение их в исследовательскую работу;

- диссертационные исследования аспирантов и докторантов, участие профессорско-преподавательского состава в НИР;
- квалифицированное и оперативное выполнение наиболее сложных «коммерческих» наукоемких заказов по профилю центра (совместно с НИЦ СтаДиО).

НОЦ КМ в кооперации с НИЦ СтаДиО обоснованно является экспертным и консультативным центром при выполнении альтернативных расчетов, строительно-технических экспертиз и верификации программных средств, проводит курсы обучения и повышения квалификации по программным средствам и тематическим направлениям (численные методы расчета, моделирование высотных и большепролетных зданий, сооружений гидротехники и атомной энергетики, оборудования и трубопроводов различных отраслей), адресную подготовку выпускников по заявкам ведущих российских фирм-работодателей.

Сотрудники НОЦ КМ прошли стажировку в университетах, научно-производственных и проектно-конструкторских фирмах России (НИУ МЭИ, НИУ МГСУ, НИЦ СтаДиО, ГК Техстрой), Польши (Варшавский, Краковский и Вроцлавский политехнические университеты, RoboBat), Германии (Технический университет Берлина, Бохума и др.), Франции (Высшая инженерная школа, Париж) и США (ABAQUS), имеющих опыт организации информационно-вычислительных лабораторий и центров математического моделирования, а также решения актуальных вопросов компьютерного моделирования в строительстве и других высокотехнологичных отраслях.

9. КАФЕДРЫ, ЛАБОРАТОРИИ И ЦЕНТРЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ

НИЦ СтаДиО имеет также опыт содействия в организации и наполнении содержательным смыслом востребованных практикой кафедр, лабораторий и центров компьютерного моделирования в ведущих российских технических университетах.

Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), известный центр российского инженерного образования и науки. Многолетняя совместная с кафедрой строительных конструкций и вычислительной механики (заведующий кафедрой – советник РААСН, профессор, доктор технических наук Г.Г. Кашеварова; А.М. Белостоцкий – профессор кафедры) образовательная программа для магистров («Безопасность зданий и сооружений»), стажировки, научное руководство и оппонирование аспирантов. Оснащение включает современные программные комплексы (ANSYS, SCAD, ЛИРА-САПР, АСТРА-НОВА, Flow Vision и др.), в освоении и верификации которых кафедра принимала активное участие.

Томск, Томский архитектурно-строительный университет (ТГАСУ), один из признанных центров российской строительной науки. После проведенных мастер-классов и большой подготовительной работы сформирован и успешно стартовал 02 октября 2015 года Научно-образовательный центр компьютерного моделирования строительных конструкций и систем ТГАСУ. Научный руководитель НОЦ КМСКиС – член-корреспондент РААСН А.М. Белостоцкий, среди партнеров – НИЦ СтаДиО и НОЦ КМ НИУ МГСУ.

Владивосток, Дальневосточный федеральный университет, Инженерная Школа (остров Русский). Новый «с иголочки» и по последнему слову техники университет (кампус открыт после проведения сессии АТЭС в 2012 году), с большими перспективами и еще свободный от многих характерных и саднящих болячек российских вузов. После проведенных мастер-классов и лекций

члена-корреспондента РААСН А.М. Белостоцкого для студентов, аспирантов и докторантов, профессоров и практикующих инженеров Владивостока, вызвавших неподдельный интерес, достигнуто соглашение об оперативной организации лаборатории моделирования сложных инженерных систем в составе МНОЦ «Дальневосточный Арктический инжиниринговый центр» в рамках реализации масштабного проекта «Арктика» в ДВФУ. Лаборатория, в частности, станет одной из базовых в научно-методическом и расчетно-теоретическом сопровождении существующих и перспективных проектов на шельфе арктических и субарктических морей.

10. ЛИЦЕНЗИИ И ГАРАНТИИ КАЧЕСТВА

В настоящее время НИЦ СтаДиО является аккредитованной научной организацией (Свидетельство Минпромнауки РФ № 4920 от 30.07.2002), членом саморегулируемой организации НП МО «Спецпроект» и имеет допуск к работам, которые оказывают влияние на безопасность объектов капитального строительства (Свидетельство СРО НП МО «Спецпроект» №П-76-7712089876-21042010-113 от 21 апреля 2010 года), имеет государственную лицензию Госстроя РФ на осуществление строительной деятельности по всем перечисленным направлениям (ГС-1-50-02-27-0-7712089876-019619-1 от 26 июня 2003 года), разрешение МинЧС РФ на выполнение экспертизы деклараций безопасности энергетических сооружений. Качество и конкурентоспособность наших программных продуктов и результатов исследований обеспечивается:

- детальной верификацией методик, алгоритмов и программ (СТАДИО, АСТРА-НОВА) на широком спектре тестовых и практических задач, их экспертизой и аттестацией в Госатомнадзоре РФ, Госстрое РФ и РААСН (для объектов повышенной опасности), «отслеживанием» текущих изменений в нормативно-методической базе;
- развитым сервисным обеспечением пользователя, включая глубокую многоэтапную диагностику ошибок в исходных данных и информационную диагностику, пре- и постпроцессорную табличную и графическую обработку данных, использование и пополнение встроенных отраслевых баз данных и т.п.;
- использованием лицензионно «чистого» базового программного обеспечения;
- опытом разработки, модификации и внедрения упомянутых программ расчета, проектирования, мониторинга и экспертизы сложных объектов в ведущих организациях;
- многогранным собственным опытом расчетно-теоретических исследований пространственного температурного и напряженно-деформированного состояний и прочности трубопроводных систем и их элементов, оборудования, машин и механизмов, строительных конструкций и систем «основание-сооружение» при комплексном воздействии статических, температурных и динамических (ветровых, вибрационных, сейсмических, ударно-волновых, аварийных и др.) нагрузок;
- постоянно проводимым обучением и аттестацией специалистов НИЦ СтаДиО;
- многоуровневым действенным контролем качества продукции на этапах постановки задач, их решения и интерпретации результатов;
- возможностью распространения и квалифицированной технической поддержки программного обеспечения через развитую региональную сеть авторизованных дистрибьюторов НИЦ СтаДиО (Софтинжиниринг Менеджмент – CADFEM CIS – EMT R и НЕОЛАНТ – ведущие поставщики профессиональных систем CAD/CAE на постсоветском рынке, подробнее на сайтах www.cadfem-cis.ru и www.neolant.ru);

- возможностью распространения программного обеспечения также и через региональные сети ряда дилеров – известных российских поставщиков профессиональных систем CAD/CAE.

11. ВЗГЛЯД НА ПЕРСПЕКТИВУ

История НИЦ СтаДиО продолжается, и новые ее страницы пишутся уже сегодня... Чего бы хотелось из реализуемого в НИЦ СтаДиО и вокруг:

- свободного конкурентного развития работ и исследований по «традиционным» направлениям и роста спроса на них без всяких искусственных гальванизирующих приемов («импортозамещение»,...)
- новых интересных наукоемких задач с горизонтом планирования в несколько лет, хотя бы, и без давления изживших себя монопольных неогосударственных образований;
- укрепления и обоснованного роста коллектива, выдвижения из его рядов (варяги тут не живут) лидеров, готовых взять на себя ответственность за НИЦ СтаДиО в новом 25-лети;
- обретения и затверждения в обществе понимания, что сила его не в лозунгах, сиюминутных псевдодостижениях и подачках от государства, а в саморазвитии, требующем каждодневного труда в условиях свободной конкуренции идей и товаров, в том числе и прежде всего, наукоемких;
- то же, применительно к системе высшего образования – уход от крепнущей сейчас нефеодалской системы глобальной и локальных «вертикалей власти», узурпировавших право на «истину в последней инстанции» и выбивающих все более маразматические показатели с бесправных профессоров, к единственно возможной эффективной, принятой во всем цивилизованном академическом

мире; во главе всего должен быть тот самый признанный профессор с его коллективом, замыслами и интересами, все остальные – должны способствовать их выполнению или уйти;

На нашем сайте www.stadyo.ru Вы найдете ответы на многие вопросы (как учит гносеология, еще больше вопросов возникнет) и, вполне вероятно, решите обратиться к нам за советом, заказать сложную НИР/разработку, приобрести наши непревзойденные программные продукты, пройти курс повышения квалификации и/или выполнить диссертационную работу. Мы готовы стать Вашими проводниками в сложном и опасном, но увлекательном и красивом мире численного моделирования инженерных и наукоемких задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин: Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.07. – М.: МГУП, 1998. – 367 с.
2. **Белостоцкий А.М.** Прогнозное математическое моделирование состояния и техногенной безопасности ответственности объектов и комплексов мегаполиса. // Вестник МГСУ, 2006, №3, с. 20-61.
3. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И.** Некоторые аспекты верификации программных средств численного моделирования конструкций и сооружений. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 4, Issue 2, 2008, pp. 30-32.
4. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование в экспертных исследованиях причин обрушения и локального разрушения конструкций большепролетных

- зданий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 4, Issue 2, 2008, pp. 26-28
5. **Белостоцкий А.М., Шаблинский Г.Э., Мсхалая И.Ж., Козырев О.А., Зубков Д.А.** Конечноэлементный анализ динамических характеристик зданий и сооружений. Сравнение с данными натурных измерений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 4, Issue 2, 2008, pp. 30-33.
6. **Белостоцкий А.М., Орехов В.В., Каличава Д.К.** Substructure modeling of «soil base – structure» behavior of multifunctional building. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 4, Issue 2, 2008, pp.23-25.
7. **Белостоцкий А.М., Белый М.В.** FE / substructure algorithms of static and dynamic analysis of 3D nonlinear large systems. Realization in program package STADYO and experience of investigation. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 4, Issue 2, 2008, pp. 25-28.
8. **Белостоцкий А.М., Васильев С.Л., Сидоров А.В.** Параллельные вычисления в решении больших размерных задач. Освоение возможностей лидирующих программных комплексов и собственные разработки. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 65-67.
9. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Аул А.А., Афанасьева И.Н., Нагибович А.И.** Расчетное обоснование НДС, прочности и устойчивости уникальных зданий и сооружений. Опыт 2009-2010 годов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 73-75.
10. **Белостоцкий А.М., Кайтуков Т.Б.** НОЦ компьютерного моделирования им. А.Б. Золотова (МГСУ). Основные направления и результаты деятельности в 2008-2010 годах. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 75-78.
11. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.** Математическое моделирование как основа мониторинга зданий и сооружений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 78-80.
12. **Белостоцкий А.М., Павлов А.С.** Расчет конструкций большепролетных зданий с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностей. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 80-87.
13. **Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю.** Реализация методов динамического синтеза подконструкций и субмоделирования в программных комплексах СТАДИО и АСТРА-НОВА. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 87-91.
14. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кашеварова Г.Г.** Математическое моделирование техногенной безопасности ответственных строительных объектов мегаполисов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 45-65
15. **Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л.** Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 1, 2011, pp. 76-83.
16. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И.** Нелинейное конечноэлементное моделирование устойчивости берегозащитных

- сооружений Имеретинской низменности с учетом фактических и прогнозируемых деформаций берегового откоса. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 2, 2011, pp. 19-27.
17. **Белостоцкий А.М., Аул А.А., Нагибович А.И.** Расчетно-экспериментальное моделирование вибрационного состояния несущих конструкций многоэтажных зданий, вызванного движением поездов метрополитена. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 40-48.
18. **Белостоцкий А.М., Аул А.А., Унгаров Р.Е., Шевинский П.Е.** Конечноеэлементное моделирование НДС подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 48-54.
19. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.** Адаптируемые конечноэлементные модели основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 20-29.
20. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Нагибович А.И., Петряшев Н.О., Петряшев С.О.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 29-44.
21. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Аул А.А., Нагибович А.И.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 44-55.
22. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование в экспертизах причин локального разрушения и прогрессирующего обрушения конструкций большепролетных зданий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 54-62.
23. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Аул А.А., Нагибович А.И., Островский К.И.** Численное моделирование нагрузок и воздействий, расчетное обоснование НДС, прочности и устойчивости конструкций, зданий и сооружений. Опыт 2010 – 2012 гг. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 42-47.
24. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Афанасьева И.Н., Котов Ф.М., Вершинин В.В., Щербина С.В., Петряшев С.О., Петряшев Н.О.** Computational simulation of external extreme impacts on NPP constructions. Developments and investigations. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 23-34.
25. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Вершинин В.В., Щербина С.В.** Dynamic substructures synthesis methods for NPP systems «Foundation – Structure – Equipment – Pipelines» analysis. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 15-22.
26. **Белостоцкий А.М., Новиков П.И.** Идентификация действительных инерционно-жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и соору-

- жений. Состояние проблемы и пути решения. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 107-118.
27. **Белостоцкий А.М., Павлов А.С.** Комплексное конечноэлементное моделирование НДС и устойчивости сетчатой оболочки покрытия большепролетного сооружения с эластомерными опорами. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Volume 10, Issue 3, 2014.
 28. **Белостоцкий А.М., Новиков П.И.** Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Часть 1: Основы расчетно-экспериментальной методики. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Volume 10, Issue 3, 2014.
 29. **Белостоцкий А.М., Новиков П.И.** Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Часть 2: Апробация расчетно-экспериментальной методики. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Volume 10, Issue 3, 2014.
 30. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Новиков П.И., Островский К.И.** Адаптивные конечноэлементные модели в основе систем мониторинга несущих конструкций уникальных зданий. // «Строительная механика и расчет сооружений» №6, 2014.
 31. **Белостоцкий А.М.** Математические модели в основе и составе систем мониторинга несущих конструкций высотных зданий. От профанации к реализации. // *Высотные здания*, №4, 2014, с. 102-107.
 32. **Белостоцкий А.М.** Обрушения большепролетных зданий. Численное моделирование в строительно-технических экспертизах. // *Высотные здания*, №3, 2014, с. 106-109.
 33. **Белостоцкий А.М.** Опыт расчетного обоснования состояния уникальных (высотных и большепролетных) зданий и сооружений. *Высотные здания*, №2, 2014, с. 106-109.
 34. **Белостоцкий А.М.** Современная методология численного моделирования нагрузок и воздействий, напряженно-деформированного состояния и устойчивости высотных зданий и комплексов. // *Высотные здания*, №1, 2014, с. 94-97.
 35. **Белостоцкий А.М.** Расчетно-экспериментальное моделирование вибрационного состояния высотных зданий, вызванного движением поездов метрополитена. *Высотные здания*, №4, 2015, с. 101-107.
 36. Комплекс программ СТАДИО. Версия СТАДИО'2015. Численное решение линейных и нелинейных задач теории поля, статики, устойчивости и оптимизации пространственных комбинированных систем. Верификационный отчет. – М.: НИЦ СтаДиО, 2015.
 37. Комплекс программ СТАДИО. Версия СТАДИО'2015. Численное решение линейных и нелинейных задач теории поля, статики, устойчивости, динамики, механики разрушения и оптимизации пространственных комбинированных систем. Инструкции по пользованию. – М.: НИЦ СтаДиО, 2015.
 38. Комплекс программ СТАДИО. Версия СТАДИО'2015. Численное решение линейных и нелинейных задач теории поля, статики, устойчивости, динамики, механики разрушения и оптимизации пространственных комбинированных систем. Общее описание комплекса. – М.: НИЦ СтаДиО, 2015.
 39. «Семейство» программных комплексов АСТРА-НОВА'2015. АСТРА-СТАДИО'2015. Уточненный расчет температурного и напряженно-

деформированного состояния (по пространственно-оболочечным и объемным схемам МКЭ), статической, циклической и сейсмической прочности деталей трубопроводов. Общее описание. Сеанс работы. – М.: НИЦ СтаДиО, 2003-2014.

40. «Семейство» программных комплексов АСТРА-НОВА'2015. Автоматизированное проектирование и расчеты трубопроводных систем на статическую и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с российскими нормативными требованиями. Общее описание. – М.: ЗАО НИЦ СтаДиО, 2003-2014.
41. «Семейство» программных комплексов АСТРА-НОВА'2015. Автоматизированное проектирование и расчеты трубопроводных систем на статическую и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с российскими нормативными требованиями. Сеанс работы с комплексом. – М.: ЗАО НИЦ СтаДиО, 2003-2014.

63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, StaDyO Research & Engineering Center; Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ), руководитель научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов НИУ МГСУ; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНОГО БРУСА НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П.А. Акимов^{1,2,3,4}, О.А. Негрозов^{1,2,4}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается решение тестовой задачи статического расчета трехмерного бруса (расчетная модель – трехмерная (пространственная) задача теории упругости) на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного и развитого в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова и М.Л. Мозгалевой.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, краевая задача, трехмерная конструкция, трехмерная задача теории упругости

ABOUT ONE SAMPLE OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS BASED ON COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD

Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}, Oleg A. Negrozov^{1,2,4}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to one sample of three-dimensional structural analysis based on combined application of finite element method (FEM) and discrete-continual finite element method (DCFEM), proposed by Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov and Marina L. Mozgaleva. Three-dimensional theory of elasticity is used as corresponding design model.

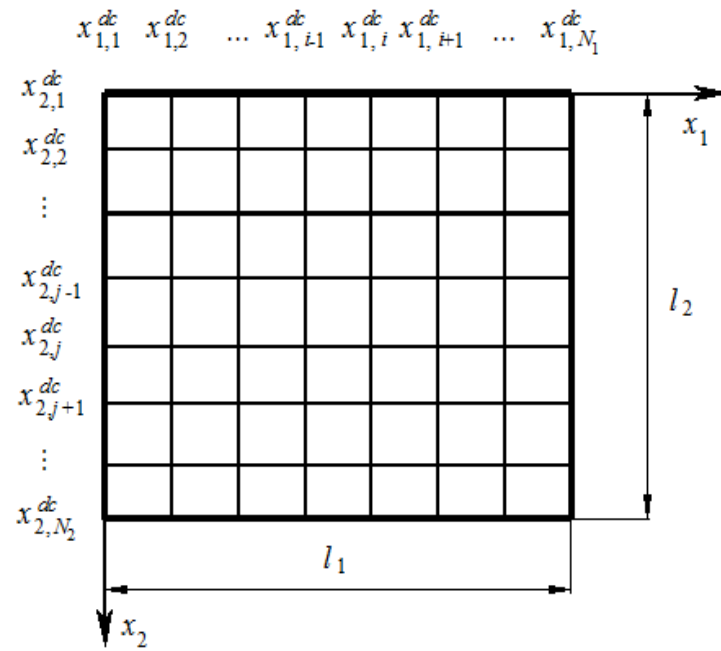
Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, boundary problem, three-dimensional structure, two-dimensional theory of elasticity

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения и перемещения)

трехмерного бруса, нагруженной сосредоточенной силой, при этом боковые (торцевые) вертикальные грани конструкции шарнирно закреплены (рис. 1.1, 1.2).

1 - 1



2 - 2

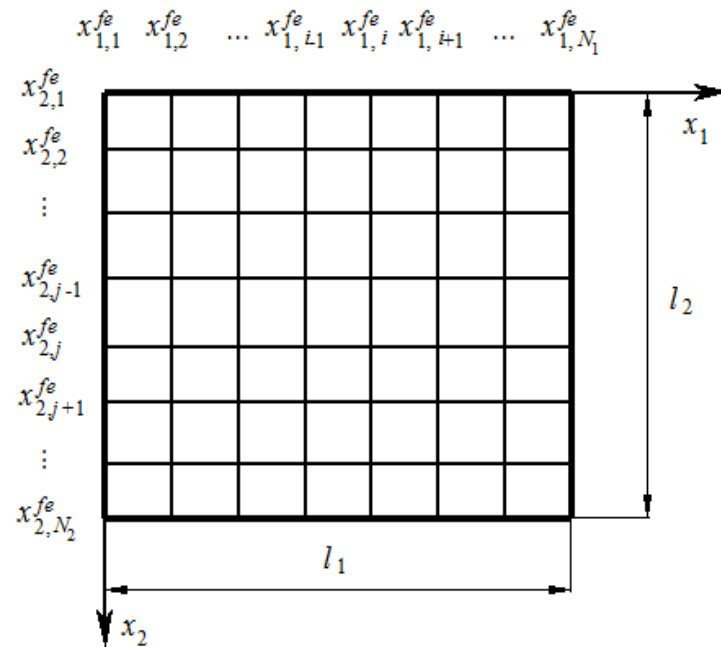


Рисунок 1.2. К постановке задачи: поперечные по отношению к основному направлению сечения трехмерного бруса с соответствующими сеточными аппроксимациями сечения в осях x_1 и x_2 .

$x_{3,1}^b = 0$; $x_{3,2}^b = l_{3,1}$; $x_{3,3}^b = l_{3,1} + l_{3,2} = l_3$ – координаты соответствующих граничных точек; Ω_1 и Ω_2 – подобласти области Ω .

Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [1-3,5-12,14-17], можем окаймить области Ω_1 и Ω_2 соответствующими расширенными ω_1 и ω_2 и перейти к расширенной области ω ,

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2, \quad (2.4)$$

где $\Omega_1 \subset \omega_1, \quad \Omega_2 \subset \omega_2. \quad (2.5)$

Пусть в пределах области ω_1 физико-геометрические параметры (характеристики) конструкции не зависят от переменной x_3 , отвечающей так называемому основному направлению [1-3,5-12,14-17], тогда как в пределах области ω_2 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно. Для расчета такого рода конструкций целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ, причем в пределах ω_1 следует использовать дискретно-континуальную аппроксимирующую модель, а в пределах ω_2 – дискретную (конечноэлементную) модель.

Пусть $x_{1,i,j}^{dc}, x_{2,i,j}^{dc}, i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}, j = 1, 2, \dots, N_2^{dc}$ – координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_1 ;

$$x_{1,i,j}^{dc} = x_{1,i}^{dc}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2^{dc}; \quad (2.6)$$

$$x_{2,i,j}^{dc} = x_{2,j}^{dc}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2^{dc}. \quad (2.7)$$

Следует подчеркнуть, что в данном случае для простоты рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка (рисунок 1.2а), причем $(N_1^{dc} - 1)$ и $(N_2^{dc} - 1)$ – количество

ДККЭ, на которые «разбивается» конструкция по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 ; $(N_1^{dc} - 1) \times (N_2^{dc} - 1)$ – общее количество используемых ДККЭ в области ω_1 .

Пусть

$$x_{1,i,j,r}^{fe}, x_{2,i,j,r}^{fe}, x_{3,i,j,r}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}, \\ j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_3^{fe}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1, x_2 и x_3) узлов конечных элементов в области ω_2 ;

$$x_{1,i,j,r}^{fe} = x_{1,i}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}, \\ j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_3^{fe}; \quad (2.8)$$

$$x_{2,i,j,r}^{fe} = x_{2,j}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}, \\ j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_3^{fe}; \quad (2.9)$$

$$x_{3,i,j,r}^{fe} = x_{3,r}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}, \\ j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_3^{fe}. \quad (2.10)$$

Следует подчеркнуть, что в данном случае для простоты также рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка (рисунок 1.2б), причем $(N_1^{fe} - 1)$, $(N_2^{fe} - 1)$ и $(N_3^{fe} - 1)$ – количество конечных элементов, на которые «разбивается» конструкция по направлениям, соответствующим переменным x_1, x_2 и x_3 ; $(N_1^{fe} - 1) \times (N_2^{fe} - 1) \times (N_3^{fe} - 1)$ – общее количество используемых конечных элементов в области ω_2 .

Для удобства алгоритмических построений будем применять трехиндексную систему нумерации узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_1 : имеем номер типа (k, i, j) , где k – номер подобласти, i – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего переменной x_1 , j – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего переменной x_2).

Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_2 будем применять четырехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j, r) , где k – номер подобласти, i , j и r – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 , x_2 и x_3). Кроме того, будем полагать, для простоты, что схема дискретизации конструкции по направлениям, отвечающим переменным x_1 и x_2 , неизменна по всей области, т.е. неизменна схема сеточной аппроксимации сечения конструкции поперечного по отношению к основному направлению,

$$N_1^{fe} = N_1^{dc} = N_1; \quad N_2^{fe} = N_2^{dc} = N_2; \quad (2.11)$$

$$x_{q,i,j}^{dc} = x_{q,i,j,r}^{fe}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1, 2, \dots, N_2, \quad r=1, 2, \dots, N_3^{fe}, \quad q=1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Для удобства последующих построений введем обозначения:

$$N_3 = N_3^{fe}; \quad (2.13)$$

$$x_{q,i,j} = x_{q,i,j}^{dc} = x_{q,i,j,r}^{fe}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1, 2, \dots, N_2, \quad r=1, 2, \dots, N_3^{fe}, \quad q=1, 2, 3; \quad (2.14)$$

$$x_{1,i} = x_{1,i,j}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1, 2, \dots, N_2; \quad (2.15)$$

$$x_{2,j} = x_{2,i,j}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1, 2, \dots, N_2. \quad (2.16)$$

Заметим, что при изложении аппроксимаций в рамках ДККЭ будем следовать системе обозначений, принятой в [1].

3. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси Ox_3) решается континуальная задача, а по другим направлениям (вдоль осей Ox_1 и Ox_2) произ-

водится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_1 разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\omega_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \omega_{1,i,j}; \quad (3.1)$$

где

$$\omega_{1,i,j} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \quad x_{2,j} < x_2 < x_{2,j+1}, \quad x_{3,1}^b < x_3 < x_{3,2}^b\}, \quad (3.2)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ $\omega_{1,i,j}$ по формуле

$$\theta_{1,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{1,i,j} \subset \Omega_1; \\ 0, & \omega_{1,i,j} \not\subset \Omega_1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе), очевидно, определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{1,i,j} = \theta_{1,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{1,i,j} = \theta_{1,i,j} \mu. \quad (3.4)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ и их производные $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ по переменной x_3 (верхний индекс «(1)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_1), т.е. для $(1, i, j)$ -го узла это $u_1^{(1,i,j)}, u_2^{(1,i,j)}, u_3^{(1,i,j)}$ и $v_1^{(1,i,j)}, v_2^{(1,i,j)}, v_3^{(1,i,j)}$.

В пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента используется полилинейная аппроксимация полей $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ и $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}$ по неосновным направлениям (т.е. относительно x_1 и x_2).

Можно показать [1], что в рамках рассмотрения подобласти ω_1 , разрешающая система $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\bar{U}'_1(x_3) = A_1 \bar{U}_1(x_3) + \bar{R}_1(x_3), \quad (3.5)$$

$$\text{где } \bar{U}_1 = \bar{U}_1(x_3) = [(\bar{u}_1)^T \quad (\bar{v}_1)^T]^T \quad (3.6)$$

– $6N_1N_2$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «1», следуя [1], соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_1);

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3) = & [(\bar{u}_n^{(1,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(1,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,N_1,1)})^T \quad \dots \\ & \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(1,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,1,N_2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(1,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,N_1,N_2)})^T]^T; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = \bar{v}_1(x_3) = & [(\bar{v}_n^{(1,1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,1)})^T \quad \dots \\ & \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,1,2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,1,N_2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,N_2)})^T]^T; \end{aligned} \quad (3.8)$$

A_1 – матрица коэффициентов $6N_1N_2$ -го порядка; $\bar{R}_1(x_3)$ – $6N_1N_2$ -мерная вектор-функция правых частей;

$$\bar{u}_n^{(1,i,j)} = \bar{u}_n^{(1,i,j)}(x_3) = [u_1^{(1,i,j)} \quad u_2^{(1,i,j)} \quad u_3^{(1,i,j)}]^T; \quad (3.9)$$

$$\bar{v}_n^{(1,i,j)} = \bar{v}_n^{(1,i,j)}(x_3) = [v_1^{(1,i,j)} \quad v_2^{(1,i,j)} \quad v_3^{(1,i,j)}]^T. \quad (3.10)$$

Решение системы (3.5) может быть представлено в виде [1]:

$$\bar{U}_1(x_3) = E_1(x_3) \bar{C}_1 + \bar{S}_1(x_3), \quad (3.11)$$

$$\text{где } E_1(x_3) = \varepsilon_1(x_3 - x_{3,1}^b) - \varepsilon_1(x_3 - x_{3,2}^b);$$

$$\bar{S}_1(x_3) = \varepsilon_1(x_3) * \bar{R}_1(x_3); \quad (3.12)$$

$\varepsilon_1(x_3)$ – фундаментальная матрица-функция системы (3.5), определяемая согласно [1]; символ «*» обозначает операцию свертки функций; $\bar{C}_1$ – $6N_1N_2$ -мерный вектор постоянных, определяемый из граничных условий.

4. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по обоим координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_2 разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega_2 = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \bigcup_{r=1}^{N_3-1} \omega_{2,i,j,r}, \quad (4.1)$$

где

$$\omega_{2,i,j,r} = \{(x_1, x_2): x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, x_{2,j} < x_2 < x_{2,j+1}, x_{3,r}^{fe} < x_3 < x_{3,r+1}^{fe}\}, \quad (4.2)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ $\omega_{2,i,j,r}$ по формуле

$$\theta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \omega_{2,i,j,r} \subset \Omega_2; \\ 0, & \omega_{2,i,j,r} \not\subset \Omega_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе), очевидно, определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r} \lambda; \quad \bar{\mu}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r} \mu. \quad (4.4)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ (верхний индекс «(2)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_2), т.е. для $(2, i, j, r)$ -го узла $u_1^{(2,i,j,r)}, u_2^{(2,i,j,r)}, u_3^{(2,i,j,r)}$.

Поля $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ по обоим координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) в пределах конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные четырехузловые конечные

элементы трехмерной задачи теории упругости (в перемещениях) [4,13]).

Можно показать [4,13], что при рассмотрении подобласти Ω_2 , разрешающая система $3N_1N_2N_3$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_2 \bar{U}_2 = \bar{R}_2, \quad (4.5)$$

где $\{\bar{U}_2\}_{i_g} = u_q^{(k,i,j,r)};$ (4.6)

i_g – глобальный индекс глобального $3N_1N_2N_3$ -мерного вектора неизвестных $\bar{U}_2$ (нижний индекс «2», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_2); k, i, j, r, q – соответствующие локальные индексы, определяемые по формулам:

$$k = 2; \quad (4.7)$$

$$r = \left[\frac{i_g}{3N_1N_2} \right] + 1; \quad (4.8)$$

$$j = \left[\frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2}{3N_1} \right] + 1; \quad (4.9)$$

$$i = \left[\frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1}{3} \right] + 1; \quad (4.10)$$

$$q = i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1 - 3i. \quad (4.11)$$

K_2 – глобальная матрица жесткости $3N_1N_2N_3$ -го порядка; $\bar{R}_2$ – $3N_1N_2N_3$ - мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок).

5. ПЕРЕХОД К ЕДИНОЙ (СВЯЗАННОЙ) МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Для всех узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область ω_2 , с индексами $1 < r < N_3$ (т.е. $x_{3,2}^b < x_3 < x_{3,3}^b$) можем переписать систему уравнений (4.5), без учета соответствующих уравнения для узлов с индексами $r = 1$ и $r = N_2$. Имеем $3N_1N_2(N_3 - 2)$ уравнений:

$$\tilde{K}_2 \bar{U}_2 = \tilde{R}_2, \quad (5.1)$$

где $\tilde{K}_2$ – «редуцированная» таким образом глобальная матрица жесткости размером $[3N_1N_2(N_3 - 2)] \times [3N_1N_2N_3]$; $\tilde{R}_2$ – $3N_1N_2(N_3 - 2)$ -мерный «редуцированный» глобальный вектор правых частей.

Очевидно, можно записать следующие условия для всей области ω :

– в сечении $x_3 = x_{3,1}^b$ следует задать условия ($3N_1N_2$ уравнений) шарнирного опирания вида:

$$u_1^{(1,i,j)}(x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad (5.2)$$

$$u_2^{(1,i,j)}(x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad (5.3)$$

$$u_3^{(1,i,j)}(x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad (5.4)$$

– в сечении $x_3 = x_{3,2}^b$ (т.е. при $r = 1$; здесь и ниже r – четвертый индекс в нумерации узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область ω_2) следует задать условия ($6N_1N_2$ уравнений) идеального контакта вида:

$$u_1^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = u_1^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1; \quad (5.5)$$

$$u_2^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = u_2^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1; \quad (5.6)$$

$$u_3^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = u_3^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1; \quad (5.7)$$

$$\sigma_{1,3}^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = \sigma_{1,3}^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1; \quad (5.8)$$

$$\sigma_{2,3}^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = \sigma_{2,3}^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad (5.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1;$$

$$\sigma_{3,3}^{(1,i,j)}(x_{3,2}^b - 0) = \sigma_{3,3}^{(2,i,j,r)}(x_{3,2}^b + 0), \quad (5.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1;$$

где $\sigma_{1,3}^{(1,i,j)}(x_3)$, $\sigma_{1,3}^{(2,i,j,r)}$ и $\sigma_{3,3}^{(1,i,j)}(x_3)$ – соответственно приведенные к узлу $(1, i, j)$ функции компонент напряжений $\sigma_{1,3}(x_3)$, $\sigma_{1,3}(x_3)$ и $\sigma_{3,3}(x_3)$ в пределах рассматриваемого дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{1,i}$; $\sigma_{1,3}^{(2,i,j,r)}$, $\sigma_{2,3}^{(2,i,j,r)}$ и $\sigma_{3,3}^{(2,i,j,r)}$ – соответственно приведенные к узлу $(2, i, j, r)$ значения компонент напряжений $\sigma_{1,3}$, $\sigma_{2,3}$ и $\sigma_{3,3}$; – в сечении $x_3 = x_{3,3}^b$ (т.е. при $r = N_3$) следует задать условия ($2N_1$ уравнений) шарнирного опирания вида:

$$u_1^{(2,i,j,r)}(x_{3,3}^b - 0) = 0, \quad (5.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad r = N_3;$$

$$u_2^{(2,i,j,r)}(x_{3,3}^b - 0) = 0, \quad (5.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad r = N_3;$$

$$u_3^{(2,i,j,r)}(x_{3,3}^b - 0) = 0, \quad (5.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad r = N_3.$$

В общей сложности, обобщая (5.1)-(5.13) имеем

$$3N_1N_2(N_3 - 2) + 3N_1N_2 + 6N_1N_2 + 3N_1N_2 = 3N_1N_2N_3 + 6N_1N_2$$

уравнений, причем в качестве неизвестных в данном случае выступают $6N_1N_2$ компонент вектора $\bar{C}_1$ (см. формулу (3.11)), а также $2N_1N_2N_3$ значений компонент перемещений в узлах конечноэлементной сетки, аппроксимирующей подобласть ω_2 , т.е.

$$u_1^{(2,i,j,r)}, u_2^{(2,i,j,r)}, u_3^{(2,i,j,r)}, \quad (5.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad r = 1, 2, \dots, N_3,$$

причем общее количество неизвестных также составляет $3N_1N_2N_3 + 6N_1N_2$.

Перепишем последовательно уравнения (5.2)-(5.13) в матрично-векторном виде, в том числе с учетом (3.11).

1. Рассмотрим уравнения (5.2)-(5.4). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) = \bar{g}_1^+, \quad (5.14)$$

где B_1^+ – матрица граничных условий размера $3N_1N_2 \times 6N_1N_2$, формула для определения элементов которой имеет вид:

$$\{B_1^+\}_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad (5.15)$$

$$p = 1, 2, \dots, 3N_1N_2, \quad q = 1, 2, \dots, 6N_1N_2;$$

$\delta_{p,q}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q; \end{cases} \quad (5.16)$$

$\bar{g}_1^+$ – $3N_1N_2$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_1^+ = 0. \quad (5.17)$$

Подставляя (3.11) в (5.14) будем иметь:

$$B_1^+ E_1(x_{3,1}^b + 0) \bar{C}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{3,1}^b + 0) \quad (5.18)$$

$$\text{или} \quad Q_1 \bar{C}_1 = \bar{G}_1, \quad (5.19)$$

где $Q_1 = B_1^+ E_1(x_{3,1}^b + 0)$;

$$\bar{G}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{3,1}^b + 0); \quad (5.20)$$

Q_1 – матрица размера $3N_1N_2 \times 6N_1N_2$; $\bar{G}_1$ – вектор размера $3N_1N_2$.

2. Рассмотрим уравнения (5.5)-(5.10). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_2^+ \bar{U}_1(x_{3,2}^b - 0) = B_2^+ \bar{U}_2(x_{3,2}^b + 0), \quad (5.21)$$

где B_2^- – матрица граничных условий размера $6N_1N_2 \times 6N_1N_2$, алгоритм формирования которой описан в Приложении 1 к настоящей статье; B_2^+ – матрица граничных условий размера $6N_1N_2 \times 3N_1N_2N_3$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с алгоритмом, описанным в Приложении 2 к настоящей статье.

Подставляя (3.11) в (5.21), получим:

$$B_2^- E_1(x_{3,2}^b - 0)\bar{C}_1 - B_2^+ \bar{U}_2(x_{3,2}^b + 0) = -B_2^- \bar{S}_1(x_{3,2}^b - 0) \quad (5.22)$$

$$\text{или} \quad Q_{2,1}\bar{C}_1 + Q_{2,2}\bar{U}_2 = \bar{G}_2, \quad (5.23)$$

$$\text{где} \quad Q_{2,1} = B_2^- E_1(x_{3,2}^b - 0); \quad Q_{2,2} = -B_2^+; \\ \bar{G}_2 = -B_2^- \bar{S}_1(x_{3,2}^b - 0); \quad (5.24)$$

$Q_{2,1}$ – матрица размера $6N_1N_2 \times 6N_1N_2$; $Q_{2,2}$ – матрица размера $6N_1N_2 \times 3N_1N_2N_3$; $\bar{G}_2$ – вектор размера $6N_1N_2$.

3. Рассмотрим уравнения (5.11)-(5.13). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_3^- \bar{U}_2 = \bar{g}_3^-, \quad (5.25)$$

где B_3^- – матрица граничных условий размера $3N_1N_2 \times 3N_1N_2N_3$, формула для определения элементов которой имеет вид (см. также (5.16)):

$$\{B_3^-\}_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 3N_1N_2, \\ q = 1, 2, \dots, 3N_1N_2N_3; \quad (5.26)$$

$\bar{g}_3^-$ – $3N_1N_2$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_3^- = 0. \quad (5.27)$$

Объединяя уравнения (5.19), (5.23), (5.1) и (5.25), будем иметь систему из $3N_1N_2N_3 + 6N_1N_2$ линейных алгебраических уравнений с $3N_1N_2N_3 + 6N_1N_2$ неизвестными:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \\ 0 & \tilde{K}_2 \\ 0 & B_3^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \tilde{R}_2 \\ \bar{g}_3^- \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Заметим, что в при составлении глобальной матрицы жесткости и глобального вектора правых частей для подобласти Ω_2 можно сразу учесть граничные условия (5.19). Тогда систему (5.21) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \\ 0 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \tilde{R}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

где $\tilde{K}_2$ – соответствующая «редуцированная» глобальная матрица жесткости размером $[3N_1N_2(N_3 - 1)] \times [3N_1N_2N_3]$; $\tilde{R}_2$ – соответствующий $3N_1N_2(N_3 - 1)$ -мерный «редуцированный» глобальный вектор правых частей. После решения данной системы на основании известных формул дискретно-континуального метода конечных элементов [4,13] и метода конечных элементов [1-3,5-12,14-17] могут быть найдены искомые перемещения, деформации и напряжения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ» В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ ВАРИАЦИЙ.

П.1.1. Локальная система координат дискретно-континуального конечного элемента. Восполнение неизвестных на элементе. Рассмотрим произвольный $(1, i, j)$ -й дискретно-континуальный конечный элемент (рисунок П.1.1).

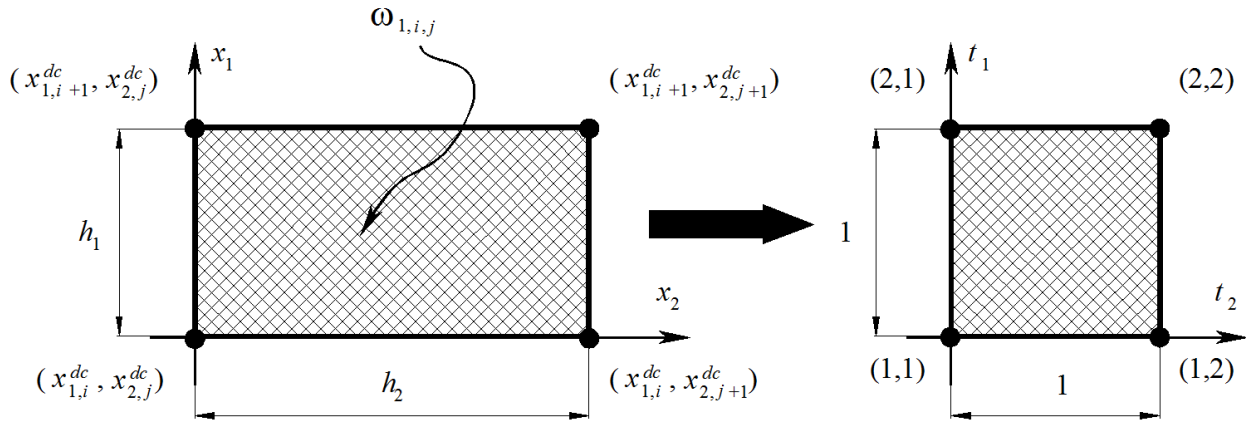


Рисунок П.1.1. Переход к локальной системе координат в сечении дискретно-континуального конечного элемента.

В пределах дискретно-континуального конечного элемента вводится локальная система координат (координаты t_1 и t_2), при этом $t_1 \in [0, 1]$; $t_2 \in [0, 1]$.

Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента:

$$\begin{aligned} (x_{1,i}^{dc}, x_{2,j}^{dc}) &\Rightarrow (0, 0); & (x_{1,i+1}^{dc}, x_{2,j}^{dc}) &\Rightarrow (1, 0); \\ (x_{1,i}^{dc}, x_{2,j+1}^{dc}) &\Rightarrow (0, 1); & (x_{1,i+1}^{dc}, x_{2,j+1}^{dc}) &\Rightarrow (1, 1). \end{aligned} \quad (\text{П.1.1})$$

Пусть $\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T$ и $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$ – векторы координат произвольной точки дискретно-континуального конечного элемента в локальной и исходной глобальной системах координат.

Формула преобразования координат на элементе (рис. П.1.1):

$$\bar{x}(t_1, t_2) = \bar{x}_n^{(1,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (\text{П.1.2})$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta_1 \bar{x}^{(1,i,j)} &= \bar{x}_n^{(1,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(1,i,j)}; \\ \Delta_2 \bar{x}^{(1,i,j)} &= \bar{x}_n^{(1,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(1,i,j)}; \\ \Delta_{12} \bar{x}^{(1,i,j)} &= \bar{x}_n^{(1,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(1,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}^{(1,i,j)}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

Поясним, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_n^{(1,i,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j)} \\ x_2^{(i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{dc} \\ x_{2,j}^{dc} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(1,i+1,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j)} \\ x_2^{(i+1,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{dc} \\ x_{2,j}^{dc} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(1,i,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j+1)} \\ x_2^{(i,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{dc} \\ x_{2,j+1}^{dc} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(1,i+1,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j+1)} \\ x_2^{(i+1,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{dc} \\ x_{2,j+1}^{dc} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

Здесь $\bar{x}_n^{(1,i,j)}$, $\bar{t}_n^{(1,i,j)}$ – векторы координат $(1, i, j)$ -го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно. Формула восполнения перемещений на элементе:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)}(t_1, t_2, x_3) &= \bar{u}_n^{(1,i,j)}(x_3) + \\ &+ t_1 \Delta_1 \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) + t_2 \Delta_2 \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) + \\ &+ t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3), \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

где

$$\Delta_1 \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) = \bar{u}_n^{(1,i+1,j)}(x_3) - \bar{u}_n^{(1,i,j)}(x_3); \quad (\text{П.1.6})$$

$$\Delta_2 \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) = \bar{u}_n^{(1,i,j+1)}(x_3) - \bar{u}_n^{(1,i,j)}(x_3); \quad (\text{П.1.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12} \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) &= \bar{u}_n^{(1,i+1,j+1)}(x_3) - \\ &- \bar{u}_n^{(1,i+1,j)}(x_3) - \Delta_2 \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

(верхний индекс «1», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_1).

Функциональная матрица $B(t_1, t_2)$ имеет вид:

$$B(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.1.9})$$

где $\beta_{p,q}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(i,j)}$, $p = 1, 2$;

$$\beta_{p,q}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2; \quad (\text{П.1.10})$$

$$\Delta_1 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j)} - x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.11})$$

$$\Delta_2 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i,j+1)} - x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.12})$$

$$\Delta_{12} x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j+1)} - x_p^{(i+1,j)} - \Delta_2 x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.1.13})$$

Формула вычисления определителя матрицы $B(t_1, t_2)$:

$$J_{i,j}(t_1, t_2) = \det[\Lambda_{i,j}(t_1, t_2)] = \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \quad (\text{П.1.14})$$

Матрица Якоби $\Lambda(t_1, t_2)$, определяемая формулой

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = B_{i,j}^{-1}(t_1, t_2), \quad (\text{П.1.15})$$

имеет вид

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \alpha_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.1.16})$$

где $\alpha_{1,1}^{(i,j)} = \alpha_{1,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}$;

$$\alpha_{1,2}^{(i,j)} = \alpha_{1,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \quad (\text{П.1.17})$$

$$\alpha_{2,1}^{(i,j)} = \alpha_{2,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)};$$

$$\alpha_{2,2}^{(i,j)} = \alpha_{2,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}. \quad (\text{П.1.18})$$

П.1.2. Вычисление частных производных от перемещений, деформаций и напряжений на элементе.

Частные производные от перемещений по переменным t_1 и t_2 определяются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_p} \bar{u}^{(1)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{1,i,j}}(t_1, t_2, x_3) = \Delta_p \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3) + t_{3-p} \Delta_{12} \bar{u}^{(1,i,j)}(x_3), \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.1.19})$$

Формула определения частных производных от перемещений по переменным x_1 и x_2 имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_p} \bar{u}^{(1)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{1,i,j}}(t_1, t_2, x_3) = \sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_q} \bar{u}^{(1)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{1,i,j}}(t_1, t_2, x_3) \alpha_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2), \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.1.20})$$

Формула для компонентов тензора деформаций на элементе:

$$\varepsilon_{p,q}^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_q} u_p^{(1)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2, x_3) + \left[\frac{\partial}{\partial x_p} u_q^{(1)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2, x_3) \right), \quad p = 1, 2, 3; \quad q = 1, 2, 3. \quad (\text{П.1.21})$$

Формула для объемной деформации:

$$\varepsilon^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{p,p}^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3). \quad (\text{П.1.22})$$

Формула для компонентов тензора напряжений на элементе:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ = \delta_{p,q} \bar{\lambda}_{1,i,j} \varepsilon^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \\ + 2\bar{\mu}_{1,i,j} \varepsilon_{p,q}^{(1,i,j)}(t_1, t_2, x_3), \end{aligned} \quad (П.1.23)$$

$p = 1, 2, 3; q = 1, 2, 3,$

где $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера (см. формулу (5.16)).

П.1.3. Определение приведенных к узлам значений напряжений и деформаций с учетом осреднения.

Введем обозначения:

$$\chi_{1,i,j} = \mathcal{G}_{1,i,j} (\theta_{1,i-1,j-1} + \theta_{1,i-1,j} + \theta_{1,i,j-1} + \theta_{1,i,j})^{-1},$$

$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$ (П.1.24)

$$\chi_{1,1,j} = \mathcal{G}_{1,1,j} (\theta_{1,1,j-1} + \theta_{1,1,j})^{-1},$$

$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$ (П.1.25)

$$\chi_{1,N_1,j} = \mathcal{G}_{1,N_1,j} (\theta_{1,N_1-1,j-1} + \theta_{1,N_1-1,j})^{-1},$$

$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$ (П.1.26)

$$\chi_{1,i,1} = \mathcal{G}_{1,i,1} (\theta_{1,i-1,1} + \theta_{1,i,1})^{-1},$$

$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$ (П.1.27)

$$\chi_{1,i,N_2} = \mathcal{G}_{1,i,N_2} (\theta_{1,i-1,N_2-1} + \theta_{1,i,N_2-1})^{-1},$$

$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$ (П.1.28)

$$\chi_{2,1,1} = \mathcal{G}_{2,1,1} \theta_{2,1,1}^{-1}; \quad (П.1.29)$$

$$\chi_{2,N_1,1} = \mathcal{G}_{2,N_1,1} \theta_{2,N_1-1,1}^{-1}; \quad (П.1.30)$$

$$\chi_{2,1,N_2} = \mathcal{G}_{2,1,N_2} \theta_{2,1,N_2-1}^{-1}; \quad (П.1.31)$$

$$\chi_{2,N_1,N_2} = \mathcal{G}_{2,N_1,N_2} \theta_{2,N_1-1,N_2-1}^{-1}, \quad (П.1.32)$$

где

$$\mathcal{G}_{1,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{1,i-1,j-1} + \theta_{1,i-1,j} + \theta_{1,i,j-1} + \theta_{1,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{1,i-1,j-1} + \theta_{1,i-1,j} + \theta_{1,i,j-1} + \theta_{1,i,j} = 0, \\ & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \end{cases} \quad (П.1.33)$$

$$\mathcal{G}_{1,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \theta_{1,1,j-1} + \theta_{1,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \theta_{1,1,j-1} + \theta_{1,1,j} = 0, \end{cases} \quad (П.1.34)$$

$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$

$$\mathcal{G}_{1,N_1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \theta_{1,N_1-1,j-1} + \theta_{1,N_1-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \theta_{1,N_1-1,j-1} + \theta_{1,N_1-1,j} = 0, \end{cases}$$

$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$ (П.1.35)

$$\mathcal{G}_{1,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если} \theta_{1,i-1,1} + \theta_{1,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \theta_{1,i-1,1} + \theta_{1,i,1} = 0, \end{cases} \quad (П.1.36)$$

$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$

$$\mathcal{G}_{1,i,N_2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \theta_{1,i-1,N_2-1} + \theta_{1,i,N_2-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \theta_{1,i-1,N_2-1} + \theta_{1,i,N_2-1} = 0, \end{cases}$$

$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$ (П.1.37)

$$\mathcal{G}_{2,1,1} = \theta_{2,1,1}; \quad (П.1.38)$$

$$\mathcal{G}_{2,N_1,1} = \theta_{2,N_1-1,1}; \quad (П.1.39)$$

$$\mathcal{G}_{2,1,N_2} = \theta_{2,1,N_2-1}; \quad (П.1.40)$$

$$\mathcal{G}_{2,N_1,N_2} = \theta_{2,N_1-1,N_2-1}. \quad (П.1.41)$$

Уточним, что в каждой из рассмотренных выше формул при $\mathcal{G}_{1,i,j} = 0$ будем иметь

$$\chi_{1,i,j} = 0.$$

Приведем ниже формулы для определения напряжений и деформаций в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду $p = 1, 2$ и $q = 1, 2$).

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$
 $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(i,j)}(x_3) = \\ = \chi_{2,i,j} (\sigma_{p,q}^{(1,i-1,j-1)}(1,1,x_3) \theta_{1,i-1,j-1} + \\ + \sigma_{p,q}^{(1,i,j-1)}(0,1,x_3) \theta_{1,i,j-1} + \\ + \sigma_{p,q}^{(1,i-1,j)}(1,0,x_3) \theta_{1,i-1,j} + \\ + \sigma_{p,q}^{(1,i,j)}(0,0,x_3) \theta_{1,i,j}); \end{aligned} \quad (П.1.42)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(i,j)}(x_3) = \chi_{1,i,j} (\varepsilon_{p,q}^{(1,i-1,j-1)}(1,1,x_3) \theta_{1,i-1,j-1} + \\ + \varepsilon_{p,q}^{(1,i,j-1)}(0,1,x_3) \theta_{1,i,j-1} + \\ + \varepsilon_{p,q}^{(1,i-1,j)}(1,0,x_3) \theta_{1,i-1,j} + \varepsilon_{p,q}^{(1,i,j)}(0,0,x_3) \theta_{1,i,j}); \end{aligned} \quad (П.1.43)$$

– «левая вертикальная граница»
($i = 1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(1,j)}(x_3) = \chi_{1,1,j}(\sigma_{p,q}^{(1,1,j-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(1,1,j)}(0,0,x_3)\theta_{1,1,j}); \quad (\text{П.1.44})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(1,j)}(x_3) = \chi_{1,1,j}(\varepsilon_{p,q}^{(1,1,j-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(1,1,j)}(0,0,x_3)\theta_{1,1,j}); \quad (\text{П.1.45})$$

– «правая вертикальная граница»
($i = N_1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,j)}(x_3) = \chi_{1,N_1,j}(\sigma_{p,q}^{(1,N_1-1,j-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,N_1-1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(1,N_1-1,j)}(1,0,x_3)\theta_{1,N_1-1,j}); \quad (\text{П.1.46})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,j)}(x_3) = \chi_{2,N_1,j}(\varepsilon_{p,q}^{(1,N_1-1,j-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,N_1-1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(1,N_1-1,j)}(1,0,x_3)\theta_{1,N_1-1,j}); \quad (\text{П.1.47})$$

– «нижняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(i,1)}(x_3) = \chi_{1,i,1}(\sigma_{p,q}^{(1,i-1,1)}(1,0,x_3)\theta_{1,i-1,1} + \sigma_{p,q}^{(1,i,1)}(0,0,x_3)\theta_{1,i,1}); \quad (\text{П.1.48})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(i,1)}(x_3) = \chi_{1,i,1}(\varepsilon_{p,q}^{(1,i-1,1)}(1,0,x_3)\theta_{1,i-1,1} + \varepsilon_{p,q}^{(1,i,1)}(0,0,x_3)\theta_{1,i,1}); \quad (\text{П.1.49})$$

– «верхняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = N_2$)

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(i,N_2)}(x_3) = \chi_{1,i,j}(\sigma_{p,q}^{(1,i-1,N_2-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,i-1,N_2-1} + \sigma_{p,q}^{(1,i,N_2-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,i,N_2-1}); \quad (\text{П.1.50})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(i,N_2)}(x_3) = \chi_{1,i,j}(\varepsilon_{p,q}^{(1,i-1,N_2-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,i-1,N_2-1} + \varepsilon_{p,q}^{(1,i,N_2-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,i,N_2-1}); \quad (\text{П.1.51})$$

– «угловые узлы границы»
в случае $i = 1; j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(1,1)}(x_3) = \chi_{1,1,1}\sigma_{p,q}^{(1,1,1)}(0,0,x_3)\theta_{1,1,1}; \quad (\text{П.1.52})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(1,1)}(x_3) = \chi_{1,1,1}\varepsilon_{p,q}^{(1,1,1)}(0,0,x_3)\theta_{1,1,1}; \quad (\text{П.1.53})$$

в случае $i = 1; j = N_2$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(1,N_2)}(x_3) = \chi_{1,1,N_2}\sigma_{p,q}^{(1,1,N_2-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,1,N_2-1}; \quad (\text{П.1.54})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(1,N_2)}(x_3) = \chi_{1,1,N_2}\varepsilon_{p,q}^{(1,1,N_2-1)}(0,1,x_3)\theta_{1,1,N_2-1}; \quad (\text{П.1.55})$$

в случае $i = N_1; j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,1)}(x_3) = \chi_{1,N_1,1}\sigma_{p,q}^{(1,N_1-1,1)}(1,0,x_3)\theta_{1,N_1-1,1}; \quad (\text{П.1.56})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,1)}(x_3) = \chi_{1,N_1,1}\varepsilon_{p,q}^{(1,N_1-1,1)}(1,0,x_3)\theta_{1,N_1-1,1}; \quad (\text{П.1.57})$$

в случае $i = N_1; j = N_2$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,N_2)}(x_3) = \chi_{1,N_1,N_2}\sigma_{p,q}^{(1,N_1-1,N_2-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,N_1-1,N_2-1}; \quad (\text{П.1.58})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(1)}]^{(N_1,N_2)}(x_3) = \chi_{1,N_1,N_2}\varepsilon_{p,q}^{(1,N_1-1,N_2-1)}(1,1,x_3)\theta_{1,N_1-1,N_2-1}. \quad (\text{П.1.59})$$

П.1.4. Алгоритм формирования матрицы граничных условий типа «идеальный контакт».

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_2^- при задании условий (5.21) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_2^- определяются по формуле

$$(B_2^-)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 3N_1N_2, \quad q = 1, 2, \dots, 3N_1N_2. \quad (\text{П.1.60})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^- по формуле (П.1.60) соответствует заданию граничных условий (5.5)-(5.7).

2. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1 N_2$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно задаются $s = 1, 2$. Для каждого фиксированного значения s выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_2$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2, 3$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 3(i-1) + 3N_1(j-1) + 3N_1N_2(s-1); \quad (\text{П.1.61})$$

2.1.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\bar{U}_2$ (см. (4.5)) задается

$$\bar{U}_2 = \bar{e}_{j_g}. \quad (\text{П.1.62})$$

2.1.1.1.1.3. В соответствии со структурой (4.6) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (П.1.42), (П.1.44), (П.1.46), (П.1.48), (П.1.50), (П.1.52), (П.1.54), (П.1.56) и (П.1.58) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0)$, $[\sigma_{2,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0)$ и $[\sigma_{3,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0)$ тензора напряжений.

2.1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_2^- определяются по формулам

$$(B_2^-)_{3N_1N_2+i_g,j_g} = [\sigma_{1,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0); \quad (\text{П.1.63})$$

$$(B_2^-)_{4N_1N_2+i_g,j_g} = [\sigma_{2,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0); \quad (\text{П.1.64})$$

$$(B_2^-)_{5N_1N_2+i_g,j_g} = [\sigma_{3,3}^{(1)}]^{(i,j)}(x_{3,2}^b - 0). \quad (\text{П.1.65})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^- по формулам (П.1.63)-(П.1.65) соответствует заданию граничных условий (5.8)-(5.10).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ» В РАМКАХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ ВАРИАЦИЙ

П.2.1. Локальная система координат конечного элемента. Восполнение неизвестных на элементе.

Рассмотрим произвольный $(2, i, j, r)$ -й конечный элемент (рис. П.2.1). На элементе вводится локальная система координат (координаты t_1 , t_2 и t_3), при этом $t_1 \in [0, 1]$; $t_2 \in [0, 1]$; $t_3 \in [0, 1]$.

Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента (рис. П.2.1):

$$\begin{aligned} (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j}^{fe}, x_{3,r}^{fe}) &\Rightarrow (0, 0, 0); \\ (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j}^{fe}, x_{3,r}^{fe}) &\Rightarrow (1, 0, 0); \\ (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}, x_{3,r}^{fe}) &\Rightarrow (0, 1, 0); \\ (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}, x_{3,r}^{fe}) &\Rightarrow (1, 1, 0); \\ (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j}^{fe}, x_{3,r+1}^{fe}) &\Rightarrow (0, 0, 1); \\ (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j}^{fe}, x_{3,r+1}^{fe}) &\Rightarrow (1, 0, 1); \\ (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}, x_{3,r+1}^{fe}) &\Rightarrow (0, 1, 1); \\ (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}, x_{3,r+1}^{fe}) &\Rightarrow (1, 1, 1). \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Пусть $\bar{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$ и $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ – векторы координат произвольной точки дискретно-континуального конечного элемента в локальной и исходной глобальной системах координат.

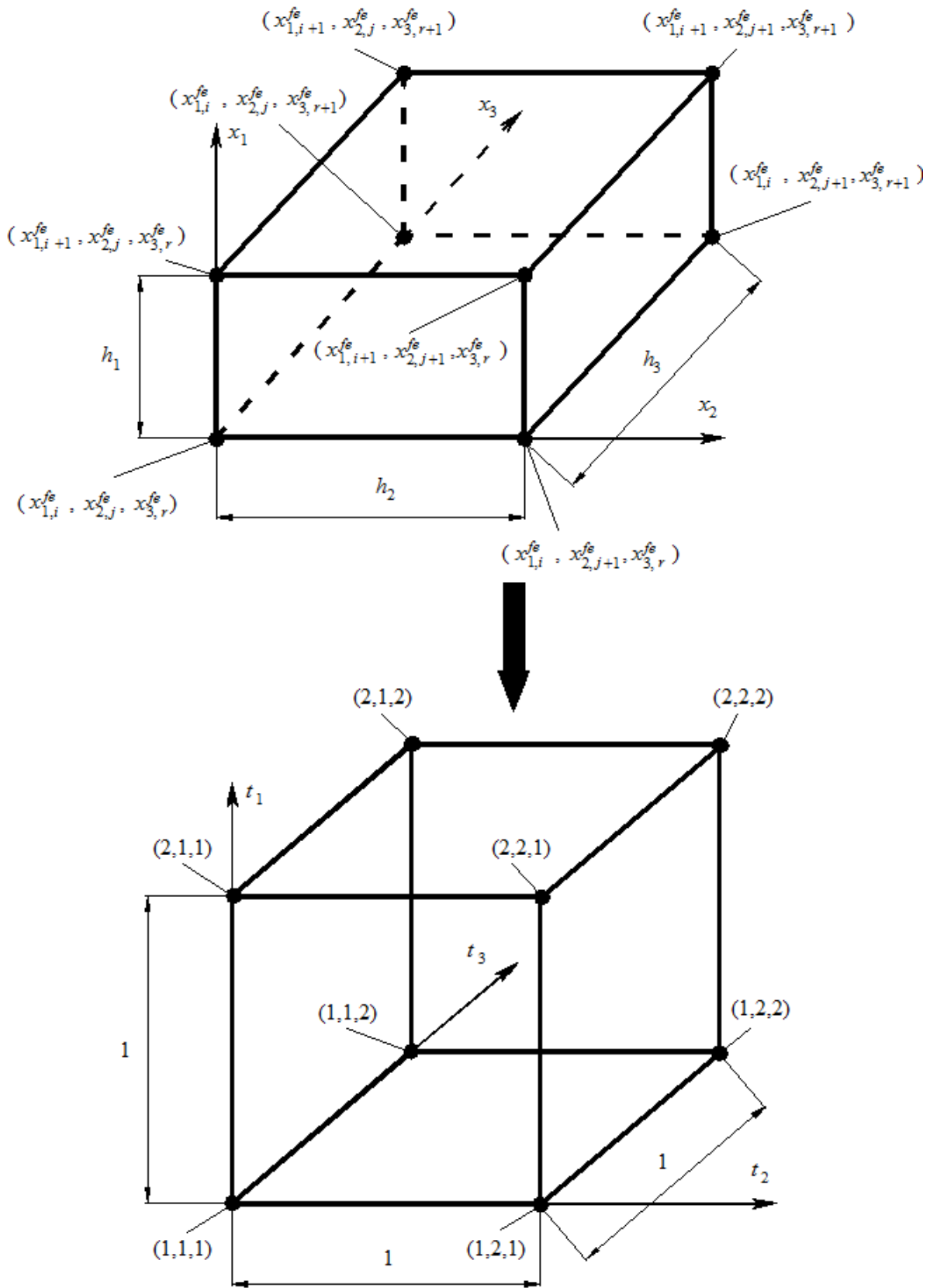


Рисунок П.2.1. Переход к локальной системе координат в сечении дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{2,i,j,r}$.

Формула преобразования координат на элементе (рис. П.2.1):

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_1, t_2, t_3) = & \bar{x}_n^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_1 \bar{x}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_2 \Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_3 \bar{x}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_3 \Delta_{13} \bar{x}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_2 t_3 \Delta_{23} \bar{x}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_2 t_3 \Delta_{123} \bar{x}^{(2,i,j,r)}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

$$\text{где } \Delta_1 \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r)} - \bar{x}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.3})$$

$$\Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i,j+1,r)} - \bar{x}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.4})$$

$$\Delta_3 \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i,j,r+1)} - \bar{x}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.5})$$

$$\Delta_{12} \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1,r)} - \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.6})$$

$$\Delta_{13} \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r+1)} - \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_3 \bar{x}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.7})$$

$$\Delta_{23} \bar{x}^{(2,i,j,r)} = \bar{x}_n^{(2,i,j+1,r+1)} - \bar{x}_n^{(2,i,j+1,r)} - \Delta_3 \bar{x}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.8})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{123} \bar{x}^{(2,i,j,r)} = & \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1,r+1)} - \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1,r)} - \\ & - \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r+1)} + \bar{x}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_{23} \bar{x}^{(2,i,j,r)}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

Поясним, что

$$\bar{x}_n^{(2,i,j,r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i,j,r)} \\ x_2^{(i,j,r)} \\ x_3^{(i,j,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \\ x_{3,r}^{fe} \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_n^{(2,i+1,j,r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j,r)} \\ x_2^{(i+1,j,r)} \\ x_3^{(i+1,j,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \\ x_{3,r}^{fe} \end{bmatrix}; \quad (\text{П.2.10})$$

$$\bar{x}_n^{(2,i,j+1,r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i,j+1,r)} \\ x_2^{(i,j+1,r)} \\ x_3^{(i,j+1,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \\ x_{3,r}^{fe} \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_n^{(2,i+1,j+1,r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j+1,r)} \\ x_2^{(i+1,j+1,r)} \\ x_3^{(i+1,j+1,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \\ x_{3,r}^{fe} \end{bmatrix}; \quad (\text{П.2.11})$$

$$\bar{x}_n^{(2,i,j,r+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i,j,r+1)} \\ x_2^{(i,j,r+1)} \\ x_3^{(i,j,r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \\ x_{3,r+1}^{fe} \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_n^{(2,i+1,j,r+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j,r+1)} \\ x_2^{(i+1,j,r+1)} \\ x_3^{(i+1,j,r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \\ x_{3,r+1}^{fe} \end{bmatrix}; \quad (\text{П.2.12})$$

$$\bar{x}_n^{(2,i,j+1,r+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i,j+1,r+1)} \\ x_2^{(i,j+1,r+1)} \\ x_3^{(i,j+1,r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \\ x_{3,r+1}^{fe} \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_n^{(2,i+1,j+1,r+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j+1,r+1)} \\ x_2^{(i+1,j+1,r+1)} \\ x_3^{(i+1,j+1,r+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \\ x_{3,r+1}^{fe} \end{bmatrix}; \quad (\text{П.2.13})$$

Здесь $\bar{x}_n^{(2,i,j,r)}, \bar{t}_n^{(2,i,j,r)}$ – векторы координат $(2,i,j,r)$ -го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно. Формула восполнения перемещений на элементе:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(2)}(t_1, t_2, t_3) = & \bar{u}_n^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_1 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_2 \Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_3 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_3 \Delta_{13} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + \\ & + t_2 t_3 \Delta_{23} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_2 t_3 \Delta_{123} \bar{u}^{(2,i,j,r)}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.14})$$

$$\text{где } \Delta_1 \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r)} - \bar{u}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.15})$$

$$\Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i,j+1,r)} - \bar{u}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.16})$$

$$\Delta_3 \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i,j,r+1)} - \bar{u}_n^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.17})$$

$$\Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i+1,j+1,r)} - \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.18})$$

$$\Delta_{13} \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r+1)} - \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_3 \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.19})$$

$$\Delta_{23} \bar{u}^{(2,i,j,r)} = \bar{u}_n^{(2,i,j+1,r+1)} - \bar{u}_n^{(2,i,j+1,r)} - \Delta_3 \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.20})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{123} \bar{u}^{(2,i,j,r)} = & \bar{u}_n^{(2,i+1,j+1,r+1)} - \bar{u}_n^{(2,i+1,j+1,r)} - \\ & - \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r+1)} + \bar{u}_n^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_{23} \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.21})$$

(верхний индекс «2», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_2).

Функциональная матрица $B(t_1, t_2, t_3)$ имеет вид:

$$B(t_1, t_2, t_3) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{1,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{1,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \\ \beta_{2,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{2,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{2,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \\ \beta_{3,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{3,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \beta_{3,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.22})$$

$$\beta_{p,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = \frac{\partial x_p}{\partial t_1} = \Delta_1 x_p^{(2,i,j,r)} + t_2 \Delta_{12} x_p^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_{13} x_p^{(2,i,j,r)} + t_2 t_3 \Delta_{123} x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.23})$$

$$\beta_{p,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = \frac{\partial x_p}{\partial t_2} = \Delta_2 x_p^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_{12} x_p^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_{23} x_p^{(2,i,j,r)} + t_1 t_3 \Delta_{123} x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.24})$$

$$\beta_{p,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = \frac{\partial x_p}{\partial t_3} = \Delta_3 x_p^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_{13} x_p^{(2,i,j,r)} + t_2 \Delta_{23} x_p^{(2,i,j,r)} + t_1 t_2 \Delta_{123} x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.25})$$

$$\Delta_1 x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i+1,j,r)} - x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.26})$$

$$\Delta_2 x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i,j+1,r)} - x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.27})$$

$$\Delta_3 x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i,j,r+1)} - x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.28})$$

$$\Delta_{12} x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i+1,j+1,r)} - x_p^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_2 x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.29})$$

$$\Delta_{13} x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i+1,j,r+1)} - \bar{x}_p^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_3 x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.30})$$

$$\Delta_{23} x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i,j+1,r+1)} - x_p^{(2,i,j+1,r)} - \Delta_3 x_p^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.31})$$

$$\Delta_{123} x_p^{(2,i,j,r)} = x_p^{(2,i+1,j+1,r+1)} - x_p^{(2,i+1,j+1,r)} - x_p^{(2,i+1,j,r+1)} + x_p^{(2,i+1,j,r)} - \Delta_{23} x_p^{(2,i,j,r)}. \quad (\text{П.2.32})$$

Формула вычисления определителя матрицы $B(t_1, t_2, t_3)$:

$$J_{i,j,r}(t_1, t_2, t_3) = \det[\Lambda_{i,j,r}(t_1, t_2, t_3)], \quad (\text{П.3.33})$$

где $\Lambda_{i,j,r}(t_1, t_2, t_3)$ – матрица Якоби, имеющая вид:

$$\Lambda_{i,j,r}(t_1, t_2, t_3) = B^{-1}(t_1, t_2, t_3) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{1,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{1,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \\ \alpha_{2,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{2,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{2,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \\ \alpha_{3,1}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{3,2}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) & \alpha_{3,3}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.34})$$

П.2.2. Вычисление частных производных от перемещений, деформаций и напряжений на элементе.

Частные производные от перемещений по переменным t_1 , t_2 и t_3 определяются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}}(t_1, t_2, t_3) = \Delta_1 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_2 \Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_{13} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_2 t_3 \Delta_{123} \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.35})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}}(t_1, t_2, t_3) = \Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_3 \Delta_{23} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_3 \Delta_{123} \bar{u}^{(2,i,j,r)}; \quad (\text{П.2.36})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_3} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}}(t_1, t_2, t_3) = \Delta_3 \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 \Delta_{13} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_2 \Delta_{23} \bar{u}^{(2,i,j,r)} + t_1 t_2 \Delta_{123} \bar{u}^{(2,i,j,r)}. \quad (\text{П.2.37})$$

Формула определения частных производных от перемещений по переменным x_1 , x_2 и x_3 имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_p} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}}(t_1, t_2, t_3) = \sum_{q=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial t_q} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}}(t_1, t_2, t_3) \alpha_{q,p}^{(i,j,r)}(t_1, t_2, t_3), \quad p=1, 2, 3. \quad (\text{П.2.38})$$

Формула для компонентов тензора деформаций на элементе:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = & \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_q} u_p^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}} (t_1, t_2, t_3) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_p} u_q^{(2)} \right]_{(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{2,i,j,r}} (t_1, t_2, t_3) \right], \\ & p = 1, 2, 3; \quad q = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{П.2.39})$$

Формула для объемной деформации:

$$\varepsilon^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{p,p}^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3). \quad (\text{П.2.40})$$

Формула для компонентов тензора напряжений на элементе:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) = & \delta_{p,q} \bar{\lambda}_{2,i,j,r} \varepsilon^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3) + \\ & + 2\bar{\mu}_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)}(t_1, t_2, t_3), \\ & p = 1, 2, 3; \quad q = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{П.2.41})$$

где $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера (см. формулу (5.16)).

П.2.3. Определение приведенных к узлам значений напряжений и деформаций с учетом осреднения.

Введем обозначение

$$\chi_{2,i,j,r} = \vartheta_{2,i,j,r} \varphi_{2,i,j,r}^{-1}, \quad (\text{П.2.42})$$

причем уточним, что при $\vartheta_{2,i,j,r} = 0$ будем иметь $\chi_{2,i,j,r} = 0$;

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{2,i,j,r} = & \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.43})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.44})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.45})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.46})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1}; \quad (\text{П.2.47})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.48})$$

– при $i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.49})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.50})$$

– при $i=1$; $j=2, 3, \dots, N_2-1$; $r=1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.51})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.52})$$

– при $i=1$; $j=2, 3, \dots, N_2-1$; $r=N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1}; \quad (\text{П.2.53})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.54})$$

– при $i=N_1$; $j=2, 3, \dots, N_2-1$; $r=2, 3, \dots, N_3-1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.55})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.56})$$

– при $i=N_1$; $j=2, 3, \dots, N_2-1$; $r=1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.57})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i-1,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.58})$$

– при $i=N_1$; $j=2, 3, \dots, N_2-1$; $r=N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1}; \quad (\text{П.2.59})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r-1} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.60})$$

– при $i=2, 3, \dots, N_1-1$; $j=1$; $r=2, 3, \dots, N_3-1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.61})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.62})$$

– при $i=2, 3, \dots, N_1-1$; $j=1$; $r=1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.63})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.64})$$

– при $i=2, 3, \dots, N_1-1$; $j=1$; $r=N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1}; \quad (\text{П.2.65})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r-1} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.66})$$

– при $i=2, 3, \dots, N_1-1$; $j=N_2$; $r=2, 3, \dots, N_3-1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.67})$$

$$\vartheta_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.68})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем: – при $i = 1$; $j = N_2$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.69})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r} + \theta_{2,i,j-1,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.70})$$

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.83})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i,j-1,r-1} + \theta_{2,i,j-1,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.84})$$

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.71})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i,j,r-1} + \theta_{2,i,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.72})$$

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.73})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r}; \quad (\text{П.2.74})$$

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r-1}; \quad (\text{П.2.75})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j,r-1}; \quad (\text{П.2.76})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.77})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j,r-1} + \theta_{2,i-1,j,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.78})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.79})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.80})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r-1}; \quad (\text{П.2.81})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j,r-1}; \quad (\text{П.2.82})$$

– при $i = 1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.85})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.86})$$

– при $i = 1$; $j = N_2$; $r = N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.87})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.88})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j-1,r}; \quad (\text{П.2.89})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j-1,r} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \theta_{2,i-1,j-1,r} = 0; \end{cases} \quad (\text{П.2.90})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r}; \quad (\text{П.2.91})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r}; \quad (\text{П.2.92})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = N_3$ имеем:

$$\varphi_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.93})$$

$$\mathcal{G}_{2,i,j,r} = \theta_{2,i-1,j-1,r-1}. \quad (\text{П.2.94})$$

Приведем ниже формулы для определения напряжений и деформаций в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду $p = 1, 2, 3$ и $q = 1, 2, 3$).

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$;
 $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.95})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.96})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$;
 $r = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.97})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.98})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$;
 $r = N_3$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.99})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.100})$$

– при $i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$
имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.101})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.102})$$

– при $i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.103})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = & \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r} + \\ & + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.104})$$

– при $i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0,1,1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0,0,1) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.105})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0,1,1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0,0,1) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.106})$$

– при $i = N_1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1,1,1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1,1,0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.107})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1,1,1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1,1,0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.108})$$

– при $i = N_1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1,1,0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.109})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1,1,0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.110})$$

– при $i = N_1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1,1,1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.111})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1,1,1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.112})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0,0,1) \theta_{2,i,j} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0,0,0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.113})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1,0,1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0,0,1) \theta_{2,i,j} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0,0,0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.114})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 1$; $r = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0,0,0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.115})$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\ &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1,0,0) \theta_{2,i-1,j,r} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0,0,0) \theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.116})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 1$; $r = N_3$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.117})$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.118})$$

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.123})$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.124})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_2$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.119})$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.120})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.121})$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.122})$$

– при $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_2$; $r = N_3$ имеем:

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.125})$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j} + \\
 &+ \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.126})$$

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}; \quad (\text{П.2.127})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r)} (0, 0, 0) \theta_{2,i,j}; \quad (\text{П.2.128})$$

– при $i = 1$; $j = 1$; $r = N_3$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}; \quad (\text{П.2.129})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j,r-1)} (0, 0, 1) \theta_{2,i,j}; \quad (\text{П.2.130})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} &= \\
 &= \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \\
 &+ \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r}); \\
 \end{aligned}
 \quad (\text{П.2.131})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r}); \quad (\text{П.2.132})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.133})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r}; \quad (\text{П.2.134})$$

– при $i = N_1$; $j = 1$; $r = N_3$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1}; \quad (\text{П.2.135})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r-1)} (1, 0, 1) \theta_{2,i-1,j,r-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j,r)} (1, 0, 0) \theta_{2,i-1,j,r}); \quad (\text{П.2.136})$$

– при $i = 1$; $j = N_2$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \quad (\text{П.2.137})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}); \quad (\text{П.2.138})$$

– при $i = 1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.139})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r)} (0, 1, 0) \theta_{2,i,j-1,r}; \quad (\text{П.2.140})$$

– при $i = 1$; $j = N_2$; $r = N_3$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.141})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1,r-1)} (0, 1, 1) \theta_{2,i,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.142})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = 2, 3, \dots, N_3 - 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r}); \quad (\text{П.2.143})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r}); \quad (\text{П.2.144})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r}); \quad (\text{П.2.145})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r)} (1, 1, 0) \theta_{2,i-1,j-1,r}); \quad (\text{П.2.146})$$

– при $i = N_1$; $j = N_2$; $r = N_3$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.147})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j,r)} = \chi_{2,i,j,r} \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1,r-1)} (1, 1, 1) \theta_{2,i-1,j-1,r-1}; \quad (\text{П.2.148})$$

П.2.4. Алгоритм формирования матрицы граничных условий типа «идеальный контакт».

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_2^+ при задании условий (5.21) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_2^+ определяются по формуле

$$(B_2^+)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 3N_1N_2, \quad q = 1, 2, \dots, 3N_1N_2. \quad (\text{П.2.149})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^+ по формуле (П.2.149) соответствует заданию граничных условий (5.5)-(5.7).

2. Последовательно задаются $i_{g_1} = 1, 2, \dots, N_1$.

Для каждого фиксированного значения i_{g_1} выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно задаются $i_{g_2} = 1, 2, \dots, N_1N_2$. Для каждого фиксированного значения i_{g_2} выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Вычисляется глобальный индекс

$$i_{g_1} = i_{g_1} + (i_{g_2} - 1)N_1. \quad (\text{П.2.150})$$

2.1.2. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.2.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_2$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.2.1.1. Последовательно перебираются $r = 1, 2, \dots, N_3$. Для каждого фиксированного значения r выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.2.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2, 3$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 3(i - 1) + 3N_1(j - 1) + 3N_1N_2(r - 1); \quad (\text{П.2.151})$$

2.1.2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных $\bar{U}_2$ (см. (4.5)) задается

$$\bar{U}_2 = \bar{e}_{j_g}. \quad (\text{П.2.152})$$

2.1.2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (4.6) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (П.2.95), (П.2.97), (П.2.99), (П.2.101), (П.2.103), (П.2.105), (П.2.107), (П.2.109), (П.2.111), (П.2.113), (П.2.115), (П.2.117), (П.2.119), (П.2.121), (П.2.123), (П.2.125), (П.2.127), (П.2.129), (П.2.131), (П.2.133), (П.2.135), (П.2.137), (П.2.139), (П.2.141), (П.2.143), (П.2.145) и (П.2.147) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,3}^{(2)}]^{(i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}$, $[\sigma_{2,3}^{(2)}]^{(i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}$ и $[\sigma_{3,3}^{(2)}]^{(i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}$ тензора напряжений.

2.1.2.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_2^+ определяются по формулам

$$(B_2^+)_{3N_1N_2+i_g, j_g} = [\sigma_{1,3}^{(2)}]^{(1, i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}; \quad (\text{П.2.153})$$

$$(B_2^+)_{3N_1N_2+i_g, j_g} = [\sigma_{2,3}^{(2)}]^{(1, i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}; \quad (\text{П.2.154})$$

$$(B_2^+)_{3N_1N_2+i_g, j_g} = [\sigma_{3,3}^{(2)}]^{(1, i_{g_1}, i_{g_2}, 1)}. \quad (\text{П.2.155})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^+ по формулам (П.2.153)-(П.2.154) соответствует заданию граничных условий (5.8)-(5.10).

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Проект 7.1.7 «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» в рамках Плана фундаментальных научных иссле-

дований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).

2. Проект 7.1.8 «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.
4. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
5. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области: Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строитель-

- ных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
12. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
 13. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
 14. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // *Известия ВУЗов. Строительство*, №10, 2004, с. 8-14.
 15. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
 16. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp.14-19.
 17. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
- СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КИРПИЧНОГО ЖИЛОГО ЗДАНИЯ ПРИ ВЗРЫВЕ БЫТОВОГО ГАЗА ВНУТРИ ПОМЕЩЕНИЯ

М.С. Барабаш, П.Н. Кирьязов, М.А. Ромашкина

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация. Предложена методика определения величины нагрузки от дефлаграционного взрыва. Описаны конечно-элементные модели для оценки взрывоустойчивости и оценки степени поврежденности жилого кирпичного здания, которые использованы для ретроспективного нелинейного анализа реального кирпичного здания, в котором произошел взрыв бытового газа.

Ключевые слова: конечно-элементная модель, взрыв бытового газа, прогрессирующее обрушение, запроектные воздействия, дефлаграционный взрыв, компьютерное моделирование, нелинейный анализ

NUMERICAL MODELLING OF STRESS STRAIN STATE FOR THE BRICK RESIDENTIAL BUILDING IN CASE OF EXPLOSION OF DOMESTIC GAS INSIDE THE PREMISES

Maria S. Barabash, Petr N. Kiryazev, Marina A. Romashkyna

National Aviation University, Kiev, UKRAINE.

Abstract: The author suggests method for determining the load from deflagration wave. The author describes FE models for evaluation of explosion stability and evaluation of the damage rate for brick residential building. These models are used for retrospective nonlinear analysis of real brick building where domestic gas was exploded.

Keywords: finite element model, exploding of domestic gas, progressive collapse, load beyond design value, deflagration wave, computer modelling, nonlinear analysis

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании жилых зданий и производственных помещений часто не предусматриваются дополнительные меры по обеспечению прочности от динамического воздействия внутри помещения. Обычно при проектировании здания расчет на специальную динамическую нагрузку сводится к определению безопасного ударного давления, превышение которого приводит к разрушению сооружения.

Следует отметить, что в последнее время в жилых зданиях, не относящихся к взрыво-

опасным, участились случаи обрушения несущих конструкций с последующим разрушением части или целого здания в результате взрыва природного газа внутри помещения. Кирпичная кладка подвержена значительным разрушениям по сравнению с бетонными или железобетонными несущими элементами, так как практически не сопротивляется действию горизонтальных нагрузок. При сравнительно небольшом прогибе при действии эксплуатационных вертикальных нагрузок, приложенных с эксцентриситетом, происходит потеря устойчивости верхних этажей и конструкций крыши. Крепления

стенных панелей, как правило, не рассчитаны на действие внутренних динамических нагрузок [1].

Нормативная документация многих стран [2-10] обязывает выполнять проектирование зданий и сооружений с учетом возникновения возможных запроектных воздействий, которые могут повлечь за собой прогрессирующее обрушение.

Анализ публикаций. Исследованию проблемы прогрессирующего обрушения посвящены работы Алмазова В. О., Барабаш М. С., Городецкого А. С., Мутка Кяло, Расторгуева Б.С. Плотникова А. И., Хуснутдинов Д. З., Шапиро Г. И., Гурьева В. В., Эйсмана Ю. А., Powell G., Gilmour J.R. и Viridi K. S., Leyendecker E. V. и Ellingwood B. R., McGuire, W. и др. Следует заметить, что в нормативных документах разных стран неоднозначно трактуется «прогрессирующее обрушение». Отличаются не только определения, но и допустимые его размеры.

Разные подходы к моделированию процессов взрыва газа, к определению интенсивности нагрузки при взрыве в замкнутом помещении представлены в работах К. К. Андреева, А. Ф. Беляева, Ф. А. Вильямса, В. В. Воеводского, М. Г. Годжелло, Н. А. Гусева, Я. Б. Зельдовича, В. В. Казеннова, А. А. Ковальского, В.Н. Кондратьева, Г.Г. Орлова, Н.Н. Семенова, Д.А. Франк-Каменецкого, Ю.Б. Харитонов и др.

Из анализа этих работ можно сделать вывод, что в настоящее время нет единства во взглядах и методах расчета конструкций на взрывные воздействия. Различны не только оценки воздействия поражающих факторов на здания, но и расчетные показатели избыточного давления.

В решение проблем обеспечения взрывобезопасности и взрывоустойчивости зданий и сооружений, в том числе и при помощи использования предохранительных конструкций, внесли существенный вклад отечественные ученые: Андрианов Р.А., Бабкин В.С., Баратов А.Н., Белишев И.Р., Бобков С.А., Болодьян И.А., Водяник В.И., Васильев

А.А., Гвоздева Л.Г., Гельфанд Б.Е., Горев В.А., Григорян А.А., Гостинцев Ю.А., Дорофеев С.Б., Зельдович Я.Б., Казеннов В.В., Карпов В.П., Комаров А.А., Корольченко А.А., Макеев В.И., Махвиладзе А.Д., Мишуев А.В., Молчадский И.С., Мольков В.В., Некрасова В.П., Одишария Г.Э., Орлов Г.Г., Пилюгин Л.П., Попов В.А., Румянцев В.С., Сафонов В.С., Стрельчук Н.А., Франк-Каменецкий Д.А., Хуснутдинов Д.З., Шебеко Ю.Н., Шмелев Ю.Н., Щелкин К.И. и др.

Из зарубежных ученых, успешно занимающихся подобными проблемами, следует выделить Bradley D., Canu P., Crescitelli S., Fairweather M., Hirano T., Mitcheson A., Moen I.O., Pasman H.I., Rota R., Solberg D.M., Vasey M.W., Yao C., Zalosh R.G. и др.

Целью данной работы является разработка конечно-элементных моделей для оценки взрывоустойчивости и оценки степени поврежденности жилого кирпичного здания.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Решить все задачи, связанные с прогрессирующим обрушением строительных конструкций, экспериментальными методами не представляется возможным. Развитие компьютерных технологий и численных методов расчета позволяет решать многие задачи с помощью методов математического и компьютерного моделирования. В данной работе предложены конечно-элементные модели и подходы, которые можно использовать в дальнейшем для прогнозирования поведения конструкций при аналогичных запроектных воздействиях.

Рассмотрен случай взрыва бытового газа, произошедшего в одной из секций здания жилого кирпичного дома. Обрушение, которое произошло в результате взрыва (в соответствии с критериями многих норм) можно отнести к прогрессирующему обрушению.

Проведенные после взрыва здания обследования позволили сделать выводы об ошибках в проектных решениях, которые и привели к прогрессирующему обрушению.



Рисунок 1. Деформирована и разрушена кладка наружной несущей стены блок секции жилого дома с образованием трещин с четвертого по второй этаж.

Для проверки результатов обследования были составлены конечно-элементные модели и выполнены расчеты здания на взрывное воздействие, которые подтвердили правильность сделанных предположений, позволили смоделировать характер разрушения, и сделать предложения по реконструкции разрушенного здания.

До происшедшей аварии здание находилось в удовлетворительном состоянии. Конструктивная схема здания выполнена с продольными несущими стенами и поэтажными монолитными поясами. Следует особо отметить, что газификация здания была выполнена после ввода здания в эксплуатацию и, по видимому, этим можно объяснить, что монолитный пояс был рассчитан на неравномерное проседание основания, а вероятность взрыва газа в проекте не рассматривалась. Вследствие этого не было предусмотрено надежное соединение плиты перекрытия и монолитного пояса.

Взрыв внутри здания (без дальнейшего горения) привел к обрушению строительных конструкций, изменению расчетной схемы и нарушению пространственной жесткости одной из секций жилого дома. Повреждены наружные и внутренние стены здания, обрушены междуэтажные перекрытия, а также

железобетонные плиты лоджии. В результате взрыва образовались выпуклости стен.

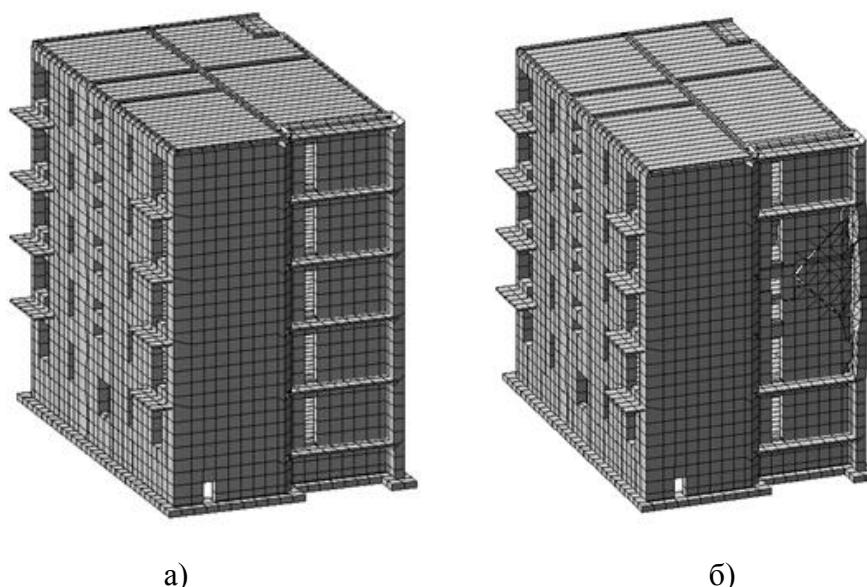
От динамического воздействия взрыва образовались трещины во внутренней стене здания с первого по пятый этаж, трещины в междуэтажных перекрытиях, что свидетельствует о деформировании и снижении пространственной жесткости здания (Рисунки 1, 2).

Для оценки НДС здания в стадии эксплуатации до взрыва и после взрыва было разработано несколько конечно-элементных моделей в программном комплексе (ПК) ЛИРА-САПР (рисунки 3а, 3б). Данные о прочностных и геометрических характеристиках элементов сооружения взяты из результатов обследований. Результаты расчета модели рисунок 3а) показали, что здание жилого дома запроектировано со значительным запасом прочности. Так, например, процент использования несущей способности наиболее нагруженного простенка — 33%. Наличие монолитных поясов значительно повысило пространственную жесткость здания.

Результаты расчета на модели, показанной на рис. 3, б), показали, что снижена несущая способность стен и плит перекрытия в месте обрушения строительных конструкций до 80%, а напряжения в кладке стен 2-го – 4-го этажей значительно превышают нормативные.



Рисунок 2. Обрушены перекрытия над вторым и третьим этажом. Трещины в углах здания шириной раскрытия до 150 мм. Разрушен защитный слой бетона и оголена арматура в междуэтажных монолитных поясах.



*Рисунок 3. Конечно-элементная модель здания жилого дома:
а) до взрыва , б) после взрыва.*

Анализ характера повреждений сооружения после взрыва позволил установить, что были допущены ошибки в конструктивном решении соединения плит перекрытия с монолитным поясом и несущими стенами. Для проверки гипотезы о том, что именно отсутствие надежного соединения плит перекрытия с монолитным поясом стало причиной характера разрушения (взрывной волной были отодвинуты стены, а плиты перекрытия, ли-

шенные опор, упали на нижние этажи), была составлена конечно-элементная модель, фрагмент которой показан на рисунке 4. По всей ширине обрушения плит перекрытия характер разрушения практически одинаков. Это позволило составить плоскую модель фрагмента кирпичной стены в месте взрыва. Кладка моделировалась пластинчатыми конечными элементами (КЭ) с учетом горизонтальных швов.

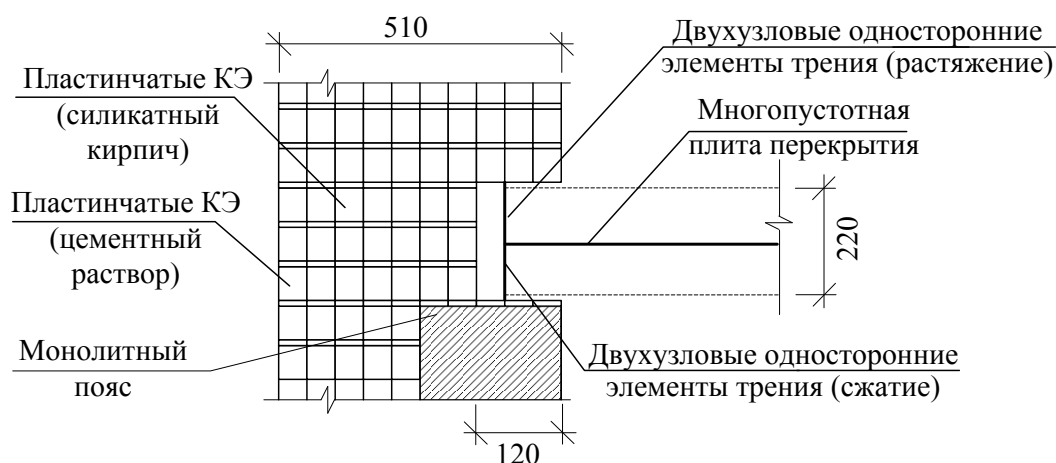


Рисунок. 4. Фрагмент конечно-элементной модели кирпичной стены.

Плиты перекрытия моделировалась стержневыми КЭ. В узле опирания многopустотной плиты на кирпичную наружную стену моделировалась ниша (глубина опирания плиты 110 мм, зазор - 20 мм). Между плитой и монолитным поясом – растворный слой толщиной 12 мм. Связь между ними осуществляется только за счет сил трения. Для моделирования односторонней связи между плитой перекрытия и монолитным поясом использованы специальные конечные элементы КЭ 264 – двухузловые односторонние элементы трения, которые введены на участках контакта плиты перекрытия и монолитного пояса, тем самым дискретизируя растворный слой между поверхностями контакта. В модели зона контакта плиты перекрытия с монолитным поясом при различных сочетаниях нагрузки может раскрываться и закрываться. Двухузловые односторонние элементы трения КЭ 264 работают либо на сжатие, либо на растяжение, пока нагрузка не достигнет предельного уровня. Чтобы обеспечить постоянную работу элементов при любых условиях нагружения на участках контакта плиты перекрытия и монолитного пояса были введены парные КЭ трения, одни из которых работали на сжатие, а другие на растяжение. Если возникающие в растворе напряжения превышают расчетное сопротивление, то нарушается совместная работа стены и плиты перекрытия. В данном случае именно состояние контактной зоны определило ха-

рактер разрушения. Контактное трение зависит от нормальных сил взаимодействия, поэтому в данной задаче учитывался характер и история нагружения, а решение строилось на основе метода пошагового анализа. Такой подход позволяет задачу с односторонними связями и трением между взаимодействующими телами свести к рассмотрению самого нелинейного дискретного контактного слоя. В случае кратковременных нагрузок при сильных взрывах конструкции работают в упругопластической стадии, поэтому задача решалась в физически нелинейной постановке (с учетом реальных диаграмм работы материалов). При формировании такой модели возникают сложности, связанные с недостатком информации о физических свойствах материалов каменной кладки и кладочных растворов. Определение модуля упругости и коэффициента Пуассона строительными нормами и ГОСТами для растворов не предусмотрено. Поэтому при задании жесткостных характеристик раствора кладки использовались данные, приведенные в статье [11]. В этой модели многopустотная плита перекрытия представлена стержнем эквивалентной жесткости.

О величине нагрузки на простенок во время взрыва. Импульсные нагрузки характеризуются непродолжительным главным импульсом, вследствие чего затухание проявляется в меньшей степени, чем при периодических нагрузках. При действии динами-

ческих импульсных сил сооружения, не имеющие достаточной прочности, теряют устойчивость. За короткий промежуток времени действия импульса силы затухания не успевают поглотить значительную долю энергии, выделяемой при взрыве [12-14]. Давление на фронте дефлаграционного взрыва $\Delta p_{\max}$ рассчитывается по формуле (1) [15]:

$$\Delta p_{\max} = 2.1 p_0 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \quad (1)$$

где $p_0 = 105$ Па, атмосферное давление; α - безразмерная скорость распространения пламени:

$$\alpha = \omega / a_0 \quad (2)$$

где $a_0 = 340$ м/с, скорость звука в воздухе; ω - скорость фронта пламени (м/с) определена по методике, изложенной в [15].

В соответствии с табл. 1 [16] природный газ по взрывоопасности относится к чувствительным веществам (класс 3). По классификации окружающей территории (пункт 2.2, [16]), помещение кухни отнесено к третьему виду - среднезагроможденное пространство. По экспертной табл. 2 [16] установлено, что реализуется 4-й режим взрывного превращения облака ($\omega = 150 \div 200$ м/с). Тогда согласно формулам (1) и (2) $\Delta p_{\max} = 47.9$ кПа. Радиус полусферы, образуемой газо-паровоздушной смесью (ГПВС), определен по формуле (3) для следующих значений входящих в формулу величин: $C_{\text{нпв}} = 1.2$; $\mu = 166$ (табл. 9.7 [15]); $T = 390$ К (17°C); $T_0 = 373$ К.

$$\begin{aligned} R_0 &= 0.7813 \sqrt{\frac{2240 \kappa M_T T}{\mu C_{\text{нпв}} T_0}} = \\ &= 0.7813 \sqrt{\frac{2240 \cdot 0.05 \cdot 3.34 \cdot 293}{16 \cdot 5 \cdot 273}} = 3.63 (\text{м}) \end{aligned} \quad (3)$$

где κ - доля массы горючего вещества, перешедшего в облако (газы при атмосферном давлении $\kappa = 1$) (таб.9.8 [15]); T - температура окружающей среды ($T = 20^\circ\text{C} + T_0 = 20^\circ\text{C} + 273 = 293\text{K}$), 20° - оптимальная температура воздуха кухни [17]; $T_0 = 273\text{K}$; $C_{\text{нпв}} = 5$, нижний объемный концентрационный процент воспламенения (таб.9.7 [22]); $\mu = 16$, молярная масса горючего (таб.9.7 [22]); M_T - масса горючего вещества, кг:

$$M_T = V_{\text{ком}} \frac{C_{\text{смх}}}{100} \gamma = 49.7 \frac{9.45}{100} 0.712 = 3.34 (\text{кг})$$

$V_{\text{ком}}$ - объем помещения, в котором произошел взрыв [18]; $C_{\text{смх}} = 9.45\%$, концентрация горючего в стехиометрической смеси $C_{\text{смх}}, \%$; $\gamma = 0.712$ кг/м³, коэффициент перевода природного газа из кг в м³.

Радиус облака в конце взрыва найден по формуле (4) [15]:

$$\begin{aligned} R_n &= R_0 \sqrt[3]{4 \left(1 + \frac{C_{\text{нпв}}}{C_{\text{смх}}} \right)} = \\ &= 3.363 \sqrt[3]{4 \left(1 + \frac{5}{9.45} \right)} = 6.14 (\text{м}) \end{aligned} \quad (4)$$

Для более детального количественного и качественного описания процесса дефлаграции, построена волновая диаграмма (рис.5,6) с использованием методики, предложенной в работе [15]:

Об особенностях расчета в системе ДИНАМИКА-плюс ПК ЛИРА-САПР. В системе ДИНАМИКА-плюс задается информация о профиле воздушной ударной волны, необходимая для расчета динамики во времени (рисунок 7).

Для решения проблемы динамического расчета конструкций используют два основных метода: прямое интегрирование уравнений движения и разложение по собственным формам.

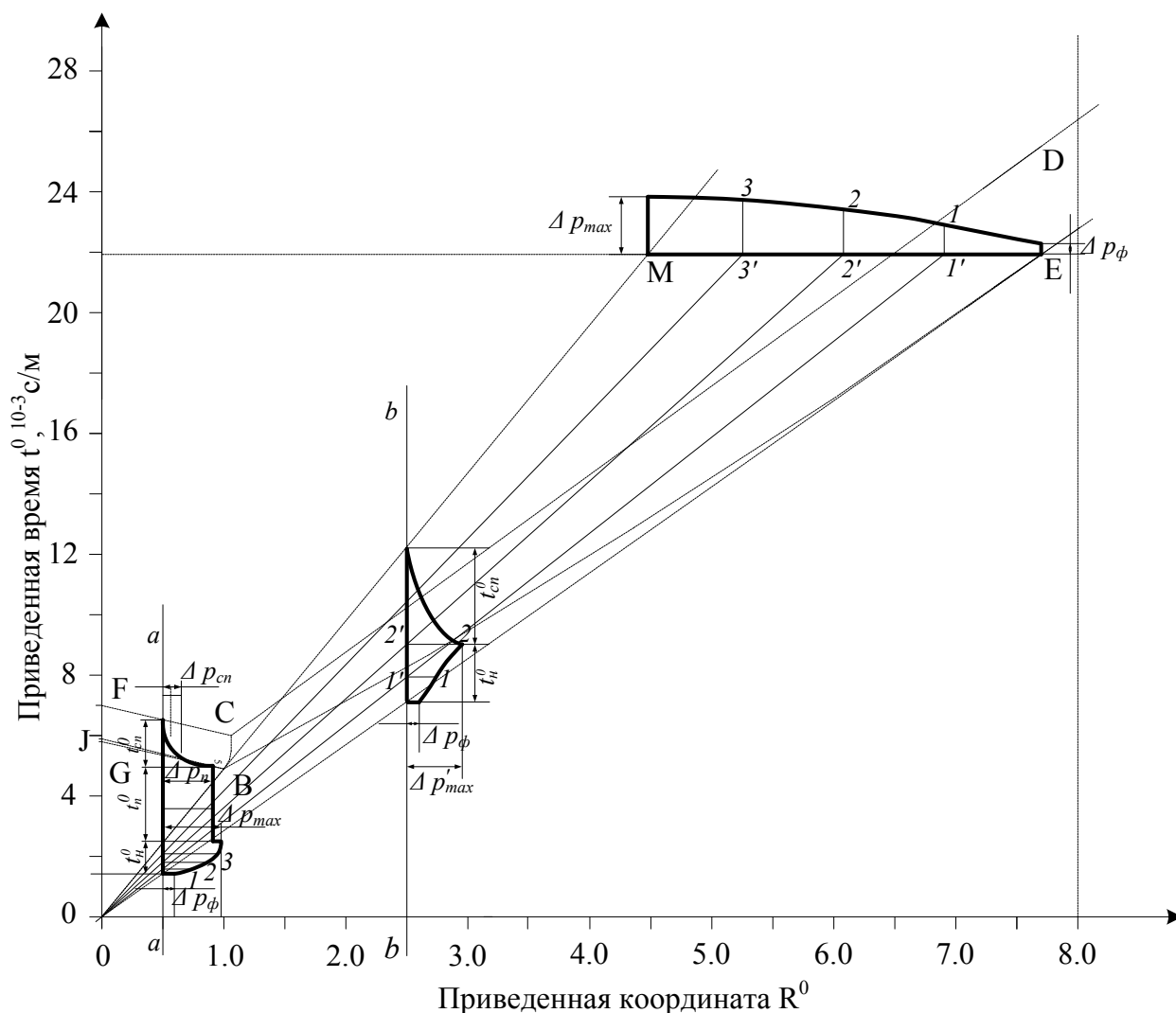


Рисунок 5. Профиль воздушной ударной волны при дефлаграционном взрыве бытового газа.

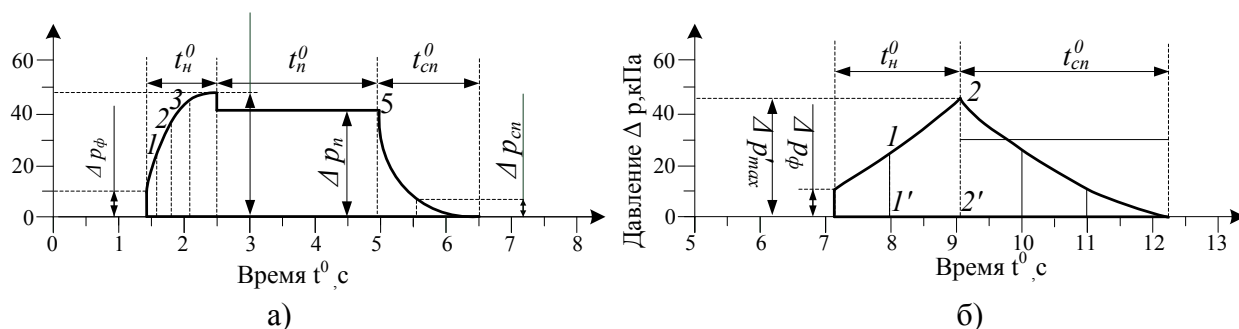


Рисунок 6. Профили воздушной ударной волны при дефлаграционном взрыве бытового газа:
а) $R^0=0.5$, б) $R^0=2.5$

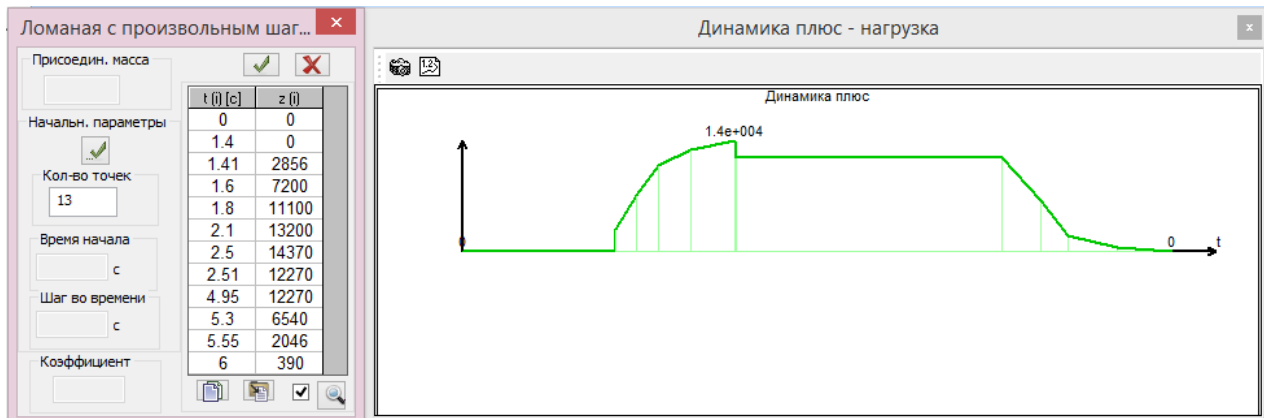


Рисунок 7. Задание динамических воздействий для расчета динамики во времени

Метод разложения по собственным формам можно применять только в рамках линейного расчета, так как принцип суперпозиций недействителен в рамках нелинейной теории. Методы же прямого интегрирования носят общий характер и могут применяться для решения всех задач динамического расчета конструкций.

В динамике во времени используется прямое интегрирование уравнений движения. Термин «прямое» обозначает, что перед интегрированием не выполняется никаких преобразований уравнений.

Расчет на динамические воздействия основан, как известно, на решении системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\vec{u}}(t) + C\dot{\vec{u}}(t) + K\vec{u}(t) = \vec{q}(t) \quad (5)$$

где M , C , K – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости системы; $\vec{u}(t)$, $\dot{\vec{u}}(t)$, $\ddot{\vec{u}}(t)$ – векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений в момент времени t ; $\vec{q}(t)$ – нагрузка, соответствующая моменту времени t .

Считается, что начальные скорости нулевые $\dot{\vec{u}}(0) = 0$, а начальные перемещения получены из решения первого нагружения $\vec{u}(0) = \vec{u}_1$

Из рассмотрения (5), как системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует, что аппроксимировать скорости, ускорения и перемещения можно любыми конечно-

разностными выражениями в перемещениях. Для ускорений в момент времени t , используя метод центральных разностей, можно записать

$$\ddot{\vec{u}}(t) = \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - 2\vec{u}(t) + \vec{u}(t - \Delta t))}{\Delta t^2} \quad (6)$$

Ошибка вычислений по формуле (6) имеет порядок Δt^2 и для вычисления скоростей и перемещений с ошибками того же порядка необходимо использовать выражения

$$\dot{\vec{u}}(t) = \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t - \Delta t))}{2\Delta t} \quad (7)$$

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{u}(t + \Delta t) + \vec{u}(t - \Delta t))}{2} \quad (8)$$

Подставляя выражения (6), (7) и (8) в выражение (5) и определяя вектор $\vec{u}(t + \Delta t) + \vec{u}(t - \Delta t)$, получаем следующую систему уравнений

$$\left[\frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{C}{\Delta t} + K \right] (\vec{u}(t + \Delta t) + \vec{u}(t - \Delta t)) = 2 \left(\vec{q}(t) + \frac{2M}{\Delta t^2} \vec{u}(t) + \frac{C}{\Delta t} \vec{u}(t - \Delta t) \right) \quad (9)$$

«Новые» перемещения $\vec{u}(t + \Delta t)$ определяются по ранее найденным перемещениям $\vec{u}(t)$ и $\vec{u}(t - \Delta t)$ путем решения системы уравнений (9).

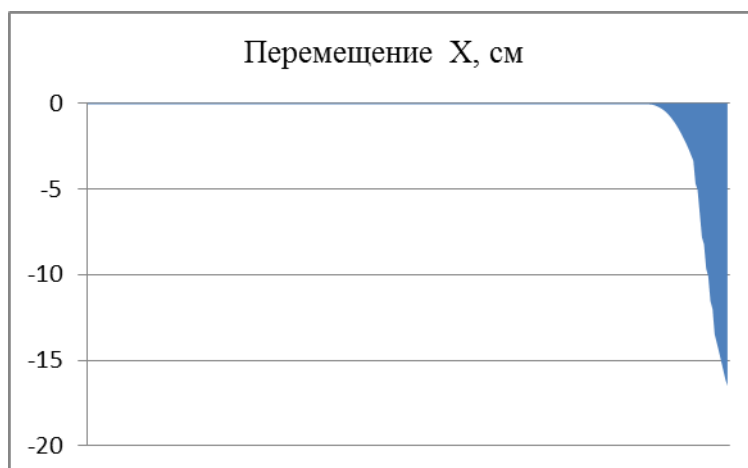


Рисунок 8. График максимального перемещения по оси X, мм фрагмента кирпичной стены (с учетом перемещений от первого статического нагружения).

Подобные схемы интегрирования называются схемами неявного интегрирования. Данная схема интегрирования получила название модифицированного метода центральных разностей. Выражение (9) является исходным при решении, как линейных, так и нелинейных задач прямым динамическим расчетом в ПК ЛИРА-САПР.

При решении задачи (5) используется согласованная матрица масс, построенная по тем же аппроксимирующим функциям, что и строилась матрица жесткости. При таком подходе учитывается и инерция вращения – появляются “крутильные” элементы матрицы масс.

При шаговом интегрировании уравнения колебаний реакция сооружения вычислялась для ряда последовательных интервалов времени Δt , которые выбирались из сходимости процесса. Неупругий характер работы учитывается определением в начале каждого интервала времени новых динамических характеристик, соответствующих изменяемому деформированному состоянию. Процесс вычисления является шаговым и продолжается от начала приложения нагрузки до любого момента времени с аппроксимацией неупругой работы конструкций. Полная реакция сооружения определялась интегрированием уравнений состояния.

Расчет на этой модели дал отклонение стены от вертикали 164 мм, а в результате обследо-

вания установлено, что в результате взрыва стены здания сдвинулись с монолитных поэтажных поясов на величину до 150 мм, т. е. плиты перекрытия лишились опор (площадка опирания - 110 мм).

В месте взрыва возникло повреждение каменной кладки - трещины отрыва кирпичей по растворным швам (рисунок 9). Таким образом, в результате расчета была получена картина разрушения, ставшая причиной возникновения прогрессирующего обрушения. Это подтверждает и правильность предположения о причине такого характера разрушения.

Некоторые плиты после взрыва остались частично опертыми по длинной стороне.

Сменился характер их работы (сжатый в проектном положении слой плиты оказался растянутым). Это повлекло к частичному разрушению плит, характер разрушения плит виден на рисунке 10.

Для исследования НДС таких плит была составлена конечно-элементная модель, показанная на рисунке 11. Многopустотная плита перекрытия моделировалась оболочечными КЭ. Арматурные каркасы, верхняя и нижняя сетка в плите моделировались стержневыми КЭ.

Задача решалась в физически нелинейной постановке. Изменения характера работы плиты от нормального эксплуатационного к аварийному смоделированы с использованием постпроцессора МОНТАЖ ПК ЛИРА-САПР.

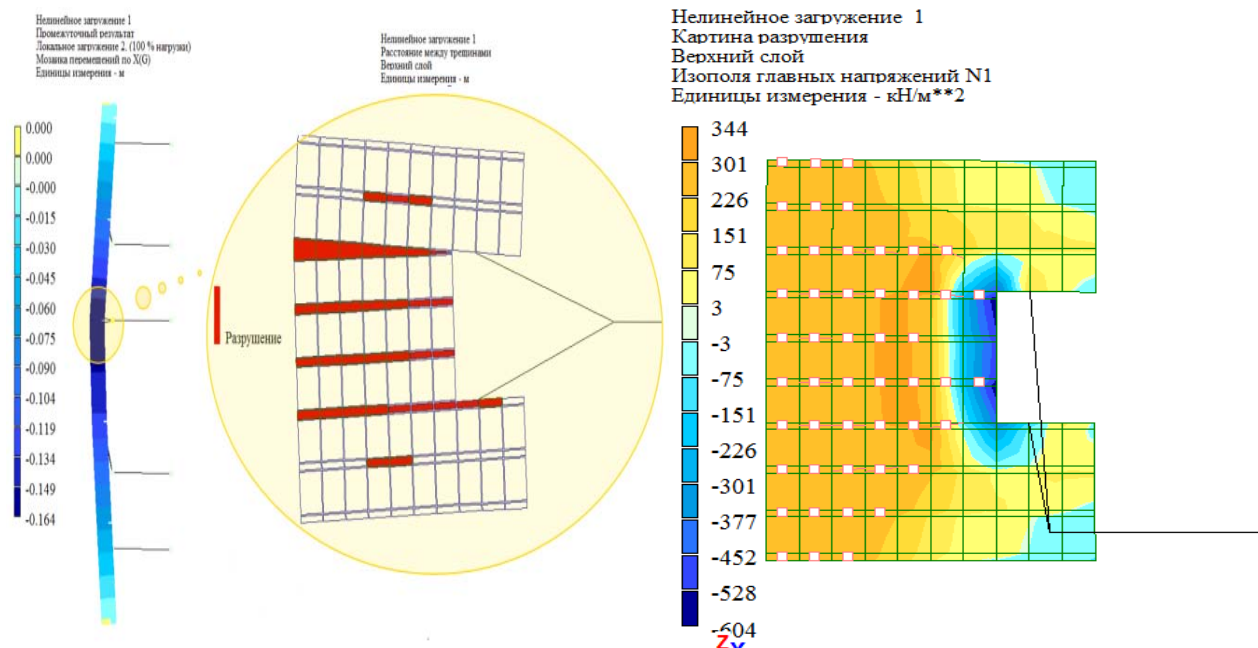


Рисунок 9. Некоторые результаты расчета конечноэлементной модели кирпичного простенка.



Рисунок 10. Обрушены перекрытия над вторым и третьим этажом.

На первой стадии монтажа монтировалась вся КЭ модель, приложена постоянная, длительная и кратковременная нагрузки. На второй стадии монтажа частично демонтировались элементы опоры плиты перекрытия, приложена взрывная нагрузка. На третьей стадии монтажа – приложена нагрузка от веса обрушившейся плиты перекрытия. Характер деформирования и разрушения конечно-элементной модели плиты перекрытия, полученный в результате расчета, похож

на реальную картину разрушения многослойной плиты.

ВЫВОДЫ

Сравнение картины трещин, полученных в результате численного моделирования, с фактическим расположением повреждений, позволяет говорить о достоверности математических моделей и предложенной технологии моделирования, которую в дальнейшем

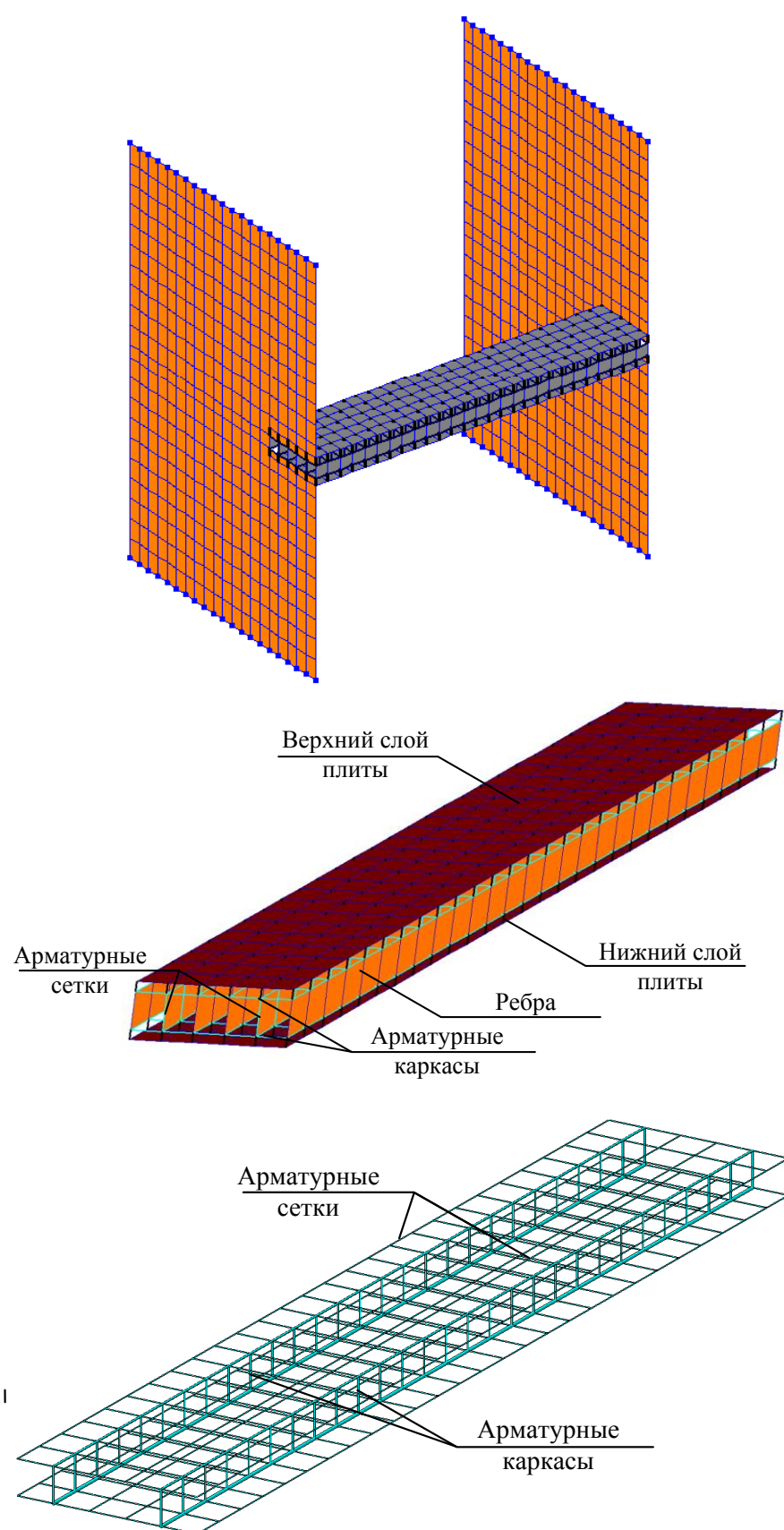


Рисунок 11. Конечно-элементная модель многослойной плиты перекрытия.

можно использовать для численных экспериментов с различными параметрами, влияющими на силу и место взрыва. Установлено, что не предусмотренное в проекте крепление плит перекрытия с монолитным поясом повлекло за собой прогрессирующее обрушение. Полное разрушение здания не произошло лишь благодаря поэтажным монолитным поясам. Монолитные пояса, из-за отсутствия надежных горизонтальных связей с плитами и стенами, восприняли появившуюся дополнительную нагрузку в вертикальной плоскости, и удержали зависшую разрушенную часть здания от дальнейшего обрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пособие по обследованию и проектированию зданий и сооружений, подверженных воздействию взрывных нагрузок. – [Введен в действие постановлением НТС АО «ЦНИИПромзданий»]. – Москва, 2000 г.
2. American Society of Civil Engineers (ASCE), (2005), — Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, SEI/ASCE 7-05, Reston, Va.
3. New York City Building Code, (1998), —Resistance to Progressive Collapse Under Extreme Local Loads
4. General Services Administration (GSA), (2003), —Progressive Collapse Analysis and Design Guidelines for New Federal Office Buildings and Major Modernization Projects
5. British Standards Institute, (2000), —Structural Use of Steelwork in Building, Part 1: Code of Practice for Design - Rolled and Welded Sections, BS 5950-1:2000
6. National Research Council of Canada, (1975, 1977, 1980, 1990, 1995), —National Building Code of Canada, Ottawa, Canada
7. Московские городские строительные нормы. Многофункциональные высотные здания и комплексы: МГСН 4.19-05. – [Введен в действие с 28-12-2005-]. – М., 2005. – 71 с. – (Московские городские строительные нормы).
8. Проектирование высотных жилых и гражданских сооружений: ДБН В.2.2-24:2009. – [Введен в действие с 01-09-2009]. – К.: Минрегионстрой Украины, 2009. – 103 с. – (Государственные строительные нормы Украины).
9. Рекомендации по защите жилых зданий с несущими кирпичными стенами при чрезвычайных ситуациях. - М.: Москомархитектура, 2002. - 18с.
10. Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий. Ю.М. Стругацкий, Г.И. Шапиро, Ю.А. Эйман. Москомархитектуры. М., 1999.
11. **Пангаев В.В., Сердюк В.М.** О деформативных характеристиках цементных кладочных растворов. // Известия вузов. Строительство, 2004, №9, с. 110-113.
12. **Newmark N.M., Rosenblueth E.** Fundamentals of Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York, 1971, 344 p.
13. **Комаров А.А.** Прогнозирование динамических нагрузок при аварийных взрывах в помещениях. // Механизация строительства, №6, 2000, с. 21-26.
14. **Комаров А.А., Бузаев Е.В., Васюков Г.В., Загуменников Р.А.** Моделирование аварийных выбросов взрывоопасных веществ в помещении. // Вестник МГСУ, 2014, №10, с. 132-140.
15. **Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю.** Экстремальные воздействия на сооружения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 594 с.
16. Методика оценки последствий аварийных взрывов топливозвоздушных смесей: РД 03-409-01. – [Введен в действие постановлением Госгортехнадзора России от 26-06-2001]. – М., 2001.
17. Здания жилые и общественные. Параметры микроклимата в помещениях.

ГОСТ 30494-96. - [Введен в действие с 01-03-1999]. – М., 1999.

18. **Рябінін І.М.** Фактори, які впливають на характер руйнувань при аварійних вибухах в приміщеннях. // Збірка наукових праць, 2013, №18, с. 210-216.

Барабаш Мария Сергеевна, академик Академии строительства Украины, директор ООО «ЛИРА САПР», доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных технологий строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1; тел: +38 (095) 286-39-90; e-mail: bmari@ukr.net, <http://www.liraland.ru>

Кирязев Петр Николаевич, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерных технологий строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1; тел: +38 (050) 841-16-25; e-mail: petrkyryazev@gmail.com

Ромашкина Марина Андреевна, аспирантка кафедры компьютерные технологии строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1; тел: +38 (095) 931-52-50; e-mail: mariromashkina@gmail.com.

Maria S. Barabash, Academician of the Academy of Construction of Ukraine, the director of "LIRA SAPR» Ltd, DSc (Eng.), Associate Professor, Professor of Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE.
phone: +38 (095) 286-39-90; e-mail: bmari@ukr.net.

Petr N. Kiryazev, PhD (Eng.), Associate Professor, Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE.
phone: +38 (050) 841-16-25;
e-mail: petrkyryazev@gmail.com

Marina A. Romashkina, Postgraduate student; Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE.
phone: +38 (095) 931-52-50;
e-mail: mariromashkina@gmail.com

ОБОСНОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ КАМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЕЙСМОСТОЙКИХ ЗДАНИЙ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

О.В. Кабанцев

ООО «МонолитСтройПроект», г. Москва, РОССИЯ
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье представлены результаты численных исследований структурных моделей каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния. Предложен и обоснован метод определения границ упругой и пластической фаз деформирования на основе анализа приращений относительных деформаций моделей под возрастающей нагрузкой. На основании результатов численных исследований определены параметры пластичности каменной кладки при различных механических характеристиках материалов и прочности их взаимодействия. Представлены и обоснованы критерии предельных состояний каменных конструкций сейсмостойких зданий, определенные на основе характеристик пластичности каменной кладки.

Ключевые слова: моделирование, численные методы, расчетная модель, напряженно-деформированное состояние, каменная кладка, кирпич, раствор

RATIONALE OF LIMIT STATES MASONRY CONSTRUCTIONS UNDER SEISMIC ACTIONS

Oleg V. Kabantsev

“MonolitStroyProekt” Ltd, Moscow, RUSSIA
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The paper presents the results of numerical research structural models of masonry under biaxial stresses. Proposed and justified method of determining the borders the elastic and plastic deformation on the basis of the analysis of the phase increments relative deformation models under increasing load. Determine the parameters plasticity masonry with different mechanical characteristics of the material and the strength of their interaction. Presented and justified criteria limit states of masonry structures earthquake-resistant buildings, defined on the basis of the masonry characteristics of plasticity.

Keywords: masonry, brick, mortar, modelling, numerical methods, calculation model, strain-stress state

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения параметров предельных состояний конструкций сейсмостойких зданий, выполненных из материалов с выраженными хрупкими свойствами, а также композитов, включающих хрупкие базовые материалы, либо имеющих малопластичные связи между базовыми материалами, представляет собой весьма сложную научную задачу. Физические эксперименты с указанны-

ми материалами демонстрируют быстротекущие процессы лавинообразного разрушения экспериментальных образцов, что не всегда позволяет произвести детальные исследования в зонах формирования начальных локальных разрушений, выявить важные составляющие, определяющие процесс накопление и развитие разрушений.

Для кусочно-однородных композитов, к которым относятся отдельные строительные материалы, например, каменная кладка, опреде-

ление пластических характеристик является весьма актуальной задачей. Это определяется все большим применением деформационных критериев в оценке предельных состояний (см., например, нормы проектирования железобетонных конструкций, использующих предельные величины относительных деформаций). При этом действующие нормы по проектированию ряда важнейших конструкций, включая каменные конструкции, построены исключительно на силовых критериях, которые позволяют получить приемлемые результаты прогноза НДС для отдельных режимов эксплуатации сооружений.

Однако работа несущих конструкций в особых эксплуатационных режимах, например, при сейсмических воздействиях, оценивается с учетом допустимости развития пластических деформаций в некотором объеме, определенном действующими нормами. Действующие нормативные документы учитывают пластическую работу конструкций путем введения коэффициента допускаемых повреждений – K_I (в Еврокоде-8 – коэффициент поведения). Таким образом, для достоверного прогноза НДС конструкций в режиме сейсмических воздействий необходимо знание пластических характеристик конструкционного материала.

Современное состояние исследований по сейсмостойкости конструкций из каменной кладки базируется, в основном, на экспериментальных работах, выполненных лишь для некоторых видов материалов каменной кладки и отдельных конструкций. Получение надежно обоснованных характеристик, определяющих сейсмостойкость каменных конструкций, возможно лишь на основе теоретических исследований процессов упруго-пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях напряженного состояния, соответствующего работе каменных конструкций при сейсмических воздействиях, т.е. в условиях двухосного напряженного состояния. Таким образом, теоретические исследования поведения каменной кладки в фазе пластического деформирования позволят устано-

вить научно обоснованные характеристики предельного состояния для более широкого круга материалов и внутренних свойств каменной кладки, применяемой для сейсмостойких конструкций.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КАМЕННОЙ КЛАДКИ В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Для исследований каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния широко применяются модели на основе феноменологической концепции материала с обобщенными эмпирическими зависимостями о поведении материала под нагрузкой, что не позволяет исследовать важнейшие детали процесса пластической фазы деформирования, включая существенно различные механизмы разрушения кирпича, раствора и узлов их соединения. Таким образом, для детальных теоретических исследований пластической фазы деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния необходимо использовать концепцию моделирования, отражающую структуру кусочно-однородного композита и свойства связей базовых материалов, обеспечивающие их совместную работу. Указанные требования могут быть реализованы в рамках концепции дискретного моделирования, позволяющей разработать модель с учетом внутренней структуры композита.

Структурная модель каменной кладки для условий двухосного напряженного состояния, включая систему критериев прочности, разработана, обоснована и верифицирована в работах [1-6]. В рамках модели учитываются все ключевые условия, обеспечивающие корректное моделирование кладки как структурно-однородного разномодульного композита:

- исследуемый объект из композита аппроксимируется системой структурных элементов;
- границы структурных элементы соответствуют границам материалов, составляющих композит;
- механические характеристики и критерии прочности структурных элементов, аппроксимирующие материалы композита, а также характеристики их взаимодействия принимаются едиными для каждого структурного элемента модели и определяются экспериментально;
- геометрия и взаимное положение структурных элементов определены на начальном этапе до приложения нагрузки.

Для проведения численных исследований в [7-11] представлена, обоснована и верифицирована расчетная технология конечноэлементного расчетного анализа, обеспечивающая выполнение многоэтапного расчета структурной модели с возрастающей нагрузкой с учетом изменений структуры модели при насаждении НДС от этапа к этапу.

Численные исследования процесса упруго-пластического деформирования и разрушения моделей из каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояний выполнены в рамках работ [12, 13]. По результатам численных исследований установлено:

- несущая способность каменной кладки при двухосном напряженном состоянии определяется исключительно величиной адгезионной прочности взаимодействия кирпича и раствора;
- пластическое деформирование каменной кладки (вплоть до последних уровней нагружения) происходит при упругом деформировании базовых материалов – кирпича и раствора;
- границы упругой и пластической фаз деформирования при различных механических характеристиках базовых материалов кладки, а также при разных уровнях адгезионного взаимодействия кирпича и раствора;
- определены механизмы локальных разрушений, оказывающих наибольшее влияние на формирование пластической фазы деформирования с переходом к разрушению модели.

Обобщенные результаты численных исследований процессов упруго-пластического деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния в графическом виде представлены на рисунке 1.

3. УПРУГАЯ И ПЛАСТИЧЕСКАЯ ФАЗЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КАМЕННОЙ КЛАДКИ В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Определение границ упругой фазы деформирования является важной задачей экспериментальных исследований, решение которой позволит достоверно определить параметры всех фаз работы образца под нагрузкой – собственно упругую фазу, фазу пластических деформаций, включая этапы формирования и накопления локальных повреждений, этап образования магистральных трещин с переходом к разрушения образца.

В физических экспериментах существуют некоторые особенности измерения деформаций, формирующихся под возрастающей нагрузкой. Анализ экспериментальных данных, полученных в результате физического эксперимента, представляет основания для некоторой «авторской» трактовки описываемых результатов. Так, в результатах работы [14] в качестве границы линейной работы образца можно принять как результаты, соответствующие уровню нагрузки зоны *A*, так и результаты, соответствующие уровню нагрузки зоны *B* (рисунок 2). С учетом того, что деформации, соответствующие уровню нагрузки зоны *A*, формируют некоторый излом линии, аппроксимирующей график перемещений, то с формальных позиций зону *A* можно принять в качестве границы упругой фазы деформирования.

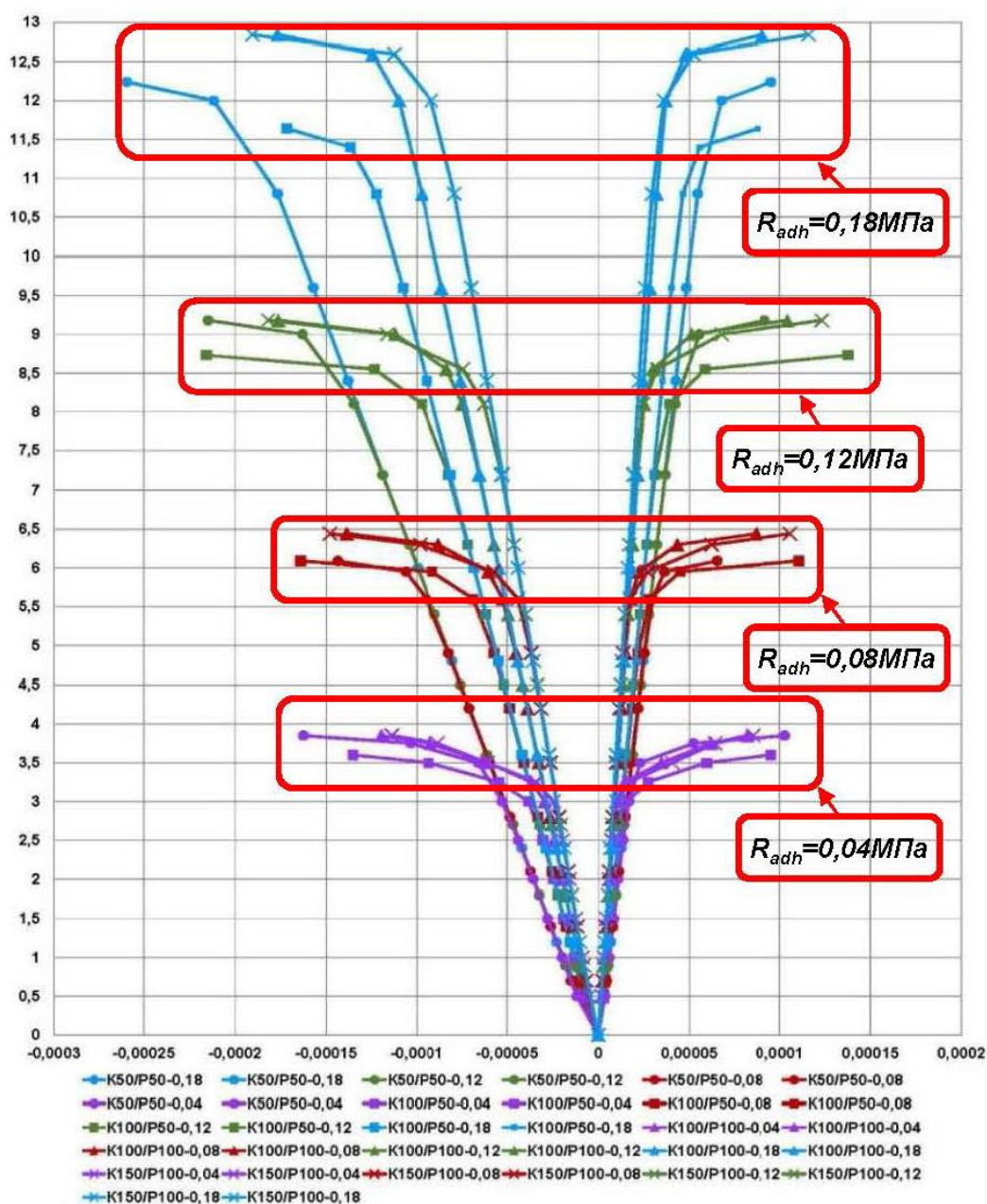


Рисунок 1. Графики «нагрузка – деформации» моделей каменной кладки при различных заданных величинах адгезионной прочности, прочности кирпича и раствора (по вертикальной оси – нагрузка в тоннах, по горизонтальной оси – относительные деформации ϵ).

Однако, следование формальным признакам представляется не вполне обоснованным, так как эти деформации являются первыми значащими величинами, зафиксированными в физическом эксперименте.

С учетом того, что деформации, соответствующие уровню нагрузки зоны А, формируют некоторый излом линии, аппроксими-

рующей график перемещений, то с формальных позиций зону А можно принять в качестве границы упругой фазы деформирования. Однако, следование формальным признакам представляется не вполне обоснованным, так как эти деформации являются первыми значащими величинами, зафиксированными в физическом эксперименте.

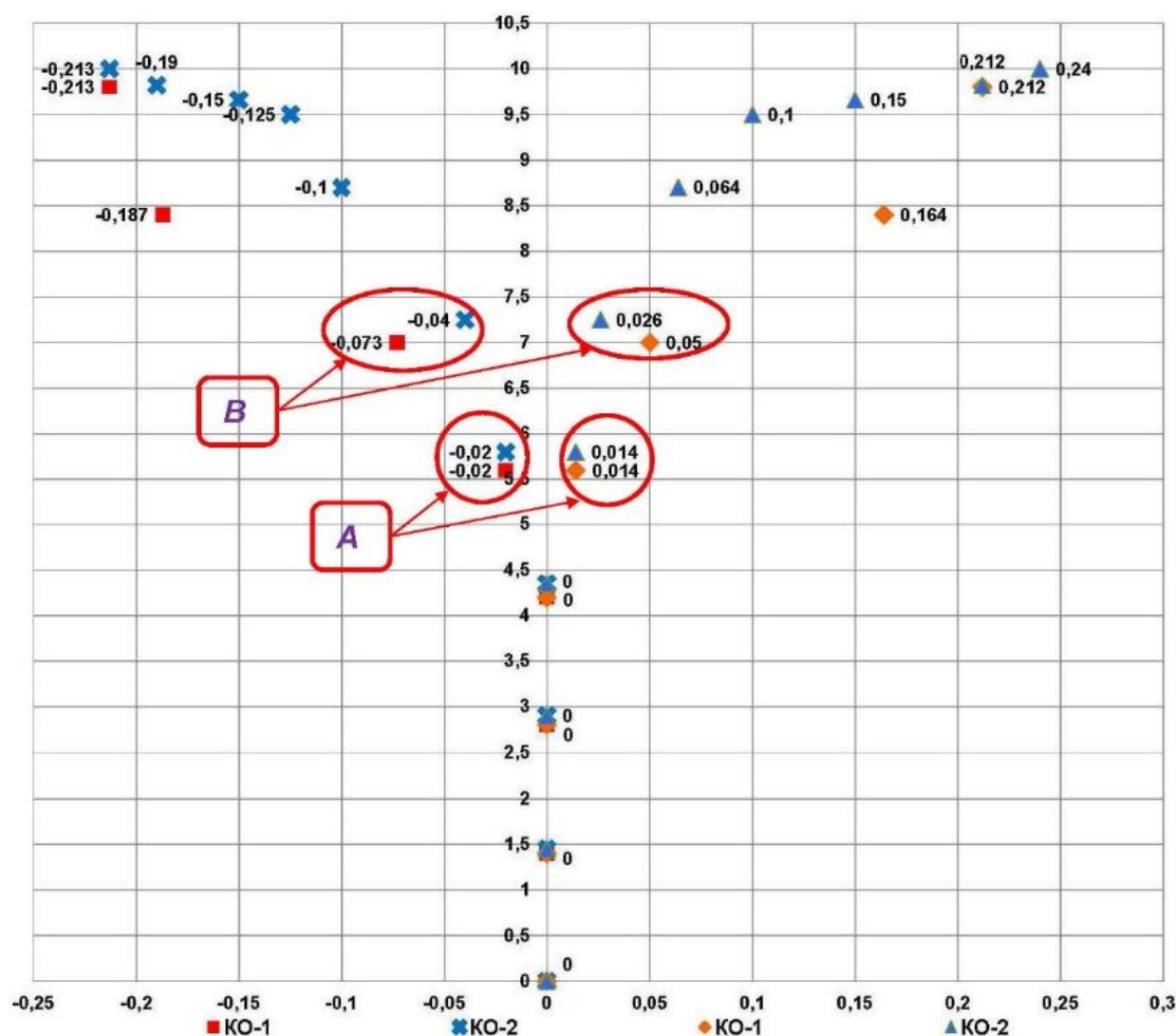


Рисунок 2. Результаты контроля деформаций образцов под нагрузкой в исследованиях [15] (по вертикальной оси – нагрузка в тоннах, по горизонтальной оси – относительные деформации $\epsilon \cdot 10^{-3}$).

Результаты фиксации перемещений свидетельствуют о формировании выраженного изменения характера деформирования образца при увеличении нагрузки после нагрузки, соответствующей зоне В, – наблюдается более существенный прирост деформаций (как сжатия, так и растяжения) при увеличении нагрузки. Таким образом, данные физических экспериментов на позволяют сделать однозначный вывод о границе упругой фазы деформирования. В физическом эксперименте, выполненном в рамках работы [15], фиксация перемещений осуществлена с высоким уровнем точности

измерений, что позволило установить существенно более сложный характер деформирования образцов под возрастающей нагрузкой. При этом получен естественный разброс значений относительно некоторой линии, которой можно аппроксимировать график деформирования образца (рисунок 3). Изучение графиков деформирования образцов из работы [15] позволяет выделить три зоны, в которых может рассматриваться возможность завершения упругой фазы деформирования – зоны А, В и С.

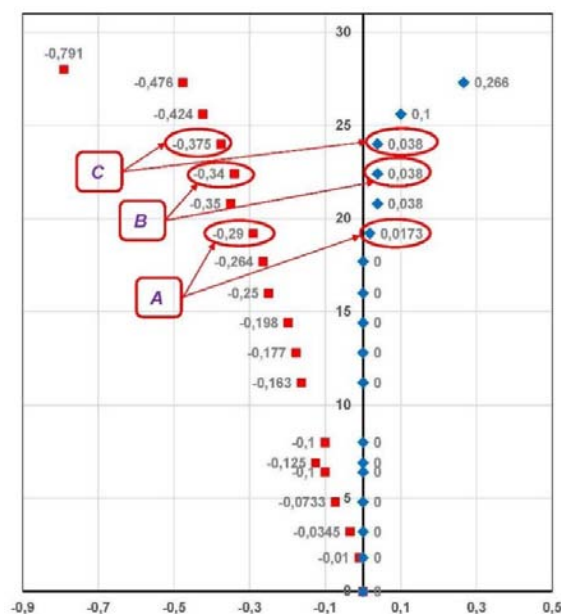


Рисунок 3. Результаты контроля деформаций образцов под нагрузкой в исследованиях [15] (по вертикальной оси – нагрузка в тоннах, по горизонтальной оси – относительные деформации $\epsilon \cdot 10^{-3}$).

В зоне *A* наблюдается первое изменение величины прироста деформаций по отношению к предыдущему этапу, что формально может служить признаком завершения упругой фазы деформирования. Вместе с тем, деформации растяжения в этой зоне являются первыми значащими зафиксированными величинами и при этом график деформаций сжатия близок к линейной функции.

В зоне *B* может рассматриваться некоторый излом графика деформаций растяжения, при этом график деформаций сжатия – практически линейный.

Таким образом, зоны *A* и *B* не могут рассматриваться как границы линейной фазы деформирования образцов. С учетом указанного представляется возможным принять в качестве границы линейного деформирования образцов показатели зоны *C*, что подтверждается наличием значимых изменений в величины прироста деформаций по отношению к предыдущему этапу как в деформациях сжатия, так и в деформациях растяжения.

Следует отметить важные особенности результатов измерения деформаций в работе [15]. Так, в результирующих материалах (ри-

сунок 3) финальные точки деформаций сжатия не имеют соответствующих точек деформаций растяжения. Это объясняется тем, что нагружение образца последним уровнем нагрузки привело к формированию столь существенного объема повреждений (по существу разрушение образца), что вызвало разрушение механизмов фиксации деформаций растяжения (как наиболее чувствительных). Деформации сжатия, зафиксированные на последней стадии, соответствуют состоянию разрушенного образца и не могут рассматриваться (при разрушенных механизмах фиксации деформаций растяжения) в качестве объективной величины, характеризующей пластическую фазу деформирования. Измерение деформаций растяжения (особенно в фазе пластических деформаций) имеет ряд особенностей, причиной которых являются наличие как локальных пустот в кладке, так и неравномерность плотностей раствора в горизонтальных и вертикальных швах. В наибольшей степени неравномерность плотности раствора в швах проявляется в кладке со средним и низким качеством выполнения работ (что является характерным условиями массовой застройки). Указан-

ные особенности кладки приводят к увеличенным (по отношению к теоретическим значениям) величинам деформаций растяжения. Величина отклонения от теоретических значений тем больше, чем ниже качество кладки. Хаотично сформировавшиеся локальные пустоты и неравномерности плотностей раствора крайне сложно учесть в численных исследованиях.

Вместе с тем, в [15] экспериментально доказано, что на самом первом этапе нагружения происходит уплотнение материала кладки вдоль сжатой диагонали, что приводит к обмятию всех точечных контактов раствора и кирпича и закрытию локальных полостей в кладке. Факт уплотнения материала под нагрузкой подтверждается существенным увеличением частоты собственных колебаний образца после первого этапа нагружения (см. [15]). Это позволяет принять в качестве оценочного критерия деформационных свойств каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния, включая фазу пластических деформаций, параметр деформаций сжатия.

Метод численного исследования упруго-пластического деформирования и разрушения каменной кладки при двухосном напряженном состоянии позволяет выполнить детальный анализ всех процессов, происходящих в расчетной модели образца при любом уровне нагрузки и соответствующем напряженно-деформированном состоянии модели. При этом расчетный анализ, основанный на принятой системе критериев прочности, представляет возможность установить факт наличия локального разрушения конечных элементов любой структурной группы по соответствующему критерию прочности.

По результатам численных исследований в части, касающейся деформационных показателей, могут быть построены графики деформирования модели образца кладки при любом варианте механических и прочностных показателей как базовых материалов, так и прочности их адгезионного взаимодей-

ствия. При этом следует учитывать следующие особенности:

- В упругой стадии деформирования модель ведет себя как монолитный материал, состоящий из кусочно-однородных структурных элементов, что определяет линейную зависимость «нагрузка-деформация».
- Превышение показателя прочности в любом конечном элементе любой структурной группы (т.е. «разрушение» такого элемента модели) не может рассматриваться в качестве формального признака завершения упругой фазы деформирования. Это определяется схемой работы любого из элементов модели, включая элементы, аппроксимирующие связи базовых материалов, – при исчерпании прочности по одному критерию из принятых в рамках системы критериев прочности, элемент модели может участвовать в работе расчетной схемы по механизмам, для которых критерии прочности не превышены. Таким образом, принятая методика оценки прочности, основанная на применении системы критериев, соответствующих установленным механизмам разрушения, позволяет обнаружить факт отсутствия влияния локального разрушения по одному из критериев на формирование перехода к пластическому деформированию модели в целом – см. [1-4].
- Состояние конечных элементов структурных групп, аппроксимирующих взаимодействие кирпича и раствора, не является постоянной величиной. Изменения как уровня нагрузки, так и структуры модели приводят к изменению схемы распределения напряжений в ансамбле элементов расчетной схемы, что (в свою очередь) может изменить состояние таких конечных элементов. Например, адгезионный элемент горизонтального шва при изменении напряжений от растяжения к сжатию включается в работу по критерию восприятия сжимающих напряжений и по критерию сдвига в степени, определяемой удерживающими усилиями. Таким

образом, объем «разрушенных» элементов может быть компенсирован объемом элементов, включившихся в работу вследствие изменения их состояния. Очевидно, что факт наличия «разрушенных» элементов не является определяющим в формировании увеличения деформаций, т.е. излома графика деформаций.

Факт перехода модели в фазу пластики может быть установлен по результатам анализа прироста деформаций образца с учетом возможных незначительных отклонений от некоторой «средней» линии. Для этого предлагается использовать параметр приращения величины относительной деформации смежных этапов. Этот показатель обладает необходимой чувствительностью для оценки изменения характера прироста деформаций от этапа к этапу.

Для иллюстрации предложенного подхода выполнен анализ результатов численного исследования упруго-пластического деформирования образца из каменной кладки под возрастающей нагрузкой, модель которого, критерии прочности и методика их анализа соответствуют принципам, изложенным в настоящем разделе. Конкретные механические характеристики элементов модели не являются значимыми, результаты численного исследования рассматриваются лишь в аспекте определения границ фазы упругого деформирования. На рисунке 4 представлен график деформирования расчетной модели каменной кладки (кирпич М100, раствор М50, адгезионная прочность $R_{adh}=0,08$ МПа) под возрастающей нагрузкой. Численными исследованиями установлено, что при нагрузке 35 кН (3,5 т) в модели формируются первые «разрушенные» элементы, что отмечено на графике маркером увеличенного размера.

Рассмотрение графика деформирования модели в целом (рисунок 4) может привести к заключению о том, что линейная фаза деформирования завершается при нагрузке около 54 кН (5,5 т), после которой графики деформирования демонстрируют выражен-

ный излом. Увеличение масштаба позволит зафиксировать излом графиков после нагрузки около 50 кН (5,0 т). При этом данные контроля прочности всех типов структурных элементов модели показывают, что первые «разрушения» элементов фиксируются при нагрузке около 35 кН (3,5 т), что с формальной точки зрения можно также трактовать как переход к пластической фазе деформирования. Такой подход, имеющий выраженный «авторский» характер, неизбежно приведет к существенному различию в итоговых результатах анализа упруго-пластического деформирования модели в целом.

На рисунке 5 приведен график величины приращения относительных деформаций смежных этапов модели, деформации которой представлены на рисунке 4. Величина приращений определяется по формуле:

$$\Delta_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} \quad (1)$$

График приращения относительных деформаций смежных этапов (рис. 5) позволяет на иной методической основе установить точку завершения линейного деформирования образца под возрастающей нагрузкой. На графиках приращений относительных деформаций можно выделить три зоны. Зона *A* соответствует процессу раскрытия растянутых вертикальных швов, который формируется на самых первых этапах нагружения. Зона *B* соответствует этапу линейной работы каменной кладки, в рамках которого можно зафиксировать некоторые отклонения (в пределах нескольких единиц $\varepsilon \cdot 10^{-5}$) величины поэтапных приращений от «средней» линии. Анализ приращений свидетельствует, что начало процесса «разрушения» конечных элементов одной из структурных групп модели (уровень нагрузки около 35 кН) не приводит к более существенным отклонениям от «средней» линии графика. При величине нагрузки около 42 кН (4,3 т), что соответствует точке *C* на графике приращений относительных деформаций, происходит «разру-

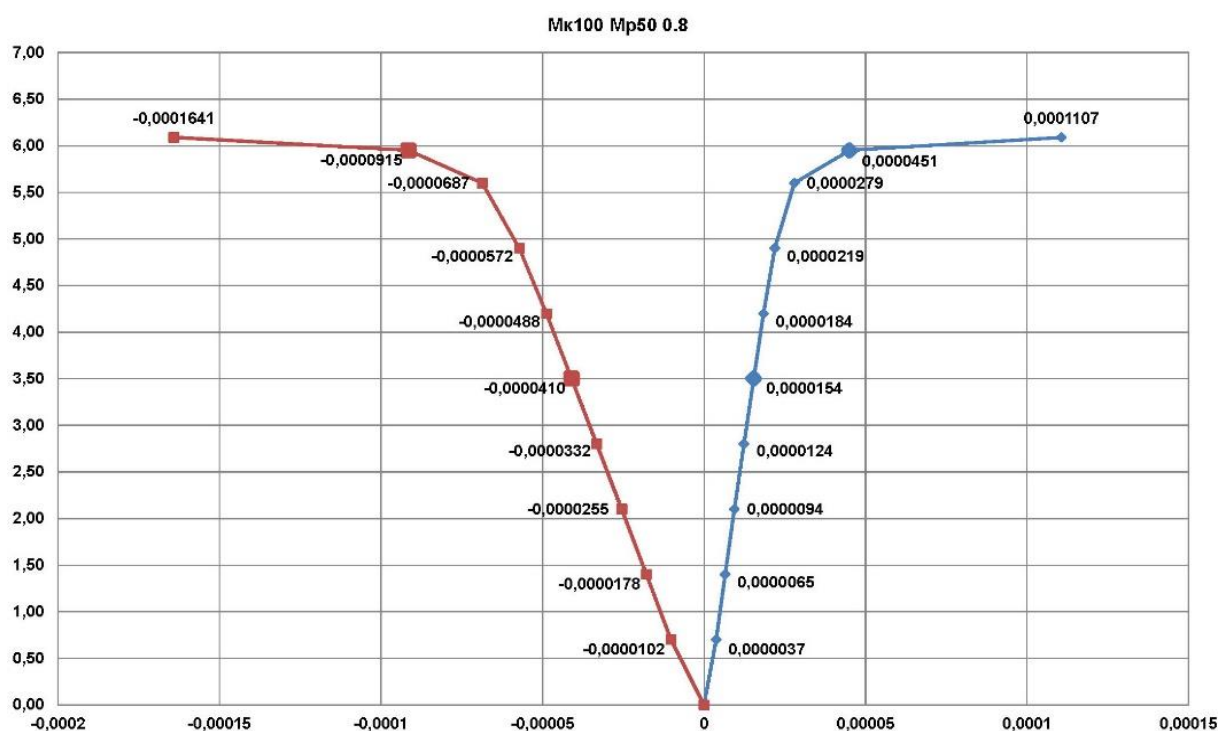


Рисунок 4. График деформирования расчетной модели каменной кладки под возрастающей нагрузкой (по вертикальной оси – нагрузка в тоннах, по горизонтальной оси – относительные деформации ϵ).

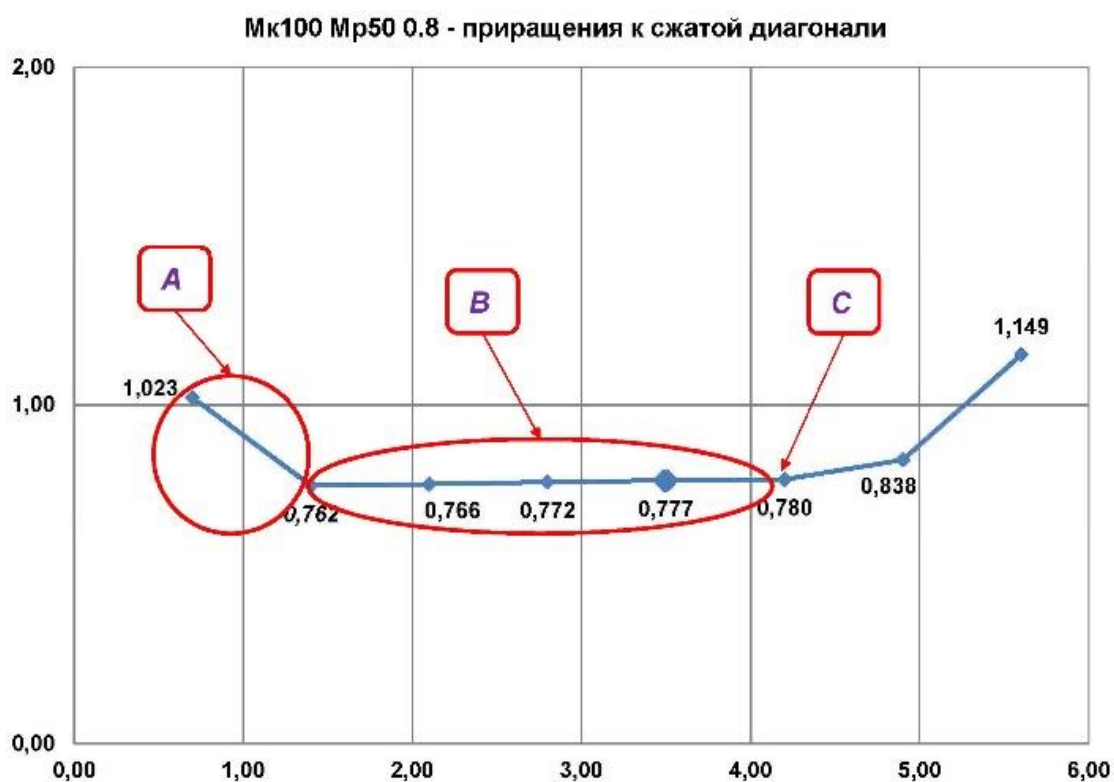


Рисунок 5. График величины поэтапных приращения относительных деформаций (по вертикальной оси – приращения относительных деформаций $\Delta\epsilon \cdot 10^{-5}$, по горизонтальной оси – нагрузка, т).

шение» большего числа КЭ разных структурных групп по различным критериям прочности, что приводит к приращению относительных деформаций образца на величину в десятки единиц $\varepsilon 10^{-5}$. Таким образом, формируется излом графика деформаций, что свидетельствует о завершении фазы упругого деформирования, а точка С на графике является границей раздела фаз упругого и пластического деформирования.

Использование графика приращений относительных деформаций смежных этапов (рис. 5) в качестве инструмента для оценки линейности деформаций позволяет с высокой точностью определить уровень нагрузки, после которого деформации модели получают большие величины приращения, т.е. линейная часть зависимости «нагрузки-деформации» завершена.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИЧНОСТИ КАМЕННОЙ КЛАДКИ В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В качестве параметра, характеризующего способность кладки реализовать некоторую величину пластической фазы деформирования, предлагается (на основе работ Н.Н. Попова и Б.С. Расторгуева [16, 17] и с учетом работы A.S. Veletsos [18]) использовать коэффициент пластичности:

$$\mu = \varepsilon_{tot} / \varepsilon_{el} \quad (2)$$

где: ε_{el} - величина упругих деформаций; ε_{tot} - величина полных деформаций образца на стадии, предшествующей разрушению.

В графическом виде результаты определения коэффициентов пластичности каменной кладки при двухосном напряженном состоянии, выполненные в рамках численных исследований, представлены на рисунке 6.

Анализ полученных результатов показывает, что выявлена выраженная обратная зависи-

мость величины коэффициента пластичности (μ) от уровня адгезионной прочности (R_{adh}): максимальный уровень коэффициента пластичности зафиксирован при наименьшем уровне адгезионной прочности ($R_{adh}=0,04$ МПа), минимальный уровень – при наиболее высоком уровне адгезионной прочности ($R_{adh}=0,18$ МПа).

Столь существенные изменения величины характеристики пластичности определяются различными механизмами пластического деформирования, т.е. процессом формирования и накопления повреждений в структурных элементах каменной кладки исследуемых моделей.

Повышение пластичности при низком уровне адгезионной прочности определяется особенностями формирования микроразрушений (см. [12, 13]), которые в этом случае локализованы в узле контакта базовых материалов кладки, как в элементе композита с минимальной прочностью, и приводит к формированию локальных разрушений в кирпиче и растворе после накопления достаточно большого объема повреждений в зоне их контакта.

Снижение пластичности при высоком уровне адгезионной прочности определяется тем, что вследствие более прочного узла контакта базовых материалов локальные разрушения начинают формироваться в материале раствора и материале кирпича, который (в случае использования керамики) обладает выраженными хрупкими свойствами.

Очевидно, что важнейшим фактором, определяющим весь процесс пластической фазы деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния, является механизм локальных разрушений в зоне взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальном шве по схемам «отрыв и срез при действии растягивающих напряжений» (условный тип 3) и «срез при действии сжимающих напряжений» (условный тип 4). А с учетом многократной разницы в объемах разрушений по указанным типам (объем разрушений по критерию тип 4 превосходит

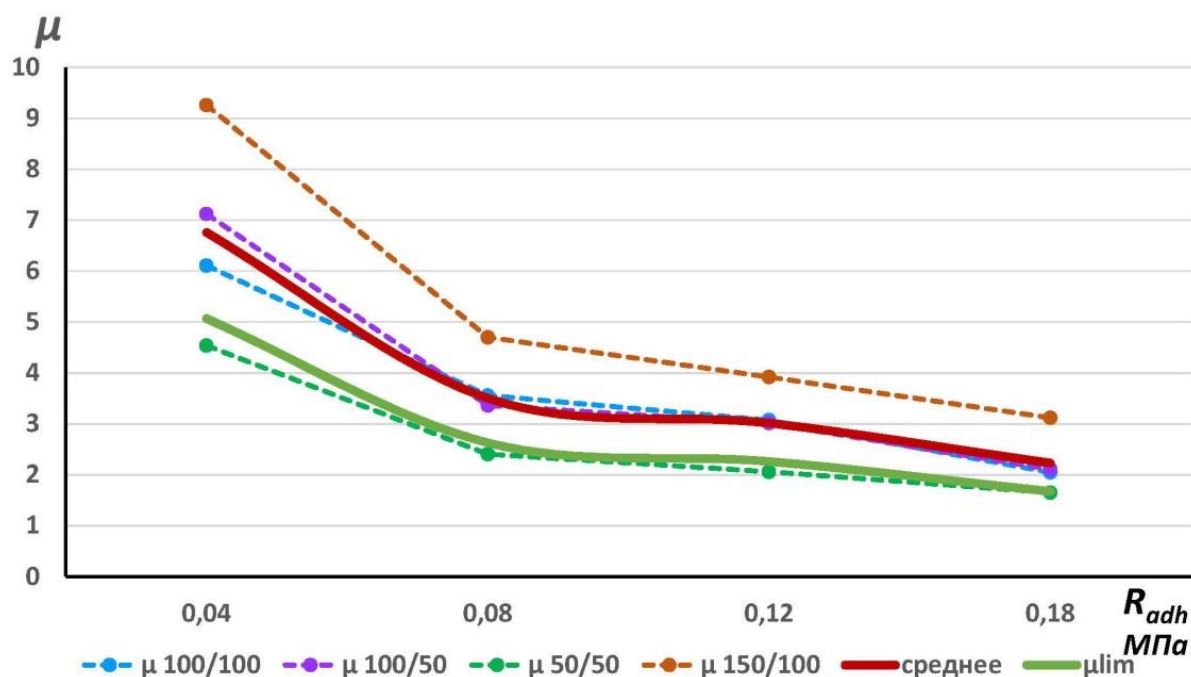


Рисунок 6. Графики коэффициентов пластичности (μ - по вертикальной оси) каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния (по горизонтальной оси – величина адгезионной прочности R_{adh} , МПа).

аналогичный объем по критерию тип 3 более чем в 4 раза - см. [12]), можно сделать вывод о ключевой роли процесса локальных разрушений по схеме «срез при действии сжимающих напряжений», который определяет величину характеристики пластических свойств каменной кладки.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ КАМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЕЙСМОСТОЙКИХ ЗДАНИЙ

Оценка сейсмостойкости зданий (прогноз уровня сейсмостойкости при проектировании новых зданий и сооружений) базируется на принципах допущения пластических деформаций конструкций при сейсмических воздействиях. Работа конструкций за пределами упругости (т.е. с реализацией пластической фазы деформирования) учитывается путем введения в методику определения сейсмической нагрузки специального коэффи-

циента, который в отечественных нормах [19] имеет наименование «коэффициента допускаемых повреждений» конструкций зданий и сооружений (K_I), а его величина зависит от уровня допускаемых повреждений, реализуемых несущими конструкциями различного вида. Eurocode 8 [20] содержит «коэффициент поведения» конструкции, имеющий аналогичный физический смысл. Величина «коэффициента допускаемых повреждений/поведения» изменяется от нуля до единицы. По существу, величина величины «коэффициента допускаемых повреждений/поведения» является характеристикой предельного состояния конструкции, а определение научно обоснованного значения указанного параметра является важнейшей задачей, успешное решение которой обеспечивает достоверность оценки сейсмостойкости зданий и сооружений.

Одним из методов получения величины «коэффициента допускаемых повреждений/поведения» является анализ состояния несущих конструкций зданий, получивших повреждения при землетрясениях (см.,

например, [21, 22, 23]). Основной целью таких исследований является определение некоторого «допустимого» уровня повреждений конструкций, при котором возможна дальнейшая эксплуатация здания после соответствующего ремонта.

Теоретические исследования по определению «коэффициента допускаемых повреждений/поведения» базируются, как правило, на характеристике пластичности конструкции (коэффициент пластичности μ), либо на параметре повреждаемости конструкции («индекс повреждаемости конструкции» D) - см., например, работы [24, 25, 26, 27, 28], в которых предложены различные подходы к определению указанных параметров, например:

a) по кривизне (для железобетонных элементов):

$$\mu = \frac{k_{\max}}{k_y} \quad (3)$$

где: $k_{\max}$ – максимальная кривизна сечения, соответствующая разрушающей нагрузке; k_y – кривизна сечения, соответствующая началу текучести арматуры;

b) по углу пластического поворота (для железобетонных элементов):

$$\mu = \frac{\theta_{\max}}{\theta_y} \quad (4)$$

где: $\theta_{\max}$ – максимальный угол поворота, соответствующий разрушающей нагрузке; θ_y – угол поворота, соответствующий началу текучести арматуры;

c) по прогибу:

$$\mu = \frac{y_{\max}}{y_y} \quad (5)$$

где: $y_{\max}$ – максимальный прогиб конструкции, соответствующий разрушающей нагрузке; y_y – прогиб, соответствующий

началу текучести арматуры (для железобетонного сечения), для иных материалов – прогиб, соответствующий максимальному уровню упругих деформаций материала конструкции;

d) для железобетонных конструкций (на основе кривизны сечения):

$$D = \frac{k_{\max} - k_y}{k_u - k_y} + \beta_e \frac{\int dE}{M_y k_u} \quad (6)$$

где: $k_{\max}$, k_y , k_u – величины кривизны сечения – максимальная, соответствующая началу текучести арматуры, предельно допустимая, соответственно; dE – необратимо поглощаемая конструкцией гистерезисная энергия; β_e – постоянное значение индекса повреждения; M_y – изгибающий момент в сечении, соответствующий пределу текучести арматуры.

Необходимо отметить, что в рамках оценки повреждаемости по изменению жесткости в ряде работ (например, в [27]) предложено использовать не максимальное значение деформационного фактора, соответствующего разрушающей нагрузке, а некоторое меньшее значение, соответствующее нагрузке, вызывающей «допустимую» величину деформаций (повреждения) конструкции – K_m , k_u и т.п. Таким образом, оценка повреждаемости конструкций требует знания дополнительных параметров, характеризующих способность конструкции реализовывать пластическую фазу деформирования в той степени, которая обеспечивает возможность эксплуатации поврежденной конструкции после сейсмического воздействия.

Очевидно, что для каменной кладки, как материала с выраженными анизотропными свойствами с существенно различающимися характеристиками пластичности при использовании разных материалов, установление предельно допустимых величин уровня пластического деформирования является весьма важной задачей.

Для условий осевого сжатия в работах Л.И. Онищика [29] показано, что существует не-

которая предельная величина пластических деформаций и соответствующих локальных повреждений конструкции, после которой неизбежно последует ее разрушение. Подтверждение данных Л.И. Онищика получено в работах Б.С. Соколова [30]. Для каменных конструкций в условиях двухосного напряженного состояния исследований по определению уровня коэффициента пластичности μ , соответствующего допустимому уровню повреждения, ранее не выполнялось.

Однако, для обширного круга анизотропных материалов проведены исследования по определению характерных особенностей пластической фазы деформирования таких материалов при двухосном напряженном состоянии. Так, в работах В.Е. Панина [32], В.Н. Никифоровского [31] и других авторов обоснован предел пластического деформирования анизотропных материалов $\mu_{lim}=0,85\mu_{max}$, после превышения которого развиваются процессы полного разрушения материала. Анализ выполненных с участием автора физических экспериментов (например, [14, 15, 33, 34]) показывает, что предельная величина относительных полных перемещений, после которых наступает необратимое разрушение, равна: $\varepsilon_{lim}=0,75\div 0,85\varepsilon_{max}$. Необходимо подчеркнуть, что объем экспериментальных исследований на образцах из каменной кладки незначителен и для определения статистически обоснованного среднего значения предельных относительных деформаций физические эксперименты необходимо продолжить. Представляется целесообразным для дальнейших работ принять предельное значение перемещений

$$\varepsilon_{lim} = 0,75\varepsilon_{max}.$$

С учетом принятия ограничений на предельную величину относительных деформаций, обеспечивающих сохранность поврежденного материала (конструкции) предельная величина коэффициента пластичности μ_{lim} для каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния равна:

$$\mu_{lim} = \frac{0,75 \cdot \varepsilon_{tot}}{\varepsilon_{el}} = 0,75\mu_{max} \quad (7)$$

где: ε_{tot} ; ε_{el} – величины относительных деформаций – максимальная и упругой фазы, соответственно.

Таким образом, на основе установленных предельных величин коэффициента пластичности μ_{lim} представляется возможным определить значения коэффициента допускаемых повреждений (K_I). Методика определения коэффициента K_I может быть принята на основе гипотезы Н. Ньюмарка [35]. С учетом некоторых уточнений, касающихся жесткостных параметров конструкций, работающих в упругом и упруго-пластическом режимах, для сооружений с величиной основного тона собственных колебаний $0,1 \geq t \geq 0,5$ сек. значение K_I определяется по формуле:

$$K_I = \frac{1}{2\mu_{lim} - 1} \quad (8)$$

На основе (2) и (8) для каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния при различных величинах адгезионной прочности взаимодействия базовых материалов R_{adh} рассчитаны значения величин коэффициентов допускаемых повреждений K_I , как характеристики предельных состояний конструкций сейсмостойких зданий, графическое представление которого приведено на рисунке 7.

6. ВЫВОДЫ

Анализ полученных по результатам численных исследований характеристик предельных состояний каменных конструкций сейсмостойких зданий, определяемых величиной коэффициента допускаемых повреждений (K_I), позволяет сделать следующие выводы:

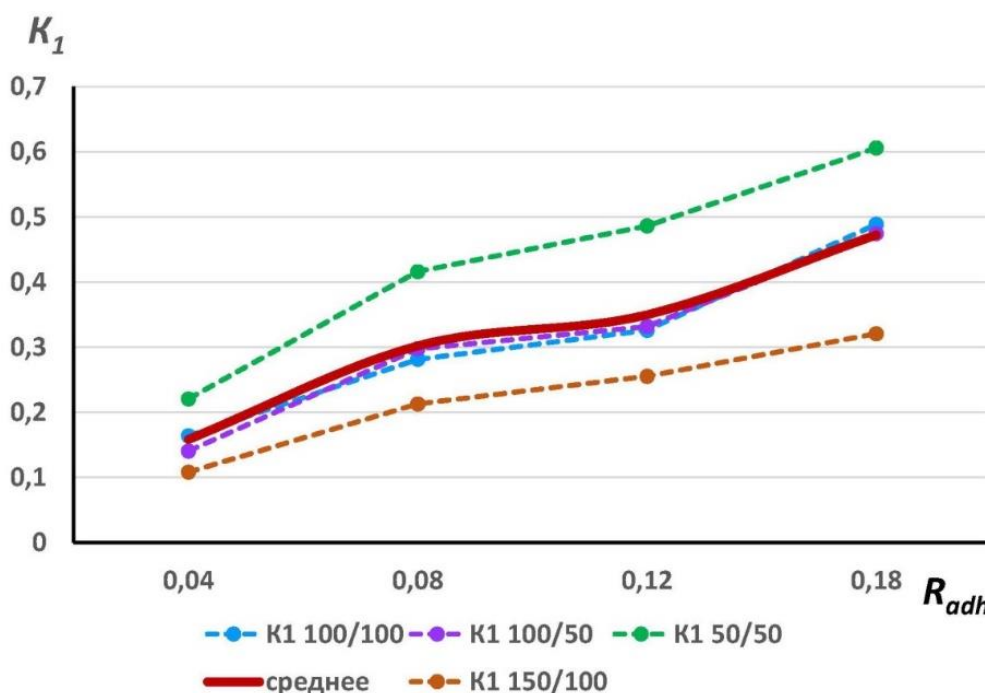


Рисунок 7. Графики коэффициента допускаемых повреждений K_I . Среднее значение рассчитано для моделей из кирпича M100, M150 и раствора M50, M100.

- Для установленного действующими нормами [19] минимально допустимого уровня адгезионной прочности ($R_{adh}=0,12$ МПа) коэффициент $K_I=0,4$ подтверждается выполненными исследованиями, что позволяет сделать вывод о корректности и обоснованности принятой в нормах величины.
- Для уровня адгезионной прочности $0,04 \leq R_{adh} \leq 0,08$ МПа, при которой реализуется выраженная пластическая фаза деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния, что соответствует концепции действующих норм, целесообразно ввести в нормы величину коэффициента $K_I=0,35$. Такое значение K_I (с некоторым запасом) обеспечит реализацию требований норм по обеспечению не превышения приемлемого уровня повреждений конструкций при расчетном землетрясении.
- Для уровня адгезионной прочности $R_{adh}=0,18$ МПа, что соответствует уровню I-й категории каменной кладки по сейсмическим свойствам, необходимо уста-

новить повышенное значение коэффициента $K_I=0,55$. Такое значение K_I (с некоторым запасом) соответствует реализуемой величине пластической фазы деформирования каменной кладки с повышенным нормальным сцеплением, что обеспечит реализацию требований норм по обеспечению не превышения приемлемого уровня повреждений конструкций при расчетном землетрясении.

Таким образом, повышение адгезионной прочности сверх некоторого обоснованного уровня (по результатам выполненных исследований может быть принята величина $R_{adh}=0,12$ МПа) приведет к снижению величины пластической фазы деформирования, что (при повышении уровня несущей способности) определяет требования по увеличению значения коэффициента допускаемых повреждений (K_I).

Применение при выполнении каменной кладки клеевых составов, обеспечивающих повышенный уровень адгезии ($R_{adh}>0,18$ МПа), может быть рекомендовано после дополнительных исследований, которыми необходимо подтвердить обеспечение сей-

смостойкости каменных конструкций в условиях низкого уровня пластичности.

Для подтверждения сейсмостойкости каменных конструкций с уровнем адгезионной прочности $R_{adh} < 0,04$ МПа необходимо продолжить экспериментальные исследования с использованием образцов с контролируемой величиной адгезионной прочности. По результатам таких исследований необходимо выполнить дополнительную процедуру верификации структурной модели, что обеспечит корректное научное обоснование возможности (или недопустимости) использование таких уровней адгезионной прочности для создания сейсмостойких конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kabantsev O.V.** Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 1. Masonry as Simulation Object. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 725-726, 2015, pp. 681-696.
2. **Kabantsev O.V.** Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 2. Strength Criteria and Numerical Experiment. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 725-726, 2015, pp. 808-819.
3. **Кабанцев О.В.** Дискретная модель каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния. // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*, 2015, №4, с. 43-58.
4. **Кабанцев О.В., Тамразян А.Г.** Моделирование упруго-пластического деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, Issue 11, Volume 3, pp. 87-100.
5. **Кабанцев О.В.** Частные критерии прочности каменной кладки для анализа упруго-пластического деформирования. // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*, 2013, №3, с. 36-41.
6. **Кабанцев О.В.** Деформационные свойства каменной кладки как разномодульной кусочно-однородной среды. // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*, 2013, №4, с. 36-40.
7. **Кабанцев О.В., Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В.** Технология расчетного прогноза напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2011. – ISSUE 3. vol. 7. – Pp. 110-117.
8. **Кабанцев О.В.** Верификация расчетной технологии «Монтаж» программного комплекса «SCAD». // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2011, Volume 7, Issue 3, pp. 103-109.
9. **Kabantsev O.V., Perelmuter A.V.** Modeling transition in design model when analyzing specific behaviors of structures. // 11th International Conference on Modern Building Materials, Structures and Techniques MBMST 2013, Vilnius, 2013, Volume 57, pp. 479-488.
10. **Кабанцев О.В., Тамразян А.Г.** Учет изменений расчетной схемы при анализе работы конструкции. // *Инженерно-строительный журнал*, 2014, №5, с. 15-26.
11. **Кабанцев О.В., Перельмутер А.В.** Учет изменения жесткостей элементов в процессе монтажа и эксплуатации. // *Инженерно-строительный журнал*, 2015, №5, с. 6-14.
12. **Кабанцев О.В.** Структурный анализ процесса пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 11, Issue 4, pp. 36-51.

13. **Кабанцев О.В., Усеинов Э.С.** Влияние уровня нормального сцепления на процесс пластического деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2015, №4, с. 78-89.
14. **Тонких Г.П., Кabanцев О.В., Симаков О.А., Баев С.М., Панфилов П.С.** Экспериментальные исследования сейсмостойкости каменной кладки наружными бетонными аппликациями. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2011, №2, с. 35-41.
15. **Копаница Д.Г., Кabanцев О.В., Усеинов Э.С.** Экспериментальные исследования фрагментов кирпичной кладки на действие статической и динамической нагрузки. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2012, №4, с. 157-178.
16. **Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.** Динамический расчет железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1974. – 207 с.
17. **Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Забегаев А.В.** Расчет конструкций на динамические и специальные нагрузки. – М.: Высшая школа, 1992. – 319 с.
18. **Veletsos A.S.** Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motion // Proc. Second World Conf. Earthq. Engrg., Japan, Tokio and Kyoto, pp. 895-912.
19. Свод правил СП 14.13330.2014. Строительство в сейсмических районах. СНиП II-7-81*. – М.: Минстрой России, 2014. – 126 с.
20. EN 1998-1. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 1: General rules seismic actions and rules for buildings. – Brussels.: CEN, 2005. – 102 p.
21. **Айзенберг Я.М.** Спитакское землетрясение 7 декабря 1988 года. Некоторые уроки и выводы. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 1999, №1, с. 6-9.
22. **Андреев О.О., Ойзерман В.И.** Уроки землетрясения. Общие выводы. // Карпатское землетрясение 1986 г.; под редакцией А.В. Друмя, Н.В. Шебалина, Н.Н. Складнева, С.С. Графова, В.И. Ойзермана. – Кишинев, 1990, с. 323-325.
23. Газлийское землетрясение 1984 г.: Анализ поведения зданий и инженерных сооружений / Отв. Редакторы: А.И. Мартемьянов, Д.А. Алексеенков, Л.Ш. Килимник. – М.: Наука, 1988. – 118 с.
24. **Рутман Ю.Л.** Выбор коэффициента редукции сейсмических нагрузок на основе анализа пластического ресурса конструкции. // Вестник гражданских инженеров, 2011, №(2)27, с. 78-81.
25. **Симпорт Э.** Методика выбора коэффициента редукции сейсмических нагрузок K1 при заданном уровне коэффициента пластичности μ . // Инженерно-строительный журнал, 2012, №1, с. 44-52.
26. **Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А.** Проблемы учета нелинейностей в теории сейсмостойкости (гипотезы и заблуждения). – М.: МГСУ, 2012. – 192 с.
27. **Banon H., Veneziano D.** Seismic Safety of Reinforced Concrete Members and Structures. // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1982, Volume 10, pp. 179-193.
28. **Uang C.M., Bertero V.V.** Evaluation of seismic energy in structures. // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1990, pp. 77-90.
29. **Онищик Л.И.** Теория прочности каменной кладки на экспериментальной основе. // Экспериментальные исследования каменных конструкций. – М.: Стройиздат, 1939.
30. **Соколов Б.С.** Теория силового сопротивления анизотропных материалов сжатию. – М.: АСВ, 2011. – 160 с.

31. **Никифоровский В.Н., Шемякин Е.И.** Динамическое разрушение твердых тел – Новосибирск.: Наука, 1979. – 271 с.
32. **Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.** Структурные уровни деформации твердых тел / Отв. ред. Н.Н. Яненко // АН СССР. Сиб. отд. Ин-т оптики атмосферы. – Новосибирск.: Наука, 1985. – 163 с.
33. **Кабанцев О.В., Тонких Г.П., Кошаев В.В., Еремин В.Я., Тихонов М.В.** Экспериментальные исследования несущей способности каменной кладки с трещинами при их инъектировании цементным раствором по разрядно-импульсной технологии // Вестник МГСУ, 2011, №2 (т.1), с. 127-135.
34. **Тонких Г.П., Кошаев В.В., Кабанцев О.В.** Экспериментальные исследования несущей способности комбинированной каменной кладки при главных нагрузках. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2007, №6, с. 26-31.
35. **Ньюмарк Н., Розенблюет Э.** Основы сейсмостойкого строительства. Под ред. Я.М. Айзенберга. – М., 1980. – 344 с.

Кабанцев Олег Васильевич, кандидат технических наук, главный конструктор ООО «Монолит-СтройПроект», профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, 129085, г. Москва, проспект Мира, д. 101-Д, корп. 1; email: ovk531@gmail.com.

Oleg V. Kabantsev, PhD, Main constructor “MonolitStroyProject LTD”, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, prospect Mira, 101-D, Bldg. 1., 129337, Moscow, Russia; email: ovk531@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК С ТРЕЩИНАМИ В BK SCAD OFFICE V.21

И.С. Кукушкин, М.А. Орлова

Ивановский государственный политехнический университет, г. Иваново, РОССИЯ

Аннотация: Представляются результаты натурного исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с образованными трещинами. Приводятся выведенные формулы для расчета несущей способности изгибаемых железобетонных элементов с дефектами, а также теоретические и экспериментальные значения разрушающего изгибающего момента. Рассматривается модель работы железобетонных балок с трещинами в BK SCAD Office v.21. Дается анализ влияния различных типов трещин на несущую способность и напряженно-деформированное состояние железобетонных балок.

Ключевые слова: железобетонные балки, трещины, напряженно-деформированное состояние

INVESTIGATIONS OF THE STRESS STRAIN STATE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH CRACKS IN SCAD OFFICE V.21

Igor S. Kukushkin, Marina A. Orlova

Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, RUSSIA

Abstract: In the course of reinforced concrete bending elements production, transportation, installation and operation emergence of various defects, such as normal cracks in the stretched zone and local horizontal cracks in concrete of the squeezed zone is possible. Cracks are formed as a result of violation of manufacturing techniques or normal service conditions of designs, and also because of joint action of loadings and adverse external factors. For the purpose of establishment of influence of various defects on the bearing capacity and a deformations of the reinforced concrete bending elements experimental investigations of beams with normal and horizontal cracks were conducted. At the same time, beams free of defects with similar geometrical sizes, reinforcing and concrete were made and tested. These experiments allowed to develop an engineering method of calculation of the damaged beams, with use of the empirical coefficients considering change of height of the squeezed zone. This article presents results of the investigations of the stress strain state of reinforced concrete beams with different cracks. The sequence of modeling of reinforced concrete beams with cracks in the program complex "SCAD Office" is presented. The loadings scheme represents the beam on two hinged support simulated by volume final elements of 36 type (a 8-nodal final element). Rod elements of the corresponding class and diameter act as reinforcement. In knots of the appendix of external loading special elements are added, load beams by a body weight and the experimental ultimate loading. Cracks are created by cutting of volume elements, reinforcing cores aren't cut. On completion of all necessary calculations the analysis of the stress strain state is made. The maximum values of tension in the compressed concrete of the beams with cracks are defined. Connection of coinciding knots is made, and the beam without cracks having a similar loading, reinforcement and concrete is calculate, and the maximum tension in the compressed concrete for beams free of defects is defined. Formulas for calculation of the bearing capacity of the bending reinforced concrete elements with defects are given. Series of beams, schemes of defects and loadings, characteristics of concrete and reinforcement, as well as ratio of ultimate bending moments of reinforced concrete beams with cracks and analogous beams without cracks, Ratios of tension calculated in the program complex «SCAD Office», and also average values of the theoretical and experimental bearing capacity in each series are given in table. The maximum tension in concrete of the squeezed zone is calculated by c use of empirical coefficients and by means of SCAD are given in table also. In conclusion there is the analysis of different cracks influence on the bearing capacity and the stress strain state of reinforced concrete beams.

Keywords: reinforced concrete beams, cracks, stress strain state.

Опыт обследований железобетонных конструкций показывает, что в процессе их изготовления, транспортирования, монтажа и эксплуатации возможно возникновение различных дефектов, таких как нормальные трещины в растянутой зоне и локальные горизонтальные трещины в бетоне сжатой зоны, которые вызваны нарушением технологии изготовления или нормальных условий эксплуатации конструкций, а также влиянием нагрузок и неблагоприятных внешних факторов.

С целью установления влияния различных дефектов на несущую способность и деформативность железобетонных изгибаемых элементов были проведены экспериментальные исследования балок (рисунок 1), разделенных на 8 серий в зависимости от типа и параметров нормальных и горизонтальных трещин, армирования сечений и прочности бетона.



Рисунок 1. Схема испытания балок.

Одновременно с балками, имеющими трещины, были изготовлены и испытаны 4 серии балок без дефектов, имеющих аналогичные армирование, прочность бетона и геометрические размеры (серии 7, 8, 11, 12). Балки изготовлены из тяжелого бетона различной прочности на сжатие B_{25} , B_{50} , и имеют прямоугольное сечение с конструктивными размерами 120×235 мм, длину 1500 мм и расчетный пролет 1200 мм [3]. Схемы нагружения и параметры трещин, соответствующие различным сериям балок, а также

характеристики материалов указаны в таблице 1. Поврежденный участок расположен в середине пролета в зоне чистого изгиба. Нормальные трещины расположены в растянутой зоне элемента, горизонтальные трещины – в сжатой зоне. Балки серии 1 имеют 3 нормальные трещины высотой $0,21h$, расположенные с шагом $l_{crc} = 100$ мм. Балки серий 2, 3 и 9 имеют 3 нормальные трещины высотой $0,42h$, расположенные с шагом $l_{crc} = 100$ мм, и отличаются между собой прочностью бетона на сжатие (серии 2 и 9) или процентом армирования сечения (серии 2 и 3). Балки серии 4 имеют 5 нормальных трещин высотой $0,42h$, расположенных с шагом $l_{crc} = 50$ мм, (где h – высота поперечного сечения балки). Балки серии 5 имеют 3 локальные горизонтальные трещины длиной по 50 мм, расположенные с шагом 75 мм. Балки серий 6 и 9 имеют 5 нормальных трещин высотой $0,42h$, расположенных с шагом $l_{crc} = 50$ мм и 3 локальные горизонтальные трещины длиной по 50 мм, и отличаются между собой прочностью бетона на сжатие.

Армирование балок выполнено сварными каркасами, состоящими из двух стержней продольной рабочей арматуры из горячекатаной стали периодического профиля диаметром 14 или 20 мм; двух стержней продольной сжатой арматуры из горячекатаной стали периодического профиля диаметром 10 мм, расположенной в приопорных зонах балки; поперечной арматуры из горячекатаной стали периодического профиля диаметром 10 мм установленной с шагом 70 мм; монтажной арматуры, выполненной из холоднодеформированной проволоки периодического профиля диаметром 5 мм. Опытные образцы испытывались на изгиб, как однопролетные шарнирно опертые балки, нагруженные двумя сосредоточенными силами, прикладываемыми в третях пролета. Общий вид каркаса и схема испытаний балок представлены на рисунке 2.

При проведении сравнительного анализа результатов эксперимента определялись степень влияния различных дефектов на несущую

Таблица 1. Варианты рассматриваемых балок.

Серия	Схема дефектов	Диаметр арматуры	Класс бетона
1		14	50
2		14	50
9		14	25
3		20	50
4		14	50
5		20	50
6		20	50
10		20	25
7		14	50
8		20	50
11		14	25
12		20	25

щую способность и момент трещинообразования, устанавливались характер разрушения балок, закономерности развития трещин, прогибов, деформаций бетона и арматуры, в зависимости от параметров трещин, процента армирования сечения и прочности бетона

на сжатие [4]. В результате испытаний установлено, что несущая способность железобетонных балок, имеющих трещины, снижается, в различной степени, в зависимости от параметров трещин.

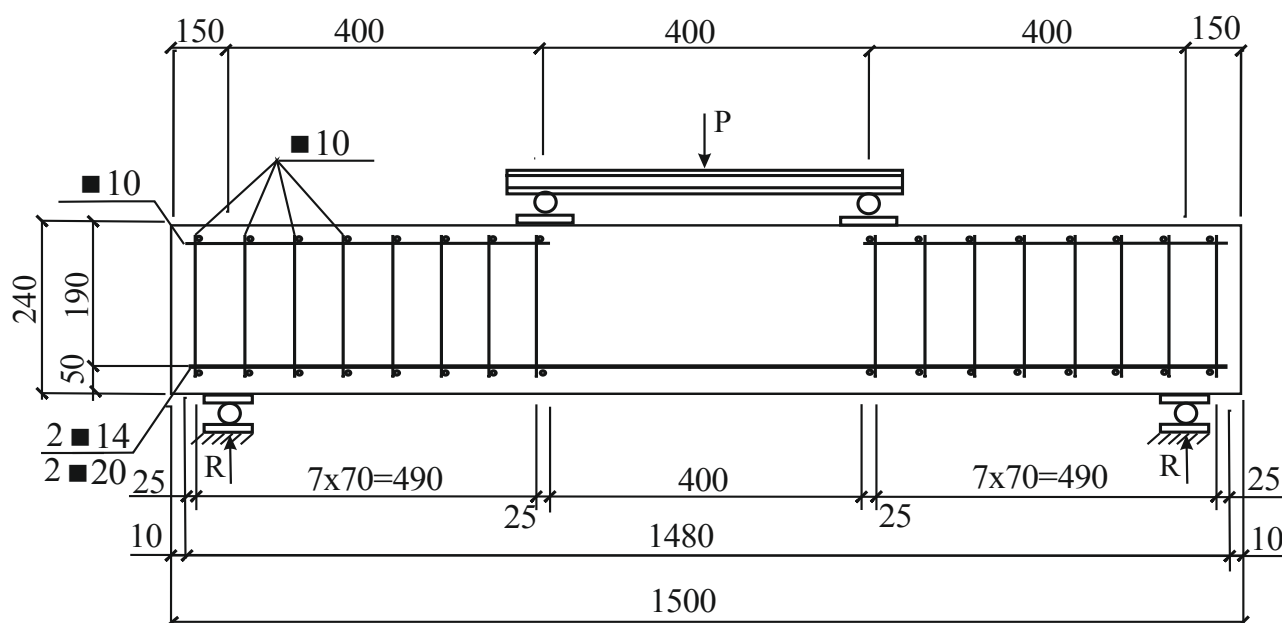


Рисунок 2. Расчетная схема и армирование балки.

Рис. 1. Расчетная схема и армирование балки

Наличие горизонтальных трещин также уменьшает несущую способность изгибаемого элемента. При увеличении прочности бетона и степени армирования сечения влияние трещин на несущую способность балок уменьшается. Прочность балок, имеющих трещины, снижается по сравнению с балками без дефектов в среднем на 8% для балок серии 10 и менее чем на 5% для балок серий 3, 5, 6 [6].

Проведенные эксперименты позволили разработать инженерный метод расчета поврежденных балок, с использованием эмпирических коэффициентов k_v и k_h , учитывающих изменение высоты сжатой зоны [5]. Несущая способность элементов с трещинами определяется в зависимости от максимального напряжения в сжатом бетоне для железобетонных балок с трещинами $\sigma_{bv,h}$ [7], начальной относительной высоты сжатой зоны бетона ξ и размеров поперечного сечения балки b и h_0 :

$$M_b^{v,h} = \sigma_b^{v,h} \cdot \xi \cdot (1 - 0,5\xi) \cdot b \cdot h_0^2 \quad (1)$$

С целью определения максимальных напряжений в бетоне сжатой зоны изгибаемых элементов, при разрушающей нагрузке, был

проведен численный эксперимент, путем моделирования железобетонных балок с трещинами в среде программного комплекса SCAD Office v.21 [1, 2].

Расчетная схема представляет собой балку, смоделированную объемными конечными элементами типа 36 (8-узловой изопараметрический конечный элемент), шарнирно-опертую по двум сторонам (рисунок 3).

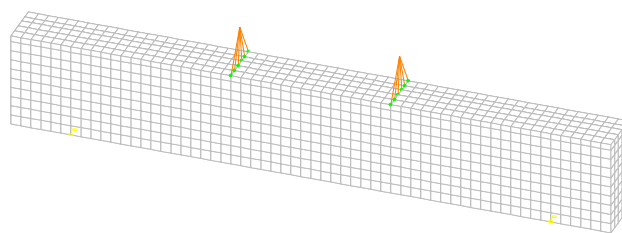


Рисунок 3. Общая схема балки.

В качестве арматуры выступают стержневые элементы соответствующего класса и диаметра (рисунок 4).

В узлах приложения внешней нагрузки добавляются специальные элементы, производится загрузка балки собственным весом и нагрузкой равной экспериментальной разрушающей.

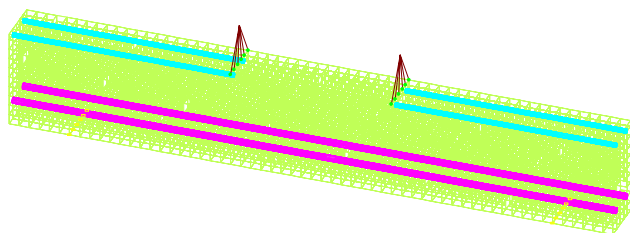


Рисунок 4. Армирование балки.

Трещины создаются путем разрезания объемных элементов (рисунки 5, 6) – арматурные стержни не разрезаются.

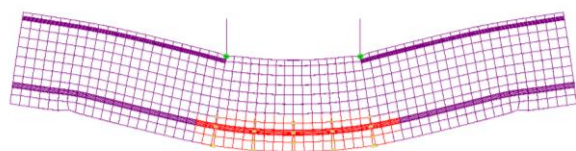


Рисунок 5. «Создание» трещин.

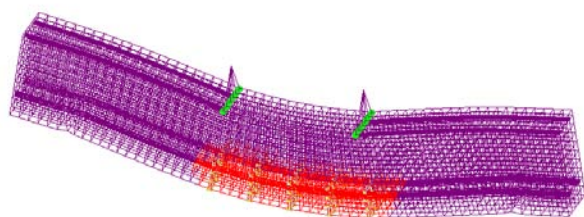


Рисунок 6. «Создание» трещин.

По завершению всех необходимых расчетов производится анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), исходя из карт изополей – изолиний (рисунки 7, 8). Определяются максимальные значения напряжений в сжатом бетоне в зоне чистого изгиба для балки с трещинами σ_{ult} . Производится объединение совпадающих узлов и рассчитывается балка без трещин, имеющая аналогичные загрузке, армирование и прочность бетона, и определяется максимальное напряжение в сжатом бетоне для балок без дефектов σ_{test} .

В таблице 2 приведены соотношения напряжений, вычисленных в программном комплексе SCAD Office v.21 $\sigma_{test}/\sigma_{ult}$; соотношения экспериментальных значений разрушающих моментов балок с трещинами и аналогичных балок без дефектов M_{ult}/M_{test} ; средние

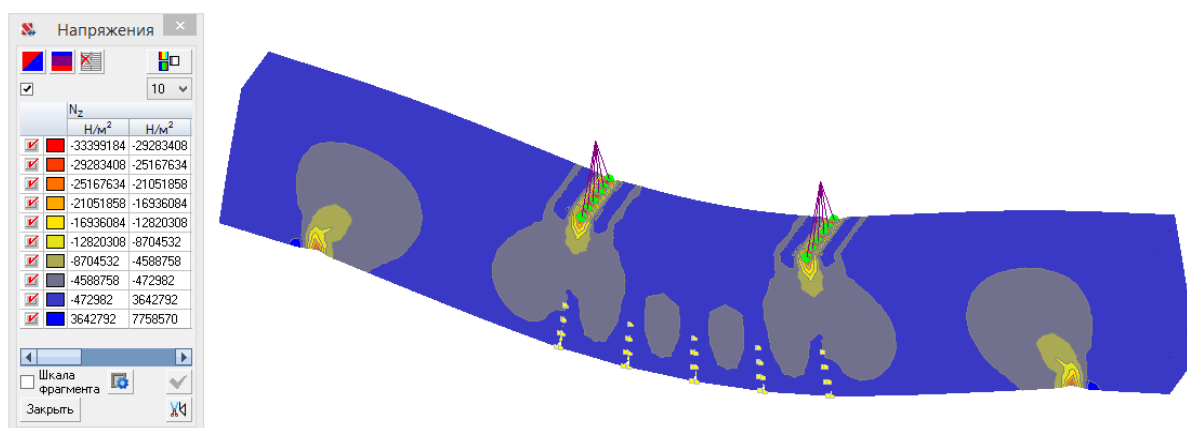
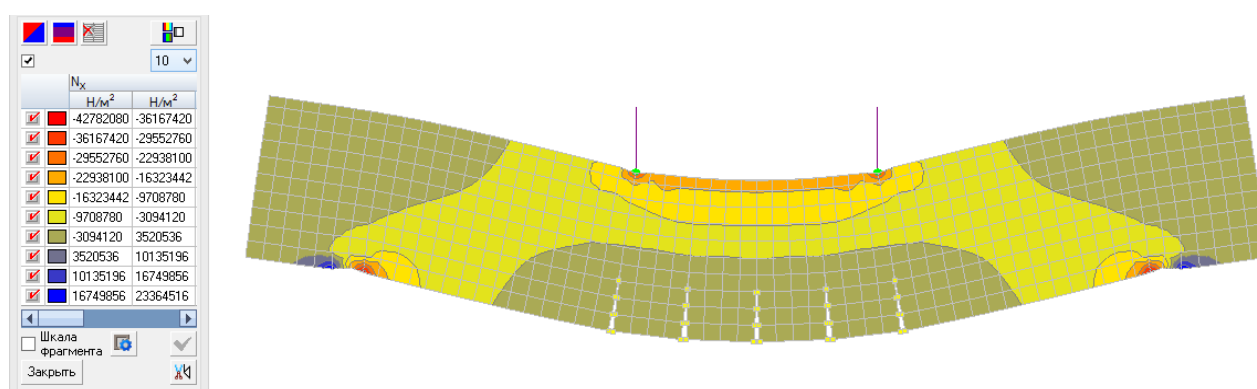
по серии значения экспериментального разрушающего момента, несущая способность, вычисленная по результатам численного эксперимента M_b^{SCAD} и теоретических расчетов M_b^v ; максимальные напряжения в бетоне сжатой зоны вычислены с использованием эмпирических коэффициентов σ_b^v и с помощью SCAD Office v.21 σ_{ult} .

Анализ результатов экспериментальных исследований и теоретических расчетов показал, что трещины в железобетонных изгибаемых элементах оказывают влияние на их напряженно-деформированное состояние. Несущая способность балок с трещинами ниже, чем у аналогичных балок без дефектов на 2 - 18%, в зависимости от прочности бетона, степени армирования сечения, типа и параметров трещин.

Проведенные экспериментальные исследования позволили разработать метод расчета несущей способности с учетом влияния трещин, основанный на теории механики разрушения и использовании эмпирических коэффициентов k_v и k_h . Зная параметры трещин, характеристики материалов, размеры поперечного сечения и используя критические коэффициенты интенсивности напряжений, можно определить максимальные напряжения в бетоне сжатой зоны и несущую способность железобетонных балок с трещинами.

Верность теоретических расчетов подтверждают проведенные физический и численный экспериментальные исследования балок с начальными дефектами.

Предложенная методика занижает фактическую несущую способность, что обеспечивает небольшой запас прочности. Таким образом, инженерный метод расчета, основанный на использовании эмпирических коэффициентов, позволяет вычислить несущую способность балок с трещинами с точностью до 4,8% и с точностью в среднем до 5,9% при расчете с использованием программного комплекса SCAD Office v.21.

Рисунок 7. Изополю напряжений N_z .Рисунок 8. Изополю напряжений N_x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. – М.: СКАД СОФТ, 2015. – 808 с.
2. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Федоровский В.Г., Юрченко В.В. SCAD Office. Реализация СНиП в проектирующих программах. – М.: СКАД СОФТ, 2014. – 480 стр.
3. Орлова М.А. Испытания железобетонных балок с начальными трещинами. Часть 1. Постановка и проведение эксперимента. // Жилищное строительство, 2010, №8, с. 39-42.
4. Орлова М.А. Испытания железобетонных балок с начальными трещинами. Часть 2. Результаты эксперимента. // Жилищное строительство, 2010, №9, с. 38-42.
5. Орлова М.А. Экспериментальные исследования прочности железобетонных балок с трещинами. // Жилищное строительство, 2015, №12, с. 33-37.
6. Тамразян А.Г., Орлова М.А. К остаточной несущей способности железобетонных балок с трещинами. // Жилищное строительство, 2015, №6, с. 32-34.
7. Тамразян А.Г., Орлова М.А. Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных изгибаемых элементов с трещинами. // Вестник ТГАСУ, 2015, №6, с. 98-105.

Таблица 2. Результаты проведенных экспериментов.

Серия	Теоретические значения			Физический эксперимент		Численный эксперимент			
	Максимальное напряжение в бетоне сжатой зоны σ_v , МПа	Несущая способность M_b^v , МПа	Расхождение с физическим экспериментом %	M_{ult} / M_{test}	Средние по серии значения $M_{exp}^{m,ult}$, МПа	$\sigma_{test} / \sigma_{ult}$	Максимальное напряжение в бетоне сжатой зоны σ_{ult} , МПа	Несущая способность M_b^{SCAD} , МПа	Расхождение с физическим экспериментом %
1	18,70	28,30	5,8	0,885	30,04	0,900	17,50	27,00	10
2	18,57	28,10	5,9	0,880	29,88	0,900	18,03	27,73	7,2
9	16,02	26,03	2,1	0,820	26,60	0,860	15,96	25,93	2,5
3	27,18	47,02	2,0	0,984	48,00	0,920	26,10	45,20	5,8
4	18,15	27,46	5,7	0,860	29,12	0,890	17,82	27,00	7,3
5	26,90	46,48	2,1	0,973	47,50	0,997	26,59	46,00	3,1
6	26,23	45,38	1,6	0,950	46,13	0,950	26,02	45,02	2,4
10	19,10	35,10	11,6	0,92	39,70	0,980	18,99	34,94	11,9
7	21,10	32,00	5,7	1,00	33,95	1,00	18,77	28,41	8,9
8	27,61	47,80	2,0	1,00	48,80	1,00	27,33	47,30	3
11	19,54	31,75	1,7	1,00	32,29	1,00	18,204	29,60	8,3
12	20,76	38,20	11,5	1,00	43,20	1,00	23,40	43,00	0,5

Кукушкин Игорь Сергеевич, аспирант Ивановского государственного политехнического университета, ассистент кафедры «Строительные конструкции»; Российская Федерация 153037, г. Иваново, ул. 8 Марта, дом 20; e-mail: i.s.kukushkin@mail.ru

nic University; 20, 8 Marta Street, Ivanovo, 153037, Russia; e-mail: orlovamaria_na@mail.ru

Орлова Марина Анатольевна, инженер, ст. преподаватель кафедры «Строительные конструкции» Ивановского государственного политехнического университета; Российская Федерация 153037, г. Иваново, ул. 8 Марта, дом 20; e-mail: orlovamaria_na@mail.ru

Igor S. Kukushkin, post-graduate student of Ivanovo State Polytechnic University, assistant of the Department "Building construction"; 20, 8 Marta Street, Ivanovo, 153037, Russia; e-mail: i.s.kukushkin@mail.ru

Marina A. Orlova, Engineer, chief lecturer of the Department "Building construction" of Ivanovo State Polytech-

К МЕТОДИКЕ ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА СВАЙНО-ПЛИТНОГО ФУНДАМЕНТА

Р.А. Мангушев, Л.Н. Кондратьева

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург,
РОССИЯ

Аннотация. Описан механизм работы свайно-плитного фундамента, на основании которого предложена методика расчета осадки СПФ и основных его параметров, позволяющая оптимально распределить нагрузки между плитой и сваями, обеспечить надежность и эксплуатационную пригодность зданий, уменьшить осадки и сократить количество свай. Получена формула для расчета осадки свайно-плитного фундамента и построен график распределения относительных осадок, приведено сравнение с графиком реальных осадок СПФ. Разработан алгоритм расчета ПРФ.

Ключевые слова: свайный фундамент, плитный фундамент, свайно-плитный фундамент, допустимая осадка, расчетная осадка, количество свай

ABOUT METHOD OF ENGINEERING ANALYSIS OF PILE-SLAB FOUNDATION

Rashid A. Mangushev, Lidiya N. Kondratieva

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, RUSSIA

Abstract. The mechanism of the work pile-slab foundation (PSF) is under consideration. Corresponding approach to PSF analysis is presented. This approach allows optimal distribution of load between the plate and the piles in order to ensure the reliability and serviceability of buildings and provides decrease of settlements and reduced number of piles. Formula for calculation of PSF settlements, corresponding plot for relative settlements distribution with comparisons are given. Algorithm for analysis of PSF is considered as well.

Keywords: pile foundation, slab foundation, pile-slab foundation, permissible draft, estimated the sediment, the number of piles

ВВЕДЕНИЕ

С увеличением нагрузки от высотных зданий появилась необходимость обеспечить эксплуатационную пригодность зданий, используя более экономичные технологии, чем те, которые применялись для плитных или свайных фундаментов высотных зданий первого поколения. Свайно-плитный фундамент (СПФ) имеет перспективы широкого применения при строительстве высотных зданий, больших резервуаров и других сооружений на слабых, насыпных грунтах, при плотной городской застройке и отсутствии данных о главных особенностях грунта. Строитель-

ство свайно-плитных фундаментов происходит гораздо быстрее, а стоимость работ ниже, чем строительство традиционных плитных или свайных фундаментов.

СПФ стали популярны после успешного возведения на них нескольких высотных зданий во Франкфурте-на-Майне [1] (рисунок 1а). В Санкт-Петербурге строится Лахта-центр на СПФ [2] (рисунок 1б).

Механизм взаимодействия СПФ с грунтом изучается путем натурных наблюдений за реальными объектами [1, 3], методами физического [4, 5] и численного [6, 7] моделирования. В [8, 9, 10, 11, 12] даны рекомендации по расчету СПФ.

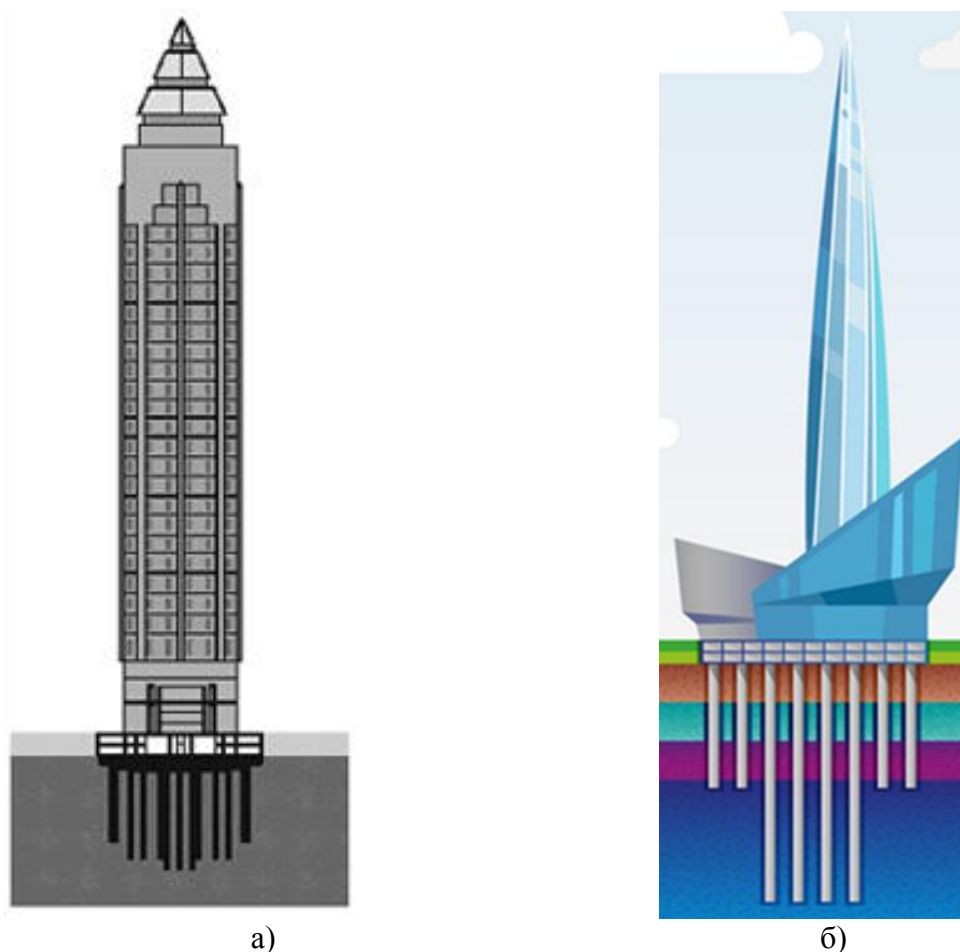


Рисунок 1. Схема высотного здания на СПФ: а – башня Мессетурм во Франкфурте-на-Майне $h=256$ м; б - Лахта-центр в Санкт-Петербурге $h=462$ м.

Однако, как в теории СПФ, так и в практике проектирования имеется немало неопределенностей. Одним из важнейших параметров СПФ, определяющим возможность его практического использования, является осадка сооружения под расчетной нагрузкой.

Проектирование группы свай для СПФ – совершенно новая процедура, подразумевающая применение более сложной модели взаимодействия между основаниями и сооружениями. В работе предложена методика инженерного расчета СПФ, позволяющая оптимально распределить нагрузки между плитой и сваями и обеспечить надежность и эксплуатационную пригодность зданий, уменьшить осадки и сократить количество свай, что приведет к снижению стоимости и материалоемкости фундамента.

МЕТОДИКА ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА СВАЙНО-ПЛИТНОГО ФУНДАМЕНТА

Согласно [10] комбинированный свайно-плитный фундамент (СПФ) (piled raft foundation) – это фундамент, состоящий из железобетонной плиты (свайного ростверка) и свай, совместно передающих нагрузку на основание.

Механизм взаимодействия СПФ с массивом грунта довольно сложен. Он зависит не только от свойств грунтов и параметров фундамента, но и должен учитывать изменение напряженно-деформированного состояния грунтового массива по мере увеличения нагрузки.

Для построения расчетной схемы СПФ принимаем следующие допущения:

1. Изгибающими, крутящими и поперечными воздействиями пренебрегаем, учитывая значительную жесткость плиты в горизонтальной плоскости;
2. График «нагрузка – осадка» одиночной сваи в составе СПФ имеет билинейную форму (рисунок 2).

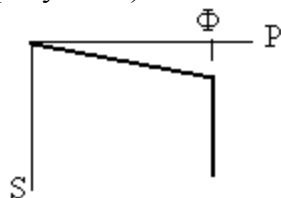


Рисунок 2. График нагружения сваи;

Φ – несущая способность сваи, P – нагрузка, S – осадка.

3. При нагрузке $P < \Phi_{\text{сум.}}$, меньшей суммарной несущей способности свай, вся нагрузка передается на грунт через сваи. Плитный ростверк в работе не участвует;
4. При нагрузке $P = \Phi_{\text{сум.}}$, равной суммарной несущей способности свай, происходит проскальзывание свай относительно грунта по стволу и погружение их в грунтовый массив ниже острия свай, ростверк вступает в работу и при $P \geq \Phi_{\text{сум.}}$ передает на грунт все дальнейшее увеличение нагрузки.
5. Деформацией железобетонных свай и плиты пренебрегаем, поскольку модуль упругости свай и плиты близок к 20000 МПа, что примерно на три порядка выше модуля деформации межсвайного грунта.

Рассмотрим три варианта фундамента для тяжелого сооружения башенного типа, передающего на плиту фундамента вертикальную нагрузку N . Простым и наиболее дешевым вариантом для такого сооружения является плитный фундамент (рисунок 3а).

Однако при этом наиболее сжимаемые верхние слои грунтовой толщи оказываются и наиболее нагруженными. Осадка плитного фундамента S_n на средне-сжимаемых грунтах (до $E_o < 20$ МПа, где E_o – средний модуль деформации грунтового массива) обычно, до-

статочно велика и часто превосходит предельно допустимые значения. Расчет осадки S_n методом послойного суммирования под нагрузкой N приведенной к равномерно распределенной по площади плиты, достаточно прост и общепризнан в мировой практике. Величина S_n представляет собой наибольшую возможную осадку данного сооружения в данных грунтовых условиях. Жесткость плитного фундамента принимаем равной отношению нагрузки к осадке:

$$k_n = R / S_n, \quad (1)$$

где k_n – жесткость плитного фундамента, N – вес сооружения, S_n – осадка плитного фундамента.

Большой осадке соответствует и ее большая неравномерность, чреватая появлением крена сооружения, что проявилось при строительстве на плитном фундаменте 17-этажного дома по Шипкинскому переулку в Санкт-Петербурге [11]. Ожидаемая большая осадка и опасность появления крена плитного фундамента вынуждают рассматривать в подобных условиях свайный вариант.

Действующие нормативные документы [8] предусматривают передачу на сваи всей нагрузки от сооружения (рисунок 3б). Считается, что при этом ростверк не передает нагрузки на грунт, и высота столба межсвайного грунта при нагружении и оседании свайного фундамента остается неизменной. По этой схеме сваи и межсвайный грунт работают как единый свайно-грунтовой массив, передающий всю нагрузку на более глубокие и менее сжимаемые слои грунта ниже острия свай. Соответственно и осадка свайного фундамента S_c под той же нагрузкой N значительно меньше, чем S_n . Жесткость свайного фундамента аналогично (1) принимаем:

$$k_c = N / S_c, \quad (2)$$

где k_c – жесткость свайного фундамента, S_c – осадка свайного фундамента.

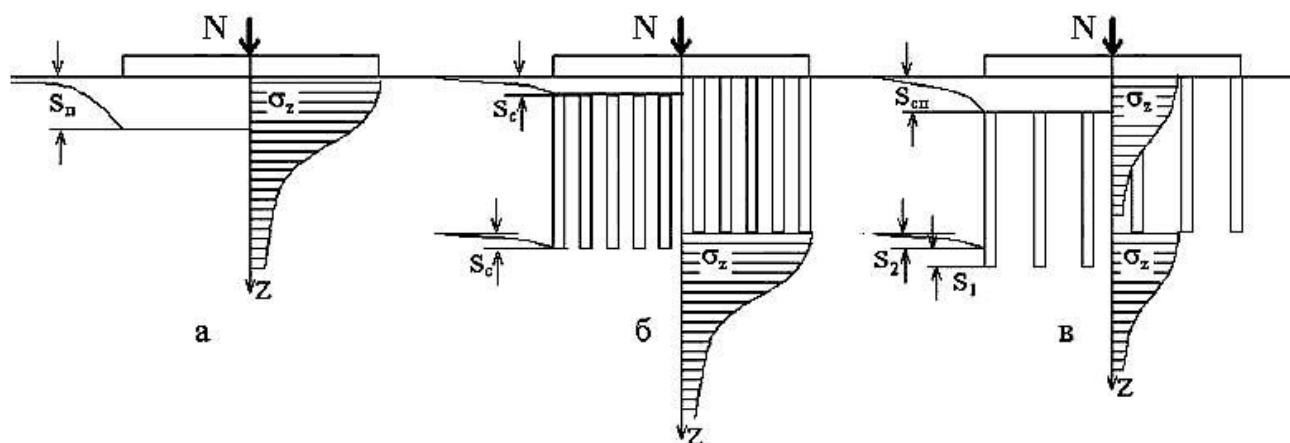


Рисунок 3. Варианты фундаментов: а – плитный; б – свайный; в – плитно-свайный.
Слева – осадки, справа – эпюры дополнительных вертикальных напряжений.

Межсвайный грунт, реально, практического вклада в осадку свайного фундамента не вносит и вместе со сваями и ростверком погружается на величину S_c . Осадка свайного фундамента S_c обычно вычисляется методом послойного суммирования как осадка условного фундамента с глубиной заложения равной глубине погружения свай [8, 10].

Если вычисленная осадка свайного фундамента S_c значительно меньше допустимой осадки возводимого сооружения S_u , то открывается возможность сократить количество свай и реализовать идею СПФ.

В случае, если свайное поле устроено, а результаты контрольных испытаний свай оказались ниже заложенной в расчет несущей способности, то тогда так же есть необходимость и возможность использовать СПФ. В [1] предложено распределение общей нагрузки от сооружения между различными несущими конструкциями СПФ описать с помощью коэффициента α , который устанавливает зависимость между суммарной нагрузкой на сваи N_c и общей нагрузкой от здания N :

$$\alpha = R_c / R,$$

где α – безразмерный коэффициент, показывающий долю общей нагрузки сооружения, передаваемой на сваи; N_c – нагрузка сооружения, передаваемая на сваи.

Соответственно нагрузка, передаваемая на сваи, будет определяться по формуле:

$$N_c = \alpha N. \quad (3)$$

Нагрузка, передаваемая на плитный ростверк:

$$N_n = (1 - \alpha) N, \quad (4)$$

где N_n – нагрузка сооружения, передаваемая на грунтовое основание плитным ростверком. Введем обозначение S_I для компонента осадки СПФ (рис.3, в). Это осадки, определяемые преимущественно сжимаемостью верхних слоев грунта, передаются плитным ростверком и определяются аналогично (1):

$$S_I = N_n / k_n, \quad (5)$$

где S_I – доля осадки плитного фундамента в СПФ.

Подставив (1) и (4) в выражение (5) и выполнив элементарные математические преобразования, получим компонент осадки плитного фундамента СПФ:

$$S_I = (1 - \alpha) S_n. \quad (6)$$

При передаче плитным фундаментом части нагрузки на межсвайный грунт произойдет уменьшение его высоты на величину S_I (рис.3, в).

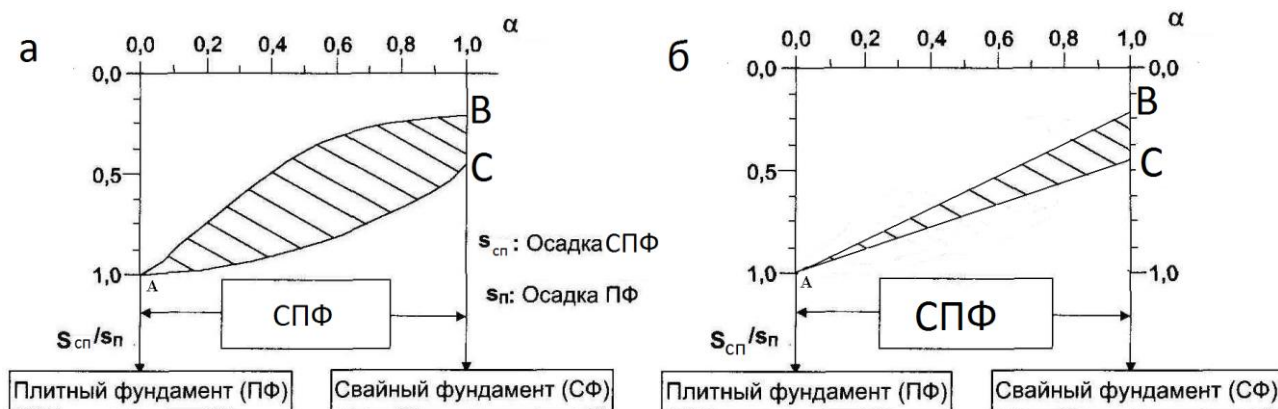


Рисунок 4. Графики зависимостей относительных осадок от коэффициента α :
а - по данным наблюдений [1]; б - по формуле (8)

В то же время длина свай в силу их жесткости останется прежней. Следовательно, сваи погрузятся в грунт ниже острия свай на величину S_I .

Второй компонент осадки СПФ - S_2 (рисунок 3б), определяемый сжимаемостью толщи ниже острия свай, получим аналогично (6):

$$S_2 = \alpha S_c, \quad (7)$$

где S_2 – доля осадки свайного фундамента в СПФ.

Полная осадка свайно-плитного фундамента представляет собой сумму этих двух компонентов

$$S_{cn} = S_I + S_2 = (1 - \alpha) S_n + \alpha S_c. \quad (8)$$

Формула (8) определяет линейное возрастание осадки СПФ S_{cn} от минимальной величины S_c до максимальной величины S_n при уменьшении коэффициента α от 1,0 (свайный фундамент) до 0,0 (плитный фундамент).

Р. Катценбах и др. [1], обобщив данные наблюдений за высотными зданиями, приводят график (рисунок 4а), на котором показаны относительные осадки в зависимости от величины коэффициента α . Наблюдавшиеся осадки СПФ располагались в заштрихованной области **ABC**. Для плитного фундамента без учета свай коэффициент $\alpha=0$. Коэффициент $\alpha=1$ характеризует группу изолированных свай без учета плиты. При этом ре-

альные относительные осадки свайных фундаментов СПФ имели величину от 0,18 (точка В) до 0,47 (точка С). Это объясняется тем, что были учтены взаимодействия между основаниями и сооружениями, грунтовые условия и другие факторы.

На рисунке 4б показан график зависимости осадок от коэффициента α , вычисленных по формуле (8), полученной аналитическим путем по разработанной методике. Точки **В** и **С** характеризуют два варианта грунтовых условий, нагрузок и размеров фундаментов, в первом из которых соотношение $S_c/S_n = 0,18$, а во втором $S_c/S_n = 0,47$. Линия **AB** представляет собой график зависимости осадки СПФ от коэффициента α для первого варианта, линия **AC** – для второго варианта.

Линейные графики для промежуточных вариантов, у которых $0,18 < S_c/S_n < 0,47$, будут располагаться в пределах заштрихованной треугольной зоны **ABC**.

Зона теоретических осадок ПСФ (рисунок 4б) более узкая, чем зона фактических осадок (рисунок 4а). Это вполне объяснимо, если принять во внимание, что все точки на линии **AB** на рисунке 4б (как, впрочем, и на любом другом луче в пределах угла **BAC**) различаются только величиной коэффициента α при прочих постоянных условиях, в то время как любая точка в зоне **ABC** на рисунке 4, а характеризуется не только определенной величиной α , но и уникальным набором геологических и иных параметров.

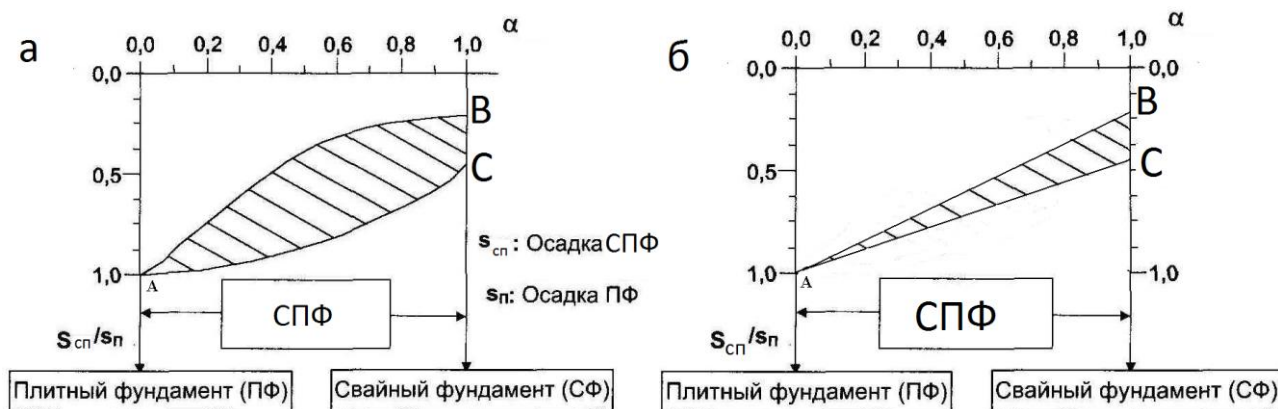


Рисунок 4. Графики зависимостей относительных осадок от коэффициента α :
а - по данным наблюдений [1]; б - по формуле (8).

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СПФ

1. Определяется осадка S_n заданного сооружения весом N при опирании его на выбранный или заданный плитный фундамент. Если осадка превышает допустимую осадку $S_u > S_{u, \text{доп}}$, то выполняется п.2.
2. Определяется осадка S_c заданного сооружения весом N при его опирании на выбранный свайный фундамент (задается тип свай, диаметр и глубина их погружения, определяется их несущую способность Φ). Если осадка меньше допустимой осадки сооружения $S_c \leq 2S_u$, то выполняется п.4.
3. Из условия

$$S_u \leq S_{cn} = (1 - \alpha) S_n + \alpha S_c \quad (9)$$

определяется коэффициент α :

$$\alpha = (S_n - S_u) / (S_n - S_c). \quad (10)$$

4. Определяется количество свай из условия;

$$n_{nc} \geq \alpha N / \Phi \quad (11)$$

Таким образом, определены все основные параметры СПФ под заданный объект с заданной предельно допустимой осадкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным критическим параметром СПФ, определяющим возможность и целесообразность его использования, является его осадка. Предложенный упрощенный механизм взаимодействия СПФ с грунтовым массивом позволяет приближенно определять ее в зависимости от доли нагрузки, передаваемой на сваи. При этом максимальная и минимальная границы оценки (соответственно осадки чисто плитного и чисто свайного вариантов СПФ) определяются общепризнанным методом, то есть могут рассматриваться как достаточно надежные. Это позволяет избежать больших ошибок в прогнозе осадки СПФ, несмотря на определенную приближенность расчетной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Катценбах Р., Шмитт А., Рамм Х. Основные принципы проектирования и мониторинга высотных зданий Франкфурта-на-Майне. // Реконструкция городов и геотехническое строительство, №9, 2005, с. 80-99.
2. <http://lakhta.center/ru> 09.03.2016
3. Мангушев Р.А., Готман А.Л., Знаменский В.В., Пономарев А.Б. Сваи и свайные фундаменты: конструкции, проекти-

- рование и технологии. –М.: АСВ, 2015. – 312 с.
4. **Фиораванте В., Ямиолковский М.Б.** Физическое моделирование плитно-свайных фундаментов. // Развитие городов и геотехническое строительство, №10, 2006, с. 200-206.
 5. **Ильичев В.А., Мангушев Р.А.** Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения, 2014. – 728 с.
 6. **Maybaum G., Vittinghoff T., Rodatz W.** Proof of the bearing capacity and the serviceability of piled rafts. Institute of Foundation Engineering and Soil Mechanics, Technical University of Braunschweig, Germany.
 7. **Бровко Е.И., Бровко И.С., Байболов К.С., Енкебаев К.С.** Корректировка результатов определения деформаций оснований, полученных методом конечных элементов, при расчете комбинированных плитно-свайных фундаментов высотных зданий. // Вестник МГСУ, 2014, №1, с. 105-107.
 8. СП 50-102-2003. Проектирование и устройство свайных фундаментов.
 9. **Кисин Б.Ф., Гаврилов А.Н., Грязнова Е.М., Борчев К.С.** Особенности проектирования высотных зданий и анализ результатов мониторинга их напряженно-деформированного состояния на примере строительства «Меркурий Сити Тауэр». Вестник гражданских инженеров, №3(44), 2014, с. 107-111.
 10. СП 24.13330.2011. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85.
 11. **Мангушев Р.А., Фадеев А.Б.** Расчет плитно-свайного фундамента. // «Вестник гражданских инженеров», №2(11), 2007, с. 11-14.
 12. **Мангушев Р.А., Осокин А.И.** Геотехника Санкт-Петербурга: Монография. – М.: Изд-во АСВ, 2010. – 264 с
- Петербургского государственного архитектурно-строительного университета; 190005, Россия, г. Санкт-Петербург, 2-й Красноармейская, д. 4; тел. +7(812) 316-03-41, e-mail: npk-cgp@yandex.ru;
- Кондратьева Лилия Никитовна, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры геотехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета; 190005, Россия, г. Санкт-Петербург, 2-й Красноармейская, д. 4; тел. +7(812) 575-05-44, e-mail: geotechnica@spbgasu.ru;
- Rashid A. Mangushev, Corresponding Member of RAACS, Professor, Doctor of Technical Sciences, Head of Department of Geotechnics, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPUACE); 4 2-nd Krasnoarmeyskaya St., St.Petersburg, 190005, Russian Federation; tel. +7 (812) 316-03-41; e-mail: npk-cgp@yandex.ru;
- Lidiya N. Kondratieva, Professor, Doctor of Technical Sciences, Head of Department of Geotechnics, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPUACE); 4 2-nd Krasnoarmeyskaya St., St.Petersburg, 190005, Russian Federation; tel. +7 (812) 575-05-44; e-mail: geotechnica@spbgasu.ru

Мангушев Рашид Александрович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой геотехники Санкт-

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ УРОВНЯ МРЗ

***В.И. Травуш^{1,2,3}, А.М. Белостоцкий^{3,4,5}, В.В. Вершинин⁵,
К.И. Островский⁴, Н.О. Петряшев^{5,6}, С.О. Петряшев^{5,6}***

¹ ЗАО «ГОРПРОЕКТ», г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁴ ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁵ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

⁶ АО «Научно-исследовательский центр «Строительство», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье изложена разработанная методика численного моделирования динамической реакции физически нелинейной пространственной системы «основание - высотное здание» на особое сочетание нагрузок, включающее интенсивное сейсмическое воздействие уровня МРЗ, заданное акселерограммой землетрясения. Методика, реализованная с помощью верифицированного программного комплекса Abaqus, применена для конечно-элементного анализа проектного варианта 400-метрового небоскреба с несущими железобетонными конструкциями при 9,5 балльном сейсмическом воздействии. При этом основной акцент сделан на моделировании железобетонных конструкций в условиях локальных разрушений – образования трещин и крошения.

Ключевые слова: максимальное расчетное землетрясение, физическая нелинейность, железобетон, математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, собственные частоты и формы, динамическая реакция

NUMERICAL SIMULATION OF PHYSICALLY NON-LINEAR DYNAMIC RESPONSE OF HIGH-RISE BUILDINGS UNDER MAXIMUM DESIGN EARTHQUAKE EXCITATION

***Vladimir I. Travush^{1,2,3}, Alexander M. Belostotsky^{3,4,5}, Vladislav V. Vershinin⁵,
Konstantin I. Ostrovsky⁴, Nikolai O. Petryashev^{5,6}, Sergey O. Petryashev^{5,6}***

¹ GORPROEKT Ltd., Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁴ StaDyO Research & Engineering Center Ltd., Moscow, RUSSIA

⁵ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁶ JSC Research Center of Construction, Moscow, RUSSIA

Abstract: Numerical simulation of three-dimensional system “foundation – high-rise building” physically non-linear response to special loading case including maximum design earthquake excitation defined with the corresponding accelerogram is presented. The developed simulation technique is employed for finite element analysis of exposed to 9.5 magnitude earthquake 400 meters skyscraper with reinforced concrete framework design alternative using Abaqus software. The focus is on simulation of reinforced concrete structure localized damage – tensile cracking and compressive crushing.

Keywords: maximum design earthquake, physical nonlinearity, reinforced concrete, math modeling, numerical methods, finite element method, stress-strain state, natural frequencies and modes, dynamic response.

1. ВВЕДЕНИЕ

С июля 2015 года, после официального ввода в действие актуализированного СП 14.13330.2014 [1], стало обязательным и требование выполнения расчета уникальных (в том числе, высотных) и ответственных зданий и сооружений в сейсмоактивных районах на максимальное расчетное землетрясение (МРЗ), заданное акселерограммами, прямым динамическим методом и с учетом возможных проявлений эффектов физической, геометрической и конструктивной нелинейностей (неупругих деформаций и локальных разрушений). Основной критерий и сверхзадача таких расчетов – недопущение обрушения всего или значимой части сооружения.

Сказать легко, а как это сделать? Четкого ответа нет в нормах, не знают его и авторы этого изделия.

Накоплен значительный мировой и отечественный опыт прямого динамического расчета сооружений атомной и гидроэнергетики при сейсмических воздействиях [9-12], но, в основном, эти исследования выполнялись в линейно-упругой постановке или с учетом «простой» физической нелинейности (например, пластичность для хорошо изученных конструкционных металлов).

Проблема нелинейного динамического расчета для высотных зданий и комплексов складывается из нескольких составляющих. В этой статье основной упор будет сделан на едва ли не самой сложной в реализации – адекватном моделировании поведения железобетонных конструкций в условиях их сильного деформирования и возможного разрушения на примере одного из проектных вариантов 400-метрового небоскреба («башни»).

2. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

2.1. Описание конструкции.

В конструктивном отношении здание состоит из подземной и надземной части (рисунки 1 и 2).

В состав подземной конструкции входят квадратный в плане коробчатый фундамент и два подземных этажа. Высота подземной конструкции 11 м (без учета заглубления нижней плиты фундамента).

Все конструкции выполняются из монолитного железобетона марки бетона В60. Плита фундамента в поперечном сечении имеет форму квадрата размером 130×130 м. Толщина фундаментной плиты 4 м.

В состав надземной конструкции входит 78 этажей высотой 4,2 м, и 79 этаж в виде купола высотой 38 м. Над куполом установлен флагшток высотой 34 м с флюгером.

Типовые этажи квадратные в плане. На уровне 69 этажа расположены 4 вертолетные площадки (по одной с каждой стороны) с опорами на перекрытие 66 и 65 этажей. Этажи 12, 25, 37, 49, 64 являются техническими. На уровне с 69 по 74 этаж около центральных осей расположены сквозные отверстия. Внешние колонны наклонные «внутрь», угол наклона 3,178°. Все внутренние колонны – вертикальные. В центре башни проходит лестнично-лифтовой блок, образующий ядро жесткости. По периметру колонны перевязаны балками.

Перекрытие подземного этажа 70×70 м, перекрытие на отм. 327,6 м в осях колонн, расположенных по периметру, 33×33 м.

Основная конструкция – монолитный железобетон марки В60. Каркас купола, флагшток и вертолетные площадки – стальные.

Геометрические размеры вертикальных и горизонтальных несущих конструкций здания приведены в таблице 1.

2.2. Материалы несущих конструкций.

Используемые материалы и их характеристики приведены в таблицах 2 и 3.

2.3. Расчетные нагрузки и воздействия и их сочетания

Заданные в расчётах постоянные и временные нагрузки приведены в таблицах 4 и 5, соответственно.

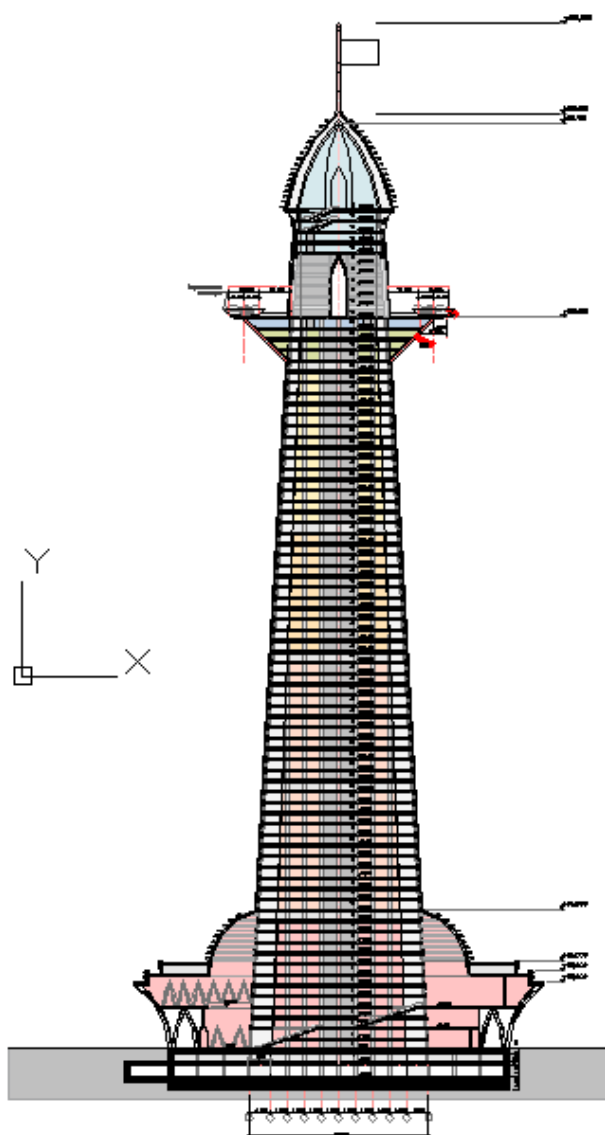


Рисунок 1. Геометрия высотной башни.
Поперечный разрез.

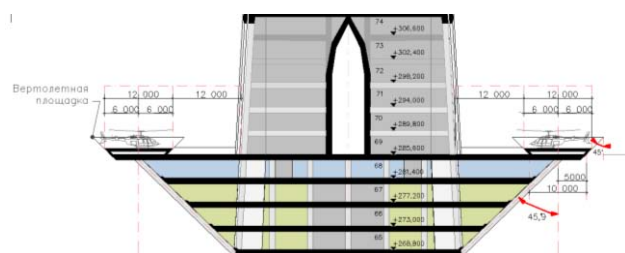


Рисунок 2. Геометрия высотной башни.
Поперечный разрез, этажи 65-74.

Ветровое воздействие задавалось в соответствии с СП 20.13330.2011 [3]. Площадка строительства относится к III ветровому

району, соответственно нормативное ветровое давление 38 кг/м^2 . Аэродинамический коэффициент $C_x = 1.4$, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1.4$, коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1.2$.

Расчет на проектное землетрясение (ПЗ) проводится по линейно-спектральной теории (ЛСТ) в соответствии с СП 14.13330.2014 [1]. Исходный нормативный коэффициент динамичности умножается на коэффициенты, приведенные в таблице 6.

Расчет на максимальное расчетное землетрясение (МРЗ) выполняется методом прямого интегрирование уравнений движения при задании акселерограммы уровня 9,5 баллов, показанной на рисунке 3.

Расчетные сочетания нагрузок приведены в таблице 7.

3. МЕТОДИКА И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ

3.1. Общие положения.

Для дискретизации по пространству и решения соответствующих краевых задач применяется универсальный и мощный современный численный метод механики – метод конечных элементов (МКЭ). Матричное уравнение движения геометрически линейной системы (малые перемещения и деформации) в форме метода перемещений [6,7]

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + ([K] + [K_G])\{u(t)\} = \{F(t)\} + \{R(u, \dot{u})\}$$

учитывает кинематические граничные условия и доопределяется начальными условиями (из решения статической задачи при $t=t_0$). Здесь $[M]$, $[C]$, $[K]$ и $[K_G]$ – симметричные блочно-редкозаполненные матрицы масс, демпфирования, линейной (начальной) и геометрической жесткости конечноэлементной модели (КЭМ) системы, t – время, “точка” означает дифференцирование по времени, $\{F(t)\}$ – вектор заданных статических и динамических нагрузок, $\{R(u, \dot{u})\}$ – вектор псевдонагрузок, моделирующий физически

Таблица 1. Основные характеристики вертикальных и горизонтальных несущих конструкций.

Характеристика	Значение
Толщины плит коробчатого фундамента	4 м; 0,4 м; 2 м
Толщина перекрытий этажей	0,2 м
Толщина перекрытий технических этажей (верх и низ)	0,4 м
Толщина внешних стенок лестнично-лифтового блока	0,51 м
Сечение балок по фасаду	0,4×2(высота) м. Относительно плоскости симметрии перекрытия сечение балки по высоте разнесено 0,75 м вверх, и 1,25 м вниз
Горизонтальные балки вертолетных площадок	Двутавр: высота 1,2 м, ширина полки 0,4 м, толщина полки 0,05 м, толщина стенки 0,02 м
Ферма, поддерживающая вертолетные площадки	Двутавр 20
Наклонные по низу фермы	Двутавр 100ш4
Ребра жесткости вертолетной площадки	Пластины 1,2×0,01 м
Жесткостные характеристики для подземных этажей	
Толщина стенок	2 м
Сечение внутренних колонн	1,4×1,4 м
Сечение колонн, расположенных по периметру	1,4×1 м
Жесткостные характеристики для 1-25 этажей	
Толщина стенок	1 м
Сечение внутренних колонн	1×1 м
Сечение колонн, расположенных по периметру	1×1 м
Жесткостные характеристики для 26-65 этажей	
Толщина стенок	0,8 м
Сечение внутренних колонн	0,8×0,8 м
Сечение колонн, расположенных по периметру	0,6×1 м
Жесткостные характеристики для 66-79 этажей	
Толщина стенок	0,6 м
Сечение внутренних колонн	0,6×0,6 м
Сечение колонн, расположенных по периметру	0,4×1 м

Таблица 2. Материалы конструктивных элементов.

Конструктивный элемент	Материал
Фундамент	В 60
Перекрытия	В 60
Колонны	В 60
Балки	В 60
Стенки	В 60
Вертолетные площадки	Сталь
Купол	Сталь
Флагшток	Сталь

Таблица 3. Свойства материалов в линейно-упругих расчетах.

Материал	Модуль упругости, МПа	Плотность, кг/м ³	Коэффициент Пуассона
Сталь	210 000	7800	0,3
Бетон В60	39500	2500	0,2

Таблица 4. Постоянные нагрузки.

Вид нагрузки	Нормативные, т/м ²	γ_n	γ_f	Расчетные, т/м ²
Собственный вес		1,2	1,1	
Полы	0,15	1,2	1,3	0,234
Перегородки	0,15	1,2	1,3	0,234
Инженерные системы, подвесные потолки	0,05	1,2	1,2	0,072
Неучтенная нагрузка	0,1	1,2	1	0,12
Фасады	0,15	1,2	1,3	0,234

Таблица 5. Временная нагрузка.

Вид нагрузки	Нормативные т/м ²	γ_f	Расчетные т/м ²
Кратковременная	0,2	1,2	0,24
Длительная	0,07	1,3	0,09
На тех. этаже	1,0	1,1	1,1

Таблица 6. Сейсмические коэффициенты.

Коэффициент сейсмичности для 8,5 баллов А	0,3
Коэффициент, учитывающий назначение сооружения и его ответственность K_0	2
Коэффициент, учитывающий допускаемые повреждения зданий и сооружений K_1	0,25
Коэффициент, учитывающий способность зданий и сооружений к рассеиванию энергии K_ψ	1,3

Таблица 7. Расчетные сочетания нагрузок.

Основное сочетание	При основном сочетании нагрузок (расчетных) учитываются все нагрузки с учетом γ_f
Особое сочетание	Постоянная $\times 0,9$ + кратковременная $\times 0,5$ + сейсмическая

нелинейные эффекты, $\{u(t)\}$ – искомый вектор обобщенных динамических перемещений КЭМ. Приведенная общая динамическая постановка естественным образом сводится к важным частным задачам – статической, на собственные значения (собственные частоты и формы колебаний и критические числа и формы потери начальной устойчивости) и спектральной формулировки динамических задач – при соответствующем виде нагрузок и решений путем обнуления незначимых матриц.

Матрицы $[K]$, $[K_G]$, $[M]$ и $[C]$, $\{F\}$ и $\{R\}$ строятся на основе матриц сосредоточенных факторов $[M]^L$, $[C]^L$, $[K]^L$, $\{F\}^L$ и $\{R\}^L$ и матриц конечных элементов $[m]^e$, $[c]^e$, $[k]^e$, $[k_G]^e$, $\{f\}^e$ и $\{r\}^e$, вычисляемых, в общем случае, с применением квадратур оптимальной точности. Для адекватной и гибкой аппроксимации геометрико-жесткостных, инерционных и диссипативных свойств, статических и динамических нагрузок и результирующего НДС разнообразных пространственных комбинированных систем разработан представи-

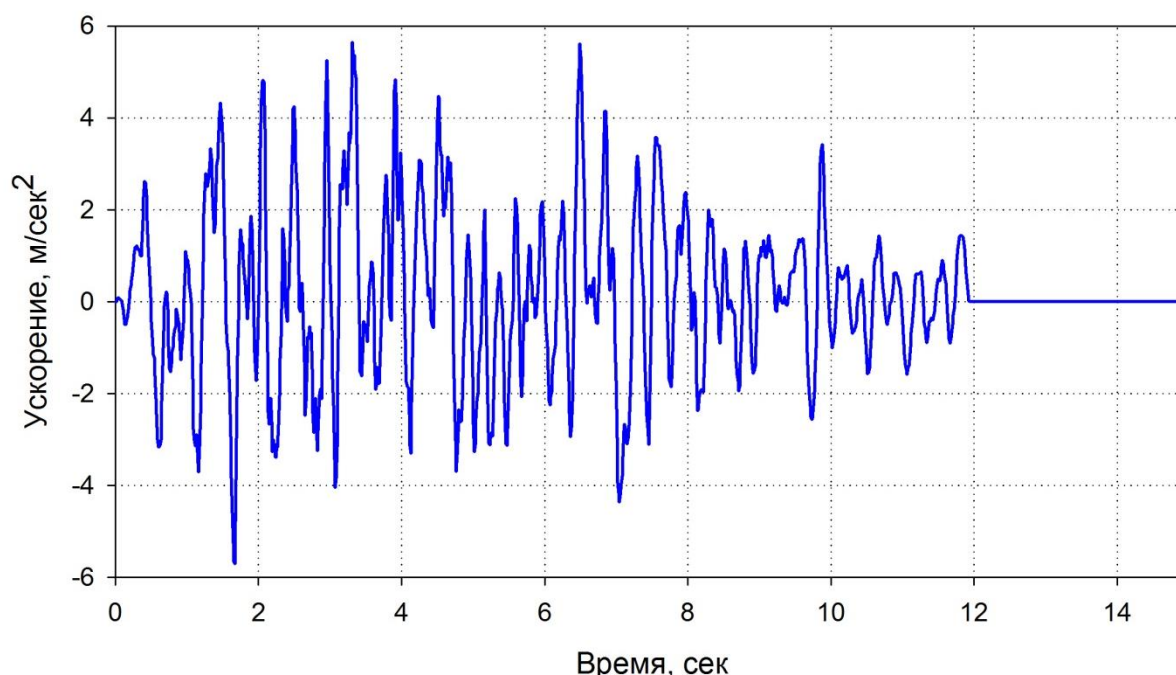


Рисунок 3. Расчетная горизонтальная акселерограмма уровня МРЗ (ускорение – в м/с²)

тельный набор стержневых, мембранных, плитно-оболочечных, двумерных и трехмерных (объемных) КЭ, совместимых в единой расчетной модели и допускающих альтернативные процедуры сборки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений статического равновесия

$$[K][\{u\}_1 \dots \{u\}_l] = [\{F\}_1 \dots \{F\}_l]$$

с l вариантами нагрузок, к последовательности которых сводятся также нелинейные, нестационарные и (или) динамические задачи ($[K] \rightarrow [K^*]$, $[H] \rightarrow [H^*]$), применяется эффективный вариант прямого метода Гаусса для положительно определенных симметричных блочно-редкозаполненных матриц (SPARSE-схема) – модифицированная схема квадратного корня (Холецкого) – или итерационная схема сопряженных градиентов с предобуславливанием (PCG).

В рамках спектральных динамических расчетов (в частности, и для анализа пульсационной составляющей ветровой нагрузки) или самостоятельно решается частная проблема собственных значений

$$\begin{aligned} [K][\Phi] &= [\Omega^2][M][\Phi], \\ [\Phi] &= [\{\phi\}_1 \dots \{\phi\}_{NITER}], \\ [\Omega^2] &= \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{NITER}^2). \end{aligned}$$

В качестве «базового» выбран наиболее продвинутый метод решения обобщенной частной проблемы собственных значений – блочный метод Ланцоша [8]. Многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные авторами, в том числе для плохо обусловленных систем и систем с кратными частотами, позволяют судить о надежности и эффективности предлагаемых реализаций методов. Как показала расчетная практика, для больших задач блочный метод Ланцоша имеет неоспоримые преимущества в скорости определения заданного количества собственных частот и форм.

Разрабатываемые расчетные модели должны адекватно отражать геометрико-жесткостные и инерционные свойства и нагрузочные характеристики строительных конструкций и основания системы «основание – ж/б конструкции – металлоконструкции купола». Для определения перемещений и усилий в

строительных конструкциях от действия постоянной и временной, снеговой и ветровой нагрузок строятся и анализируются квазистатические расчетные конечноэлементные модели.

3.2. Особенности неупругой работы и повреждаемости хрупких материалов.

При малых значениях всестороннего давления (менее одной пятой от предела прочности материала при одноосном сжатии) бетон и другие хрупкие материалы обладают следующими характерными свойствами, обуславливающими специфические механизмы разрушения таких материалов:

- различные пределы упругости при растяжении и сжатии (напряжение «текучести» при сжатии может превышать напряжение «текучести» при растяжении в 10 и более раз);
- почти мгновенная потеря несущей способности при достижении предела упругости при растяжении и некоторое упрочнение с последующим снижением несущей способности при сжатии;
- «восстановление» жесткости при циклических нагрузках;
- зависимость прочностных свойств от скорости деформаций.

3.3. Расчётные модели.

Расчетная пространственная оболочечно-стержневая КЭ-модель, построенная в ПК ANSYS [13,14], включает в себя 156 тыс. узлов, 184 тыс. элементов. Размер базового конечного элемента назначен 2,1 метра. Модель представлена на рисунке 4.

Расчет на акселерограмму уровня МРЗ методом прямого интегрирования уравнений движения с учетом эффектов физической нелинейности (растрескивание бетона при растяжении, крошение при сжатии) несущих элементов явным методом выполнялся по более подробной оболочечно-стержневой КЭ-модели в ПК Abaqus (размерность: 250 288 КЭ/ 245 568 узлов). Модель показана на рисунке 5.

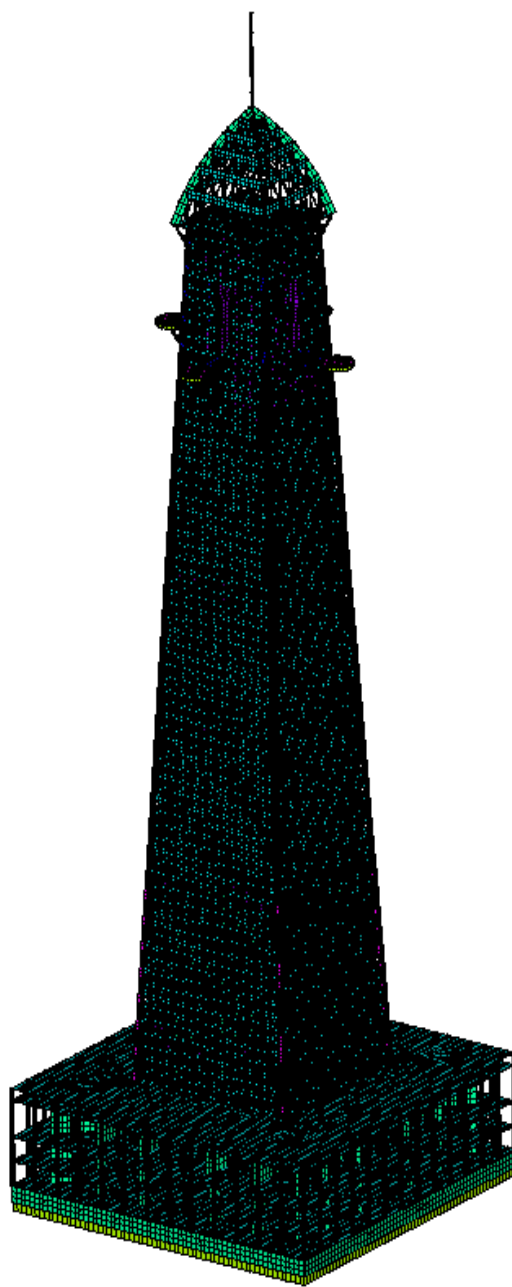


Рисунок 4. КЭ-модель башни. ПК ANSYS.

4. РАСЧЕТ НА ОСНОВНОЕ СОЧЕТАНИЕ НАГРУЗОК (СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ)

Принималось упругое основание с коэффициентом постели 1000 т/м³. Результаты расчета в табличном и графическом виде представлены ниже на рисунках 6, 7 и в таблицах 8, 9.

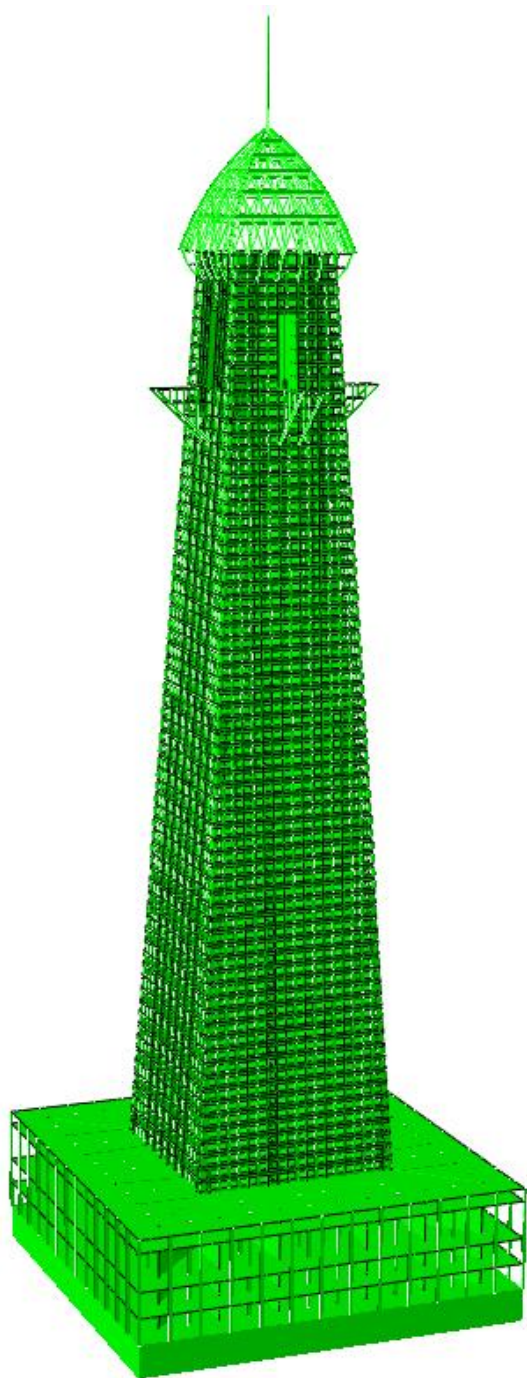


Рисунок 5. КЭ-модель башни. ПК Abaqus.

5. РАСЧЕТЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ, НА ОСОБОЕ СОЧЕТАНИЕ НАГРУЗОК (СЕЙСМИКА УРОВНЯ ПЗ)

Итерационным методом Ланцоша было вычислено 20 низших собственных частот и

форм колебаний. Результаты частично представлены ниже в Табл. 10 и на Рис. 8-10.

Интенсивность сейсмоздействия для ПЗ принималась равной 8,5 баллам. Расчет проводился по ЛСТ согласно СП 14.13330.2014 (актуализированная редакция СНиП II-7-81*). Учитывалось 10 низших форм собственных колебаний конструкции в диапазоне 0 - 0,762 Гц. В данный диапазон попадают 4 формы изгибных колебаний, вносящие наибольшие вклад в напряженно-деформированное состояние конструкции при сейсмическом воздействии.

Принимался динамический коэффициент постели, увеличенный в 8 раз по сравнению со статическим (8000 т/м^3). Направление подхода сейсмозволны было принято по оси X глобальной системы координат (по 2-й форме собственных колебаний).

Результаты расчета представлены в таблице 11, на рисунках 11 и 12.

6. НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НА ОСОБОЕ СОЧЕТАНИЕ НАГРУЗОК ПРИ СЕЙСМИКЕ, ЗАДАННОЙ АКСЕЛЕРОГРАММОЙ УРОВНЯ МРЗ

6.1. Свойства материалов.

Все несущие конструкции здания, кроме купола, выполнены из бетона В60 со следующими физико-механическими характеристиками: $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $E = 39500 \text{ МПа}$, $\nu = 0,2$, $R_b = 33 \text{ МПа}$, $\gamma_{b3} = 0,9$, $R_{bt} = 1,8 \text{ МПа}$.

Предполагаемое армирование вертикальных несущих конструкций:

1) 25Ø32 A500C ($R_s = 435 \text{ МПа}$, $R_{sc} = 400 \text{ МПа}$) с $A_{s,tot} = 201 \text{ см}^2$ на 1 м^2 поперечного сечения. Эквивалентное (с учётом армирования) $R_{bt} = 8,75 \text{ МПа}$.

2) 50Ø32 A500C ($R_s = 435 \text{ МПа}$, $R_{sc} = 400 \text{ МПа}$) с $A_{s,tot} = 402 \text{ см}^2$ на 1 м^2 поперечного сечения. Эквивалентное (с учётом армирования) $R_{bt} = 17,4 \text{ МПа}$.

Физически нелинейная модель материала ConcreteDamagedPlasticity, реализованная в

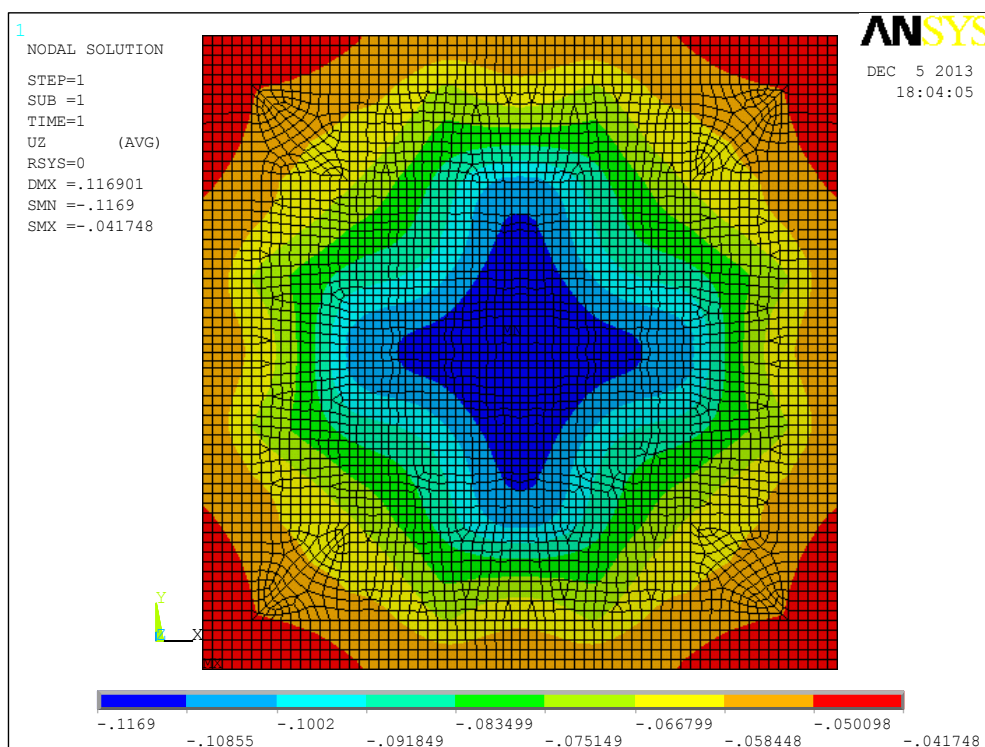


Рисунок 6. Вертикальные перемещения фундаментной плиты от действия основного сочетания нагрузок, м (максимум – 0,117 м).

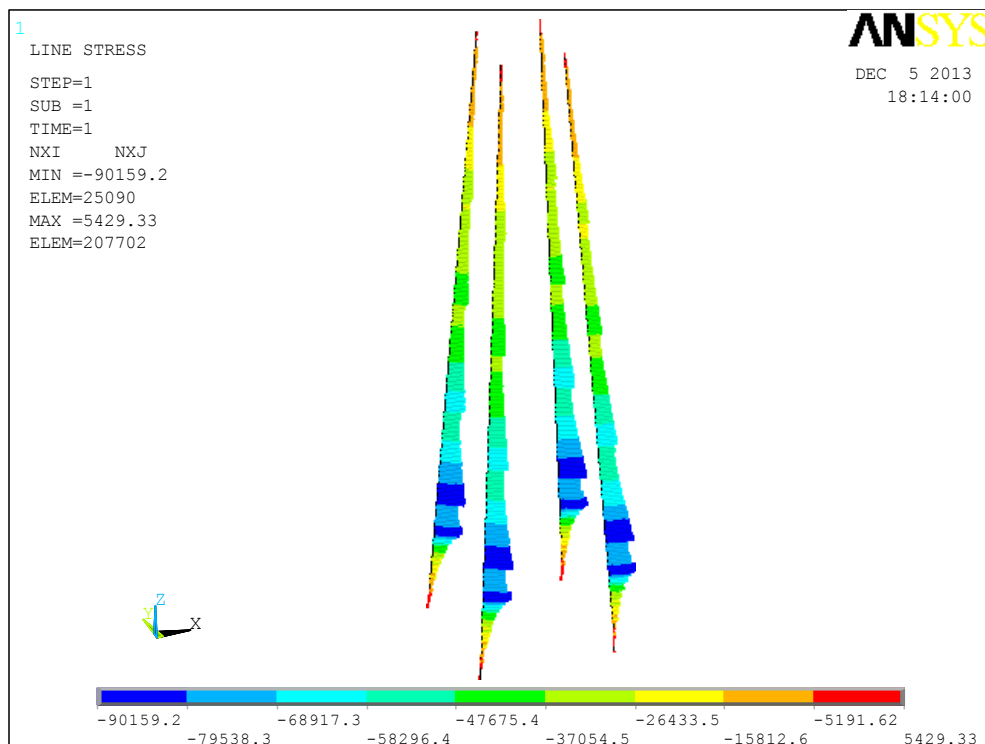


Рисунок 7. Продольные усилия в угловых колоннах, кН. Расчет на основное сочетание (диапазон [-90159; 5429] кН).

Таблица 8. Суммарная реакция.

Силы, кН			Моменты, кН·м		
R_x	R_y	R_z	M_x	M_y	M_z
-2658	0	$1,138 \cdot 10^7$	110	-2034	-638

Таблица 9. Максимальные продольные силы и напряжения от продольных сил.

	Максимальные продольные силы, т		Максимальные напряжения, МПа. Сжатие/растяжение
	Сжатие	Растяжение	
Угловые колонны	-9016	543	-31,7/1,5
Фасадные колонны	-3580	-	-35,8
Внутренние колонны	-3418	50	-32,2/1,4

Таблица 10. Расчетные собственные частоты с учетом постоянных нагрузок.

№	Частота, Гц	Описание
1	0,2673	Изгиб всей башни в диагональном направлении
2	0,2703	Изгиб всей башни в плоскости XZ
3	0,3976	Крутильная форма колебаний
4	0,6249	Изгибные колебания шпиля
5	0,6249	Изгибные колебания шпиля
6	0,7400	Вторая форма изгибных колебаний башни
7	0,7562	Вторая форма изгибных колебаний башни
8	0,7615	Колебания металлоконструкций купола
9	0,7615	Колебания металлоконструкций купола
10	0,7615	Колебания металлоконструкций купола

Таблица 11. Максимальные продольные силы (т) и напряжения (МПа).

	Максимальные продольные силы, т		Максимальные напряжения, МПа (сжатие/растяжение)
	Сжатие	Растяжение	
Угловые колонны	-12870	1495	-42,9/4,6
Фасадные колонны	-4564	294	-45,6/2,9
Внутренние колонны	-2501	183	-25,0/5(в верхней части)
Контрфорсы, т (суммарные усилия), среднее/макс.	-20832/-51380	3612/3612	-51,3/3,6
Крестообразные стены, т/м, среднее/макс.	-2474/-3183	223	-32,0/2,2

Примечание. Для контрфорсов и крестообразных стен вертикальные усилия приводятся как среднее/максимальное.

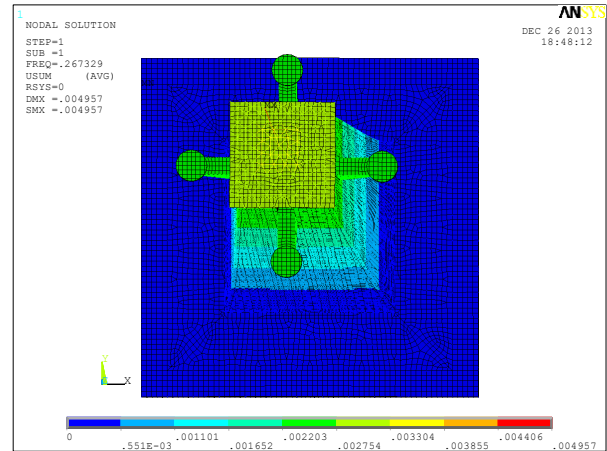
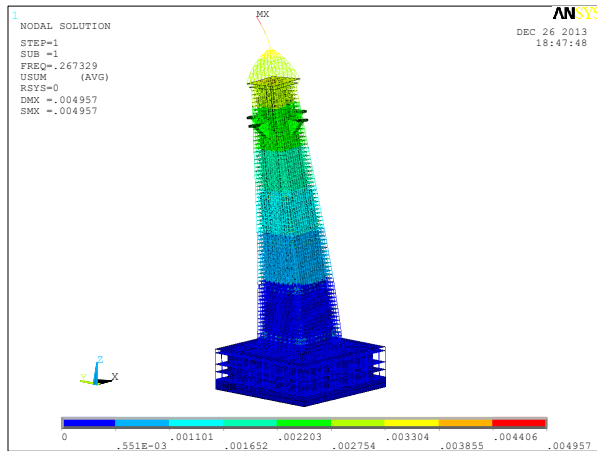


Рисунок8. 1-я собственная форма ($f_1 = 0,267$ Гц). Изгиб в в плоскости YZ.

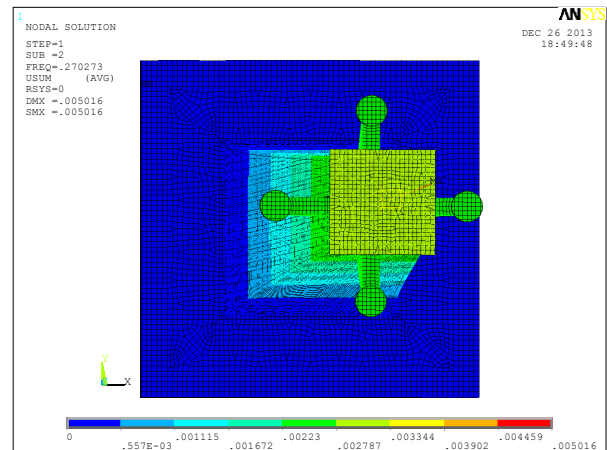
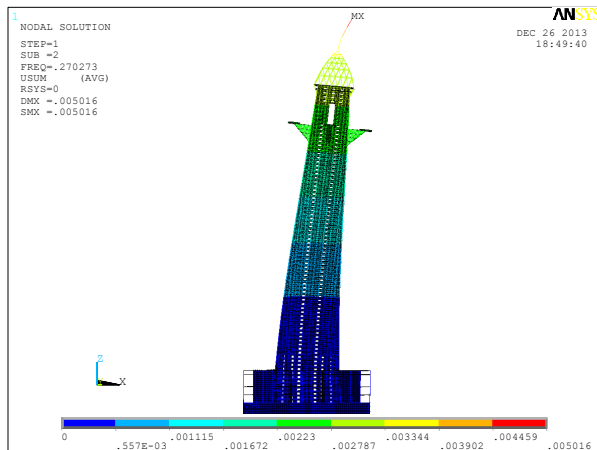


Рисунок9. 2-я собственная форма ($f_2 = 0,270$ Гц). Изгиб в плоскости XZ.

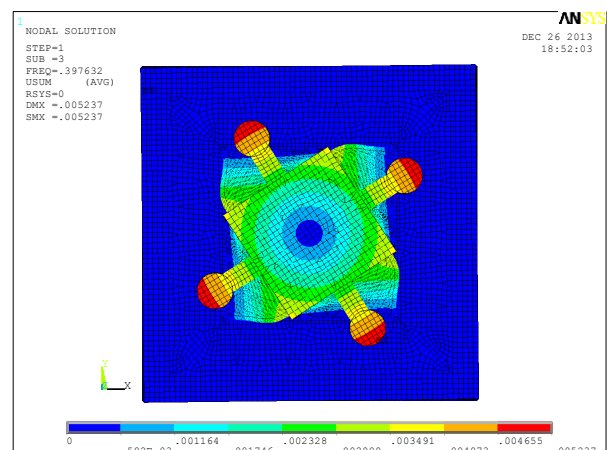
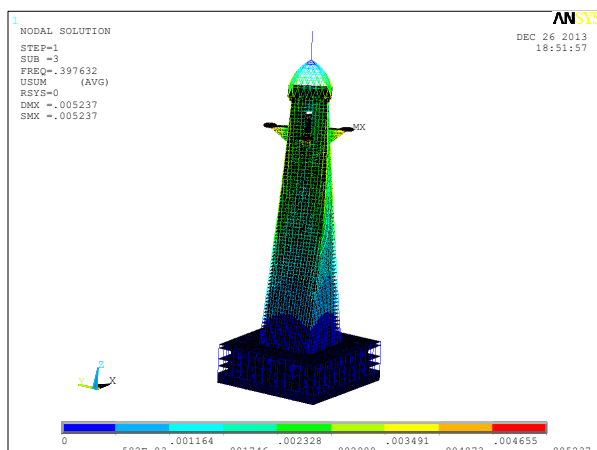
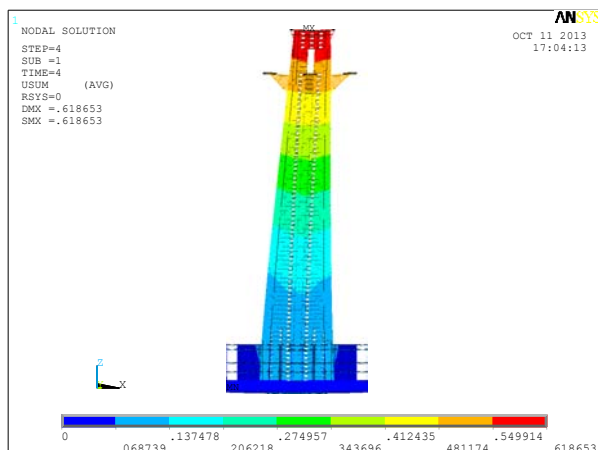


Рисунок10. 3-я собственная форма ($f_3 = 0,398$ Гц). Кручение.

Статика+сейсмика



Статика-сейсмика

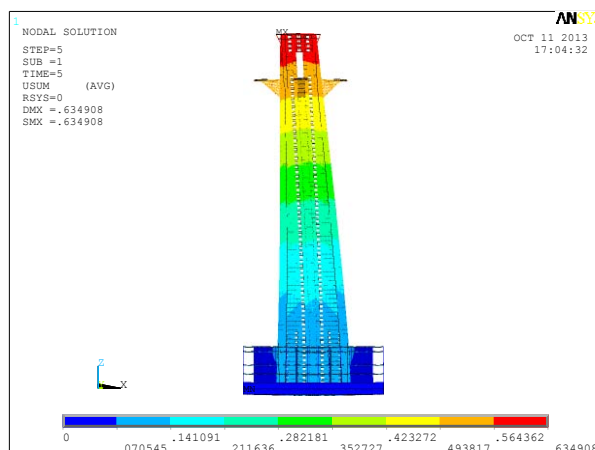


Рисунок 11. Суммарные перемещения, м. Расчет на особое сочетание. Сейсмика ПЗ (8,5 баллов) по ЛСТ.

ПК Abaqus[15-18], использовалась для всех вертикальных конструкций, моделируемых с помощью оболочечных элементов, кроме фасадных балок (см. Рисунок 13). (Угловые и фасадные колонны – для всего здания в пределах высоты обвязочных балок, внутренние колонны – все с 69 этажа и выше, а с 1 по 48 этаж – только те, что располагаются рядом с лестничными проемами). Горизонтальные конструкции и фасадные балки задавались линейно-упругими.

Для нелинейной модели принимались следующие параметры: угол дилатации $\psi = 38^\circ$, эксцентриситет потенциала пластического течения $\tau = 0,1$, отношение напряжения текучести при двухосном напряженном состоянии к напряжению текучести при одноосном напряженном состоянии $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1,12$, инвариант напряженного состояния $K_c = 0,667$, параметр вязкости $\mu = 0,0$. Диаграммы деформирования бетона, а также деградация материала с ростом неупругих деформаций при сжатии и растяжении приведены на Рис. 14, 15. Предельно допустимое состояние бетона при сжатии соответствует параметру поврежденности материала $DAMAGEC = 0,5$, а при растяжении – параметру поврежденности материала

$DAMAGET = 0,85$.

При задании диаграмм деформирования бетона при растяжении учитывалось, что после образования магистральных трещин нагрузка будет восприниматься арматурой, так что напряжениям ставились в соответствие характерные для стали деформации с учётом процента армирования (т.е. при 100-процентном армировании должна быть диаграмма деформирования стали).

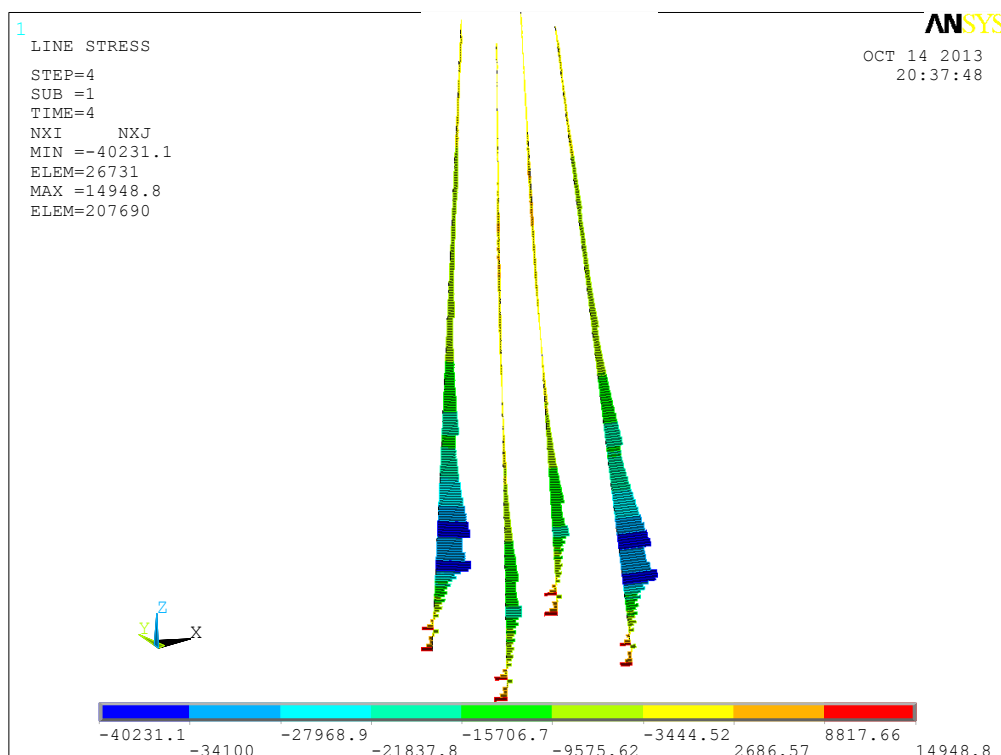
Для учёта инерционности полезной нагрузки при расчёте на МРЗ масса вводится в модель в виде добавки к плотности материала горизонтальных несущих конструкций и фасадных балок.

6.2. Нагрузки.

В рамках расчёта на особое сочетание нагрузок здание сначала нагружалось статически собственным весом и постоянными и временными нагрузками, после чего проводился расчёт по платформенной схеме на акселерограмму по оси X, соответствующую МРЗ 9,5 баллов без каких-либо дополнительных коэффициентов (см. рисунок 3).

Постоянные нагрузки для учёта их инерционности были приложены в виде «присоединенной массы» (см. выше). Ускорение свободного падения было задано с учётом коэффициента сочетания для постоянных

Статика+сейсмика (диапазон [-40231; 14949]кН)



Статика-сейсмика (диапазон [-128696; 7781]кН)

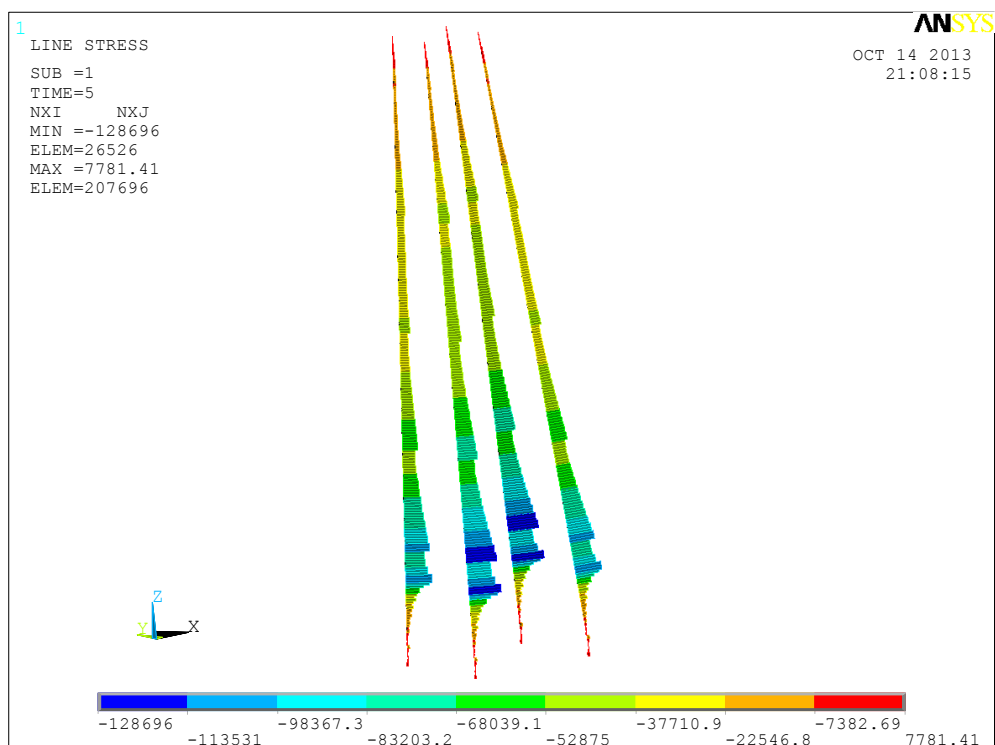


Рисунок 12. Продольные усилия в угловых колоннах, кН. Расчет на особое сочетание. Сейсмика ПЗ (8,5 баллов) по ЛСТ.

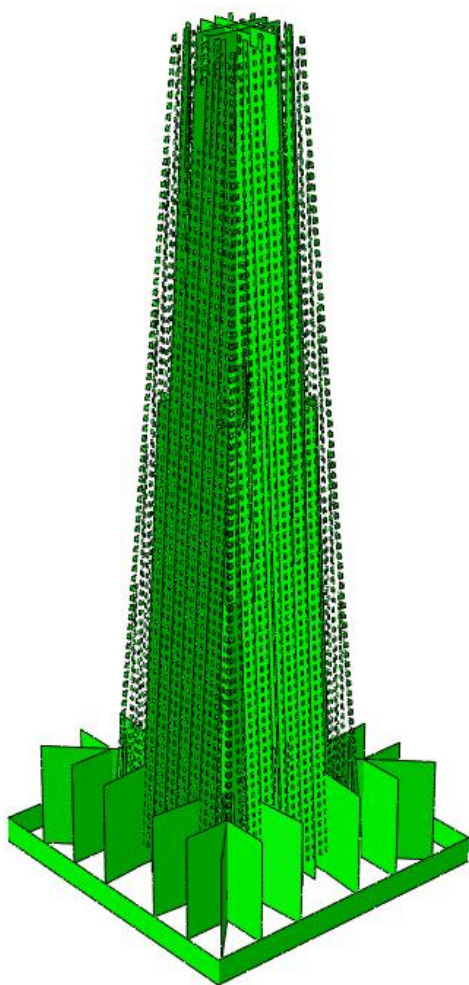


Рисунок 13. Конструктивные элементы, для которых использовалась нелинейная модель бетона.

нагрузок при расчёте на особое сочетание, равного 0,9, и коэффициентов надёжности по нагрузке и по ответственности здания:

$$g_{red} = g \cdot \gamma_n \cdot \bar{\gamma}_f \cdot n_c = 11,65 \text{ м/сек}^2.$$

Временные нагрузки прикладывались с учётом коэффициента сочетания при особом воздействии, равного 0,5.

6.3. Результаты расчётов.

Размерность КЭ-модели составила 1 369 788 степеней свободы (250 288 КЭ/ 245 568 узлов).

Статический расчёт в Abaqus/Standard проводился в геометрически линейной поста-

новке. Для решения системы уравнений применялся прямой решатель с использованием метода Ньютона-Рафсона и автоматическим выбором шага приращения нагрузки. Преобразование матрицы коэффициентов выполнялось с помощью метода исключения Гаусса для систем с разреженными матрицами.

Динамический расчёт в Abaqus/Explicit осуществлялся в геометрически линейной постановке по явной схеме интегрирования по времени с автоматическим выбором шага по времени без ограничений на его минимальное значение. Параметр схемной линейной вязкости принимался равным 0,06, а квадратичной вязкости – 1,2.

Результаты расчёта на особое сочетание нагрузок представлены ниже в виде графиков горизонтальных перемещений отдельных этажей здания (рисунки 16, 17), а также изополями параметров поврежденности материала при растяжении (d_t , или DAMAGET) и сжатии (d_c , или DAMAGEC) (рисунки 18-25).

Результаты представлены для 2-х характерных уровней относительного армирования μ_s , 2% и 4%.

Наиболее опасными с точки зрения прогрессирующего обрушения при МРЗ являются зоны резкой смены сечений вертикальных несущих конструкций: уровень верха фундаментной плиты (1-й этаж), окончание стиловатой части (9 и 10 этажи), 31-й, 61-й и 69-й этажи. Наибольшие повреждения возникают в вертикальных несущих конструкциях в уровне 69-го этажа.

По результатам расчётов выявлено, что минимальный процент армирования вертикальных несущих конструкций для обеспечения устойчивости здания к прогрессирующему обрушению при МРЗ составляет 4%. В этом случае в зоне наибольших разрушений (69-й этаж) часть ядра жесткости сохраняет свою несущую способность как на растяжение, так и на сжатие (рисунки 23, 25).

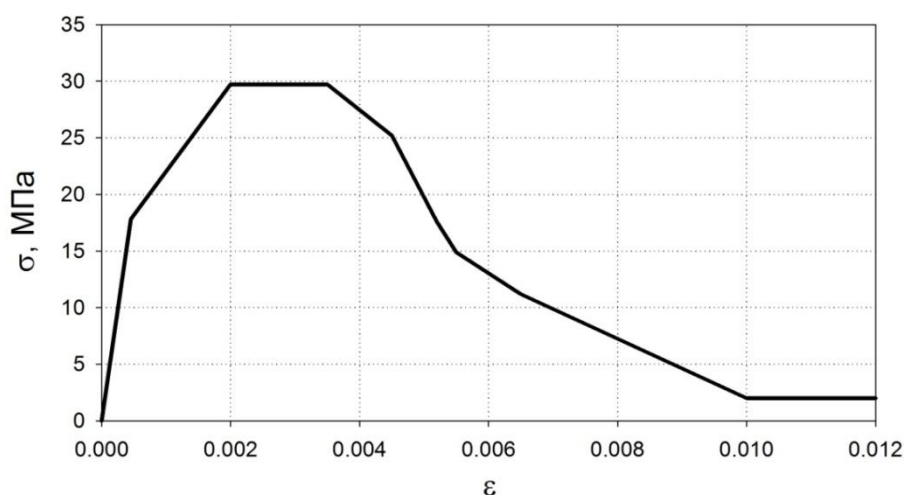


Рисунок 14. Диаграмма деформирования бетона при сжатии.

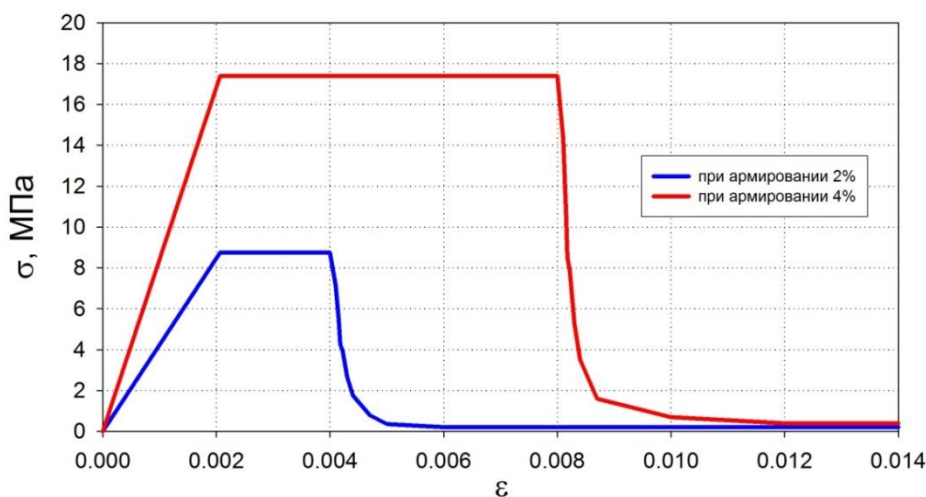


Рисунок 15. Диаграмма деформирования бетона при растяжении (с учётом армирования).

6.4. Выводы и рекомендации по расчёту.

В расчётную схему здания были заложены следующие «резервы несущей способности»:

- Не было в полной мере учтено демпфирование в материале несущих конструкций; при наличии достаточно развитых зон разрушения его учёт даст положительный эффект в уменьшении колебаний здания;
- При задании диаграммы деформирования материала вертикальных несущих конструкций при сжатии учитывалась только работа бетона. Учёт работы арматуры в количестве 4% повысит несущую способность здания;
- При задании диаграммы деформирования материала вертикальных несущих конструкций при растяжении, помимо значений напряжения, пропорционально проценту ар-

мирования также были уменьшены и деформации. В действительности же при восприятии растягивающих усилий только арматурой пропорционально проценту армирования могут быть уменьшены только значения напряжений на диаграмме деформирования;

- Не учитывалась диссипация энергии в грунтовом основании.

В рамках проведенных расчётов не рассматривалась и волновая природа сейсмического воздействия, которая может сказываться на динамической реакции здания, принимая во внимание его размеры в плане (130×130 м) и небольшие длины поверхностных волн на слабых грунтах и грунтах средней прочности.

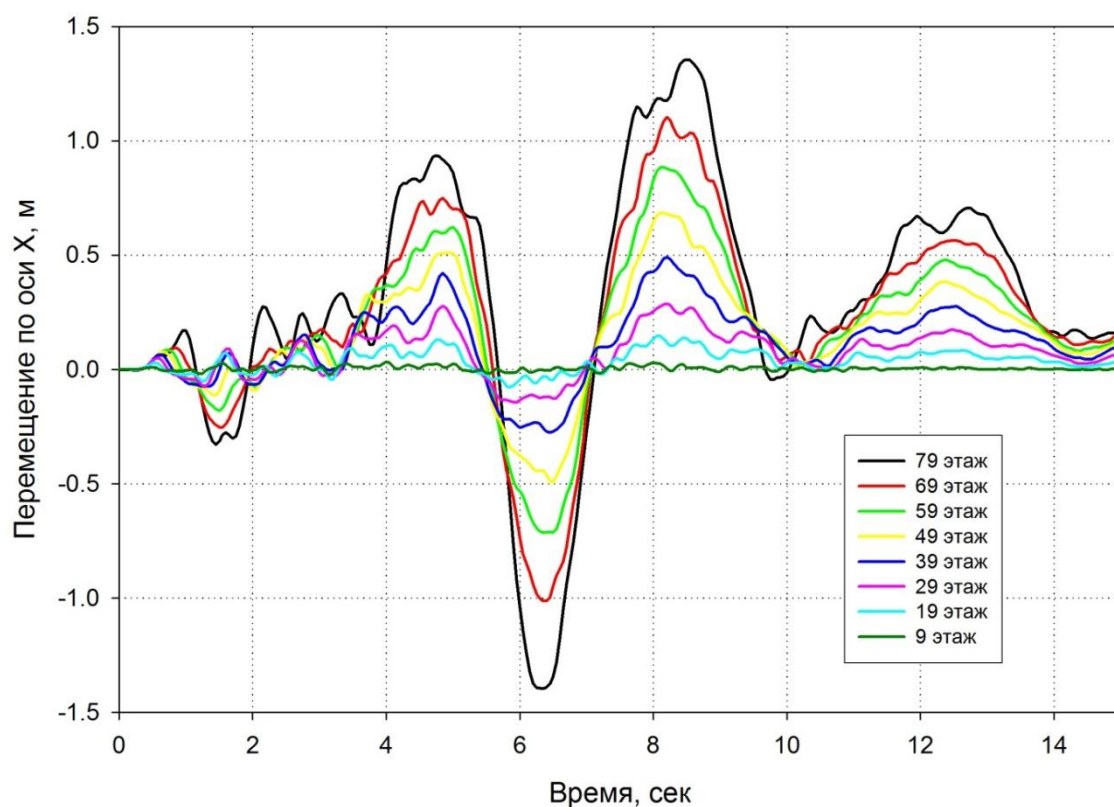


Рисунок 16. Перемещения различных этажей по оси X при МРЗ (при $\mu_s = 2\%$).

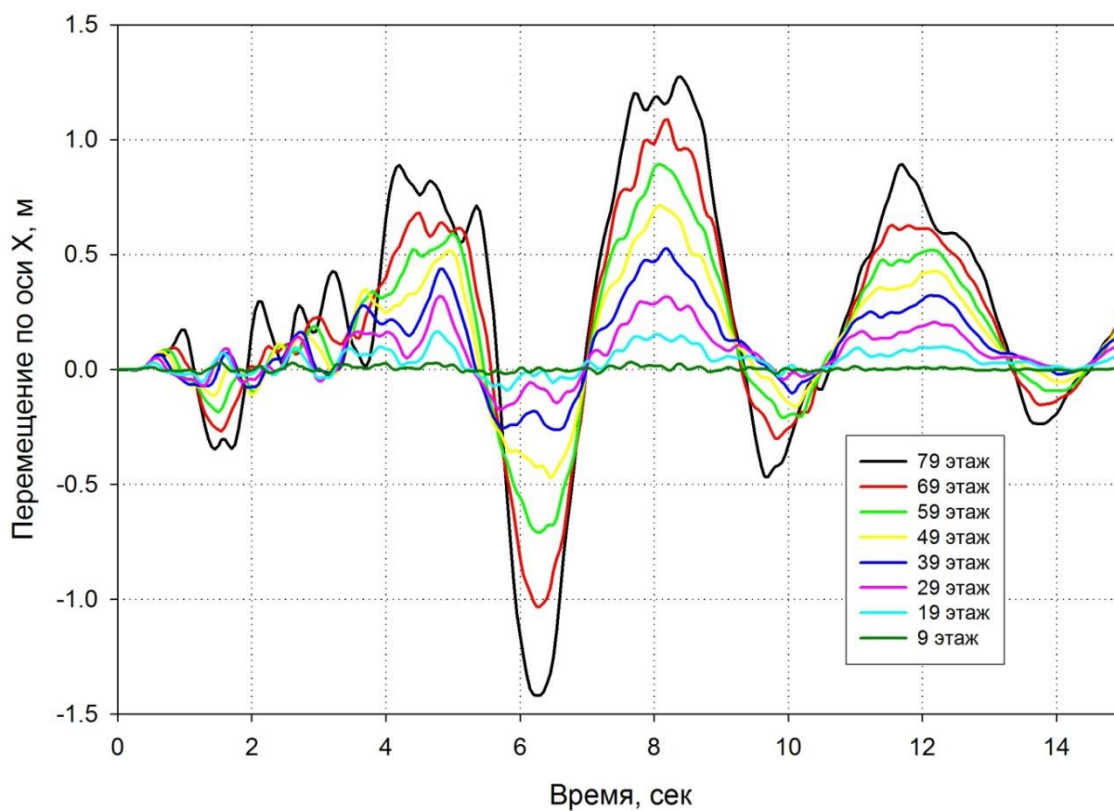


Рисунок 17. Перемещения различных этажей по оси X при МРЗ (при $\mu_s = 4\%$).

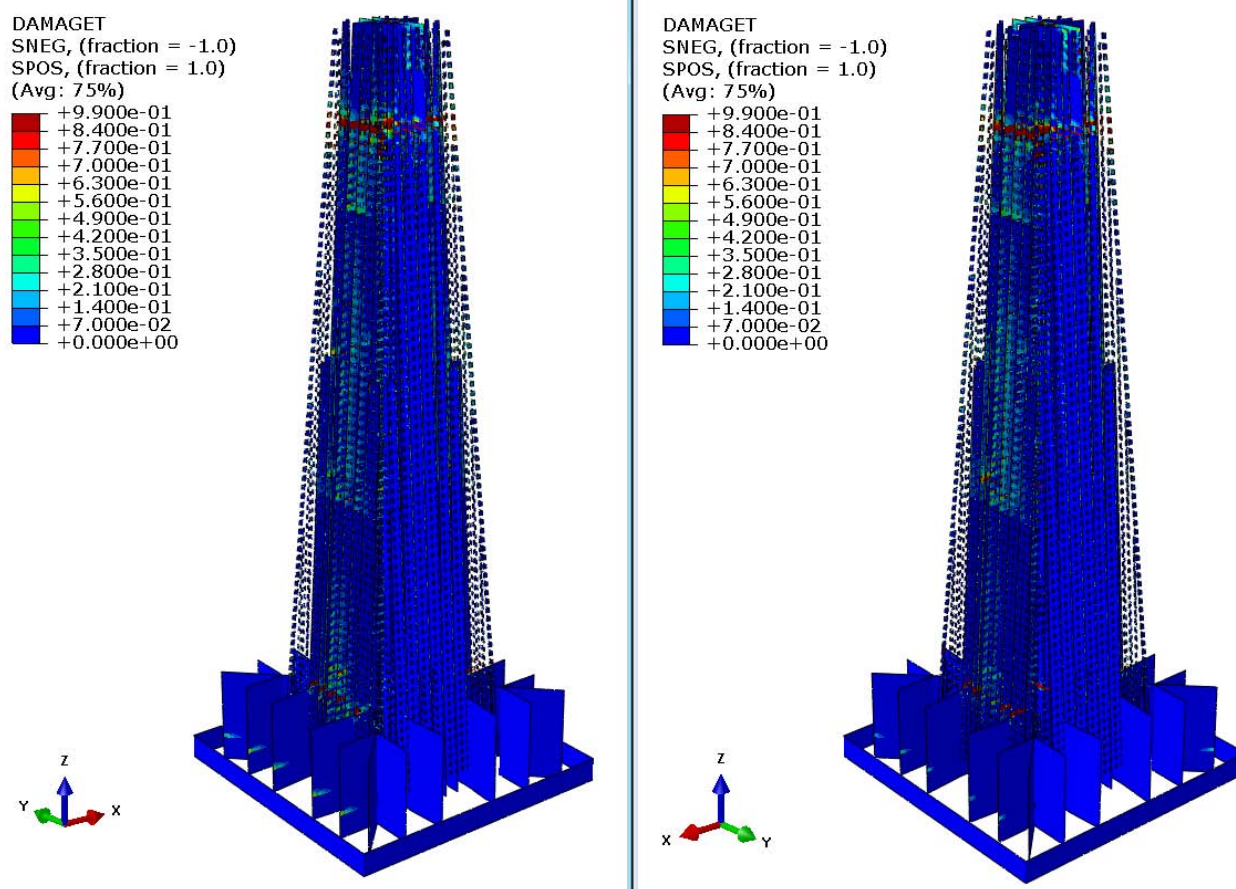


Рисунок 18. Повреждения после МРЗ в конструкциях, для которых была задана физически нелинейная модель, вследствие растяжения (при $\mu_s = 2\%$).

По результатам нелинейных динамических расчетов можно дать следующие рекомендации для дальнейшего проектирования здания:

- сделать смену сечений вертикальных несущих конструкций не такой контрастной, «размазанной», высотой в несколько этажей;
- усилить вертикальные несущие конструкции в уровне 69-го этажа, являющимся наиболее слабым местом с точки зрения устойчивости здания к прогрессирующему обрушению при МРЗ.

7. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Подытожим и обобщим изложенное в настоящей статье. На примере реального проекта высотного железобетонного здания в сейсмоактивном районе, исследованного по разработанной численной методике, показано, что:

- 1) прямой динамический расчет пространственных КЭ-моделей «основание-здание» (пошаговое интегрирование уравнений движения) на сейсмическое воздействие, заданное акселерограммами, возможен в верифицированных «тяжелых» универсальных программных комплексах в линейно-упругой и некоторых физически нелинейных постановках;
- 2) физически нелинейные модели поведения железобетона при динамических воздействиях, которые можно было бы использовать в составе этих или альтернативных программных комплексов, требуют дальнейших разработок и верификации для широкого спектра конструкций и воздействий;
- 3) до выработки и признания профессиональным сообществом таких верифицированных моделей, численных методик и программных

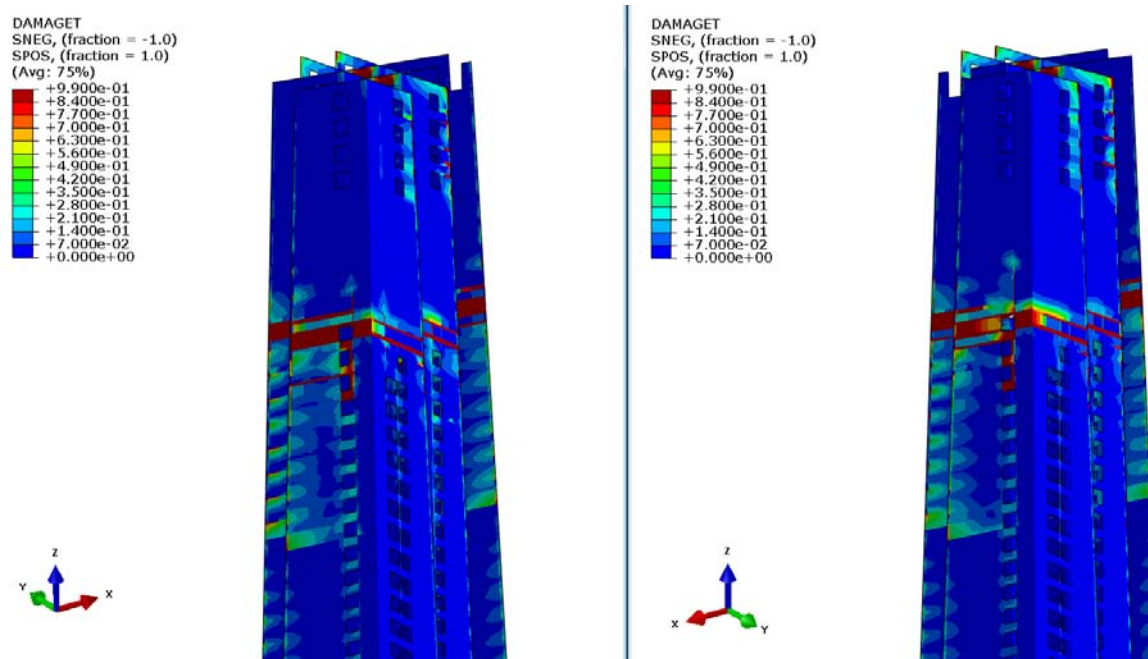


Рисунок 19. Зона «обрушения» после МРЗ в верхней части ядра жесткости вследствие растяжения (при $\mu_s = 2\%$).

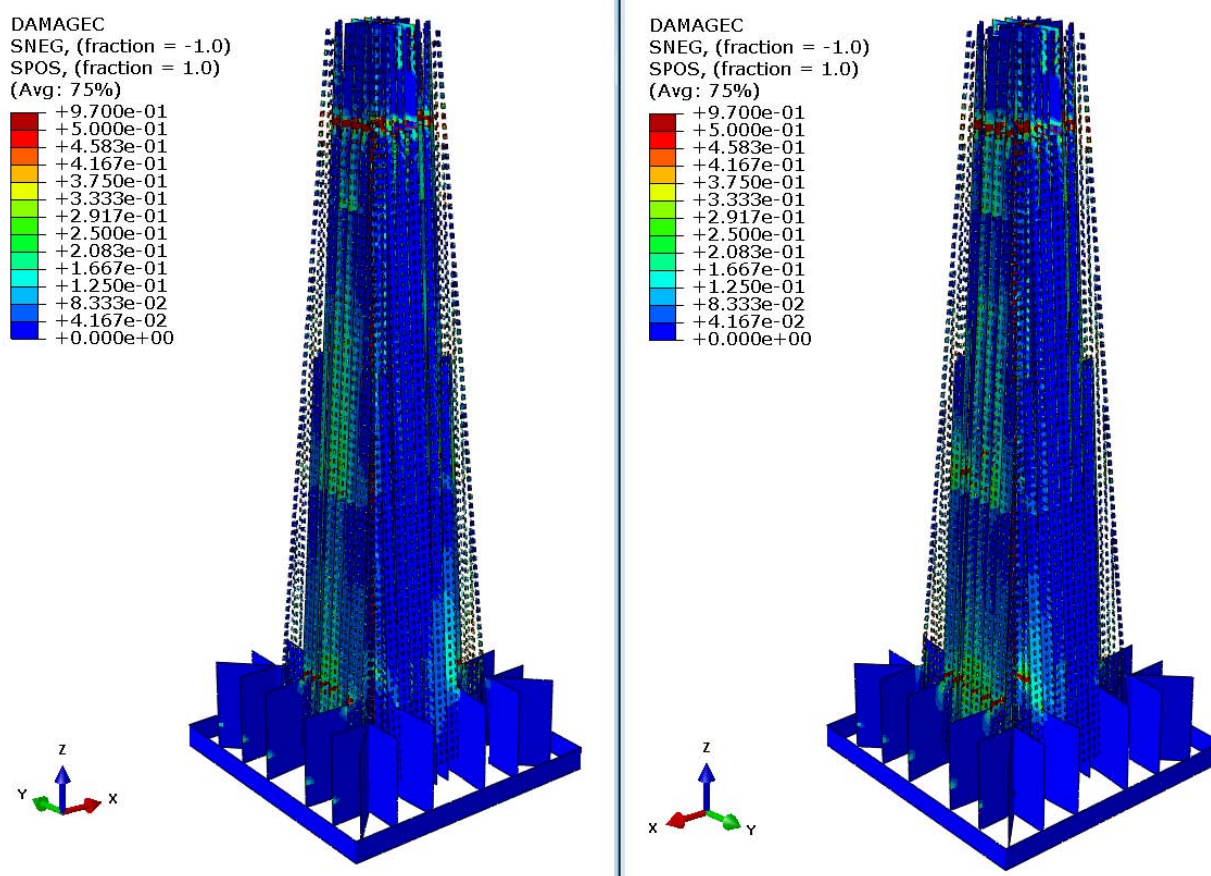


Рисунок 20. Повреждения после МРЗ в конструкциях, для которых была задана физически нелинейная модель, вследствие сжатия (при $\mu_s = 2\%$).

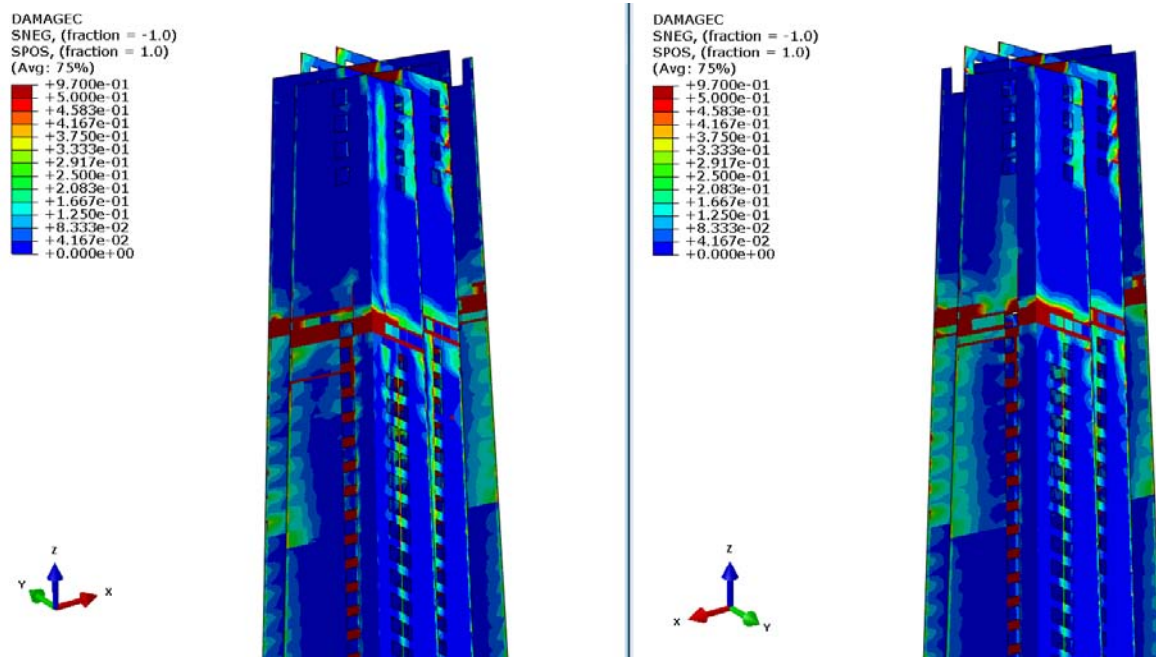


Рисунок 21. Зона «обрушения» после МРЗ в верхней части ядра жесткости вследствие сжатия (при $\mu_s = 2\%$).

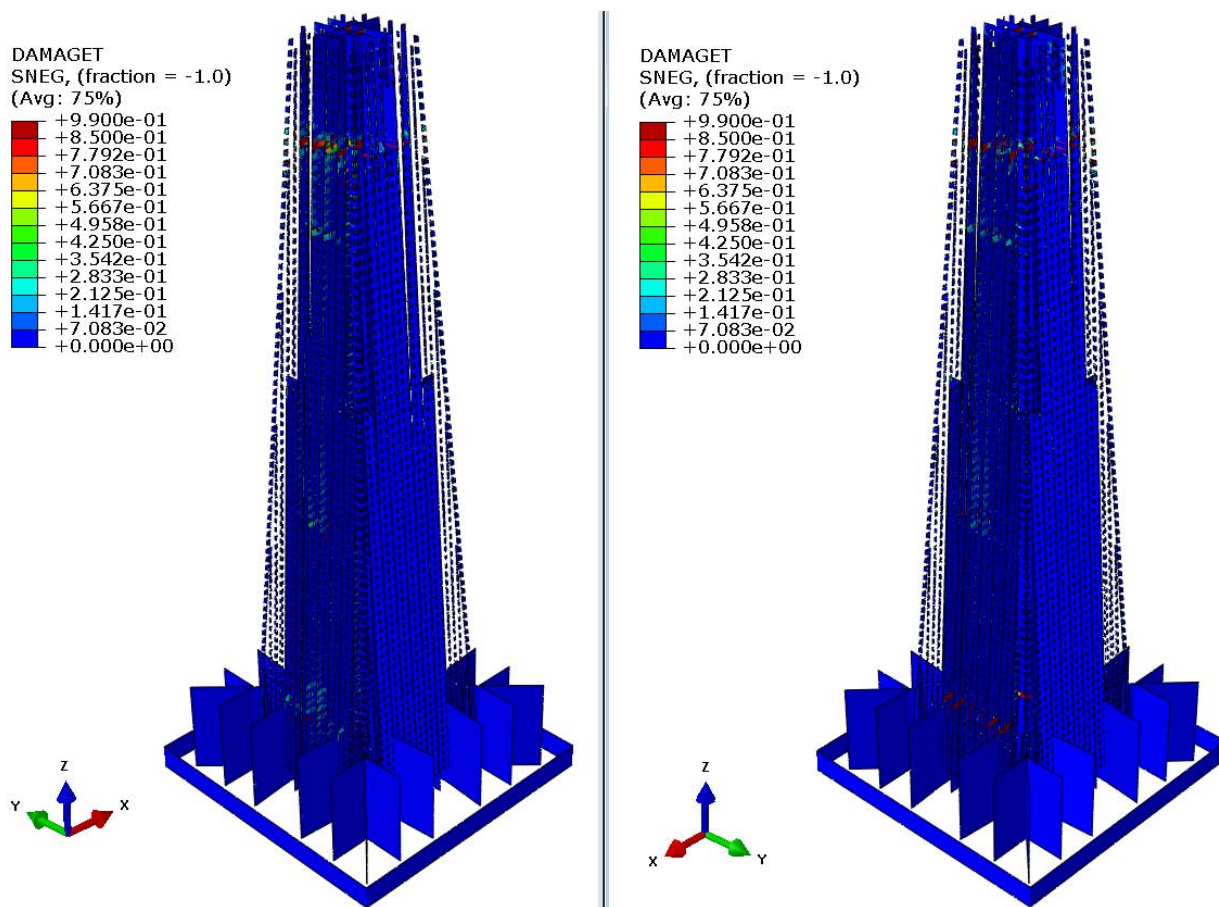


Рисунок 22. Повреждения после МРЗ в конструкциях, для которых была задана физически нелинейная модель, вследствие растяжения (при $\mu_s = 4\%$).

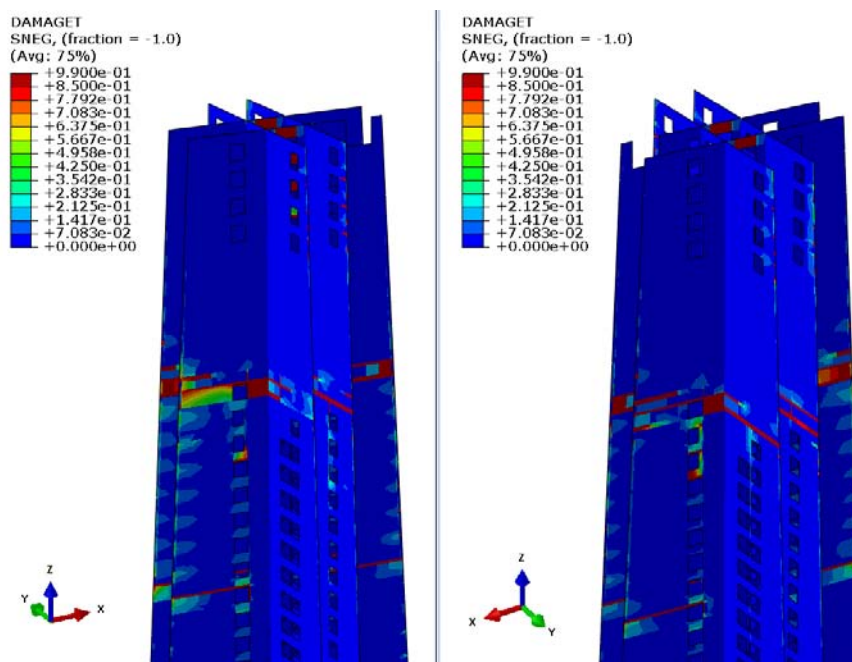


Рисунок 23. Повреждения после МРЗ в верхней части ядра жесткости вследствие растяжения (при $\mu_s = 4\%$).

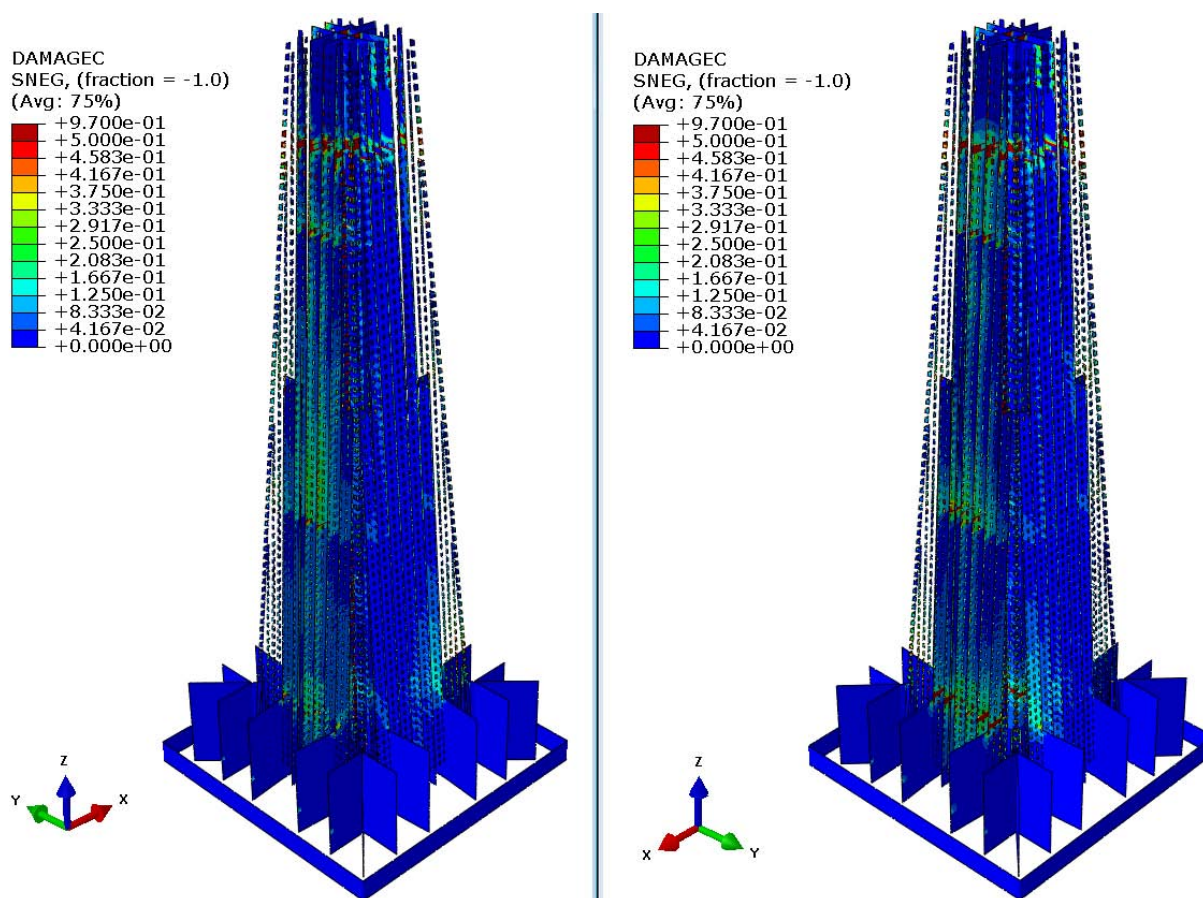


Рисунок 24. Повреждения после МРЗ в конструкциях, для которых была задана физически нелинейная модель, вследствие сжатия (при $\mu_s = 4\%$).

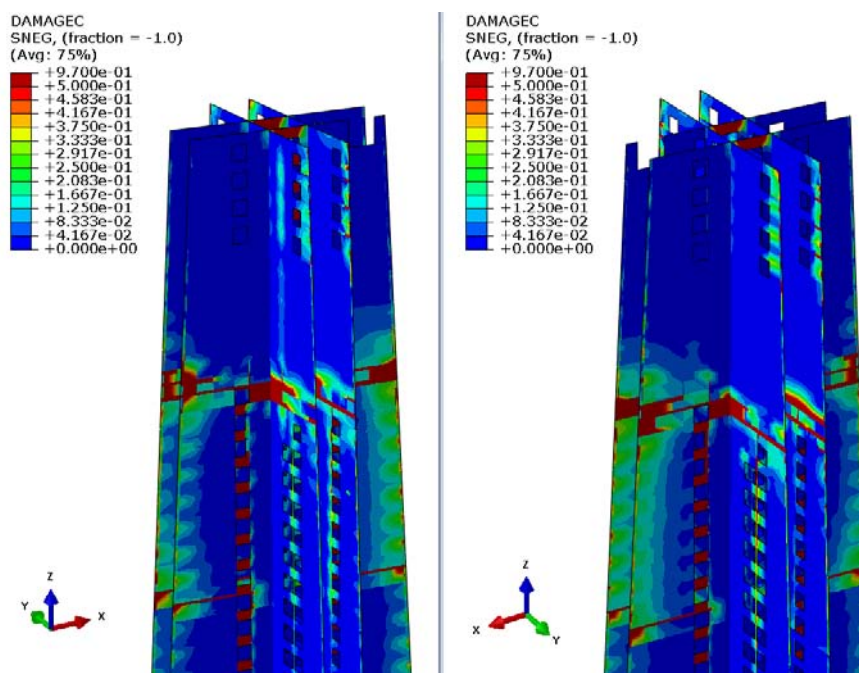


Рисунок 25. Повреждения после МРЗ в верхней части ядра жесткости вследствие сжатия (при $\mu_s = 4\%$).

реализаций следовало бы объявить мораторий на выполнение нормативного требования выполнения динамических расчетов уникальных зданий и ответственных сооружений с учетом неупругих деформаций и локальных разрушений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СП 14.13330.2014. Строительство в сейсмических районах. – М.: ФГУП ЦПП, 2014 г.
2. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: ФГУП ЦПП, 2001 г.
3. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. – М.: ФГУП ЦПП, 2007 г.
4. СНиП II-7-81*. Строительство в сейсмических районах. – М.: ФГУП ЦПП, 2006 г.
5. СНиП 2.02.01-83*. Основания зданий и сооружений. – М.: ФГУП ЦПП, 2004 г.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, 539 с.
7. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 446 с.
8. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
9. **Белостоцкий А.М.** Модернизация и применение численных методов к расчету плитно-оболочечных систем на статические и динамические воздействия. // В кн. «Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования». – М.: Наука, 1980, с.11-58.
10. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем «сооружение – основание». // Труды ЦНИИСК им.Кучеренко, 1990, с.175-180.
11. **Белостоцкий А.М., Белый М.В.** Супер-элементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных ис-

следований. // Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с.65-69.

12. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование состояния высотных зданий и комплексов в контексте обеспечения технологической безопасности мегаполиса. // Труды конференции «Особенности проектирования и строительства жилых и общественных высотных зданий», Санкт-Петербург, ЛенНИИПроект, 2006, с.65-67.
13. ANSYS 14.0. User's Guide. Canonsburg. 2011.
14. Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). М., ЗАО НИЦ СтаДиО, ГОУ ВПО МГСУ, 2009 г. Свидетельство РААСН о верификации ПК №02/ANSYS/2009 от 10.07.2009.
15. Abaqus Theory Manual. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2011.
16. Верификационный отчет по ПК ABAQUS (4 тома). М., ГОУ ВПО МГСУ, 2013 г. Свидетельство РААСН о верификации ПК №03/SIMULIA Abaqus/2013 от 22.06.2013.
17. **Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E.** A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Solids and Structures, vol. 25, no.3, pp. 229–326, 1989.
18. **Lee J., Fenves G.L.** Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, No.8, 1998, pp. 892-900.

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, доктор технических наук, профессор; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора ЗАО «ГОРПРО-ЕКТ», г. Москва, наб. Академика Туполева, д. 15, корп. 15, этаж 5; тел. +7 (495) 500-55-81; e-mail: travush@mail.ru

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Нацио-

нального исследовательского Московского государственного строительного университета, руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 125040, Россия, г. Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810; +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Вершинин Владислав Владимирович, аспирант кафедры строительной механики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, ассистент кафедры Металлических конструкций Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(916)522-55-09, e-mail: vlodya_91@mail.ru

Островский Константин Игоревич, кандидат технических наук, ведущий инженер ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810; тел. +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Петряшев Николай Олегович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; инженер ЦИСС сотрудник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел. +7 (495) 706-88-10; e-mail: niccm@mgsu.ru

Петряшев Сергей Олегович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; инженер ЦИСС сотрудник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел. +7 (495) 706-88-10; e-mail: niccm@mgsu.ru

Vladimir I. Travush, Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice 24/1, ul. Bolshaya Dmitrovka, Moscow, 129337, Russia; e-mail: travush@mail.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, StaDyO Research & Engineering Center; Director of Research & Education

Center of Computation Simulation, Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Sciences; , National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Vladislav V. Vershinin, Ph.D. student, Department of Structural Mechanics; Junior Research Scientist of Research & Education Center of Computation Simulation; Assistant of Department of Steel Structures; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Konstantin I. Ostrovsky, PhD, Leading Engineer; StaDyO Research & Engineering Center; Office 810, 18, Thretya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; tel. +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Nikolay O. Petryashev, Engineer, Research & Engineering Center; Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Engineer, JSC Research Center of Construction; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey O. Petryashev, Engineer, Research & Engineering Center; Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Engineer, JSC Research Center of Construction; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ СВЯЗЕЙ СЦЕПЛЕНИЯ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ СТЕРЖНЯ ЖЕСТКОЙ АРМАТУРЫ В БЕТОН ЧАСТЬ 1: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В.И. Травуш^{1,2,3}, Г.Г. Кашеварова⁴, А.С. Мартиросян⁴, В.С. Кузьминых⁴

¹ ЗАО «ГОРПРОЕКТ», г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

Аннотация: В данной работе, состоящей из двух частей, рассматриваются экспериментально-теоретические аспекты процесса разрушения связей сцепления в сталежелезобетонной конструкции при вдавливании стержня жесткой арматуры в бетон. В первой части представлены результаты экспериментальных испытаний двух партий образцов из бетонов разных классов. В первой партии испытывались пять серий образцов с целью изучения возможности повысить силу сцепления двух разнородных материалов за счет введения дополнительных элементов и адгезивов. Цель проведения испытаний второй партии - сравнение прочности сцепления жесткой арматуры с бетонной матрицей при сдвиге, при усилении элементов жесткой арматуры продольными стержнями гибкой арматуры и стэд-болтами.

Ключевые слова: экспериментальные испытания, сталежелезобетонная конструкция, жесткая арматура, разрушение связей сцепления при сдвиге

STUDY OF DEBONDING PROCESS WHEN RIGID REINFORCEMENT ROD IS PRESSED IN CONCRETE PART 1: EXPERIMENTAL STUDIES

Vladimir I. Travush^{1,2,3}, Galina G. Kashevarova⁴, Anna S. Martirosyan⁴, Vitaly S. Kuzminyh⁴

¹ GORPROEKT Ltd., Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁴ Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: In this paper consisting of two parts experimental and theoretical aspects of the adhesion bonds destruction process in steel-concrete composite construction when rigid reinforcement rod is pressed in concrete are considered. The first part shows the results of experimental tests of samples of two batches of different concrete classes. The first batch of five series of samples were tested to explore the possibility to increase two dissimilar materials adhesion by introducing additional elements and adhesives. The purpose of the second batch tests - comparing rigid reinforcement bond strength with concrete shear matrix, amplifying rigid reinforcement elements with longitudinal bars and stud bolts.

Keywords: maximum experimental test, steel-concrete composite construction, rigid reinforcement, adhesion bonds destruction

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в современных высотных зданиях получили распространение конструкции железобетонных колонн с жесткой арматурой – сталежелезобетонные конструкции. Известно, что один из ключевых факторов, обеспечивающих совместную работу арматуры и бетона в конструкции и позволяющих работать двухкомпонентному железобетону как единому материалу, является сцепление арматуры с бетоном. Традиционно это обеспечивается за счет рифления на поверхности арматуры, что обеспечивает сопротивление бетона смятию и срезу [1, 2]. На жесткой арматуре такое рифление отсутствует, поэтому требуется исследование, насколько конкретное внешнее воздействие не нарушит совместной работы композита.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Прочность сцепления арматуры с бетонной матрицей зависит от силы трения на поверхности арматуры вследствие обжатия при усадке бетона, адгезионного сцепления арматуры с бетоном вследствие клеящей способности цементного геля, а также вида напряженного состояния в области контакта. Процесс разрушения связей сопровождается появлением и развитием трещин, а также изменением зон контакта.

Проблеме сцепления арматуры с бетоном уделяется большое внимание. В нашей стране и за рубежом для решения этой задачи проведены обширные экспериментально-теоретические исследования [1 – 8].

Но анализ исследований в этой области [3] свидетельствует о неоднозначности подходов к решению этой задачи и об отсутствии теоретически обоснованной методики расчета.

Проведенные нами экспериментальные исследования при вдавливании стержня жесткой арматуры в бетон, включали

испытания двух партий образцов, изготовленных из бетона разных классов: В35 и В20.

Предварительно были проведены испытания для определения кубиковой прочности бетона. Графики испытаний кубиков размером 10 см показаны на рисунке 1.

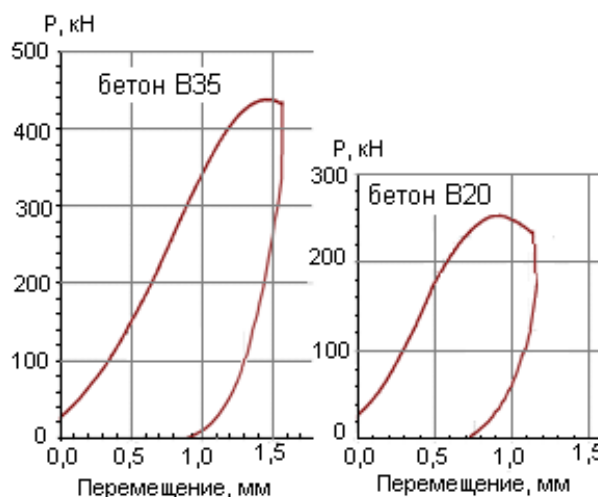


Рисунок 1. Графики испытаний бетонных кубиков на сжатие.

Для проведения испытаний использовался измерительный гидравлический 500т пресс Toni Norm серия 2041 (рис. 2), предназначенный для определения прочностных и деформационных параметров разрушения при одноосном сжатии. Точность по нагрузке – 16 кг, по деформациям – 0,0036 мм. Вся информация, поступающая с датчиков, регистрируется и обрабатывается в специальной программе testXpert в режиме реального времени.

В процессе испытаний образцов регистрировались значения внешней нагрузки P , действующей на стержень жесткой арматуры и его перемещения u в направлении действия нагрузки.

В первой партии испытывались пять серий образцов (по 3 образца в каждой серии) из бетона В35:

1. Базовые образцы с жесткой арматурой в виде двутавра и включением в бетон гибкой арматуры в виде вертикальных стержней и хомутов (рисунок 3).



Рисунок 2. Измерительный гидравлический 500т пресс Toni Norm.

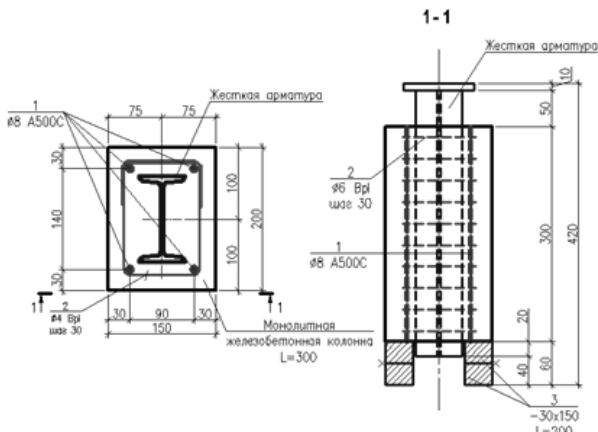


Рисунок 3. Образцы с жесткой арматурой.

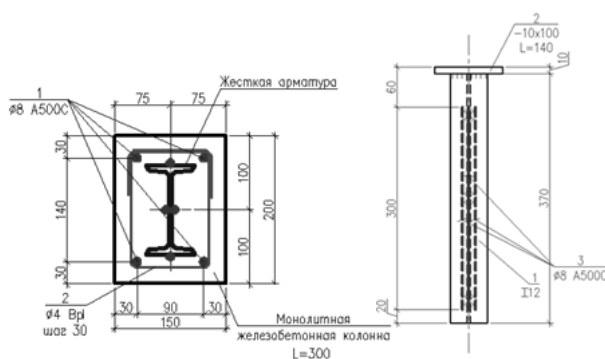


Рисунок 4. Образцы с жесткой арматурой усиленной продольными стержнями

2. Те же образцы, но жесткая арматура дополнительно усилена продольными стержнями гибкой арматуры (рисунок 4);

3. Те же образцы с нанесением на жесткую арматуру полимерного слоя – эпоксидной смолы для повышения сцепления.
4. Те же образцы, но из фибробетона (с добавлением в бетон волокон хризотила);
5. Образцы из фибробетона с добавлением в бетон и волокон хризотила и с нанесением на жесткую арматуру полимерного слоя.

3. ИСПЫТАНИЯ ПЕРВОЙ ПАРТИИ ОБРАЗЦОВ

Результаты испытаний первой партии образцов пяти серий представлены в виде диаграмм на рисунках 5-7.

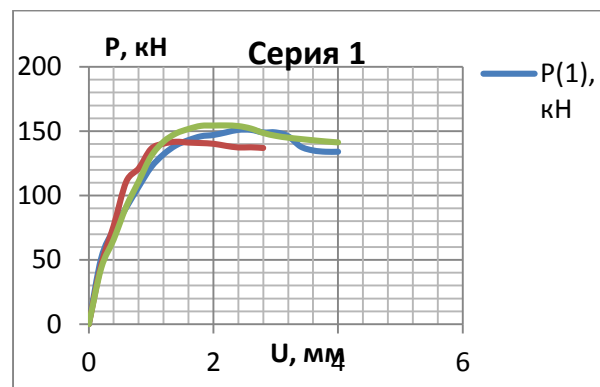


Рисунок 5. Диаграммы «перемещение – нагрузка» 1-й серии образцов.

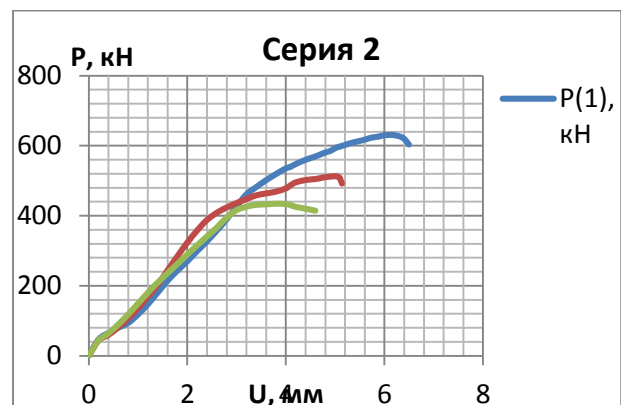


Рисунок 6. Диаграммы «перемещение – нагрузка» 2-й серии образцов.

При проведении испытаний 2-й серии образцов скорость нагружения 1-го и 2-го образцов составляла 0,01 мм/с, а 3-го образца – на порядок выше.

На диаграмме 7 приведены графики «перемещение-нагрузка» для 3, 4 и 5 серий первой партии образцов, осредненных по трем опытам значений в каждой серии, а на рис. 8 – общая диаграмма с осредненными значениями максимальной разрушающей сдвиговой нагрузки по всем сериям.

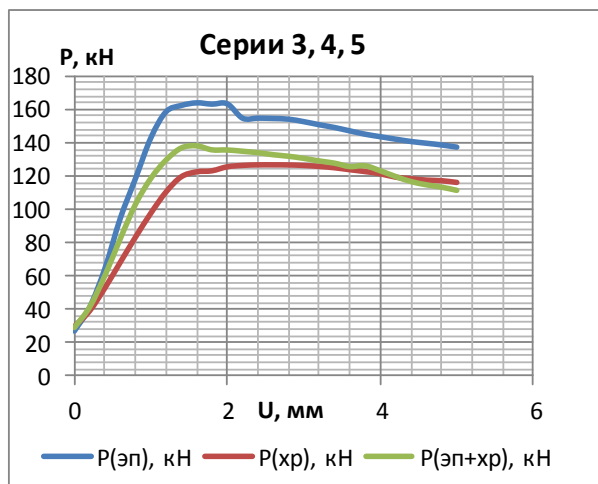


Рисунок 7. Диаграммы «перемещение-нагрузка» для 3, 4, 5 серий образцов

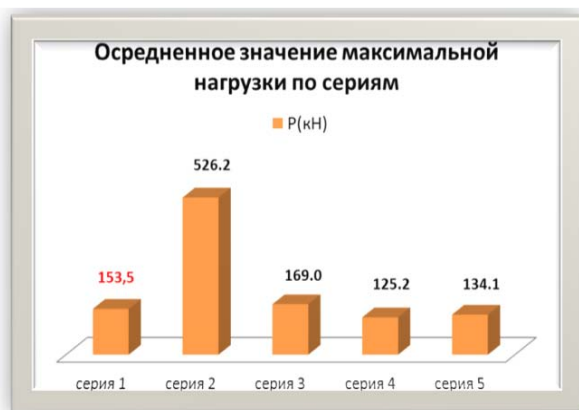


Рисунок 8. Максимальные значения сдвиговой нагрузки по сериям образцов

Образцы с характерными трещинами и дефектами показаны на рисунках 9-13.



Рисунок 9. Смещение жесткой арматуры, и характерные трещины в образцах 1-й (базовой) серии.



Рисунок 10. Характерные трещины в образцах 2-й серии.



Рисунок 11. Характерные трещины в образцах 3-й серии.



Рисунок 12. Характерные дефекты в образцах 4-й серии.



Рисунок 13. Характерные дефекты и трещины в образцах 5-й серии

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПЕРВОЙ ПАРТИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

1. При усилении двутавра продольными стержнями гибкой арматуры прочность сцепления на границе контакта «сталь-бетон» увеличилась более чем в 3 раза. При сдвиге двутавра появились глубокие трещины (рисунок 10).
2. Нанесение на жесткую арматуру полимерного слоя эпоксидной смолы повысило прочность сцепления ~на 10-15% по сравнению с базовой серией образцов. Ширина раскрытия трещин на

поверхности при сдвиге жесткой арматуры уменьшилась.

3. Добавление в бетон волокон хризотила (фибробетон) снизило прочность сцепления в зоне контакта «сталь-бетон» ~на 15-18% по сравнению с 1-й базовой серией образцов, но при этом на поверхности бетона существенно уменьшилось количество поверхностных трещин, что свидетельствует о повышении пластических свойств бетона (фибробетона).
4. При нанесении на жесткую арматуру полимерного слоя и добавлении в бетон волокон хризотила прочность сцепления по сравнению с базовыми образцами уменьшилась ~на 10%. Но по сравнению с образцами 4-й серии (только с хризотилом) увеличилась ~на 8%. При этом также значительно уменьшилось количество трещин на поверхности образцов

5. ИСПЫТАНИЯ ВТОРОЙ ПАРТИИ ОБРАЗЦОВ

Вторая партия включала две серии образцов (по 3 образца в каждой серии) из бетона класса В20:

1. Образцы с жесткой арматурой, усиленной продольными стержнями гибкой арматуры (рис.3).
2. Образцы с жесткой арматурой, усиленной стад-болтами (рис.14).

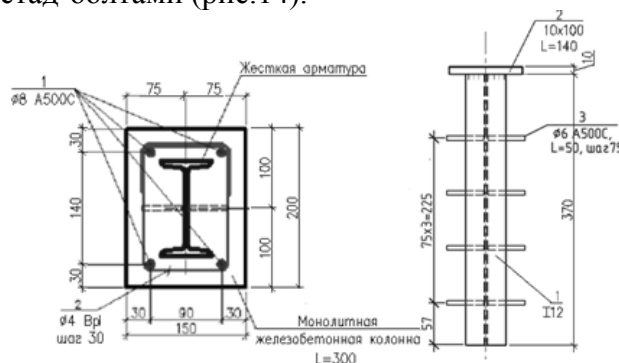


Рисунок 14. Образцы с жесткой арматурой усиленной стад-болтами.

Цель проведения этих испытаний - сравнение прочности сцепления жесткой арматуры с бетонной матрицей при сдвиге, при усилении элементов жесткой арматуры продольными стержнями гибкой арматуры приваренными к жесткой арматуре с шагом горизонтальные отрезки арматуры, имитирующие стад-болты.

На рисунке 15 приведены графики зависимости «нагрузка – перемещение» для этих двух серий.

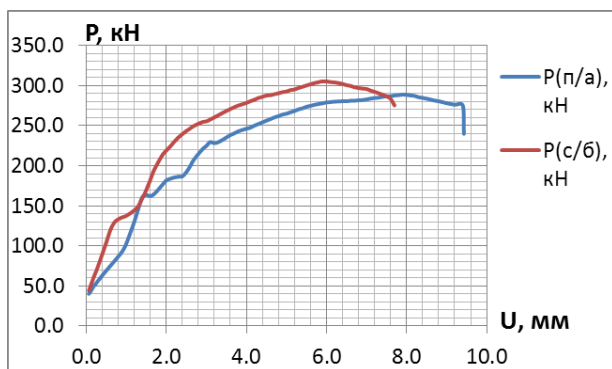


Рис. 15. Диаграммы «перемещение – нагрузка» образцов 2-й партии, усиленных продольными стержнями гибкой арматуры (п/а) и стад-болтами (с/б).

На рис. 16, 17 показаны характерные трещины и дефекты образцы в образцах этих серий.



Рисунок 16. Характерные трещины в образцах, усиленных продольными стержнями гибкой арматуры.



Рисунок 17. Характерные трещины в образцах, усиленных стад-болтами.

6. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОЙ ПАРТИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

1. При усилении двутавра продольными стержнями гибкой арматуры прочность сцепления на границе контакта «сталь-бетон» по сравнению с усилением стад-болтами во всех опытах получилась ~ на 3,5% ниже. Но в процессе нагружения первые трещины на образцах 2-й серии появились значительно раньше, и при максимальной нагрузке наклонные трещины занимали практически всю поверхность образца, а образец имел бочкообразную форму, что свидетельствовало о появлении растягивающих напряжений в горизонтальном направлении.
2. На образцах, усиленных продольными стержнями, трещины, в основном, располагались вертикально, и форма образцов не менялась, что свидетельствует о преобладании сдвиговых усилий.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных экспериментов можно констатировать:

1. Наиболее рациональным способом повышения силы сцепления двух разнородных

материалов является усиление элементов жесткой арматуры продольными стержнями гибкой арматуры. Это существенно повышает (~ в 3 раза) прочность сцепления на границе контакта гладкой арматуры и бетонной матрицы при сдвиге.

2. Нанесение на жесткую арматуру эпоксидной смолы несколько повышает прочность сцепления ~на 10-15%.
3. Введение хризотилowych волокон способствует повышению пластических свойств бетона.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бенин А.В.** Деформирование и разрушение железобетона: аналитические, численные и экспериментальные исследования. СПб.: ПГУПС, 2006. – 127 с.
2. **Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е.** Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности сечения. // Инженерно-строительный журнал, №5, 2013, с. 86 – 99.
3. **Веселов А.А.** Нелинейная теория сцепления арматуры с бетоном и ее приложения: дис. докт. техн. наук: 05.23.01. СПб., 2000. 320 с.
4. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
5. **Холмянский М.М.** Контакт арматуры с бетоном. – М.: Стройиздат, 1981. – 184 с.
6. **Balazs G.L.** Connecting Reinforcement to Concrete by Bond // Beton und Stahlbetonbau, 2007, No. 102, pp. 46-50.
7. **Goto Y.** Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars. // Journal of the American Concrete Institute, 1971, Vol. 68, No.4, pp. 244-251.
8. **Rehm G.** Ueber die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton // Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. 1961. NO.138. 59 p.

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, доктор технических наук, профессор; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора ЗАО «ГОРПРОЕКТ», г. Москва, наб. Академика Туполева, д. 15, корп. 15, этаж 5; тел. +7 (495) 500-55-81; e-mail: travush@mail.ru

Кашеварова Галина Геннальевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361; e-mail: ggkash@mail.ru;

Мартиросян Анна Сергеевна, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, тел. +7(342) 2198361; e-mail: anka_31@mail.ru;

Кузьминых Виталий Сергеевич, инженер кафедры РМПИ Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, тел. +7(342) 2198361; e-mail: vitalik87_ne@mail.ru;

Vladimir I. Travush, Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice 24/1, ul. BolshayaDmitrovka, Moscow, 129337, Russia; e-mail: travush@mail.ru

Galina G. Kashevarova, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Department "Building Structures and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; 109, ul. Kuybisheva, Perm, 614010, Russia; phone +7(342) 2198361; e-mail: ggkash@mail.ru;

Anna S. Martirosyan, PhD Student, Department "Building Structures and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; 109, ul. Kuybisheva, Perm, 614010, Russia; phone +7(342) 2198361; e-mail: anka_31@mail.ru;

Vitaly. S. Kuzminyh, Engineer, Department of Mining, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komсомolsky prospect, Perm, 614000, Russia; phone +7(342) 2198361; e-mail: vitalik87_ne@mail.ru;

THE ACCOUNT OF NON-UNIFORMITY OF THE TENSION IN PROBLEMS OF THE STATICS AND DYNAMICS OF IDEALLY PLASTIC SHALLOW SHELLS

Aleksandr V. Starov, Sergei Yu. Kalashnikov

Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Volgograd, RUSSIA

Abstract: This paper shows problems of deformation of ideally plastic shallow shells of rotation under high-power load taking into account geometrical nonlinearity, hardening of a material, a relation of yield strength to speed of deformation, rotary inertia and non-uniformity of a tension. In the given article, main attention is given to a survey of non-uniformity of a tension.

Keywords: rotational shallow shells, plastic deformation, high-power loads, physically and geometrically nonlinear problems, non-uniformity of a state of tension

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А.В. Старов, С.Ю. Калашников

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, г. Волгоград, РОССИЯ

Аннотация: Рассмотрена постановка задач деформирования идеально пластических пологих оболочек вращения под действием нагрузок большой интенсивности с учетом геометрической нелинейности, упрочнения материала, зависимости предела текучести от скорости деформирования, инерции вращения и неоднородности напряженного состояния. В данной статье основное внимание направлено на учет неоднородности напряженного состояния.

Ключевые слова: пологие оболочки вращения, пластическое деформирование, нагрузки большой интенсивности, физически и геометрически нелинейные задачи, неоднородность напряженного состояния

1. PROBLEM SPECIFICATION FOR THE STATIC AND DYNAMIC DESIGN OF PLASTIC SHELLS

The research into the behavior of circular plates and shallow shells of rotation under high-power loads including short-term ones exceeding the bearing capacity of the structure has always been an urgent and complicated task.

Whereby, there appears a necessity to take into account a physical and geometrical nonlinearity, due to great plastic deformations.

The numerical algorithms of such problems

based on discrete models in the elastic-viscoplastic setting are rather difficult taking into account the rotator inertia, wave effects, hardening, dependence of yielding point of the material on the deformation velocity and other factors. The need to monitor the boundaries of elastic and plastic zones throughout the depth of cross-section, account of load alleviation make the design more complicated.

When integrating the time step should be considerably less than the period of natural period of vibration corresponding to the supreme frequency.

The account of the tangential acceleration and the presence of spatial derivatives of the deflection velocity in the right hand side of the system based on the Courant condition imposes strict restrictions on the relation between time integration steps and the space integration coordinate, which may happen inadequate in terms of computing time, neither does it guarantee a solution stability. Whereby, there appears a need of evaluating the precision of the results. Due to weak discontinuities, one should introduce artificial viscosity to stabilize the difference scheme, to use other techniques that distorts the results and does not guarantee a convergence.

It is necessary to use such algorithms in a research when studying the propagation process for elastic and plastic waves, that is unlikely possible for design purposes because of the above-mentioned problems.

The goal of the research is to develop reasonably simplified methods for quasi-static and dynamic problems taking into account physical and geometrical nonlinearities, hardening and sensitivity of the material to deformation velocity, rotation inertia, non-uniformity of the stress state, and the possibility of their practical application.

This paper [1] presents a setting of the problem for dynamic impact by high-power loads upon shallow shells of rotation based on a non-linear condition of plasticity with regard to hardening and sensitivity of the material to the deformation velocity.

This article studies also the influence of non-uniformity of the stress state with the regard to the above factors.

Equations of motion for a shallow shell with regard to the rotational inertia [1]:

$$\beta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left[n_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho n_1 \cos \varphi - \rho Q \sin \varphi) \right],$$

$$\rho Q \cos^{-1} \varphi = m_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho m_1) - \frac{4}{3} \beta \cdot \rho \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(\rho, t) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho n_1 \sin \varphi) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q \cos \varphi), \quad \beta = \frac{h^2}{4\rho_0^2},$$

where

$$\sin \varphi = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \cdot \left[1 + \beta \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\cos \varphi = \left[1 + \beta \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dimensionless coordinates and variables are used:

$$w = \frac{2\bar{w}}{h}, \quad u = \frac{4\bar{u}\rho_0}{h^2}$$

– deflection and movement of the middle surface radially;

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}$$

– radius of the projection for arbitrary point;
 ρ_0 - radius of the projection for a point on the support contour of the shell;

$$n_i = \frac{\bar{N}_i}{2\sigma_s^0 h}, \quad m_i = \frac{\bar{M}_i}{\sigma_s^0 h^2}$$

– componentry of membrane and bending stresses;

$$P = \frac{\bar{P}\rho_0^2}{\sigma_s h^2}$$

– virtual inner pressure; $2h$ - shell thickness;

$f = f(\rho)$ - equation of the middle surface in the dimensionless coordinates; $i = 1, 2$ - indices of radial and peripheral directions;

$$t = \bar{t} \sqrt{\frac{2\sigma_s h}{\gamma \rho_0^2}}$$

– non-dimensional time; γ - mass of the shell volume per unit area of the middle surface; σ_s^0 and σ_s -- the material's static and dynamic yield point correspondingly.

Boundary conditions for a hinged-fixed edge:

$$\begin{aligned} m_1(0, t) = m_2(0, t), \quad Q(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}(0, t) = 0, \\ m_1(1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Boundary conditions for a rigid jamming of an edge:

$$\begin{aligned} m_1(0, t) = m_2(0, t), \quad Q(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}(0, t) = 0, \\ m_1(1, t) = -m, \quad w(1, t) = u(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Initial data:

$$w(\rho, 0) = \dot{w}(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, 0) = \dot{u}(\rho, 0) = 0.$$

Assuming that the material's dynamic yield point depends on the deformation intensity, the plastic deformation velocity and a gradient modulus of the deformation intensity

$$\sigma_s = \sigma_s^0 \cdot \Phi(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |grad \varepsilon_i|).$$

The function $\Phi(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |grad \varepsilon_i|)$ is taken as

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |grad \varepsilon_i|) = \\ = 1 + \frac{E^k}{\sigma_s^0} \varepsilon_i + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^n + \frac{\sigma_s^m - \sigma_s^0}{\sigma_s^0} th \left(\frac{|grad \varepsilon_i|}{\lambda \varepsilon_i} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

where E^k - tangential hardening modulus, $\dot{\varepsilon}_0$, n - invariables determined on the basis of experimental trials with high-speed deformations at the uni-axial stress state [2,3],

σ_s^m , λ - invariables determined in experimental trials at the non-homogenous stress [4,5].

Expressions for the deformations and the change of curvature for the middle surface are as follows, further the bar goes down:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 = \beta \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 - w \cdot \nabla_1(f) \right\}, \\ \bar{\varepsilon}_2 = \beta \left\{ \frac{u}{\rho} - w \cdot \nabla_2(f) \right\}, \quad \beta = \frac{h^2}{4\rho_0^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\bar{\chi}_1 = -\frac{2\beta}{h} \cdot \nabla_1(w), \quad \bar{\chi}_2 = -\frac{2\beta}{h} \cdot \nabla_2(w),$$

where differential operators:

$$\begin{aligned} \nabla_1() = \frac{\partial^2()}{\partial \rho^2} \cdot \left[1 + \beta \left(\frac{\partial()}{\partial \rho} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \\ \nabla_2() = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial()}{\partial \rho} \cdot \left[1 + \beta \left(\frac{\partial()}{\partial \rho} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Introduction of the interaction for the membrane and bending force factors is made with the help of the loading surface analogical to the yield surface [6]

$$\begin{aligned} n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = \\ = \Phi^2(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |grad \varepsilon_i|). \end{aligned} \quad (4)$$

The loading surface (4), as suggested in [7], is replaced by the three equivalent relations

$$\begin{aligned}
 m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 &= m^2, \\
 n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 &= n^2, \\
 m^2 + n^2 &= \Phi^2(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |\text{grad} \varepsilon_i|).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

In disregard for the tangential acceleration (without the wave processes) and assuming the shell is shallow, and the deflections do not exceed 2-3 of the shell thickness, we obtain the equation system уравнений

$$\begin{aligned}
 n_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho n_1), \quad \beta &= \frac{h^2}{4\rho_0^2}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{4}{3}\beta \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] &= \\
 = P(\rho, t) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho n_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right] - & \\
 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[m_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho m_1) \right]. &
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

The expressions for deformations and change of curvature of the middle surface are as follows

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_1 &= \frac{h^2}{4\rho_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 - w \frac{\partial f^2}{\partial \rho^2} \right), \\
 \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{h^2}{4\rho_0^2} \left(\frac{u}{\rho} - w \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right), \\
 \bar{\chi}_1 &= -\frac{h}{2\rho_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}, \quad \bar{\chi}_2 = -\frac{h}{2\rho_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

The power of the energy dissipation in a dimensionless form

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^1 \left(\dot{\varepsilon}_1 n_1 + \dot{\varepsilon}_2 n_2 + \dot{\chi}_1 m_1 + \dot{\chi}_2 m_2 \right) \rho d\rho + \\
 &+ \left[\left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot m_1 \right] \right]_{\rho=1},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\text{where } D = \frac{2\bar{D}}{\sigma_s h^3}, \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{4\dot{\varepsilon}_i \rho_0^2}{h^2}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{2\dot{\chi}_i \rho_0^2}{h}$$

– dimensionless velocity of dissipation, deviational velocity and speed of gaging the curvature of the middle surface, square brackets – discontinuity in the pitch rate of the middle surface at $\rho=1$.

Assuming as a plastic potential, loading surface (5) and making a maximum condition of capacity weight ratio for energy dissipation, basing on the associated flow rule, we obtain

$$m_1 = \frac{m(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{\sqrt{3\dot{P}_\chi}}, \quad m_2 = \frac{m(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1)}{\sqrt{3\dot{P}_\chi}},
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_\chi &= \dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2, \\
 n_1 &= \frac{n(2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2)}{\sqrt{3\dot{P}_\varepsilon}}, \quad n_2 = \frac{n(2\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_1)}{\sqrt{3\dot{P}_\varepsilon}}, \\
 \dot{P}_\varepsilon &= \dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Substituting in (8) the expressions for bending torques (9) and deformation velocities of the middle surface (7), we can find

$$\begin{aligned}
 D &= D^m + D^n, \\
 D^m &= \frac{2m}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} \rho d\rho + \left[\left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \right] \cdot m_1 \right]_{\rho=1}, \\
 D^n &= n \int_0^1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \rho d\rho - n \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \cdot \dot{w} \rho d\rho.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

The maximum condition

$$\frac{\partial D}{\partial n} = 0$$

enables to acquire

$$\frac{n}{m} = \frac{\int_0^1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \rho d\rho - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \dot{w} \rho d\rho}{\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} \rho d\rho + \left[\left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \right] \cdot m_1 \right]_{\rho=1}}. \quad (12)$$

On integrating (11) by parts one can obtain another equivalent expression for energy dissipation power without discontinuities in pitch rates and preferable in the problems of dynamics

$$\begin{aligned} D &= D^m + D^n, \\ D^m &= \int_0^1 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[m_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho m_1) \right] \dot{w} \rho d\rho, \\ D^n &= -n \int_0^1 \nabla^2(w) \dot{w} \rho d\rho - n \int_0^1 \nabla^2(f) \dot{w} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (11a)$$

The maximum condition

$$\frac{\partial D}{\partial n} = 0$$

gives relation

$$\frac{n}{m} = \frac{-\int_0^1 \nabla^2(w) \dot{w} \rho d\rho - \int_0^1 \nabla^2(f) \dot{w} \rho d\rho}{\int_0^1 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\bar{m}_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{m}_1) \right] \dot{w} \rho d\rho}, \quad (12a)$$

where a differential operator

$$\nabla^2(\) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\), \quad \bar{m}_1$$

is a normalized vector m_1 .

The n and m functions in accordance with (5) and (12-12a), where D^m and D^n according to (11) or (11a):

$$n = \Phi(\varepsilon_i, |grad \varepsilon_i|) \cdot \frac{D^n}{n} \left[\left(\frac{D^m}{m} \right)^2 + \left(\frac{D^n}{n} \right)^2 \right]^{-0.5},$$

$$m = \Phi(\varepsilon_i, |grad \varepsilon_i|) \cdot \frac{D^m}{m} \left[\left(\frac{D^m}{m} \right)^2 + \left(\frac{D^n}{n} \right)^2 \right]^{-0.5}.$$

The below algorithm enables to take into account the material's hardening, the dependence of the yield point on the deformation velocity and the non-uniformity of the stress state based on the method of the step-by-step approach by the average deformation intensity [2,3] in terms of the shell volume.

For that purpose geometrical and loading parameters are put into a dimensionless form. The design is made, residual deflections and the deformation time are determined.

Further, they are put into a dimensional form, the average values of the deformation intensity and its velocity are determined based on which the function $\Phi(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, |grad \varepsilon_i|)$ is defined and correspondingly the dynamic yield point of the material.

Hereafter, a loading parameter is defined in a dimensionless form. The design is made, new values of the residual deflections and the deformation time are determined. The iteration process rapidly converges, 3-4 iterations are enough.

2. A SYSTEM OF RESOLVING EQUATIONS FOR TAKE INTO ACCOUNT NON-UNIFORMITY OF THE STRESS STATE

The deformation intensity by the shell's thickness [8,9]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\chi} + z^2P_\chi}, \\ P_\varepsilon &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2, \quad P_\chi = \chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_2^2, \\ 2P_{\varepsilon\chi} &= 2\varepsilon_1\chi_1 + 2\varepsilon_2\chi_2 + \varepsilon_1\chi_2 + \varepsilon_2\chi_1.\end{aligned}\quad (13)$$

Performing the integration by the shell's thickness based on the inequality Cauchy-Bunyakovsky, we obtain the average values of the deformation intensity in the z coordinate

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,0}^z &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon_i dz = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\chi} + z^2P_\chi} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + \frac{h^2}{3}P_\chi}.\end{aligned}\quad (14)$$

On performing then the integration by the shell's area, we obtain the average value of the deformation intensity by the volume which will be used to determine the function $\Phi(\varepsilon_i, |grad\varepsilon_i|)$:

$$\varepsilon_{i,0} = \varepsilon_{i,0}^{z,\rho} = \frac{2}{\rho_0^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\rho_0} \sqrt{P_\varepsilon + \frac{h^2}{3}P_\chi} \rho d\rho. \quad (15)$$

The mean velocity of the deformation intensity $\dot{\varepsilon}_{i,0} = \varepsilon_{i,0} / t_k$, where $t = t_k$ - time of the plastic deformation. The average values of deformation intensity velocity and the intensity of deformations can be determined also through the power of the energy dissipation

$$\dot{\varepsilon}_{i,0} = \frac{h^2}{2\rho_0^2} \cdot D, \quad \varepsilon_{i,0} = \frac{h^2}{2\rho_0^2} \cdot \int_0^{t_k} D dt = \dot{\varepsilon}_{i,0} \cdot t_k. \quad (16)$$

The gradient module of the deformation intensity by analogy with [5]

$$|grad\varepsilon_i| = \left\{ \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

The average value in the z coordinate for a gradient module of the deformation intensity

$$\begin{aligned}|grad\varepsilon_i|_0^z &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |grad\varepsilon_i| dz = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left\{ \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dz.\end{aligned}\quad (18)$$

On integrating by the shell's thickness based on the inequality Cauchy-Bunyakovsky, we obtain the average values of the gradient module for the deformation intensity in the z coordinate

$$\begin{aligned}|grad\varepsilon_i|_0^z &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |grad\varepsilon_i| dz = \\ &= \left\{ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho} \right)^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (19)$$

The average value by the volume of the gradient module of the deformation intensity

$$\begin{aligned}|grad\varepsilon_i|_0 &= \\ &= \frac{2}{\rho_0^2} \cdot \int_0^{\rho_0} \left\{ \frac{1}{2h} \left[\int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} \right)^2 dz + \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho} \right)^2 dz \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \rho d\rho.\end{aligned}\quad (20)$$

The corresponding integrals in (20) are expressed in elementary functions but are exceedingly lengthy in practice. Integrating by the shell's thickness, we obtain based on the Simpson formula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} \right)^2 dz &= \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{P_\chi}{4} \left(1 + \frac{h^4 P_\chi^2}{P_\varepsilon^2 + h^2 P_\varepsilon P_\chi + h^4 P_\chi^2} \right), \\ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho} \right)^2 dz &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{12 P_\chi} \left(\frac{\partial P_\chi}{\partial \rho} \right)^2 \left(1 + \frac{3h^4 P_\chi^2}{P_\varepsilon^2 + h^2 P_\varepsilon P_\chi + h^4 P_\chi^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

The integral of deformation intensity in the middle surface at whatever cinematically - admissible field of radial displacements up to 15% follows the inaquation

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_0} \varepsilon_i \Big|_{z=0} \rho d\rho &= \int_0^{\rho_0} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} \rho d\rho \geq \\ &\geq \int_0^{\rho_0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho d\rho = \beta \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 - \nabla^2(f) w \right] \rho d\rho, \\ \nabla^2(f) &= -2\xi, \quad \xi = \frac{2\rho_0^2}{Rh} = \frac{4\bar{f}_0}{h}. \end{aligned} \quad (22)$$

If the field of radial displacements is not trivial, the error is less than 5%, that is, it does not depend on the field of the radial displacements virtually.

In the last formula, the integrand expression of the second integral is an Ilyushin strain ellipse (rotated through a full 90° relative to a stress ellipse von Mises), and the integrand expression of the third integral is its approximation by linearization.

Among the solution sets for an integral equation, we can single out two: the equation of integrand functions and the integrand functions do not depend on a radius, that is

$$\frac{d}{d\rho} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) = \frac{d}{d\rho} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0.$$

It follows from the latter equation

$$u = \beta \rho \cdot \int_0^1 L(w, \xi) \cdot \rho d\rho - \frac{\beta}{\rho} \int_0^\rho L(w, \xi) \cdot \rho d\rho, \quad (23)$$

$$L(w, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 + 2\xi w,$$

$$\varepsilon_1 = \beta \cdot \left\{ \int_0^1 L(w, \xi) \cdot \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho L(w, \xi) \cdot \rho d\rho - \xi w \right\},$$

$$\varepsilon_2 = \beta \cdot \left\{ \int_0^1 L(w, \xi) \cdot \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho L(w, \xi) \cdot \rho d\rho + \xi w \right\}. \quad (24)$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} = \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\beta \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 + 2\xi w \right) \cdot \rho d\rho. \end{aligned} \quad (25)$$

Subject to performing the first equilibrium equation (6), the integral of the sum of the normal forces in the middle surface

$$\int_0^{\rho_0} (n_1 + n_2) \rho d\rho = \quad (26)$$

$$= \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} (\rho^2 n_1) \rho d\rho = n_1(\rho_0) \rho_0^2 = n \rho_0^2,$$

$$\text{if } \frac{\partial n}{\partial \rho} = 0.$$

The integral of the sum of the normal forces in the middle surface according to (10) at whatever cinematically - admissible field of radial displacements up to 5% obeys the inequality

$$\int_0^{\rho_0} (n_1 + n_2) \rho d\rho = \int_0^{\rho_0} \frac{2n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}} \rho d\rho \leq$$

$$\leq \int_0^{\rho_0} 2n \rho d\rho = n \rho_0^2, \quad (27)$$

where under conditions of simple loading $\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \cdot f(t)$. Comparing the two latter formulas, we conclude that one can assume $n_i = n$ when calculating, and the deformations according to (24).

If we approximate the deflection by a quadratic parabola, according to (15) and (20), we can obtain simple formulas to assess the necessary account of non-uniformity of the stress state:

$$\varepsilon_{i,0} = 8\beta w_0 \sqrt{\frac{1+3\delta^2}{3}}, \quad \delta = \frac{w_0 + \zeta}{4},$$

$$|grad \varepsilon_i|_0 = \frac{4\beta w_0}{h} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{1+\delta^2 + \delta^4}}. \quad (28)$$

At $\delta = 0$ relative gradient

$$\frac{|grad \varepsilon_i|}{\varepsilon_i} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2h},$$

$$\text{at } \delta = 1 \quad \frac{|grad \varepsilon_i|}{\varepsilon_i} = \frac{1}{2h},$$

thereafter, with the increasing δ , relative gradient of the deformation intensity decreases linearly in fact.

To take into account elastic deformations, one should assume that the deflection consists of the two components: elastic and plastic ones

$$w_0 = w_0^e + w_0^p.$$

The elastic component can be determined equating the medium intensity of deformations (28)

to the one corresponding to the start of the plastic deformation consistent with the actual diagram or corresponding to the conventional yield point.

$$\varepsilon_{i,0} = 8\beta w_0^e \sqrt{\frac{1}{3} + \left(\frac{w_0^e + \zeta}{4}\right)^2} = [\varepsilon_{i,s}], \quad (29)$$

$$[\varepsilon_{i,s}] = \frac{\sigma_s^0}{E}, \text{ or } [\varepsilon_{i,s}] = 0.002.$$

At $\zeta \geq 8$, the solution of the nonlinear equation (29) can be adequately presented as

$$w_0^e = \frac{1}{2} \sqrt{\zeta^2 + \frac{2[\varepsilon_{i,s}]}{\beta}} - \frac{\zeta}{2}. \quad (30)$$

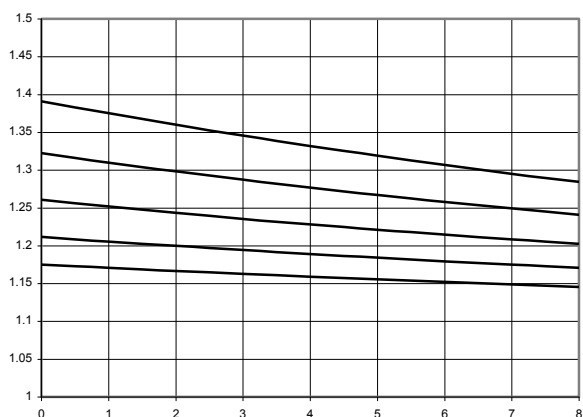
At $\zeta = 0$, the adequate solution of the nonlinear equation (29)

$$w_0^e = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + \frac{[\varepsilon_{i,s}]^2}{\beta^2}}} - \frac{8}{3}. \quad (31)$$

Dependency graphs for a yield limit (the function $\Phi(\varepsilon_i, |grad \varepsilon_i|)$ - account of the non-uniformity of the stress state) for a shell with the radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$ and the thickness $2h_0 = 5, 10, 20, 40 \text{ mm}$ with the parameter of the initial curvature $\zeta = 0, 8, 16, 24, 32$, which corresponds to the shell depth 0 – 4 of the shell's thickness, of the plastic deflection $w_0^p = 0 - 8$, which corresponds to the twice thickness and are shown in Fig. 1 - Fig. 4.

Fig. 5 – Fig. 8 show the dependence graphs of the yield point upon the plastic deformation intensity $\varepsilon_i^p = 0 - 0.04$ for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h_0 = 5, 10, 20, 40 \text{ mm}$ with a parameter of the initial curvature $\zeta = 0, 8, 16, 24, 32$.

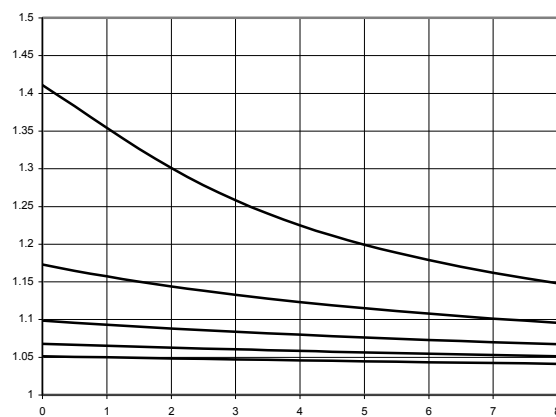
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$w_0^p$$

Figure 1. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the plastic deflection w_0^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 5 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

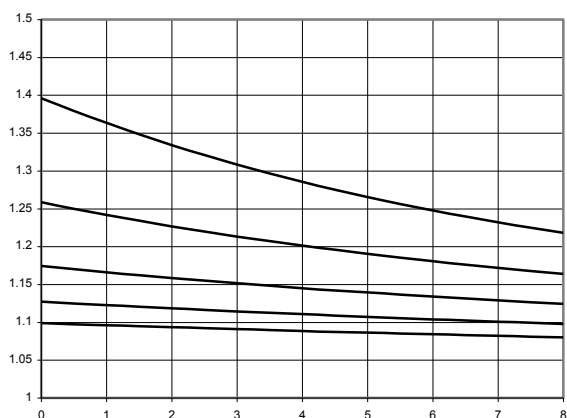
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$w_0^p$$

Figure 3. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the plastic deflection w_0^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 20 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

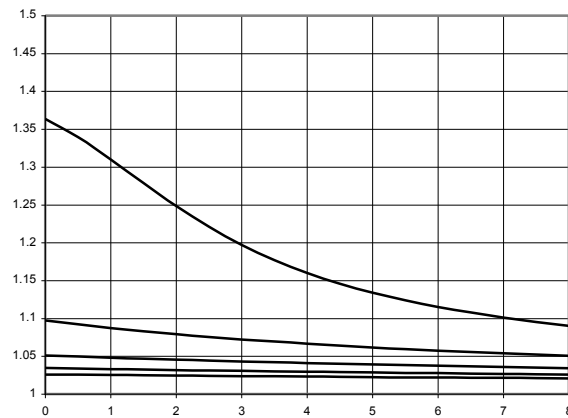
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$w_0^p$$

Figure 2. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the plastic deflection w_0^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 10 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

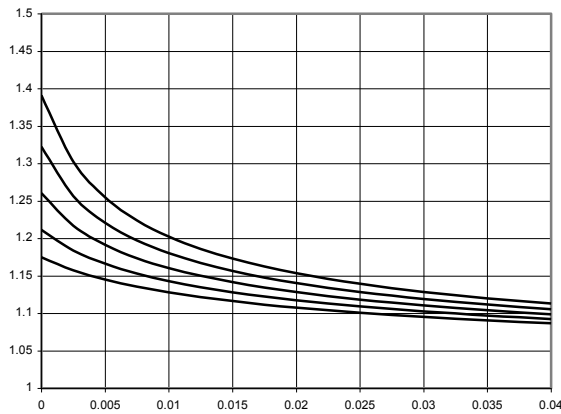
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$w_0^p$$

Figure 4. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the plastic deflection w_0^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 40 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

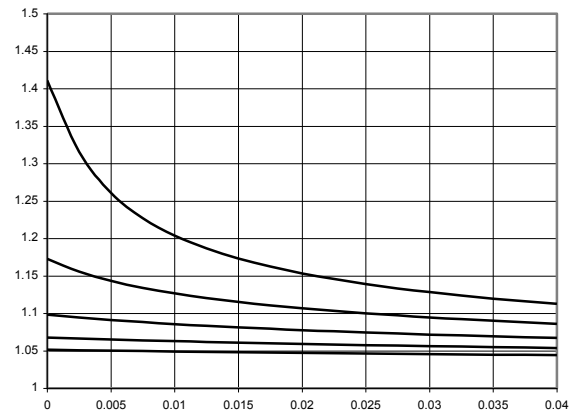
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$\varepsilon_i^p$$

Figure 5. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the intensity deformations ε_i^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 5 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

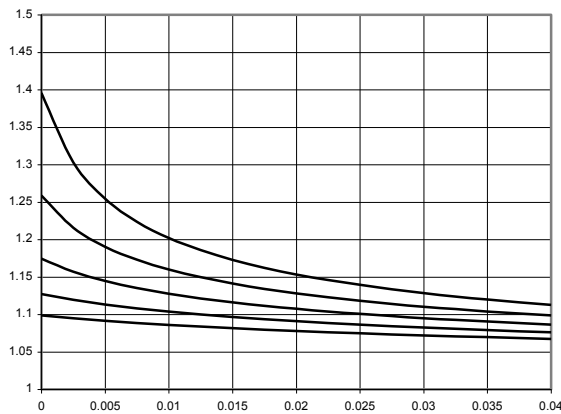
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$\varepsilon_i^p$$

Figure 7. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the intensity deformations ε_i^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 20 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

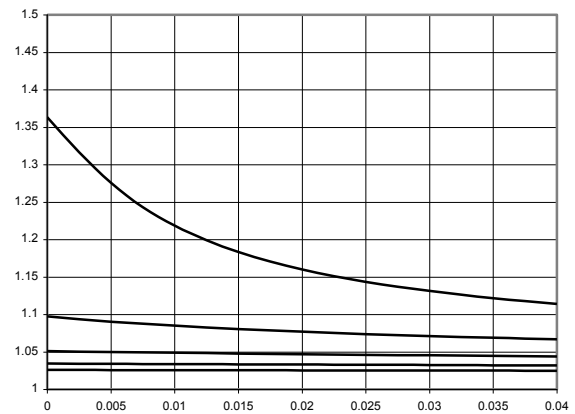
$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$\varepsilon_i^p$$

Figure 6. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the intensity deformations ε_i^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 10 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

$$\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$$



$$\varepsilon_i^p$$

Figure 8. Dependency graphs of the function $\Phi(\varepsilon_i, |\text{grad} \varepsilon_i|)$ upon the intensity deformations ε_i^p for a shell with a radius $\rho_0 = 50 \text{ cm}$, thickness $2h = 40 \text{ mm}$, the parameter of the initial curvature $\zeta = 0-32$ (the upper curve $\zeta = 0$)

The invariables $\lambda = 58.32 \text{ m}^{-1}$ and $\sigma_s^m = 1.5 \cdot \sigma_s^0$ in formula (2) have been determined based on the experimental trials [10], by analogy, as it was done in the paper [5].

CONCLUSIONS

1. The account of non-uniformity of the stress state affects considerably the yield point at the initial stage of the plastic deformation of plates and is needed in assessment of their bearing capacity.
2. As plastic deformations develop, the gradients of the deformation intensity decrease considerably, the deformation intensity in the shells is more uniform.
3. At the shell depth exceeding 3-4 thickness and deflections exceeding 2-3 thickness (transition to the state of pure membrane stress), the impact of non-uniformity of the stress state on the residual plastic deflections becomes less dramatic.

REFERENCES

1. **Starov A.V.** Dynamics of plastic shells taking into account hardening and sensitivity to the deformation velocity. // *Vestnik Volgograd State University of Architecture and Building*. Ser.: Building and Archit. 2014. V. 36(55), pp. 112-118.
2. **Sebekina V.I., Dyachkov G.F., Starov A.V.** Assessment of residual displacements of circular shallow membranes at dynamic loading. // *Research into the design of building structures and their safety: Proceedings TsNIISK Kucherenko*, TsNIISK Kucherenko, 1987, pp. 152-163.
3. **Perrone N.** On a simplified method of solving impulsively loaded structures of rate sensitive materials // *Trans. ASME*, Ser. E, V. 32, № 3, 1965. P. 489-492.
4. **Geniev G.A., Kalashnikov S.Yu.** On the impact of non-uniformity of the stress state on the material's transition into a plastic state. // *Building Mechanics and Structural Analysis*, 1988, No. 6, pp. 12-15.
5. **Geniev G.A., Kalashnikov S.Yu.** Incremental plasticity of nonlinear deformation under non-uniform stress state. Saratov : Saratov State Technical Univ., 2004, 172 pages.
6. **Erkhov M.I.** Theory of perfectly plastic bodies and structures. Moscow, Nauka, 1978, 352 pages.
7. **Starov A.V.** Closed system of equations for dynamic impact loading of rigid-plastic shallow shells of rotation with regard to large deflections. // *Structural Mechanics of Engineering constructions and Building*, 2011, No. 4, pp. 26-31.
8. **Ilyushin A.A.** Finite relations among forces and moments and their ties with deformations in the shell theory. *PMM*, 1945, No. 1, pp. 101-110.
9. **Ilyushin A.A.** Plasticity. Moscow, Gostekhizdat, 1948, 376 pages.
10. **Baldin V.A., Potapov V.N., Fadeev A.A.** On the resistance of steel against the deformation under nonuniform distribution of stresses. // *Building Mechanics and Structural Analysis*, 1982, No. 5, pp. 23-26.

Starov Aleksandr Vasil'evich, Candidate of Engineering Science, Docent, Docent of Structural Mechanics Department, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering (VSUACE). 1, Akademicheskaya St., Volgograd, 400074, Russian Federation; e-mail: starov1954@mail.ru;

Kalashnikov Sergey Yur'evich, Doctor of Engineering Science, Professor, Academician of the International Higher Education Academy of Sciences, rector, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering (VSUACE). 1, Akademicheskaya St., Volgograd, 400074, Russian Federation; e-mail: info@vgasu.ru;

Старов Александр Васильевич, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет (ВолГАСУ). 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 1; e-mail: starov1954@mail.ru;

Калашников Сергей Юрьевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, действительный член Международной академии наук высшей школы, ректор, Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет; 400074, Волгоград, ул. Академическая, 1; E-mail: info@vgasu.ru.

ASYMPTOTIC MODEL OF FILTRATION IN ALMOST STATIONARY MODE

Ludmila I. Kuzmina¹, Yuri V. Osipov²

¹ National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA

² Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: Asymptotic model of suspension filtration in a porous media is considered. Asymptotic solution of the filtration problem is constructed for large values of time. To determine the asymptotics an integral form of solution is used. The asymptotics is compared with numerical solution.

Keywords: filtration problem, suspension, suspended and retained particles, filtration coefficient, asymptotic solution

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОЧТИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Л.И. Кузьмина¹, Ю.В. Осипов²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Для задачи фильтрации суспензии в пористой среде строится асимптотическое решение при больших значениях времени. При нахождении асимптотики используется решение задачи в интегральной форме. Построенная асимптотика сравнивается с численным решением.

Ключевые слова: задача фильтрации, суспензия, взвешенные и осажденные частицы, коэффициент фильтрации, асимптотика.

1. THE FILTRATION PROBLEM FOR SUSPENSION IN A POROUS MEDIA

Filtration and retention of suspended particles in porous media play an important role in They play an important role in many chemical and environmental technologies. Filtering the suspension occurs in the production of construction materials, the purification of industrial and municipal waste and while pumping water from artesian wells. Measures to increase the strength of the soil are also based on the filtration theory [1-11].

Planning and design of the above described chemical and industrial technology is based on mathematical modeling. Long-term filtration of

fluid with suspended particles in porous media is described by the mass balance equation for suspended and retained particles and capture kinetics equation [12-14].

Concentrations of suspended $C(x, t)$ and retained $S(x, t)$ particles of the same size in a uniform filter with reduced length $L = 1$ satisfy the hyperbolic system of first order differential equations

$$\frac{\partial(C+S)}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C \quad (2)$$

in the domain

$$\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$$

with boundary conditions

$$C(x, t)|_{x=0} = p, \quad p > 0; \quad (3)$$

$$C(x, t)|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

$$S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

For the linear filtration coefficient

$$\Lambda(S) = \lambda(S_{\max} - S) \quad (6)$$

the exact solution of the problem (1)-(5) is [15]

$$C(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \frac{pe^{\lambda p(t-x)}}{e^{\lambda p(t-x)} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1}, & t > x \end{cases} \quad (7)$$

$$S(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \frac{S_{\max}(e^{\lambda p(t-x)} - 1)}{e^{\lambda p(t-x)} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1}, & t > x \end{cases}$$

In general case the problem (1) - (5) has no analytic solution. [12] provides the asymptotic expansion in the neighborhood of the concentration front; [16] shows the asymptotic solution at the filter inlet. Below the asymptotics is constructed for almost stationary mode when $t \rightarrow \infty$.

2. PROPERTIES OF THE ASYM-PTOTIC SOLUTION FOR $t \rightarrow \infty$

The problem (1) - (5) corresponds to the size-exclusion model of 1-size particle transport and capture excluding the effect of fluid viscosity and electrostatic forces: suspended particles pass freely through the pores of large diameter and are stuck at the entrance of small pores, forming a deposit. It is assumed that each pore of a diameter smaller than the particle size can be clogged only by one particle. This retained

particle cannot leave the pore and remains at its entrance. With the increase of filtration period the number of free small pores decreases, the growth of deposit reduces and more suspended particles pass freely through large pores.

For large values of the time t the filtration process is approaching a stationary mode: almost all small pores are clogged, the flow of suspended particles in the filter moves, almost without losing retained particles. The maximum limit of retained particle concentration is proportional to the concentration of small pores in the filter; as all small pores are clogged with retained particles the suspended particles move freely through the pores of large diameter, and their concentration is constant:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(x, t) = S_{\max} = \text{const}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C(x, t) = p, \quad 0 < x < 1. \quad (8)$$

Let the filtration coefficient $\Lambda(S)$ has the smallest positive simple root $S_{\max}$ and can be represented in a form

$$\Lambda(S) = \lambda_1(S_{\max} - S) + \lambda_2(S_{\max} - S)^2 + \dots, \quad \lambda_1 > 0. \quad (9)$$

Then the asymptotic solution of problem (1) - (5) can be found in a form of a series in powers of small parameter $\varepsilon = e^{-\lambda_1 p(t-x)}$:

$$S(x, t) = S_{\max} + s_1(x)\varepsilon + s_2(x)\varepsilon^2 + \dots \quad (10)$$

$$C(x, t) = p + c_1(x)\varepsilon + c_2(x)\varepsilon^2 + \dots$$

3. MAIN ASYMPTOTIC TERM

From (2), (3) at the characteristic line $x = 0$ the function $S^{(0)} = S(0, t)$ is defined implicitly

$$\int_0^{S^{(0)}} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t. \quad (11)$$

The exact solution of the problem (1) - (5) is provided in [17]

$$\int_{S(x,t)}^{S(0,t-x)} \frac{dS}{S\Lambda(S)} = x, \quad (12)$$

$$C(x,t) = \frac{1}{\Lambda(S)} \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (13)$$

According to (9) the function

$$U(S) = \frac{1}{\Lambda(S)} - \frac{1}{\lambda_1(S_{\max} - S)} \quad (14)$$

is regular on the segment $[0, S_{\max}]$. Denote

$$A = \int_0^{S_{\max}} U(S) dS.$$

From (11)

$$\begin{aligned} \int_0^{S^{(0)}} \frac{dS}{\Lambda(S)} &= \int_0^{S^{(0)}} \frac{dS}{\lambda_1(S_{\max} - S)} + \int_0^{S^{(0)}} U(S) dS = \\ &= -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left| \frac{S_{\max} - S^{(0)}}{S_{\max}} \right| + A + O(\varepsilon) = t \end{aligned} \quad (15)$$

and

$$S^{(0)} = S_{\max} (1 - e^{-\lambda_1(t-A)}) + O(\varepsilon^2). \quad (16)$$

Similarly, from (12)

$$\begin{aligned} \int_S^{S^{(0)}} \frac{dS}{S\Lambda(S)} &= \int_S^{S^{(0)}} \frac{dS}{\lambda_1 S(S_{\max} - S)} + \int_S^{S^{(0)}} \frac{U(S)}{S} dS = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 S_{\max}} \ln \left| \frac{S^{(0)}(S_{\max} - S)}{S(S_{\max} - S^{(0)})} \right| + O(\varepsilon) = x, \end{aligned} \quad (17)$$

and

$$S = S_{\max} (1 - e^{\lambda_1(A+S_{\max}x)} \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

(18) defines the main asymptotic term of the problem (1) - (5).

4. ASYMPTOTICS AT $t \rightarrow \infty$

Differentiating (10) and substitute in (1)

$$c'_1 \varepsilon + c'_2 \varepsilon^2 - s_1 \lambda_1 p \varepsilon - 2s_2 \lambda_1 p \varepsilon^2 - \dots = 0. \quad (19)$$

Substituting (10) into the right side of (2)

$$\begin{aligned} -s_1 \lambda_1 p \varepsilon - 2s_2 \lambda_1 p \varepsilon^2 &= -\lambda_1 p s_1 \varepsilon + \\ &+ (p(\lambda_2 s_1^2 - \lambda_1 s_2) - \lambda_1 c_1 s_1) \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Equating in (19), (20) the coefficients of the same powers of ε we get a recurrence system of differential and algebraic equations

$$c'_1 = s_1 \lambda_1 p \quad (21)$$

$$s_2 \lambda_1 p = \lambda_1 c_1 s_1 - \lambda_2 p s_1^2 \quad (22)$$

$$c'_2 = 2\lambda_1 p s_2 \quad (23)$$

The boundary condition (3) gives rise to conditions for the unknown asymptotic terms $c_i(x)$ at $x = 0$:

$$c_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

The first term of the asymptotics $s_1(x)$ is chosen equal to the principal term of the expansion (18):

$$s_1 = -S_{\max} e^{\lambda_1(A+S_{\max}x)}. \quad (25)$$

Solution of (21) - (23) with the conditions (24):

$$c_1 = p e^{\lambda_1 A} (1 - e^{\lambda_1 S_{\max} x}); \quad (26)$$

$$\begin{aligned} s_2 &= S_{\max} e^{2\lambda_1 A} \cdot \\ &\cdot \left(-e^{\lambda_1 S_{\max} x} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max} \right) e^{2\lambda_1 S_{\max} x} \right); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= p e^{2\lambda_1 A} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max} - \right. \\ &\left. - 2e^{\lambda_1 S_{\max} x} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max} \right) e^{2\lambda_1 S_{\max} x} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Substitution of (25) - (28) into (10) gives the asymptotic solution of (1) - (5) at $t \rightarrow \infty$

$$S = S_{\max} - S_{\max} e^{\lambda_1(A+S_{\max}x)} e^{-\lambda_1 p(t-x)} + S_{\max} e^{2\lambda_1 A} \left(-e^{\lambda_1 S_{\max} x} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max}\right) e^{2\lambda_1 S_{\max} x} \right) e^{-2\lambda_1 p(t-x)} + \dots; \quad (29)$$

$$C = p + p e^{\lambda_1 A} (1 - e^{\lambda_1 S_{\max} x}) e^{-\lambda_1 p(t-x)} + p e^{2\lambda_1 A} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max} - 2e^{\lambda_1 S_{\max} x} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S_{\max}\right) e^{2\lambda_1 S_{\max} x} \right) e^{-2\lambda_1 p(t-x)} + \dots \quad (30)$$

5. NUMERICAL MODELING

The rate of convergence of the asymptotics to the solution of (1)-(5) was determined by numerical calculation for

$$p=1, S_{\max}=2, \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_k=0, k=3,4, \dots \Rightarrow \Lambda(S) = (2-S) + (2-S)^2.$$

In this case

$$A = -\int_0^2 \frac{dS}{3-S} = -\ln 3$$

and the asymptotics at $t \rightarrow \infty$ takes the form

$$S_{\text{asym}} = 2 - \frac{2}{3} e^{3x-t} - \frac{2}{9} (e^{4x} + e^{6x}) e^{-2t} + \dots; \quad (31)$$

$$C_{\text{asym}} = 1 + \frac{1}{3} (e^x - e^{3x}) e^{-t} + \frac{1}{9} (3e^{2x} - 2e^{4x} - e^{6x}) e^{-2t} + \dots \quad (32)$$

Relative errors of the asymptotics (31), (32) are determined below

$$\sigma_S = \left| \frac{S - S_{\text{asym}}}{S} \right|; \quad \sigma_C = \left| \frac{C - C_{\text{asym}}}{C} \right|.$$

Fig. 1 and 2 show the boundaries of the domains $\sigma_S < \delta$, $\sigma_C < \delta$ for $\delta = 0.1$ (solid line), $\delta = 0.01$ (dotted line), $\delta = 0.001$ (dashed line). These domains are located above the graphs.

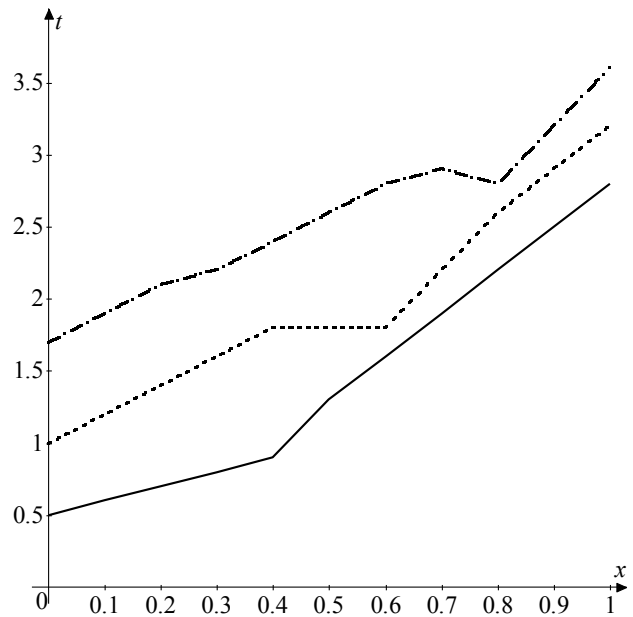


Figure 1. Levels of errors for $S_{\text{asym}}(x, t)$.

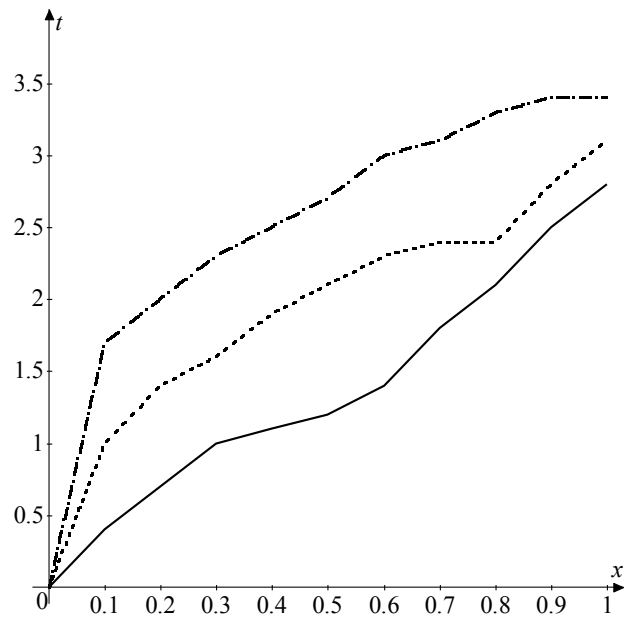


Figure 2. Levels of errors for $C_{\text{asym}}(x, t)$.

According to fig. 1, 2 the asymptotics (31), (32) quickly converges to the solution, starting with relatively small values of t .

6. CONCLUSIONS

Constructed asymptotic expansions correspond to almost stationary mode of filtering when the filter is practically clogged by deposit and can retain only a small fraction of the particles of the suspension.

The asymptotic solution (29), (30) at $t \rightarrow \infty$ with a small parameter $e^{-\lambda_1 p t}$ was obtained on the assumption that $S_{\max}$ is a simple positive root of $\Lambda(S)$. In case of multiple root the asymptotic expansion for large t is a series in powers of a small parameter $(t \ln t)^{-1}$.

For a linear filtration coefficient (6) formulas (29) (30) are the expansion of the solution (7) in powers of $e^{-\lambda_1 p(t-x)}$.

The exponential decrease of asymptotic terms provides quick convergence of the asymptotics to the solution of (1)-(5).

The method of finding the asymptotic solution (29), (30) at $t \rightarrow \infty$ differs from standard methods used for constructing asymptotic expansions of (1) - (5) near the filter inlet $x = 0$ and behind the concentration front $t = x$. Conditions (3) and (8) are not sufficient for determining a unique solution of the recurrence system (13) - (15). Finding the solution requires an additional relation between the asymptotic terms $s_1(x)$ and $c_1(x)$ or a condition on one of these terms.

In this paper the first term in the asymptotic expansion (18) of the integral representation of the solution is chosen as $s_1(x)$. It is unclear whether there is a reasonable physical condition that can uniquely identify the asymptotics of (1) - (5) at $t \rightarrow \infty$ without the use of solutions (11), (12).

REFERENCES

1. **Bedrikovetsky P.** Mathematical theory of

- oil and gas recovery: with applications to ex-USSR oil and gas fields, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.
2. **Mays D.C., Hunt J.R.** Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media, *Environmental Science and Technology*, 39 (2005) 577-584.
3. **Mays D.C., Hunt J.R.** Hydrodynamic and chemical factors in clogging by montmorillonite in porous media, *Environmental Science and Technology*, 41 (2007) 5666-5671.
4. **Civan F.** Reservoir formation damage: fundamentals, modeling, assessment, and mitigation, 2nd ed., Gulf Professional Pub., Amsterdam, 2007.
5. **Tufenkji N.** Colloid and microbe migration in granular environments: A discussion of modelling methods, in: *Colloidal Transport in Porous Media*, 2007, pp. 119-142.
6. **Torkzaban S., Bradford S.A., Walker S.L.** Resolving the coupled effects of hydrodynamics and DLVO forces on colloid attachment in porous media, *Langmuir*, 23 (2007) 9652-9660.
7. **Shapiro A.A., Wesselingh J.A.** Gas transport in tight porous media. Gas kinetic approach, *Chemical Engineering Journal*, 142 (2008) 14-22.
8. **Gitis V., Rubinstein I., Livshits M., Ziskind G.** Deep-bed filtration model with multistage deposition kinetics, *Chemical Engineering Journal*, 163 (2010) 78-85.
9. **Noubactep C., Caré S.** Dimensioning metallic iron beds for efficient contaminant removal, *Chemical Engineering Journal*, 163 (2010) 454-460.
10. **Gitis V., Dlugy C., Ziskind G., Sladkevich S., Lev O.** Fluorescent clays—Similar transfer with sensitive detection, *Chemical Engineering Journal*, 174 (2011) 482-488.
11. **Yuan H., Shapiro A.A.** A mathematical model for non-monotonic deposition profiles in deep bed filtration systems,

- Chemical Engineering Journal, 166 (2011) 105-115.
12. **You Z., Osipov Yu.V., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.I.**, Asymptotic model for deep bed filtration, Chemical Engineering Journal, 258 (2014) 374-385.
 13. **Elimelech M., Jia X., Gregory J., Williams R.**, Particle deposition and aggregation: measurement, modelling and simulation, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998.
 14. **Bradford S.A., Torkzaban S.**, Colloid transport and retention in unsaturated porous media: A review of interface-, collector-, and pore-scale processes and models, Vadose Zone Journal, 7 (2008) 667-681.
 15. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.** Flow of suspensions through porous media - application to deep filtration, Industrial and Engineering Chemistry, 62 (1970) 8-35.
 16. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.**, Particle transportation at the filter inlet, International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 10(3) (2014) 17-22.
 17. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.I.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, iss. Mathematical and Computational Analyses of Flow and Transport Phenomena, 2013, 9 p.

Кузьмина Людмила Ивановна, доцент, кандидат физико-математических наук, Департамент прикладной математики, Московский институт электроники и математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, тел. +7(495) 77295 90 * 15219; e-mail: lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович, доцент, кандидат физико-математических наук, и.о. заведующего кафедрой информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; e-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnit-skaya st., 20, tel. +7(495) 77295 90 * 15219; e-mail: lkuzmina@hse.ru;

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl'skoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994; e-mail: yuri-osipov@mail.ru;



О СОЗЫВЕ ОЧЕРЕДНОГО ОБЩЕГО СОБРАНИЯ ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК

В соответствии со статьей 40 Устава федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» президиум РААСН объявляет о созыве очередного общего собрания членов РААСН.

Общее собрание членов РААСН пройдет с 20 по 22 апреля 2016 года на базе Московского архитектурного института (Государственной академии), расположенного по адресу: улица Рождественка, дом 11/4, корп.1, стр.4.

Президиумом РААСН (Постановление № 8 от 21 октября 2015 года) утверждена тема научной части общего собрания членов РААСН-2016: «Стратегия сохранения и развития российского архитектурного наследия».

2 декабря 2015 года на совместном заседании ученого совета и президиума РААСН утвержден следующий – Состав Научного комитета по подготовке и проведению научной части Общего собрания РААСН-2016:

Председатель комитета:

Кудрявцев А.П. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Архитектура»;

Заместители председателя комитета:

Акимов П.А. – член-корреспондент, главный учёный секретарь президиума РААСН;

Лежава И.Г. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Градостроительство»;

Травуш В.И. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Строительные науки»;

Ильичёв В.А. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Инновации».

Члены комитета:

Некрасов А.Б. – академик, академик-секретарь отделения Архитектуры (ОА);

Шубенков М.В. – член-корреспондент, и.о. академика-секретаря отделения
Градостроительства (ОГ);

Карпенко Н.И. – академик-секретарь отделения Строительных наук (ОСН);

Анисимов А.В. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

Ахмедова Е.А. – член-корреспондент (ОГ), г. Самара;

Бирюков И.Г. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

Бондаренко И.А. – член-корреспондент (ОГ), г. Москва;
Вавакин Л.В. – академик (ОГ), г. Москва;
Долгов А.В. – член-корреспондент (ОА), г. Екатеринбург;
Кадышев Г.И. – член-корреспондент (ОГ), г. Москва
Орельский В.В. – советник президента РААСН, советник (ОА), г. Москва;
Орфинский В.П. – академик (ОА), г. Петрозаводск;
Худин А.А. – член-корреспондент (ОА), г. Нижний Новгород;
Щенков А.С. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

Учёный секретарь комитета:

Грязнова Н.В. – начальник научно-организационного отдела ОА, советник РААСН.

Президиума РААСН напоминает, что участие в работе Общего собрания членов РААСН является уставной обязанностью члена федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» (статья 38 Устава РААСН).



УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ БОРИС ЕФИМОВИЧ ПОБЕДРЯ

01 марта 2016 года на 79 году жизни скоропостижно скончался один из ведущих ученых в области механики, заместитель главного редактора международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)”, заведующий кафедрой механики композитов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Лауреат Государственной и Ломоносовской премий, заслуженный деятель науки Российской Федерации, член национального комитета Российской Федерации по теоретической и прикладной механике, профессор, доктор физико-математических наук *Победря Борис Ефимович* (26.05.1937 – 01.03.2016).

Б.Е. Победря – всемирно известный автор многочисленных научных трудов, чьи научные интересы лежали в области: механики деформируемого твердого тела, вычислительной механики, механики композитов, термодинамике, физике связанных полей, численного анализа, дифференциальной геометрии, уравнений математической физики, нелинейного функционального анализа и др. Под его научным руководством были подготовлены десятки кандидатов и докторов наук.

Яркие научные результаты, исключительно высокая эрудиция, активная жизненная позиция, внимание и доброжелательное отношение к окружающим снискали Борису Ефимовичу большое уважение среди широких научных кругов научной общественности.

Редакционная коллегия и редакционный совет международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” выражают глубокие соболезнования семье, родным, близким, друзьям и коллегам Бориса Ефимовича.