International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 11, Issue 1 ***2015***

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, Moscow, 107031, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics
Moscow Institute of Architecture (State Academy)
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,
107031, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Chief Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Head of Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Centre "StaDyO"
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
Moscow, 125040, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analise Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
Moscow, 119899, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Saint Petersburg State Polytechnical University
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint Petersburg, 195251, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical University, 20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
Moscow State University of Civil Engineering, Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), 1. Imam Shamil Avenue, Makhachkala, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University, 8 Suhanova Street, Vladivostok, 690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina, 1, Univerzitná, Žilina, 010 26, Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, 84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh, 394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology 24, Warszawska Street, Kraków, 31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street (pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology, 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, 1, Academicheskaya Street, Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building Physics, 21, Locomotive Travel, Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet, Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky pros., Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum, 44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering 29, Toraigyrov str., Almaty, Almaty, 050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Saint Petersburg State Polytechnical University, 29, Ul. Politechnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University of Architecture and Building 2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003, Russia

Ilizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya Street, Kazan, 420043, Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
Moscow State University of Civil Engineering, Yaroslavskoe shosse 26, Moscow, 129337, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom, 29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University, 33, Lenina Prospect, Petrozavodsk, 185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street, Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District, Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University, (Songdo-dong)119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council for Technical Education, New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej, Politechnika Warszawska Warsaw, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
7-3-1 Hongo, Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan
Tokyo University, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology 11 Grunwaldzki Sq., 50-377, Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University, 5, Munaitpassov street, Astana, 010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Maldybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vladimir N. Alekhin, Professor, PhD
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering,
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов /АСВ/ (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26) и Издательство Begell House Inc. (79 Madison Avenue, New-York, USA / Издательский дом Бегелл, 79, Мадисон авеню, г. Нью-Йорк, США). Партнером издания выступает Российская академия архитектуры и строительных наук /РААСН/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основной критерий отбора статей для публикации в журнале − их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ − 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2], Taymuraz B. Kaytukov[3]
[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[3]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed**.

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addiction all or selected files with figures separately on CD or DVD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.
The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

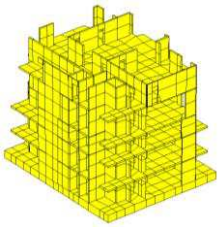


Figure 1.

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on CD or DVD must be mailed to Editor-in-Chief** as well**. Label CD or DVD with** author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

- **Editor-in-Chief**
  Professor Vladimir N. Sidorov
  Department of Advanced Mathematics
  and Structural Mechanics,
  Moscow Institute of Architecture
  (State Academy), 11/4, Building 4,
  Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031,
  Russia; *e-mail*: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Technical Editor**
  Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
  Research & Educational Center
  of Computational Simulation
  Moscow State University of Civil Engineering,
  26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
  e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1995, pp. 1-16.

[1]) Vladimir N. Sidorov, Department of Advanced Mathematics and Structural Mechanics, Moscow Institute of Architecture (State Academy), 11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031, Russia, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
[2]) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
[3]) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров[1], П.А. Акимов[2], Т.Б. Кайтуков[3]

[1]Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[3]Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210х297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском (английском) языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском (русском) языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на CD-диске или DVD-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2], Taymuraz B. Kaytukov[3]

[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2] Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[3]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использование шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательно нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. Тоже касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на CD или DVD) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков –** JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

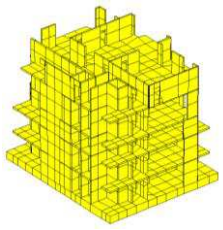


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на CD или DVD) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На CD или DVD необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

- **Главный редактор**
  советник РААСН, профессор,
  доктор технических наук
  Сидоров Владимир Николаевич
  Московский архитектурный институт
  (государственная академия),
  кафедра высшей математики
  и строительной механики,
  107031, Россия, г. Москва,
  ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4.
  e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Технический редактор**
  советник РААСН, доцент,
  кандидат технических наук
  Кайтуков Таймураз Батразович
  Московский государственный
  строительный университет,
  Научно-образовательный центр
  компьютерного моделирования
  уникальных зданий, сооружений
  и комплексов,
  129337, Россия, г. Москва,
  Ярославское шоссе, дом 26.
  e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

---

[1]) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Московский архитектурный институт (государственная академия), кафедра высшей математики и строительной механики, 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4;
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.

[3]) Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, Московский государственный строительный университет, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 11, Issue 1 ***2015***

TABLE OF CONTENTS

К Юбилею Владилена Васильевича Петрова 14

On Approximately Stationary Gaussian Processes 15
Charles El-Nouty

Methods of Nonlinear Analysis and the Impact of Their Applications on the Results of Structural Analysis 27
Dmitrij K. Kalichava, Ewa Nowak

Inverse Problem of Filtering the Suspension in Porous Media 34
Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov

Stress State of Earth Dams with Account of Rheological Properties of Soil and Wave Removal of Energy Thought the Foundation 42
Mirziyod M. Mirsaidov , Tohirjon Z. Sultanov

The Algorithm for Nonlinear Inelastic Optimization of 3D Steel Frameworks Under Serviceability Requirements 54
Michail Popov, Romanas Karkauskas, Liudvikas Rimkus

Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные подходы к локальному расчету строительных конструкций 64
Моджтаба Аслами

Численное моделирование НДС конструкций с учетом стадий жизненного цикла зданий и сооружений 80
М.С. Барабаш

Определение и анализ сборочных отклонений в металлическом каркасе большепролетного сооружения с купольным покрытием 90
А.Б. Бондарев

Оценка монтажных усилий в шарнирно-стержневом металлическом покрытии торгово-выставочного центра 97
А.Б. Бондарев

Исследование влияния параметров вязко-упругих амортизаторов на деформирование и несущую способность железобетонных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях 104
В.Г. Дмитриев, А.И. Роффе

К вопросу об оценке влияния спрямления аппроксимирующей сетки на численное решение краевой задачи 115
М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов

Об исследовании дискретных методов получения локальных решений одномерных задач расчета конструкций 121
М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов

Оценка точности результатов численного моделирования нестационарного волнового напряженного состояния в деформируемых объектах сложной формы 135
В.К. Мусаев

О математическом моделировании нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии 147
В.К. Мусаев

К ЮБИЛЕЮ ВЛАДИЛЕНА ВАСИЛЬЕВИЧА ПЕТРОВА

13 марта 2015 года исполнилось 80 лет Владилену Васильевичу Петрову. От имени редакционного совета международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering” поздравляем его с этим замечательным Юбилеем!

Трудовая и творческая деятельность В.В. Петрова на протяжении более чем шести десятилетий – достойный пример для подражания молодому поколению, воспитанию и образованию которого он посвятил свою жизнь. Мы знаем Владилена Васильевича как крупного, признанного в России и за рубежом ученого, автора многочисленных научных и учебно-методических работ, опытного организатора подготовки специалистов и масштабных научных исследований, активного участника международных программ, симпозиумов и конференций. Наряду с руководством кафедрой, он является академиком Российской академии архитектуры и строительных наук, Заслуженным деятелем науки и техники РСФСР, Почетным работником высшего образования России, Почетным строителем России, кавалером орденов «Знак Почета» и «Дружбы», членом редакционного Совета нашего журнала, снискав себе заслуженный авторитет и на этой непростой ниве.

Научно-педагогическая деятельность В.В. Петрова была неоднократно отмечена высокими государственными наградами и почетными званиями. Занимая пост ректора, он вывел Саратовский государственный технический университет на лидирующие позиции в области высшего образования в стране.

Отмечая вклад Владилена Васильевича в развитие современной науки, личный авторитет и профессиональные качества, не сомневаемся, что его знания, инициативность, организаторский талант, высокие духовные и гражданские идеалы позволят успешно решать актуальные задачи развития высшего образования и науки – фундамента общественного, социального и экономического развития!

Мы желаем В.В. Петрову дальнейших творческих успехов, активной жизненной позиции, здоровья и счастья! Надеемся на дальнейшее плодотворное сотрудничество во благо науки и образования!

Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”

ON APPROXIMATELY STATIONARY GAUSSIAN PROCESSES

Charles El-Nouty
LAGA, Université Paris XIII, Sorbonne Paris Cité, FRANCE

ABSTRACT: A new class of centered Gaussian processes, named the QHASI one, is defined. The main properties of a process X which belongs to the QHASI class are the following: X is self-similar, X is a quasi-helix and the increments of X are approximately stationary. The QHASI class contains recent extensions of the fractional Brownian motion, which were introduced between 2003 and 2013, namely the bifractional Brownian motion, the sub-fractional Brownian motion and the sub-bifractional Brownian motion. Then, consider a process X which belongs to the QHASI class and define the statistic $V_T = \sup_{0\le s\le T-a_T} \beta_T \left|X\left(s+a_T\right)-X\left(s\right)\right|$, where a_T and β_T are suitable chosen sequences of $T \ge 0$. A general upper bound for $\limsup_{T\to\infty} V_T$ is obtained. This bound depends on two constants: the first one occurs in the quasi-helix property, whereas the second one in the approximately stationary increments property. Finally, when the process X is the sub-fractional Brownian motion, we get a lower bound for $\limsup_{T\to\infty} V_T$ and assess the influence of the equality of the two above mentioned constants.

Key words*:* Quasi-helix, approximately stationary increments, law of the iterated logarithm

О ПРИБЛИЖЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

Шарль Эль-Нути
Университет Париж XIII, Сорбонна - Париж - Сите, ФРАНЦИЯ

АННОТАЦИЯ: В работе представлен новый класс гауссовских процессов, названный квази-классом. Этот класс процессов основан на расширениях фрактального броуновского движения, а именно бифрактальное, субфрактальное и суббифрактальное броуновское движения. Исследования этого класса процессов велись между 2003 и 2013 годами. Основными свойствами процесса X, принадлежащего к квази-классу, являются: автомодальность, наличие квази-канонической кривой постоянного склона, приблизиженная стационарность приращений. Для рассматриваемого процесса X определена статистика $V_T = \sup_{0\le s\le T-a_T} \beta_T \left|X\left(s+a_T\right)-X\left(s\right)\right|$ (где a_T и β_T специально подобранные последовательности, зависящие от $T \ge 0$), для которой получена обобщенная верхняя граница $\limsup_{T\to\infty} V_T$. Параметры этой границы зависят от двух постоянных: первая постоянная связана с квази-канонической кривой постоянного склона, вторая – со свойствами приближенной стационарности приращений процесса. Кроме того, для случая если процесс X является субфрактальным броуновским движением, показана нижняя граница $\limsup_{T\to\infty} V_T$ и оценено влияние равенства двух постоянных.

Ключевые слова*:*. квази-каноническая кривая постоянного склона, приближенно стационарные приращения, закон повторного логарифма

1. INTRODUCTION

Let $\{B_H(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a fractional Brownian motion (fBm) with Hurst index $0 < H < 1$, i.e. a centered Gaussian process with stationary increments satisfying $B_H(0) = 0$, with probability *1*, and $VarB_H(t) = |t|^{2H}$. The name of fBm

was first introduced by Mandelbrot and van Ness [1], but their sample path properties were already studied by Kolmogorov in the 1940's.
As a consequence of the definition, we get

$$\mathbb{E}\left(B_H(t)-B_H(s)\right)^2 = \left| t-s \right|^{2H},$$

and therefore

$$\operatorname{cov}\left(B_H(t), B_H(s)\right) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

An other important property is that the fBm is a self-similar process with index H, i.e. $B_H(at)$ and $a^H B_H(t)$ have the same distribution for all $a>0$. When $H=1/2$, $B_{1/2}$ is the ordinary Wiener process or Brownian motion (Bm). We insist on the fact that there are deep dissimilarities between the case $H=1/2$ and the case $H\neq 1/2$, the biggest one being that the increments of the fBm are not independent as soon as $H\neq 1/2$. This implies that the study of the fBm requires the use of general principles rather than specific properties of the Wiener process. It was one of the main motivations of the authors who worked on this process. Note also the difference between the case $0<H<1/2$ and the case $1/2<H<1$. These cases correspond to short-range dependence and long-range dependence.
The study of the fBm was motivated by the numerous fields of applications such that, times series in economics, fluctuations in solids, hydrology, signal theory, industrial process, and more recently mathematical finance, telecommunication networks, sustainable development.
From a practical point of view, the main defect of the fBm is its stationary increments property. This property is very convenient from a mathematical point of view, since it enables to apply general powerful results. But, it is not true in the real life. This simple evidence leads several authors to introduce new Gaussian processes, which, in some sense, extend the fBm. Let us list some of them :

- the bifractional Brownian motion (bBm) introduced by Houdré and Villa [2] by mathematical game and in order to answer to some problems which appear in physics,
- the sub-fractional Brownian motion (sfBm) introduced by Bojdecki, Gorostiza and Talarczyk [3], which appears as a limit process of some particle systems,
- the sub-bifractional Brownian motion (sbBm) introduced by El-Nouty and Journé [4].

In Section 2, it is shown that the processes considered below can be viewed as elements of a suitable class of centered Gaussian processes. Then our main results on increments are stated in Section 3. Finally, the proofs of our results are postponed to Sections 4 and 5.

2. THE QHASI CLASS

Let us introduce a new class of centered Gaussian processes named the quasi-helix with approximately stationary increments (QHASI) class and defined as follows. A centered Gaussian process $\{X(t), t\in I\subset\mathbb{R}\}$ belongs to the QHASI class if it fulfills the five following assumptions:

A1: $X(0)=0$ with probability *1*,

A2: there exists $\lambda>0$ such that X is self-similar with index λ,

A3: there exists $0<C_1\leq C_2<+\infty$ such that $\forall (s,t)\in I^2$

$$C_1|t-s|^{2\lambda} \leq \mathbb{E}(X(t)-X(s))^2 \leq C_2|t-s|^{2\lambda},$$

A4: there exists $C_3\in[C_1,C_2]$ such that $\forall (s,t)\in I^2$, $t\geq s$, $st\neq 0$, when $t-s\to 0$,

$$\mathbb{E}(X(t)-X(s))^2 \sim C_3\,(t-s)^{2\lambda},$$

A5: there exists $C_4\in[C_1,C_2]$ such that $\forall t\in I$

$$\mathbb{E}X(t)^2 = C_4|t|^{2\lambda}.$$

Let us make some comments on our assumptions. Assumption (A3) means that the process X is a $\mathcal{G}$-quasi-helix in the sense of Kahane ([5], p. 137), whereas assumption (A4) means that the increments of X are approximately stationary for small increments, this notion having been introduced by Houdré and Villa [2]. The underlying idea of the QHASI class is to replace the stationary increments property by assumptions (A3) and (A4). Assumptions (A1) and (A5) are done for sake of convenience. Finally, assumption (A2) means that the process X is an attractive one.

There is no difficulty to see that the fBm belongs to the QHASI class with

$$\lambda = H \text{ and } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1.$$

Let us verify that the bBm, the sfBm and the sbBm which were listed in Section 1 belong to the QHASI class.

Example 1. Let $\{B_{H,K}(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a bBm with indices $0 < H < 1$ and $0 < K \le 1$, i.e. a centered Gaussian process such that $B_{H,K}(0) = 0$, with probability 1, and

$$\operatorname{cov}\left(B_{H,K}(t)B_{H,K}(s)\right) = \frac{1}{2^K}\left(\left(|t|^{2H} + |s|^{2H}\right)^K - |t-s|^{2HK}\right).$$

When $K = 1$, $B_{H,1}$ is the fBm and therefore $B_{1/2,1}$ is the ordinary Bm.

$B_{H,K}$ belongs to the QHASI class with $\lambda = HK$, $C_1 = 2^{-K} \le C_4 = 1 \le C_2 = C_3 = 2^{1-K}$.

We refer to [6] - [11] for further information on this process.

Example 2. Consider the sfBm $\{X_H(t), t \ge 0\}$ with index $0 < H < 1$ defined as follows

$$X_H(t) = \frac{B_H(t) + B_H(-t)}{\sqrt{2}},\ s \ge 0.$$

Thus, the sfBm is a centered Gaussian process such that $X_H(0) = 0$, with probability 1, and for any $t \ge s$

$$\operatorname{cov}\left(X_H(t)X_H(s)\right) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\left((s+t)^{2H} + (t-s)^{2H}\right)$$

and therefore

$$\operatorname{Var}X_H(t) = \left(2 - 2^{2H-1}\right)t^{2H}.$$

The sfBm is an interesting process on its own. Indeed, when $H > 1/2$, it arises from occupation time fluctuations of branching particle systems. Roughly speaking, the sfBm has some of the main properties of the fBm, but it has non-stationary increments. Note also that, when $H = 1/2$, $X_{1/2}$ is the ordinary Bm. X_H belongs to the QHASI class with $\lambda = H$ and if $H < \frac{1}{2}$, then

$$C_1 = C_3 = 1 \le C_2 = C_4 = 2 - 2^{2H-1},$$

else ($H \ge \frac{1}{2}$)

$$C_1 = C_4 = 2 - 2^{2H-1} \le C_2 = C_3 = 1.$$

We refer to [3], [6], [12] – [15] further information on this process.

Example 3. Let $\{X_{H,K}(t), t \ge 0\}$ be a sbBm with indices $0 < H < 1$ and $0 < K \le 1$, defined as follows:

$$X_{H,K}(t) = \frac{1}{2^{(2-K)/2}}\left(B_{H,K}(t) + B_{H,K}(-t)\right).$$

The sbBm is a centered Gaussian process such

that $X_{H,K}(0)=0$, with probability 1, and $\mathrm{Var}X_{H,K}(t)=\left(2^K-2^{2HK-1}\right)t^{2HK}$. Note that since $(2H-1)K-1<K-1\le 0$, it follows that $2HK-1<K$. When $K=1$, $X_{H,1}$ is the sfBm. Straightforward computations show that for $t\ge s$

$$\mathrm{cov}\left(X_{H,K}(t)\,X_{H,K}(s)\right)$$
$$=\left(t^{2H}+s^{2H}\right)^K-\tfrac{1}{2}(t+s)^{2HK}-\tfrac{1}{2}(t-s)^{2HK}.$$

$X_{H,K}$ belongs to the QHASI class with $\lambda=HK$ and if $HK<\frac{1}{2}$, then

$$C_1=2^K-1\le C_3=1$$
$$\le C_4=2^K-2^{2HK-1}\le C_2=2-2^{2HK-1}$$

else ($HK\ge\frac{1}{2}$)

$$C_1=C_4=2^K-2^{2HK-1}\le C_2=C_3=1.$$

We refer to [4] for further information on this process. Note that the previous examples show that the real numbers C_3 and C_4 are arbitrary in $[C_1,C_2]$. This elementary remark strengthens the interest of the QHASI class.

3. APPLICATION TO THE STUDY OF THE INCREMENTS

Consider a process X, an element of the QHASI class. Let us present the increments problem.
Let a_T be a nondecreasing function of $T\ge 0$ satisfying

B1: $0\le a_T\le T$,

B2: $\dfrac{a_T}{T}$ is a nonincreasing function of $T\ge 0$

such that $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{a_T}{T}=0$.

When we compare our hypothesis to those of Csörgő and Révész [16], we can see that they are a little bit more restrictive. Indeed we assume $\lim_{T\to+\infty}\frac{a_T}{T}=0$. This assertion is essential to prove our results. For example, it enables us to show that, we have as $T\to+\infty$,

$$\sigma^2(T,T-a_T)=\mathbb{E}\left(X(T)-X(T-a_T)\right)^2$$
$$\sim C_3a_T^{2\lambda}$$

Indeed, we have by combining that X is an element of the QHASI class with (B2)

$$\sigma^2(T,T-a_T)=T^{2\lambda}\mathbb{E}\left(X(1)\cdot X\left(1-\frac{a_T}{T}\right)\right)^2$$
$$\sim T^{2\lambda}C_3\left(\frac{a_T}{T}\right)^{2\lambda}=C_3a_T^{2\lambda}.$$

Here, we set $\ln u=\log(u\vee e)$ and $\ln_2 u=\ln(\ln u)$ for $u\ge 0$.
Define the statistic V_T by

$$V_T=\sup_{0\le s\le T-a_T}\beta_T\left|X(s+a_T)-X(s)\right|,$$

where

$$\beta_T^{-1}=\sqrt{C_3}\,a_T^{\lambda}\left(2\left(\ln\tfrac{T}{a_T}+\ln_2 T\right)\right)^{1/2}$$
$$=\sqrt{C_3}a_T^{\lambda}\left(2L_T\right)^{1/2}.$$

When X was a Bm, the behavior of V_T has been investigated by Csörgő and Révész [16] and Book and Shore [17]. Their works have been extended by Ortéga [18] and El-Nouty [19] in the case of the fBm, and by El-Nouty [7] in the case of the bBm. Csáki and Csörgő [20] studied V_T – type statistics in a general frame-

work. But since they didn't have enough information on the underlying process, they obtained weaker results, compared to those of Csörgő and Révész [16], Ortéga [18], and El-Nouty [7]. Our next goal is to study V_T – type statistics in the QHASI class framework and to measure the influence of the equality $C_3 = C_2$. Our main results are stated in the following two theorems.

Theorem 4. *Let X be an element of the QHASI class. Let a_T be a nondecreasing function of $T \geq 0$ satisfying (B1) and (B2). We have with probability 1,*

$$\limsup_{T\to\infty} V_T \leq \sqrt{\frac{C_2}{C_3}}.$$

Theorem 5. *Let X_H be a sfBm with index $0 < H < 1$. Let a_T be a nondecreasing function of $T \geq 0$ satisfying (B1) and (B2). We have with probability 1,*

$$\limsup_{T\to\infty} V_T \geq 1.$$

Combining Theorem 4 with Theorem 5, we get the following corollary.

Corollary 6. *Let X_H be a sfBm with index $H \geq \frac{1}{2}$. Let a_T be a nondecreasing function of $T \geq 0$ satisfying (B1) and (B2). We have with probability 1,*

$$\limsup_{T\to\infty} V_T = 1.$$

Let us make some comments on our results. When the process of interest belongs to the QHASI class, Theorem 4 gives a general upper bound for $\limsup_{T\to\infty} V_T$, depending on the reals C_2 and C_3. There is a huge difference between this approach and the one of Csáki and Csörgő [20]. It should come as no surprise that the condition $C_2 = C_3$ which covers all previously mentioned works should be so relevant. To get a lower bound, this requires enough information on the underlying process. In Theorem 5, we focus our attention on the sfBm because, if $H < \frac{1}{2}$, then $C_3 < C_2$, else $C_3 = C_2$. This phenomenon has no influence on the statement of Theorem 5. But, to determine the exact value of $\limsup_{T\to\infty} V_T$, the equality $C_3 = C_2$ is crucial, as it is shown in Corollary 6. For notational convenience, denote by $[x]$ the integer part of the real x and by $\psi(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{x\sqrt{2\pi}}$, $x > 0$. In the rest of the paper, D_i, $i \in \mathbb{N}^*$, are strictly positive constants.

4. PROOF OF THEOREM 4

Note that we have for any $T \geq 0$

$$\sup_{0\leq s\leq T-a_T} |X(s+a_T) - X(s)| \leq I(T, a_T) = \sup_{0\leq t<t'\leq T, t'-t\leq a_T} |X(t') - X(t)|.$$

Hence, to prove Theorem 4, we will show the following result.

Theorem 7. *Let X an element of the QHASI class. Let a_T be a nondecreasing function of $T \geq 0$ satisfying (B1) and (B2). We have with probability 1,*

$$\limsup_{T\to\infty} \beta_T\, I(T, a_T) \leq \sqrt{\frac{C_2}{C_3}}.$$

Before starting the proof of Theorem 7, we recall a result of Fernique [21] and state a technical lemma in the spirit of Lemma 2 in [18].

Lemma 8. *Let $\{Y(t), t \in [0,1]\}$ be a separable centered real Gaussian process with*

$$\mathbb{E}\left(\left(Y(t)-Y(s)\right)^2\right)\le \Lambda^2\left(|t-s|\right),$$

where Λ *is continuous nondecreasing in* $[0,1]$ *and satisfies* $\int_1^{+\infty}\Lambda\left(\exp\left(-u^2\right)\right)du<+\infty$, *and also* $\mathbb{E}Y^2(t)\le\Gamma^2$. *Then, whenever* $x\ge(4\ln n)^{1/2}$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}|Y(t)|\ge x\left(\Gamma+4\int_1^{+\infty}\Lambda(n^{-u^2})\,du\right)\right)\le D_1\,n^2\int_x^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du,$$

where $n\ge 2$.

Lemma 9. *We have for* $0<h\le T$ *and* $z\ge 4$

$$\mathbb{P}\left(I(T,h)>z\sqrt{C_2}\,h^{\lambda}\right)\le D_2\frac{T}{h}z^{6/\lambda}\exp\left(-z^2/2\right)$$

Proof. Let $\delta>0$ be given and $x\ge e$. Define $N=(2/\delta)^{1/\lambda}\,h^{-1}$. Then $\frac{\delta}{2}h^{\lambda}=N^{-\lambda}$. Set also for $i\in\{0,1,..,[NT]-1\}$

$$X_i(s)=X\left(\frac{i}{N}+s\right)-X\left(\frac{i}{N}\right).$$

We have

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(I(T,h)>(1+\delta)\,x\sqrt{C_2}\,h^{\lambda}\right)\\&\le\mathbb{P}\left(\max_{0\le i<[NT]}\sup_{0\le s\le h}|X_i(s)|>x\sqrt{C_2}\,h^{\lambda}\right)\\&+\mathbb{P}\left(\max_{0\le i<[NT]}\sup_{0\le s\le 1/N}|X_i(s)|>x\frac{\delta}{2}\sqrt{C_2}h^{\lambda}\right)\quad(4.1)\\&\le\sum_{i=0}^{[NT]-1}\left(\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le h}|X_i(s)|>x\sqrt{C_2}h^{\lambda}\right)\right.\\&\left.+\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1/N}|X_i(s)|>x\sqrt{C_2}\,N^{-\lambda}\right)\right).\end{aligned}$$

Lemma 8 will be used to obtain upper bounds for the above probabilities. We can show by using the fact that X belongs to the QHASI class

$$\mathbb{E}(X_i(s))=0,\ \mathrm{Var}X_i(s)\le C_2\,s^{2\lambda}$$

and

$$\mathbb{E}\left(\left(X_i(t)-X_i(s)\right)^2\right)\le C_2|t-s|^{2\lambda}.$$

Let $\Delta>0$ and consider the centered continuous Gaussian process $\left\{Y_i(t)=X_i(\Delta t),t\in[0,1]\right\}$. We have for any $0\le i<[NT]$

$$\mathrm{Var}Y_i(t)\le C_2\,(\Delta t)^{2\lambda}\le C_2\,\Delta^{2\lambda}$$

and

$$\mathbb{E}\left(\left(Y_i(t)-Y_i(s)\right)^2\right)\le C_2\left(\Delta|t-s|\right)^{2\lambda}.$$

Thus Lemma 8 implies whenever $v\ge(4\ln n)^{1/2}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}|Y_i(t)|\ge v\left(\sqrt{C_2}\Delta^{\lambda}\right.\right.\\&\left.\left.+4\int_1^{+\infty}\sqrt{C_2}\left(\Delta n^{-u^2}\right)^{\lambda}du\right)\right)\quad(4.2)\\&\le D_1\,n^2\int_v^{+\infty}\exp(-u^2)\,du.\end{aligned}$$

Straight computations yield

$$\begin{aligned}&\sqrt{C_2}\,\Delta^{\lambda}+4\int_1^{+\infty}\sqrt{C_2}\left(\Delta n^{-u^2}\right)^{\lambda}du\\&\le\sqrt{C_2}\Delta^{\lambda}\left(1+\frac{2}{\lambda\,n^{\lambda}\ln n}\right).\end{aligned}\quad(4.3)$$

Therefore, if $x=v\left(1+\frac{2}{\lambda\,n^{\lambda}\ln n}\right)$, combining (4.2) with (4.3), we get

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le \Delta} \left|X_i(s)\right| > x\sqrt{C_2}\ \Delta^{\lambda} \right)$$
$$\le D_1 n^2 \int_v^{+\infty} \exp(-u^2)\, du \qquad (4.4)$$
$$\le D_3\ n^2\ \psi(x) \exp\left(\frac{2\lambda x^2 n^{\lambda} \ln n + 2x^2}{(2+\lambda n^{\lambda} \ln n)^2} \right).$$

Let $n = \frac{x^{2/\lambda}}{(\ln x)^{1/\lambda}}$. Then, we have

$$v \ge (4 \ln n)^{1/2},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\lambda x^2 n^{\lambda} \ln n}{(2+\lambda n^{\lambda} \ln n)^2} = 1$$

and

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2x^2}{(2+\lambda n^{\lambda} \ln n)^2} = 0.$$

Thus, (4.4) implies

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le \Delta} \left|X_i(s)\right| > x\sqrt{C_2}\ \Delta^{\lambda} \right) \le D_4\, \psi(x) \frac{x^{4/\lambda}}{(\ln x)^{2/\lambda}}. \qquad (4.5)$$

Hence, combining (4.1) with (4.5), we get

$$\mathbb{P}\left(I(T,h) > (1+\delta)\ x\ \sqrt{C_2}\ h^{\lambda} \right) \le D_5 \frac{T}{h\delta^{1/\lambda}} \frac{x^{4/\lambda}}{(\ln x)^{2/\lambda}} \psi(x).$$

Now set $z = (1+\delta)\, x$. We have

$$\mathbb{P}\left(I(T,h) > z\ \sqrt{C_2}\ h^{\lambda} \right) \le D_6 \frac{T}{h\delta^{1/\lambda}} \frac{z^{4/\lambda}}{(\ln z)^{2/\lambda}} \psi(z) \exp\left(\frac{2\delta z^2 + \delta^2 z^2}{2(1+\delta)^2} \right).$$

Finally we choose $\delta = \frac{1}{z^2}$. We get

$$\mathbb{P}\left(I(T,h) > z\sqrt{C_2} h^{\lambda} \right) \le D_2 \frac{T}{h}\, z^{6/\lambda} \exp(-z^2/2).$$

The proof of Lemma 9 is complete. ■

Proof (of Theorem 7). Consider the sequence $\{T_k, k \ge 1\}$ defined by $T_k = \theta^k$, where $\theta > 1$. Let $\varepsilon > 0$. An application of Lemma 9 implies

$$\mathbb{P}\left(I\left(T_k, a_{T_k}\right) > (1+\varepsilon) \sqrt{\frac{C_2}{C_3}}\ \beta_{T_k}^{-1} \right)$$
$$= \mathbb{P}\left(I\left(T_k, a_{T_k}\right) > (1+\varepsilon) \sqrt{C_2}\ a_{T_k}^{\lambda} \left(2L_{T_k}\right)^{1/2} \right)$$
$$\le D_7 \frac{T_k}{a_{T_k}} L_{T_k}^{3/\lambda} \exp\left(-(1+\varepsilon)^2\ L_{T_k} \right).$$

We can show

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(I\left(T_k, a_{T_k}\right) > (1+\varepsilon) \sqrt{\frac{C_2}{C_3}}\ \beta_{T_k}^{-1} \right) < +\infty.$$

An application of Borel-Cantelli lemma shows that we have with probability one

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt{\frac{C_3}{C_2}}\ \beta_{T_k}\ I(T_k, a_{T_k}) \le 1+\varepsilon.$$

Suppose $T \in [T_k, T_{k+1}[$. We have

$$\beta_T\ I\left(T, a_T\right) \le \frac{\beta_{T_k}}{\beta_{T_{k+1}}} \beta_{T_{k+1}}\ I\left(T_{k+1}, a_{T_{k+1}}\right).$$

We can choose θ close to 1 so that $\frac{\beta_{T_k}}{\beta_{T_{k+1}}}$ is arbitrarily close to 1.

The proof of Theorem 7 is complete . ■

5. PROOF OF THEOREM 5

Note that we have for any $T \ge 0$

$$\beta_T \left| X_H(T) - X_H(T - a_T) \right| \le V_T,$$

where X_H is a sfBm.

Hence, to prove Theorem 5, it is enough to show the following result.

Theorem 10. *Let a_T be a nondecreasing function of $T \ge 0$ satisfying (B1) and (B2). We have with probability 1,*

$$\limsup_{T\to\infty} \beta_T \left| X_H(T) - X_H(T - a_T) \right| \ge 1.$$

Before starting the proof of Theorem 10, we recall a couple of lemmas used in [18]. The first one is a well-known comparison inequality (see [22]–[24]), whereas the second one is an extension of the Borel-Cantelli lemma.

Lemma 11. *Let $\{X_j, j = 1,..,n\}$ be centered, stationary Gaussian random variables with $\mathbb{E}X_j^2 = 1$ for all j. Let $I_c^{+1} = [c, +\infty)$ and $I_c^{-1} = (-\infty, c[$. If $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,..,n$, denote by F_j the event $\left\{X_j \in I_{c_j}^{\varepsilon_j}\right\}$ where ε_j is either $+1$ or -1. Let $P \subset \{1,..,n\}$, then:*

– $\mathbb{P}\left(\cap_{j\in P} F_j\right)$ is an increasing function of $\mathbb{E}(X_i X_j)$ if $\varepsilon_i \varepsilon_j = +1$. Otherwise it is decreasing;

– if $\{P_l, l = 1,...,s\}$ is a partition of P, then

$$\left| \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in P} F_j \right) - \prod_{l=1}^{s} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in P_l} F_j \right) \right| \le \sum_{1\le l<m\le s} \sum_{j\in P_l} \sum_{i\in P_m} \left| \mathbb{E}\left(X_i X_j\right) \right| \varphi\left(c_i, c_j, \rho_{ij}^*\right),$$

where $\varphi(x,u,\rho)$ is the standard bivariate Gaussian density with correlation ρ and ρ_{ij}^* is a number between 0 and $\mathbb{E}(X_i X_j)$.

Lemma 12. *Let $\{A_n, n \ge 1\}$ be a sequence of events. If*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

and

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\sum_{1\le j<k\le n} \left(\mathbb{P}\left(A_j \cap A_k\right) - \mathbb{P}\left(A_j\right)\mathbb{P}\left(A_k\right) \right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j\right) \right)^2} = 0$$

then $\mathbb{P}(A_n \ \ i.o.) = 1$.

Let $\{T_k, k \ge 1\}$ be the increasing sequence defined by $T_1 = 1$ and $T_k - a_{T_k} = T_{k-1}$ for $k > 1$. Consider the random variables

$$Y_k = \frac{X_H(T_k) - X_H(T_{k-1})}{\sigma(T_k, T_{k-1})},$$

where

$$\sigma(T_k, T_{k-1}) = \mathbb{E}\left(\left(X_H(T_k) - X_H(T_{k-1}) \right)^2 \right).$$

We obviously have $\mathbb{E}(Y_k) = 0$ and $\operatorname{Var} Y_k = 1$. We can also establish the following lemma.

Lemma 13. *I. If $H \le 1/2$, then $\mathbb{E}\left(Y_j Y_k\right) \le 0$.*
II. If $H > 1/2$, then there exists $D_8 > 0$ such that

$$0 \le \mathbb{E}(Y_j Y_k) \le D_8 (k - j - 1)^{H-1},$$

as long as $k \ge j + 3$.

Proof. Elementary calculus yields

$$\mathbb{E}(Y_j Y_k) = \frac{(A-B+C-D)}{2\sigma(T_j,T_{j-1})\sigma(T_k,T_{k-1})},$$

where

$$A = \left(T_k + T_{j-1}\right)^{2H} - \left(T_{k-1} + T_{j-1}\right)^{2H} > 0,$$
$$B = \left(T_k + T_j\right)^{2H} - \left(T_{k-1} + T_j\right)^{2H} > 0,$$
$$C = \left(T_k - T_{j-1}\right)^{2H} - \left(T_{k-1} - T_{j-1}\right)^{2H} > 0,$$
$$D = \left(T_k - T_j\right)^{2H} - \left(T_{k-1} - T_j\right)^{2H} > 0.$$

Let us show first that if $H \le 1/2$, then

$$(A+C)-(B+D) \le 0,$$

else

$$(A+C)-(B+D) \ge 0.$$

For this purpose, consider the function

$$g : x \to (a+x)^{2H} + (a-x)^{2H} - (b+x)^{2H} - (b-x)^{2H},$$

where $0 \le T_{j-1} \le x \le T_j$ and $a > b > 0$. Note that when $a = T_k > b = T_{k-1}$, $g\left(T_{j-1}\right) = A + C$ and $g\left(T_j\right) = B + D$. The result follows from the study of the second derivative of the function g. The proof of the first part of Lemma 13 is complete.

In the sequel of this proof, we assume that $H > 1/2$. Let us turn to $A - B$. Consider the function

$$g_1 : x \to (a+x)^{2H} - (b+x)^{2H},$$

where $0 \le T_{j-1} \le x \le T_j$ and $a > b > 0$. Note that when $a = T_k > b = T_{k-1}$, $g_1\left(T_{j-1}\right) = A$ and $g_1(T_j) = B$. The study of the first derivative of the function g_1 enables us to prove that when $A - B \le 0$. Thus

$$0 \le \mathbb{E}\left(Y_j Y_k\right) \le \frac{C-D}{2\,\sigma\left(T_j,T_{j-1}\right)\sigma\left(T_k,T_{k-1}\right)}.$$

Since the sfBm belongs to the QHASI class, we have

$$\sigma\left(T_j,T_{j-1}\right) \ge \sqrt{C_1}\; a_{T_j}^H$$

and

$$\sigma\left(T_k,T_{k-1}\right) \ge \sqrt{C_1}\; a_{T_k}^H$$

Then $\mathbb{E}(Y_j Y_k) \le \frac{C-D}{2\,C_1\, a_{T_j}^H\, a_{T_k}^H}$, i.e.

$$\mathbb{E}(Y_j Y_k) \le \frac{P^{2H} + (P + a_{T_j} + a_{T_k})^{2H}}{2\,C_1\, a_{T_j}^H\, a_{T_k}^H} - \frac{(P + a_{T_j})^{2H} + (P + a_{T_k})^{2H}}{2\,C_1\, a_{T_j}^H\, a_{T_k}^H},$$

where $P = \sum_{i=j+1}^{k-1} a_{T_i}$.

Thus a Taylor expansion up to order three implies

$$\mathbb{E}(Y_j Y_k) \le \frac{2H(2H-1)a_{T_j}a_{T_k}P^{2H-2} + S}{2C_1\, a_{T_j}^H\, a_{T_k}^H},$$

where

$$S \le \frac{2H\left(2H-1\right)\left(2-2H\right)}{3!} a_{T_j}^3 \left(P + l a_{T_j}\right)^{2H-3} \le H(2H-1)a_{T_j}a_{T_k}P^{2H-2},$$

for some $0 < l < 1$. Hence,

$$\mathbb{E}\left(Y_j Y_k\right) \le 3H\left(2H-1\right)\frac{a_{T_j}\, a_{T_k}\, P^{2H-2}}{2\, C_1\, a_{T_j}^H\, a_{T_k}^H}$$
$$\le \frac{3}{2C_1}\left(\frac{a_{T_k}}{P}\right)^{1-H}\left(\frac{a_{T_j}}{P}\right)^{1-H}.$$

Since (B2) holds, we can choose $a_1 < 1$ so that $\frac{a_{T_k}}{T_k} \le a_1$. Then $T_k(1-a_1) \le T_{k-1}$ and $a_{T_k} \le (1-a_1)^{-1} a_{T_{k-1}}$. Thus

$$P \ge a_{T_{k-1}} \ge \left(1-a_1\right) a_{T_k}.$$

Note also that the definition of P implies that $P \ge \left(k-j-1\right) a_{T_j}$. Hence

$$\mathbb{E}(Y_j Y_k) \le \frac{3}{2\, C_1\, (1-a_1)^{1-H}}\left(k-j-1\right)^{H-1}$$
$$= D_8\left(k-j-1\right)^{H-1}.$$

The proof of Lemma 13 is complete. ■

Proof (of Theorem 10). For $\varepsilon > 0$ given, we consider the events

$$A_k = \left\{Y_k > \lambda_k\right\},\ k \ge 1,$$

where

$$\lambda_k = \left(1-\varepsilon\right)\frac{\beta_{T_k}^{-1}}{\sigma\left(T_k, T_k - a_{T_k}\right)}$$
$$= \left(1-\varepsilon\right)\frac{\sqrt{C_3}\, a_{T_k}^H}{\sigma\left(T_k, T_k - a_{T_k}\right)}\left(2L_{T_k}\right)^{1/2}$$

Recall that $\sigma\left(T_k, T_k - a_{T_k}\right) \sim \sqrt{C_3}\, a_{T_k}^H$ as $k \to +\infty$. Thus, we have for k sufficiently large

$$1-\varepsilon \le \frac{\sqrt{C_3}\, a_{T_k}^H}{\sigma\left(T_k, T_k - a_{T_k}\right)} \le 1+\varepsilon,$$

and therefore

$$\left(1-\varepsilon\right)^2\left(2L_{T_k}\right)^{1/2} \le \lambda_k \le \left(1-\varepsilon^2\right)\left(2L_{T_k}\right)^{1/2}.$$

We have for k sufficiently large

$$\mathbb{P}\left(A_k\right) \ge \mathbb{P}\left(Y_k \ge \left(1-\varepsilon^2\right)\left(2L_{T_k}\right)^{1/2}\right)$$
$$\ge \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\left(1-\varepsilon^2\right)}\frac{\left(T_k \ln T_k / a_{T_k}\right)^{\varepsilon^2\left(1-\varepsilon^2\right)}}{\left(2\ln\left(T_k \ln T_k / a_{T_k}\right)\right)^{1/2}}$$
$$\times \frac{1}{\left(T_k \ln T_k / a_{T_k}\right)^{1-\varepsilon^2}}$$
$$\ge \left(\frac{a_{T_k}}{T_k \ln T_k}\right)^{1-\varepsilon^2},$$

and consequently

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k) = +\infty.$$

Our purpose is to show that we can apply Lemma 12 to the events $\left\{A_k, k \ge 1\right\}$.

When $H \le 1/2$, we get by Lemma 13 that $\mathbb{E}(Y_j Y_k) \le 0$. Thus Lemma 11 implies $\mathbb{P}(A_j \cap A_k) \le \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k)$. Hence, by Lemma 12, $\mathbb{P}(A_n\ \ i.o.) = 1$.

Let us turn to the complicated case $H > 1/2$. Thus, by Lemma 13, as long as $k \ge j+3$,

$$0 \le \mathbb{E}(Y_j Y_k) \le D_8\left(k-j-1\right)^{H-1}.$$

Lemma 11 implies

$$\mathbb{P}\left(A_j \cap A_k\right) - \mathbb{P}\left(A_j\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)$$
$$\le \mathbb{E}\left(Y_j Y_k\right)\varphi\left(\lambda_j, \lambda_k, \rho_{jk}^*\right)$$

where $0 \le \rho_{jk}^{*} \le \mathbb{E}(Y_j Y_k)$.

Thus, for some fixed m,

$$\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=1}^{k-3}\left(\mathbb{P}\left(A_j \cap A_k\right)-\mathbb{P}\left(A_j\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)\right)$$

$$\le\left(\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=1}^{k-\gamma_k-1}+\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=k-\gamma_k}^{k-3}\right)\mathbb{E}\left(Y_j Y_k\right)\varphi\left(\lambda_j,\lambda_k,\rho_{jk}^{*}\right)$$

$$:= A + B,$$

where $\gamma_k = \lambda_k^{4/(1-H)}$.

Let $\delta > 0$. We can fix m such that we get by following the same lines as those ([7], pp 460-463)

$$A \le \delta\left(\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=1}^{k-\gamma_k-1}\mathbb{P}\left(A_j\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)\right) \le \delta\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_k\right)\right)^2$$

and

$$B \le D_9 \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j).$$

Applying Lemma 12 to the events $\{A_k, k \ge 1\}$, we complete the proof of Theorem 10. ■

REFERENCES

1. **Mandelbrot B., van Ness J.** Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review, 1968, Vol. 10, pp. 422-437.
2. **Houdré C., Villa J**. An example of infinite dimensional quasi-helix. // Comtemp. Math., 2003, Vol. 336, pp. 195-201
3. **Bojdecki T., Gorostiza L.G., Talarczyk A**. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times // Statist. Probab. Lett., 2004, Vol. 69, pp. 405-419.
4. **El-Nouty C., Journé J-L.**, The sub-bifractional Brownian motion // Studia Sci. Math. Hungar., 2013, Vol. 50, pp. 67-121.
5. **Kahane J-P.** Some random series of functions. Second Edition. Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1985.
6. **Bojdecki T., Gorostiza L.G., Talarczyk A.** Some extensions of fractional Brownian motion and sub-fractional Brownian motion related to particle systems // Electron. Comm. Probab., 2007, Vol. 12**,** pp. 161-172.
7. **El-Nouty C.** The increments of a bifractional Brownian motion // Studia Sci. Math. Hungar., 2009, Vol. 46, pp. 449–478.
8. **El-Nouty C., Journé J-L.** Upper classes of the bifractional Brownian motion // Studia Sci. Math. Hungar, 2011, Vol. 48, pp. 371-407.
9. **Lei P., Nualart D**. A decomposition of the bifractional Brownian motion and some applications // Statist. Probab. Lett., 2009, Vol. 79, pp. 619-624.
10. **Russo F., Tudor C.A**. On bifractional Brownian motion // Stochastic Process. Appl., 2006, Vol. 116, pp. 830-856.
11. **Tudor C.A., Xiao Y.** Sample path properties of bifractional Brownian motion // Bernoulli, 2007, Vol. 13, pp. 1023-1052.
12. **Dzhaparidze K., Van Zanten H.** A series expansion of fractional Brownian motion // Probab. Th. Rel. Fields, 2004, Vol. 103, pp. 39-55.
13. **El-Nouty C.** The lower classes of the sub-fractional Brownian motion // Stochastic Differential Equations and Processes, Springer Proceedings in Mathematics **7**, 2012, pp. 179-196.
14. **Tudor C.** Some properties of the sub-fractional Brownian motion. // Stochastics, 2007, Vol. 79, pp. 431-448.
15. **Tudor C.** On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion on an interval. // J. Math. Anal. Appl. 2009, Vol. 351, pp. 456-468.
16. **Csörgő M., Révész P**. How big are the increments of a Wiener process? // Ann. Probab., 1979, Vol. 7, pp. 731-737.

17. **Book S.A., Shore T.R**. On large intervals in the Csörgő-Révész theorem on increments of a Wiener process // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1978, Vol. 46, 1-11.
18. **Ortéga J.** On the size of the increments of nonstationary Gaussian processes // Stochastic Process. Appl., 1984, Vol. 18, pp. 47-56.
19. **El-Nouty C.** On the large increments of fractional Brownian motion // Statist. Probab. Lett., 1999, Vol. 41, pp. 169-178.
20. **Csáki E., Csörgő M.** Inequalities for increments of stochastic processes and moduli of continuity // Ann. Probab., 1992, Vol. 20, pp. 1031-1052.
21. **Fernique X**., Continuité des processus Gaussiens // C. R. Acad. Sci. Paris 1964, Vol. 258, pp. 6058-6060.
22. **Berman S.M**. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences // Ann. Math. Statist, 1964, Vol. 35, pp. 502-516.
23. **Plackett R.L.** A reduction formula for normal multivariate integrals // Biometrika, 1954, Vol. 41, pp. 351-360.
24. **Slepian D.** The one-sided barrier problem for Gaussian noise // Bell System Tech. J., 1962, Vol. 41, pp. 463-501.

Charles El-Nouty, Prof. Dr. hab., Université Paris XIII Sorbonne Paris Cité LAGA; 99 avenue J-B Clément 93430 Villetaneuse;
E-mail: elnouty@math.univ-paris13.fr

Шарль Эль-Нути, профессор, доктор математических наук, кафедра анализа, геометрии и прикладной математики, Университет Париж XIII, Сорбона-Париж-Сите, Франция; E-mail: elnouty@math.univ-paris13.fr

METHODS OF NONLINEAR ANALYSYS AND THE IMPACT OF THEIR APPLICATIONS ON THE RESULTS OF STRUCTURAL ANALYSIS

Dmitrij K. Kalichava[1], Ewa Nowak[2]
[1] LTD PIKSAR, Moscow, RUSSIA
[2] Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

ABSTRACT: The paper presents the results of nonlinear analysis in the calculations of real structures. The study was carried out by comparing linear and nonlinear analysis results obtained with the "Robot Structural Analysis" software. Also, the influence of second order effects on the structure computational model was determined.

Key words: structural mechanics, nonlinear analysis, second order effects

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ОСОБЕННОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Д.К. Каличава[1], Ева Новак[2]
[1] ООО "Пиксар», г. Москва, Россия
[2] Политехнический университет города Кельце; г. Кельце, ПОЛЬША

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматриваются результаты нелинейных расчетов реальных строительных конструкций. Представлены сопоставление результатов линейных и нелинейных расчетов, полученных с использованием программного комплекса "Robot Structural Analysis". Кроме того, исследовано влияние эффектов второго порядка на вычислительную модель объекта.

Ключевые слова: строительная механика, нелинейные расчеты, эффекты второго порядка

1. INTRODUCTION AND ASSUMPTIONS OF GEOMETRIC NONLINEAR ANALYSIS

At the first stage of the nonlinear analysis, the simplest form is taken into account. At such approach, the theory is considered to be the equilibrium equations which should be written for the deformed configuration. The strain-displacement relations are described in a linear manner. Structural mechanics problems concerning the first level geometric nonlinearity are sometimes referred to as calculations for the deformed state (Russia, Ukraine), calculations for the distorted state (Poland). The term used in the English language literature on the subject, is the theory of second order.

In building structures, the theory of first order is mainly used for rod structure calculations. The bending moments in the members, which take into account the influence of longitudinal (axial) forces, are determined.

The next stage of the analysis involves the second level geometric non-linearity problems. At this stage, in contrast to the theory of first level, a greater impact of geometric nonlinearity is accounted for. That refers to geometric equations which describe strain-displacement relations. In comparison with the theory of first order, significant difference between the orders of magnitude of deformation and angles of rotation are found. It is assumed that the squares of the angles of rotation of the elements of the given scheme are of the same order of magnitude

as the components of deformations. Those, in turn, are negligibly small in comparison with unity. A typical example of the nonlinearity problems of this order is the theory of elastic plates based on the von Kármán equations.

The third level geometric nonlinearity may include problems in which the deformations are small in comparison with unity. However, as regards rotation, this assumption cannot be applied. Tensile structures are good examples of the problems of this order of geometric nonlinearity.

Finally, at the top of the hierarchy, the most difficult problems are found. Those are the fourth order geometric nonlinearity problems. This is a case in which deformations cannot be considered as negligible quantities when compared with unity. Calculations performed for elastic materials such as, e.g. rubber, make it necessary for computational programs to fulfil specific requirements [4].

Kinematic or geometric nonlinearity occurs when an object of concern is characterised by large deformation or large displacements, or large deformation and, at the same time, large displacements (e.g. tensile or pneumatic structures) [1]. In nonlinear geometric analysis, deformations ε_x , for instance, are expressed as follows:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x{}^L + \varepsilon_x{}^{NL} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

where: ε_x - the longitudinal deformation, u – displacement along the axis of the element, w - displacement perpendicular to the axis of the element.

Thus, the calculated stiffness matrix K of the structure will take the following form:

$$K = K^L + K^G + K^{NL}$$

where: $\mathrm{K^L}$ – linear stiffness matrix, $\mathrm{K^G}$ – geometric stiffness matrix, $\mathrm{K^{NL}}$ – nonlinear stiffness matrix.

Typically, the computational methods of nonlinear analysis are based on the incremental load application. That means the total load is not included in the calculations, instead, the load gradually increases and the successive equilibrium conditions are solved. Nonlinear behaviour of the structure may be related to a single structural element (structural or material nonlinearity) or may result from the nonlinear force-deformation relation within the whole structure [2]. In the paper, the second case is dealt with, i.e. the geometric nonlinearity discussed on the example of real structures.

In the nonlinear problems, the determination of the load Q at given displacements q, or the other way round, determining q when Q is known, is practically impossible when direct methods are used. It is possible to obtain approximate results (solutions) by means of linearization or by applying special computational algorithms. The equilibrium equation can be written as:

$$K(q) * q = Q$$

To solve the equation, numerical techniques are employed. One way of solving equations in the nonlinear analysis is the use of an iterative algorithm based on the Newton-Raphson (NR) method. It is popular because it provides a high degree of application versatility and high accuracy of calculations. Equation solving with this method involves the use of the total load Q in each iteration cycle. Constant approximate stiffness matrixes are assumed in individual cycles, which results in a failure to meet the equilibrium conditions. After each cycle, unbalanced load in a given deformation configuration is calculated. This load is used to determine additional displacements, i.e. configuration changes that lead to obtaining the configuration which corresponds to the equilibrium. The computational process is finished when the equilibrium at the accuracy assumed is reached [3].

The course of a single i -th iteration can be described in the following steps:

- Data from iteration $i-1; r^{(i-1)}, \Delta R^{(i-1)}, R$

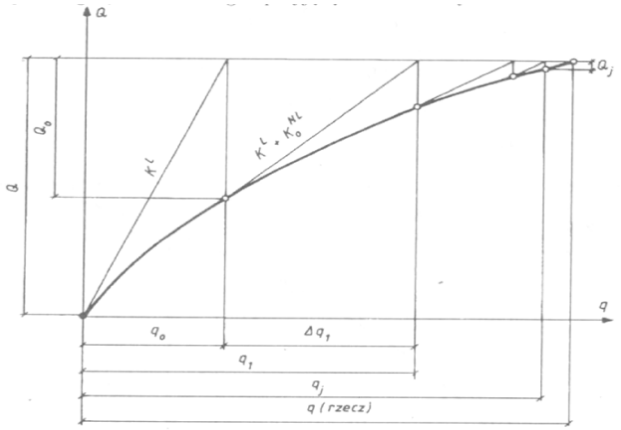


Figure 1. Newton-Raphson method [4].

- $K_T^{(i-1)}$
- $\Delta r^{(i)} = \left(K_T^{(i-1)}\right)^{-1} \Delta R^{(i-1)}$
- $r^{(i)} = r^{(i-1)} + \Delta r^{(i)}$
- $F^{(i)} = K\left(r^{(i)}\right) r^{(i)}$
- $\Delta R^{(i)} = R - F^{(i)}$
- Checking the condition $\Delta R^{(i)} > \varepsilon$

(if positive then we move on to the next iteration $i + 1$; if negative, it means that we gets a score with the desired precision and we finish calculation).

Here: K_T - tangent stiffness matrix, R - nodal load, F - the impact of the elements on the nodes corresponding to the displacement and stress described in the existing configuration, r - nodal displacements, ε - established accuracy of the solutions [6].

2. THE STRUCTURE MODEL

The roof structure of a hotel was analyzed. The rod system forming a spatial truss was used. The structure model is shown in Figs 2,3,4, and 5. The structure dimensions were as follows:
- height in the corners: 0.36 m, 1.69 m, 0.99 m and 1.49 m,
- base: 22.27 m, 28.93 m, 11.38 m, 36.68 m (distances given between respective corners).

The object was subjected to real load:
- service load 1.8kN,
- snow load 0.5kN

The following profiles were used:
- bottom chords RK 100x8, top chords RK 100x8, columns RK 80x4, cross braces RK 80x4.

The following types of analyzes were carried out:
- linear (rigid connections),
- linear (hinged connections),
- nonlinear (rigid connections),
- nonlinear (hinged connections).

3. THE RESULTS OF THE ANALYSIS

The spatial rod truss with complex geometry was analyzed. All types of analysis were carried out comprehensively for the entire system. The summary of results was given for bottom chord of the girder (Table 1). In Fig. 6, the girder was marked with a thick line.

4. CONCLUSION

The purpose of the paper was to determine the effect of the type of non-linear analysis on the displacement values.

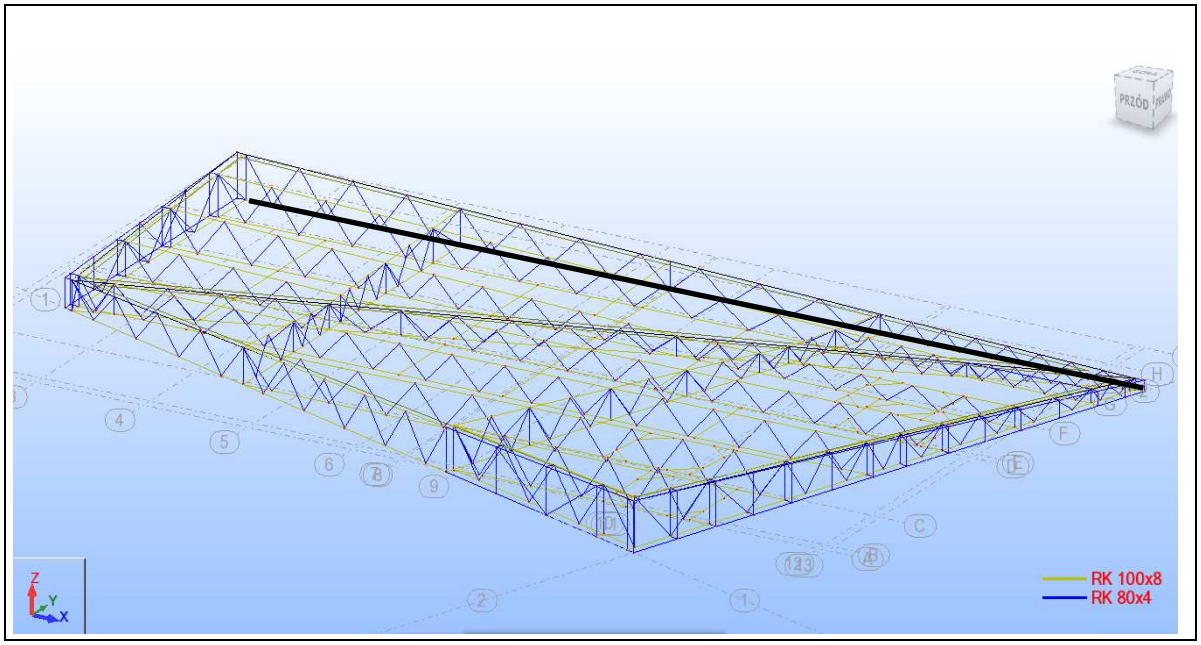


Figure 2. The structure model.

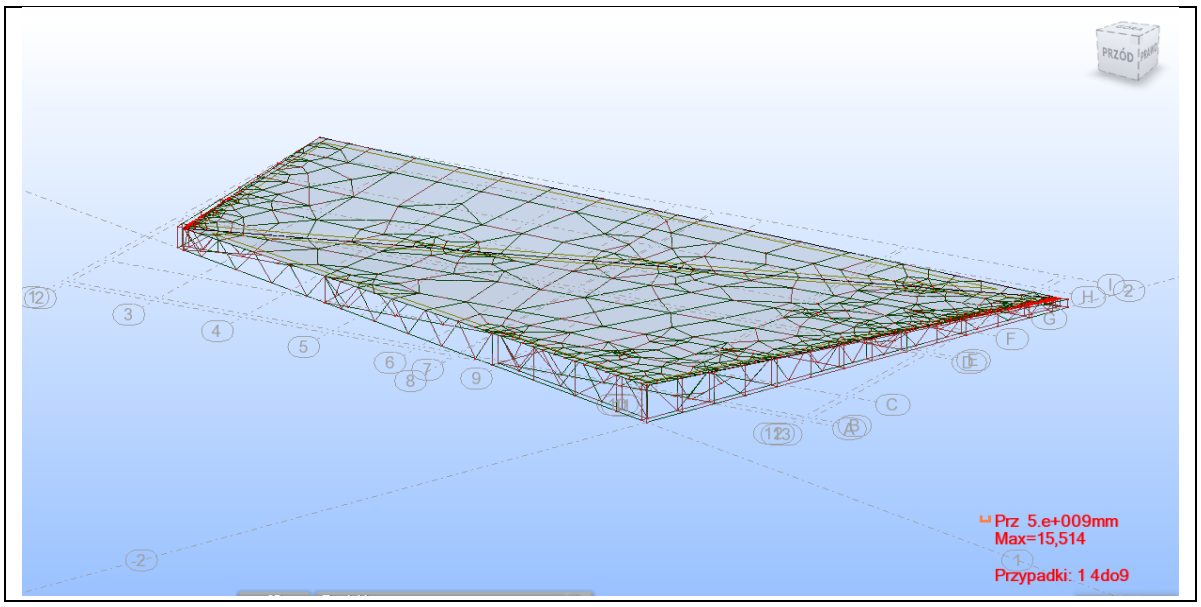


Figure 3. The linear analysis - deformations.

Another aim was to compare the results of the non-linear analysis with those of the linear analysis. On completion of the investigations described above, it can be concluded that the selected results for the structure models are not sensitive to second order effects. Results of individual analyses are congruent. However, an increase in displacements in the non-linear analysis when compared with the linear analysis can be observed. Also, a significant effect of connections used in the computational model can be noted. As expected, for hinge connections, nodal displacements are greater than it is the case for rigid connections.

The calculations of the roof structure were made in accordance with current standards: EN 1993-1:2005/AC:2009 [7]. In comparison with the linear analysis, the results obtained do not show significant differences after the effects of second order were taken into account.

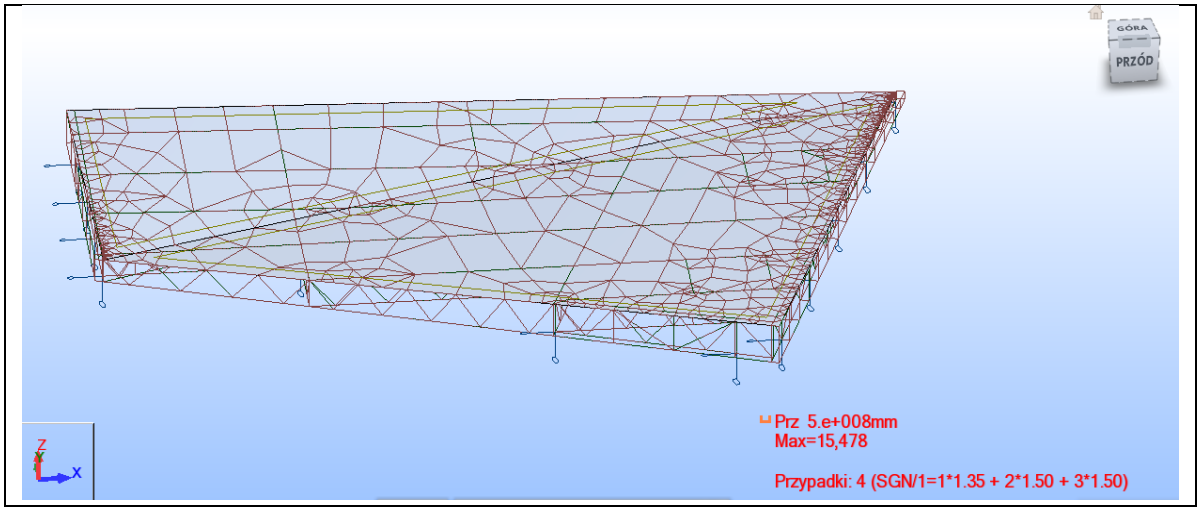


Figure 4. The nonlinear analysis - deformations.

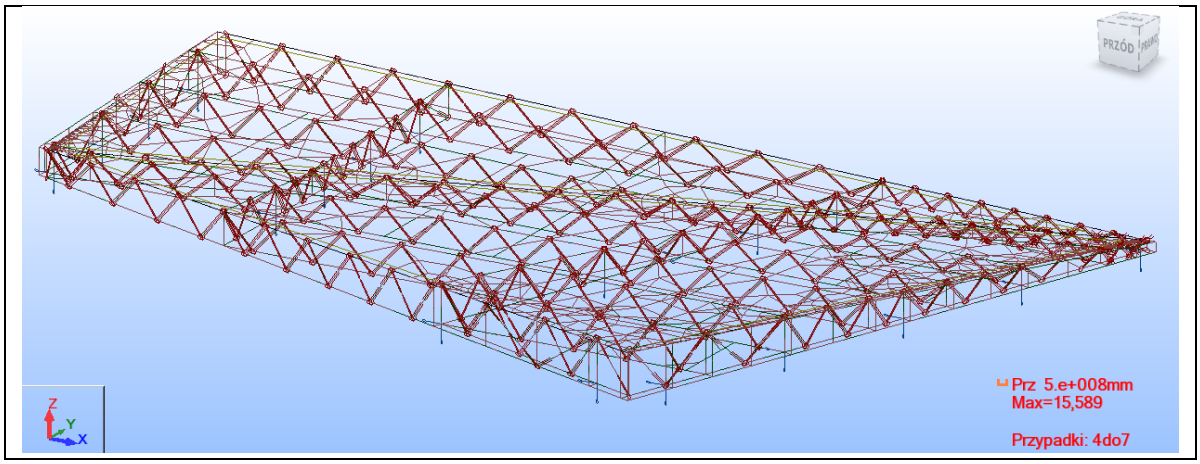


Figure 5. The model structure with hinge joints.

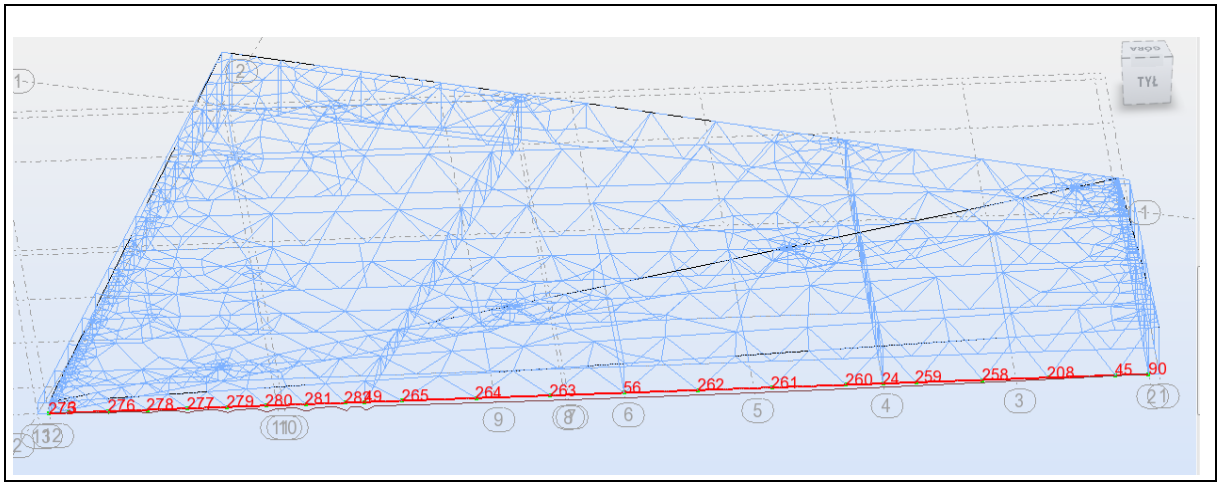


Figure 6. The numbering of nodes.

Table 1. The displacements for the selected nodes of the bottom girder.

no node on the graph	no node in the schema	Types of analysis and displacement values [mm]				
		linear (rigid connections)	linear (hinged connections)	nonlinear (rigid connections)	nonlinear (hinged connections)	nonlinear (with preliminary imperfections)
1	**275**	**0,043**	**0,028**	**0,115**	**0,113**	**0,079**
2	**3**	**-0,803**	**-0,995**	**-0,803**	**-1,228**	**-0,996**
3	**276**	**-2,543**	**-2,869**	**-2,544**	**-3,398**	**-2,871**
4	**278**	**-3,869**	**-4,202**	**-3,87**	**-4,588**	**-4,206**
5	**277**	**-4,632**	**-4,947**	**-4,634**	**-4,647**	**-4,954**
6	**279**	**-4,9**	**-5,18**	**-4,906**	**-5,668**	**-5,191**
7	**280**	**-4,862**	**-5,095**	**-4,873**	**-5,938**	**-5,11**
8	**281**	**-4,741**	**-4,934**	**-4,756**	**-5,697**	**-4,955**
9	**282**	**-4,821**	**-4,983**	**-4,842**	**-5,255**	**-5,009**
10	**49**	**-5,035**	**-5,146**	**-5,059**	**-5,047**	**-5,175**
11	**265**	**-7,014**	**-7,242**	**-7,043**	**-7,781**	**-7,278**
12	**264**	**-11,22**	**-11,568**	**-11,254**	**-12,361**	**-11,612**
13	**56**	**-15,403**	**-15,691**	**-15,433**	**-16,861**	**-15,734**
14	**263**	**-14,336**	**-14,702**	**-14,368**	**-14,356**	**-14,746**
15	**262**	**-14,165**	**-14,353**	**-14,194**	**-16,26**	**-14,395**
16	**261**	**-11,359**	**-11,464**	**-11,387**	**-13,243**	**-11,504**
17	**260**	**-7,788**	**-7,872**	**-7,811**	**-8,626**	**-7,903**
18	**24**	**-5,652**	**-5,732**	**-5,67**	**-5,66**	**-5,757**
19	**259**	**-5,411**	**-5,531**	**-5,428**	**-6,158**	**-5,553**
20	**258**	**-4,371**	**-4,546**	**-4,382**	**-5,948**	**-4,561**
21	**208**	**-3,225**	**-3,421**	**-3,23**	**-4,796**	**-3,429**
22	**45**	**-1,762**	**-1,918**	**-1,763**	**-2,485**	**-1,921**
23	**90**	**-0,882**	**-0,993**	**-0,881**	**-0,871**	**-0,992**

REFERENCES

1. **Gawęcki A.** Mechanics of materials and structures rod, Poznan University of Technology 2003r.
2. Autodesk® Robot™ Structural Analysis Professional.
3. **Gieczewski J., Kończal M., Krzysztoń A., Mejbaum D., Roszak N., Wojciechowski M., Wojtkowiak J.** Course materials - Computer Methods II, Poznan University of Technology 2004r.
4. http://www.ikb.poznan.pl/almamater/wyklady/metody_komputerowe_II_04-05/08_Analiza_nieliniowa.pdf
5. **Перельмутер А.В.** Беседы о строительной механике. – М.: Издательство АСВ, 2014.
6. **Rakowski G., Kasprzyk Z.** Finite element method in structural mechanics, Warsaw University of Technology, 1993.
7. **Rakowski G.** Metoda elementów skończonych-wybrane problemy, Warsaw University of Technology, 1996.
8. Eurocod 3 EN 1993-1:2005/AC:2009 Design of Steel Structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings.

Dmitrij K. Kalichava, LTD PIKSAR; 42, Ulitsa Fabritsiusa, Moscow, 125363, Russia
e-mail: office@piksar.ru

Ewa Nowak, Kielce University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Architecture, Department of Mechanics, Metal Structures and Computer Methods, Kielce, Poland; e-mail: ewanowak11@wp.pl

Table 2. The displacements graph for the selected nodes of the bottom girder.

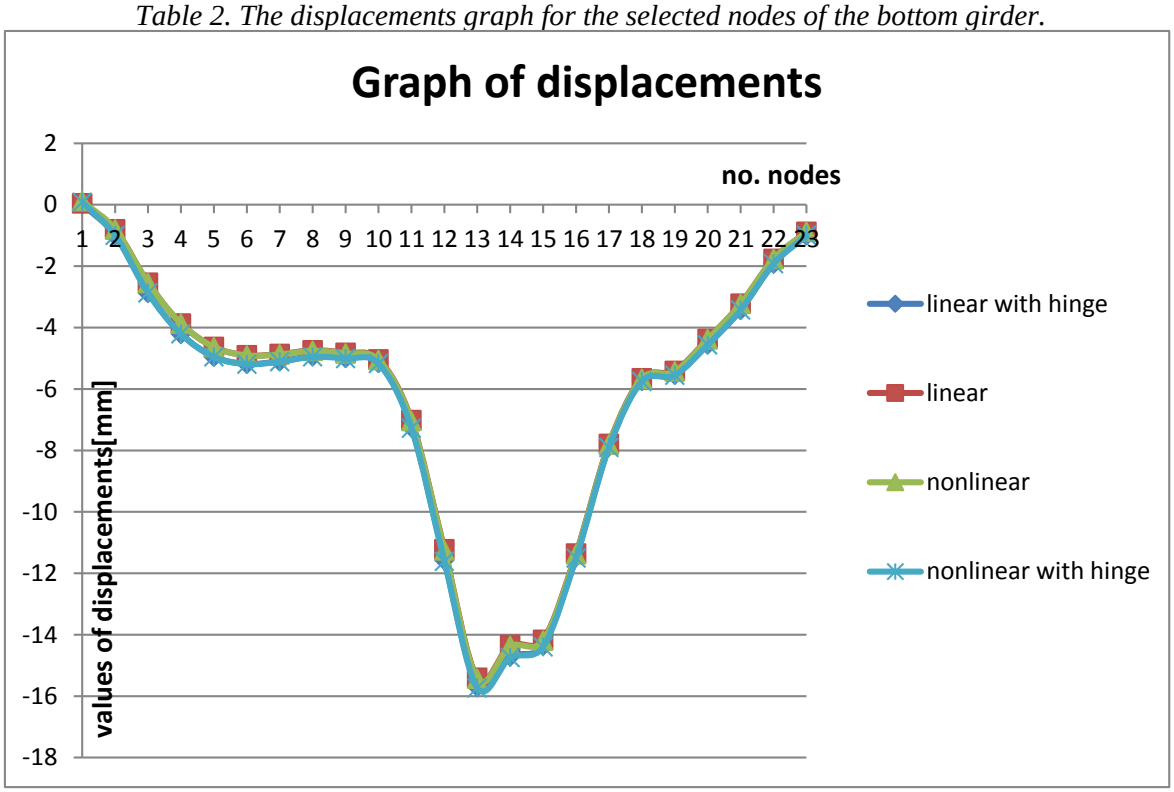
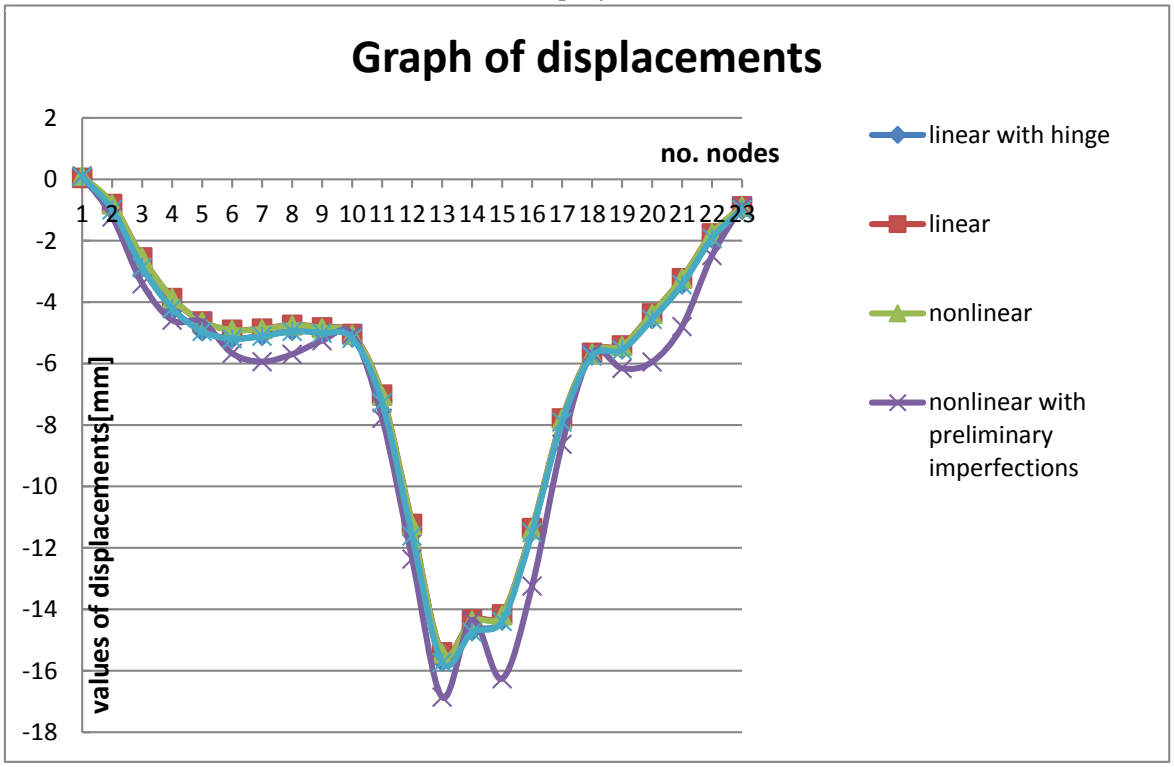


Table 3. Displacements graph of for the selected nodes of the bottom girder with preliminary imperfections.



INVERSE PROBLEM OF FILTERING THE SUSPENSION IN POROUS MEDIA

Ludmila I. Kuzmina[1], Yuri V. Osipov[2]
[1] National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA
[2] Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The mathematical model of filtering the suspension in a porous medium and its asymptotic solution behind the concentration front depend on several parameters. These parameters are determined by the given values of concentrations of suspended and retained particles at the filter inlet and outlet. An estimation of the method`s error is given.

Key words: filtration problem, suspension, porous media, concentration of particles, asymptotic solution, inverse problem

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Л.И. Кузьмина[1], Ю.В. Осипов[2]
[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ
[2] Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматривается математическая модель фильтрации суспензии в пористой среде и ее асимптотическое решение позади фронта концентрации в зависимости от нескольких расчетных параметров. Данные параметры задаются определенными значениями концентрации взвешенных и удержанных частиц на впуске и выпуске фильтра. Представлен метод оценки соответствующей невязки.

Ключевые слова: проблема фильтрации, суспензия, пористая среда, концентрация частиц, асимптотическое решение, обратная задача

1. INTRODUCTION

Filtration of the suspension in porous media is an important problem of the underground fluid mechanics [1-9]. Suspension is a fluid containing slurry of tiny particles. Porous media is a solid body with holes of various shapes and sizes. These holes form pores - channels through which the fluid injected into a solid body, percolates therethrough and flows out from the opposite side. The suspended particles of the suspension partially pass through porous media with a fluid and partially remain in the solid body - the filter and form a deposit. Mathematical model of filtering the suspension in porous media is based on the assumption that the unobstructed passage and particle capture is determined solely by the geometric ratio of the size of the particles and pores [10-14]: If the pore size is larger than the size of the particle, the particle passes through the pore; If the pore size is less than the particle size, the particle is stuck at the pore inlet. Consider the suspension with particles of the same size, passing through the filter of length $l = 1$ with a uniform constant cross-section. The suspension injected at the filter input has a constant concentration K of suspended particles. In [15] an asymptotic solution of the filtration problem is constructed. It allows to determine concentrations of

suspended and retained particles at the filter inlet and outlet. Comparison of the asymptotics with given concentrations of suspended and retained particles at different values of K allows to solve the inverse problem of filtration – determining the parameters of the mathematical model of suspension flow in porous media.

2. MATHEMATICAL MODEL OF THE FILTRATION PROBLEM

The concentrations of suspended and retained particles satisfy the quasi-linear system of differential equations of the first order [15, 16]

$$\frac{\partial}{\partial t}\{g(S)C+S\}+\frac{\partial}{\partial x}\{f(S)C\}=0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\Lambda(S)C. \quad (2)$$

Here $g(0)=g_0>0,\ f(0)=f_0>0,\ \Lambda(S)>0$ when $S\ge 0$.

The problem (1), (2) is considered in the domain

$$\Omega=\{0<x<1,\ t>0\}.$$

The boundary conditions are set at the filter inlet

$$C(x,t)\big|_{x=0}=K,\ K>0, \quad (3)$$

and at the initial moment

$$C(x,t)\big|_{t=0}=0; \quad (4)$$

$$S(x,t)\big|_{t=0}=0. \quad (5)$$

The problem (1), (2) has the characteristic line

$$t-ax=0,\ a=\frac{g_0}{f_0}. \quad (6)$$

The concentration front moves in the filter at the speed of $1/a$. When $t<ax$ the concentrations of suspended and retained particles are equal to zero; when $t>ax$ both concentrations are positive [15, 17]. On the characteristics (6) the concentration of suspended particles $C(x,t)$ is discontinuous; the concentration of retained particles $S(x,t)$ is continuous but loses smoothness. In the domain

$$\widetilde{\Omega}=\{0<x<1,\ t>ax\}$$

two initial conditions (4) and (5) can be replaced by one condition on the characteristics [15, 18]:

$$S(x,t)\big|_{t=ax}=0. \quad (7)$$

Solution of the problem (1) - (5) coincides with the solution of the problem (1) - (3), (7) in $\widetilde{\Omega}$.

3. ASYMPTOTIC SOLUTION

Let the functions $g(S)$, $f(S)$, $\Lambda(S)$ are regular in the neighborhood of $S=0$ and can be expanded in powers of S:

$$g(S)=g_0+g_1S+g_2S^2+\ldots,\ g_0>0; \quad (8)$$

$$f(S)=f_0+f_1S+f_2S^2+\ldots,\ f_0>0; \quad (9)$$

$$\Lambda(S)=\lambda_0+\lambda_1S+\ldots,\ \lambda_0>0. \quad (10)$$

The solution $S(x,t)$, $C(x,t)$ of the system (1) - (3), (7) in $\widetilde{\Omega}$ is constructed as a series in powers of $(t-ax)$ with coefficients depending only on x:

$$C^{(K)}(x,t)=c_0^{(K)}(x)+(t-ax)c_1^{(K)}(x)+\ldots, \quad (11)$$

$$S^{(K)}(x,t)=(t-ax)v_0^{(K)}(x)+ +(t-ax)^2v_1^{(K)}(x)+\ldots \quad (12)$$

Denote

$$p_0=e^{\frac{\lambda_0}{f_0}},\ p_1=af_1-g_1,\quad p_2=\lambda_0(g_2-af_2),\ p_3=\lambda_1-\frac{2f_1\lambda_0}{f_0}. \quad (13)$$

According to [15] the first terms of the asymptotic expansion are

$$c_0^{(K)} = \frac{1}{p_1 + (\frac{1}{K} - p_1)(p_0)^x}, \quad (14)$$

$$c_1^{(K)} = \Bigg(p_2\left(1 - (p_0)^{2x}\right) + \\ + (\frac{1}{K} - p_1) p_3 \left((p_0)^x - (p_0)^{2x}\right)\Bigg)\left(c_0^{(K)}\right)^3 \quad (15)$$

$$v_0^{(K)} = \lambda_0 c_0^{(K)}; \quad (16)$$

$$v_1^{(K)} = \frac{\lambda_0\lambda_1}{2}\left(c_0^{(K)}\right)^2 + \frac{\lambda_0 c_1^{(K)}}{2} \quad (17)$$

4. DETERMINING THE COEFFICIENTS

To calculate the coefficients of the expansions (8) - (10) we have to define the parameters of the asymptotics (11), (12). We first find the value a, by measuring the moment t_0 of suspended particle occurrence at the filter outlet. Since the concentration front moves through the filter at a speed $1/a$ and the length of the filter $l = 1$, then

$$a = t_0.$$

Denote $C_{\exp}^{(K)}(t)$ the known concentration of retained particles at the filter outlet $x = 1$ at the moment $t \geq t_0$. Let

$$S_0 = S^{(1)}(0,\tau),\ S_1 = S^{(1)}(1,\tau + t_0) \quad (18)$$

– the given retained particle concentrations with $K = 1$ at the filter inlet at the moment $\tau > 0$ and at the filter outlet at the moment $\tau + t_0$. These values must satisfy the following conditions.

1. Part of the suspension particles is stuck in the filter and forms a deposit, while the other part passes freely through the filter

$$0 < C_{\exp}^{(K)}(t) < K. \quad (19)$$

2. Consider the specific area $s^{(K)}(x,t)$ of the filter cross-section, corresponding to one suspended particle - the value reciprocal to concentration. We assume that at the moment t_0 the difference between the specific areas at the filter inlet and outlet

$$s^{(K)}(1,t_0) - s^{(K)}(0,t_0) = \frac{1}{C_{\exp}^{(K)}(t_0)} - \frac{1}{K} \quad (20)$$

decreases monotonically with increasing parameter K.

3. The concentration of suspended particles in the suspension at the filter outlet increases with time because the amount of free small pores of the filter, where particles are stuck decreases

$$C_{\exp}^{(K)}(t + \Delta t) > C_{\exp}^{(K)}(t) \ \ for \ \ \Delta t > 0. \quad (21)$$

4. Concentrations of suspended and retained particles satisfy the relationship

$$\frac{S_1}{S_0} > \left(C_{\exp}^{(1)}(t_0)\right)^2. \quad (22)$$

To determine the parameters (13) by the values of suspended particle concentration at the filter outlet let us fix $K = k < 1$ and a small $\Delta t > 0$.

Theorem 1. For sufficiently small $\Delta t > 0$ under the assumptions (19) and (20) the parameters (13) are uniquely determined by

$$A_1 = C_{\exp}^{(1)}(t_0),\ A_k = C_{\exp}^{(k)}(t_0),$$
$$B_1 = C_{\exp}^{(1)}(t_0 + \Delta t),\ B_k = C_{\exp}^{(k)}(t_0 + \Delta t). \quad (23)$$

Proof. 1. Parameters p_0, p_1 can be expressed through the values of A_1, A_k from (11), (14) at $x = 1$, $t = t_0$.

$$C^{(1)}(1,t_0) = c_0^{(1)}(1) = \frac{1}{p_1 + (1-p_1)p_0} = A_1, \quad (24)$$

$$C^{(k)}(1,t_0) = c_0^{(k)}(1) = \frac{1}{p_1 + (\frac{1}{k} - p_1)p_0} = A_k \quad (25)$$

From the system (24), (25)

$$p_0 = \frac{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_k}}{1 - \frac{1}{k}}, \quad (26)$$

$$p_1 = \frac{\frac{1}{kA_1} - \frac{1}{A_k}}{(\frac{1}{A_1} - 1) - (\frac{1}{A_k} - \frac{1}{k})}. \quad (27)$$

The assumption (20) implies that at $0 < k < 1$ the denominator of (27) is different from zero and the parameter

$$p_0 = \frac{\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_k}}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{(\frac{1}{A_1} - 1) - (\frac{1}{A_k} - \frac{1}{k})}{1 - \frac{1}{k}} + 1 > 1. \quad (28)$$

Let us show that the denominator of (14)

$$Z(x) = p_1 + (\frac{1}{k} - p_1)(p_0)^x$$

is different from zero for all $x \geq 0$. From (19) and (20)

$$\frac{1}{k} - p_1 = \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{k}\right)}{(\frac{1}{A_1} - 1) - (\frac{1}{A_k} - \frac{1}{k})} > 0.$$

Since $Z(0) = \frac{1}{k}$ and

$$Z'(x) = (\frac{1}{k} - p_1)(p_0)^x \ln p_0 > 0,$$

then

$$Z(x) > \frac{1}{k} \text{ for all } x > 0. \quad (29)$$

Therefore, the expression (14) is defined and uniquely determined by the parameters (26), (27) for $x \geq 0$.

2. Parameters p_2, p_3 can be expressed from (11) at $t = t_0 + \Delta t$.

$$C^{(1)}(1,t_0 + \Delta t) = c_0^{(1)}(1) + c_1^{(1)}(1)\Delta t, \quad (30)$$

$$C^{(k)}(1,t_0 + \Delta t) = c_0^{(k)}(1) + c_1^{(k)}(1)\Delta t. \quad (31)$$

Substituting (15) into (30), (31) and using (24), (25), we obtain a system of linear algebraic equations for determining the constants p_2, p_3:

$$B_1 = A_1 + (A_1)^3 \Delta t \cdot \cdot \left(p_2 + (1-p_1)p_3 p_0 - \left(p_2 + (1-p_1)p_3\right)p_0^2\right), \quad (32)$$

$$B_k = A_k + (A_k)^3 \Delta t \cdot \cdot \left(p_2 + (1-p_1)p_3 p_0 - \left(p_2 + (\frac{1}{k} - p_1)p_3\right)p_0^2\right).$$

Simplifying the system (32)

$$p_2(1+p_0) + p_3(1-p_1)p_0 = \frac{B_1 - A_1}{(1-p_0)(A_1)^3 \Delta t}, \quad (33)$$

$$p_2(1+p_0) + p_3(\frac{1}{k} - p_1)p_0 = \frac{B_k - A_k}{(1-p_0)(A_k)^3 \Delta t}.$$

Determinant of the system (33)

$$\begin{vmatrix} (1+p_0) & (1-p_1)p_0 \\ (1+p_0) & (\frac{1}{k} - p_1)p_0 \end{vmatrix} = (1+p_0)p_0(\frac{1}{k} - 1) \neq 0,$$

therefore, the parameters p_2, p_3 are uniquely determined. This proves Theorem 1.

To find coefficients λ_0, λ_1 the asymptotic formula (12) should be compared with a given concentration S of retained particles at the filter inlet and outlet.

Theorem 2. For sufficiently small $\tau > 0$ under the assumptions (19) - (22) the parameters λ_0, λ_1 are uniquely determined by the values (18), (23).

Proof. Substituting (16) and (17) into (12) at $t = \tau$, $x = 0$ and at $t = \tau + t_0$, $x = 1$

$$S(0,\tau) = \lambda_0\tau + \frac{\lambda_0\lambda_1\tau^2}{2}, \tag{34}$$

$$S(1,\tau + t_0) = \lambda_0 c_0^{(1)}(1)\tau + \\ + \frac{\lambda_0}{2}\left(\lambda_1\left(c_0^{(1)}(1)\right)^2 + c_1^{(1)}(1)\right)\tau^2 \tag{35}$$

From (18) the following system is obtained

$$\lambda_0\tau\left(1 + \frac{\lambda_1\tau}{2}\right) = S_0; \tag{36}$$

$$\lambda_0\tau\left(c_0^{(1)}(1) + \left(\frac{\lambda_1}{2}\left(c_0^{(1)}(1)\right)^2 + \frac{c_1^{(1)}(1)}{2}\right)\tau\right) = S_1 \tag{37}$$

From (23), (24), (30)

$$c_0^{(1)}(1) = A_1, \quad c_1^{(1)}(1) = \frac{B_1 - A_1}{\Delta t}. \tag{38}$$

After substituting (38) into equation (37)

$$\lambda_0\tau\left(A_1 + \left(\frac{\lambda_1}{2}A_1^2 + \frac{B_1 - A_1}{2\Delta t}\right)\tau\right) = S_1 \tag{39}$$

we find the solution of the system (36), (39):

$$\lambda_0 = \frac{S_1 - S_0A_1^2}{\tau\left(A_1 - A_1^2 + (B_1 - A_1)\mu\right)}, \tag{40}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\left(S_0A_1 + S_0(B_1 - A_1)\mu - S_1\right)}{\tau(S_1 - S_0A_1^2)}, \tag{41}$$

where $\mu = \dfrac{\tau}{2\Delta t}$.

From the assumptions (19) and (21)

$$0 < A_1^2 < A_1 < B_1 < 1, \tag{42}$$

and the denominator of (40) is positive. According to (22), the numerator of (40) and the denominator of (41) are positive. Therefore, expressions (40) and (41) are defined, and $\lambda_0 > 0$. Theorem 2 is proved.

Found coefficients λ_0, λ_1 and combinations of coefficients

$$a = \frac{g_0}{f_0},\ p_0 = e^{\frac{\lambda_0}{f_0}},\ p_1 = af_1 - g_1,$$

$$p_2 = \lambda_0(g_2 - af_2),\ p_3 = \lambda_1 - \frac{2f_1\lambda_0}{f_0}$$

allow to determine sequentially the following coefficients of expansions (8) - (10):

$$f_0 = \frac{\lambda_0}{\ln p_0};\ g_0 = af_0:\ f_1 = \frac{(\lambda_1 - p_3)f_0}{2\lambda_0};$$

$$g_1 = af_1 - p_1;\ g_2 - af_2 = \frac{p_2}{\lambda_0}. \tag{43}$$

Coefficients g_2, f_2 are included in the asymptotic terms (14) - (17) only in the form of combination $g_2 - af_2$. These parameters can be found from the next term of the asymptotics (11). When using only first two terms of of the asymptotics, we can put

$$g_2 = \frac{p_2}{\lambda_0},\ f_2 = 0. \tag{44}$$

5. ACCURACY EVALUATION OF THE FOUND COEFFICIENTS

A simple system

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial x}=0; \quad (45)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=(1-S)C \quad (46)$$

with boundary conditions (3) - (5) for $K=k$ has an exact solution [19, 20]

$$C^{(k)}(x,t)=\begin{cases}0, & t<x\\ \dfrac{ke^{k(t-x)}}{e^{k(t-x)}+e^{x}-1}, & t>x\end{cases}; \quad (47)$$

$$S^{(k)}(x,t)=\begin{cases}0, & t<x\\ \dfrac{e^{k(t-x)}-1}{e^{k(t-x)}+e^{x}-1}, & t>x\end{cases}. \quad (48)$$

The coefficients of expansions (8) - (10) are

$$g_0=f_0=1,\ g_1=g_2=f_1=f_2=0,$$
$$\lambda_0=1,\ \lambda_1=-1,\ t_0=a=1. \quad (49)$$

Coefficients (49) correspond to the following values of the parameters (13):

$$p_0=e,\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-1. \quad (50)$$

The solution (47) and (48) allows calculating the exact values of concentrations of suspended and retained particles at the inlet and outlet of the filter

$$C^{(k)}(1,t_0)=C^{(k)}_{\exp}(t_0)=A_k=\frac{k}{e}; \quad (51)$$

$$C^{(k)}(1,t_0+\Delta t)=C^{(k)}_{\exp}(t_0+\Delta t)=$$
$$=B_k=\frac{ke^{k\Delta t}}{e^{k\Delta t}+e-1}; \quad (52)$$

$$S^{(1)}(0,\tau)=S_0=\frac{e^{\tau}-1}{e^{\tau}}; \quad (53)$$

$$S^{(1)}(1,\tau+t_0)=S_1=\frac{e^{\tau}-1}{e^{\tau}+e-1}. \quad (54)$$

It is easy to verify that the obtained values satisfy the conditions (19) - (22).

Parameters of the expansions (14)-(17) can be calculated by the values (51)-(54). (26), (27) implies that parameters p_0 and p_1 coincide with (50):

$$p_0=e,\ p_1=0. \quad (55)$$

From (32), (33)

$$p_2=\frac{f(1)-kf(k)}{(e+1)(k-1)},\ p_3=\frac{k\big(f(k)-f(1)\big)}{e(k-1)}, \quad (56)$$

where $f(k)=\dfrac{e^2(e^{k\Delta t}-1)}{k^2\Delta t(e^{k\Delta t}+e-1)}$.

The limit

$$\lim_{\Delta t\to 0} f(k)=\frac{e}{k}, \quad (57)$$

so

$$p_2\to 0,\ p_3\to -1 \text{ at } \Delta t\to 0. \quad (58)$$

From (40), (41) the coefficients

$$\lambda_0\to 1,\ \lambda_1\to -1 \quad (59)$$

when $\Delta t\to 0$, $\tau\to 0$. Thus, the limit values found are identical with (49), (50). The figures show the boundaries of the values k, Δt, τ, providing a given accuracy ε of determining the coefficients (49).

6. CONCLUSIONS

Coefficients of the filtration problem describing the suspension flow in a porous media are determined by comparison of the asymptotic solution with the given concentrations of suspended and retained particles at the filter inlet and outlet.

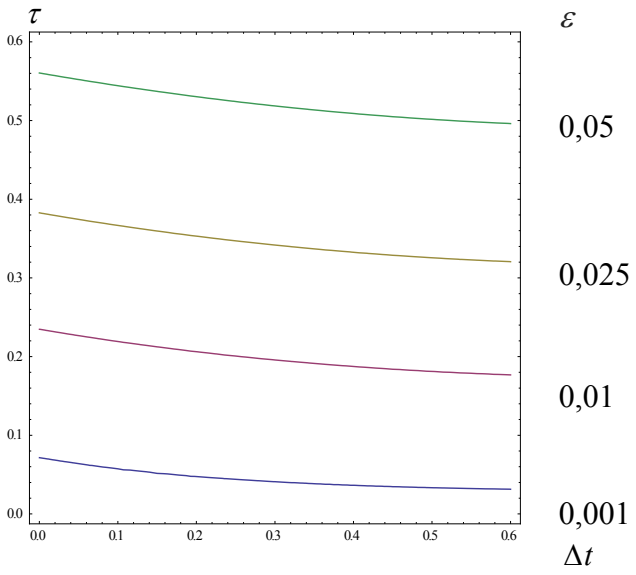


Figure 1. Accuracy for g_0, f_0, λ_0.

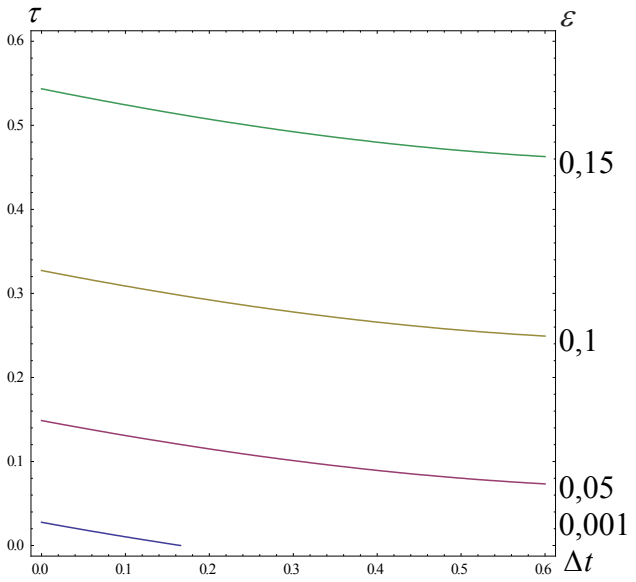


Figure 2. Accuracy for g_1, f_1, λ_1.

For a simple system having an exact solution, it is possible to estimate the unrecoverable error of the method associated with the mismatch between the exact solution and its asymptotics. In general, concentrations of suspended and retained particles must be found by experiment. Note that the measurement errors of laboratory experiments to determine the particle concentrations also affect the accuracy of finding the coefficients.

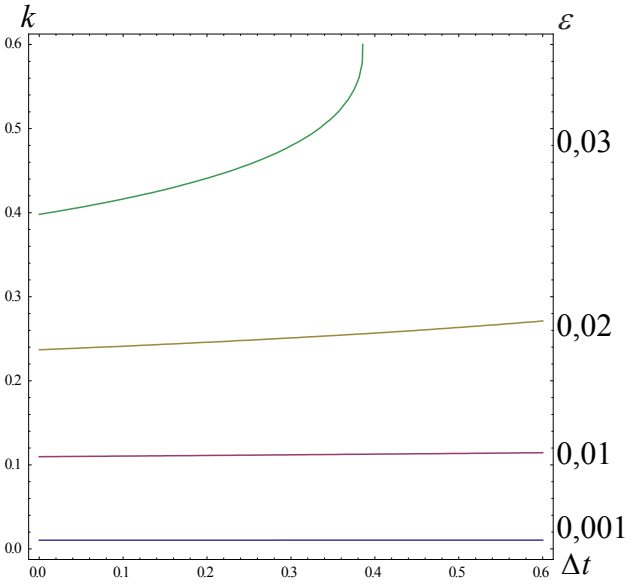


Figure 3. Accuracy for g_2, f_2.

REFERENCES

1. **Elimelech M., Gregory J., Williams R., Jia X.** Particle Deposition & Aggregation: Measurement, Modelling and Simulation, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1998.
2. **Mays D., Hunt J.** Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media, Environ. Sci. Technol. 39 (2005) 577–584.
3. **Massoudieh A., Ginn T.R.** Colloid-facilitated contaminant transport in unsaturated porous media, in: G. Hanrahan (Ed.), Modelling of Pollutants in Complex Environmental Systems, vol. II, ILM Publications, Hertfordshire, Glensdale, 2010 (Chapter 8).
4. **Noubactep C., Care S.** Dimensioning metallic iron beds for efficient contaminant removal, *Chemical Engineering Journal,* 163 (2010), pp. 454–460.
5. **Gitis V., Dlugy C., Ziskind G., Sladkevich S., Lev O.** Fluorescent clays – similar transfer with sensitive detection, *Chemical Engineering Journal*, 174 (2011), pp. 482–488.
6. **Bradford S.A., Torkzaban S.** Colloid transport and retention in unsaturated porous media: a review of interface-, collec-

tor-, and pore-scale processes and models, *Vadose Zone Journal,* vol. 7 (2008), pp. 667–681.
7. **Bradford S., Kim H., Haznedaroglu B., Torkzaban S., Walker S.** Coupled factors influencing concentration-dependent colloid transport and retention in saturated porous media, *Environ. Sci. Technol*., vol. 43 (2009), pp. 6996–7002.
8. **Tien C., Ramarao B.V.** *Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols*, 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2007.
9. **Gitis V., Rubinstein I., Livshits M., Ziskind G.** Deep-bed filtration model with multistage deposition kinetics, *Chemical Engineering Journal,* vol. 163 (2010), pp. 78–85.
10. **Bedrikovetsky P.** Upscaling of Stochastic Micro Model for Suspension Transport in Porous Media, *Transport in Porous Media,* vol. 75, pp. 335–369, 2008.
11. **You Z., Badalyan A., Bedrikovetsky P.** Size-Exclusion Colloidal Transport in Porous Media–Stochastic Modeling and Experimental Study, *SPE Journal,* vol. 18, pp. 620-633, 2013.
12. **Chalk P., Gooding N., Hutten S., You Z., Bedrikovetsky P.** Pore size distribution from challenge coreflood testing by colloidal flow, *Chemical Engineering Research and Design,* vol. 90, pp. 63-77, 2012.
13. **Santos A., Bedrikovetsky P.** A stochastic model for particulate suspension flow in porous media, *Transport in Porous Media,* vol. 62, 2006, pp. 23-53.
14. **Yuan H., You Z., Shapiro A., Bedrikovetsky P.** Improved population balance model for straining-dominant deep bed filtration using network calculations, *Chemical Engineering Journal*, vol. 226, pp. 227–237, 2013.
15. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration, *Chemical Engineering Journal*, vol. 258, pp. 374-385, 2014.
16. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media, *Abstract and Applied Analysis,* vol. 2013, iss. "Mathematical and Computational Analyses of Flow and Transport Phenomena", 9 p., 2013.
17. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Particle transportation at the filter inlet, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2013, vol. 9, pp. 31-39.
18. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Matematicheskaya model dbizjeniya chastitc v filtre, – Problems of Applied Mathematics and Computational Mechanics, № 17, Moscow, MGSU, 2014, pp. 295-304.
19. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.** Flow of suspensions through porous media – application to deep filtration", *Industrial and Engineering Chemistry,* vol. 62, pp. 8-35, 1970.
20. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, vol.41, no. 5, pp. 556-564, 2007.

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20, tel. +7(499)2354402;
E-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994;
E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

STRESS STATE OF EARTH DAMS WITH ACCOUNT OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF SOIL AND WAVE REMOVAL OF ENERGY THROUGH THE FOUNDATION

Mirziyod M. Mirsaidov, Tohirjon Z. Sultanov
Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, UZBEKISTAN

ABSTRACT: A detailed review of the problem of wave removal of energy from the structure to the foundation is given in the paper. General statement, methods and algorithms of solution of different dynamic problems for heterogeneous viscous-elastic systems with account of non-reflecting conditions on the boundary of finite area of the foundation (the condition which ensures energy removal from the structure to the foundation in the form of a wave) are given. Viscous-elastic properties of soil of the structure and the foundation have been taken into consideration. The possibility to use non-reflecting conditions was shown on the example of tests problems. Results of the studies of steady-state forced vibrations for discussed problems have shown the possibility to use finite area of the foundation when non-reflecting conditions are absent on the boundary in exclusive cases only, when the frequency of external effect is different from artificial natural vibrations of discussed finite area; the use of non-reflecting conditions on the boundary of finite area allows to avoid an artificial resonance, unavailable in reality. Dynamic behavior and stress-strain state of earth dam was studied with account of viscous-elastic properties of material of the structure and the foundation with wave removal of energy through the boundaries of finite area of the foundation under two-component kinematic effects, applied to the foundation, and under explosive load, applied to the crest of the dam.

Keywords: earth dam, dynamic behavior, stress-strain state, finite area of the foundation, non-reflecting conditions, wave removal of energy, rheological properties of soil

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗЕМЛЯНЫХ ПЛОТИН С УЧЕТОМ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРУНТА И ВОЛНОВОЙ УНОС ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ОСНОВАНИЕ

М.М. Мирсаидов, Т.З. Султанов
Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, УЗБЕКИСТАН

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье достаточно подробно рассматривается унос энергии сооружения через основание. В частности, представлены общая постановка, методы и алгоритмы решения различных динамических задач для неоднородных вязко-упругих систем с учетом неотражающих условия на границе конечной области, занимаемой основанием. Изложение ведется с учетом вязко-упругих свойств соответствующего объекта. Возможность использования неотражающих условий показано на тестовых примерах.

Ключевые слова: земляная плотина, динамическое поведение, напряженно-деформированное состояние, конечная область фундамента, неотражающие условия, волновой унос энергии, реологические свойства грунта

INTRODUCTION

In study of soil - earth foundation interaction the model of Winkler's foundation is often used; which in spite of its simplicity in design does not allow to consider a number of physical effects, connected with inertia properties of earth foundation. The model of elastic half-

space lacks this shortcoming, but due to mathematical complexity does not allow to obtain an analytical solution in closed form, except for a number of particular problems.

In assessment of dynamic behavior together with above mentioned factors it is necessary to take into account wave removal of energy from the structure to infinite earth foundation. Solution of this problem becomes more complicated if to consider rheological properties as well (creeping and relaxation), permitting to account internal dissipation in material of the structure and foundation.

A lot of existing models, which account structure-foundation combined work, even in elastic cases do not describe dynamic process of energy removal into infinity. Therefore for infinite foundation in numeric calculations it is necessary to use non-reflecting boundary conditions on fictitious (artificial) borders of design area [1,2].

There is a sufficient number of works where it is offered to use non-reflecting conditions on the border of finite area of the foundation.

In [3,4] to substitute infinite area of the foundation by finite one it is suggested to use the conditions of viscous boundary (dampers) on the contour of finite area. Optimal value of viscosity coefficient was determined for the conditions of viscous boundary. The process of shear wave propagation in infinite area was studied. Vibrations attenuation, when installing wave barriers in the form of ditches and drainage, was revealed.

The method of exclusion of wave reflection from the contour of discussed finite area was offered with combination of Dirichlet and Neiman boundary conditions [5]. These conditions were chosen so as to completely exclude wave reflection.

In [6] conditions are used which account wave passing through area border in solution of plane problem on wave propagation from the stamp, located on the surface of half-space.

In [7,8,9] absorbing boundary conditions are offered, based on special approximations of scalar and vector wave equations. Further these conditions are developed for basic class of wave equations, but is it noted that they are realized with difficulty.

In [10] a problem is considered on axis-symmetrical vibrations of flexible ring, located on viscous-elastic layered foundation. For approximate solution of the problem a cylinder area is marked out under the ring; the borders of this area emit energy into surrounding medium. Damping properties of the system are analyzed under different frequencies of excitation.

The authors in [11] consider unsteady-state vibrations of subway tunnel under seismic effects. Infinite area is reduced to finite one by special condition on the contour.

The authors in [12] by finite elements method solve linear problem on interaction of Rayleigh's surface wave, propagating in sandy medium with rigid partially embedded structure. The authors discuss in details the problem of simulation of wave propagation through imaginary restricting contour.

In [13] vibrations, stress state and stability of foundation bases under machines are studied with the use of non-reflecting boundary conditions for finite area of the foundation. It is noted that vibration attenuation is caused by both energy absorption by soil and elastic waves withdrawal from the foundation to the base.

In [1,14-18], different one-dimensional, plane and axis-symmetrical dynamic problems for the structures with the base are solved with the use of non-reflecting boundary conditions on the border of finite area of the foundation (with account of wave removal of energy). Here different types of non-reflecting boundary conditions and viscous-elastic properties of material of the structure and the foundation are used.

In [19], radiation conditions for longitudinal and transversal waves in elastic foundation are used in solution of dynamic contact problems.

In [20], interaction of structures of nuclear power plant with the foundation is considered under seismic effects with non-reflecting boundary conditions in finite area of the foundation.

In [21] an efficiency of passive vibration insulation in viscous-elastic foundation under harmonic effect caused by passing subway trains is studied. The statement of the problem, solution methods and conditions of non-reflecting boundary, given in [1], are used in solution of this problem.

In [22] functional was built for numeric analysis of dissipative systems; it permits to account hysteresis in soil and energy emission in the foundation by elastic waves. Practical recommendations are given to account dynamic interaction of the foundation with rock mass.

Fundamental work [2] is devoted to the problem of statement of correct boundary conditions on artificial borders of design area, to mathematical substantiation, analysis and their efficiency in solution of concrete problems. A great number of published papers dealing with artificial boundary conditions have been analyzed.

In [23] for numeric simulation of the structures, interacting with the foundation under seismic effect on the border of heterogeneous soil massive of restricted dimensions, an absorbing boundary conditions are used. Essential influence of absorbing boundary condition on the change of stress-strain state of heterogeneous restricted soil massive is shown.

In [24] in solution of the problem on dynamic effect, the waves, reflected from lower border of conventionally marked out finite sub-area, are excluded. At such approach excluded part of the foundation is simulated by relatively simple system; its parameters are chosen from phenomenological properties of the foundation.

In [25] in evaluation of dynamic behavior of certain earth dams an aspect is discussed of necessity of exclusion of reflected waves from the border of finite area of the foundation; to do so some special conditions are used in solution of certain problems.

In [26] in development and formation of strain monitoring of engineering structures a design scheme “earth base - foundation - structure” is used with non-reflecting conditions on the border of finite area of the base.

In [27] artificial non-reflecting conditions on the border of design areas of the base are used for numeric simulation of impact interaction of the bodies with frozen soil.

In [28] solution of different dynamic problems for viscous-elastic systems “structure-base” is considered with account of non-reflecting conditions on the border of finite base. In study of steady-state forced vibrations, the possibility to use non-reflecting conditions, ensuring energy removal from the structure into infinity, was shown.

This is a review of only few works devoted to the problem of investigation of dynamic behavior of the structure together with the foundation, using artificial non-reflecting boundary conditions, ensuring energy removal into infinity in the form of a wave, on the border of finite area of the foundation.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Consider plane heterogeneous viscous-elastic system (structure + foundation + base), which consists of deformable body with volume $V=V_1+V_2+V_3+V_4$ and deformable half-space (Fig.1). Material of deformable heterogeneous body and half-space in general case is viscous-elastic one, that is, possesses rheological properties, while physical properties of their components differ from each other. On the border of division of the elements of the system the displacements, normal and tangential (to the surface of division) components of stresses are continuous. Considered structure is a massive one, so in calculations body forces $\vec{f}$ and different force effects, applied to arbitrary surface Σ_p are taken into account.

The problem consists in determination of dynamic behavior and stress-strain state of heterogeneous viscous-elastic system (structure + foundation + base) under different dynamic effects.

Discussed problems are set for finite area (Fig. 1) of volume $V+V_5$ (V_5 – is a volume cut out from half-space) and restricted by the surfaces

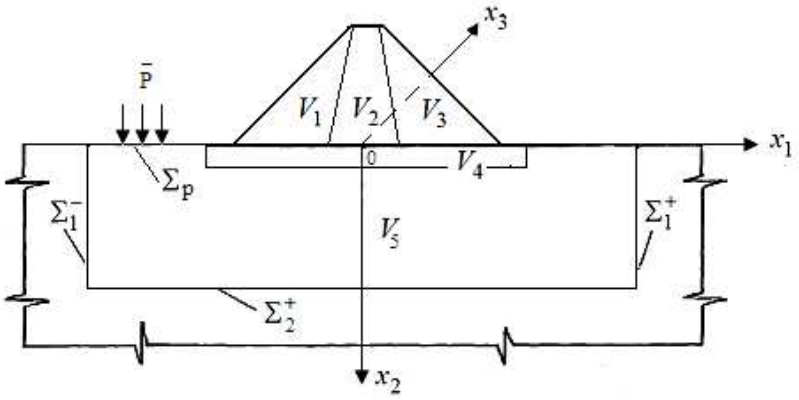


Figure 1. Design model of heterogeneous viscous-elastic system.

$\Sigma_1^- + \Sigma_1^+ + \Sigma_2^+$ with non-reflecting conditions on them.

To describe dynamic processes, occurring in the system (Fig.1) the principle of possible displacements is used; according to it the total of works of all active forces, including inertia forces, in possible displacements equals to zero:

$$\delta A = -\int\limits_{V+V_5} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int\limits_{V+V_5} \rho_n \ddot{\vec{u}}\delta\vec{u}\,dV + \\ + \int\limits_{\Sigma_1^-+\Sigma_1^+\Sigma_2^+} \sigma_{ij}\nu_j\delta\vec{u}d\Sigma + \int\limits_V \vec{f}\delta\vec{u}\,dV + \\ + \int\limits_{\Sigma_p} \vec{p}\delta\vec{u}\,d\Sigma = 0. \qquad (1)$$

In the statement of the problem the following aspect were used:

- to describe the connections between tensor of stresses σ_{ij} and tensor of strains ε_{ij} Boltzman-Volterra's linear hereditary theory of creeping is used [29]:

$$S_{ij} = 2G_n\left[e_{ij} - \int\limits_0^t \Gamma_{G_n}(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau\right],$$

$$\sigma = K_n\theta,\ \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii},\ S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}; \qquad (2)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij};\quad \theta = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii};\quad \delta_{ij} = \begin{cases}0, i \neq j\\ 1, i = j\end{cases};$$

$i, j = 1,2$,

- with A.R.Rjanitsin's kernel [30]

$$\Gamma_{G_n}(t) = Ae^{-\beta t}\,t^{\alpha-1};\ (0 < \alpha < 1), \qquad (3)$$

- Cauchy's correlations, connecting components of strain tensor ε_{ij} with components of displacements vector $\vec{u}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}0\right), \qquad (4)$$

- non-reflecting conditions [1,14]

$$\vec{x} \in \Sigma_1^{\pm}:\ \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \pm \frac{1}{\bar{c}_R}\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0;$$
$$\vec{x} \in \Sigma_2^{+}:\ u_i = 0. \qquad (5)$$

ensuring passing of Rayleigh waves through borders of finite area V_5 (5).

Here: $\vec{u}$, ε_{ij}, σ_{ij} – components of displacements vector $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$, tensors of strains and stresses, respectively; $\delta\vec{u}$, $\delta\varepsilon_{ij}$ – isochronic variations of displacements and strains; ρ_n – density of material of *n*-element of the system; $\vec{f}$ – vector of body forces; $\bar{p}$ – vector of external loads; ν_j – directing cosines of external normal; K_n, G_n – instantaneous modulus of volume and shear strains; S_{ij}, e_{ij} – components of deviator of stresses and strains;

σ – spherical part of stress tensor; θ – volume strain; Γ_{G_n} – kernels of relaxation; A,α,β – parameters of the core, determined from experiment; $\bar{c}_R$ – velocities of Rayleigh wave propagation in half-space (when considering viscous-elastic properties of base material these values are complex ones); δ_{ij} – Kronekker's symbol; n=1,2,3,4,5 – numeration of the element of the system; i,j=1,2; $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$.

Steady-state and unsteady-state forced vibrations of heterogeneous viscous-elastic system are considered (Fig.1). All discussed problems are solved by finite elements method (FEM) with subdividing the area $V+V_5$ in different types of finite elements. In solution of concrete problems subdivision of the area $V+V_5$ (Fig.1) in finite elements is carried out with account of specific features and physical-mechanical properties of material of different parts of the system.

2. METHODS AND ALGORITHMS OF SOLUTION OF THE PROBLEM

2.1. Steady-state forced vibrations

Under long-term harmonic effect initial conditions do not influence on the motion of the system. In this case dissipative properties of heterogeneous viscous-elastic system (Fig.1) become apparent mainly in resonant modes. Resonant amplitudes of displacements and stresses are used as quantity assessment of intensity of dissipation processes.

In consideration of the motion an application of the procedure of FEM reduces the problem to the solution of the system of algebraic equations with complex coefficients, that is:

$$\left(\left[\bar{K}\right] - i\Omega\left[\bar{C}\right] - \Omega^2\left[M\right]\right)\left\{\bar{u}\right\} = \left\{F\right\} + \left\{f\right\}. \quad (6)$$

Here: $[M]$ – is mass matrix; $\left[\bar{K}\right]$ – stiffness matrix and $\left[\bar{C}\right]$ – matrix, which accounts wave removal of energy through the border of finite area; Ω – given actual frequency of external effect; $\{\bar{u}\}$ – vector of sought for complex amplitudes; $\{f\}$ - amplitude vector of periodic effect; $\{F\}$ – total vector of external loads (body forces, hydro-static pressure, etc.).

When writing the equations (6) Volterra's integral operator in (2) is substituted by complex correlations [31,32], with infinite lower limit of the integral. Therefore the elements of the matrices $\left[\bar{K}\right]$, $\left[\bar{C}\right]$, that is, $\bar{k}_{ij}, \bar{c}_{ij}$ are complex values, which depend on Ω.

Algebraic equation (6) with complex coefficients is solved by Gauss method.

2.2. Unsteady-state forced vibrations

At short-term dynamic effects in heterogeneous viscous-elastic system (Fig.1) there appear unsteady-state forced vibrations; their study permits to determine maximal values of displacements and stresses in the structure during the whole process of the effect and to reveal the most stressed sections in the system with account of different parameters of material and structural features of the structure.

For this case discussed problem for the system (Fig.1) with the procedure of FEM is reduced to the solution of the system of linear integral-differential equations:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \quad (7)$$
$$= \{F\} + \{f(t)\} + \int_0^t \Gamma_{G_n}(t-\tau)[K]\{u(\tau)\}d\tau$$

with initial conditions

$$\{u(0)\} = \{u_0\}, \ \{\dot{u}(0)\} = \{v_0\}. \quad (8)$$

Here [M], [K] - are mass and stiffness matrices of the system; $[C]$- matrix, considering wave removal of energy; $\{u(t)\}$ - vector of sought for amplitudes of displacements; $\{f(t)\}$ - vector of dynamic load; $\{F\}$ - total vector of static loads (body forces, hydrostatic pressure, etc).

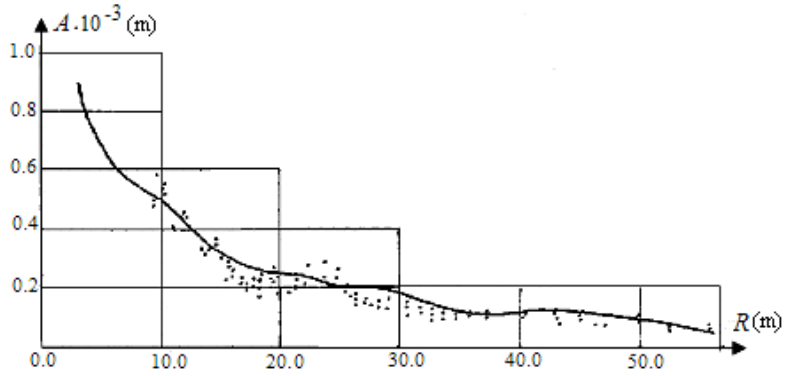


Figure 2. Vibration amplitude of half-space surface under vertical harmonic effect.

To solve the system of integral-differential equations (7) at initial conditions (8) the procedure of Newmark's method is used [33,34].

3. RESULTS OF INVESTIGATIONS

Problem 1. Solution of Lamb's axis-symmetric problem for elastic half-space with rigid round stamp, installed on the surface, which performs harmonic vibrations in vertical direction is studied. While solving the problem a finite axis-symmetrical area of V_5 volume is cut out from half-space; non-reflecting conditions (5) are set on the border of the area.

The following initial conditions have been used in solution of the problem [36]: the area of the stamp foot F=65.6m^2; amplitude of vertical vibrations of the stamp A=0.85x10^{-3} m; velocity of transversal waves propagation in soil c_2=100 m/s and ratio of the velocity of longitudinal waves to the one of transversal waves $c_1/c_2 \approx \sqrt{3}$.

Experimental data are given in [36], where wave propagation in soil from the base of a hammer is studied.

In figure 2 solid line indicates results of calculations obtained by worked out methods, and dotted line – experimental results [36]. It is seen that obtained theoretical results and experimental data [36] are rather similar to each other.

So, solution of Lamb's problem, obtained by the use of conditions of non-reflecting borders, classical solution [37], and results of experimental data [36] lead to similar results, which depend on volume V_5 of cylinder body.

Carried out studies in solution of axis-symmetrical lamb's problem for finite area v_5 show that at the absence on the boundary of finite area of conditions of non-reflecting borders, at the frequencies of external effects close to natural frequencies of finite-dimensional body v_5 leads to the resonance, which is not considered in discussed problem [17, 28].

Problem 2. Plane problem on dynamic behavior of earth dam together with foundation (Fig.1) with account of viscous-elastic properties of soil under non-stationary dynamic effect $P(t)$ in *kH,* changing according to the law and applied from the distance 25m from the footing of the dam is considered with the use of non-reflecting boundary conditions (5) on the border of finite area of the foundation:

$$P(t) = \begin{cases} 100000 & t = 0 \\ -250000t + 100000 \quad at & 0 \le t < 0.4\,\text{sek} \\ 0 & t \ge 0.4\,\text{sek} \end{cases} \tag{9}$$

The following parameters have been taken in calculations:

- for the dam: the height H=168.0 m, ratio of upstream and downstream slopes m_1=m_2=2.2 m; the width of the crest b=10.0 m; material properties: Young modulus E=3000.0 MPa;

Poisson's ratio ν=0.3; specific weight of soil γ =2.2 tf/m^3; parameters of the kernel of relaxation [32]: A=0.0146; α=0.2; β=0.0000057;
- for the foundation: Young modulus E= 3600.0 MPa; Poisson's ratio ν=0.3; specific weight of soil γ =2.8 tf/m^3; parameters of the kernel of relaxation [32]: A=0.034; α=0.25; β=0.00036.
Solution of the equation (7) at mentioned parameters has revealed that the waves originated as a result of applied load $P(t)$ create non-uniform field of displacements in the body of the dam. The beginning of the motion of each point corresponds to the time of approach to it the front of the wave, determined by the distance of the point from the location of applied load and by velocity of wave propagation in soil. So the beginning of displacements of dam crest corresponds to the moment t=0.36 sek. The zone near the footing of upstream slope and nearest to the location of applied load is subjected to the greatest strain at the beginning of the process. With the wave propagation at the absence of plastic strains the footing of the slope with time returns to its initial position.
Figure 3 shows isolines of distribution of horizontal displacements in the section of the dam at different moments of time. The wave from the source located in relative closeness to the footing of the dam, propagating along the foundation, first causes the displacement of the footing of upstream slope (Fig.3*a*), and then with time covers more distant areas of the structure (Fig.3*b,c,d*).

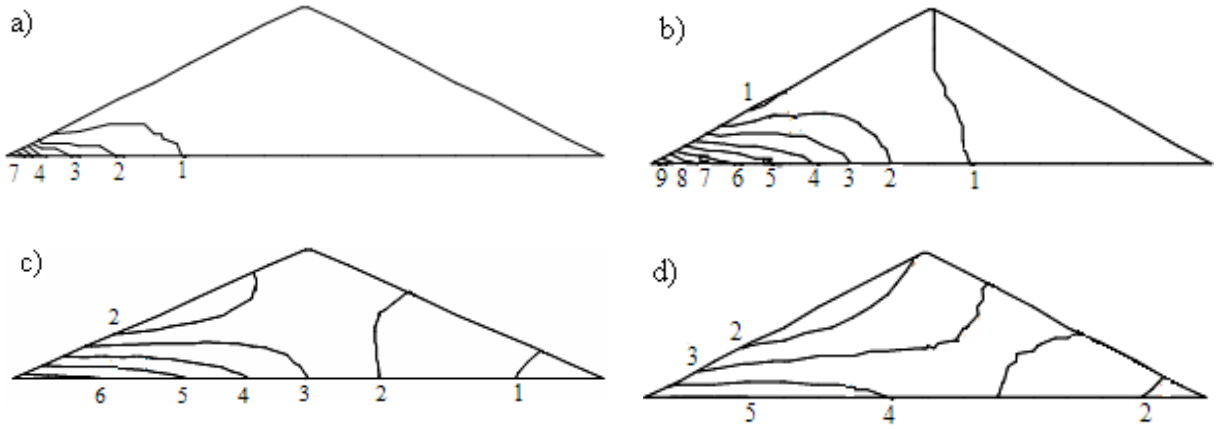


Figure 3. Isolines of distribution of horizontal displacements (m) in dam section at different moments of time t: (a) – 0.2sec; (b) – 0.32sec; (c) – 0.52sec; (d) – 0.60sec.

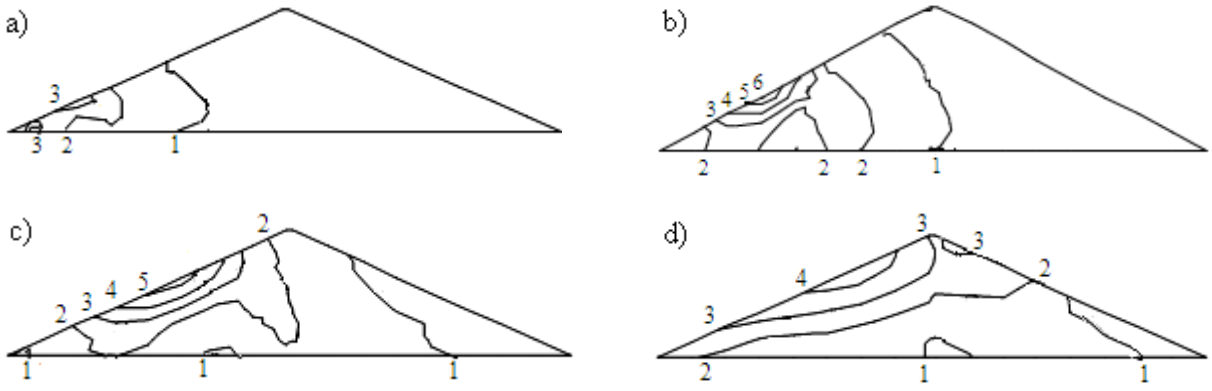


Figure 4. Isolines of distribution of principal stresses σ_1 in dam sections at different moments of time t: (a) – 0.2sec; (b) – 0.32sec; (c) – 0.52sec and (d) – 0.60sec.

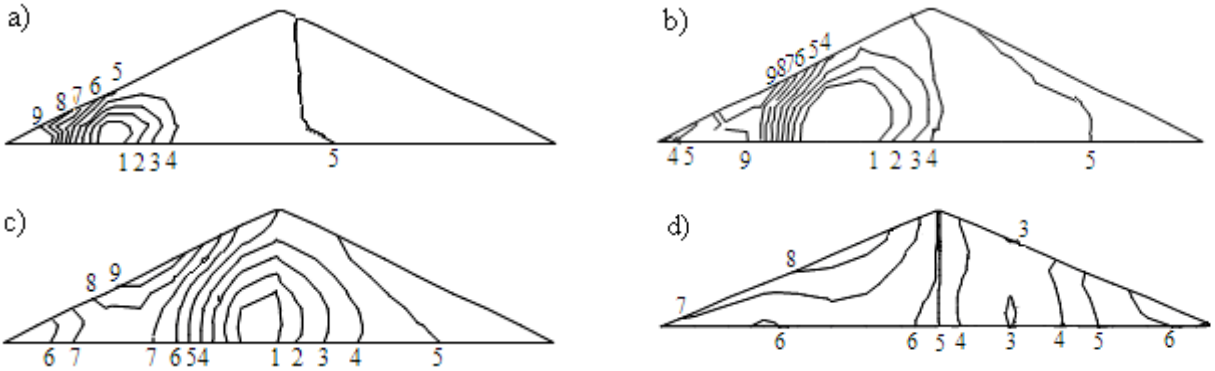


Figure 5. Isolines of distribution of tangential stresses σ_{12} in dam section at different moments of time t: (a) – 0.2sec; (b) – 0.32sec; (c) – 0.52sec and (d) – 0.60sec.

Here lower area of upstream slope restricted by the isoline «1», as a result of wave diffraction on foundation-slope joint remains immovable. Isoline with the same index on the downstream slope (Fig.3*b*) corresponds to position of wave front with unexcited (at the moment t=0.46 sec) area of the dam (right part of the figure) before it. At the next moments excitation from the load $P(t)$ completely envelops the body of the dam and distribution of horizontal displacements is presented by isolines in Fig. 3*a-d*. After passing of the wave strain state of the dam gradually stabilizes due to viscous properties in soil.

The values of horizontal displacements in isolines (Fig.3) are increasing with regular intervals from 0.005*m* to 0.0*m* – on isoline «1». maximal displacements are 0.042*m* and are observed in the area, restricted by the line with index «9».

Stress state of the dam presented by principal stresses σ_1 at different moments of time: at the beginning, in the middle and at the end of the process is shown in Figure 4. Stress dimension is MPa.

At the beginning of the process the lower part of upstream slope is strained; there occurs the zone of tension with positive stresses σ_1 (line «2» in Fig. 4*a*), which later with wave passing propagates upward along the slope (Fig.4*b,c*) and covers the whole internal area of the dam (Fig.4*c,d*).

The value of the stresses σ_1 in isolines (Fig.4.) is changing with equal step 0.05MPa: from 0.0 MPa – line «1» to 0.3MPa – line «6».

Maximal tangential stresses (σ_{12}) appear on the surface of upstream slope (Fig.5): first – at its footing, then along the whole height, which is fraught with the possibility to originate a landslide on the slope (Fig.5). Stress value σ_{12} in isolines (Fig.5) changes with the step ±0.025 MPa from 0.0 MPa in line «5» to ±0.1 MPa in lines «1» and «9».

Problem 3. Plane problem on dynamic behavior of earth dam (Fig.1) together with the foundation is considered with account of non-reflecting conditions (5) and viscous-elastic properties of soil under kinematic effect of acceleration, applied to the location $\vec{x} \in \Sigma_2^+$: horizontal

$$\{\ddot{u}_{10}(t)\} = \begin{cases} a\sin(2\pi pt), & 0 < t \le t^* \\ 0, & t^* > t \end{cases} \qquad (10)$$

vertical

$$\{\ddot{u}_{20}(t)\} = \begin{cases} b\sin(2\pi pt), & 0 < t \le t^* \\ 0, & t^* > t \end{cases} \qquad (11)$$

Displacement of different points of the dam in time was determined under these kinematic

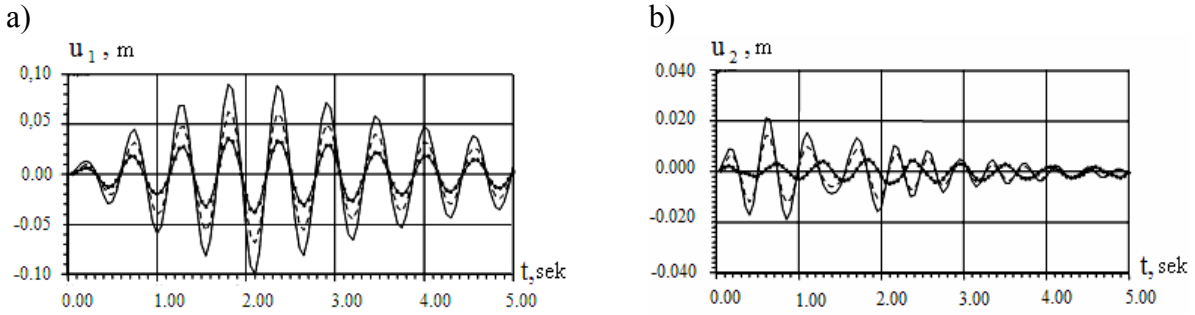


Figure 6. Changes in time of horizontal (a) and vertical (b) displacements in different points of the dam, obtained under the effect (10)-(11) with frequency $p \approx \omega_1$ and $t^* = 2$ sec with account of wave removal of energy and elastic properties of soil.

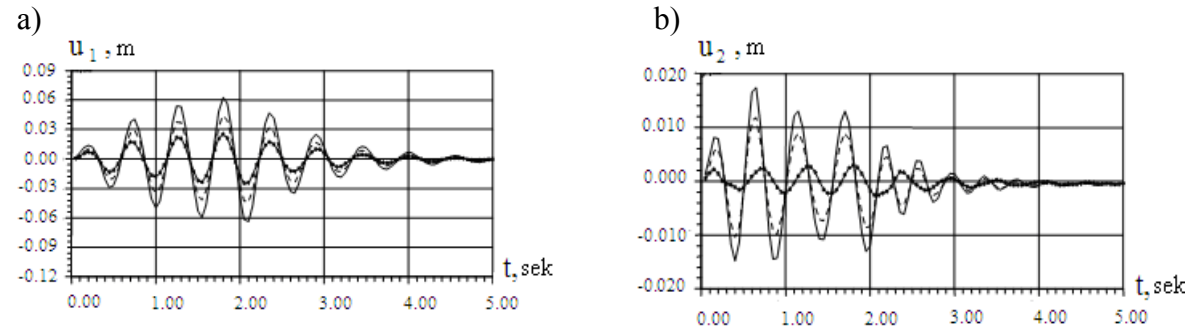


Figure 7. Changes in time of horizontal (a) and vertical (b) displacements in different points of the dam, obtained under the effect (10)-(11) with frequency $p \approx \omega_1$ and $t^* = 2$ sec with account of wave removal of energy and viscous-elastic properties of soil.

effects with frequency equal to the principal frequency of natural vibrations of the structure (that is, $p \approx \omega_1$ in resonant mode of vibrations). Parameters of kinematic effect were taken as equal to: a=0.1g; b=0.1g; g=9.8m/s^2; time of effect t^*=2 sec.

This problem is considered for the dam, built of local material – an earth-fill one with central core of loamy soil and side retaining prisms of sand-pebbles. Its height is H=70 m, the length along the crest – 589 m, width – 8.0 m. Dam slopes: upstream m_1=2.25, downstream m_2=2.25.

Graphs given below show displacements for three points of the dam (for the points on the crest with coordinates x_1=0; x_2=H, line —— ; for the points in core center with coordinates x_1=0; x_2=H/2, line - - - ; and for the points in mid-surface of upstream slope with coordinates x_1=-H/2*m_1; x_2 =H/2, line *-*-*-) under the effect (10)-(11) with frequency $p \approx \omega_1$ (the first resonant frequency) and t^*=2 sec, with account of wave removal of energy and with/without viscous-elastic properties of soil.

When considering results of calculation it is necessary to remember that the origin of coordinate system is chosen in the base of the core, axis $x1$ is directed towards downstream slope, and axis $x2$ – vertically – along the symmetry of the structure.

Figure 6 gives the changes in time of horizontal - u1 (Fig.6a) and vertical - u2 (Fig.6b) displacements for above mentioned points of the dam, obtained under the effect (10)-(11) with frequency $p \approx \omega_1$ (the first resonant frequency) and t^*=2 sec, with account of wave removal of energy and with account of only elastic properties of soil of the structure and the foundation, and Figure 7 – with wave removal

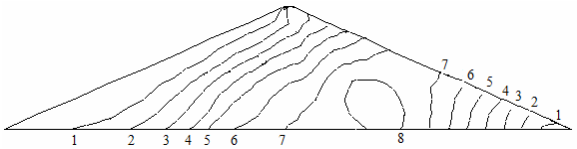


Figure 8. Isolines of distribution of principal stresses σ_1 in dam section in resonant mode of vibration ($p \approx \omega_1$) under kinematic effect (10)-(11) after the termination of the effect at t=2.1 sec, obtained for elastic system with wave removal of energy.

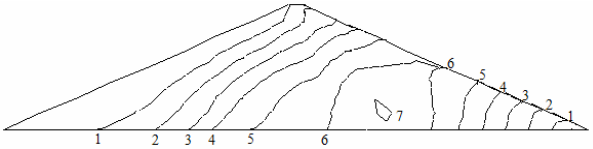


Figure 9. Isolines of distribution of principal stresses σ_1 in dam section in resonant mode of vibration ($p \approx \omega_1$) under kinematic effect (10)-(11) after the termination of the effect at t=2.1 sec, obtained for viscous-elastic system with wave removal of energy.

of energy and viscous-elastic properties of soil of the structure and the foundation.

Analysis of results (Fig.6) shows that with account of only elastic properties of soil of discussed system (Fig.1), an account of wave removal of energy from the structure to the foundation ensures certain damping of vibration, usually not considered in an assessment of behavior under dynamic modes of structure operation. When considering viscous-elastic properties of soil of the system material (Fig.1) and with account of wave removal of energy, an essential effect of energy dissipation in structure could be achieved (Fig.7).

In isolines (Figures 8-9) the value of principal stresses σ1 have the following values: «1»-0.008 MPa; «2» - 0.16 MPa; «3» - 0.24 MPa; «4» - 0.32 MPa; «5» - 0.40 MPa; «6» - 0.481 MPa; «7» - 0.561 MPa; «8» - 0.641 MPa; «9» - 0.721MPa.

Analyzing the results given in (Figures 8 and 9), it is seen that at t=2.1 sec, according to the graph of displacements (Fig.6), horizontal displacements have a negative maximum, that is, the dam is deviated towards water reservoir.

Therefore, for elastic system (fig.1) with account of only wave removal of energy in central part of downstream slope of the dam (Fig.8) there appears a considerable principal stress with positive sign (0.641MPa). When viscous-elastic properties of system material are considered as well (Fig.1), the values of principal stresses are reduced down to the value 0.561MPa (Fig.9).

4. CONCLUSION

1. Statement, methods and algorithms for the assessment of dynamic behavior of the structure together with the foundation are worked out with account of non-reflecting conditions on the border of finite area of the foundation and viscous-elastic properties of material.

2. Solution of model problems has shown that the use of non-reflecting conditions on the border of the area of the foundation permits to avoid inexistent resonances under forced vibrations of artificially restricted finite area of the foundation.

3. Study of dynamic behavior of the structure together with the foundation with non-reflecting boundary conditions on the border of finite area of the foundation under short-term intensive effect has shown that:

- maximal principal stresses σ_1, appearing in the lower part of upstream slope gradually propagate over the whole slope and central part of the dam;
- maximal principal stresses σ_2 are reached near the footing of the dam and during wave propagation they are displaced along the foundation directly behind the wave front;
- maximal values of tangential stresses σ_{12} are reached on the surface of upstream slope, first at the footing of the dam and then along the whole surface of the slope. The center of the dam is free from tangential stresses;
-during wave propagation in dam a symmetric pattern of stress state is disturbed (caused by static effect of gravitation forces); and

asynchronous motion of its parts occurs, which then attenuates due to wave removal of energy and viscous-elastic properties of system material.

REFERENCES

1. **Mirsaidov M.M., Troyanovskiy I.E.** Dynamics of inhomogeneous systems with account of internal dissipation and wave transfer of energy. Tashkent, FAN, 1990 (*in Russian*). 108p.
2. **Ilgamov M.A., Gilmanov A.N.** Non-reflective conditions on borders of computational region. Moscow, Fizmatlit, 2003 (*in Russian*). 240p.
3. **Lysmer J.M., Kuhlemeyer R.** Finite dynamic model for infinite media. J. Engineering Mechanics Division, ASCE, EM-95, 1969. No 4. Pp. 859-877.
4. **Lysmer J.M., Waas G.** Shear waves in plane infinite structures. J. Engineering Mechanics Division, ASCE, EM1, 1972. Vol.28. Pp. 85-105.
5. **Smith W.** A non reflecting plane boundary for wave propagation problems. J. Computational Physics, 1974. Vol.15. Pp. 492-503.
6. **Turov V.P.** On the reduction of the problem of propagation of elastic waves in an infinite domain to the one for finite size. Strength of materials and structural theory. Kiyev, 1976. Vol.28. Pp.186-191.
7. **Clayton R., Engquist B.** Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. Bulletin of Seismological Society of America, 1977. Vol.67. No 6. Pp. 1529-1540.
8. **Clayton R., Engquist B.** Absorbing boundary conditions for wave equation migration. J. Geophys, 1980. Vol.45. Pp.895-904.
9. **Engquist B., Majda A.** Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. J. Communication in Pure and Appl. Mathematics, 1979. Vol. 32. Pp. 313-357.
10. **El-Shafee O.M., Could.** Dynamic axis-symmetric soil model for a flexible ring footing. Earthquake Eng. and Struct. Dyn., 1980. Vol. 8. No 5. Pp. 419-491.
11. **Hwang N., Lysmer J.** Response of buried structures to travelling waves. J. Geotechnical Engineering Division, 1981. GT. 2. Pp. 183-200.
12. **Fedock J., Schreyer H.** Effect of earth media on the seismic motion of embedded rigid structures. Earthquake Eng. and Struct. Dyn., 1981. Vol.9. No 4. Pp. 311-327.
13. **Krasnikov N.D., Savinov Shch.F., Tolkachev G.S., Eychler L.A.** Experimentally-calculation method of researches of oscillations, stress state and stability of foundations under cars. Moscow, Stroitelstvo, 1981 (*in Russian*). No 5. Pp.7-21.
14. **Mirsaidov M.M., Troyanovskiy I.E.** Wave problem of seismic stability of structures at Rayleigh waves propagation in elastic half-space. Izv. AN RUz, Tashkent, 1980. No 5. Pp.48-51.
15. **Mirsaidov M.M., Salyamova K.D., Troyanovskiy I.E.** Longitudinal oscillations of an inhomogeneous semi-infinite elastic rod. Boundary value problems of mechanics of continua. FAN, Tashkent, 1982. Pp. 161-169.
16. **Mirsaidov M.M.** Solution of applied problems of vibration taking into account internal and wave dissipation. Materials of VI All-Union conference on dynamics of subfoundation and underground structures "DOF-85". Leningrad, 1985. Pp. 94-97.
17. **Mirsaidov M.M.** FEM solution of Lamb's problem using the radiation condition. Mechanics of deformable solid body. Tomsk, Russia, 1987. Pp. 126-131.
18. **Matkarimov P.Zh., Mirsaidov M.M.** The study of forced oscillations of an inhomogeneous plane system with the passive vibration isolation. Uzbek Journal

Problems of Mechanics, 1996. No 1-2. Pp.23-27.
19. **Seymov V.M., Ostroverkh B.N., Yermolenko Ye.I.** Dynamics and seismic stability of hydraulic structures. Kiyev, Naukova dumka, 1983 (*in Russian*). 318p.
20. **Tyapin A.G.** Interaction of nuclear power plants with a base under seismic loads. Doctoral dissertation. Moscow, 1995. 328p.
21. **Ilichev, Yuldashev V.A., Matkarimov P.Zh.** The study of forced oscillations of an inhomogeneous plane system with the passive vibration isolation. Bases, Foundations and Soil Mechanics, 1999. No 2. Pp.9-11.
22. **Doktorova A.O.** The development of methods account for the interaction with the base of the foundation to evaluate the seismic stability of structures. PhD thesis. Sankt-Petersburg, Russia, 2002. 169p.
23. **Mishin D.V.** Evaluation of stress-strain state of the foundations and soil structures under static and seismic loads. PhD thesis. Sankt-Petersburg, Russia, 2004. 130p.
24. **Freza M.V.** Interaction of the metal goffered constructions with the soil environment. PhD thesis. Sankt-Petersburg, Russia, 2006. 162p.
25. **Gui Meen-Wah, Chiu Hsien-Te.** Seismic response of Renyitan earth-fill dam. Journal of Geo-Engineering, 2009. Vol.4. No 2. Pp.41-50.
26. **Tsvetkov R.V.** Design and creation of the deformation monitoring of engineering structures in the karst area. PhD thesis. Perm, Russian Federation, 2011. 119p.
27. **Poverennov Ye.Yu.** Numerical simulation of shock interaction of bodies with frozen ground with the use of quasi-uniform grids. PhD thesis. Nizhniy Novgorod, 2012. 90p.
28. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.** An assessment of dynamic behavior of the system "structure foundation" with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering, 2013. Vol.39. No 4. Pp.94-105.
29. **Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.** Basis of mathematical theory of thermal-viscous-elastisity. Moscow, Nauka, 1970 (*in Russian*). 280 p.
30. **Rjanitsin A.R.** Creep theory. Moscow, Stroyizdat, 1968 (*in Russian*). 416p.
31. **Filatov A.N.** Asymptotic methods and the theory of differential and integral differential equations. Tashkent, FAN, 1974 (*in Russian*). 216p.
32. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.** Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earth structures. New York, Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2012. No 6. Pp.30-34.
33. **Bate K., Wilson E.** Numeric Methods of Analysis and the Method of Finite Elements. Stroyizdat, Moscow, 1982 (*in Russian*). 448p.
34. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A.** Simulation of dynamic processes in heterogeneous viscous-elastic system. Electronic simulation, Kiyev, 2012. Vol.34. No 6. Pp. 41-54.
35. **Badalov F.B.** Methods of solution of integral and integral-differential equations of hereditary theory of viscous-elasticity. Tashkent, Mekhnat, 1987 (*in Russian*). 269p.
36. **Barkan D.D.** Dynamics of bases and foundations. Moscow, Stroyvoenizdat, 1948 (*in Russian*). 441p.
37. **Novatskiy V.** Theory of elasticity. Moscow, Mir, 1975 (*in Russian*). 282p.

Mirsaidov Mirziyod Mirsaidovich, doctor of technical sciences, professor, head of the faculty „Theoretical and engineering mechanics" Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, 39, Qori-Niyoziy st., Tashkent, 100 000, Uzbekistan; E-mail: theormir@mail.ru

Sultanov Tohirjon Zokirovich, candidate of technical sciences, associate professor, vice-rector of scientific researches Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, 39, Qori-Niyoziy st., Tashkent, 100 000, Uzbekistan; E-mail: tohir-zs@mail.ru

THE ALGORITHM FOR NONLINEAR INELASTIC OPTIMIZATION OF 3D STEEL FRAMEWORKS UNDER SERVICEABILITY REQUIREMENTS

Michail Popov, Romanas Karkauskas, Liudvikas Rimkus
Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, LITHUANIA

ABSTRACT: An actual design of 3D steel frames structures must evaluate strength, stiffness and stability constraints (serviceability requirements) as well as nature of external loading. A design structure must satisfy optimality and safety criterions. An algorithm to solve optimization problem, incorporating all above described criterions, taking into account the geometrically non-linear structural behaviour, is presented for the 3D frame structures. The internal forces of each optimization cycle are obtaining in the previous optimization cycle via elastic-plastic nonlinear analysis procedure. Obtained forces are employing to obtain the new optimal design values. The nodal displacements are restricted during the optimization procedures to limited magnitudes in prescribed directions. The numerical experiment of the two-storeyed 3D steel frame designing by the standard steel profiles cross-section optimization problem was performed to show possibilities of suggesting solution algorithm.

Key words: optimization, stiffness and stability constraints, tangent stiffness matrix; elastic-plastic analysis; displacement bounds.

АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕУПРУГОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТАЛЬНЫХ КАРКАСОВ С УЧЕТОМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ТРЕБОВАНИЙ

М. Попов, Р. Каркаускас, Л. Римкус
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, г. Вильнюс, ЛИТВА

АННОТАЦИЯ: При проектировании пространственных стальных резервуаров выполняются оценки прочности, жесткости и устойчивости при различных вариантах нагружения с учетом эксплуатационных требований. Необходимо удовлетворить соответствующим критериям оптимальности и безопасности. В настоящей статье представлен алгоритм решения задач оптимизации с учетом перечисленных выше критериев, а также нелинейного поведения пространственной стальной стержневой конструкции.

Ключевые слова: оптимизация, жесткость, устойчивость, ограничение по условию устойчивости, ограничение по условию жесткости, матрица касательной жесткости, упруго-пластический расчет

1. INTRODUCTION

The main goal of structure's optimization problem is to obtain project, which satisfy safety, serviceability conditions and design requirements from various external actions and loads. It can be provided by having comprehensive information about building structure behaviour in all work conditions and any moment of existence period. Optimization problem in such broad concept cannot be solved by linear theory methods of structural mechanics. Structure form and size is considerably varying under certain loads and

small displacement principle become unreliable. In addition, Hook's law is not satisfying and should be substituted by nonlinear relation for many materials, starting from certain stress condition level. It is necessary to renounce linear theory assumptions and use much more broader and complicated nonlinear theory generalizations. At first it is necessary to renounce calculation by unstrained structure's condition tolerating small displacements. Secondly, to obtain structure form and geometry variation influence on its deflected mode. Thirdly, to take on the nonlinear stressed-deformed relation and to estimate appearing plastic deformations, because large displacements are obtaining in certain material structures before plastic collapse and do not satisfy regular service requirements. Thereby these above mentioned causes should be estimated composing structure's optimization problems mathematical models.

Building structures optimization theory, methods, calculating algorithms and its' integration into modern computer simulation technique and automated design systems were rather intensive developing for the last thirty years [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. It should be noted that at the present time appeared works where used genetic algorithms, based on biological principles introduction in computer technologies of structures optimization problems realizations [8], [9], [10], [11]. Attractive features of these algorithms is its compatibility with discrete optimization and it is not require function derivatives disliked by structural engineers, which is broad using in classical optimization methods.

Analysis of performed works allows to predicate, that structure optimization technique simultaneously applying mathematical programming theory, extreme energy principles and material inelastic features is one of efficient techniques [5], [6], [13], [14], [15]. Here material plastic feature estimation is more exactly reveals structure behaviour in various load steps and allow produce considerably efficient project [4], [5], [14], [15], [16], [17]. It is worth to mention, that majority of works based on limit equilibrium theory assumptions [5], [6]. Obtained optimal structure projects for this reason satisfying only strength condition, satisfied by safety condition. It is essential to note that optimization results according to plastic collapse criterion is not always decisive, because optimal structure limit condition state can be fail even not obtaining plastic collapse through overestimated inelastic deflections, and it leading displacements occurring. In addition optimization problem boundary conditions are ordinary formulating does not considering codes of structural design requirements [18], [19] therefore optimal structure stiffness does not provide real structure behaviour.

Abovementioned causes bounds practical usage of limit equilibrium theory in optimal structures projects preparation. Thereby, structure deflected mode parameters estimation is necessary in optimization problems mathematical models. Deformability bounds define displacements bounds of frame nodes or single parts. Design constraints define minimal cross-sections parameters. Structures optimization allowing all these requirements and steel inelastic behaviour is one of the major optimal design problems.

Purposes of this work are:

- To formulate mathematical model for elastic-plastic geometrically nonlinear structures optimization problem;
- To suggest original algorithm for optimization problem solution;
- To develop frame element's tangent stiffness matrix composition technique;
- To solve structure's optimization problem subject to displacements boundary conditions enabling to control spread of the free plastic deformations;
- To improve efficiency of suggesting solution algorithm by numerical experiment

2. THE MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION PROBLEM

The objective of any structure optimization problem is to find optimal structure element's cross-sections areas A_k^{min} distribution by k elements groups when structure geometry and external actions are known. The optimal criterion of such optimization problem is the minimum of the structure's volume. Forasmuch in this work investigating elastic-plastic structure, so optimal criterion should be satisfied when plastic deformations are spreading at least in one structure's element. Serviceability requirements of the considering optimization problem should to include first of all conditions which establish structure's real stress-strain state and deflected mode. Such conditions are defining by using generalized Lagrange method dependences ([5]). Second, stiffness conditions should include displacements boundaries in certain structure's nodes by defined directions: $\boldsymbol{u}_t^- \le \boldsymbol{u}_t \le \boldsymbol{u}_t^+$ ($\boldsymbol{u}_t^-$ and $\boldsymbol{u}_t^+$ are the codified prescribed lower and upper displacements variation bounds in t direction respectively). In addition processing of design boundaries for elements stability or lower variation limits $\boldsymbol{S}_0^{min}$ of internal forces factors can be also used besides mentioned requisite conditions. All it bounds free distribution of inelastic deformations in structure's elements. Therefore elastic and plastic deformations depend on residual internal forces $\boldsymbol{S}_r$ and residual displacements $\boldsymbol{u}_r$ appearing in optimal cross-sections of structure's elements. Structure is not reaches plastic collapse, if any of abovementioned boundaries become active.

In such way formed optimization problem mathematical model is writing ([5]):

find

$$V\left(A_k\right) \to min,$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\left(A_k\right)\right) \le 1,\\
&\left[A_n\right]\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{F} - \left[A_n\right]\boldsymbol{S}_e,\\
&\left[D_n\right]\boldsymbol{S}_r - \left[A_n\right]^T \boldsymbol{u}_r + \\
&\quad\left[\nabla^T \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\left(A_k\right)\right)\right]\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\lambda}^T\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\left(A_k\right)\right)\right) = \boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{u}_t^- \le \boldsymbol{u}_{e,t} + \boldsymbol{u}_{r,t} \le \boldsymbol{u}_t^+,\\
&\boldsymbol{S}_0\left(A_k\right) \ge \boldsymbol{S}_0^{min}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0},\\
&k = 1, 2, ..., s.
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\left[D_n\right]$ is structure's flexibility matrix considering variations in the geometry of the structure; $\left[A_n\right]$ is matrix of coefficients of equilibrium condition considering variations in the geometry of the structure; $\boldsymbol{F}$ is the vector of external forces applied to discrete model nodes of the structure; $\boldsymbol{\lambda}$ is the vector of Lagrange multipliers; $\boldsymbol{S}_e$ is the vector of elastic response internal forces; $\boldsymbol{u}_e$ is the vector of elastic response displacements; $\boldsymbol{S}_0^{min}$ is the vector of prescribed lower carrying capacity bounds of structure's elements cross-sections.

It is nonlinear mathematical programming problem which direct solving is rather complicated. Reason of complication is Kuhn-Tucker complementarity conditions, i.e. equations $\boldsymbol{\lambda}^T\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\right)\right) = \boldsymbol{0}$.

To avoid mentioned complications authors suggest splitting problem solution in three stages:

1. Nonlinear elastic analysis;
2. Elastic-plastic nonlinear analysis;
3. Structure cross-section optimization.

Further detailed explanation of suggesting algorithm stages is presented.

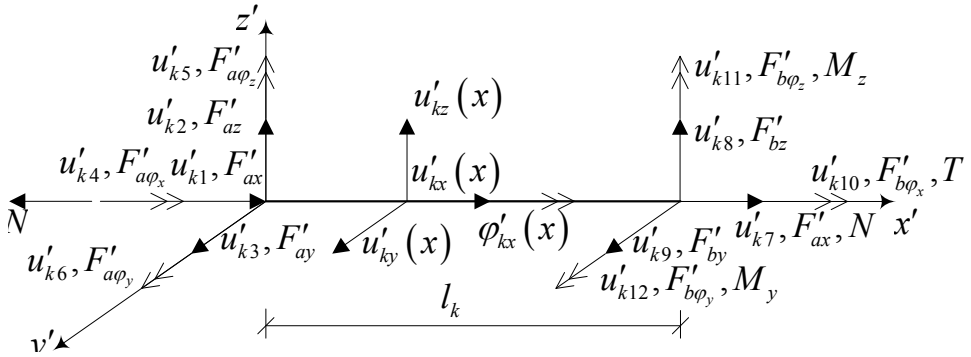


Figure 1. Internal forces and displacements of the space frame finite element in the local x'y'z' coordinate system.

3. THE NONLINEAR ELASTIC ANALYSIS

The structure's nonlinear elastic analysis is the first stage of the suggesting algorithm. The structure's behaviour is describing in nonlinear way, when large displacements are investigating in the loaded structure. Thus nonlinear members appear in displacements dependencies. The tangent stiffness method is applied to solve main equation of the elastic computation nonlinear analysis:

$$\left[K_\tau\right]\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

where $\left[K_\tau\right]$ is the structure's global tangent stiffness matrix.

Results of the problem (2) is $\boldsymbol{u}_e$ and $\boldsymbol{S}_e$. First stage problem is solving in optimization problem iterative cycle, when cross-sections areas A and axial inertia moments I dependencies on cross-sections are specified. To solve equation (2) structure's tangent stiffness matrix should be evaluated. Structure's small displacements (elastic) stiffness matrix is usually presented in literature ([20], [21]), but full expression of the tangent stiffness matrix is usually skipped.

Short review of tangent stiffness matrix $\left[K_\tau\right]$ obtaining technology for 3D beam-column element (Figure 1) is presented in [24].

Authors made symbolic calculations by using MATLAB Symbolic Math Toolbox to obtain space frame element's tangent stiffness matrix expression.

Newton-Raphson force control method is used for numerical realization of the tangent stiffness method nonlinear equations system (2) solution. These method mathematical calculation procedures are often presented in the literature which is observing numerical methods ([25], [26]). Application of this method to obtain values of elastic calculation nonlinear analysis is more widely presented in [23] work.

4. THE ELASTIC-PLASTIC NONLINEAR ANALYSIS

It is the second stage of suggesting optimization problem solution algorithm. The formation and solution features of such problem are more widely presented in the work [24].

find

$$\begin{aligned}\max\ & -\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_r^T\left[D_n\right]\boldsymbol{S}_r - \boldsymbol{S}_r^T\left[D_n\right]\boldsymbol{S}_e - \\ & \boldsymbol{\lambda}^T\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\right)\right) + \boldsymbol{u}_r^T\boldsymbol{F} - \\ & \boldsymbol{\lambda}^T\left[\nabla\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\right)\right]\left(\boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_r\right),\end{aligned} \tag{3}$$

subject to

$$\begin{aligned}&\left[D_n\right]\boldsymbol{S}_r - \left[A_n\right]^T\boldsymbol{u}_r + \\ &\left[\nabla^T\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\right)\right]\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

The problem (3) is the convex nonlinear mathematical programming problem, which main unknowns are $\boldsymbol{S}_r$, $\boldsymbol{u}_r$ and $\boldsymbol{\lambda}$ vectors. First two vectors allow to obtain real internal forces $\boldsymbol{S}$ and displacements $\boldsymbol{u}$. Lagrange multipliers $\boldsymbol{\lambda}$ vector allow to obtain structure's cuts, in which plastic deformations occurs.

5. STRENGTH CONDITIONS

For the 3D structures it is significant to use strength conditions including not only tension-compression strength, but also the strength of the structural element, bending about both axes, as well. Strength condition for a complex stress-strain state is usually given in the design codes and specifications regulating the design of building structures ([18], [19], [22]). But as reveals work [24] usage of codes specification's strength conditions gives results strongly inaccurate from the real stress-strain state.
Though the strength conditions are provided by the design codes and specifications, the efforts of various researchers were made to accurately reflect a complex state of strains. The example is the Orbison's full plastification surface of cross-section ([12]), which grafical view is presented in Figure 2 and described as follows:

$$1 \geq 1{,}15 p_j^2 + m_{y,j}^2 + m_{z,j}^4 + 3{,}67 p_j^2 m_{y,j}^2 + 3{,}0 p_j^6 m_{z,j}^2 + 4{,}65 m_{y,j}^4 m_{z,j}^2, \quad (4)$$

where $p_j = P_j / P_{y,j}$; $m_{y,j} = M_{y,j} / M_{py,j}$ (a „strong" element cross-section axis (Figure 2)); $m_{z,j} = M_{z,j} / M_{pz,j}$ (a „weak" element cross-section axis (Figure 2)); P_j is an axial force applied to the element of the structure at the *j*-th cut and $P_{y,j}$ is the limiting axial force for tension or compression at the *j*-th cut; $M_{y,j}$ and $M_{py,j}$ are the bending moment and the limiting bending moment about the cross-section's "strong axis" at the structural element's *j*-th cut; $M_{z,j}$ and $M_{pz,j}$ are the bending moment and the limiting bending moment about the cross-section's "weak axis" at the structural element's *j*-th cut.

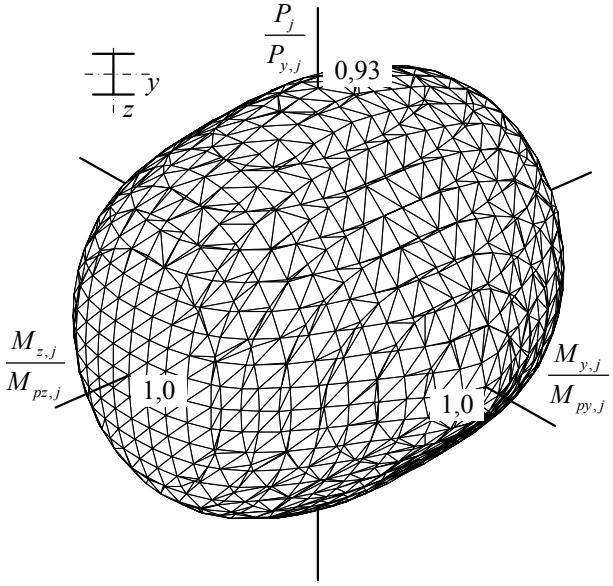


Figure 2. The full plastification surface according to the Orbison's strength conditions.

Local elements' stability is checking by formula (4) when the compression members are loaded up to their critical forces values. Critical forces values for two axes of cross-section can be obtained by specifications' regulating the design of building structures requirements ([18], [22]).
Global structure's stability is checking by calculating determinant of all structure's tangent stiffness matrix $[K_\tau]$ at first stage's Newton-Raphson force control method last iteration.

6. THE STRUCTURE CROSS-SECTIONS OPTIMIZATION PROBLEM

It is the third stage of suggesting algorithm. At this stage obtaining new optimal projecting parameters (areas of cross-sections) by using information of the real structure's deflected mode and stress-strain state. Third stage optimization problem mathematical model is writing:

find

$$V\left(A_k\right) \to min,$$

subject to

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\left(A_k\right)\right) \le 1, \\ &u_t^- \le u_t \le u_t^+, A_k \ge A_k^{min}, \\ &t = 1,2,...,m_t, k = 1,2,...,s. \end{aligned} \tag{5}$$

where A_k^{min} is the lower bound of design requirements. Optimization problem (5) is nonlinear convex mathematical programming problem having global extremum ([23]).

For the (5) problem displacements boundary conditions it is worth to obtain real structure displacements for displacements boundaries. It can be obtained by using formula:

$$u_t = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{u}_{t,k} \left[\tilde{k}_{\tau,k}\right] \overline{\boldsymbol{u}}_{t,k} \tag{6}$$

where $\boldsymbol{u}_{t,k}$ is nonlinear elastic-plastic analysis element's nodal real displacements in *t* direction vector from specified external load, obtaining by solving (3); $\left[\tilde{k}_{\tau,k}\right]$ is the element tangent stiffness matrix, combining required cross-sections A_k; $\overline{\boldsymbol{u}}_{t,k}$ is element's nodal displacements vector, estimated from singular force, applied in bounded displacement direction, considering structure's discrete model change by obtained plastic deformations distribution.

Cross-sections design requirements A_k^{min} for problem (5) can be obtained by using specifications' regulating the design of building structures requirements, or it can be made by solving optimization problem of the structure being prior to plastic collapse. Mathematical model of such structure optimization problem writing ([7]):

find

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{S}_0\left(A_k^{min}\right) \to \min,$$

subject to

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{S}_e, \boldsymbol{S}_r, \boldsymbol{S}_0\left(A_k^{min}\right)\right) \le 1, \\ &\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{S}_e, \\ &\boldsymbol{S}_0\left(A_k^{min}\right) \ge \boldsymbol{0}, k = 1,2,...,s. \end{aligned} \tag{7}$$

This problem practically must be solved by iterations.

Some words about obtaining displacements boundaries u_t^- and u_t^+. It can be made by using cross-sections obtained at the result of (7) problem and changing applied load ratio. Upper bounds of the displacements can be obtained by using insignificantly smaller load ratio than it was used to solve (7) problem and solving (2) and (3) problems, i.e. obtaining displacements occurred in structure being prior to plastic collapse (Figure 3, $u_{pl,c}$ displacements level). Then obtaining displacements when the first plastic hinge is occurs (Figure 3, $u_{1,pl,h}$ displacements level). It results by decreasing load ratio and performing (2) and (3) problems solution. Such values are lower bounds of displacements, i.e. displacements corresponding elastic response. Thus, that limits of the displacements for (5) problem should be between these limit values:

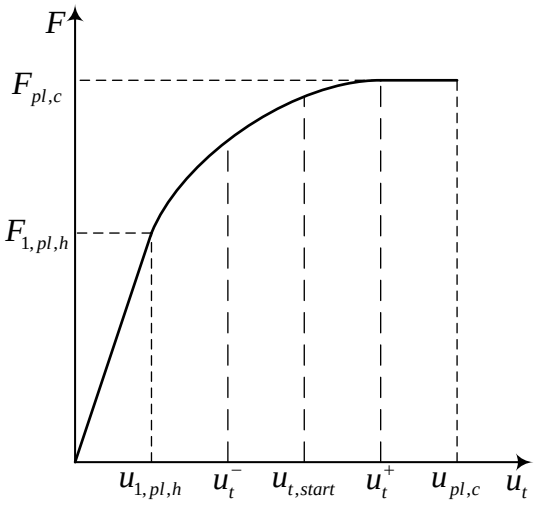


Figure 3. Bounds for displacement in t direction.

$$\begin{aligned} &when\, u_t^+ > 0, so\, u_{1,pl,h}^+ \le u_t^+ \le u_{pl,c}^+; \\ &when\, u_t^- < 0,\ so\, u_{1,pl,h}^- \ge u_t^- \ge u_{pl,c}^-. \end{aligned} \quad (8)$$

It should be made for good convergence and efficient mathematical model usage.

7. THE NUMERICAL EXPERIMENT

A two-storeyed space frame structure was chosen to illustrate suggesting optimization algorithm possibilities. Frame geometry and external load distribution is presented in Figure 4. Forces magnitudes are: $P = 375\ kN$, $H_1 = 150\ kN$, $H_2 = 75\ kN$ and $H_3 = 37,5\ kN$. Structure elements are grouped by cross-section areas in 4 different groups. This distribution is presented on Figure 4. Material for all elements is the steel with following physical parameters – modulus of elasticity $E = 206,85\,\text{GPa}$, yield strength $f_y = 250\,\text{MPa}$. Geometrical non-linear deformable behaviour is considering.

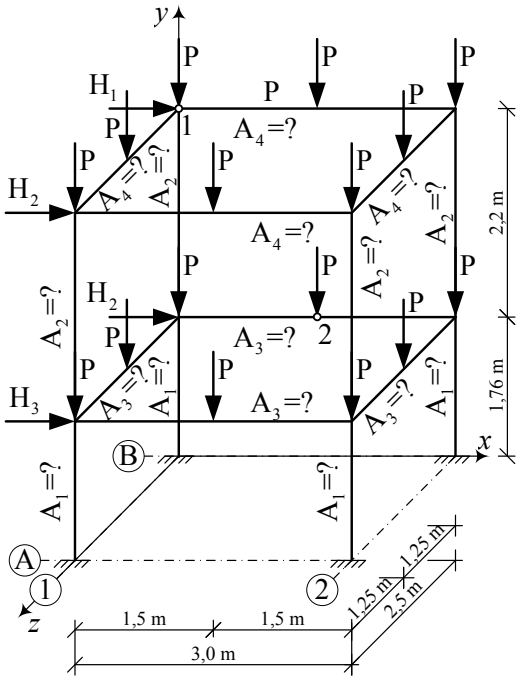


Figure 4. Two-storeyed frame discrete model.

The created FEM discrete model contains 20 nodes with degree of freedom equal 96 and combines two finite elements types, i.e. 8 columns elements and 16 beams elements. All of them are assumed to be the compressive-tensile-torsional-flexural in two axial directions. The total number of all structure's internal forces is 144.

For the suggesting algorithm numerical realization it is necessary to get relationships between elements' cross-sections geometrical parameters:

$$Z_k = a_{k,z} A_k^{\,b_{k,z}}$$

where Z_k is the any considering cross-section geometrical parameter of the k group elements; A_k is the cross-section area of the k group elements; $a_{k,z}$ and $b_{k,z}$ are relation coefficients were obtained for Z_k cross-section geometrical parameter for k group elements. The hot rolled American wide flange W type cross-sections profiles were chosen for optimization problem.

Shortly observe two-storeyed frame dimensional instability (displacements) boundaries. Optimizing cross-sections lower limits are obtaining from limit equilibrium problem (7) solution. Result was obtained after 5 iterations: $A_1^{\min} = 90,64\,cm^2$; $A_2^{\min} = 64,08\,cm^2$; $A_3^{\min} = 66,47\,cm^2$; $A_4^{\min} = 68,96\,cm^2$. For these cross-sections values and load ratio $\gamma = 0,9$, are solving analysis problem (3) and obtaining frame displacements upper bounds (displacement values prior to plastic collapse):

by horizontal direction (by x axis) direction – at the two-storeyed level (node "1", Figure 4)

$$u_{1,x,\max} = u_{e1,x} + u_{r1,x} = 1,61 + 0,93 = 2,54\,\text{cm};$$

by vertical direction (by y axis) – deflection of the middle node of first fool beam by "B" axis (node "2", Figure 4)

$$u_{2,y,\max} = u_{e2,y} + u_{r2,y} = -0,44 - 0,14 = -0,58\,\text{cm}.$$

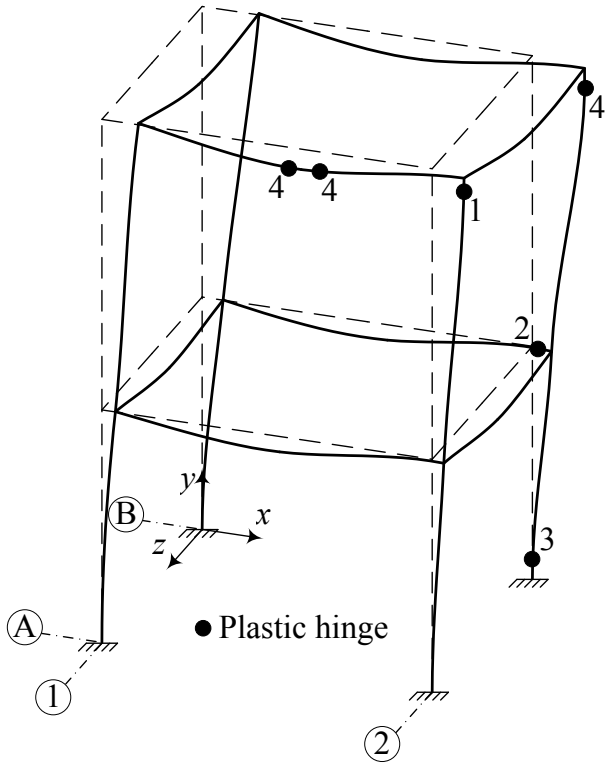


Figure 5. Two-storeyed steel frame deformed shape under applied load and plastic hinge distribution dynamics.

Further by decreased load ratio $\gamma = 0,6$ solving analysis problem (3) and obtaining first plastic hinge occurrence place. First plastic hinge occurred in the top of the column element on two-storeyed level at "2" and "B" axes interception (Figure 5). For such stress-strain state displacements values are:

$$u_{1,x,\min} = u_{e1,x} + u_{r1,x} = 1,23 + 0,14 = 1,37\,\text{cm},$$
$$u_{2,y,\min} = u_{e2,y} + u_{r2,y} = -0,34 - 0,01 = -0,35\,\text{cm}.$$

It is frame displacements variation lower bounds. Thus bounds variations of presented problem conditions should between this limit bounds:

$$1,37\,\text{cm} < u_{1,x} = 1,5\,\text{cm} < 2,54\,\text{cm},$$
$$-0,58\,\text{cm} < u_{2,y} = -0,5\,\text{cm} < -0,35\,\text{cm},$$

what ensure elastic-plastic state of structure work.

Table 1. The optimum volume of two-storeyed steel frame solution convergence per iterations.

Iteration	A_1, (cm^3)	A_2, (cm^3)	A_3, (cm^3)	A_4, (cm^3)	V, (m^3)
0	***104,24***	***73,69***	***76,44***	***79,31***	***0,311***
1	115,58	95,12	79,26	91,50	0,353
2	102,74	84,08	75,43	70,15	0,306
3	102,66	84,08	75,43	69,65	0,306
4	***102,66***	***84,08***	***75,43***	***69,65***	***0,306***

For optimization iteration process it was chosen element's cross-sections values by 15 % bigger up on cross-sections obtained prior to plastic collapse. By choosing this start point, there are obtaining bounded displacements initial values from (3) analysis problem solutions, which are obeying necessary conditions (8):

$$1,37\,\text{cm} < u_{1,x}^{initial} = 1,40\,\text{cm} < 2,541663\,\text{cm},$$
$$-0,58\,\text{cm} < u_{2,y}^{initial} = -0,40\,\text{cm} < -0,35\,\text{cm},$$

Optimal project by prescribed accuracy was obtained after 4 iterations of considering frame iterative calculation. Criterion to stop iterative calculation process was chosen cross-sections values changes, which should be less when 2,5% between iterations results. Projecting parameters results' changes evolution during optimization iterative process is presented in Table 2. Obtained optimal frame project (optimal values of structure's elements and structure's volume value) is written in Table 1, in line denoted by number 4. Plastic hinges occurrence places and sequence are presented in Figure 5.

The reliability of obtained optimal project result is proving by elastic-plastic analysis problem solution. Sequence of the plastic hinge occurrence in optimal structure project is presented in Table 2 and in Figure 5.

Analysis of the results reveals that chosen displacements' limit bounds make influence on optimization process. Optimal structure's project displacements have limit or near-limit

values under described load. Displacement $u_{1,x} = 1{,}49$ cm, that is less than specified limit value 1,5 cm; displacement $u_{2,y} = -0{,}43$ cm, that is bigger than specified limit value –0,6 cm.

Table 2. Sequence of the plastic hinge occurrence for structure's optimal project.

Sequence of hinge formation	1	2	3	4
Load ratio	0,93	0,97	0,99	1,00

8. CONCLUSIONS

The improved mathematical model and it's solution algorithm of the 3D steel frames cross-section optimization problem, taking into consideration inelastic behaviour of the material and serviceability requirements has been developed. Nonlinear elastic analysis based on tangent stiffness and numerically realized by using Newton-Raphson force control method. Comprehensive information about real stress-strain state of the structure gives the elastic-plastic nonlinear analysis by using proper Orbison strength conditions. Preparing procedures make possible to control iterative process of optimization problem solution, structure's plastic deformation spreading and to get good results convergence of structure cross-sections optimization problem.The optimization problem algorithm has been verified by solving two-storeyed space frame structure optimization problem and solving analysis problem by using obtained optimal parameters. The studies show that the proposed algorithm gives very well solution with much less computational effort and more control possibilities, than it can be done by using straight optimization problem solution. Future work is envisaged using suggested optimization problem solution algorithm for other types of structures researches.

REFERENCES

1. **Jankovski V., Atkočiunas J.** Biparametric shakedown design of steel frame structures // Mechanika. – 2011. – Vol. 17. – № 1. – pp. 5–12.
2. **Hasançebi O., Kazemzadeh Azad S.** An exponential big bang-big crunch algorithm for discrete design optimization of steel frames // Computers & Structures. – 2012. – Vol. 110–111. – pp. 167–179.
3. **Doğan E., Saka M. P.** Optimum design of unbraced steel frames to LRFD–AISC using particle swarm optimization // Advances in Engineering Software. – 2012. – Vol. 46. – № 1. – pp. 27–34.
4. **Atkočiūnas J., Merkevičiūtė D., Venskus A.** Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints // Computers & Structures. – 2008. – Vol. 86. – № 17–18. – pp. 1757–1768.
5. **Čyras A., Borkowski A., Karkauskas R.** Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems. – Vilnius: Technika. – 2004. – p. 354.
6. **Čyras A.** Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Chichester: Ellis Horwood Ltd. – 1983. – p. 121.
7. **Karkauskas R.** Optimisation of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse // Journal of Civil Engineering and Management. – 2007. – Vol. 13. – № 3. – pp. 37–41.
8. **Hayalioglu M.S.** Optimum design of geometrically non-linear elastic–plastic steel frames via genetic algorithm // Computers & Structures. – 2000. – Vol. 77. – № 5. – pp. 527–538.
9. **Sahab M.G., Toropov V.V., Ashour A.F.** A hybrid genetic algorithm for structural optimization problems // Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing). – 2004. – Vol. 5. – № 3–4. – pp. 121–143.
10. **Rajan S.D., Nguyen D.T.** Design optimization of discrete structural systems

using MPI-enabled genetic algorithm // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2004. – Vol. 28. – № 5. – pp. 340–348.
11. **Degertekin S.O., Saka M.P., Hayalioglu M.S.** Optimal load and resistance factor design of geometrically nonlinear steel space frames via tabu search and genetic algorithm // Engineering Structures. – 2008. – Vol. 30. – № 1. – pp. 197–205.
12. **Kim S., Park M.-H., Choi S.-H.** Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis // Engineering Structures. – 2001. – Vol. 23. – № 11. – pp. 1491–1502.
13. **Karkauskas R.** Analysis of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures // Statyba. – 1998. – Vol. 4. – № 1. – pp. 37–41.
14. **Karkauskas R., Norkus A.** Truss optimization under stiffness, stability constraints and random loading // Mechanics Research Communications. – 2006. – Vol. 33. – № 2. – pp. 177–189.
15. **Merkevičiūtė D., Atkočiūnas J.** Incremental method for unloading phenomenon fixation at shakedown // Journal of Civil Engineering and Management. – 2003. – Vol. 9. – № 3. – pp. 178–191.
16. **Chen H.F., Liu Y.H., Cen Z.Z., Xu B.Y.** On the solution of limit load and reference stress of 3-D structures under multi-loading systems // Engineering Structures. – 1999. – Vol. 21. – № 6. – pp. 530–537.
17. **Karkauskas R.** Optimization of elastic-plastic geometrically non-linear lightweight structures under stiffness and stability constraints // Journal of Civil Engineering and Management. – 2004. – Vol. 10. – № 2. – pp. 97–106.
18. Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. – 2006. – Brussels.
19. ANSI/AISC 360-10: Specification for Structural Steel Buildings. – 2010. – Chicago.
20. **Rao S. S.** The finite element method in engineering. – Oxford: Elsevier Ltd. – 2004. – pp. 688.
21. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J. Z.** The finite element method: its basis and fundamentals. – Oxford: Butterworth-Heinemann. – 2005. – pp. 752.
22. STR 2.05.08:2005: Plieninių Konstrukcijų Projektavimas. Pagrindinės Nuostatos. [Design of Steel Structures. General Rules]. – 2005. – Vilnius. (in Lithuanian).
23. **Karkauskas R., Popov M.** The algorithm of the cross-section optimization of inelastic geometrical nonlinear steel frame structures // Engineering Structures and Technologies. – 2009. – Vol. 1. – № 1. – pp. 10–22. (in Lithuanian).
24. **Karkauskas R., Popov M.** The Analysis of Geometrically Nonlinear Elastic-Plastic Space Frames // Journal of Civil Engineering and Management. – 2011. – Vol. 17. – № 4. – pp. 558–568.
25. **Амосов А.А., Дубницкий Ю.А., Копченова Н.В.** Вычислительные методы. – Москва: Издательский дом МЭИ. – 2008. – pp. 672.
26. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of mathematics for engineers and scientists. – Boca Raton: CRC Press. – 2007. – pp. 1543.

Michail Popov, Department of Structural mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, 11, Saulėtekio ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;
e-mail: michail.popov@vgtu.lt

Romanas Karkauskas, Department of Structural mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, 11, Saulėtekio ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;
e-mail: romas.karkauskas@vgtu.lt

Liudvikas Rimkus, Department of Structural mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, 11, Saulėtekio ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;
e-mail: liudvikas.rimkus@vgtu.lt

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ПОДХОДЫ К ЛОКАЛЬНОМУ РАСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Моджтаба Аслами
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье рассматриваются дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. Приводятся континуальные и дискретно-континуальные операторные и вариационные постановки решаемых задач (задачи двумерной теории упругости, задачи изгиба пластин), в частности, формулировки разрешающих многоточечных краевых задач. Кроме того, представлены редуцированные дискретно-континуальные постановки соответствующих задач в дискретном базисе Хаара.

Ключевые слова: многоуровневые методы, дискретные методы, дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, расчеты строительных конструкций, локальные решения

MULTILEVEL DISCRETE AND DISCRETE-CONTINUAL APPROACHES TO LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

Mojtaba Aslami,
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to correct multilevel discrete and discrete-continual methods of local structural analysis. Continual and discrete-continual operational and vibrational formulations of resultant multipoint boundary problems for two-dimensional theory of elasticity and plate analy-sis are under consideration. Corresponding reduced discrete-continual formulations in Haar basis are presented as well.

Key words: multilevel methods, discrete methods, discrete-continual finite element method, wavelet-based methods, local structural analysis

ВВЕДЕНИЕ

Характерными особенностями развития строительного комплекса Российской Федерации в последние годы являются значительный рост числа домов, возводимых по индивидуальным проектам с применением нестандартных строительных материалов и оригинальных конструктивных решений, обусловленных реальными условиями и пожеланиями заказчика, а также увеличивающийся объем работ, связанный с переделкой и реконструкцией существующих зданий и сооружений, в том числе и по результатам мониторинга строительных объектов. Для недопущения аварийных ситуаций необходимо подтверждать принимаемые конструктивные решения надлежащими расчетами. Современные численные (прежде всего, метод конечных элементов (МКЭ [7, 22, 23, 24], 26, 37-40])) и численно-аналитические методы позволяют моделировать поведение сложных строительных объектов в целом, что может привести на практике к вычислительным схемам исключительно большой размерности. Вместе с тем, квалифицированному расчетчику известно, что наиболее опасным с точки зрения прочности является

напряженно-деформированное состояние (НДС) в относительно небольшом числе локальных зон конструкций, причем расположение этих зон, как правило, известно заранее. К последним следует отнести зоны краевого эффекта, т.е. разного рода углы, трещины, щели, места контактов и связей различных конструктивных элементов, места локальных изменений, обусловленных реконструкцией объекта (например, пробивка новых проходов, снос опор, усиления и т.д.) и др. Таким образом, возникает задача разработки, исследования и развития методов локального высокоточного расчета строительных конструкций, тем более актуальная, с позиции того, что корректная локализация расчетного обоснования позволяет существенно сократить количество неизвестных. Вейвлет-анализ, позволяющий всесторонне оценить влияние различных с точки зрения локализации факторов, является здесь весьма эффективным инструментарием. Предметом исследований автора в этой связи было применение аппарата вейвлет-анализа для корректного численного и численно-аналитического расчета и анализа работы конструкций, в том числе на основе использования и развития дискретно-континуального метода конечных элементов, предложенного в работах А.Б. Золотова, П.А. Акимова и М.Л. Мозгалевой [25, 41].

Целью проведенных исследований, в связи с вышеизложенным, являлась разработка, исследование и верификация эффективных многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных подходов к локальному расчету строительных конструкций на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа [1-6, 21, 29-36].

Для достижения поставленной цели решались следующие *задачи*:

1. Обзор и исследование математических основ дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций, в том числе программно-алгоритмическая реализация и апробация корректных алгоритмов быстрых (прямых и обратных) вейвлет-преобразований по дискретным базисам Хаара (одномерным и двумерным), корректных алгоритмов осреднения функций, разложенных по дискретным базисам Хаара, корректных алгоритмов многоуровневой аппроксимации функций, разложенных по дискретным базисам Хаара.
2. Формулировка операторных и вариационных континуальных постановок краевых задач строительной механики, в том числе с выделением направления регулярности физико-геометрических параметров конструкции, т.е. основного направления (и соответствующих участвующих в формулировке производных), и использованием операторных подходов и обобщенных функций (в рамках общих континуальных постановок это приводит к формированию обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами, включающими краевые условия).
3. Дискретная аппроксимация операторных коэффициентов определяющих уравнений на основе соответствующих им функционалов с использованием техники МКЭ (здесь осуществляется построение ряда нескольких нестандартных матриц жесткости, реализуемое на основе общематематических подходов).
4. Формулировка дискретных и дискретно-континуальных постановок краевых задач строительной механики в базисе Хаара и последующая редукция разрешающих многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

Научная новизна проделанной работы состоит в нижеперечисленном.

1. Построены и исследованы эффективные с точки зрения последующей вычислительной реализации математические формулировки, алгоритмы и подходы, обеспечивающие корректные редуцированные дискретно-континуальные постановки задач

расчета строительных конструкций, в частности, сведение исходных задач в начале к обыкновенному дифференциальному уравнению второго или четвертого порядка с операторными коэффициентами, включающими краевые условия, а затем к аналогичной системе уравнений первого порядка.

2. Разработаны дискретные и дискретно-континуальные расчетные модели строительных конструкций на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа и построения конечно-элементных аппроксимаций операторных коэффициентов, представляющих собой нетрадиционные сочетания дифференциальных операторов, включающих в себя краевые условия и обобщенные функции.
3. Предложены корректные алгоритмы редукции дискретных постановок краевых задач расчета строительных конструкций, позволяющие обеспечить высокую точность определения параметров НДС в наиболее ответственных локальных зонах исследуемых объектов.
4. Предложены корректные алгоритмы редукции дискретно-континуальных постановок краевых задач расчета строительных конструкций, позволяющие обеспечить высокую точность определения параметров напряженно-деформированного состояния в наиболее ответственных локальных зонах исследуемых объектов.

Практическая значимость работы состоит в разработанных многоуровневых дискретных подходах к локальному расчету строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа; разработанных многоуровневых дискретно-континуальных подходах к локальному расчету строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа и развития дискретно-континуального метода конечных элементов; создании авторских программных комплексов, которые могут стать составной частью при построении комплексов промышленного типа; решения модельных тестовых и практически важных задач расчета строительных конструкций.

Внедрение работы состоит в использовании разработанных подходов, алгоритмов и программ для решения задач расчета строительных конструкций в Научно-исследовательском центре «СтаДиО».

Достоверность полученных результатов и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается: строгостью используемого математического аппарата; корректностью постановок задач в рамках теоретических предпосылок строительной механики; сопоставлении полученных результатов с результатами проводимых параллельно контрольных расчетов с привлечением программных комплексов промышленного типа; сопоставлении результатов расчета с решениями, полученными по другим аналитическим и численным методам; экспертной оценке точности решений специалистами в области НДС.

1. ОБЗОРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПОСТАНОВОК И МЕТОДОВ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В числе основных видов постановок краевых задач расчета строительных конструкций необходимо указать традиционные, вариационные и операторные, а также постанови в виде граничных интегральных уравнений. В данном направлении следует отметить исследования А.Б. Золотова [10-15, 20], Б.Г. Коренева, С.Г. Михлина, В.И. Сливкера [26] и др.

В качестве основных численных методов расчета строительных конструкций рассмотрены метод конечных разностей, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов. Среди работ, посвященных указанным методам, в частности, перечислим труды Н.П. Абовского, В.Г. Баженова, Н.С. Бахвалова, М.В. Белого, А.М. Белостоцкого, В.Г. Бельского [39, 40], В.Е. Булгакова, Р.Ф.

Габбасова, С.К. Годунова, А.Б. Золотова, В.А. Игнатьева, Г.Г. Кашеваровой, С.Б. Косицына, М.Л. Мозгалевой, В.И. Мяченкова, А.В. Перельмутера, В.А. Постнова, А.А. Самарского, В.Н. Сидорова, С.И. Трушина, Р.П. Федоренко, С.Ю. Фиалко, В.В. Шайдурова, Н.Н. Шапошникова, К. Бате, Е. Вилсона, О. Зенкевича, Дж. Одена, М. Секуловича и др.

К численно-аналитическим методам расчета строительных конструкций традиционно относятся метод Л.В. Канторовича [16-18], метод В.З. Власова [8, 9], метод Канторовича-Власова, метод прямых, метод Микеладзе-Ланцоша, метод конечных полос, метод конечных слоев, метод конечных призм, метод начальных параметров и метод начальных функций. В частности, необходимо отметить исследования А.В. Александрова, А.М. Александрова, Л.П. Винокурова, Я.М. Григоренко, Н.П. Жидкова, В.В. Карпова, А.В. Крысько, В.А. Крысько, Н.Н. Леонтьева, В.Н. Медведько, Ш.Е. Микеладзе, М.О. Моисеенко, В.В. Петрова, Н.К. Снитко, В.С. Чувиковского, Ф.Н. Шклярчук, M. Azhari, M.S. Cheung, Y.K. Cheung, C.T. Christov, H.R. Ovesy, J.A. Puckett, B.W. Schafer и др.

Значительные результаты в области вейвлет-анализа и его приложений, в том числе при решении задач расчета конструкций, имеют Н.М. Астафьева, Ю.К. Демьянович, М.В. Жигалов, С.П. Копысов, А.В. Крысько, В.А. Крысько, И.Я. Новиков, Ю.А. Сагдеева, В.В. Солдатов, С.Б. Стечкин, И. Добеши, К. Чуи, S. Bertoluzza, L.M.S. Castro, A. Cohen, S. Dahlke, W. Dahmen, S. Dumont, A. Grossmann, A. Kunoth, A.J. Kurdila, S. Mallat, Y. Meyer, J. Morlet, G. Naldi, P. Oswald, R. Schneider, P. Venini, Y. Wang, K. Urban и др.

Анализируя различные методы локального расчета строительных конструкций, следует отдельно упомянуть исследования А.Б. Золотова, П.А. Акимова, М.Л. Мозгалевой и Д.Н. Алексеева [19], а также развиваемый автором дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), предложенный в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова и М.Л. Мозгалевой [25, 41].

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МНОГОУРОВНЕВЫХ ДИСКРЕТНЫХ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ПОДХОДОВ К ЛОКАЛЬНОМУ РАСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В качестве простейшего вейвлетного базиса при проведении исследований использовались дискретные базисы Хаара.

Одномерный дискретный базис Хаара на отрезке $[a,b]$ имеет вид:

$$\psi_j^p(i)=\alpha_p^{-1}\begin{cases}1, & 2^{p+1}(j-1)\le i<2^p(2j-1)\\ -1, & 2^p(2j-1)\le i<2^{p+1}j\\ 0, & i<2^{p+1}(j-1)\ \cup\ i\ge 2^{p+1}j,\end{cases}\quad i=1,2,...,n,\ \ 0\le p<M; \tag{1}$$

$$\psi_1^M(i)=\alpha_M^{-1},\ \ i=1,2,...,n, \tag{2}$$

где $\psi_j^p(i)$ – j-ая функция Хаара уровня p, определенная в точках разбиения отрезка $x_i=a+(i-1)h,\ i=1,2,...,n$ ($h=(b-a)/(n-1)$); $n=2^M$ – количество частей, на которые разбивается отрезок (M – некоторое целое число);

$$N_p=\begin{cases}n/2^{p+1}=2^{M-(p+1)}, & 0\le p<M\\ 1, & p=M;\end{cases} \tag{3}$$

$$\alpha_p=\begin{cases}\sqrt{2^{p+1}}, & 0\le p<M\\ \sqrt{2^M}=\sqrt{n}, & p=M.\end{cases} \tag{4}$$

Двумерный дискретный базис Хаара на прямоугольной области

$$\Omega=\{(x_1,x_2):\ 0\le x_1\le l_1,\ \ 0\le x_2\le l_2\}$$

определяется следующими формулами:

$$\psi^{p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(i_1,i_2) =$$
$$= \alpha_p^{-1}\begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, \\ \quad \bigcap_{q=1}^{2}\bigcup_{k_q=0}^{1}\begin{pmatrix} 2^{p+1}(j_q - 1 + k_q/2) < i_q \wedge \\ \wedge\, i_q \le 2^{p+1}(j_q - 1/2 + k_q/2) \end{pmatrix}, \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$
$$i_1 = 1,2,...,n;\ \ i_2 = 1,2,...,n;\ \ 0 \le p < M; \tag{5}$$

$$\psi^{M}_{0,0,1,1}(i_1,i_2) = \alpha_M^{-1}, \qquad i_1 = 1,2,...,n;\ \ i_2 = 1,2,...,n, \tag{6}$$

где $\psi^{p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(i_1,i_2)$ – соответствующая функция Хаара, определенная в узлах равномерной сетки, аппроксимирующей область Ω с координатами $x_{1,i} = (i_1 - 1)h_1,\ i_1 = 1,2,...,n$ и $x_{2,i} = (i_2 - 1)h_2,\ i_2 = 1,2,...,n$ (причем недопустим случай $s_1 = s_2 = 0$); $n = 2^M$ (M – некоторое целое число);

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \le p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \tag{7}$$

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \le p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \tag{8}$$

В рамках проведенного исследования были рассмотрены корректные быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по одномерному и двумерному базисам Хаара, корректные алгоритмы осреднения функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара, а также корректные алгоритмы многоуровневых аппроксимаций функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара.

В одномерном случае произвольная функция f, определенная в точках разбиения рассматриваемого отрезка, может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^{M}\sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \tag{9}$$

где $v_j^p,\ j = 1,2,...,N_p,\ p = 1,2,...,M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые как скалярное произведение

$$v_j^p = (\bar{f}, \bar{\psi}_j^p) = \sum_{i=1}^{n} f(i)\psi_j^p(i), \qquad j = 1,2,...,N_p,\ p = 1,2,...,M; \tag{10}$$

$$f = [\, f(1)\ \ f(2)\ \ ...\ \ f(n)\,]^T; \tag{11}$$

$$\bar{\psi}_j^p = [\, \psi_j^p(1)\ \ \psi_j^p(2)\ \ ...\ \ \psi_j^p(n)\,]^T. \tag{12}$$

Формулу (10) можно переписать в матрично-векторном виде

$$\bar{v} = DQ^0\bar{f}, \tag{13}$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара (т.е. функций вида (1), (2), но у которых отсутствует деление соответственно на величину α_p для формулы (1) и α_M для формулы (2)), записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины $\alpha_p,\ p = 1,2,...,M$; $\bar{v}$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов разложения функции $f(i)$ по базису Хаара (1)-(2).

При осреднении на некотором уровне q для всех $p = 1,2,...,q$ имеем:

$$(Du^p)_{2j-1} \approx (Du^p)_{2j} \approx (D\tilde{u}^p)_{2j-1}, \qquad v^p_{2j-1} = v^p_{2j}, \quad j = 1,2,...,N_{p+1}, \tag{14}$$

где $(D\tilde{u}^p)_{2j-1} = (\tilde{u}^p_{2j} - \tilde{u}^p_{2j-1})/(2^{p+1}h)$;

$$(D\tilde{u}^p)_{2j-1} = (\tilde{u}^p_{2j} - \tilde{u}^p_{2j-1})/(2^{p+1}h). \tag{15}$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v^p_{2j-1} = v^p_{2j} = \beta v_j^{p+1}, \quad j = 1,2,...,N_{p+1}, \qquad \text{где} \quad \beta = 1/(2\sqrt{2}). \tag{16}$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\bar{v}^k = R_k \bar{v}^{k+1}, \quad (17)$$

где $$R_k = \bar{\beta} \otimes I_{N_{k+1}}; \quad \bar{\beta} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

R_k – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень; I_n – единичная матрица n-го порядка; $\otimes$ – обозначение операции прямого произведения.

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем:

$$\bar{v}^p = W_p \bar{v}^{q+1}, \quad p = 0,1,2,...,q, \quad (19)$$

где $$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s . \quad (20)$$

Формулу (20) иначе можно переписать в следующем виде:

$$W_p = \bar{\beta}_{p,q} \otimes I_{N_{p+1}}, \quad \bar{\beta}_{p,q} = \beta^{q-p+1} \bar{e}_{q+1}; \quad (21)$$

W_p – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень; $\bar{e}_{q+1}$ – вектор размерности N_{q+1}, составленный из единиц.

В двумерном случае для произвольной функции $f(i_1, i_2)$, определенной в узлах рассмотренной выше прямоугольной сетки, будем иметь:

$$f(i_1,i_2) = \sum_{p=0}^{M} \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v^p_{1,0,j_1,j_2} \psi^p_{1,0,j_1,j_2}(i_1,i_2) + v^p_{0,1,j_1,j_2} \psi^p_{0,1,j_1,j_2}(i_1,i_2) + v^p_{1,1,j_1,j_2} \psi^p_{1,1,j_1,j_2}(i_1,i_2)), \quad (22)$$

где $v^p_{1,0,j_1,j_2}$, $v^p_{0,1,j_1,j_2}$, $v^p_{1,1,j_1,j_2}$, $j_1 = 1,2,...,N_p$, $j_2 = 1,2,...,N_p$, $p = 1,2,...,M$ – коэффициенты разложения функции $f(i_1,i_2)$ по дискретному базису Хаара,

$$v^p_{s_1,s_2,j_1,j_2} = (\bar{f}, \bar{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} f(i_1,i_2) \bar{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(i_1,i_2), \quad s_1 = 0,1, \ s_2 = 0,1, \ j_1 = 1,2,...,N_p, \ j_2 = 1,2,...,N_p, \ p = 1,2,...,M; \quad (23)$$

$$\bar{f} = [\, f(1,1) \ ... \ f(1,n) \ f(2,1) \ ... \ f(2,n) \ ... \ f(n,1) \ ... \ f(n,n) \,]^T; \quad (24)$$

$$\bar{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2} = [\, \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(1,1) \ ... \ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(1,n) \ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(2,1) \ ... \ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(2,n) \ ... \ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(n,1) \ ... \ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(n,n) \,]^T. \quad (25)$$

Матрично-векторный вид формулы (23) следующий:

$$\bar{v} = DQ^0 \bar{f}, \quad (26)$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p, $p = 1,2,...,M$; $\bar{v}$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов коэффициенты разложения функции $f(i_1,i_2)$ по базису Хаара.

При осреднении на некотором уровне q для всех $p = 1,2,...,q$ имеем (ниже $s_1 = 0,1$; $s_2 = 0,1$ (кроме $s_1 = s_2 = 0$); $j_1 = 1,2,...,N_p$; $j_2 = 1,2,...,N_p$):

$$(D_1 u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1-1,2j_2} = (D_1 u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1,2j_2} \approx \approx (D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1,2j_2-1}; \quad (27)$$

$$(D_2 u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1-1,2j_2} = (D_2 u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1,2j_2} \approx \approx (D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1,2j_2-1}; \quad (28)$$

$$(D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1,2j_2} = \\ = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1,2j_2} \approx \\ \approx (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^p)_{2j_1-1,2j_2-1}; \tag{29}$$

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = \\ = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2}. \tag{30}$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = \\ = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2} = \beta_{s_1,s_2} v^{p+1}_{s_1,s_2,j_1,j_2}, \tag{31}$$

где $\beta_{1,0} = 0.25$; $\beta_{0,1} = 0.25$;

$$\beta_{1,1} = 0.125. \tag{32}$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\bar{v}^k = R_k \bar{v}^{k+1}, \tag{33}$$

где
$$R_k = \beta^G \otimes I_{N^2_{k+1}}; \tag{34}$$

$$\beta^G = \beta \otimes [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T; \tag{35}$$

$$\beta = diag\{\beta_{1,0}, \beta_{0,1}, \beta_{1,1}\}. \tag{36}$$

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем:

$$\bar{v}^p = W_p \bar{v}^{q+1}, \quad p = 0,1,2,...,q, \tag{37}$$

где
$$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s. \tag{38}$$

Формулу (38) иначе можно переписать в следующем виде:

$$W_p = \beta^G_{p,q} \otimes I_{N^2_{p+1}}; \quad \beta^G_{p,q} = \beta^{q-p+1} \otimes \bar{e}_{q+1}. \tag{39}$$

$\bar{e}_{q+1}$ – вектор, составленный из единиц, размерности N^2_{q+1}.

2. ОПЕРАТОРНЫЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В РАМКАХ МЕТОДА СТАНДАРТНОЙ (РАСШИРЕННОЙ) ОБЛАСТИ А.Б. ЗОЛОТОВА

В рамках проведенных исследований были построены операторные и вариационные континуальные постановки краевых задач расчета строительных конструкций в рамках метода стандартной (расширенной) области А.Б. Золотова (двумерная задача теории упругости; задача об изгибе пластины, в том числе с выделением направления регулярности (постоянства, кусочного постоянства (данный случай и рассматривается далее)) физико-геометрических параметров конструкции.

Итак, пусть рассматривается двумерная конструкция (балка-стенка или плита), имеющая размеры l_1 ($x_1 \in [0, l_1]$) и l_2 ($x_2 \in [0, l_2]$). Положим, что x_2 – переменная, соответствующая основному направлению (заметим, что вдоль переменной x_1 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно). Обозначим: $x^b_{2,k}$, $k = 1,...,n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров (характеристик)); Ω_k, $k = 1,...,n_k - 1$ – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2): \ 0 < x_1 < l_1, \ x^b_{2,k} < x_2 < x^b_{2,k+1}\}, \\ k = 1,...,n_k; \tag{40}$$

Γ_k, $k = 1,...,n_k - 1$ – границы фрагментов; $\theta_k(x_1, x_2)$ – характеристическая функция об-

ласти Ω_k; $\delta_{\Gamma,k}(x_1,x_2)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [27, 28],

$$\theta_k(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1,x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1,x_2) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad (41)$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1,x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (42)$$

$\bar{n}_k = [\, n_{k,1} \;\; n_{k,2} \,]^T$ – вектор нормали к границе Γ_k; ω_k, $k = 1,...,n_k - 1$ – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, например,

$$\omega_k = \{(x_1,x_2):\ -\infty < x_1 < +\infty,\ \ x^b_{2,k} < x_2 < x^b_{2,k+1}\}. \quad (43)$$

Операторная постановка двумерной задачи теории упругости (статический расчет балок-стенок) с выделением основного направления сводится к многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами

$$\bar{U}_k' = \widetilde{\mathscr{L}}_k \bar{U}_k + \widetilde{\bar{F}}_k, \quad x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1}),\ \ k = 1,...,n_k - 1; \quad (44)$$

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x^b_{2,k} - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x^b_{2,k} + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2,...,n_k - 1; \quad (45)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x^b_{2,1} - 0) + B_{n_k}^+ \bar{U}_{n_k-1}(x^b_{2,n_k} - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (46)$$

где $\bar{U}_k = [\, \bar{u}_k^T \;\; \bar{v}_k^T \,]^T$; $\bar{U}_k' = \partial_2 \bar{U}_k$; (47)

$$\bar{u}_k = [\, u_1^{(k)} \;\; u_2^{(k)} \,]^T; \quad (48)$$

$$\bar{v}_k = [\, v_1^{(k)} \;\; v_2^{(k)} \,]^T = [\, \partial_2 u_1^{(k)} \;\; \partial_2 u_2^{(k)} \,]^T = \partial_2 \bar{u}_k = \bar{u}_k'; \quad (49)$$

$$\bar{v}_k' = \partial_2 \bar{v}_k; \quad (50)$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathscr{L}_{k,vv}^{-1}(\mathscr{L}_{k,uu} + C_k) & \mathscr{L}_{k,vv}^{-1}\widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad (51)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \bar{c}_{k,1} & 0 \\ 0 & \bar{c}_{k,2} \end{bmatrix}; \quad \widetilde{\bar{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ \mathscr{L}_{k,vv}^{-1}\bar{\mathscr{F}}_k \end{bmatrix}; \quad (52)$$

$$\mathscr{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \ \mathscr{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathscr{L}_{k,uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \partial_1; \quad (53)$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv} = \mathscr{L}_{k,uv} - \mathscr{L}_{k,vu}; \quad \widetilde{\mathscr{L}}^*_{k,uv} = \mathscr{L}_{k,uv} - \mathscr{L}_{k,vu};$$

$$\mathscr{L}_{k,vu} = \mathscr{L}^*_{k,uv}; \quad (54)$$

$$\bar{\mathscr{F}}_k = [\, \mathscr{F}_{k,1} \;\; \mathscr{F}_{k,2} \,]^T; \quad \mathscr{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma,k} f_i; \quad (55)$$

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (56)$$

$\bar{u}_k$ – вектор перемещений на интервале $x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1})$; $\bar{\lambda}_k$ и $\bar{\mu}_k$ – параметры Ламе, определенные на области $\omega_k \supset \Omega_k$; F_i, $i = 1,...N$ и f_i, $i = 1,...N$ – компоненты внешних нагрузок, приложенных соответственно внутри и на границе области, занимаемой конструкцией; $\mathscr{L}^*_{k,uv}$ – сопряженный с $\mathscr{L}_{k,uv}$ дифференциальный оператор; $\widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv}$ – кососимметричный оператор; C_k – матрица коэффициентов отпора основания; $c_{k,i}$ – коэффициент отпора по направлению оси Ox_i (при отсутствии отпора $c_{k,i} = 0$); $\bar{c}_{k,i} = \theta_k c_{k,i}$, $i = 1,2$; B_k^-, B_k^+, $k = 2,...,n_k - 1$, B_1^+ и $B_{n_k}^-$ – матрицы коэффициентов граничных условий, четвертого порядка; $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2,...,n_k - 1$, $\bar{g}_1^+$ и $\bar{g}_{n_k}^-$ – векторы правых частей граничных условий, четырехмерные.

Вариационная постановка напрямую следует из операторной:

$$\Phi(\bar{U}) = \sum_{k=1}^{n_k - 1} \iint_{\omega_k} f_k(\bar{U}_k) dx_1 dx_2, \quad (57)$$

где $f_k(\bar{U}_k) = \frac{1}{2}(\widetilde{\bar{\mathscr{L}}}_k \bar{U}_k, \bar{U}_k) - (\widetilde{\bar{\mathscr{F}}}_k, \bar{U}_k)$; (58)

$$\widetilde{\bar{\mathscr{L}}}_k = \begin{bmatrix} \mathscr{L}_{k,uu} + C_k & \widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv} \\ \widetilde{\mathscr{L}}^*_{k,uv} & \mathscr{L}_{k,vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{L}_{k,uu} + C_k & \widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv} \\ \widetilde{\mathscr{L}}_{k,vu} & \mathscr{L}_{k,vv} \end{bmatrix}; \quad (59)$$

$$\overline{\overline{\mathscr{F}}}_k = \begin{bmatrix} \overline{\mathscr{F}}_k \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (60)$$

$$\overline{U}(x_2) = \overline{U}_k(x_2), \quad x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1}), \quad k = 1, ..., n_k - 1. \quad (61)$$

Решением задачи является точка (функция) условного экстремума этого функционала с условием (49) при учете (45), (46).

Деформации и напряжения на интервале $x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1})$:

$$\varepsilon^{(k)}_{1,1} = \partial_1 u^{(k)}_1; \quad \varepsilon^{(k)}_{2,2} = v^{(k)}_2; \quad \varepsilon^{(k)}_{1,2} = \varepsilon^{(k)}_{2,1} = \partial_1 u^{(k)}_2 + v^{(k)}_1; \quad (62)$$

$$\sigma^{(k)}_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_k \varepsilon^{(k)} + 2\mu_k \varepsilon^{(k)}_{i,j}. \quad (63)$$

Операторная постановка задачи об изгибе тонкой пластины с выделением основного направления сводится к многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами:

$$\overline{U}'_k = \widetilde{\mathscr{L}}_k \overline{U}_k + \overline{\overline{F}}_k, \quad x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1}), \quad k = 1, ..., n_k - 1; \quad (64)$$

$$B^-_k \overline{U}_{k-1}(x^b_{2,k} - 0) + B^+_k \overline{U}_k(x^b_{2,k} + 0) = \overline{g}^-_k + \overline{g}^+_k, \quad k = 2, ..., n_k - 1; \quad (65)$$

$$B^+_1 \overline{U}_1(x^b_{2,1} + 0) + B^-_{n_k} \overline{U}_{n_k - 1}(x^b_{2,n_k} - 0) = \overline{g}^+_1 + \overline{g}^-_{n_k}, \quad (66)$$

где

$$\overline{U}_k = [\, y^{(k)}_1 \quad y^{(k)}_2 \quad y^{(k)}_3 \quad y^{(k)}_4 \,]^T; \quad \overline{U}'_k = \partial_2 \overline{U}_k; \quad (67)$$

$$y^{(k)}_1 = y^{(k)}_1(x_1, x_2) = w_k(x_1, x_2); \quad (68)$$

$$y^{(k)}_i = y^{(k)}_i(x_1, x_2) = \partial^{i-1}_2 w_k(x_1, x_2), \quad i = 2, 3, 4;$$

$$\widetilde{\mathscr{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathscr{L}^{-1}_{k,4}(\mathscr{L}_{k,0} + \overline{c}_k) & 0 & \mathscr{L}^{-1}_{k,4}\mathscr{L}_{k,2} & 0 \end{bmatrix}; \quad (69)$$

$$\overline{\overline{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathscr{L}^{-1}_{k,4}\mathscr{F}_k \end{bmatrix}; \quad (70)$$

$$\mathscr{L}_{k,4} = \theta_k D_k; \quad (71)$$

$$\mathscr{L}_{k,2} = -[\partial^2_1 \theta_k D_k \nu_k + 2\partial_1 \theta_k D_k (1 - \nu_k)\partial_1 + \theta_k D_k \nu_k \partial^2_1]; \quad (72)$$

$$\mathscr{L}_0 = -\partial^2_1 \theta_k D_k \partial^2_1; \quad (73)$$

$$\overline{c}_k = \theta_k c_k; \quad D_k = E_k h^3_k / [12(1 - \nu^2_k)]; \quad (74)$$

$$\mathscr{F}_k = \theta_k q_k - \delta_{\Gamma,k} Q_k - \partial_1(\delta_{\Gamma,k} \mathscr{M}_{1,k}) - \partial_2(\delta_{\Gamma,k} \mathscr{M}_{2,k}); \quad (75)$$

w_k – прогибы на интервале $x_2 \in (x^b_{2,k}, x^b_{2,k+1})$; D_k, h_k, ν_k, c_k – соответственно цилиндрическая жесткость пластины, толщина, коэффициент Пуассона материала конструкции и коэффициент отпора упругого основания типа Винклера (при наличии) на области Ω_k; q_k – плотность нагрузки в области Ω_k; Q_k, $\mathscr{M}_{1,k}$, $\mathscr{M}_{2,k}$ – поперечная сила и крутящие моменты на границе области Ω_k; B^-_k, B^+_k, $k = 2, ..., n_k - 1$, B^+_1 и $B^-_{n_k}$ – матрицы коэффициентов граничных условий, четвертого порядка; $\overline{g}^-_k, \overline{g}^+_k$, $k = 2, ..., n_k - 1$, $\overline{g}^+_1$ и $\overline{g}^-_{n_k}$ – векторы правых частей граничных условий, четырехмерные.

Соответствующая вариационная постановка имеет вид:

$$\Phi(w) = \sum_{k=1}^{n_k - 1} \iint_{\omega_k} f_k(w_k) dx_1 dx_2, \quad (76)$$

где $f_k(w_k) = f_k(\overline{\overline{y}}_k) = \frac{1}{2}(\widetilde{K}_k \overline{\overline{y}}_k, \overline{\overline{y}}_k) - \theta_k q_k y^{(k)}_1$, (77)

$$\widetilde{K}_k = \begin{bmatrix} \widetilde{B}^*_0 \overline{A}_k \widetilde{B}_0 + \overline{c}_k & \widetilde{B}^*_0 \overline{A}_k \widetilde{B}_1 & \widetilde{B}^*_0 \overline{A}_k B_2 \\ \widetilde{B}^*_1 \overline{A}_k \widetilde{B}_0 & \widetilde{B}^*_1 \overline{A}_k \widetilde{B}_1 & \widetilde{B}^*_1 \overline{A}_k B_2 \\ B^*_2 \overline{A}_k \widetilde{B}_0 & B^*_2 \overline{A}_k \widetilde{B}_1 & B^*_2 \overline{A}_k B_2 \end{bmatrix}; \quad (78)$$

$$B^* = -[\, \partial^2_1 \quad \partial^2_2 \quad 2\partial_2\partial_1 \quad 2\partial_2\partial_1 \,]; \quad (79)$$

$$\overline{A}_k = \overline{D}_k \begin{bmatrix} 1 & \overline{\nu}_k & 0 & 0 \\ \overline{\nu}_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \overline{\nu}_k)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \overline{\nu}_k)/2 \end{bmatrix}; \quad (80)$$

$$B = -\begin{bmatrix} \partial_1^2 \\ \partial_2^2 \\ 2\partial_1\partial_2 \\ 2\partial_1\partial_2 \end{bmatrix}; \qquad (81)$$

$$w(x_2) = w_k(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, ..., n_k - 1. \qquad (82)$$

Решением задачи является точка (функция) условного экстремума этого функционала с условием (68), при этом должны быть учтены граничные условия (65)-(66).

Изгибающий и крутящий моменты на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$:

$$M_1^{(k)} = D_k(\chi_1^{(k)} + \nu_k\chi_2^{(k)}); \quad M_2^{(k)} = D_k(\nu_k\chi_1^{(k)} + \chi_2^{(k)}); \quad M_{1,2}^{(k)} = 0.5 \cdot D_k(1-\nu_k)\chi_{1,2}^{(k)}, \qquad (83)$$

где $\chi_1^{(k)}$, $\chi_2^{(k)}$ и $\chi_{1,2}^{(k)}$ – изменения кривизны и кручения в области Ω_k,

$$\chi_1^{(k)} = -\partial_1^2 w_k; \quad \chi_2^{(k)} = -\partial_2^2 w_k; \quad \chi_{1,2}^{(k)} = -2\partial_1\partial_2 w_k. \qquad (84)$$

3. КОРРЕКТНЫЕ МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПОДХОДЫ К ЛОКАЛЬНОМУ РАСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

Рассмотрим краевую задачу, описываемую уравнением

$$L\bar{u} = \bar{F}, \qquad (85)$$

где L – оператор краевой задачи, сформулированный с учетом краевых условий в рамках метода стандартной (расширенной) области; $\bar{u}$ – искомая вектор-функция; $\bar{F}$ – заданная вектор-функция правых частей.

Постановке (85) соответствует функционал энергии вида

$$\Phi(\bar{u}) = 0.5 \cdot (L\bar{u}, \bar{u}) - (\bar{F}, \bar{u}), \qquad (86)$$

стационарной точкой которого является решение задачи (85); запись типа $(\bar{f}, \bar{g})$, как и прежде обозначает скалярное произведение функций $\bar{f}$ и $\bar{g}$.

Дискретная постановка задачи имеет вид:

$$A\bar{u}_n = \bar{f}_n, \qquad (87)$$

где A – разностный (вариационно-разностный; конечноэлементный) аналог исходного континуального оператора из постановки (85); $\bar{u}_n$ – искомый вектор; $\bar{f}_n$ – заданная вектор-функция; n – размерность дискретной задачи.

Для формирования матрицы дискретного оператора могут использоваться различные способы, например, стандартная техника метода конечных элементов или метод базисных (локальных) вариаций А.Б. Золотова.

Переходя в (86) к дискретному базису Хаара, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{u}_n) &= 0.5 \cdot (A\bar{u}_n, \bar{u}_n) - (\bar{f}_n, \bar{u}_n) = \\ &= 0.5 \cdot (AQ\bar{v}_n, Q\bar{v}_n) - (\bar{f}_n, Q\bar{v}_n) = \\ &= 0.5 \cdot (Q^* AQ\bar{v}_n, \bar{v}_n) - (Q^*\bar{f}_n, \bar{v}_n), \end{aligned} \qquad (88)$$

т.е.

$$\tilde{\Phi}(\bar{v}_n) = 0.5 \cdot (Q^* AQ\bar{v}_n, \bar{v}_n) - (Q^*\bar{f}_n, \bar{v}_n), \qquad (89)$$

где

$$\bar{u}_n = Q\bar{v}_n; \qquad (90)$$

$\bar{v}_n$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов разложения вектора $\bar{u}_n$ по дискретному базису Хаара; Q – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по столбцам.

Перепишем задачу относительно новых неизвестных $\bar{v}_n$ в виде

$$\widetilde{A}\bar{v}_n = \bar{F}_n, \quad (91)$$

где $$\widetilde{A} = Q^* A Q; \quad \bar{F}_n = Q^* \bar{f}_n. \quad (92)$$

При дальнейшем решении задачи в базисе Хаара целесообразно исключить из разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) неизвестные, являющиеся коэффициентами при базисных функциях, носитель которых достаточно удален от исследуемой зоны (на основе применения алгоритмов осреднения и редукции, описанных в разделе 2 настоящей статьи).

4. КОРРЕКТНЫЕ МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К ЛОКАЛЬНОМУ РАСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

После дискретизации операторных коэффициентов в постановках (44)-(46) и (64)-(66) с использованием техники МКЭ получены дискретно-континуальные расчетные модели соответственно балки-стенки и пластины, в рамках которых на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по неосновному направлению аппроксимируется, полиномами (первого порядка для балки-стенки и третьего порядка для пластины), по основному направлению их вид остается искомым. В результате формулируются постановки многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

При расчете балки-стенки имеем систему из $4N$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$(\bar{U}_n^{(k)})'(x_2) = A_k \bar{U}_n^{(k)}(x_2) + \bar{\bar{R}}_k(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \ k = 1, ..., n_k - 1; \quad (93)$$

$$B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \ k = 2, ..., n_k - 1; \quad (94)$$

$$B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (95)$$

где $$\bar{U}_n^{(k)} = \bar{U}_n^{(k)}(x_2) = [\ (\bar{u}_n^{(k)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k)})^T\ ]^T; \quad (96)$$

$$(\bar{U}_n^{(k)})' = \partial_2 \bar{U}_n^{(k)}; \quad (97)$$

$$\bar{u}_n^{(k)} = \bar{u}_n^{(k)}(x_2) = [\ (\bar{u}_{1,n}^{(k)})^T \quad (\bar{u}_{2,n}^{(k)})^T\ ]^T; \quad (98)$$

$$\bar{v}_n^{(k)} = \bar{v}_n^{(k)}(x_2) = [\ (\bar{v}_{1,n}^{(k)})^T \quad (\bar{v}_{2,n}^{(k)})^T\ ]^T; \quad (99)$$

$$\bar{u}_{j,n}^{(k)} = \bar{u}_{j,n}^{(k)}(x_2) = [\ u_{j,n}^{(k,1)} \quad u_{j,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad u_{j,n}^{(k,N_k)}\ ]^T, \quad j = 1, 2; \quad (100)$$

$$\bar{v}_{j,n}^{(k)} = \bar{v}_{j,n}^{(k)}(x_2) = [\ v_{j,n}^{(k,1)} \quad v_{j,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad v_{j,n}^{(k,N_k)}\ ]^T, \quad j = 1, 2; \quad (101)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} K_{k,uu} & K_{k,vv}^{-1} \widetilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad (102)$$

$$\bar{\bar{R}}_k(x_2) = -\begin{bmatrix} 0 \\ K_{k,vv}^{-1} \bar{R}_{k,u} \end{bmatrix}; \quad (103)$$

$$\bar{R}_{k,u}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{R}_{u,1}^{(k)} \\ \bar{R}_{u,2}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (104)$$

$$\mathscr{L}_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu}; \quad \mathscr{L}_{k,uv} \Rightarrow K_{k,uv}; \quad \widetilde{\mathscr{L}}_{k,uv} \Rightarrow \widetilde{K}_{k,uv}; \quad \mathscr{L}_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \quad (105)$$

$$\bar{R}_{u,j}^{(k)} = \bar{R}_{u,j}^{(k)}(x_2) = [\ (\bar{R}_{u,j}^{(k,1)})^T \quad (\bar{R}_{u,j}^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,j}^{(k,N)})^T\ ]^T, \quad j = 1, 2; \quad (106)$$

$N - 1$ – количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов; $u_{1,n}^{(k,i)}, u_{2,n}^{(k,i)}$, $v_{1,n}^{(k,i)}, v_{2,n}^{(k,i)}$ – узловые неизвестные (составляющие перемещений $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ на i-м элементе и их производные $v_1^{(k)}$ и $v_2^{(k)}$ по x_2 на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$; $R_{u,1}^{(k,i)}, R_{u,2}^{(k,i)}$ – значения узловых нагрузок, приложенных в i-м узле по направлению осей Ox_1 и Ox_2, распределенных на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$; E – единичная матрица соответствующего порядка; B_k^-, B_k^+, $k = 2, ..., n_k - 1$ и B_1^+, $B_{n_k}^-$ – заданные

матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные $4N$-го порядка; $\overline{g}_k^-, \overline{g}_k^+,\ k=2,...,n_k-1$ и $\overline{g}_1^+, \overline{g}_{n_k}^-$ – заданные $4N$-мерные векторы правых частей граничных условий.

После перехода в (93)-(95) к дискретному одномерному базису Хаара по переменной x_1, реализации процедур редукции и осреднения получим соответствующую редуцированную постановку многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\overline{V}_k' = A_k \overline{V}_k + \overline{\overline{F}}_k, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b),\ \ k=1,...,n_k-1; \tag{107}$$

$$\widetilde{B}_k^- \overline{V}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \widetilde{B}_k^+ \overline{V}_k(x_{2,k}^b + 0) = \overline{\overline{g}}_k^- + \overline{\overline{g}}_k^+,\ \ k=2,...,n_k-1; \tag{108}$$

$$\widetilde{B}_1^+ \overline{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \widetilde{B}_{n_k}^- \overline{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \overline{\overline{g}}_1^+ + \overline{\overline{g}}_{n_k}^-, \tag{109}$$

где

$$\overline{U}_n^{(k)}(x_2) = S_{b,k} \overline{V}_k(x_2); \tag{110}$$

$$S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}; \tag{111}$$

$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix}; \tag{112}$$

$$\overline{w}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \overline{w}_i^{(k),red}(x_2),\ \ i=1,2; \tag{113}$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}; \tag{114}$$

$$P_{12} \overline{u}_n^{(k)}(x_2) = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1,n}^{(k)}(x_2) \\ \overline{u}_{2,n}^{(k)}(x_2) \end{bmatrix},\ \ k=1,2,...,n_k-1; \tag{115}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \widetilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix}; \tag{116}$$

$$\overline{\overline{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \overline{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \tag{117}$$

$$\overline{V}_k = \begin{bmatrix} \overline{w}_k^{red} \\ \overline{t}_k^{red} \end{bmatrix}; \quad \overline{V}_k' = \partial_2 \overline{V}_k; \tag{118}$$

$$A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,vv} S_k;\ \ \widetilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \widetilde{A}_{k,uv} S_k;\ \ A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k;\ \ \overline{b}_{k,s} = S_k^T \overline{b}_k; \tag{119}$$

$$\overline{t}_k^{red} = \partial_2 \overline{w}_k^{red},\ \ k=1,...,n_k-1; \tag{120}$$

$$\overline{b}_k = K_{k,vv}^{-1} \overline{R}_{k,u}; \tag{121}$$

$$\widetilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k},\ \ k=2,...,n_k;$$

$$\widetilde{B}_k^+ = B_k^- S_{b,k},\ \ k=1,...,n_k-1; \tag{122}$$

A_k – матрица размером $2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; $\overline{V}_k$ и $\overline{\overline{F}}_k$ – векторы размером $2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; $\widetilde{B}_k^-$, $\widetilde{B}_k^+$ – прямоугольные матрицы размером $4N \times 2(N_{red,1}^{(k-1)} + N_{red,2}^{(k-1)})$ и $4N \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$ соответственно.

При расчете пластины имеем систему из $8N$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$\overline{Y}_k'(x_2) = A_k \overline{Y}_k(x_2) + \overline{\overline{R}}_k(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b),\ \ k=1,...,n_k-1; \tag{123}$$

$$B_k^- \overline{Y}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \overline{Y}_k(x_{2,k}^b + 0) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+,\ \ k=2,...,n_k-1; \tag{124}$$

$$B_1^+ \overline{Y}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \overline{Y}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^-, \tag{125}$$

где

$$\overline{Y}_k = \overline{Y}_k(x_2) = [\ (\overline{y}_{k,1})^T \ \ (\overline{y}_{k,2})^T \ \ (\overline{y}_{k,3})^T \ \ (\overline{y}_{k,4})^T\ ]^T; \tag{126}$$

$$(\overline{Y}_n^{(k)})' = \partial_2 \overline{Y}_n^{(k)}; \tag{127}$$

$$\overline{y}_{k,j} = \overline{y}_{k,j}(x_2) = [\ (\overline{y}_{n,j}^{(k,1)})^T \ \ (\overline{y}_{n,j}^{(k,2)})^T \ \ \ldots \ \ (\overline{y}_{n,j}^{(k,N)})^T\ ]^T,\ \ j=1,2,3,4; \tag{128}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ K_{k,4}^{-1} K_{k,0} & 0 & K_{k,4}^{-1} K_{k,2} & 0 \end{bmatrix}; \tag{129}$$

$$\overline{\overline{R}}_k(x_2) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{k,4}^{-1} \overline{R}_{k,1} \end{bmatrix}; \tag{130}$$

$$\mathcal{L}_{k,4} \Rightarrow K_{k,4};\ \ \mathcal{L}_{k,2} \Rightarrow K_{k,2};\ \ \mathcal{L}_{k,0} \Rightarrow K_{k,0};$$

(131)

$$\overline{R}_{k,1}(x_2) = [\ (\overline{R}_{n,1}^{(k,1)})^T \quad (\overline{R}_{n,1}^{(k,2)})^T \quad ... \quad (\overline{R}_{n,1}^{(k,N)})^T\ ]^T;$$

(132)

$$\overline{R}_{n,1}^{(k,i)} = [\ R_{n,1,w}^{(k,i)} \quad 0\ ]^T; \qquad (133)$$

$N-1$ – количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов; $y_j^{(k,i)}(x_2),\ j=1,2,3,4$ и $z_j^{(k,i)}(x_2),\ j=1,2,3,4$ – узловые неизвестные значения функций $y_j^{(k)}(x_1,x_2),\ j=1,2,3,4$ и $z_j^{(k)}(x_1,x_2),\ j=1,2,3,4$ в i-м элементе на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$; $R_{n,1,w}^{(k,i)}$ – значения узловых нагрузок, приложенных в i-м узле по направлению оси Ox_3, распределенных на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$; E – единичная матрица соответствующего порядка; $B_k^-, B_k^+,\ k=2,...,n_k-1$ и $B_1^+,\ B_{n_k}^-$ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные $8N$-го порядка; $\overline{g}_k^-, \overline{g}_k^+,\ k=2,...,n_k-1$ и $\overline{g}_1^+, \overline{g}_{n_k}^-$ – заданные $8N$-мерные векторы правых частей граничных условий.

После перехода в (123)-(125) к дискретному одномерному базису Хаара по переменной x_1, реализации процедур редукции и осреднения получим соответствующую редуцированную постановку многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\overline{G}_k' = A_k \overline{G}_k + \widetilde{F}_k,\quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b),\ \ k=1,...,n_k-1; \qquad (134)$$

$$\widetilde{B}_k^- \overline{G}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \widetilde{B}_k^+ \overline{G}_k(x_{2,k}^b + 0) = \overline{\widetilde{g}}_k^- + \overline{\widetilde{g}}_k^+,\quad k=2,...,n_k-1; \qquad (135)$$

$$\widetilde{B}_1^+ \overline{G}_1(x_{2,1}^b + 0) + \widetilde{B}_{n_k}^- \overline{G}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \overline{\widetilde{g}}_1^+ + \overline{\widetilde{g}}_{n_k}^-, \qquad (136)$$

где

$$\overline{Y}_k(x_2) = S_{b,k} \overline{G}_k(x_2); \qquad (137)$$

$$S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_k \end{bmatrix}; \qquad (138)$$

$$S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}; \qquad (139)$$

$$\overline{G}_k = [\ (\overline{g}_1^{(k)})^T \quad (\overline{g}_1^{(k)})^T \quad (\overline{g}_1^{(k)})^T \quad (\overline{g}_1^{(k)})^T\ ]^T;$$

(140)

$$\overline{G}_k' = \partial_2 \overline{G}_k; \qquad (141)$$

$$\overline{g}_1^{(k)} = \overline{h}_k^{red};\quad \overline{g}_2^{(k)} = \partial_2 \overline{h}_k^{red};\quad \overline{g}_3^{(k)} = \partial_2^2 \overline{h}_k^{red};\quad \overline{g}_4^{(k)} = \partial_2^3 \overline{h}_k^{red}; \qquad (142)$$

$$\overline{h}_1(x_2) = Q^T \overline{w}(x_2);\quad \overline{h}_2(x_2) = Q^T \overline{\varphi}(x_2),\quad k=1,...,n_k-1; \qquad (143)$$

$$\overline{w}_k(x_2) = [\ y_1^{(k,1)}(x_2)\ \ y_1^{(k,2)}(x_2)\ \ ...\ \ y_1^{(k,N)}(x_2)\ ]^T;$$

(144)

$$\overline{\varphi}_k(x_2) = [\ z_1^{(k,1)}(x_2)\ \ z_1^{(k,2)}(x_2)\ \ ...\ \ z_1^{(k,N)}(x_2)\ ]^T;$$

(145)

$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix}; \qquad (146)$$

$$\overline{h}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \overline{h}_i^{(k),red}(x_2),\ \ i=1,2; \qquad (147)$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}; \qquad (148)$$

$$P_{12} \overline{y}_{k,1}(x_2) = \begin{bmatrix} \overline{w}_k(x_2) \\ \overline{\varphi}_k(x_2) \end{bmatrix},\ \ k=1,2,...,n_k-1;$$

(149)

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,4,s}^{-1} A_{k,0,s} & 0 & A_{k,4,s}^{-1} A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix}; \qquad (150)$$

$$\overline{\widetilde{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{k,4,s}^{-1} \overline{b}_{k,s} \end{bmatrix};\quad \overline{b}_{k,s} = S_k^T \overline{b}_k; \qquad (151)$$

$$A_{k,4,s} = S_k^T A_{k,4} S_k;\quad A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,2} S_k;\quad A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,0} S_k;\quad \overline{b}_k = K_{k,4}^{-1} \overline{R}_{k,1}; \qquad (152)$$

$$\widetilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k},\ \ k=2,...,n_k;\quad \widetilde{B}_k^+ = B_k^- S_{b,k},\ \ k=1,...,n_k-1; \qquad (153)$$

A_k – матрица размером $4(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)})\times 4(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)})$; $\overline{G}_k$ и $\overline{\overline{F}}_k$ – векторы размером $4(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)})$; $\widetilde{B}_k^-$, $\widetilde{B}_k^+$ – прямоугольные матрицы размером $8N\times 4(N_{red,1}^{(k-1)}+N_{red,2}^{(k-1)})$ и $8N\times 4(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)})$ соответственно.

Системы линейных алгебраических уравнений, вытекающие из граничных условий (108)-(109) или (135)-(136) являются переопределенными и для их решения можно использовать метод наименьших квадратов.

Для точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики типа (107)-(109) или (134)-(136) используется методика, предложенная и развитая в работах А.Б. Золотова, П.А. Акимова и М.Л. Мозгалевой.

Замечание. Исследования проводились в рамках Гранта 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 18-32.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 33-45.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-контину-ального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-контину-ального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-контину-ального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами.** О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и

расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.
7. **Белый М.В., Булгаков В.Е., Золотов А.Б.** Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1987, т. 27, №6, с. 875-888.
8. **Власов В.З.** Избранные труды. В 3 томах. - М.: Издательство АН СССР, 1962-1964. – 528с. (1 том), 508 с. (2 том), 472 с. (3 том).
9. **Власов В.З.** Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
10. **Золотов А.Б.** К расчету трехмерных конструкций на ЭВМ. // Строительная механика и расчет сооружений, 1969, №6, с. 22-27.
11. **Золотов А.Б.** Некоторые методы решения дискретных операторных уравнений для многомерных краевых задач расчета конструкций. // Вестник МГСУ. Строительство: фундаментальные и прикладные исследования, №3, 2006, с. 79-80.
12. **Золотов А.Б., Белый М.В., Булгаков В.Е.** Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1987, №6.
13. **Золотов А.Б., Лейтес Е.С.** Об одном подходе к решению систем дифференциальных уравнений при расчете строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №3, 1976.
14. **Золотов А.Б., Сидоров В.Н.** Алгоритмизация решения краевых задач строительной механики на ЭВМ. // Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №5, с. 36-42.
15. **Золотов А.Б., Сидоров В.Н.** Метод базисных вариаций для численного решения краевых задач. // Вестник МГСУ, №3, 2006, с. 122-128.
16. **Канторович Л.В.** Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. // ДАН СССР, 1934.
17. **Канторович Л.В.** Об одном прямом методе решения задачи о минимуме двойного интеграла. // Изв. АН СССР, 1933, №5.
18. **Канторович Л.В.** Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. // Известия АН СССР, VII серия, 1933.
19. **Мозгалева М.Л., Золотов А.Б.** Использование дискретного базиса Хаара для получения локального решения краевых задач. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 5, Issue 1&2, 2009, pp. 127-132.
20. **Мозгалева М.Л., Золотов А.Б., Воробьев М.В.** Некоторые вопросы задач о стыковке строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 4, Issue 2, 2008, pp. 93-94.
21. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. трудов №4. – М.: МГСУ, 2001. – с. 248-258.
22. **Перельмутер А.В.** Беседы о строительной механике. – М.: Издательство SCAD Soft; Издательство Ассоциации строительных вузов, 2014. – 250 с.
23. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможности их анализа.– Киев: Сталь, 2002.–445с.
24. **Постнов В.А.** Численные методы расчета судовых конструкций. –Л.: Судостроение, 1977.–280 с.
25. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // Известия ВУЗов. Строительство, №10, 2004, с. 8-14.
26. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Издательство АСВ, 2005. – 736 с.
27. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965.– 412с.

28. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
29. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami**. Theoretical Foundations of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014) pp. 2924-2927.
30. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami**. About Verification of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014) pp. 3013-3016.
31. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026 (2014) pp. 95-103.
32. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 720-723.
33. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 724-727.
34. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, Vol. 1040 (2014) pp. 664-669.
35. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems. // Procedia Engineering 91 (2014), pp. 2-7.
36. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method of Local Structural Analysis for Two-Dimensional Problems. // Procedia Engineering 91 (2014), pp. 8-13.
37. **Bulgakov V.E., Belyi M.V.** Fast Agorithms for Multi-Grid Solver of 3-D Boundary Value Problems in Structural Analysis. - Computers and Structures, 1992, vol. 44, No 4, p. 869-875.
38. **Bulgakov V.E., Belyi M.E., Mathisen K.M.** Multilevel aggregation method for solving largescale generalized eigenvalue problems in structural dynamics.// Int. j. Numer. Methods Eng., 1997, 40, 453-471.
39. **Fish J., Belsky V.** Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1995, 1-16.
40. **Fish J., Belsky V.** Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 2: Multidimensions. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1995, 17-38.
41. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // Proceedings of the International Symposium LSCE 2002 organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ СТАДИЙ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

М.С. Барабаш
Национальный авиационный университет, ООО «ЛИРА САПР», г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена рассмотрению методов моделирования конструкций зданий и сооружений с учетом их реальной работы на всех стадиях жизненного цикла, применению методов нелинейного деформирования для оценки несущей способности конструкций.

Ключевые слова: моделирование, жизненный цикл, возведение, несущие конструкции, напряженно-деформированное состояние

NUMERICAL MODELLING FOR STRESS-STRAINED STATE OF STRUCTURE INCLUDING LIFE CYCLE STAGES OF BUILDINGS AND INSTALLATIONS

Maria S. Barabash
National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: In given article are considered modelling methods for buildings and installations structures including their real work on all life cycle stages. Application of non-linear deformation methods to evaluate load-bearing capacity of structures is represented.

Key words: modeling, life cycle, erection, load-bearing structures, stress-strained state

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений проектирования конструкций зданий и сооружений, соответствующих современным требованиям повышения уровня надежности, безопасности, живучести при снижении материалоемкости, является численное моделирование. Причем, важное значение принимает именно численное моделирование процессов жизненного цикла, связанных с изменением напряженно-деформированного состояния (НДС) на всех стадиях существования строительного объекта.

Необходимость полноценного численного анализа зданий и сооружений диктуется: усложнением конструктивных решений и условий эксплуатации (многомерность, комплексность и многофункциональность зданий и сооружений, их внушительные габариты, исключительная сложность мониторинга по текущему техническому состоянию, невозможность их ремонта без полного исключения нагрузок, склонность к изменению объемно - планировочных решений и режимов нагрузки в ходе эксплуатации); уникальностью (грунтовые, климатические и другие внешние условия, неповторимая сложность и продолжительность возведения и эксплуатации, повышенная роль «человеческого фактора» на всех стадиях жизненного цикла); а также неполнотой и неопределенностью исходных данных (по геометрии, жесткости, предельным и

начальным условиям, нагрузкам и воздействиям)
Между тем, все перечисленные факторы не в полной мере учитываются в существующих нормативных документах и в практике проектирования и строительства, что приводит либо к недостаточной надежности конструкций, либо к излишнему расходу материалов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Существующие подходы при проектировании и мониторинге существующих зданий, как правило, ориентированы на определенную стадию жизненного цикла и не учитывают истории, связывающей все стадии жизненного цикла. Таким образом, создание технологии моделирования, отслеживающей изменение НДС конструкций на всех стадиях жизненного цикла, и учитывающей на каждой последующей стадии состояние конструкции на предыдущей стадии является актуальной задачей.
Целью исследований является решение проблемы конструкционной безопасности зданий и сооружений на основе создания комплекса научно-обоснованных методов численного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом стадий их жизненного цикла и развития методов расчета конструкций с учетом нелинейного деформирования. Численное моделирование процессов жизненного цикла позволяет поставить и решить задачи, которые невозможно решить физическим экспериментом.
Научная новизна полученных результатов заключается в том, что автором получены новые научно обоснованные результаты, направленные на создание методов моделирования и расчета высотных зданий и сооружений с учетом реальной работы конструкций на всех стадиях жизненного цикла.
Разработанный теоретический аппарат, реализующий основные закономерности нелинейного деформирования конструкций зданий и сооружений, явился основой разработки практических алгоритмов и рекомендаций по проектированию и расчету зданий и сооружений.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Основными проблемами моделирования являются сложность создания конечно-элементной модели, недостаточность и проблематичность описания вероятностных процессов нагружения, недостаточные знания о реологических свойствах материала, особенностях сложного и циклического нагружения и многое др.
Надежность и безопасность зданий и сооружений все более связывается с формированием научных подходов моделирования действительной работы конструкций для нормального и аварийного режимов эксплуатации. Важным вопросом становится возможность контроля процесса деформирования и накопления повреждений материалами конструкций с течением времени, и, как следствие, изменение схемы работы конструктивной системы в целом, а также возможного разрушения конструктивных узлов, переход сооружения в аварийное состояние с вероятностью обрушения. Внедрение в практику проектирования конструкций учета процессов изменения НДС на всех этапах жизненного цикла дает возможность уже на стадии проектирования выполнить достоверную оценку НДС, и провести многовариантные численные эксперименты.
В статье предлагаются разработанные численные методы, позволяющие осуществлять моделирование процесса всего жизненного цикла зданий и сооружений, включая стадии возведения, реологические процессы на стадии и эксплуатации, процесс приспособляемости конструктивной системы

к изменяющимся нагрузкам в случае форс-мажорных ситуаций.

Достаточно часто конструкторы, создавая расчётную схему здания, вводят ряд различных допущений. При этом, вводимые при переходе от реального объекта к его расчетной схеме упрощения, не должны существенно влиять на точность и достоверность получаемых результатов. В процессе проведения ряда численных экспериментов были выявлены некоторые эффекты, приводящие к некорректной оценке НДС, и даны рекомендации по устранению подобных эффектов.

Для полного и достоверного описания напряженно-деформированного состояния любого здания и сооружения, необходимо не только с высокой точностью определить внешние воздействия, но и правильно произвести переход от реального объекта к его расчетной модели/схеме. Проведена классификация процессов, влияющих на формирование (изменение) НДС конструкций зданий и сооружений на протяжении его жизненного цикла и разработка и применение методов теории упругости, позволяющих их учесть на основополагающей стадии – стадии проектирования (табл.1).

Таблица 1. Классификация процессов жизненного цикла, влияющих на НДС конструкций.

Процессы жизненного цикла	Описание	Тип нелинейности
Процесс нагружения	Отслеживание начальных стадий линейно-упругой работы конструкции, стадий последовательного развития трещин в бетоне и растянутой арматуре, стадий, непосредственно предшествующих разрушению	Физическая, геометрическая, конструктивная
Процесс возведения	НДС определяется для всех последовательно сменяющихся конструктивных схем, соответствующих этапам возведения и модель сводной конструкции «хранит память» об истории возведения	Генетическая, физическая, конструктивная
Процессы эксплуатационной стадии	Моделирование реологических процессов изменения НДС конструкции при длительной нагрузке, связанных с ползучестью и изменением свойств во времени	Физическая, геометрическая
Процессы запроектных воздействий	Моделирование процессов «приспособляемости» конструкции при «форс-мажорных» ситуациях, когда при внезапном выходе из строя одного или нескольких элементов конструкция пытается приспособиться к новой ситуации, изменив (иногда за счет потери эксплуатационных качеств) свою первоначальную конструктивную схему, не допустив обрушения всего сооружения	Физическая, геометрическая

В физически нелинейных задачах отсутствует линейная зависимость между напряжениями и деформациями [1,5]. Материал конструкции подчиняется нелинейному закону деформирования (нелинейная упругость). Моделирование физической нелинейности (нелинейной упругости) материалов конструкций производится с помощью физически нелинейных конечных элементов, воспринимающих информацию из развитой библиотеки законов деформирования

материалов (зависимостей σ–ε). Библиотека законов деформирования позволяет учитывать практически любые нелинейные свойства материала. Существует несколько методов для решения нелинейных задач различных типов: шаговый метод, метод секущих, итерационный метод.

Разработан новый метод учета физической нелинейности – «инженерная нелинейность», основанный на методе секущих (рис.1).

В физическом смысле метод секущих означает итерационный поиск такой линейно упругой системы (линейный оператор А соответствует модулю E_m, который, естественно переменен по области Ω), которая под заданную нагрузку f имеет такие же перемещения, как и нелинейно деформируемая система (нелинейный оператор А). Начальный линейный оператор A_0 соответствует $\frac{\sigma_{i,0}}{\varepsilon_{i,0}} = \left.\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0}$. Уравнение метода конечных элементов на $m+1$ итерации будет иметь вид: $K^{(m)}_{q_{m+1}} = P$;

$$\sum_{r\in l_1} K^{(m)}_{l_1,r} q_{1,m+1} + \cdots + \sum_{r\in ls} K^{(m)}_{ls,r} q_{s,m+1} + \ldots \cdots \sum_{r\in \ln} K^{(m)}_{\ln,r} q_{n,m+1} = P_l \quad (1)$$

где $K^{(m)}_{ls,r}$ – элемент матрицы жесткости r элемента;

$q_{s,m+1\ -\ s}$ – степень свободы (перемещение) на m+1 итерации;

P_l – узловая внешняя сила по направлению l степени свободы.

Матрица жесткости $[K_r]^{(m)}$ строится как для линейно упругого тела с переменным по области КЭ модулем $E_m = \frac{\sigma_{i,m}}{\varepsilon_{i,m}}$. Значение элементов общей матрицы [K(q)] на каждом этапе решения системы линейных уравнений вида (1) определяется через значения вектора {q}, полученного на предыдущем этапе

$$[K(q^{(s-1)})]\{q^{(s)}\} = \{P\}, \quad (2)$$

где s – номер итерации. На первой итерации (s = 1) значения неизвестных q_i (i= 1, 2 ... n), от которых зависят элементы матрицы [K] можно принять равным нулю. В этом случае нелинейные составляющие обращаются в нуль. В результате получим матрицу $[K(q)] = [K]_\Lambda$ линейной задачи.

Процесс последовательных решений уравнения (2) с процедурой уточнения элементов матрицы [K] на каждой итерации продолжается до тех пор, пока разница между результатами решения, полученными на данной и предыдущей итерации, окажется меньше заданной, достаточно малой величины.

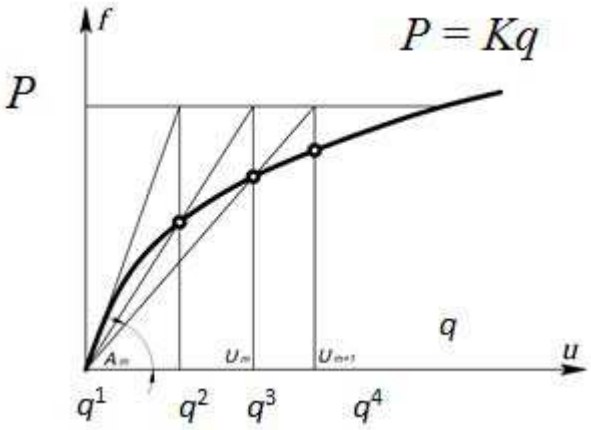


Рисунок 1. Графическая интерпретация метода секущих.

Применение описанного выше метода позволяет путем деформационного расчета выйти на предельное состояние конструкции по несущей способности.

Принципы, заложенные в метод «инженерная нелинейность» следующие. Вначале задаются исходные данные как для обычного расчета. Затем задается «определяющее» нагружение, которое, по мнению пользователя, в основном определит напряженно-деформированные состояния элементов конструкции – развитие трещин,

пластические деформации бетона и арматуры. «Определяющее» нагружение задается как набор загружений, каждое со своим коэффициентом. На назначенное определяющее загружение выполняется расчет в нелинейной постановке с подбором на каждой итерации арматуры железобетонных элементов. Расчет выполняется, применяя итерационный метод секущих (метод Биргера). В результате расчета определяются жесткостные характеристики элементов, соответствующие секущим модулям деформации на последней итерации нелинейного расчета. Жесткостные характеристики стержневых элементов определяются как для стержней переменной жесткости, а для пластинчатых элементов – как для ортотропных пластин. Определение секущих жесткостных характеристик сечения (EI_x, EI_y, GI_{kp}, EF) в соответствии с усилиями M_x. M_y, N выполняется численными методами на основе решения трех уравнений равновесия:

$$\sum_n M_x = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \sigma_j(y_c, \alpha, \beta) \cdot y_j + M_x + N \cdot e_x = 0$$

$$\sum_n M_y = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \sigma_j(y_c, \alpha, \beta) \cdot x_j + M_y + N \cdot e_y = 0$$

$$\sum z = 0; \quad \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \sigma_j(y_c, \alpha, \beta) + N = 0$$

Уравнения составляются численно относительно трех неизвестных: y_c – смещение нейтральной оси; α – угол поворота нейтральной оси; β- угол поворота сечения (применяется закон плоских сечений). После нахождения α, β, y_c определяются секущие жесткостные характеристики. Оставшаяся часть сечения (сжатый бетон) расчленяется на полосы, параллельные нейтральной оси. Для каждой полосы определяется ε_j (рис. 3, в), по ε_j и секущий модуль E_j (рис.3, г). Затем по известным формулам определяются секущие жесткостные характеристики EI_x, EI_y, GI_{kp}, EF.

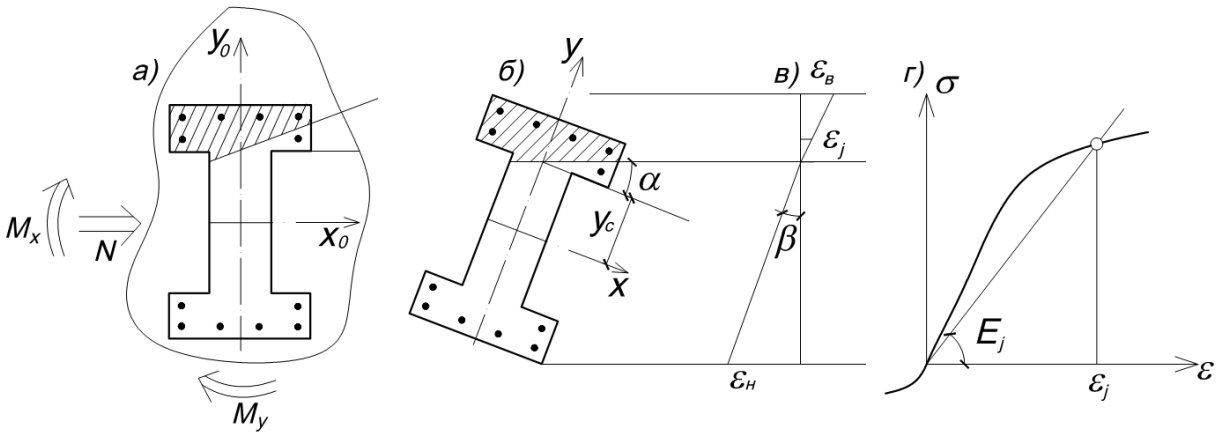


Рисунок 2. Определение жесткостных характеристик железобетонного стержня.

Линейно-деформируемая система, имеющая жескостные характеристики, полученные на последней итерации метода секущих $K^{(m)}$, в дальнейшем используется для последующего расчета на все заданные нагружения (в том числе и динамические), определяются РСУ, РСН, подбирается проектная арматура и выполняется конструирование в конструирующих системах. Такая организация нелинейного расчета не требует трудоемкого этапа задания арматуры, так как арматура подбирается автоматически во

время расчета, и дает достаточно адекватные результаты. Так, многочисленные исследования, проведенные на стадии тестовой эксплуатации, показывают, что перемещения от эксплуатационных нагрузок в 2,5…3,5 раза превышают перемещения, полученные на основе линейно-упругого расчета, и в ряде случаев наблюдается некоторое перераспределение усилий. Метод «инженерная нелинейность» позволяет интегрально оценить влияние изменения жесткостей на перераспределение усилий и увеличение перемещений для эксплуатационных нагрузок в рядовых практических расчетах.

Рассматривается вопрос необходимости учета процесса возведения высотного здания с рамно-связевой конструктивной схемой; большепролетного покрытия, а также проблема определения влияния факторов, влияющих на формирование НДС несущих элементов каркаса при возведении.

Помимо этого в ходе исследования устанавливаются недостатки традиционных методов расчета, и предлагаются решения, позволяющие упростить учет стадийности возведения здания.

Стадией, формирующей НДС, является стадия возведения. На этом этапе конструктивная схема строительного объекта изменяется в зависимости от последовательности возведения, что обуславливает изменение конструктивной и расчетной схемы здания, и его НДС во времени. В процессе возведения конструктивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения «замораживаться», определяя сечения элементов и конструкции узлов именно на этой стадии.

При возведении монолитных железобетонных конструкций важным эффектом, который необходимо учитывать при численном моделировании, являются нелинейные свойства бетона, т.е. изменение жесткостных характеристик в процессе нагружения (ползучесть, трещины)[2,3]/

Кроме того, в процессе монтажа переход к новой стадии часто осуществляется, когда возведенная на предыдущих стадиях конструкция еще не набрала проектной 28-дневной прочности. Это также обуславливает необходимость учета нелинейных эффектов, так как от стадии к стадии меняется жесткость возводимых элементов, в соответствии с временем их возведения. Численное моделирование процесса возведения представляется нелинейной задачей, даже если не учитывать эффекты, связанные с нелинейными свойствами бетона. В процессе возведения проявляется генетическая нелинейность, обусловленная изменением конструктивной схемы. Такая нелинейность вызвана тем, что НДС мгновенно возведенной конструкции не эквивалентно НДС конструкции, полученной на основе учета всей истории возведения (изменение расчетной схемы, возникновение и снятие монтажных опор и т.д.)

Методика, позволяющая производить расчеты с учетом последовательности возведения, основывается на модификации и усовершенствовании метода последовательных нагружений. Метод последовательных нагружений является одной из разновидностей шагового метода.

Система нелинейных уравнений, описывающих нелинейную задачу, выглядит следующим образом:

$$Au = f \qquad (3)$$

где: A – нелинейный оператор задачи;
u – вектор искомых перемещений;
f – вектор внешних нагрузок.

Идея шагового метода заключается в замене нелинейных уравнений (1) рекуррентной последовательностью линейных, которые на m шаге имеют вид $u_{m+1} = u_m + \Delta u_{m+1}$

$$A_m \Delta u_{m+1} = \Delta\beta_{m+1} f \; ; \; u_{m+1} = u_m + \Delta u_{m+1} \qquad (4)$$

где: A_m – линейный оператор, в

развернутом виде имеющий вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_j}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_n}\Big|u_m \\ \frac{\partial \psi_I}{\partial u_1}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_I}{\partial u_j}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_I}{\partial u_n}\Big|u_m \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial u_1}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_n}{\partial u_j}\Big|u_m & \frac{\partial \psi_n}{\partial u_n}\Big|u_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

Здесь $\psi_I\,(I=1,2...n)$ – нелинейные операторы, т.е. l уравнение системы $Au=f$ выглядит как $\psi_I(u_1,u_2,...u_j...u_n)=P_I$; t – параметр нагрузки.

Суть модификации метода заключается в том, что параметр t вводится к нагрузке P. При t = 0 легко определяется начальное решение u_o, при t=1 система превращается в исходную. Последовательно изменяя t от 0 до 1, находится приближенное решение.

Вычислительная схема на каждом шаге получается из следующих соображений: введем гипотезу, что на m-этапе t = t_m известно решение, т.е.

$A\,u_m = t_m f.$ (6)

Изменим tm на величину Δt_{m+1} так, чтобы $t_{m+1}=t_m+\Delta t_{m+1}$ была ближе к единице, чем t_m. Тогда:

$$A(u_m+\Delta u_{m+1})=(t_m+\Delta t_{m+1})f\ . \quad (7)$$

Разложим левую часть (6) в ряд Тейлора, тогда:

$$Au_m+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial^i}{\partial u^i}A\Big|_{u_m}\Delta u_{m+1}^i\right)+R_k= \quad (8)$$
$$=t_m f+\Delta t_{m+1}f$$

Пренебрегая квадратами и высшими степенями Δu_{m+1} (величина Δt должна допускать эту процедуру) и с учетом (6) получим линеаризованную систему для нахождения Δu_{m+1}, т.е.

$$A_m\Delta u_{m+1}=\Delta t_{m+1}f\ ,\ u_{m+1}=u_m+\Delta u_{m+1}\ . \quad (9)$$

где A_m – линейный оператор

$$\left(A_m=\frac{\partial}{\partial u}A\Big|u_m\right).$$

Напряжения определяются по формуле, аналогичной (7):

$$\{\sigma\}^{m+1}=\{\sigma\}^m+\{\Delta\sigma\}^m \quad (10)$$

Для малых этапов нагружения используется значение касательного модуля деформации, вычисляется по напряженно-деформированному состоянию конструкции предшествующей ступени загружения. Для изотропных материалов для определения касательного модуля деформаций используется следующий подход. При коэффициенте Пуассона, отличном от 0.5, псевдоупругие параметры вычисляются по формулам [5]:

$$E^*_{k(m)}=E_k^{m-1}/\Omega_k \quad (11)$$

$$\nu^*_{k(m)}=\left[\frac{1+\nu}{3}-\frac{(1-2\nu)E_k^{m-1}}{3E_0}\right]\Big/\Omega_k \quad (12)$$

где E0, ν – начальный модуль упругости и коэффициент Пуассона;

$E_к$ – касательный модуль обобщенной кривой деформирования;

$$\Omega_k=\left[\frac{2(1+\nu)}{3}+\frac{1-2\nu}{3E_0}E_k^{m-1}\right] \quad (13)$$

Если на m-м этапе происходит разгрузка, то для расчета принимается начальный модуль упругости E_0.

Предлагается более общий подход, основанный на зависимости $\sigma_i=\sigma(\varepsilon_i)$, где σ_i –

эквивалентные напряжения, ε_i – эквивалентные деформации. В этом случае касательный модуль деформации определяется, как $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i}$.

В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное увеличение нагрузки, начинающееся от 0 и заканчивающееся заданным f.

Для одномерного случая возможна геометрическая интерпретация метода (рис. 3)

На m+1 итерации уравнение метода конечных элементов имеет вид:

$$K_m \Delta u_{m+1} = t_{m+1} f \ , \qquad (14)$$

где K_m – матрица канонических уравнений на m-ом этапе расчета.

$$\sum_{r\in l_1} K^{(m)}_{l_1,r}\Delta u_{1,m+1} + \cdots + \sum_{r\in l j} K^{(m)}_{l j}\Delta u_{j,m+1} + \cdots$$
$$\cdots + \sum_{r\in \ln} K^{(m)}_{\ln,r}\Delta u_{n,m+1} = \Delta t_{m+1} P1 \qquad (15)$$

Перемещения (u_m) и усилия (S_m) для конструкции возведенной ранее (для этапов 1, 2, … m-1) определяются по формулам

$$u_m = u_{m-1} + \Delta u_m \, , S_m = S_{m-1} + \Delta S_m \, .$$

Линеаризованный оператор A_m соответствует касательным жесткостным характеристикам, т.е. $A_m = \frac{\partial}{\partial u} A\big|u_m$.

В отличие от (14) в (15) K_m не только составляются с учетом физически нелинейных свойств материала, но и с учетом изменения топологии конструкции, так как на m этапе расчета (m стадии возведения) учитывается появление новых элементов. При учете физической и геометрической нелинейности решение системы (15) требует дополнительных шагов типа (14).

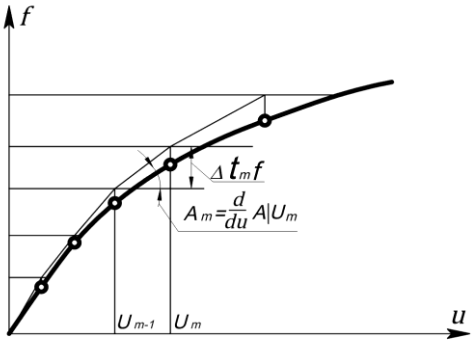


Рисунок 3. Геометрическая интерпретация метода последовательных нагружений.

Предлагается следующий алгоритм учете стадий последовательного возведения. Разбивается сооружение на n стадий (этажей), согласно используемой технологии возведения. Первоначально считается возведенным первая стадия (этаж), производится расчет его напряженно-деформированного состояния в линейно-упругой постановке с начальным модулем E_0. Далее предполагаем возведенными две стадии. Снова рассчитываем напряженно-деформированное состояние, но теперь учитываем нагрузки, возникшие во второй стадии. При этом, формируя матрицу жесткости второй стадии, воспользуемся значениями касательных модулей упругости, полученными из расчета методом последовательных нагружений для предыдущего этапа возведения сооружений E_c и ν_c, а для первой стадии (ранее возведенной) – значениями E_0 и ν_0. При этом, в возведенной стадии вычисляются касательные модули упругости и коэффициенты Пуассона. Аналогично поступаем, когда считаем возведенными 3, 4, ..., n стадии, до тех пор, пока расчет не будет охватывать всего сооружения. Компоненты напряжений и перемещений, полученные от воздействия нагрузок на каждой стадии, суммируются.

Описанные методики реализованы в программном комплексе ЛИРА-САПР.

К процессам жизненного цикла, происходящим в эксплуатационной стадии,

прежде всего, относятся реологические процессы изменения НДС конструкции при длительной нагрузке, связанные с ползучестью и изменением свойств бетона во времени.

Технология расчета конструкций с учетом ползучести бетона выглядит следующим образом:

- выполняется расчет в линейной постановке на все виды нагружений (статические, силовые, статические деформационные, динамические);
- определяются расчетные сочетаний усилий или расчетные сочетания нагружений;
- выполняется подбор арматуры в сечениях стержневых или пластинчатых элементов;
- производится унификация армирования элементов;
- по результатам армирования формируются новые жесткостные характеристики конструктивных элементов для последующего нелинейного расчета;
- задаются параметры ползучести бетона, учитывающие влажность и усадку бетона;
- назначается нагружение, на которое будет производиться расчет с учетом ползучести бетона;
- выполняется расчет для заданных промежутков времени. На каждом этапе расчета для каждого элемента определяется новая жесткость, которая зависит от напряжения бетона в этом элементе и заданных параметров ползучести. Новые переменные жесткости получаются в точках интегрирования как по сечению, так и по конечному элементу, в соответствии с заданной диаграммой деформирования. На каждом этапе определяются усилия, перемещения и новые жесткости по касательному модулю деформации для заданного промежутка времени.

Моделирование процесса старения бетона, по сути, является нелинейной задачей, обусловленной учетом свойств материала (физическая нелинейность). Решение этой задачи в ПК ЛИРА САПР основана на основных методах теории прочности бетона, которые в физическом смысле представляют собой реализацию законов нелинейного деформирования материалам по различным теориям.

ВЫВОДЫ

Для современных сложных сооружений (мосты, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только упругим расчетом, но и процессами изменения напряженно-деформированного состояния во времени. В процессе жизненного цикла конструктивная схема сооружения многократно изменяется, усилия и перемещения перераспределяются, значительно повышая вероятность трещинообразования и возникновения аварийной ситуации.

Для изучения физической системы методами численного моделирования ее заменяют абстрактной системой - математической моделью.

Реализация математической модели на компьютере дает возможность многократно и в широком диапазоне изменять входные параметры и условия функционирования сложных систем, заменяя, таким образом, экспериментальные исследования численным экспериментом. Кроме того, при решении ряда сложных конструкторских задач необходимо применение вариантного проектирования.

На современном этапе развития компьютерной техники разработано множество программных комплексов (ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР, SCAD, STARK, COSMOS, ANSYS, NASTRAN и др.), реализующих метод конечных элементов и позволяющих производить расчеты сложных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – М: Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.

2. **Барабаш М.С.** Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий / М. С. Барабаш // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – М.: Изд-во «АСВ», 2012. – Vol. 8, Issue 3 – С. 58 - 68.
3. **Барабаш М.С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства: Монография / Мария Сергеевна Барабаш – К.: Изд-во «Сталь», 2014. – 301 с.
4. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (издание 4-е переработанное и дополненное).- Москва: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во ДМК Пресс, Изд-во АСВ, 2011, 736 с
5. **Бате К., Вилсон Э.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. - М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

Барабаш Мария Сергеевна, академик Академии строительства Украины, кандидат технических наук, доцент, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, директор ООО «ЛИРА САПР», 03058, Украина, г. Киев, Кияновский переулок, 7А;
E-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, Computer Technologies in Construction Chair, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE;
E-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СБОРОЧНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ КАРКАСЕ БОЛЬШЕПРОЛЁТНОГО СООРУЖЕНИЯ С КУПОЛЬНЫМ ПОКРЫТИЕМ

А.Б. Бондарев
Магаданский филиал ООО «ПОЛЮС СТРОЙ», г. Магадан, РОССИЯ.

АННОТАЦИЯ. В статье изложены результаты исследования сборочных отклонений, возникающие при сборке большепролётного металлического сооружения с купольным покрытием. Исследование проводилось методом геометрического моделирования с помощью авторской компьютерной программы ВК РАСК. Обработка результатов исследования – величин отклонений узлов и длин замыкающих звеньев (стержней) размерной цепи выполнена методом наименьших квадратов. В результате исследований получены среднеквадратические величины возможных отклонений. Предложены мероприятия по снижению влияния отклонений, на точность сборки каркаса исследуемого сооружения.

Ключевые слова: большепролётные металлические пространственные покрытия, сборочные отклонения, геометрическое моделирование, теория управления

IDENTIFICATION AND ANALYSIS OF DEVIATIONS IN THE ASSEMBLY-SPAN METAL FRAMEWORK STRUCTURES WITH DOME COVER

Alexey B. Bondarev
Magadan branch, of Co.Ltd «POLYUS STROY», Magadan, RUSSIA.

ABSTRACT. The article presents the results of a study of assembly deviations arising during assembly-span metal buildings with domed cover. The study was conducted by the method of geometric modeling with the help of the author's computer program VC RASK. Processing of the results of research – the deviations of nodes and links of the lengths of closing (rods) of dimension circuit formed by the method of least squares. The studies were obtained rms values of the possible abnormalities. The measures to reduce the impact of deviations on the accuracy carcass of the investigated structures.

Keywords: spatial-span metal coating, assembly deviation, geometric modeling, control theory

ВВЕДЕНИЕ

В зданиях и сооружениях из металлоконструкций возникают отклонения на всех этапах жизненного цикла – проектирование → изготовление → монтаж → эксплуатация → реконструкция. Следовательно, задачи, связанные с определением отклонений и их учётом при проектировании металлоконструкций всегда будут актуальны. В связи с появлением отклонений действительная форма и положение узлов, и, реальное напряжённо-деформированное состояние (НДС) статически неопределимой конструкции будет отличаться от теоретического. Геометрические отклонения и фиктивные усилия, как правило, не учитываются статическим расчётом. Не учёт отклонений при проектировании, изготовлении, и сборке большепролётных стержневых многоэлементных металлоконструкций может снизить их несущую способность. В целом низкая точность изготовления и сборки приводит к снижению надёжности возведённого объекта. Кроме того, наличие отклонений приводит к большому количеству непредвиденных трудовых и

финансовых затрат, как правило, не учтённых в стоимости строительного объекта.

1. ОБЪЕКТ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель работы – исследовать величины сборочных отклонений в большепролётном шарнирно-стержневом металлическом сооружении с купольным покрытием при навесной сборке.

Объект исследования – большепролётное сооружение с металлическим каркасом и купольным покрытием (рис. 1). Исследуемое сооружение состоит из цилиндрической и купольной частей (рис. 2). Диаметр сооружения в плане составляет 107 м, а высота – 35,3 м. Цилиндрическая часть высотой 10 м состоит из 48 штук решётчатых колонн, связанных между собой системой колец и крестовых связей. Расстояние между ветвями колонн составляет 0,84 м, а расстояние между колоннами в меридиональном направлении – ≈6,99 м.

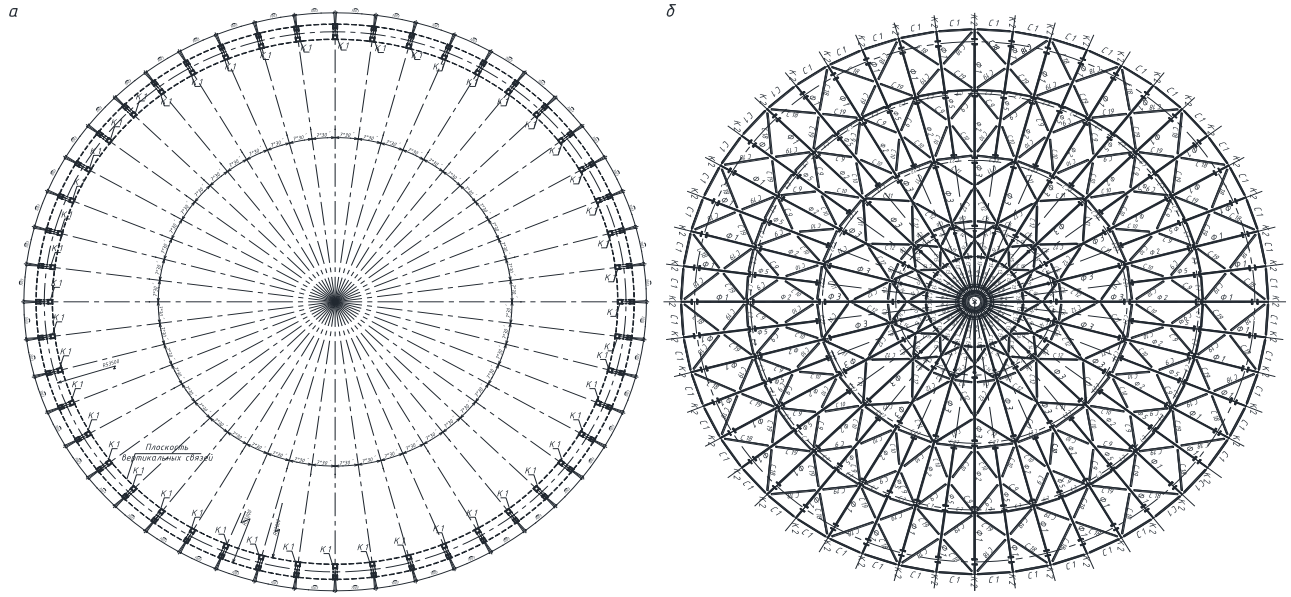


Рисунок 1. Схема расположения элементов сооружения: а – колонн; б – покрытия.

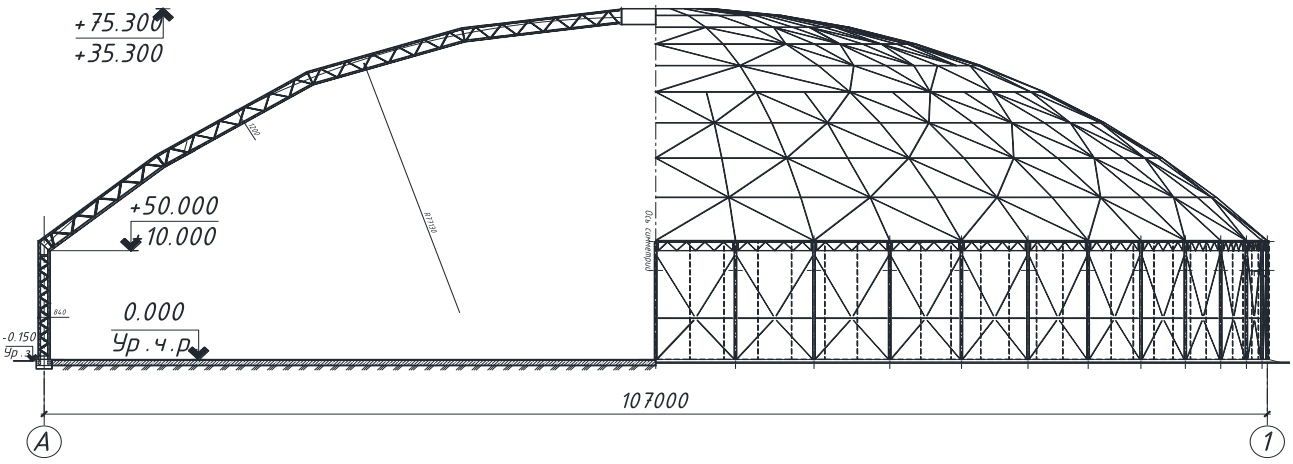


Рисунок 2. Общий вид сооружения.

На отметке +10,0 м колонны имеют перегиб и переходят от цилиндрической части сооружения в сферическую часть, образуя при этом опоры для купольного покрытия. Здесь же устроены кольцевые связи и мощные опоры для сопряжения цилиндрической и сферической части сооружения. Купольное покрытие сооружения запроектировано по ребристо-кольцевой схеме. Стрела подъёма составляет ≈ 22,1 м. Каркас купола состоит из 48-ми решётчатых рёбер высотой 1,2 м. Сечение поясов, решётки, рёбер, связей колон каркаса и купольного покрытия выполнено из гнутосварного профиля. Радиальные рёбра соединены между собой 10 штуками промежуточных колец. Меридиональные рёбра очерчены по дуге радиусом ≈77 м. Каждое ребро купольного покрытия объединено со смежным ребром системой связей в пространственную полуарку.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

С целью определения и анализа отклонений разработана методика вычисления геометрических отклонений, реализованная в вычислительном комплексе размерного анализа стержневых конструкций (ВК РАСК) [1]. Из расчёта точности в ВК РАСК будут известны: количество, размеры и отклонения в замыкающих звеньях (стержнях) сооружения [4]; среднеквадратическое, предельное и случайное отклонение длин стержней и координат узлов от номинального (проектного) значения.

Предлагаемая методика позволяет исключить недостатки существующих методик [2, 3], а также смоделировать процесс сборки конструкции, учитывая случайные отклонения размеров отдельных стержней, марок и монтажных блоков. Такой подход позволяет наиболее точно смоделировать реальный процесс сборки и определить величины отклонений.

Учитывая, вероятностный характер возможной действительной геометрической формы сооружения под испытанием подразумевается его однократное численное возведение до полной готовности. При определении отклонений принята следующая схема монтажа:

- цилиндрическую часть сооружения монтируют плоскими монтажными блоками, которые собираются на укрупнительной площадке с последующим контролем геометрических размеров согласно [4]. Затем устанавливаются вертикальные и кольцевые связи межу колоннами, представляющие собой плоские монтажные блоки и т.д.;
- параллельно с монтажом цилиндрической части сооружения в его центре методом наращивания монтируется башня, на которой собирают и устанавливают внутреннее опорное кольцо;
- конструкцию купольной части монтируют блоками, состоящими из элементов рёбер, связей, распорок, прогонов, внутренних и наружных ограждающих панелей. Из плоских блоков собирают пространственные полуарки на двух передвижных сегментных подмостях, которые симметрично расположены относительно друг друга в радиальном направлении. После закрепления концов полуарки на нижнем и верхнем опорных кольцах подмости опускают и перемещают в новое положение, расположенное под углом 30° относительно первого положения подмостей и т.д. Замыкание колец купола производят после окончания монтажа всех рёбер путём установки связей и распорок;
- затем производят демонтаж подвижных сегментных подмостей и центральной опоры.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ ОТКЛОНЕНИЙ

Принятая схема монтажа сооружения предполагает полную независимость установленных между собой смежных блоков колонн и смежных блоков пространственных полуарок. Следовательно, для статистического исследования погрешностей возведения рас-

сматриваемого сооружения достаточно провести моделирование монтажа пяти смежных блочных частей цилиндрической и сферической части сооружения. В качестве расчётных схем монтажных блоков приняты плоские четырёхугольники и многоугольники. Вершины этих блоков соответствуют узлам сопряжения блоков реального сооружения. Моделирование сборки из отправочных элементов выполнено с учётом линейных отклонений размеров конструкций, изготовляемых в кондукторах [4].

Отклонения в положении узлов определялись и оценивались по их отклонениям от номинала в нормальном (δN), меридиональном (δM), тангенциальном (δT) направлении. Статистическая оценка погрешностей производилась на основе 1000 серий испытаний каждого варианта монтажа. Под вариантом монтажа подразумеваются разные последовательности установки монтажных блоков. Первый вариант – монтаж колон, затем монтаж сферической части в направлении от нижнего опорного кольца к верхнему опорному кольцу. Второй вариант – монтаж колонн, затем монтаж сферической части в направлении от верхнего опорного кольца к нижнему опорному кольцу. Процесс корректировки положения монтажных блоков в процессе монтажа не вводился. В статье рассмотрена схема монтажа сооружения по первому варианту. Нумерация монтажных блоков колонн, связей и узлов покрытия приведена на рис. 3. Геометрическое положение места узлов конструкции, т.е. их координаты, получены путём обработки исходных файлов – номинальной геометрии сооружения в формате *.dwg с помощью программы AutoCAD Civil-3D. Основные характеристики расчётной схемы пространственного сооружения – схема состоит из 137 узлов и 440 элементов. Пространственный блок сооружения, показанный на рис. 3 примыкает к остальной пространственной части сооружения шарнирно, следовательно, в качестве закрепления в узлах применена шарнирно-неподвижная опора запрещающая линейное перемещение по 3-м направлениям в общей системе. Корректировка положения узлов в процессе моделирования монтажа не осуществлялась. Т.е. полученные отклонения – результат расчёта отклонений в предположении навесного метода монтажа и отсутствия подмостей.

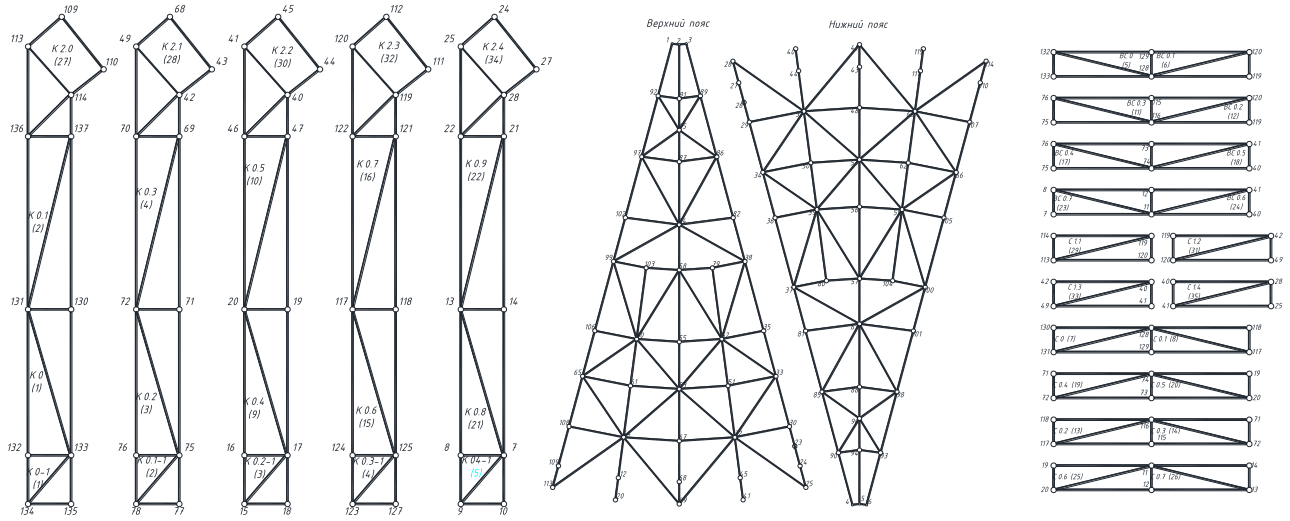


Рисунок 3. Нумерация монтажных блоков колонн, связей и узлов покрытия.

Естественно, что точность возведения пространственных блоков зависит от точности изготовления и сборки, отправочных марок в монтажные блоки. По результатам расчёта

точности отправочных марок можно утверждать, что их геометрические параметры соответствуют требованиям [4]. Однако результаты расчёта точности всего сооружения целиком из собранных отправочных марок в конструктивную форму показывают, что величины накопленных отклонений значительно выше нормативных [4]. Последовательность монтажа отправочных марок приведена на рис. 4.

В таблице 1 приведены три узла и три стержня с максимальными величинами среднеквадратических отклонений (СКО) в узлах и замыкающих стержнях без учёта корректировки. По результатам расчёта точности видно, что увеличение количества элементов и узлов в направлении сборки приводит к увеличению отклонений в узлах. Наиболее значительному увеличению подвержены отклонения узлов в меридиональном и нормально направлении. В меньшей степени отклоняются узлы в кольцевом направлении. Наибольшие отклонения имеют узлы, примыкающие к верхнему (внутреннему) опорному контуру – обусловлено накоплением отклонений при выполнении сборки сооружения в конструктивную форму.

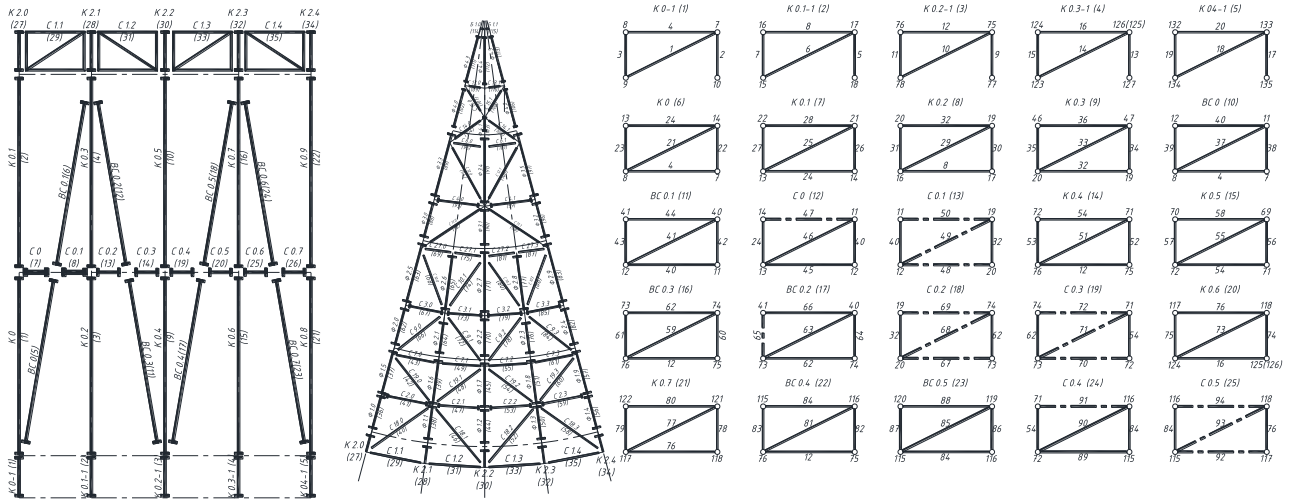


Рисунок 4. Маркировка и последовательность сборки некоторых монтажных блоков колонн и покрытия.

Таблица 1. Максимальные отклонения без корректировки, мм.

Узел	СКО dX	СКО dY	СКО dZ	Стержень	Линейное отклонение
73	58,62	196,41	142,58	71	203,92
103	182,54	39,43	257,97	113	209,28
104	170,60	34,92	263,24	114	211,12

Максимальные отклонения в длинах замыкающих стержней также наблюдаются в части блока покрытия, приближённой к внутреннему опорному контуру. Здесь следует отметить значительную величину отклонений узлов 73, 103, 104 по сравнению с другими узлами. Из таблицы видно, что максимальные величины отклонений узлов более чем в 5 раз превышает нормативные величины по [4] и – обусловлено накоплением отклонений в стержнях при их сборке.

Для корректировки узлов в процессе сборки в ВК РАСК предусмотрена соответствующая возможность (режим работы). Введение процесса корректировки в процесс монтажа приводит к снижению отклонений по направлению корректировки до малозначительного уровня и оказывает разнообразное влияние на отклонения в других направлени-

ях. Режим корректировки положения элементов позволяет снизить величины отклонений в 7-10 раз. Результаты обработки отклонений в ВК РАСК показывают, что по характеру распределения значения отклонений согласуются с нормальным законом распределения. Для компенсации отклонений в конструкции подмостей необходимо предусмотреть элементы (регулировочные опоры), которые скорректируют положение элементов купола в процессе монтажа. Задача регулировочных опор – выведение монтажных стыков на планово-высотное положение в соответствии с проектом. Кроме того, отклонения монтажа также возможно скомпенсировать с помощью некоторой податливости поясов ферм Ф1…Ф9, и марки колонны К2. Дополнительно нужно выполнить в элементах С1…С3, С6, С9…С12, С18…С24, С27 соединение крайних раскосов с поясом в условиях стройплощадки. Такое решение, действительно не значительно повышает трудоёмкость работ, но позволит качественно выполнить стыковку всех элементов сооружения в конструктивную форму. Предлагаемый вариант решения показан на примере связи С2 (рис. 5б). Такое решение продиктовано тем, что отклонения в сооружении возникают не только в радиальных элементах сооружения, но и в кольцевых и диагональных.

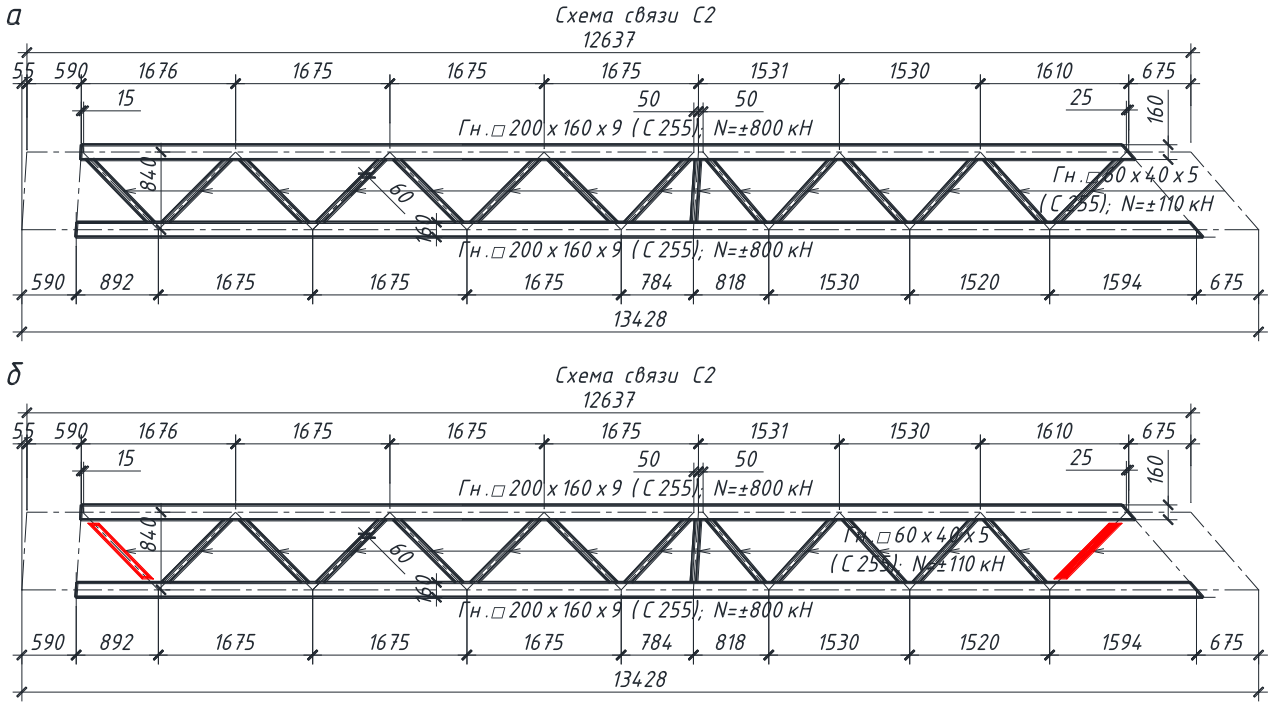


Рисунок 5. Марка С2: а – решение по проекту; б – предлагаемое решение.

Выполняя корректировку (управление поведением) положения отправочных марок можно достичь 100% соответствия проектным решениям, проектной геометрии, и возможно тогда, отклонения не значительно снизят несущую способность сооружения. Как видно, расчёт системы на точность и анализ сборочных отклонений на этапе проектирования позволяет предусмотреть мероприятия по снижению влияния отклонений на несущую способность сооружения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов численного исследования сборочных отклонений в металлическом каркасе большепролётного соору-

жения с купольным покрытием можно сказать, что:

- в случае рассмотренного варианта монтажа предельное значение нормального отклонения в 104 узле сооружения достигает 263 мм (dZ), тангенциального в 103 узле 182,5 мм (dX), а кольцевого (меридионального) отклонения в 73 узле 196,4 мм (dY). Возможное максимальное линейное отклонение достигнуто в замыкающем стержне 114 – 211 мм;
- учёт геометрических отклонений при проектировании, а также их компенсация в процессе монтажа, за счёт принятых конструктивных решений позволит обеспечить 100 % уровень собираемости;
- в элементах С1…С3, С6, С9…С12, С18…С24, С27 необходимо выполнить соединение крайних раскосов с поясом на стройплощадке. Такое решение, не значительно повышает трудоёмкость работ, но позволит качественно собрать все элементы сооружения в конструктивную форму;
- необходимо предусмотреть регулировочные опоры в конструкции подмостей для корректировки положения элементов купольного покрытия при монтаже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.с. 47952 Украина. Компьютерная программа «Вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» («ВК РАСК») [Текст] / А. Б. Бондарев, А. М. Югов (Украина). – № 48382; заявл. 20.12.2012; опубл. 20.02.2013, Бюл. № 1. – 2 с
2. ГОСТ 21780-2006. Система обеспечения точности геометрических параметров в строительстве. Расчёт точности. [Текст] – Взамен ГОСТ 21780-76; введён 31-01-1984. – М.: Издательство стандартов. – 13 с.
3. **Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенков В.Я.** Строительная механика. Стержневые системы. – М.: Стройиздат. – 1981. – 512 с.
4. СНиП III-18-75. Правила производства и приёмки работ. Металлические конструкции. [Текст] – М.: Госстрой СССР. – 1976. – 161 с.
5. **Югов А. М.** Численное статистическое исследование возможных погрешностей возведения однопоясной металлической оболочки покрытия цилиндрической формы [Текст] / А. М. Югов, А. Б. Бондарев // Расчёт и проектирование металлических конструкций: сборник докладов научно-практической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Е. И. Белени. 25 марта 2013 г., г. Москва / Под ред. А. Р. Туснина. – М.: МГСУ. – 2013. – С. 247-251.

Бондарев Алексей Борисович, инженер производственно-технического отдела Магаданского филиала ООО «Полюс Строй», ул. Пролетарская, 12, 685000, г. Магадан, Россия; E-mail: bondarev_a_b_rus@mail.ru

Alexey B. Borisovich, engineer of industrial engineering department Magadan branch, of Co.Ltd "POLYUS STROY", Proletarskaya str. 12, 685000, Magadan, RUSSIA; E-mail: bondarev_a_b_rus@mail.ru

ОЦЕНКА МОНТАЖНЫХ УСИЛИЙ В ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ПОКРЫТИИ ТОРГОВО-ВЫСТАВОЧНОГО ЦЕНТРА

А.Б. Бондарев
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ. В статье приведены результаты исследования монтажных усилий, возникающих при сборке большепролетного металлического покрытия торгово-выставочного центра. Численное исследование монтажных усилий выполнено методом конечных элементов, который реализован в вычислительном комплексе SCAD. Оценка величин монтажных усилий в статье приведена на примере отдельных стержней оболочки покрытия в виде гистограмм. Полученные величины усилий свидетельствуют о необходимости разработки мероприятий, направленных на снижение монтажных усилий и сборочных отклонений в покрытии уже при его проектировании.

Ключевые слова: большепролётные металлические пространственные покрытия, монтажные нагрузки, математическое моделирование, МКЭ

EVALUATION OF MOUNTING EFFORTS IN THE HINGED-ROD METAL COATING THE TRADE FAIR CENTER

Alexey B. Bondarev
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, UKRAINE

ABSTRACT. The article presents results of research mounting efforts arising from the assembly-span metal coating the trade fair center. For the numerical research used finite element method, implemented in the computer system SCAD. Evaluation of the results research, values assembly effort given to the individual rods shell coating in the form of diagrams. The values obtained are indicate the need for efforts to develop activities during the working documents to reduce of the mounting effort and assembly of deviations in the coating.

Keywords: spatial-span metal coating, assembly load mathematical modeling, FEM

ВВЕДЕНИЕ

Возможно, сегодня уже хорошо известно, что для большепролётных покрытий расхождение в результатах расчета традиционной расчётной модели и модели, которая учитывает технологическую последовательность сборки стержневого покрытия очень значительная [2, 5, 9].

Потребности сегодняшнего дня требуют зданий и сооружений с большими пролётами, и как правило, с большепролетными покрытиями. Такие запросы связаны с необходимостью размещения большого количества зрителей на стадионах или рабочих на современных производствах, а также многих других потребностей общества.

При возведении большепролётных шарнирно-стержневых металлических покрытий неизбежно возникают отклонения узлов и стержней от их проектного положения. Все шарнирно-стержневые металлические покрытия как правило являются статически неопределимыми системам, а наличие отклонений в статически неопределимых системах приводит к появлению монтажных (сборочных) усилий. Следовательно, оценка напряжённо-деформированного состояния (НДС) покрытий с учётом монтажных усилий, последовательности сборки является актуальной зада-

чей. Известно, что монтажные нагрузки, как правило, не учитываются при проектировании большепролётных покрытий. Значит для устранения негативного влияния монтажных нагрузок и отклонений на НДС покрытия требуется разработка конструктивных мероприятий, которые бы исключили их влияние на прочность элементов покрытия.

Для повышения надёжности конструкций в отдельных работах рекомендуется «управлять их поведением» или создавать так называемые «адаптируемые системы» [2, 4, 9, 13…14]. Для этого необходимо в конструкции покрытия разработать систему конструктивных компенсаторов, которые позволят собрать покрытие без создания в нём монтажных усилий. Такая система конструктивной компенсации будет называться «пассивной системой управления», т.к. в процессе эксплуатации не сможет повлиять на изменение НДС покрытия, в отличии от «активной системы управления» – как в конструкции радиотелескопов, которая в процессе эксплуатации радиотелескопа самостоятельно «приспосабливается» под требуемую точность и диапазон радиоволн [11, 13].

1. ОБЪЕКТ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель работы – оценка НДС шарнирно-стержневого металлического покрытия торгово-выставочного центра (ТВЦ) цилиндрической формы с учётом монтажных усилий.

Объект исследования – двухпоясное шарнирно-стержневое большепролетное металлическое покрытие ТВЦ цилиндрической формы (рис. 1).

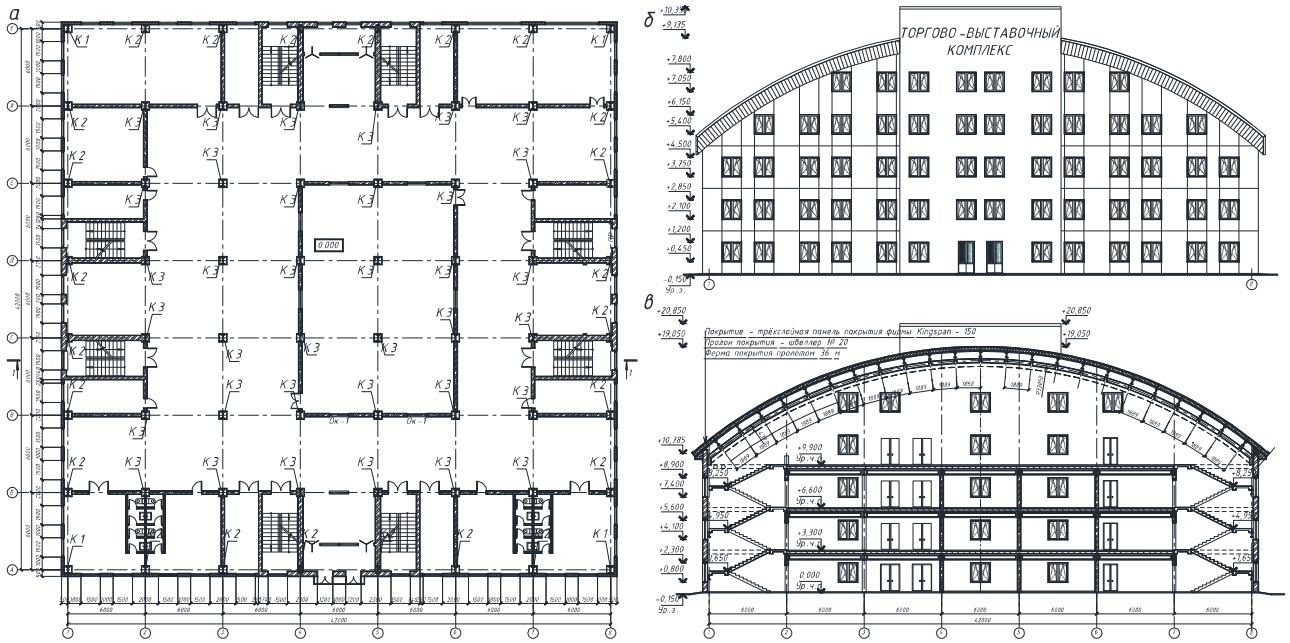


Рисунок 1. Схема ТВЦ: а – план на отм. 0,000; б – фасад 1-8; в – разрез 1-1.

Покрытие представляет собой двухпоясную оболочку с размерами монтажных блоков в плане 21000×6000 мм, из стали С245, монтажный блок цилиндрического покрытия с маркировкой элементов (рис. 2). Жесткостные характеристики элементов определены в предположении, что гибкость $\lambda = 120$. Стрела подъёма покрытия – 7,5 м. Распор цилиндрического покрытия гасится жёстким соединением колонн с ригелями и сталебетонным перекрытием. При разработке проекта принята поэлементная схема сборки монтажных блоков покрытия на подмостях. После собранный монтажный блок покрытия устанавливается стреловым краном на монтажную опору.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Монтажное воздействие – нагрузка от сборочных отклонений, которые определены расчётом собираемости. Методика расчёта собираемости, т.е. методика определения отклонений приведена в работе [10]. В качестве расчётной схемы покрытия принят фрагмент пространственной шарнирно-стержневой системы (рис. 3). Статический расчёт выполнен методом конечных элементов (МКЭ) с использованием вычислительного комплекса (ВК) SCAD. В качестве эксплуатационных воздействий принята постоянная и временная нагрузка для г. Донецк согласно [6].

Примыкание пространственного блока цилиндрического покрытия к колонне принято жёстким. Стержни покрытия по типу конечного элемента являются пространственными (элемент пространственной фермы), степени свободы XYZ положение произвольное. Расчётная схема покрытия состоит из 138 узлов и 474 элементов. При формировании расчетной схемы учтено, что она по типу схемы будет пространственной в пространственной Декартовой системе координат (плоскость XOZ, YOZ и XOY).

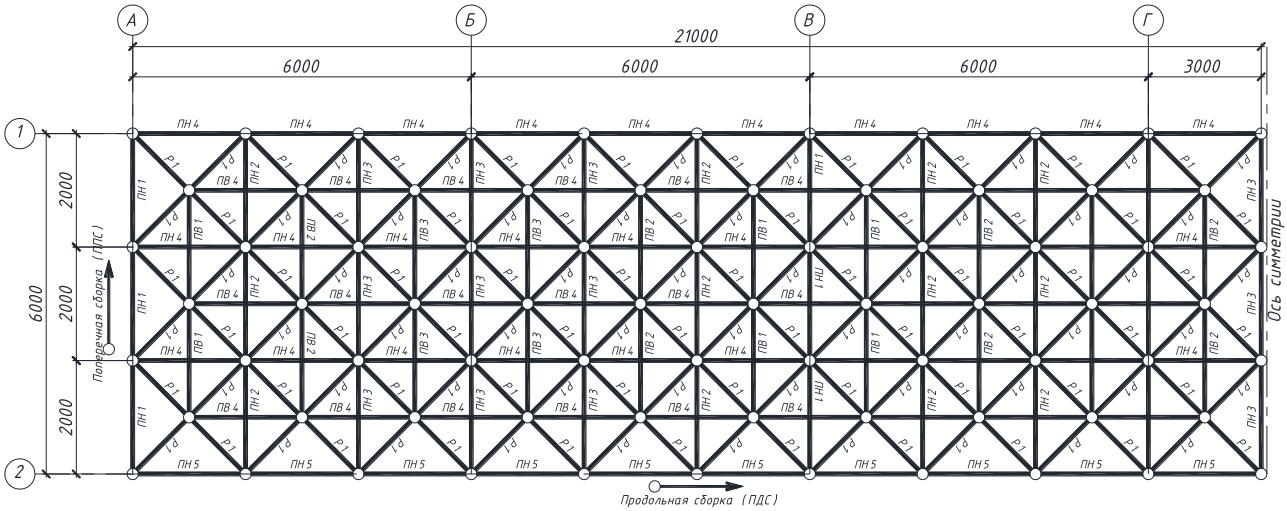


Рисунок 2. Схемы монтажного блока покрытия ТВЦ с указанием направлений сборки.

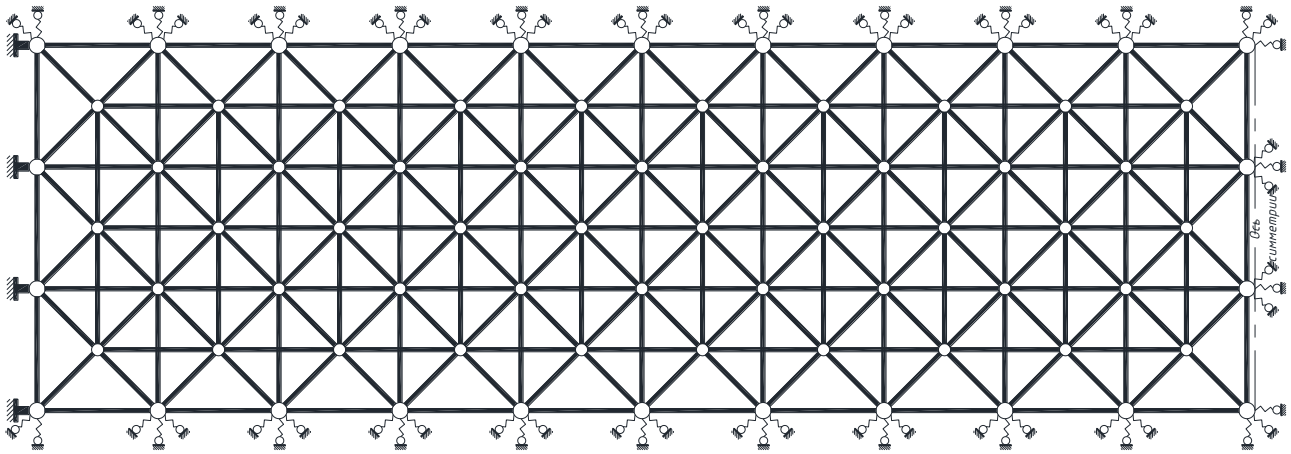


Рисунок 3. Расчетная схема монтажного блока покрытия ТВЦ.

Для определения и анализа НДС покрытия с учётом монтажных воздействий выполнено моделирование отклонений в стержнях с помощью температурного воздействия, дей-

ствующего вдоль замыкающих стержней покрытия. Величину температурной нагрузки, при которой элемент увеличится в длину, определяем, по формуле 4.23 [3]:

$$\Delta t=\delta_i/(\alpha_i\times\ell_i), \qquad (1)$$

где, Δt – величина температурного воздействия, необходимая для перемещения стержня на единицу длины;
δ_i – величины перемещения, в стержне оболочки, полученные из расчёта собираемости;
α_i – коэффициент линейного расширения материала (сталь) стержня, $\alpha_i=0{,}12\times10^{-4}$ ºС;
ℓ_i – номинальная длина стержня оболочки по проекту.
Для определения монтажных усилий, возникающих при отклонении длин стержней оболочки – рассмотрены две последовательности сборки монтажного блока покрытия – продольная (ПДС) и поперечная (ППС) сборка. При расчёте, будем принимать что: изменение жесткости покрытия в процессе сборки не происходит; отклонения будут рассмотрены для идеальной расчётной схемы, т.е. без отклонений узлов оболочки; НДС проанализировано только в ВК SCAD; только температурным воздействием действующим вдоль продольной оси элемента смоделировано отклонение длины элемента; к рассмотрению приняты только отклонения нормативных допусков на изготовление и монтаж в соответствии с [7]; отклонения элементов подчинены нормальному закону распределения и будут рассмотрены статистическим методом.
Формирование расчетной схемы и расчёт оболочки в ВК SCAD сводится к:
- определению её геометрических размеров;
- заданию геометрических характеристик сечений элементов;
- вводу координат узлов расчётной схемы;
- заданию жесткостей элементов; заданию узлов её крепления с колонной;
- нумерации узлов и элементов выполнена путем генератора расчетной схемы в среде ВК SCAD;
- заданию действующих нагрузок и собственно расчёт.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ МОНТАЖНЫХ УСИЛИЙ

Анализ результатов расчёта НДС покрытия с учётом монтажных усилий выполнен путём сравнения действующих усилий (напряжений) в элементах с дополнительными (монтажными) усилиями (напряжениями), вызванными неточностями изготовления и монтажа.
Для анализа НДС покрытия с учётом монтажных воздействий рассмотрим монтажный блок цилиндрического покрытия (рис. 3). В результате расчёта покрытия с учётом монтажных воздействий получены величины сборочных усилий в элементах при продольной и поперечной сборке (рис. 4…5). На гистограммах приведены усилия от основного сочетания нагрузок ($N_{эл.}$), и суммарные (N_1…N_4). Поясним обозначения принятые, на гистограммах (рис. 4…5): 1 – усилие в элементе от основного сочетания нагрузок ($N_{эл.}$); 2 – усилие в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке – ППС (N_1); 3 – усилие в элементе от отклонений изготовления при продольной сборке – ПДС (N_2); 4 – усилие в элементе от отклонений монтажа при поперечной сборке – ППС (N_3); 5 – усилие в элементе от отклонений монтажа при продольной сборке – ПДС (N_4). Под значением суммарного усилия приведена величина перегрузки сечения в долях от единицы. Несущая способность элемента, показана на гистограмме как N_{max}.
Также на гистограммах показано изменение величин сборочных усилий по отношению к несущей способности сечения стержней. Несущая способность стержня на каждой гистограмме принята за 1, а величина сборочного усилия по отношению к несущей способности показана в частях от 1. Например, для элемента Пн1-Пн3 величина перегрузки сечения от действия сборочного усилия при

поперечной сборке $N_2 = 1,65$ или 65% (рис. 4). В элементе Пн1-Пн3 максимальное усилие от расчётной нагрузки составляет $N_{эл.} = 10$ кН. Максимальная величина дополнительного усилия от отклонений при ППС сборке от неточностей монтажа составляет $N_{ппс} = 303$ кН. Величина суммарного усилия в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке составляет $N_1 = N_{эл.} + N_{ппс} = 10 + 303 = 313$ кН, где $N_{ппс}$ – усилие в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке. Величина перегрузки элемента определено по отношению к 1, т.е. Несущая способность $N_{max} = 189$ кН – 1, а суммарное усилие $N_1 = 313$ кН. Следовательно, величина перегрузки равняется отношению $N_{max}/N_1 = 313/189 = 1,65$.

Аналогично определены значения усилий во всех остальных элементах оболочки, возникающие в них от отклонений. На остальных гистограммах обозначения будут аналогичные. С целью повышения надёжности большепролетного покрытия авторами рекомендуется разработка конструктивных мероприятий, направленных на «управление отклонениями». Под «управлением отклонениями» подразумевается такой способ монтажа [8], при котором будет выполнятся корректировка положения элементов и узлов покрытия, что позволяет устранить отклонения, и снизить величины монтажных (сборочных) усилий до малозначительного уровня.

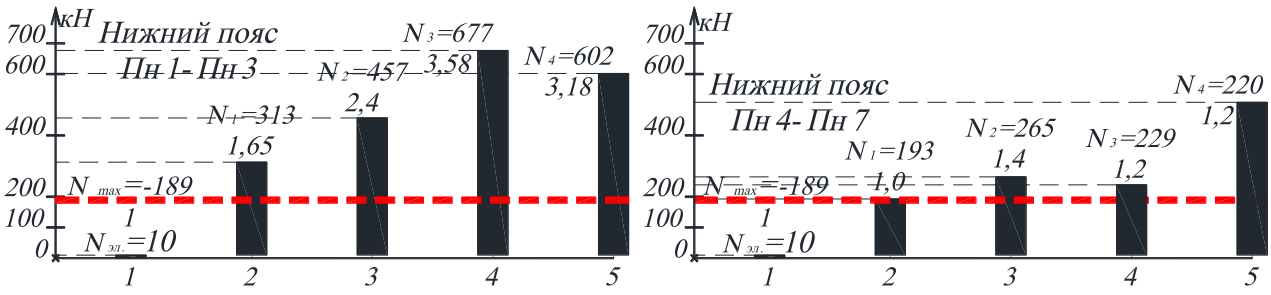


Рисунок 4. Величины усилий в элементах Пн1-Пн3.

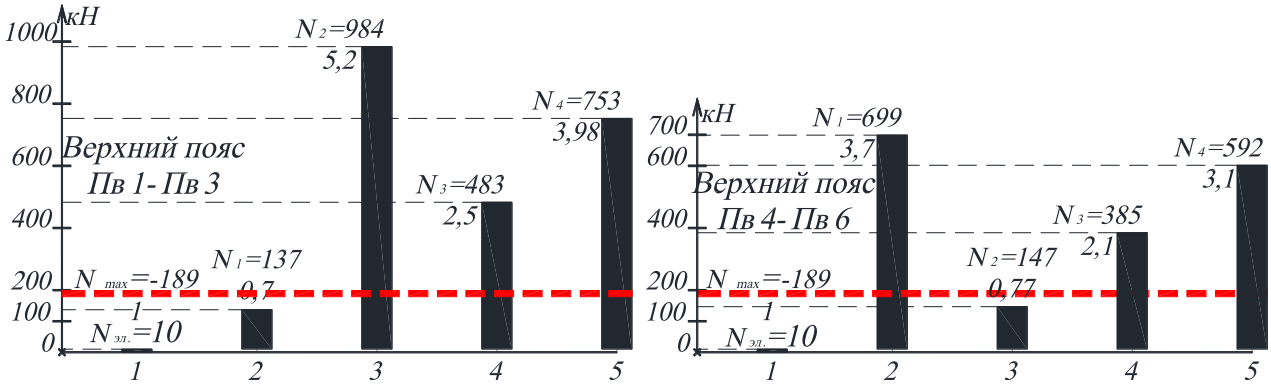


Рисунок 2. Величины усилий в элементах Пв1-Пв4.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать такие выводы:

- анализ НДС покрытия показывает, что несущая способность отдельных элементов при наличии монтажный (сборочных) усилий не достаточна, что может препятствовать нормальной эксплуатации покрытия;
- разработанный алгоритм [1] генерации монтажа большепролётных металлических покрытий в вероятностной постановке с последующим анализом отклонений позволяет исследовать возможные сборочные отклоне-

ния большепролётных металлических покрытий различных конструктивных схем и способов возведения, а также других пространственных сооружений;

- рассмотренные в статье последовательности сборки покрытия приводит к значительному повышению деформаций, которые больше нормативных и потому требуется разработка конструктивно-технологических мероприятий, и потому в конструкции покрытия требуется устройство «системы управления» в виде конструктивной компенсации отклонений [8], которая позволит снизить влияние отклонений на НДС рассмотренного покрытия;

- при выполнении сборки покрытия по схеме ПДС и ППС усилия крайне разнообразны, однако рекомендуется принять сборку покрытия ППС, т.к. при этом влияние сборочных отклонений на НДС покрытия будет меньшим, чем при сборке ПДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.с. 47952 Украина. Компьютерная программа «Вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» («ВК РАСК») [Текст] / А. Б. Бондарев, А. М. Югов (Украина). – № 48382; заявлено 20.12.2012; опубликовано 20.02.2013, Бюллетень № 1. – 2 с
2. **Абовский Н. П.** Управляемые конструкции. Учебное пособие. [Текст] / Н. П. Абовский. – Красноярск: КамКрас. – 1998. – 433 с.
3. **Беляев Н. М.** Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
4. **Гольденблат И.И.** Модели сейсмостойкости сооружений. [Текст] / И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, С. В. Поляков, С. В. Ульянов – М.: Наука. – 1979. – 252 с.
5. ГОСТ 21780-2006. Система обеспечения точности геометрических параметров в строительстве. Расчёт точности. [Текст] – Взамен ГОСТ 21780-76; введён 31-01-1984. – М.: Издательство стандартов. – 13 с.
6. ДБН В.1.2-2:2006. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. – К.: Сталь. – 2006. – 78 с.
7. ДБН В.2.6-163-2011. Строительные материалы и конструкции. Стальные конструкции. Нормы проектирования, изготовления и монтажа. – К.: Укрархстройинформ. – 2011. – 215 с.
8. Пат. № 79680 Украина, МПК E04B 1/32; E04B 1/58 Способ монтажа большепролётных стержневых металлических покрытий [Текст] / Бондарев А. Б., Югов А. М.; заявитель и патентообладатель Бондарев А. Б., Югов А. М. – № u 2012 13187; заявлено 19.11.2012; опубликовано 25.04.2013, Бюллетень № 1. – 5 с.
9. **Перельмутер А.В.** Управление поведением несущих ограждающих конструкций. Издание 2-е дополненное и исправленное. [Текст] / А. В. Перельмутер – М.: АСВ. – 2011. – 184 с.
10. **Югов А.М.** Численное статистическое исследование возможных погрешностей возведения однопоясной металлической оболочки покрытия цилиндрической формы. [Текст] / А. М. Югов, А. Б. Бондарев // Сборник докладов научно-практической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Е.И. Белени «Расчёт и проектирование металлических конструкций». 25 марта 2013 года, г. Москва / под редакцией А.Р. Туснина. – М.: МГСУ. – 2013. – С. 247-251.
11. **Югов А.М.** Напряжённо-деформированное состояние однопоясной стержневой металлической оболочки покрытия цилиндрической формы при наличии погрешностей изготовления и монтажа [Текст] / А. М. Югов, А. Б. Бондарев // Металлические конструкции. – 2013. – Том 19. – № 1. – С. 27-36.
12. **Bujakas V.I., Gvamichava A.S., Rybakowa A.G.** Petal-Type Deployable

Space Antennas for Radio Astronomy // Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS). – Hong Kong. – 1997. Vol. 2. – P. 380.
13. **Bujakas V.I., Gvamichava A.S.** Automatic control of the surface shape of large space radiotelescopes. // Proceedings of International Astronatical Federation 28 Congress № 77…194, Prague, 1997.
14. **Preumont A.** Vibration control of active structures an introduction [Text] / A. Preumont. – 2-nd Edition. – New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 385 p.

Бондарев Алексей Борисович, аспирант, кафедра технологии и организации строительства, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Украина, 86123, г. Макеевка, ул. Державина 2,
E-mail: bondarev_a_b_rus@mail.ru

Alexey B. Borisovich, aspirant, Department of Construction Engineering and Management, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Derzhavin str. 2, Makeyevka, 86123, UKRAINE,
E-mail: bondarev_a_b_rus@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКО-УПРУГИХ АМОРТИЗАТОРОВ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ И НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КАРКАСНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

***В.Г. Дмитриев*[1], *А.И. Роффе*[2]**
[1] Московский государственный университет путей сообщения, г. Москва, РОССИЯ
[2] Московский авиационный институт, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: На основе разработанных адекватных математических моделей и однотипных вычислительных алгоритмах решения статических и динамических нелинейных начально-краевых задач исследуется влияние вязкоупругих амортизаторов на процессы деформирования железобетонных строительных конструкций каркасного типа при сейсмических воздействиях. Предложены параметры, позволяющие определять оптимальные значения интегральных характеристик вязкоупругих амортизаторов, эффективность которых показана на примере исследования волновых процессов, обусловленных действием горизонтальной компоненты сейсмической волны, в элементах монолитной каркасной конструкции с учетом упруго-пластической работы арматуры и процессов трещинообразования в бетоне.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных разностей, метод установления, нелинейное деформирование, железобетонные конструкции, вязкоупругие амортизаторы, сейсмические воздействия

STUDY HOW VISCOELASTIC DAMPER PARAMETERS IMPACT DEFORMATION AND LOAD-BEARING CAPACITY OF FRAME-TYPE REINFORCED CONCRETE STRUCTURES UNDER SEISMIC LOADS

Vladimir G. Dmitriev [1], ***Aleksandr I. Roffe*** [2]
[1] Moscow State Transport University, Moscow, RUSSIA
[2]Engineer, Moscow State Aviation University, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Based on the adequate mathematical models and unified computing algorithms developed for solution of static and dynamic non-linear initial-boundary value problems, we study the impact of viscoelastic dampers on the deformation of frame-type reinforced concrete structures under seismic loads. Some parameters are proposed to determine the optimal values of integral characteristics of viscoelastic dampers whose efficiency is shown with an example of wave processes caused in frame-type solid structure by the horizontal component of a seismic wave, including the elastoplastic behavior of reinforcement and cracking in the concrete.

Keywords: mathematical modeling, method of finite differences, establishing method, non-linear deformation, reinforced concrete structure, viscoelastic dampers, seismic loads

Different seismic protection systems, in particular viscoelastic dampers [1-3], are applied widely to decrease the load from seismic waves on buildings and structures. In this study we examine, based on the developed adequate mathematical models and efficient numerical methods, how the parameters of viscoelastic dampers impact the dynamic and strength capacity of the bearing members of framed structures, taking into account elastoplastic

behavior of reinforcement and cracking in the concrete. Both solid and composite framed structures are studied as a combination of vertical and horizontal bearing members (Fig.1).

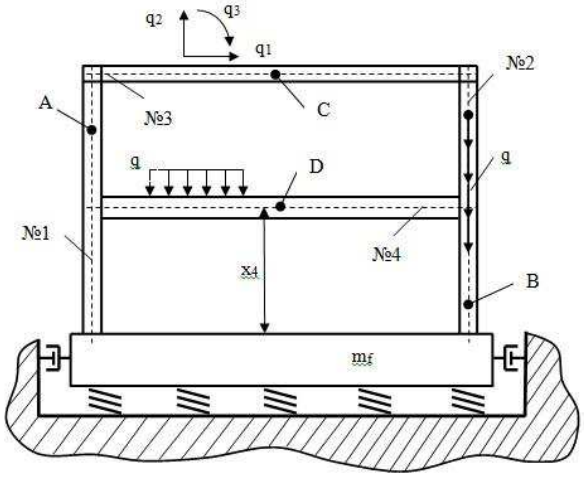


Figure 1. Combination of vertical and horizontal bearing members.

Deformation of structures under different static and dynamic loads is described by relations of Timoshenko theory of plates and beams. Geometrical nonlinearity is considered within the frames of medium deflection theory [4-6]. We assume that deformation and stress in concrete are linearly dependent. Normal stress σ_b^z and tangential stress τ_b^z in the concrete layer of z coordinate at the beam cross section are determined as follows:

$$\sigma_б^z = \mathrm{E}_б \varepsilon_{xx}; \qquad \tau_б^z = G_б \varepsilon_{xz}, \qquad (1)$$

where

$$\varepsilon_{xx} = E_{xx} + z \cdot K_{xx}; \quad \mathrm{E}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_x^2; \quad K_{xx} = \frac{\partial \gamma}{\partial x};$$

$$\varepsilon_{xz} = \mathrm{E}_{xz} = \gamma - \theta_x; \qquad \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (2)$$

and where u is a tangential displacement, w stands for deflection, θ_x is a pivot angle according to the hypothesis of "rigid" normal; γ is the full pivot angle of the normal (see Fig. 2). In formulas (1),(2), E_b,G_b are Young modulus and reinforcement shear modulus while E_{xx},E_{xz},K_{xx} are tangential, transversial and flexural deformation components of a coordinate line (reference line) z=0, generally being a central line: h/2≤z≤+h/2 (Fig. 3). At tensile stress $\sigma_b^z \geq R_{bt}$, a crack occurs in the concrete (R_{bt} is the ultimate tensile stress in the concrete). We assume that in case of closing of the crack during deformation process in z concrete layer (when deformation component $\varepsilon_{xx} \geq 0$ switches the sign to compression deformation $\varepsilon_{xx} < 0$), the given layer is involved completely in the structural behavior of the beam cross section. The crack reopens during deformation of the cross section when deformation $\varepsilon_{xx} < 0$ switches the sign to $\varepsilon_{xx} \geq 0$ and so on.

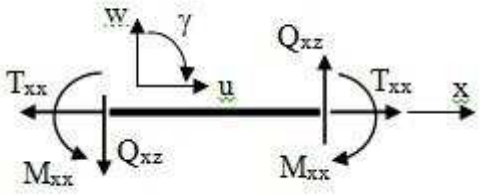


Figure 2. Internal forces and displacements.

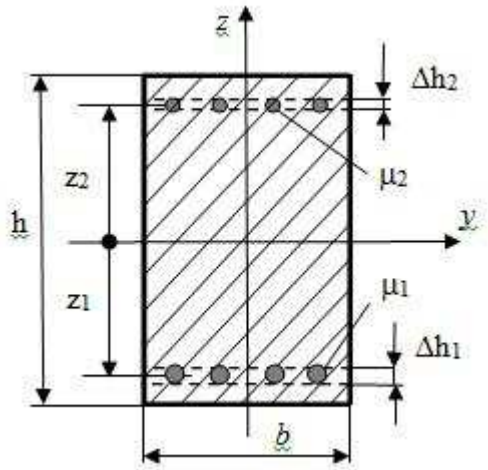


Figure 3. Cross-section.

In mathematical models, reinforcement members are considered as an orthotropic layer which has equivalent rigidity and which works in tension-compression and transverse shear in reinforcement direction at zero values of Poisson ratios [4,5]. For general case of two-

side reinforcement, the reduced thickness of layers Δ_{h1} и Δ_{h2} is determined by reinforcement factors as follows: $\Delta_{h1}=\mu_1 \cdot h$; $\Delta_{h2}=\mu_2 \cdot h$, where μ_1 and μ_2 are the reinforcement factors in the layers $z<0$ and $z>0$ respectively (Fig. 3). In elastic stage, normal stress σ_a and tangential stress τ_a in reinforcement are associated with deformation according to Hook's law

$$\sigma_{\mathbf{a}} = \mathrm{E}_{\mathbf{a}}\varepsilon_{xx}; \qquad \tau_{\mathbf{a}} = G_{\mathbf{a}}\varepsilon_{xz}, \tag{3}$$

where E_a, G_a are Young modulus and reinforcement shear modulus. Deformation ε_{xx} is determined by formulas (2) where $z=z_1$ for the reinforcement layer $z<0$ and $z=z_2$ for the reinforcement layer $z>0$ (Fig. 3).

The elastoplastic behavior of reinforcement is described by relations of plasticity theory [6]. Plastic deformation in a structural member occurs under Mises flow rule: $\sigma_i \geq \sigma_т$ ($e_i \geq \varepsilon_т$); $\sigma_т$ and $\varepsilon_т$ are yield point and yield point strain at tension-compression one-dimensional strain. Active loading is determined by condition $d\sigma_i>0$ ($de_i>0$); when $d\sigma_i<0$ ($de_i<0$) off-loading process begins which is considered to be a linear elastic process. In the case of plane stress condition (sheets, plates and shells), stress depends on plastic deformation within active loading area as follows

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \left(\mathrm{K}+\frac{4\mathrm{E}_c}{9}\right)\mathrm{E}_{11}+\left(\mathrm{K}-\frac{2\mathrm{E}_c}{9}\right)(\mathrm{E}_{22}+\mathrm{E}_{33});\\
\sigma_{22} &= \left(\mathrm{K}+\frac{4\mathrm{E}_c}{9}\right)\mathrm{E}_{22}+\left(\mathrm{K}-\frac{2\mathrm{E}_c}{9}\right)(\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{33});\\
K &= \frac{\mathrm{E}}{3\cdot(1\text{-}2\nu)};\ \tau_{12}=\mathrm{E}_c\mathrm{E}_{12}/3; \qquad (4)\\
\tau_{13} &= \mathrm{E}_c\mathrm{E}_{13}/3;\ \ \tau_{23}=\mathrm{E}_c\mathrm{E}_{23}/3,
\end{aligned}$$

where $Ec=\sigma i/ei$ is a secant modulus of diagram $\sigma i(ei)$, K is a volume compression modulus, E,ν are the elasticity modulus and Poisson ratio at elastic strain, Eij are the components of a deformation tensor: elongation E11,E22,E33 and shear E12,E23,E13. Deformation E33 can be determined based on the condition $\sigma 33=0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{33}^{уп} &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{22});\\
\mathrm{E}_{33}^{пл} &= -\frac{9\mathrm{K}-2\mathrm{E}_c}{9\mathrm{K}+4\mathrm{E}_c}(\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{22}), \qquad (5)
\end{aligned}$$

where $E_{33}^{уп}$ and $E_{33}^{пл}$ are compression at elastic and plastic deformation respectively. When off-loading, stresses can be expressed in terms of deformation by the formulas

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma_{11}^{*}+\frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}[(\mathrm{E}_{11}-\mathrm{E}_{11}^{*})+\nu(\mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{22}^{*})];\\
\sigma_{22} &= \sigma_{22}^{*}+\frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}[(\mathrm{E}_{22}-\mathrm{E}_{22}^{*})+\nu(\mathrm{E}_{11}-\mathrm{E}_{11}^{*})];\\
\tau_{12} &= \tau_{12}^{*}+\mathrm{G}(\mathrm{E}_{12}-\mathrm{E}_{12}^{*}); \qquad (6)\\
\tau_{13} &= \tau_{13}^{*}+\mathrm{G}(\mathrm{E}_{13}-\mathrm{E}_{13}^{*});\\
\tau_{23} &= \tau_{23}^{*}+\mathrm{G}(\mathrm{E}_{23}-\mathrm{E}_{23}^{*}).
\end{aligned}$$

Stresses and deformations at the start of off-loading are marked with asterisk in (6). Timoshenko theory of plates and beams describes intensity of stress and strain as follows

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_i &= \frac{2}{3}\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathrm{E}_{jj}^2-\mathrm{E}_{jj}\mathrm{E}_{kk}\right)+\frac{3}{4}(\mathrm{E}_{12}^2+\mathrm{E}_{13}^2+\mathrm{E}_{23}^2)};\\
\sigma_i &= \sqrt{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3(\tau_{12}^2+\tau_{13}^2+\tau_{23}^2)}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Based on the form of stress-deformation diagram of low carbon steel, function $\sigma i(ei)$ for reinforcement can be approximated by a linear hardening diagram (Fig. 4). In this case, a secant modulus equals to

$$\mathrm{E}_c = \frac{\sigma_т}{\mathrm{e}_i}+\mathrm{E}_1\left(1-\frac{\varepsilon_т}{\mathrm{e}_i}\right), \tag{8}$$

where E_1 is a tangential modulus at $\sigma_i>\sigma_т$ ($e_i>\varepsilon_т$) (Fig.4).

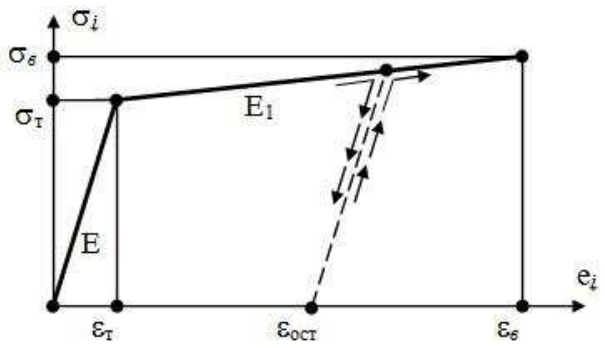


Figure 4. Stress-deformation diagram.

Considering the actual operation loads on reinforcement members, we can take uniaxial state of stress to describe the deformation of a reinforcement member, thus relations (4)-(6) can be simplified respectively and written, taking into account (2), as follows

- within the area of active loading: $d\sigma_i>0$ ($de_i>0$)

$$\sigma_a = \sigma_{11} = \left(K + \frac{4E_c}{9}\right)\varepsilon_{xx};\ \tau_a = \tau_{13} = E_c\varepsilon_{xz}/3;$$
$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = 0; \qquad (9)$$

- when off-loading: $d\sigma_i<0$ ($de_i<0$)

$$\sigma_a = \sigma_a^* + E_a(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^*);$$
$$\tau_a = \tau_a^* + G_a(\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xz}^*). \qquad (10)$$

The expressions for intensity of stress and strain (7) can be written as follows

$$e_i = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + +\frac{3}{4}\varepsilon_{xz}^2};$$
$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}. \qquad (11)$$

Force factors, reduced to the coordinate line - tension (compression) force T_{xx}, shear force Q_{xz} and bending moment M_{xx} - are determined when concrete and reinforcement stress are integrated over thickness h (Fig, 3, 4)

$$T_{xx} = b\cdot\int_h\left(\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + \sigma_б^z\right)dz;$$
$$M_{xx} = b\cdot\int_h\left(\sigma_{a1}\cdot z_1 + \sigma_{a2}\cdot z_2 + \sigma_б^z\cdot z\right)dz;$$
$$Q_{xz} = k^2 b\cdot\int_h\left(\tau_{a1} + \tau_{a2} + \tau_б^z\right)dz, \qquad (12)$$

where b is a beam width, σ_{a1},τ_{a1} and σ_{a2},τ_{a2} are the normal and tangential stresses in reinforcement at $z=z_1$ and $z=z_2$ respectively, $k^2=5/6$. For integrals (12) it is assumed that deformation and stress have uniform distribution within the thickness of reduced layer $\Delta h_1(\Delta h_2)$, considering the discrete distribution of stresses σ_a and τ_a over thickness h.

We assume that the structure may suffer the combined load from different static and/or dynamic forces. Equilibrium and motion equations are derived from Lagrange and Hamilton-Ostrogradsky variation principles respectively

$$\delta Э = \delta П - \delta A = 0, \qquad (13)$$
$$\delta I = \int_{t_o}^{t_1}(\delta K - \delta П - \delta A)dt = 0, \qquad (14)$$

where П is the potential energy of deformation, A is the work of external forces and K is the kinetic energy. Operator forms of the equilibrium and motion equations resulting from (13) and (14) are given below

$$[L_x(U)]_k + q_k = 0; \qquad (15)$$
$$[L_x(U)]_k + q_k = m_k\ddot{u}_k, \qquad (16)$$

where $[L_x(U)]_k$ are the correspondent differential operators for the vector of generalized displacements $U=U(u_1,u_2,u_3)$; q_k are the load components; $u_1=u$, $u_2=w$, $u_3=\gamma$ are the generalized displacements u_k ($k=1,2,3$). The load components include the components of dead weight, equipment and structure's façade weight, snow load and the load which adjacent members of a composite structure transfer to each other, etc. Inertial parameters of reinforced concrete structures are defined as follows

$$m_k = b\cdot\left[\rho_b h + \sum_{i=1}^{n}\rho_a h_i\right] \quad (k=1,2); \qquad (17)$$

$$m_3 = b \cdot \left[\frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^{n} \rho_a \cdot \left(\frac{h_i^3}{12} + z_i^2 \cdot h_i \right) \right],$$

where ρ_a is the reinforcement density and ρ_b is the concrete density [4-6].

Equilibrium equation (15) and motion equation (16) are developed for the projections onto coordinate axis of a non-deformed coordinate system, thus, we can easily state a problem for a composite structure. Solid connection of members in frame-type structure is modeled as rigid fixing while boundary conditions of ad joint members are described as pin-edge fixing of different types with rigid and sliding fixing due to available elastically deformed members [5]. When dynamic problems are solved, the initial conditions are specified for the generalized displacements u_k and their velocities $\dot{u}_k$

$$u_k\big|_{t=0} = u_k^0; \qquad \left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{u}_k^0, \quad (18)$$

where $u_k^0, \dot{u}_k^0$ are the given initial values of the generalized displacements and their velocities at t=0.

Consideration is given to the reinforced concrete structures which have a rigid connection with the foundation and which are installed on the damped foundation plate (Fig. 1). A relevant mathematical model is developed where the system "structure-foundation plate" is considered as a jointly acting composite structure [4,5]. We assume that the foundation plate movement is a rigid body displacement x_f only along the horizontal axis, thus the motion equation of the rigid foundation plate can be written as follows (Fig. 1, 5)

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_\varepsilon - (F + F^*) = 0, \quad (19)$$

where m_f is the plate mass, F^* is the given load on the plate, F is the reaction of the structure supporting members, F_c and F_ε are the elastic and viscous components of response from damping members

$$F_c = c_z(x_f - x_{sw}); \qquad F_\varepsilon = \varepsilon_v \dot{x}_f, \quad (20)$$

and where c_z and ε_v are integral values of the elastic and viscous components of damping members, $x_{sw}=x_{sw}(t)$ is the given law of foundation displacement determined by parameters of a seismic wave.

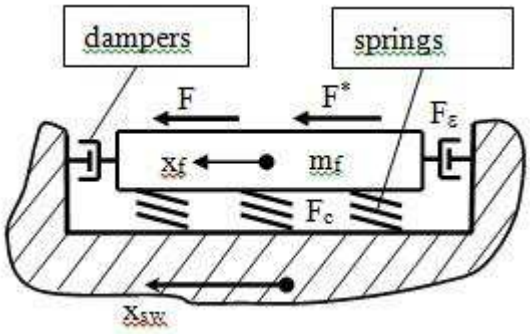


Figure 5. Motion of the rigid foundation plate.

When numerical methods are applied to solve non-linear boundary initial value problem, the finite-difference method is applied for discretization along spatial coordinate x and time coordinate t [7]. For discretization along spatial coordinate x, each member of the frame-type structure is covered within the area of continuous variation of argument x ($0 \le x \le l_m$, l_m is the length of beam, column *m*, Fig. 1) by the main and auxiliary grids with a pitch Δx_m=const. The main grid nodes have integer indices i: $1 \le i \le N_m$, N_m is the number of discretization points at member *m*. The auxiliary grid nodes are located in the middle between the main grid nodes and have fractional indices ($i \pm 1/2$). The pitch on member *m* of the structure is determined as follows

$$\Delta x_m = \frac{l_m}{N_m - 1}. \quad (21)$$

Differential operators in the initial relations (10)-(18) are approximated by the difference operator of the second order accuracy $0(\Delta x_m^2)$. For discretization along time coordinate t, two uniform grids are introduced with the constant pitch Δt

within the area of continuous variation of time $t \geq 0$: the main grid has integer indices n and layers

$$t^{(n)} = \Delta t \cdot n, \quad n = 0,1,2,3,..., \tag{22}$$

the auxiliary grid has fractional indices $(n \pm 1/2)$ and time layers $t^{(n\pm1/2)}$ (Fig.6).

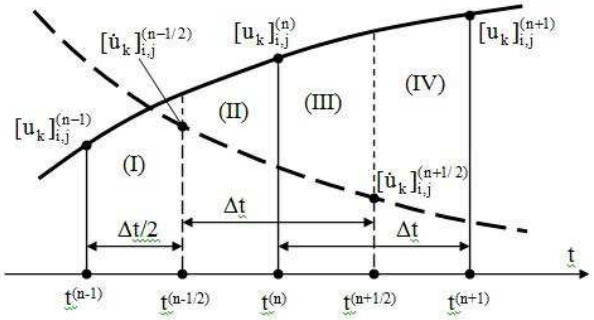


Figure 6. Discretization along time coordinate.

Grid functions of generalized displacements $u_k(i)$ correspond to the main grid nodes while grid functions of velocities $\dot{u}_k(i)$ correspond to the auxiliary grid nodes. Cross grid allows approximation of $\dot{u}_k(x)$ differential operators by difference operators of the second order accuracy $O(\Delta t^2)$ at the pitch Δt (Fig. 6)

$$[\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n)} - [u_k]_i^{(n-1)}}{\Delta t};$$
$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n+1)} - [u_k]_i^{(n)}}{\Delta t}. \tag{23}$$

The finite-difference equivalents of static equilibrium equations (15) and motion equations (16) are obtained with the help of variation-difference method [4-7]. The finite-difference equivalents of equilibrium equations (15) are derived from the condition for functional minimum

$$\frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial \gamma_i} = 0, \tag{24}$$

where discretized Lagrangian functional (13) for the computational domain of the structure member can be written as the following sum

$$\Theta_\Sigma = \sum_i (\Pi_i - A_i). \tag{25}$$

and where Π_i is the potential energy of deformation, A_i is the work of external forces within the grid area $\Delta F_i = c^* \cdot \Delta x_m$ (c^* is a weight factor sensitive to the integration area). The finite-difference equivalents of motion equations (16) are derived from the variation-difference equations similar to (24)

$$\frac{\partial I_\Sigma}{\partial [u_k]_i^{(n)}} = 0, \tag{26}$$

the discrete form of **I** functional (14) can be presented

$$I_\Sigma = \sum_n \left\{ \frac{(f_1 K_\Sigma)^{(n-1/2)} + (f_2 K_\Sigma)^{(n+1/2)}}{2} - (f^* \Theta_\Sigma)^{(n)} \right\} \Delta t, \tag{27}$$

where $\Theta_\Sigma^{(n)}$ is the discretized Lagrangian functional (13) which is expressed by the values of grid functions of generalized displacements $[u_k]_i^{(n)}$, physical mechanical properties and loads on the n-th time layer; f^*, f_1, f_2 are weight factors sensitive to variation of geometric, physical and mechanical properties of the member's grid area at the time sub-areas (I),(II),(III),(IV) (Fig. 6), K_Σ is the kinetic energy of each member of the composite structure

$$K_\Sigma = \sum_i \left\{ 0,5 \left[\sum_{k=1}^{3} (m_k \dot{u}_k^2)_i \right] \Delta F_i \right\}. \tag{28}$$

After required transformation, the finite-difference equivalents of static equilibrium equations (15) and motion equations (16), approximated for node i, can be expressed in operator form

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = 0; \tag{29}$$

$$\{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \tag{30}$$

where $[L_{\Delta x}(u_k;q_k)]$ stands for the left parts of finite-difference equivalents of equilibrium equations (15) and $c^*, f^*, f_{11}^*, f_{22}^*$ are weight factors [4,5]. Equations (30) cover the transient processes where not only load changes with time but physical and mechanical properties of material, mass and geometric parameters of structural members varies also with time; this is very important for strength calculations of reinforced concrete structures including cracking in concrete and elastoplastic behavior of reinforcement.

When numerical methods are applied to a static problem, grid equations (29) are solved by quasi-dynamic form of establishing method [4-9], where the equilibrium equations are replaced by the form of equation of motion in viscous fluid as follows

$$[L_{\Delta x}(u_k;g_k)]_i = (\mathbf{a}_k c^* m_k \ddot{u}_k)_i \quad (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (31)$$

where $\varepsilon_k(i)$ is the specific viscosity of artificial fluid (k=1,2,3), $a_k \geq 1$ are weight factors, which accelerate the convergence of iteration process [4,5]. Performed on the grid with pitch Δt=const as in (23), approximation of nonstationary equations (31) gives iteration process to determine velocities $\left[\dot{u}_k\right]_i^{(n+1/2)}$ on the time layer $t^{(n+1/2)}$ and grid functions $\left[u_k\right]_i^{(n+1)}$ on the time layer $t^{(n+1)}$

$$\left[\dot{u}_k\right]_i^{(n+1/2)} = \left[\frac{2\mathbf{a}_k m_k - \varepsilon_k \Delta t}{2\mathbf{a}_k m_k + \varepsilon_k \Delta t}\right]_i \left[\dot{u}_k\right]_i^{(n-1/2)} \cdot + \frac{2\Delta t \cdot \left[L_{\Delta x}(u_k;q_k)\right]_i^{(n)}}{c_i^* \cdot \left[2\mathbf{a}_k m_k + \varepsilon_k \Delta t\right]_i};$$

$$\left[u_k\right]_i^{(n+1)} = \left[u_k\right]_i^{(n)} + \Delta t \cdot \left[\dot{u}_k\right]_i^{(n+1/2)}. \quad (32)$$

It is worth noting, that the specified form of establishing method gives us the iteration process (32) of the same type for linear and non-linear boundary-value problems [4-6]. The optimal parameters of the iteration process are determined by the convergence acceleration and stability of finite-difference scheme

$$\varepsilon_k = 2\mathbf{a}_{\varepsilon,(k)} \sqrt{\frac{m_k^* \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}};$$

$$\Delta t_k = 2\mathbf{a}_{t,(k)} \sqrt{\frac{m_k^*}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (33)$$

where $m_k^* = a_k \cdot m_k$; $\mu_{1,(k)}$ and и $\mu_{2,(k)}$ are the minimum and maximum eigenvalues of finite-difference operators in equations (29); $a_{\varepsilon,(k)}$ and $a_{t,(k)}$ are correction factors close to one [4,8]. Refer to [5] for the estimation formulas obtained for $\mu_{1,(k)}$ and $\mu_{2,(k)}$ in the form of linearized equations.

Nonstationary equations (30) are solved with explicit two-layer finite-difference scheme where time derivatives are approximated by difference operators (23) of the second order accuracy $O(\Delta t^2)$ (Fig. 6), this allows us to develop the unified computational procedure (32) for both static and dynamic problems. To consider energy dissipation, artificial viscosity parameters ε_k can be applied as the following estimation

$$\varepsilon_k = \mathbf{a}_{\varepsilon,(k)} \frac{\delta_k}{\pi} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (34)$$

where δ_k is the logarithmic vibration decrement, and $a_{\varepsilon,(k)}$ are correction factors [4, 5].

Based on the mathematical models (1) to (30) and numeric methods (31) to (34) developed to solve non-linear initial-boundary value problems, we studied how the integral properties of viscoelastic damping members impact the nonlinear deformation and cracking of the preloaded framed reinforced concrete structure under dynamic load, which was modeled as a horizontal component of seismic wave. The study was made on 32-bit Intel-based PC with the package of FORTRAN-IV programs. The solid beam-type 4-member structure was taken with the following geometrical parameters (Fig. 1,3): $l_1=l_2=l_3=l_4$; $h_1=h_2=h_3=h_4$; $l_1=10 \cdot h_1$; $h_1=1{,}5 \cdot b$; $x_4=0{,}5 \cdot l_1$;, where l_m and h_m are the length and thickness of the m–th member respectively

(m=1,2,…,5). The reinforced concrete structure is made of concrete B25 and reinforcement class A400 [1,9]. Reinforcement factors μ_1 and μ_2 are given in Table 1.

Table 1. Reinforcement factors.

№	1	2	3	4
μ_2 [%]	2,5	2,5	1	1
μ_1 [%]	2,5	2,5	1,5	1,5

The dead weight of the composite structure is considered as a static load. The ratio between the mass of foundation plate m_f and framed structure m_{ks} is taken as $m_f=3\cdot m_{ks}$.

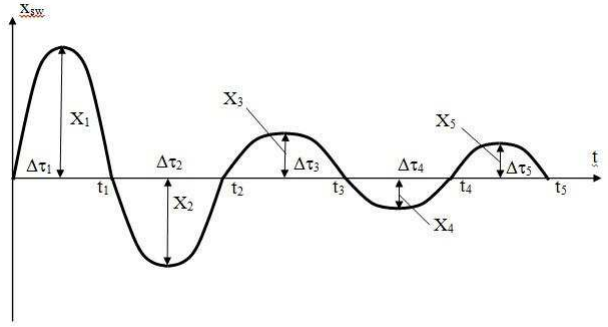


Figure 7. Approximated seismogram.

Seismic load was modeled as approximation of the instrumental seismogram by a combination of trigonometric functions on the certain time intervals $\Delta\tau_j$ (j=1, 2, 3,..) [4, 5]

$$x_{sw}=\begin{cases}\pm X_j \sin\pi\dfrac{t-t_{j-1}}{\Delta\tau_j} & -for \quad t_{j-1}\le t\le t_j;\\ 0 & -for \quad t\ge t_{sw,}\end{cases} \tag{35}$$

where $t_0=0$, $t_{sw}=\max(t_j)$, X_j, $\Delta\tau_j=t_j-t_{j-1}$ are amplitude-frequency responses of approximation functions defined in accordance with the given parameters of instrumental seismogram [1,9,10]. In our case, the approximated seismogram has 5 sine half-waves with parameters: $X_2=-0,7\cdot X_1$; $X_3=0,14\cdot X_1$; $X_4=-0,04\cdot X_1$; $X_5=0,1\cdot X_1$; $\Delta\tau_2=\Delta\tau_1$; $\Delta\tau_3=1,5\cdot\Delta\tau_1$; $\Delta\tau_4=1,2\cdot\Delta\tau_1$; $\Delta\tau_5=0,7\cdot\Delta\tau_1$ (Fig. 7).

The integral value c_z of elastic component of damping members in (20) can be determined by inherent settlement of elastic members or by the given ratio k_f between free frequency f_f of the damped foundation and typical (carrier) frequency f_{sw} of seismic wave [3-5]

$$k_{\mathbf{f}}=\frac{\mathbf{f}_f}{\mathbf{f}_{sw}};\quad \mathbf{f}_f=\frac{1}{T_f};\quad T_f=2\cdot\pi\sqrt{\frac{m_f}{c_z}}. \tag{36}$$

Then

$$c_z=4\pi^2\cdot k_{\mathbf{f}}^2\cdot\mathbf{f}_{sw}^2\cdot m_f=k_{\mathbf{f}}^2\cdot\frac{4\pi^2\cdot m_f}{T_{sw}^2}. \tag{37}$$

Integral value ε_v of the viscous component is determined by viscosity in case of the maximum aperiodic motion of the damped foundation plate

$$\varepsilon_v=2\cdot k_\varepsilon\sqrt{c_z m_f}, \tag{38}$$

where $k_\varepsilon\ge 0$ is a correction factor. Value $k_\varepsilon=1$ corresponds to the case of the maximum aperiodic motion [4,5].

The number of discretization points for the structural members are: $N_1=N_2=27$; $N_3=N_4=25$. We apply establishing method (31)-(33) to solve a static problem (1)- (15) when a reinforced concrete structure is deformed by the dead weight. The solution of the grid equations (29) is taken as initial conditions (18) to study wave processes in the structures under seismic loads. It is interesting to note, that in case of the static problem solved by establishing method (31) the stability of the finite-difference scheme is achieved at correction factor $a_{t,(k)}$ in (33) equal to $a_{t,(k)}=0,75$ while in case of dynamic problems the stability of the finite-difference scheme is provided by $a_{t,(k)}=0,2$. We study how the parameters of visocelastic dampers impact deformation of the framed reinforced concrete structure for three cases: a) foundation plate is rigidly fixed on the

ground soil ($x_f=x_{sw}$); b) foundation plate is installed on the elastic damping members ($k_\varepsilon=0$; $k_f>0$); and c) foundation plate is installed on the viscoelastic damping members ($k_\varepsilon>0$; $k_f>0$).

Table 2. The results of the study.

a_{max}	X_{max}	f_{sw} [Hz]	t^*/t_{sw}	t^*/t_2
0,1·g	13,87	2,38	0,58	1,55
0,2·g	10,61	3,85	0,55	1,5
0,3·g	8,69	5,21	0,88	2,6
0,4·g	8,56	6,06	1,53	3,95

The results of the study are given in Table 2 and Fig. 8-12. Table 2 shows how the maximum displacement X_1, which caused damage to undamped framed structure, depends on the maximum seismic acceleration a_{max}. Non-dimensional displacement X_{max} is defined as the ratio between X_1 and deflection w_3 of a pin-edge fixed beam of length $l=l_3$ under the dead weight load which is uniformly distributed with intensity q.

$$X_{\max}=\frac{X_1}{w_3};\qquad w_3=\frac{5}{384}\frac{q\cdot \mathbf{l}^4}{D}, \tag{39}$$

where

$$D=\mathbf{b}\cdot\left[\frac{E_{\mathbf{b}}h^3}{12}+E_{\mathbf{a}}\cdot\left(\Delta h_1\cdot z_1^2+\frac{\Delta h_1^3}{12}+\Delta h_2\cdot z_2^2+\frac{\Delta h_2^3}{12}\right)\right]. \tag{40}$$

At time moment $t=t^*$ damage of the structure begins. Within the total range of accelerations $a_{max}=(0,1\div 0,4)\cdot g$ the structure begins to damage from beam No. 4, when continuous cracks (over the cross section) in concrete appear along the beam length with further plastic deformation of reinforcement which appears and quickly develops resulting in exhaustion of the bearing capacity of the structure.

According to the results of computing experiment, damping members with only elastic features (without viscous component) do not always increase the bearing capacity of structures. For example, reinforced concrete structure without dampers preserved the bearing capacity under seismic wave with parameters. $a_{max}=0,4\cdot g$ and $X_{max}=8,53$ while, based on calculations for elastic damping members at $k_f=0,8;1;1,33;2;4$, in (37) , the bearing capacity of the relevant structure increases only at $0<k_f<1$. Within the total examined range of properties of viscous dampers at $k_f\geq 1$, when wave processes develop due to interaction of members in the system "foundation plate-framed structure" caused by the combined action of seismic wave and static load, it results in damage of the structure. Viscoelastic dampers with parameter $k_\varepsilon=1$ in (38) increase the bearing capacity of the framed structure for all $k_f\geq 1$ excluding $k_f=4$ when the optimum value is $k_\varepsilon=1,5$.

Refer to Fig. 8-12 for the results of study of wave processes in members of composite reinforced concrete structure loaded by the horizontal component of a seismic wave with parameters: $a_{max}=0,4\cdot g$; $X_{max}=8,53$. Curves 1 correspond to undamped structure, curves 2 correspond to elastic damping members with parameters $k_f=0,8$; $k_\varepsilon=0$, and curves 3 to viscoelastic damping members with parameters $k_f=0,8$; $k_\varepsilon=1$; $\tau=t/t_{sw}$ is non-dimensional time. Fig. 8 gives acceleration of the foundation plate a_f, and Fig. 9 and 10 show tangential acceleration $a_3=\ddot{u}_C$ and $a_4=\ddot{u}_D$ in the middle of beam spans No.3 and No. 4 respectively (points C and D, Fig. 1). Refer to Fig. 11 and 12 for behavior of normal acceleration $a_1=\ddot{w}_A$ and $a_2=\ddot{w}_B$ in the points at columns A and B with coordinates $x_A=0,77\cdot l_1$, $x_B=0,27\cdot l_2$.

When accelerations are calculated by numerical differentiation formulas, some problems occur due to particular features of machine arithmetic. With application of a cross grid, the numerical algorithm is based on the explicit two-layer finite-difference scheme of the second order accuracy $O(\Delta t^2)$, and, thus, acceleration values can be determined by the central finite differences at pitch Δt by approximations similar to (23) (Fig. 6). As difference schemes are stable for the given type of stiff equations at the time pitch at the level $\Delta t=(10^{-7}\div 10^{-8})$ s, round-off errors cause loss of accuracy in the calculation of acceleration.

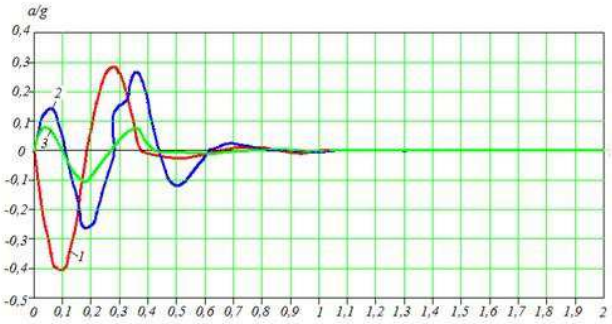


Figure 8. Horizontal acceleration a_f of foundation plate.

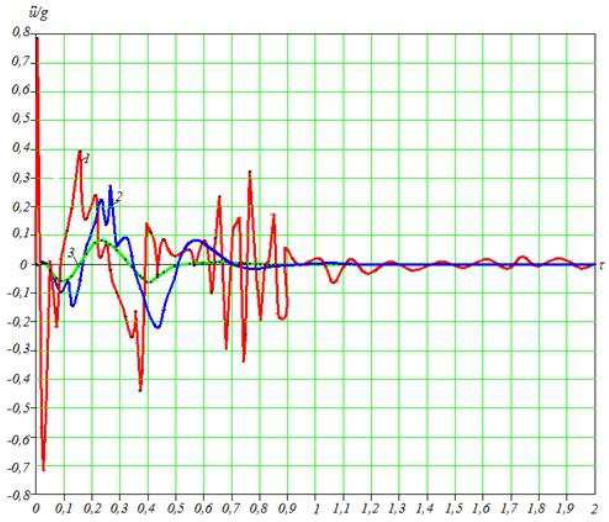


Figure 9. Tangential acceleration $\ddot{u}_C$ in point C, beam No. 3.

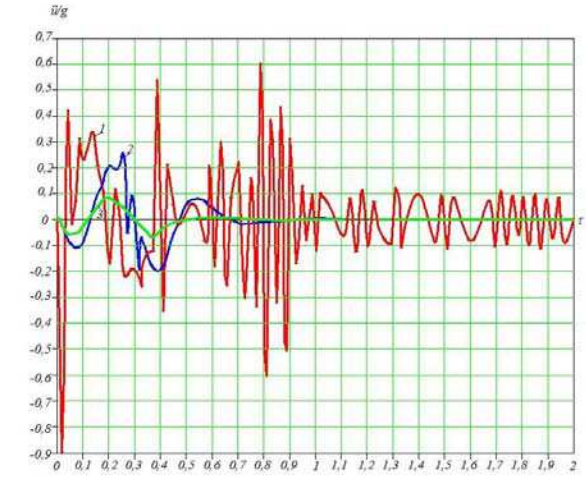


Figure 10. Tangential acceleration $\ddot{u}_D$ in point D, beam No. 4.

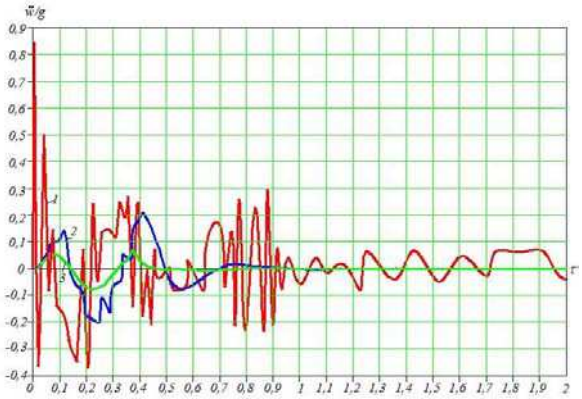


Figure 11. Normal acceleration $\ddot{w}_A$ in point A, column No.1.

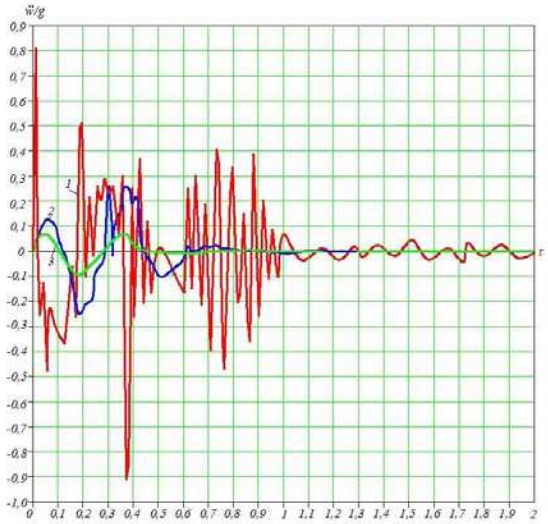


Figure 12. Normal acceleration $\ddot{w}_B$ in point B, column No. 2.

We use spline interpolation procedure [7] to get the correct result in the calculation of acceleration. The grid functions of velocities, obtained after solution of nonstationary problem, are approximated by cubic spline interpolation at the specified time intervals which enables to make further calculations by analytic expression without numerical differential procedures.

According to the results of the performed study, viscoelastic damping members sufficiently, more than by 10 times, decrease the peak accelerations which occur at the structural members at the initial time of action. Moreover, damage of undamped structure occurs at rather small values of the maximum displacement in seismic

wave (Table 2), while the structure with viscoelastic dampers of integral parameters k_f=0,8; k_ε=1 ensure the bearing capacity without cracking in concrete and with maximum stress in reinforcement not exceeding $\sigma_{max}<0,2\sigma_т$ even at the action of seismic wave with parameters a_{max}=0,4·g; X_{max}=155,1 (X_1=0,05 м), f_{sw}=1,42 Hz, which corresponds to seismic rating with magnitude 9 [1,9,10]. According to experimental observations, significant periods of seismic action relevant to the foundation maximum acceleration are found within the short-wave band T==(0,1÷0,5) s at vibration frequency from f_{sw}=10 Hz to f_{sw}=2 Hz [2].

The proposed parameters k_f,k_ε in (36)-(38) determine the optimum values of integral characteristics for viscoelastic damping members which ensure the bearing capacity of frame-type solid reinforced concrete structures loaded by the horizontal component of highly intensive seismic wave.

Acknowledgement. This work has been made with financial support of Russian Foundation of Fundamental Research (grants RFFR No. 13-01-00434, No. 14-01-00429).

REFERENCES

1. **Aizenberg J.M., Kodish E.N., Nikitin I.K., Smirnov V.I., Trekin N.N.** Earthquake resistance multistory buildings with reinforced concrete frame - Moscow, Association of Civil Engineering Universities, 2012. – 264 pp.
2. Current issues studied in structural theory.- Collection of scientific articles in two parts. Part 1/V.A. Kucherenko Central Research Institute of Construction Structures-Moscow: OAO CPP, 2009. -327 pp.
3. **Kharlanov V.L.** Numeric approach to high-viscous dampers in seismic isolation members. – Structural mechanics and design, 2006, № 3, pp. 35 - 38.
4. **Dmitriev V.G., Sudyin A.A.** Deformation of reinforced concrete spherical dome with cutouts on the damped foundation beds. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2009. (1&2), №5, pp. 13-22.
5. **Dmitriev V.G.** Mathematical Modeling of Non-Linear Deformation Process for Frame-Type Building Structures Under Seismic Loads. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Volume 8, Issue 2, pp. 13-29.
6. **Dmitriev V.G., Roffee A.I., Sudin A.A.** Study of particular processes of static and dynamic deformation of reinforced concrete structures including elastoplastic behavior of reinforcement – Materials of the 19th International Workshop "Process problems of structural strength" Podolsk. MGOU, 2012 pp. 37 - 44.
7. **Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.** Numerical methods.- Moscow: Fizmatlit. Laboratory of Basic Knowledge, 2001. - 632 pp.
8. **Dmitriev V.G., Preobrazhensky I.N.** Deformation of flexible shells with cutouts / Izvestia AN USSR, Mechanics of Solids, 1988, No 1, Pp. 177 - 184.
9. **Mkrtichev O.V., Dzinchvelashvili G.A.** Nonlinearity concerns in seismic resistance theory.-Moscow: Moscow State Construction University, 2012 -192 pp.
10. **Gordeev V.N., Lantuh-Lyaschenko A.I., Pashinskiy V.A., Perelmuter A.V., Pichugin S.F.** Loads and excitations on buildings and structures – Moscow, Association of Civil Engineering Universities, 2006. – 482 pp.

Vladimir G. Dmitriev, Department of Buildings and Structures in Transport. Moscow State Transport University, 9 Obraztsova st., Moscow 127994, RUSSIA

Aleksandr I. Roffe, Department of Construction Material Engineering. Moscow Aviation University, 4, Volokolamskoye shosse, Moscow 125993, A-80, GSP-3, RUSSIA

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ СПРЯМЛЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СЕТКИ НА ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

М.Л. Мозгалева[1], П.А. Акимов[1,2,3]
[1] Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье рассматриваются вопросы о влиянии «спрямления» аппроксимирующей сетки на численное решение краевой задачи на достаточном удалении от точки «спрямления» в рамках лагранжевого подхода к фрагментации. Соответствующие проблемы возникают при разработке и развитии дискретных методов локального расчета строительных конструкций.

Ключевые слова: дискретные методы, численные методы, аппроксимирующая сетка, спрямление, локальные решения, локальные расчеты строительных конструкций, краевая задача

ABOUT ASSESMENT OF THE IMPACT OF ALIGNMENT OF APPROXIMATING MESH ON NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM

Marina L. Mozgaleva[1], Pavel A. Akimov[1,2,3]
[1] Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] JSC "Research Centre "StaDyO", Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to assessment of the impact of alignment of approximating mesh on numerical solution of boundary problem at a sufficient distance from the point of "rectification" within the Lagrangian approach to fragmentation. Corresponding problems arise within development of discrete methods of local structural analysis.

Key words: discrete methods, numerical methods, approximating mesh, rectification, local solution, local structural analysis, boundary problems

В статье рассматривается вопрос о влиянии «спрямления» сетки на решение задачи

$$Au = F \qquad (1)$$

на достаточном удалении от точки «спрямления», весьма актуальный при разработке и исследовании методов локального расчета строительных конструкций [1-5, 8-11].

Прежде всего, поясним ниже само введенное понятие «спрямление» [6, 7].

Пусть в некоторой точке, достаточно удаленной от интересующей нас области, производится укрупнение сетки. Тогда это эквивалентно постановке в этой точке ограничения

$$D^2 u = 0, \qquad (2)$$

где D^2 – оператор второй производной.

Следовательно, при решении системы (1) минимизация выпуклого функционала

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (F, u) \qquad (3)$$

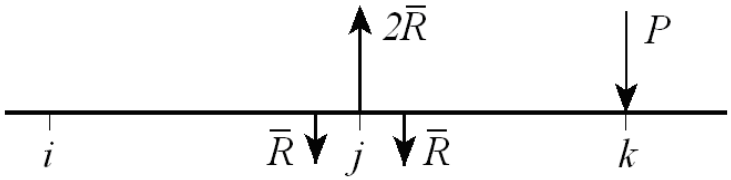


Рисунок 1. Одномерный случай спрямления.

должна производиться на множестве с ограничениями вида (2).

Пусть R – множитель Лагранжа для этого ограничения. Тогда рассмотрим влияние спрямления в точке j на решение задачи (1) в точке i в одномерном случае (рис. 1), где P – заданная нагрузка в точке k.

Пусть $\tilde{u}$ – решение задачи (1). Тогда решение задачи со спрямлением $\bar{u}$ будет равно

$$\bar{u}(i) = (A^{-1}F)(i) - (A^{-1}D^2R)(i), \qquad (4)$$

где $F = [\,0\ \ldots\ 0\ \ P\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^T$, причем P стоит на месте k-го элемента вектора; $R = [\,0\ \ldots\ 0\ \ \bar{R}\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^T$, где $\bar{R}$ – на месте j-го элемента.

Следовательно, несложно показать, что

$$R = \frac{d(j,k)}{c(j,j)}P, \qquad (4.3.5)$$

где $d(j,k)$ – элемент матрицы D^2A^{-1}, стоящий на j-й строке в k-м столбце; $c(j,j)$ – элемент матрицы $D^2A^{-1}(D^2)^*$, стоящий на j-й строке в j-м столбце;

$$\bar{u}(i) = \left[a(i,k) - b(i,j)\frac{d(j,k)}{c(j,j)}\right]P, \qquad (6)$$

где $a(i,k)$ – соответствующий элемент матрицы A^{-1}; $b(i,j)$ – соответствующий элемент матрицы $A^{-1}D^2$.

Далее, если рассматривать A^{-1} в виде фундаментальной матрицы, то можно получить:

$$\bar{u}(i) = \left[\varepsilon(i-k) - \frac{D^2\varepsilon(j-k)}{D^4\varepsilon(0)}D^2\varepsilon(i-j)\right]P. \qquad (7)$$

Если интерес представляет влияние не на само решение, а на его производные, то для k-й производной получим:

$$\bar{u}^k(i) = \left[D^k\varepsilon(i-k) - \frac{D^2\varepsilon(j-k)}{D^4\varepsilon(0)}D^{2+k}\varepsilon(i-j)\right]\frac{P}{h^k}, \qquad (8)$$

где

$$D^k v(i) = \begin{cases} D^{k-1}v(i) - D^{k-1}v(i-1), & k - \text{нечетное;} \\ D^{k-1}v(i+1) - D^{k-1}v(i), & k - \text{четное.} \end{cases} \qquad (9)$$

Поскольку

$$D^k r \approx \mathrm{O}(1/r^k),\ k > 0,$$

то можно сделать вывод, что влияние спрямления убывает как $1/r^2$, а само спрямление (т.е. величина $\bar{R}$) имеет тот же порядок убывания. Далее перейдем к практически важному вопросу об определении зоны вырезания. Будем исходить из того, что на границе зоны гарантированной точности влияние от перераспределения нагрузки на границе зоны вырезания должно быть достаточно мало. В [7] предложен следующий критерий вырезания – к зоне гарантированной точности как бы пририсовывается график производной от фундаментальной функции на мелкой сетке, далее эта кривая приближается ломаной по узлам крупной сетки (рис. 2). Там, где ломаная начинает удовлетворительно описывать график производной от фундаментальной функции, можно устанавливать границу зоны вырезания.

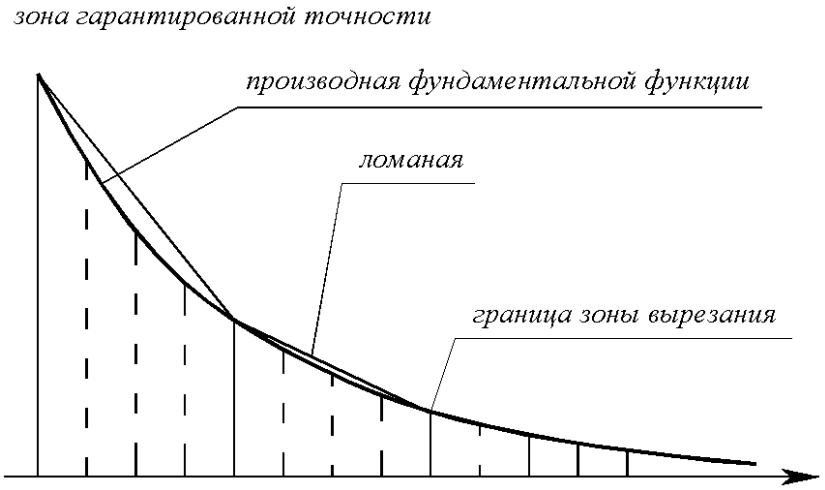


Рисунок 2. К определению критерия вырезания.

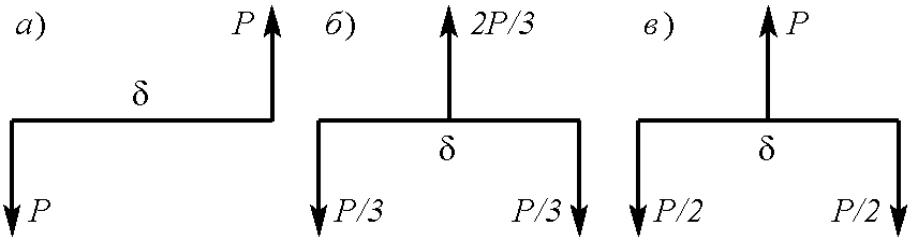


Рисунок 3. Схемы приложения нагрузок.

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 4. Структура матрицы ограничений для случая линейной интерполяции.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5. Структура матрицы ограничений для случая сноса.

Этот подход к определению зоны вырезания эквивалентен выполнению условия

$$h / r = const . \qquad (10)$$

В общем случае, однако, нас будет интересовать влияние укрупнения сетки по всей конструкции в целом. Если переход от крупной сетки к мелкой осуществляется путем линейной интерполяции, то на каждой ячейке крупной сетки проявляется эффект «спрямления», выражаемый в виде локальных самоуравновешенных нагрузок вида, показанного на рис. 3в. Если же этот переход осуществляется при помощи сноса значений с крупной сетки на мелкую, то возникающие нагрузки будут иметь вид диполя. Эффекты такого рода можно задать в виде ограничений, аналогичных ограничению (2), на множестве допустимых функций. Таким образом, решение задачи на крупной сетке эквивалентно решению задачи на мелкой сетке на множестве допустимых функций с ограничениями вида (2), где матрица ограничений D^2 определяется в соответствии с рис. 4 и 5.

В матрице D^2 строки, состоящие из –1, 2, –1 в случае линейной интерполяции или 1, –1 в случае сноса, соответствуют узлам из элементов, расположенных на границе области Ω_h, а строки, состоящие из –1, –1, 4, –1, –1 или 2, –1, –1, соответствуют узлам из внутренних элементов. Заметим, что эта матрица является прямоугольной, поскольку количество ее столбцов равно количеству узлов мелкой сетки, а количество строк меньше числа столбцов на величину, равную количеству узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами крупной сетки.

Введем для исходной задачи функцию Лагранжа вида

$$L(u,R) = \frac{1}{2}(Au,u) - (F,u) + (R,D^2u). \qquad (11)$$

Таким образом, минимизация функции Лагранжа будет производиться на подпространстве «спрямленных» функций, а R – вектор множителей Лагранжа для условий спрямления на ячейках крупной сетки (аналогично P на рис. 3б,в.

Рассмотрим условия минимума функции (11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = Au + (D^2)^* R - F = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial R} = D^2 u = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Решение системы (12) получается в виде

$$u = A^{-1}F - A^{-1}(D^2)^* R \qquad (13)$$

или

$$u = \hat{u} - A^{-1}(D^2)^* R, \qquad (14)$$

где $\hat{u}$ – решение задачи (1) на мелкой сетке.

Таким образом, суммарный эффект от спрямления будет выражаться слагаемым $A^{-1}(D^2)^* R$, и нас будет интересовать вопрос об убывании этого слагаемого, а также и самих R. Для R из второго уравнения системы (12) можно получить:

$$D^2 A^{-1} F - D^2 A^{-1}(D^2)^* R = 0. \qquad (15)$$

Решая это уравнение, получаем значения для R и для $A^{-1}(D^2)^* R$. Заметим, что в силу вырожденности оператора D^2 вектор $A^{-1}(D^2)^* R$ в общем случае может быть найден с точностью до константы. Поскольку часто бывает необходимо решать задачу в производных, то тогда эта константа уничтожается. Кроме того, можно отметить, что в качестве альтернативы при определении правильности вырезания фрагмента можно использовать малость значений производных R и $A^{-1}(D^2)^* R$ на границе вырезания.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами**. О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.
6. **Садов О.В.** К вопросу об использовании фрагментации при решении краевых задач. // Деп. во ВНИИНТПИ, №11236 во 2 вып. библиогр. указателя депонированных рукописей.
7. **Садов О.В.** Расчет конструкций многосеточным методом Федоренко-Бахвалова с использованием фрагментации: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17. - М: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992. - 167 с.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.
9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 405-408 (2013), pp. 3165-3168.
10. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems

Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 720-723.

11. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 724-727.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94;
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94;
E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

М.Л. Мозгалева[1], П.А. Акимов[1,2,3]
[1] Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье рассматриваются актуальные вопросы исследования дискретных (численных) методов получения локальных решений одномерных задач расчета конструкций. Вопрос о решении одномерных краевых задач достаточно часто возникает при расчете таких конструкций, как разного рода балки и балочные системы.

Ключевые слова: дискретные методы, численные методы, локальные решения, локальные расчеты строительных конструкций, краевая задача

ABOUT DEVELOPMENT OF DISCRETE METHODS OF ONE-DIMENSIONAL LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov
[1] Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] JSC “Research Centre “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to research and development of discrete (numerical) methods of one-dimensional local structural analysis. Solution of one-dimensional boundary problems is normally required, for instance, for beam analysis.

Key words: discrete methods, numerical methods, local solution, local structural analysis, boundary problems

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопрос о решении одномерных краевых задач достаточно часто возникает при расчете таких конструкций, как разного рода балки и балочные системы. В качестве соответствующих примеров здесь можно указать железнодорожные и подкрановые пути, цилиндрические оболочки, различные плитные конструкции, рассчитываемые методом прямых, многоэтажные здания и т.д. В случае значительной протяженности перечисленных систем (например, железнодорожный путь) при их моделировании дискретными методами (например, метод конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностный метод (ВРМ), метод конечных разностей (МКР) с постоянным шагом) для достижения достаточной точности требуется достаточно большое количество шагов. Кроме того, известно, что значительное количество неизвестных в этом случае приводит к плохой обусловленности системы. Помимо систем со значительной протяженностью аналогичная ситуация возникает также для балочных конструкций, характеризующихся сильным краевым эффектом, т.е. при наличии в соответствующих решениях составляющих типа $\exp(\lambda x)$ при достаточно больших значениях λx, например при $\lambda l > 20$, где l – длина конструкции. В действительности понятие

протяженности системы и явление типа краевого эффекта связаны единым критерием – величиной λl. Разумеется, существует и ряд других соображений (в частности, относительно небольшая мощность вычислительных средств), по которым слишком мелкая сетка является нежелательной для построения численного решения. В особенности нецелесообразна сетка со значительным количеством узлов при необходимости получить локальное решение в заданной заранее зоне конструкции [1-11].

При рассмотрении одномерных краевых задач существенным является тот факт, что в ряде случаев для контроля правильности получаемых результатов может быть построено аналитическое решение. Наконец, разработка, исследование и развитие методов, связанных с получением локального решения в случае одномерных задач, является хорошей моделью для разработки аналогичных подходов при решении многомерных задач.

1. ВЛИЯНИЕ СПРЯМЛЕНИЯ ФУНКЦИИ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим случай одномерной краевой задачи. Пусть в области $\Omega = (0, l)$ исходная краевая задача определена квадратичным функционалом

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (F, u) + C, \qquad (1)$$

где L – оператор краевой задачи; F – заданная правая часть.

Функционалу (1) соответствует стационарная точка, являющаяся решением уравнения

$$Lu = F. \qquad (2)$$

Для приближенного решения задачи на отрезке $(0, l)$ разобьем его на участки достаточно мелкой сеткой с постоянным шагом h, обеспечивающим хорошую аппроксимацию. В этом случае полученная дискретная задача описывается функционалом

$$\Phi_h(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (F, u) + C, \qquad (3)$$

где A – соответствующая матрица краевой задачи; F – правая часть.

Стационарная точка может быть определена из уравнения

$$Au = F. \qquad (4)$$

Предположим, что на некоторой части области принят более крупный шаг, объединяющий несколько участков мелкой сетки.

Будем считать, что искомая функция на соответствующих участках линейная. Это означает, что

$$u_i = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_{i-1}), \quad i \in I, \qquad (5)$$

где I – множество спрямляемых точек.

Это же условие, очевидно, можно записать следующим образом:

$$D^2 u(i) = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = 0. \qquad (6)$$

В общем случае таких спрямлений может быть несколько, и располагаться они могут в разных местах.

Пусть χ_Γ – характеристическая функция точек, попадающих внутрь спрямленных участков, т.е.

$$\chi_\Gamma(i) = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-й т точ задано условие;} \\ 0, & \text{условие не имеет места.} \end{cases} \qquad (7)$$

Тогда, учитывая дополнительные условия спрямления и используя множители Лагранжа, можно записать исходный функционал в виде

$$\Phi(u, R) = \Phi(u) + \sum_{i \in I} \chi_\Gamma(i) R(i) D^2 u(i), \qquad (8)$$

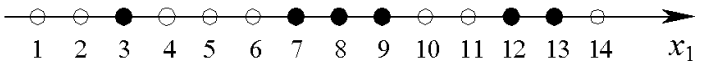


Рисунок 1. Пример задания точек спрямления (соответствующие точки выделены черным цветом).

где $R(i)$ – множители Лагранжа.

С физической точки зрения при расчете конструкций множители Лагранжа представляют собой реакции дополнительных связей, описываемых условием (8). Этот функционал можно представить в виде

$$\Phi(u,R)=\Phi(u)+(\chi_\Gamma R, D^2u), \qquad (9)$$

где
$$R=\begin{cases}0, & \text{если } \chi_\Gamma(i)=0\\ R_i, & \text{если } \chi_\Gamma(i)=1\end{cases} \qquad (10)$$

или, учитывая самосопряженность оператора D^2 ($(D^2)^*=D^2$) получим:

$$\Phi(u,R)=\frac{1}{2}(Au,u)-(F,u)+(D^2\chi_\Gamma R,u). \qquad (11)$$

Стационарные точки исходного функционала и функционала с дополнительными условиями будут, разумеется, разными. Обозначим через $\tilde{u}$ стационарную точку функционала с дополнительными условиями. Введем также величину

$$\Delta u=u-\tilde{u}, \qquad (12)$$

представляющую собой вектор, показывающий влияние дополнительных условий, определяемых реакциями R_i. Кроме того, обозначим:

$$Q=\chi_\Gamma D^2;\quad Q^*=D^2\chi_\Gamma. \qquad (13)$$

Следовательно, функционал (11) примет вид:

$$\Phi(u,R)=\frac{1}{2}(Au,u)-(F,u)+(Q^*R,u). \qquad (14)$$

Условие стационарности нового функционала описывается системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}=A\tilde{u}-F+Q^*R=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial R}=Q\tilde{u}=0.\end{cases} \qquad (15)$$

Решение этой системы можно искать в виде

$$\tilde{u}=u-\Delta u, \qquad (16)$$

где
$$u=A^{-1}F;\quad \Delta u=A^{-1}Q^*R, \qquad (17)$$

т.е. u – решение исходной задачи; Δu – влияние связей.

Для определения R подставим $\tilde{u}$ во второе уравнение системы (15). Будем иметь:

$$Q(u-\Delta u)=0;\quad Q\Delta u=Qu;\quad QA^{-1}Q^*R=Qu. \qquad (18)$$

Вводя обозначение

$$B=QA^{-1}Q^*, \qquad (4.6.19)$$

перепишем последнее уравнение в следующем виде

$$BR=Qu. \qquad (4.6.20)$$

В качестве примера приведем общий вид матриц для дискретной краевой задачи с заданными точками спрямления, как показано на рис. 1. Соответствующие построения представлены на рис. 2-7.

Для анализа физического смысла условия (20) рассмотрим случай, когда спрямляемый участок состоит из двух отрезков. Пусть такая ситуация реализуется в примере, представленном на рис. 8, для точки $i=7$.

Имеем:

$$u_7=\frac{u_6+u_8}{2} \quad \text{или} \quad u_6-2u_7+u_8=0.$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 & -2 & \end{bmatrix}$$

Рисунок 2. Структура матрицы D^2.

$$\chi_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3. Структура матрицы χ_Γ.

Тогда матрица Q представляется одной ненулевой строкой (седьмая строка). Соответственно матрица Q^* состоит из одного ненулевого столбца вида

$$(q_7)^* = [\,0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1 \underbrace{\;\; -2 \;\;}_{7-\text{я позиция}} 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\,].$$

В этом случае добавка к исходному решению на мелкой сетке определяется решением уравнения

$$A\Delta u = -Rq_7,$$

где R – число, т.е. является результатом действия на систему реакции связи, состоящее из трех самоуравновешенных сил, показанных на рис. 9.

В этом случае реакция i-й связи имеет вид, показанный на рис. 10.

Влияние i-й связи на систему определяется решением уравнения

$$A\Delta u^i = -R_i q^i, \qquad (21)$$

где $q^i = D^2 e^i; \quad e^i(j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$ (22)

$$Q = \chi_\Gamma D^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 4. Структура матрицы Q.

$$Q^* = D^2 \chi_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & -2 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & -2 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 & -2 \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5. Структура матрицы Q^*.

т.е. $$e^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i; \quad q^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \leftarrow i+1 \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (23)$$

Таким образом, q^i соответствует системе сил, показанной на рис. 11, а R_i – число, определяющее величину реакции.

Общее решение со связями может быть найдено по формуле

$$\tilde{u} = u - \sum g_i R_i \,, \quad \text{где} \quad g_i = A^{-1} q^i \,. \qquad (24)$$

$$G = A^{-1}D^2\chi_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & * & & & * & * & * & & * & * & \\ & 0 & * & & * & * & * & & * & * & \\ & & * & & * & * & * & & * & * & \\ & & * & 0 & * & * & * & & * & * & \\ & & * & & 0 & * & * & * & & * & * \\ & & * & & & 0 & * & * & * & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & 0 & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & 0 & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & & * & * \\ & & * & & & & * & * & * & & & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 6. Структура матрицы G .

$$B = \chi_\Gamma D^2 A^{-1} D^2 \chi_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & & 0 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & & & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & & & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & * & & & * & * & * & & & * & * & \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 7. Структура матрицы B .

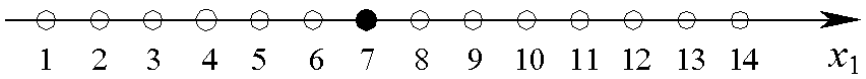


Рисунок 8. Пример задания точек спрямления (соответствующие точки выделены черным цветом).

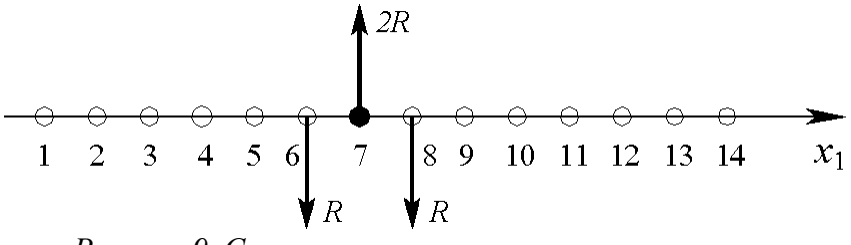


Рисунок 9. Система трех самоуравновешенных сил.

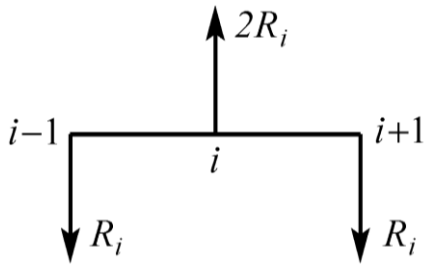


Рисунок 10. Общий вид реакции связи.

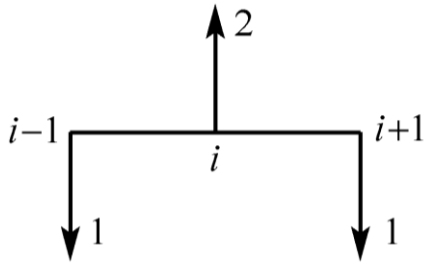


Рисунок 11. Вид эквивалентной реакции связи.

Подставляя $\tilde{u}$ в уравнения связей, получим:

$$\chi_\Gamma \sum_i \chi_\Gamma(i) R_i D^2 g_i = \chi_\Gamma D^2 u, \qquad (25)$$

т.е. систему уравнений относительно неизвестных R_i.

Отметим, что для определения u и g_i требуется решение системы уравнений с симметричной, положительно определенной матрицей A и несколькими правыми частями (F, q^i). Последующее определение R_i также состоит в решении системы с симметричной, положительно определенной матрицей B,

$$BR = \chi_\Gamma D^2 u, \qquad (26)$$

порядок которой определяется количеством связей. В развернутом виде система разрешающих уравнений относительно реакций R имеет вид:

$$\chi_\Gamma D^2 A^{-1} D^2 \chi_\Gamma R = \chi_\Gamma D^2 A^{-1} F. \qquad (27)$$

Использование множителей Лагранжа для определения влияния спрямления участков позволяет установить, каким физическим фактором сопровождается увеличение шага сетки. Пожалуй, самым существенным фактом является то, что спрямление соответствует приложению в окрестности точки симметричной, самоуравновешенной локальной системы сил (т.е. системы, у которой сумма проекций сил, а также момент относительно точки приложения любой из трех сил равны нулю). Из многих физических и математических соображений известно, что воздействие на сооружение в целом локальной системы самоуравновешенных сил в большинстве случаев резко убывает на расстоянии, что в принципе и оправдывает увеличение шага сетки вдали от места, напряженное состояние которого вызывает интерес или представляется опасным с точки зрения разрушения или какого-либо другого критерия надежности конструкции.

Выделив этот физический фактор, соответствующий геометрическому увеличению шага сетки, получаем возможность для аналитического исследования его влияния и численной оценки, а также численного определения, как максимально может увеличиваться шаг сетки по мере удаления от интересующего места.

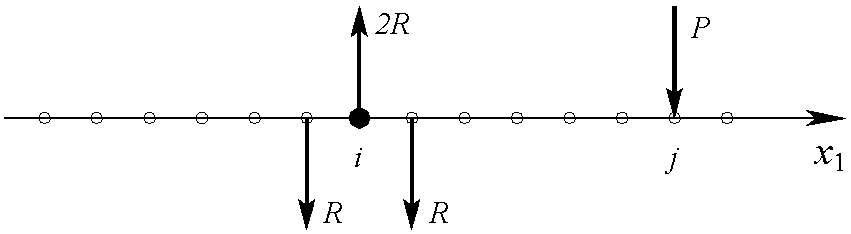


Рисунок 12. К исследованию влияния спрямления.

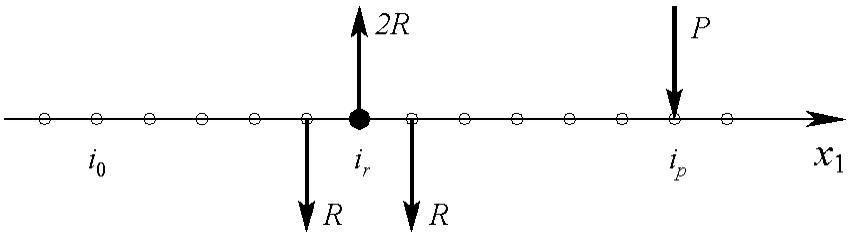


Рисунок 13. К исследованию влияния спрямления.

С математической точки зрения фактом, определяющим результат удаленного локального воздействия на рассматриваемое место конструкции, является поведение вектора (дискретной функции)

$$R_i g^i = R_i A^{-1} q_i, \qquad (28)$$

где матрица A^{-1} с позиций строительной механики является дискретной функцией влияния. Поскольку

$$A^{-1} q = A^{-1} D^2 e^i, \qquad (29)$$

то фактически результат определяется второй центральной разностью от линии влияния, и именно степень ее убывания определяет увеличение шага сетки.

В то же время величина воздействия от спрямления в i-й точке на величину искомой функции в j-й точке – это величина элемента $a_{j,i}$ матрицы $A^{-1} D^2$.

Пусть правая часть задана в виде дискретной единичной функции в j-й точке, т.е.

$$P_i = P \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad (30)$$

В силу линейности задачи этого вполне достаточно для исследования. Тогда величина R определяется из равенства

$$R b_{i,i} = d_{i,j} P, \qquad (31)$$

где $b_{i,i}$ – диагональный элемент матрицы $D^2 A^{-1} D^2$; $d_{i,j}$ – элемент матрицы $D^2 A^{-1}$. Следовательно,

$$R = \frac{d_{i,j}}{b_{i,i}} P. \qquad (32)$$

Если краевая задача рассматривается в бесконечной области, то умножение матрицы A^{-1} на вектор в этом случае представляется сверткой с дискретной фундаментальной функцией $\varepsilon(x)$. Тогда можно записать, что

$$A^{-1} v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varepsilon(i-j) v(j). \qquad (33)$$

Это означает, что все строки матрицы A^{-1} представлены одним и тем же вектором $\varepsilon = [\ldots \ \varepsilon_{-2} \ \varepsilon_{-1} \ \varepsilon_0 \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \ldots]$ (рис. 14).

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & & & \\
 & & \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & & \\
 & & & \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}$$

Рисунок 14. Структура матрицы A^{-1}.

и каждая диагональ матрицы представлена одним числом, соответствующим значению фундаментальной функции в точке, соответствующей номеру диагонали.

Можно проверить, что матрица $D^2A^{-1}D^2$ и матрица D^2A^{-1} образованы векторами $D^2D^2\varepsilon$ и $D^2\varepsilon$, поскольку операции разности и свертки являются перестановочными. Рассматривая реакцию R на спрямлении i-го участка от силы P, приложенной в точке j, получим, что

$$b_{i,i}=(D^2D^2\varepsilon)(0)\,;\quad d_{i,j}=(D^2\varepsilon)(i-j)\,. \quad (34)$$

Если принять для упрощения, что $i=0$, то

$$R=\frac{D^2\varepsilon(j)}{D^2D^2\varepsilon(0)}P\,. \quad (35)$$

Для изучения влияния спрямления в точке i_r от единичной нагрузки, приложенной в точке i_p (рис. 13), выведем общую формулу этой зависимости. Имеем:

$$\widetilde{u}(i_0)=(A^{-1}\widetilde{P})(i_0)-(A^{-1}D^2\widetilde{R})(i_0)\,, \quad (36)$$

где $$\widetilde{P}=P\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i_p\,;\quad \widetilde{R}=R\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i_r\,. \quad (37)$$

Величина R определяется по формуле (4.6.32), т.е.

$$R=\frac{d(i_r,i_p)}{b(i_r,i_r)}P\,; \quad (38)$$

$$\widetilde{u}(i_0)=\widetilde{a}(i_0,i_p)P-\widetilde{a}(i_0,i_r)R\,, \quad (39)$$

где $\widetilde{a}(i_0,i_p)$ – элемент матрицы A^{-1}, расположенный в i_0-й строке и i_p-м столбце; $\widetilde{a}(i_0,i_r)$ – элемент матрицы $A^{-1}D^2$, расположенный в i_0-й строке и i_r-м столбце.

Воспользовавшись выражением для R через величину P, получим:

$$\widetilde{u}(i_0)=\left[\widetilde{a}(i_0,i_p)-\widetilde{a}(i_0,i_r)\frac{d(i_r,i_p)}{b(i_r,i_r)}\right]P\,. \quad (40)$$

В случае, если A^{-1} представима фундаментальной функцией (бесконечный участок), будем иметь:

$$\widetilde{u}(i_0)=\left[\varepsilon(i_0-i_p)-\frac{D^2\varepsilon(i_r-i_p)}{D^4\varepsilon(0)}D^2\varepsilon(i_0-i_r)\right]P\,. \quad (41)$$

В большинстве практических случаев, как правило, интересует не столько сама функция, сколько ее производные. В дискретном случае это разностные отношения или просто разности. Общая формула для разности k-го порядка имеет вид:

$$\tilde{u}^k(i_0) = \\ = \left[D^k \varepsilon(i_0 - i_p) - \frac{D^2 \varepsilon(i_r - i_p)}{D^4 \varepsilon(0)} D^{2+k} \varepsilon(i_0 - i_r) \right] \frac{P}{h^k}, \quad (42)$$

где

$$D^k \varphi(i) = \begin{cases} D^{k-1}\varphi(i) - D^{k-1}\varphi(i-1), & k - \text{четное} \\ D^{k-1}\varphi(i+1) - D^{k-1}\varphi(i), & k - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (43)$$

Как видно из формул (40), величина погрешности решения от спрямления в этом случае определяется отношением

$$\gamma = \frac{\Delta u(i_0)}{u(i_0)} = \frac{D^2 \varepsilon(i_r - i_p) D^2 \varepsilon(i_0 - i_r)}{D^4 \varepsilon(0) \varepsilon(i_0 - i_p)}. \quad (44)$$

Для разностных производных эта погрешность имеет вид:

$$\gamma^k = \frac{\Delta u^k(i_0)}{u^k(i_0)} = \frac{D^2 \varepsilon(i_r - i_p) D^{2+k} \varepsilon(i_0 - i_r)}{D^4 \varepsilon(0) D^k \varepsilon(i_0 - i_p)}. \quad (45)$$

В действительности может оказаться, что само решение $u(i_0)$ или его производные $u^k(i_0)$ малы сами по себе, и поэтому любая относительная погрешность, даже очень большая, ни о чем не говорит (скорее всего, она иллюстрирует точность арифметических вычислений). В этой связи правильно судить о погрешности с позиций максимальных значений функции $\varepsilon(x)$, либо, если нас интересуют ее производные, сравнивать необходимо с их максимальными значениями. В общем случае обозначим максимальное значение функции или ее производных в заданной области через

$$M = \varepsilon^k_{\max} = \varepsilon^k(i)_{\max}. \quad (46)$$

Тогда общая погрешность одного спрямления оценивается формулой

$$\gamma^k = \frac{D^2 \varepsilon(i_r - i_p) D^{2+k} \varepsilon(i_0 - i_r)}{D^4 \varepsilon(0)} \frac{1}{M}. \quad (47)$$

Под величиной M может пониматься и некоторая другая величина, взятая из соображений, связанных с пониманием относительной погрешности (например, сравнение с величиной допустимых значений функции или ее производных либо воздействия от других сил, не связанные с силой P, и т.п.).

3. СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ФИКСИРОВАННОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ СПРЯМЛЕНИЯ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть в точке i_p задано сосредоточенное воздействие P, в точке i_r – условие $u(i_r) = g$. Тогда без спрямления функции исходная задача описывается функционалом

$$\Phi(u, R_0) = \Phi(u) + R_0 (u(i_r) - g), \quad (48)$$

где R_0 – множитель Лагранжа (реакция на фиксированное значение функции). Стационарная точка этого функционала определяется из уравнений

$$\begin{cases} Au = F + R_0 e_{ir} \\ u(i_r) = g, \end{cases} \quad (49)$$

где $e(i_{ir}) = \delta(i_r, i) = \begin{cases} 1, & i_r = i \\ 0, & i_r \neq i; \end{cases} \quad F = P e_{ip}$, (50)

т.е. $\delta(i_r, i)$ – символ Кронекера.

Если оператор A^{-1} представим в виде свертки с фундаментальной функцией, то решение задачи будет иметь вид:

$$u = P\varepsilon * e_{ip} + R_0 \varepsilon * e_{ir} = P\varepsilon(i - i_p) + R_0 \varepsilon(i - i_r). \quad (51)$$

В этом уравнении R_0 определяется из условия

$$P\varepsilon(i_r - i_p) + R_0\varepsilon(i_r - i_r) = g, \qquad (52)$$

откуда

$$R_0 = \frac{1}{\varepsilon(0)}(g - P\varepsilon(i_r - i_p)). \qquad (53)$$

Пусть теперь в точке i_r задано еще одно условие – спрямление функции

$$\begin{cases} \widetilde{u}(i_r) = g \\ D^2\widetilde{u}(i_r) = 0. \end{cases} \qquad (54)$$

Тогда функционал, описывающий задачу, примет вид:

$$\Phi(u, R) = \Phi(u) + \widetilde{R}_0(u(i_r) - g) + R_0 D^2 u(i_r), \qquad (55)$$

где $\widetilde{R}_0$ и R_0 – множители Лагранжа (реакции системы), соответствующие поставленным условиям. Условие стационарности такого функционала определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A\widetilde{u} = Pe_{ip} + \widetilde{R}_0 e_{ir} + R_0 D^2 e_{ir} \\ \widetilde{u}(i_r) = g \\ D^2\widetilde{u}(i_r) = 0. \end{cases} \qquad (56)$$

В случае, когда матрица A представлена фундаментальной функцией, общее решение ищется в виде

$$\widetilde{u} = P\varepsilon(i - i_p) + \widetilde{R}_0\varepsilon(i - i_r) + R_0 D^2\varepsilon(i - i_r), \qquad (57)$$

где $\widetilde{R}_0$ и R_0 могут быть найдены из условий

$$\begin{cases} P\varepsilon(i_r - i_p) + \widetilde{R}_0\varepsilon(i_r - i_r) + \\ \qquad + R_0 D^2\varepsilon(i_r - i_r) = g \\ PD^2\varepsilon(i_r - i_p) + \widetilde{R}_0 D^2\varepsilon(i_r - i_r) + \\ \qquad + R_0 D^4\varepsilon(i_r - i_r) = 0 \end{cases} \qquad (58)$$

или $$AR = b, \qquad (59)$$

где $$A = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) & D^2\varepsilon(0) \\ D^2\varepsilon(0) & D^4\varepsilon(0) \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_0 \\ R_0 \end{bmatrix}; \qquad (60)$$

$$b = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} - P\begin{bmatrix} \varepsilon(i_r - i_p) \\ D^2\varepsilon(i_r - i_p) \end{bmatrix}. \qquad (61)$$

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} D^4\varepsilon(0) & -D^2\varepsilon(0) \\ -D^2\varepsilon(0) & \varepsilon(0) \end{bmatrix}, \qquad (62)$$

где $$\Delta = \varepsilon(0)D^4\varepsilon(0) - (D^2\varepsilon(0))^2. \qquad (63)$$

Тогда из (59) величина R определится следующим образом:

$$A^{-1}b = \frac{g}{\Delta}\begin{bmatrix} D^4\varepsilon(0) \\ -D^2\varepsilon(0) \end{bmatrix} - \frac{P}{\Delta}\begin{bmatrix} D^4\varepsilon(0)\varepsilon(i_r - i_p) - D^2\varepsilon(0)D^2\varepsilon(i_r - i_p) \\ -D^2\varepsilon(0)\varepsilon(i_r - i_p) + \varepsilon(0)D^2\varepsilon(i_r - i_p) \end{bmatrix}; \qquad (64)$$

$$\widetilde{R}_0 = \frac{g}{\Delta}D^4\varepsilon(0) - \frac{P}{\Delta}[D^4\varepsilon(0)\varepsilon(i_r - i_p) - D^2\varepsilon(0)D^2\varepsilon(i_r - i_p)]; \qquad (65)$$

$$R_0 = -\frac{g}{\Delta}D^2\varepsilon(0) - \frac{P}{\Delta}[-D^2\varepsilon(0)\varepsilon(i_r - i_p) + \varepsilon(0)D^2\varepsilon(i_r - i_p)]. \qquad (66)$$

Погрешность, возникающая в результате спрямления, определяется по формуле

$$\Delta u = u - \widetilde{u} = \\ = \varepsilon(i - i_r)(R_0 - \widetilde{R}_0) + D^2\varepsilon(i - i_r)R_0, \quad (67)$$

где величина

$$\Delta R_0 = R_0 - \widetilde{R}_0 \quad (68)$$

определяется выражением

$$\Delta R_0 = g\left[\frac{1}{\varepsilon(0)} - \frac{1}{\Delta}D^4\varepsilon(0)\right] - \\ - P\left[\frac{\varepsilon(i_r - i_p)}{\varepsilon(0)} - \frac{1}{\Delta}[D^4\varepsilon(0)\varepsilon(i_r - i_p) - \right. \\ \left. - D^2\varepsilon(0)D^2\varepsilon(i_r - i_p)]\right] = \\ = \frac{(D^2\varepsilon(0))^2}{\Delta\varepsilon(0)}g + \frac{(D^2\varepsilon(0))^2}{\Delta\varepsilon(0)}\varepsilon(i_r - i_p)P - \\ - \frac{D^2\varepsilon(0)}{\Delta}D^2\varepsilon(i_r - i_p)P,$$

т.е.

$$\Delta R_0 = \frac{(D^2\varepsilon(0))^2}{\Delta\varepsilon(0)}g + \\ + \frac{(D^2\varepsilon(0))^2}{\Delta\varepsilon(0)}\varepsilon(i_r - i_p)P - \\ - \frac{D^2\varepsilon(0)}{\Delta}D^2\varepsilon(i_r - i_p)P. \quad (69)$$

Погрешность для разностных схем можно записать в виде

$$\Delta u^{(k)}(i) = [\varepsilon^{(k)}(i - i_r)\Delta R_0 + \varepsilon^{2+k}(i - i_r)R_0]/h^k, \\ k = 0, 1, 2, ... \quad (70)$$

Относительная погрешность может быть определена по одному из следующих выражений:

$$\gamma^k = \frac{\Delta u^{(k)}}{u^{(k)}}; \quad \gamma^k = \frac{\Delta u^{(k)}}{M}, \quad (71)$$

где M – некоторая заранее выбранная величина, представляющая собой $\max u^{(k)}$, либо некоторое заданное ограничение на $u^{(k)}$.

4. ПОСТРОЕНИЕ РАЗБЕГАЮЩЕЙСЯ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть требуется назначить координаты узлов аппроксимирующей сетки таким образом, чтобы в заранее заданной точке решение получалось с достаточной точностью при наименьшем количестве узлов. Рассмотрим построение такой сетки на примере балки на упругом основании с естественными краевыми условиями. Постановка соответствующей задачи:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 4\alpha^4 y = f(x), \quad x \in [0, L] \\ y_0'' = 0; \quad y_0''' = 0 \\ y_L = 0; \quad y_L''' = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная функция в данном случае имеет вид

$$\varepsilon(x) = (1/(8\alpha^3))\exp(-\alpha|x|)(\cos(\alpha x) + \sin(\alpha|x|)); \quad (72)$$

Анализируя формулу определения фундаментальной функции, несложно заключить, что влияние единичной нагрузки на перемещения балки с увеличением расстояния строго убывает и, начиная с некоторого сечения, практически исчезает. Размер зоны влияния зависит от величины α. Следовательно, правильно подобранная сетка должна учитывать эту особенность поведения фундаментальной функции.

Узлы локальной сетки целесообразно подбирать, исходя из аппроксимации фундаментальной функции ее кусочно-линейным аналогом. Одним из вариантов такой аппроксимации может быть построение отрезков таким образом, чтобы расстояние между прямой и графиком функции было постоянным

и равнялось заранее заданной величине. Координаты точек пересечения этих двух графиков и будут являться координатами узлов искомой разбегающейся сетки. Меняя величину расстояния, можно получать различную точность аппроксимации фундаментальной функции и различное количество узлов для составления разностных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами**. О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.
6. **Медведько Д.В.** Алгоритмы построения оптимальных сеток для локального расчета конструкций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992.–212 с.
7. **Медведько Д.В.** К вопросу о получении локальных решений для одномерных задач строительной механики. // Деп. во 2 вып. библиогр. указателя депонир. рукописей ВНИИНТПИ. – М.: МИСИ, 1992.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.

9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 405-408 (2013), pp. 3165-3168.
10. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 720-723.
11. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 724-727.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94;
e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94;
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94;
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЛНОВОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЪЕКТАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

В.К. Мусаев
Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматриваются некоторые вопросы численного моделирования нестационарных упругих волн в сложных деформируемых областях. При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. В работе рассматривается оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы. Приводится сопоставление с результатами экспериментального, аналитического и численного методов.

Ключевые слова: математическое моделирование, контурные напряжения, круглое отверстие, фотоупругость, подкрепленное отверстие, Курпсайская бетонная плотина, полуплоскость, волновая теория упругости, динамическая теория упругости, перемещение, скорость перемещений, ускорение, сейсмическое воздействие, дельта функция, функция Хевисайда, метод конечных элементов, комплекс программ, узловые точки, явная двухслойная схема.

ESTIMATION OF ACCURACY OF THE RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY WAVE OF THE STRESS IN DEFORMABLE OBJECTS OF COMPLEX SHAPE

Vyacheslav K. Musayev
Russian University of friendship of peoples, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Discusses some of the issues of numerical modeling of unsteady elastic waves in complex deformable areas. Solving difficult problems arise problems of assessing the reliability of obtained results. In work the estimation of the accuracy and reliability of results of numerical modeling of stress waves in the areas of the complex form. Comparison with the results of the experimental, analytical and numerical methods.

Key words: mathematical modeling, grid voltages, round hole, photoelasticity, backed hole, Kurpsai concrete dam, half-plane, wave theory of elasticity, the dynamic theory of elasticity, displacement, velocity, displacement, acceleration, seismic impact, the Delta function, Heaviside function, the finite element method, complex programs, anchor points, an explicit two-layer scheme.

ВВЕДЕНИЕ

В работе приводится информация о практической реализации метода конечных элементов в перемещениях. Представлены результаты исследований для пяти задач. Рассматриваемые задачи представлены в виде сооружений с основанием при воздействии волн напряжений. Применяется фундаментальное воздействие типа функции Хевисайда.

Основное внимание уделено оценке точности и достоверности численного решения нестационарных динамических задач.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости при различных начальных и граничных

условиях, для областей различной формы, для модели уравнений состояния кусочно-неоднородной изотропной среды, подчиняющейся упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма и достоверности результатов численного моделирования нестационарных динамических задач рассмотрены в следующих работах [1–47].

1. О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЕ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие.

Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1{,}9H$ (рис. 1) при $0 \le n \le 10$ $(n = t/\Delta t)$ скорость упругого перемещения $\dot{u}$ изменяется линейно от 0 до P $(P = \sigma_0/(\rho C_p))$ ($\sigma_0 =$ -0,1 МПа (-1 кгс/см^2)), а при $n \ge 10$ $\dot{u} = P$.

Контур круглого отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$.

Граничные условия для контура $EFGH$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $EFGH$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 260$.

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками.

На рис. 1 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ $(\bar{\sigma}_k = \sigma_k/|\sigma_0|)$ в точке 1 во времени $\bar{t}$ $(\bar{t} = (C_p t)/H)$: 1 – результаты аналитического решения [1 и 2]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [5, 6 и 7].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 6 %.

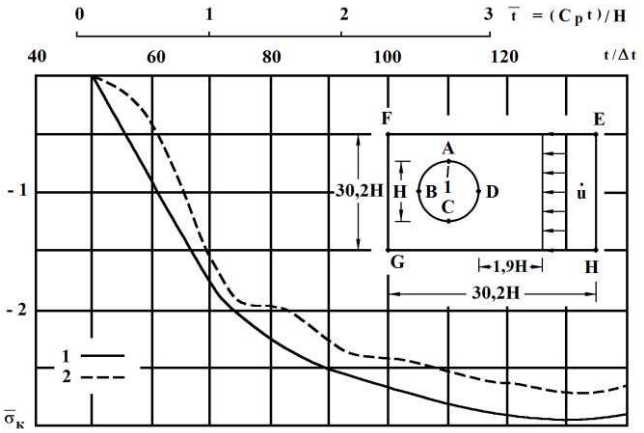


Рисунок 1. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}$ на контуре свободного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда.

а)

б)

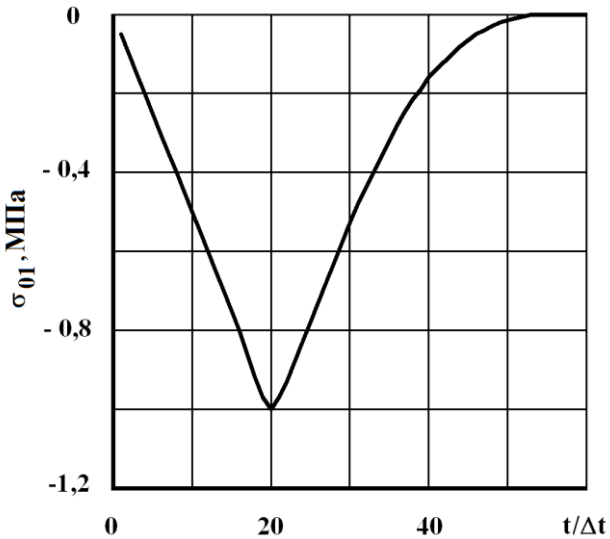


Рисунок 2. Экспериментальное воздействие σ_{01} во времени $\bar{t}$, полученное методом динамической фотоупругости: а – фотограмма картин полос; б – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях.

На рис. 2 показано экспериментальное воздействие σ_{01} во времени $\bar{t}$, полученное методом динамической фотоупругости: *а* – фотограмма картин полос; *б* – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях.

На рис. 3 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}$ при воздействии σ_{01}: *а* – фотограмма картин полос; *б*: 1 – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости [5, 6 и 7]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [5, 6 и 7].

а)

б)

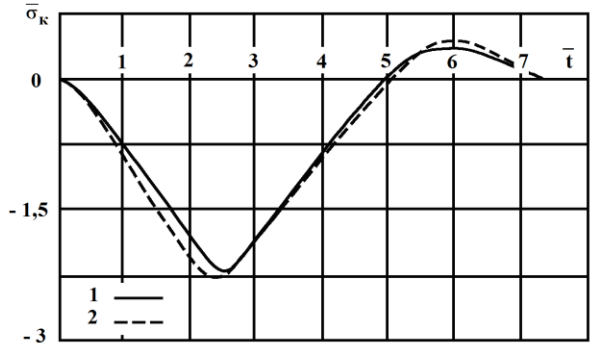


Рисунок 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}$ на контуре свободного круглого отверстия при воздействии σ_{01}: а – фотограмма картин полос; б: 1 – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях.

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 2 %.

2. О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА ПОДКРЕПЛЕННОЕ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми.

В сечении на расстоянии $1{,}6H$ (рис. 4) при $0 \le n_1 \le 10$ $(n_1 = t/\Delta t_1)$ скорость упругого перемещения $\dot{u}_2$ изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0 /(\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 \ge 10$ $\dot{u}_2 = P_1$.

Внутренний контур подкрепленного отверстия *ABCD* предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$.

На границе подкрепления и среды *EFGH* приняты условия непрерывности перемещений.

Граничные условия для контура *IJKL* при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0.$

Отраженные волны от контура *IJKL* не доходят до исследуемых точек при $0 \le n_1 \le 540$ ($...1$ – подкрепление; $...2$ - среда).

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек.

Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками.

По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками.

На рис. 4 показано изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ $(\bar{t}_1 = (C_{p2}t)/H)$: 1 – результаты аналитического решения [2]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [5, 6 и 7]. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12 %.

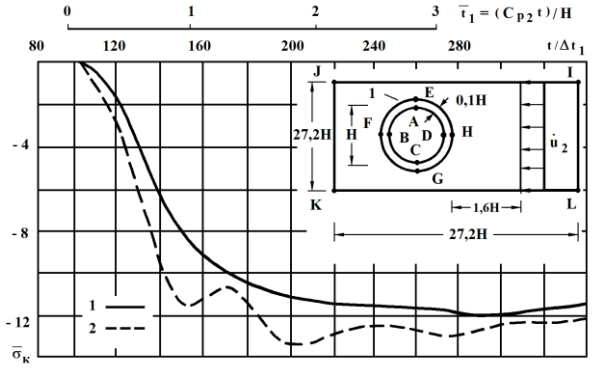


Рисунок 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ на внутреннем контуре подкрепленного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда.

3. О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КУРПСАЙСКУЮ ПЛОТИНУ С ОСНОВАНИЕМ

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на Курпсайскую плотину с основанием. Начальные условия приняты нулевыми.

В сечении на расстоянии $2{,}3H$ (рис. 5) при $0 \le n \le 25$ скорости упругих перемещений $\dot{u}$ и $\dot{v}$ изменяются линейно от 0 до $\dot{u} = P\sin\alpha$ и $\dot{v} = P\cos\alpha$, а при $n \ge 25$ $\dot{u} = P\sin\alpha$ и $\dot{v} = P\cos\alpha$.

Контур плотины $HIJABCDE$ (кроме точки D) предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$.

Отраженные волны от контура $EFGH$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 2000$.

Исследуемая расчетная область имеет 953 узловых точек. Курпсайская плотина аппроксимирована 224 узловыми точками.

На рис. 5 показано изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}$, полученное с помощью интеграла Дюамеля при воздействии типа полупериода синусоиды при $\lambda / H = 3$ (λ – длина волны): 1 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [5, 6 и 7]; 2 – результаты численного решения, полученные смешанным методом конечных элементов [5, 6 и 7].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 5 %.

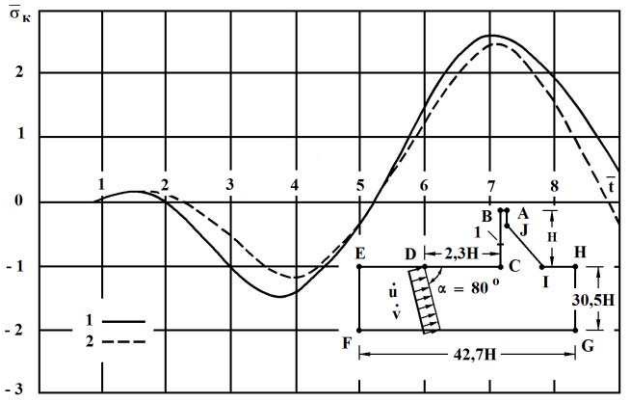


Рисунок 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}$ на контуре Курпсайской плотины при воздействии плоской продольной упругой волны типа полупериода синусоиды при $\lambda / H = 3$.

4. О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В ВИДЕ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной взрывной волны (рис. 7) на упругую полуплоскость (рис. 6).

На границе полуплоскости AB приложено нормальное напряжение σ_y, которое при $0 \le n \le 10$ $(n = t/\Delta t)$ изменяется линейно от 0 до P, а при $10 \le n \le 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, σ_0 = -0,1 МПа (-1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 100$.

Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14520 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

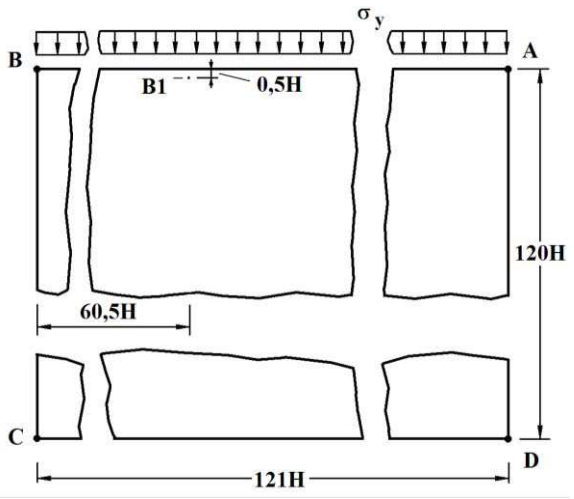


Рисунок 6. Постановка задачи о распространении плоских продольных взрывных волн в упругой полуплоскости.

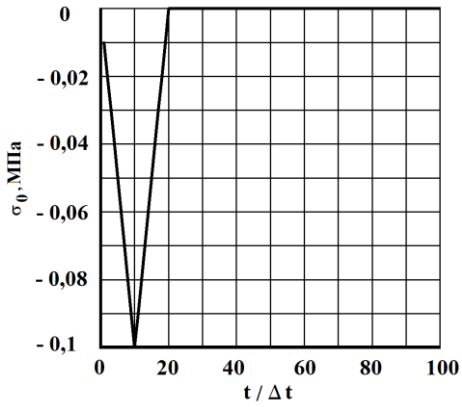


Рисунок 7. Воздействие типа дельта-функции.

На рис. 8 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$$

во времени n в точке $B1$.

На рис. 9 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$$

во времени n в точке $B1$.

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны, которые изложены в работе [3].

Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния

$$\sigma_y = - |\sigma_0| \text{ и } \sigma_x = -\nu|\sigma_0|.$$

Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 7). Для упругих нормальных напряжений σ_x и σ_y имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения.

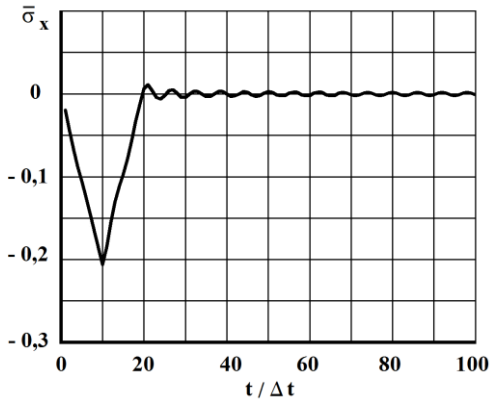


Рисунок 8. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t / \Delta t$ в точке $B1$.

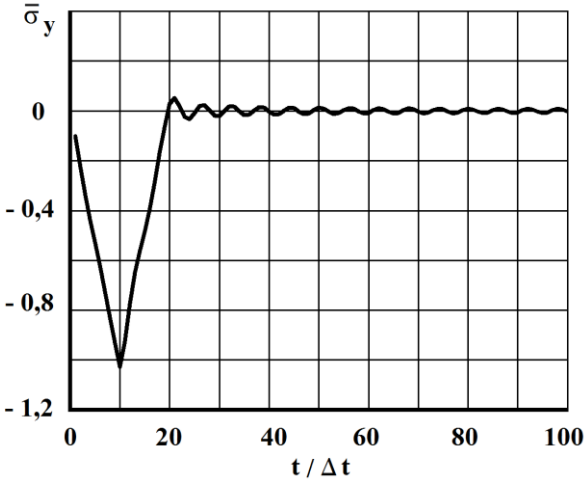


Рисунок 9. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке $B1$.

5. О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В ВИДЕ ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны (рис. 10) на упругую полуплоскость (рис. 6).

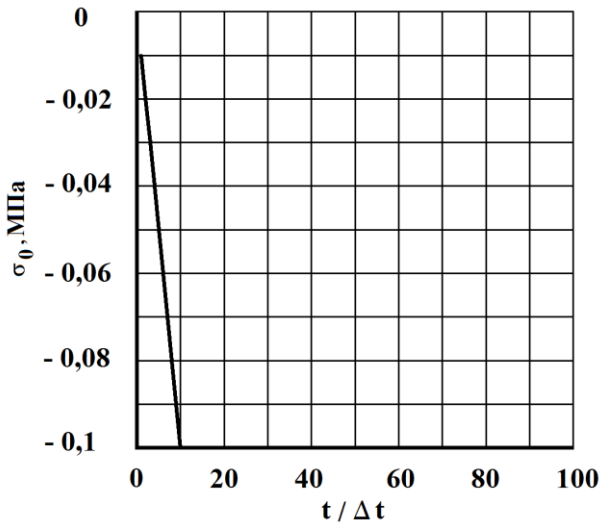


Рисунок 10. Воздействие типа функции Хевисайда.

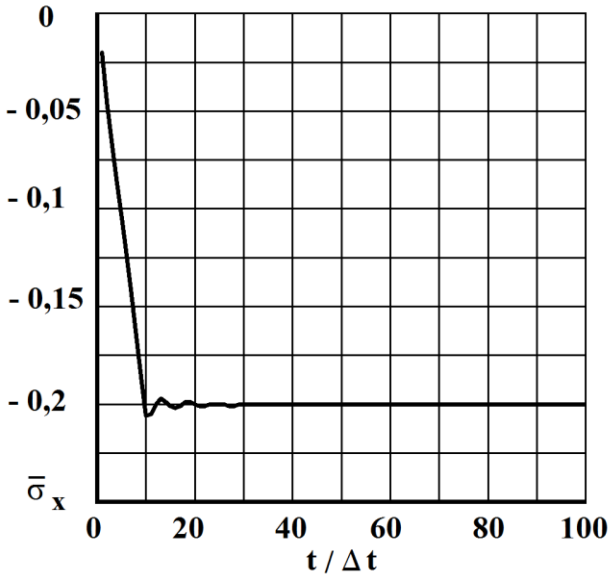


Рисунок 11. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке $B1$.

На границе полуплоскости AB приложено нормальное напряжение σ_y, которое при $0 \le n \le 10$ $(n = t/\Delta t)$ изменяется линейно от 0 до P, а при n ≥10 равно P $(P = \sigma_0$, $\sigma_0 =$ -0,1 МПа (-1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 100$.

Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14520 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

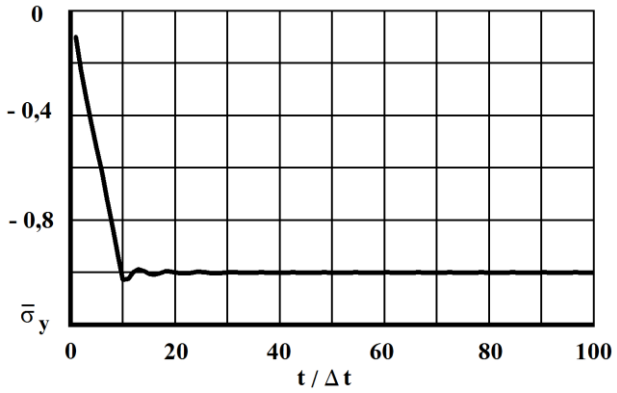


Рисунок 12. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке $B1$.

На рис. 11 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ $(\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|)$ во времени n в точке B1.

На рис. 12 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ $(\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|)$ во времени n в точке $B1$.

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны, которые изложены в работе [3].

На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния

$$\sigma_y = -|\sigma_0| \text{ и } \sigma_x = -\nu|\sigma_0|.$$

Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 10). Для нормальных напряжений σ_x и σ_y имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения.

ВЫВОДЫ

На сновании приведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Анализ численных результатов показывает, что метод конечных элементов в перемещениях с успехом применяется для решения нестационарных динамических задач.
2. Проведенные исследования сходимости и устойчивости, сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.
3. Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барон М., Мэтьюс А.** Дифракция волны давления относительно цилиндрической полости в упругой среде // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1961. – Т. 28, № 3. – С. 31–38.
2. **Гернет Х., Крузе-Паскаль Д.** Неустановившаяся реакция находящегося в упругой среде кругового цилиндра произвольной толщины на действие плоской волны расширения // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1966. – Т. 33, № 3. – С. 48–60.
3. **Тимошенко С.П., Гудьер Д.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. **Мусаев В.К.** Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
5. **Musayev V.K**. Structure design with seismic resistance foundations // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. – Moscow: TsNIISK, 1990. – V. 4–A. – P. 191–200.
6. **Musayev V.K.** Testing of stressed state in the structure-base system under non-stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Sent Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. – V. 3. – P. 87–97.
7. **Мусаев В.К.** Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.
8. **Musayev V.K.** Problem of the building and the base interaction under seismic loads // Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering. 2741. – Auckland: University of Canterbury, 2000. – P. 1–6.
9. **Мусаев В.К.** Численное решение некоторых задач безопасности жизнедеятельности с помощью метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 17–23.
10. **Мусаев В.К.** О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента //

Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.

11. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.
12. **Мусаев В.К.** Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.
13. **Мусаев В.К.** Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.
14. **Мусаев В.К**. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
15. **Мусаев В.К.** О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета. – 2009. – № 5. – С. 21–33.
16. **Мусаев В.К.** Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 44–52.
17. **Мусаев В.К.** Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 138–149.
18. **Ситник С.В., Куранцов В.А., Сазонов К.Б., Шепелина П.В., Шиянов С.М.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении дифракционных задач на круглом свободном и подкрепленном отверстиях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 256–262.
19. **Ситник С.В., Сазонов К.Б., Шиянов С.М., Куранцов В.В., Кормилицин А.И.** Моделирование волнового напряженного состояния в объектах сложной формы с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 262–268.
20. **Тахо-Годи А.З., Ситник С.В., Куранцов В.В., Кормилицин А.И., Акатьев С.В.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении задачи об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 280–284.
21. **Бедняков В.Г., Куранцов В.А., Сущев Т.С., Денисенков А.Н., Савичев В.А.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях

при решении дифракционной задачи на круглом подкрепленном отверстии // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2012. – С. 234–236.

22. **Бедняков В.Г., Ситник С.В., Савичев В.А., Куранцов О.В., Денисюк Д.А.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2012. – С. 237–239.
23. **Ситник С.В., Савичев В.А., Акатьев С.В., Акатьев Д.В., Сущев Т.С.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при моделировании отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 482–485.
24. **Сущев Т.С., Ситник В.Г., Шепелина П.В., Шиянов С.М., Кормилицин А.И.** Сопоставление результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении нестационарной дифракционной задачи на круглом свободном отверстии // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 489–492.
25. **Сущев Т.С., Ситник С.В., Савичев В.А., Шепелина П.В., Денисюк Д.А.** Сопоставление численного метода Мусаева В.К. в перемещениях с результатами метода динамической фотоупругости при решении дифракционной задачи на круглом свободном отверстии // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 493–496.
26. **Ситник С.В., Куранцов В.В., Куранцов О.В., Шепелина П.В., Акатьев С.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 59–62.
27. **Ситник С.В., Куранцов В.А., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А.** Решение задачи об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 63–67.

28. **Ситник В.Г., Сущев Т.С., Куранцов В.В., Куранцов О.В., Шепелина П.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной волны в виде дельта функции на упругую полуплоскость с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 67–72.
29. **Тахо-Годи А.З.** О методе решения нестационарных волновых задач с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 73–77.
30. **Тахо-Годи А.З.** Моделирование волн напряжений при взрывном воздействии в объектах угледобывающих предприятий с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 78–84.
31. **Куранцов В.А., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Акатьев С.В.** Моделирование нестационарных волн напряжений в деформируемых объектах сложной формы с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 213–216.
32. **Куранцов В.А., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Акатьев С.В.** Решение задачи об интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 216–221.
33. **Ситник С.В., Сущев Т.С., Акатьев Д.В., Кормилицин А.И., Шиянов С.М.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны в виде прямоугольного импульса на упругую полуплоскость с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 257–262.
34. **Ситник С.В., Сущев Т.С., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Акатьев Д.В.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при математическом моделировании отражения упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности пластинки // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 263–267.
35. **Ситник С.В., Куранцов В.А., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях

при математическом моделировании отражения упругих волн напряжений в виде функции Хевисайда от жесткой поверхности пластинки // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 267–271.

36. **Ситник В.Г., Куранцов В.В., Куранцов О.В., Шепелина П.В., Акатьев С.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 272–276.
37. **Ситник В.Г., Сущев Т.С., Куранцов В.В., Куранцов О.В., Шепелина П.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на Курпсайскую плотину с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 277–281.
38. **Ситник В.Г., Сущев Т.С., Акатьев С.В., Кормилицин А.И., Акатьев Д.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисйда на упругую полуплоскость с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 282–287.
39. **Ситник С.В., Сущев Т.С., Кормилицин А.И., Шиянов С.М., Акатьев Д.В.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при математическом моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности пластинки // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 287–292.
40. **Ситник С.В., Денисюк Д.А., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Акатьев Д.В.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при математическом моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от жесткой поверхности пластинки // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 297–302.
41. **Сущев Т.С., Ситник С.В., Акатьев С.В., Денисюк Д.А., Зюбина М.В.** О моделировании взаимодействия плоской продольной волны в виде функции Хевисайда на упругую полуплоскость с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Актуальные проблемы техногенной и экологической безопасности. Сборник научных работ. Выпуск 7. – М.: РГСУ, 2012. – С. 447–454.
42. **Сущев Т.С., Юзбеков Н.С., Ситник В.Г., Тарасенко А.А., Денисюк Д.А.** О моделировании интерференции плоских продольных упругих волн напряжений в виде дельта функции с помощью чис-

ленного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Актуальные проблемы техногенной и экологической безопасности. Сборник научных работ. Выпуск 7. – М.: РГСУ, 2012. – С. 454–462.

43. **Сущев Т.С., Юзбеков Н.С., Ситник В.Г., Тарасенко А.А., Денисюк Д.А.** О моделировании отражения упругих волн напряжений в виде дельта функции от жесткой поверхности пластинки с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Актуальные проблемы техногенной и экологической безопасности. Сборник научных работ. Выпуск 7. – М.: РГСУ, 2012. – С. 462–469.
44. **Сущев Т.С., Юзбеков Н.С., Ситник В.Г., Тарасенко А.А., Денисюк Д.А.** Применение численного метода Мусаева В.К. в перемещениях для моделирования волн напряжений в Курпсайской плотине // Актуальные проблемы техногенной и экологической безопасности. Сборник научных работ. Выпуск 7. – М.: РГСУ, 2012. – С. 470–477.
45. **Мусаев В.К.** О моделировании отражения упругих волн напряжений от свободной поверхности деформируемой области // Двойные технологии. – 2012. – № 4. – С. 61–64.
46. **Юзбеков Н.С., Сущев Т.С., Ситник С.В., Тарасенко А.А., Зюбина М.В.** Математическое моделирование безопасности сооружений при волновых сейсмических воздействиях с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2013. – С. 234–237.
47. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование системы «сооружение-окружающая среда» на ударные, взрывные и сейсмические воздействия // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2013. – С. 197–200.

Мусаев Вячеслав Кадыр оглы – почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры экологического мониторинга и прогнозирования Российского университета дружбы народов, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РОССИЯ, тел. +7(926) 5670558.
E-mail: musayev-vk@yandex.ru

Musayev Vyacheslav Kadyr ogly – honorary worker of higher professional education of the Russian Federation, doctor of technical Sciences, Professor, Professor of the chair of ecological monitoring and prognostication of the Russian University of friendship of peoples,
6, st. Miklukho-Maklay, 117198, Moscow, RUSSIA
tel. +7(926)5670558.
E-mail: musayev-vk@yandex.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОМ КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

В.К. Мусаев
Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматриваются некоторые вопросы численного определения волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии. Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями применяется метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. С помощью вырождения прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками получен контурный конечный элемент с двумя узловыми точками. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения волновых задач теории упругости. Программный комплекс позволяют решать сложные задачи при нестационарных воздействиях на объекты сложной формы. Приводится сопоставление контурного напряжения с результатами аналитического решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, контурные напряжения, подкрепленное круглое отверстие, функция Хевисайда, динамическая теория упругости, перемещение, скорость перемещений, ускорение, метод конечных элементов, комплекс программ, узловые точки, явная двухслойная схема

ON THE MATHEMATICAL MODELING OF NONSTATIONARY ELASTIC WAVES STRESSES IN CORROBORATED BY THE ROUND HOLE

Vyacheslav K. Musayev
Russian University of friendship of peoples, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Discusses some of the issues numerical definition of stress waves in corroborated by the round hole. For solution of two-dimensional plane dynamic problem of elasticity theory with the initial and boundary conditions of the method of finite elements in displacements. The task is solved by the method of end-to-end account, without the allocation of gaps. The main ratios of the finite element method is obtained using the principle of virtual work. Using the degeneration of the rectangular finite element with four anchor points obtained outline of a final element with two anchor points. On the basis of finite elements method in the movements of the algorithm and software complex for solutions of the wave theory of elasticity problems. Software complex allow to solve complex problems under nonstationary actions on objects of complex shape. Comparison of the contour voltage with the results of the analytical solution.

Key words: mathematical modeling, grid voltages, supported by a round hole, Heaviside function, dynamic theory of elasticity, displacement, velocity, displacement, acceleration, finite element method, complex programs, anchor points, an explicit two-layer scheme.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ УПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY (рис. 1), которому в начальный момент времени $t = 0$

сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие.

Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

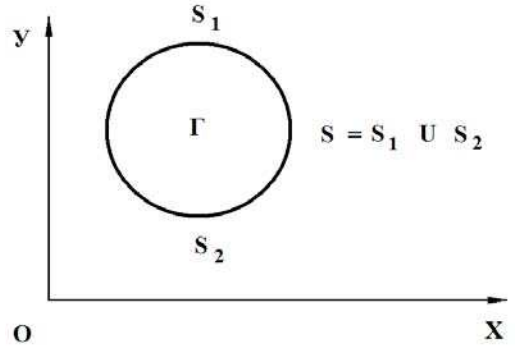


Рисунок 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \ (x,y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \quad (x,y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где: σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала;

$$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

– скорость продольной упругой волны;

$$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$$

– скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S\ (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ.

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях.

Постановки, численные методы, технология программных комплексов и анализ результатов решения нестационарных динамических задач для областей сложной формы рассмотрены в следующих работах [1–43].

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ И АЛГОРИТМА

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Для решения линейных дифференциальных уравнений (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R},$$
$$\vec{\Phi}\big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0,\quad \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (2)$$

где: $\overline{H}$ – диагональная матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Определим упругое контурное напряжение на границе области, свободной от нагрузок.

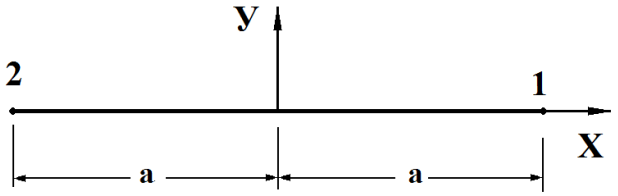


Рисунок 2. Контурный конечный элемент с двумя узловыми точками.

С помощью вырождения прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками получим контурный конечный элемент с двумя узловыми точками (рис. 2).

При повороте оси x на угол α против часовой стрелки, получим упругое контурное напряжение σ_k в центре тяжести контурного конечного элемента с двумя узловыми точками

$$\sigma_k=(E/(2a(1-\nu^2)))((u_1-u_2)\cos\alpha+$$
$$+(v_1-v_2)\sin\alpha). \qquad (3)$$

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}}+\overline{K}\vec{\Phi}=\vec{R},\ \frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\dot{\vec{\Phi}}. \qquad (4)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (4) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}=\dot{\vec{\Phi}}_i+\Delta t\overline{H}^{-1}(-\overline{K}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i),$$
$$\vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (5)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t=k\frac{\min\Delta l_i}{C_p}\ (i=1,\ 2,\ 3,...), \qquad (6)$$

где: Δl – длина стороны конечного элемента.

Устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных уз-

ловых точек на квазирегулярных сетках исследуем с помощью численного эксперимента.

Результаты численного эксперимента показали, что при k = 0,5 обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате (6).

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на уникальные сооружения.

При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОМ КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие.

Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1{,}6H$ (рис. 3) при $0 \le n_1 \le 10$ $(n_1 = t/\Delta t_1)$ скорость упругого перемещения $\dot{u}_2$ изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0 /(\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 > 10$ $\dot{u}_2 = P_1$.

Внутренний контур подкрепленного отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$.

На границе подкрепления и среды $EFGH$ приняты условия непрерывности перемещений. Граничные условия для контура $IJKL$ при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0$. Отраженные волны от контура $IJKL$ не доходят до исследуемых точек при $0 \le n_1 \le 540$.

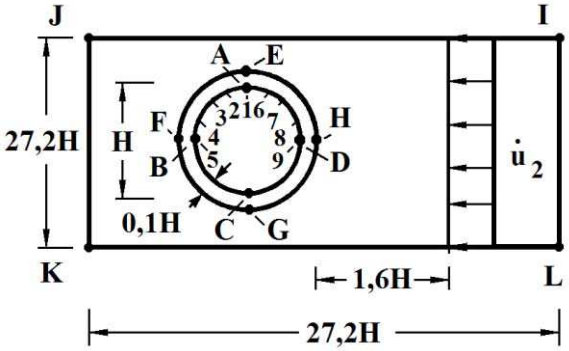


Рисунок 3. Постановка задачи для подкрепленного круглого отверстия.

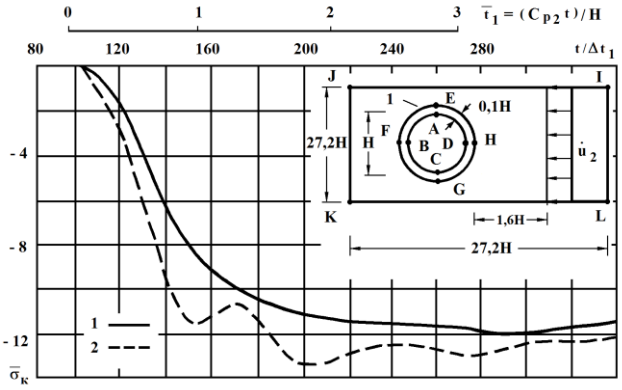


Рисунок 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ на внутреннем контуре подкрепленного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда.

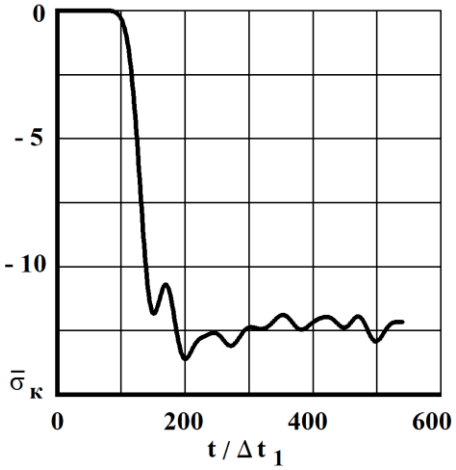


Рисунок 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: H = 0,2 м; Δt_1 = 0,186·10^5 с; E_1 = 0,72·10^5 МПа (0,72·10^6 кгс/см^2); ν_1 = 0,3; ρ_1 = 0,275·10^4 кг/м^3 (0,275·10^{-5} кгс·с^2/см^4); C_{p1} = 5364 м/с; Δt_2 = 0,407·10^5 с; E_2 = 0,36·10^4 МПа (0,36·10^5 кгс/см^2); ν_2 = 0,36; ρ_2 = 0,122·10^4 кг/м^3 (0,122·10^{-5} кгс·с^2/см^4); C_{p2} = 1841 м/с; σ_0 = -0,1 МПа (-1 кгс/см^2) ($\cdots_1$ – подкрепление; $\cdots_2$ – среда).

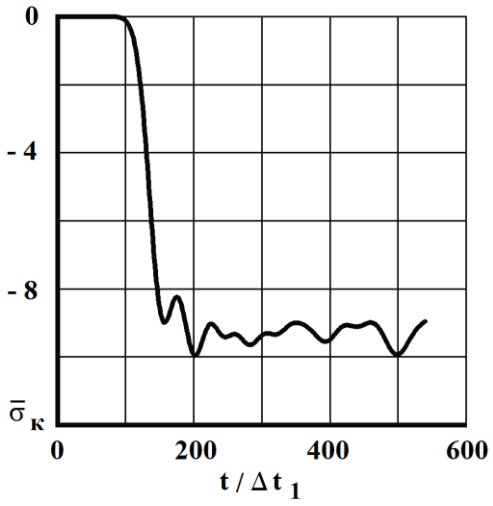


Рисунок 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 2 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

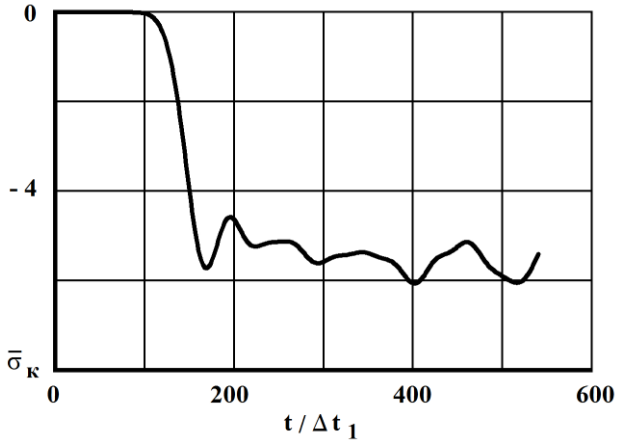


Рисунок 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 3 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

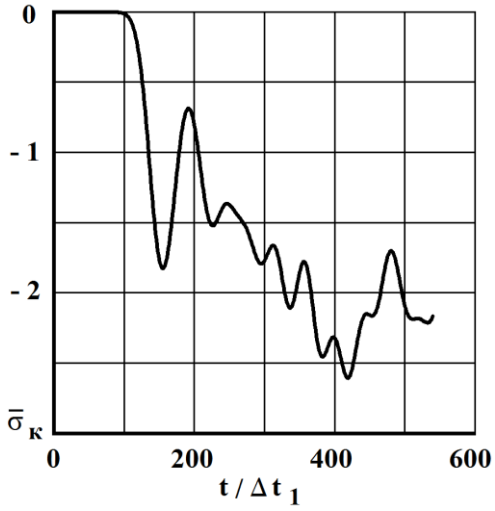


Рисунок 8. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 4 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

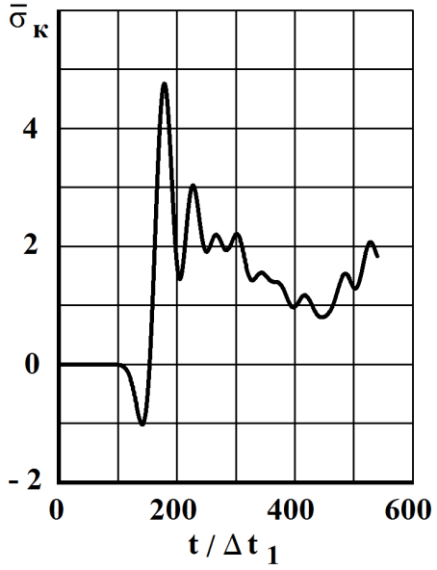


Рисунок 9. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 5 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками.

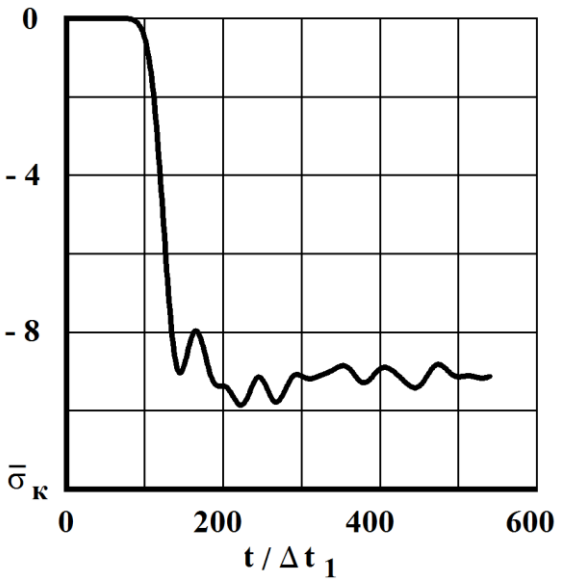


Рисунок 10. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 6 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

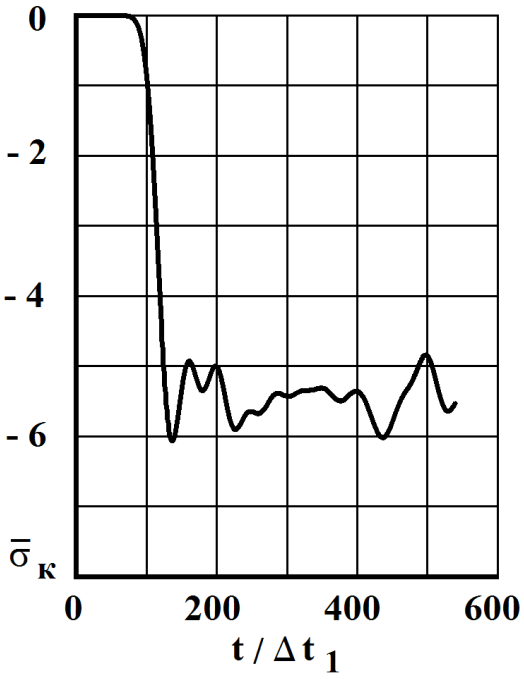


Рисунок 11. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 7 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

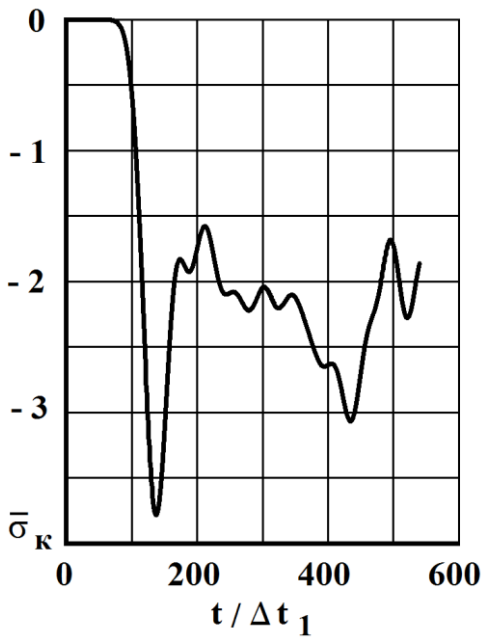


Рисунок 12. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 8 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

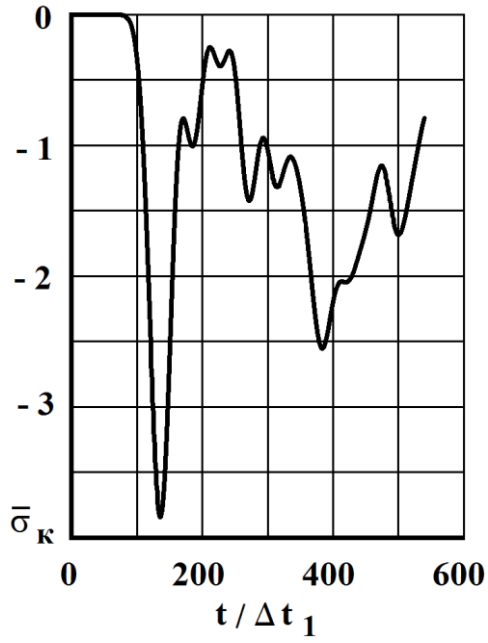


Рисунок 13. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 9 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$.

На рис. 4 показано изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ ($\bar{t}_1 = (C_{p2}t)/H$): 1 – результаты аналитического решения [1]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов [10, 12 и 13].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12 %.

Результаты исследований показаны на рис. 5–13 в виде графиков изменения контурных напряжений $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) в точках 1–9 во времени $t/\Delta t_1$ при воздействии функции Хевисайда.

Максимальной величины сжимающее контурное напряжение достигает в точке 1 почти за два прохода фронтом продольной волны диаметра среднего контура подкрепленного круглого отверстия и равно $\bar{\sigma}_k$ = – 13,6.

ВЫВОДЫ

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Анализ численных результатов показывает, что при решении задач о воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда на подкрепленное круглое отверстие получены хорошие результаты.
2. Сравнение с результатами аналитического метода показало их хорошее совпадение, что позволяет сделать заключение о физической достоверности результатов численного решения волновых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гернет Х., Крузе-Паскаль Д.** Неустановившаяся реакция находящегося в упругой среде кругового цилиндра произвольной толщины на действие плоской волны расширения // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1966. – Т. 33, № 3. – С. 48–60.
2. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М: Мир, 1975. – 543 с.
3. **Ионов В.И., Огибалов П.М.** Напряжения в телах при импульсивном нагружении. – М.: Высшая школа, 1975. – 464 с.
4. **Тимошенко С.П., Гудьер Д.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
5. **Мусаев В.К.** Решение плоской динамической задачи теории упругости с помощью МКЭ с применением треугольного элемента с тремя узловыми точками // Труды МИСИ. – 1976. – № 137. – С. 48–50.
6. **Мусаев В.К.** Воздействие продольной ступенчатой волны на подкрепленное круглое отверстие в упругой среде // Всесоюзная конференция «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов». Тезисы докладов. – М.: МАИ, 1983. – С. 51.
7. **Мусаев В.К.** Дифракция продольной волны на круглом и квадратном отверстиях в упругой среде // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн. – Фрунзе: Фрунзенский политехнический институт, 1983. – Ч. 1. – С. 72–74.
8. **Мусаев В.К.** Метод конечных элементов в динамической теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1983. – Вып. 24. – С. 161–162.
9. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 320 с.
10. **Musayev V.K.** Structure design with seismic resistance foundations // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. – Moscow: TsNIISK, 1990. – V. 4–A. – P. 191–200.
11. **Мусаев В.К.** Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
12. **Musayev V.K**. Testing of stressed state in the structure-base system under non-

stationary dynamic effects // Proceedings of the second International conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics. – Sent Louis: University of Missouri-Rolla, 1991. – V. 3. – P. 87–97.

13. **Мусаев В.К.** Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.
14. **Musayev V.K.** Problem of the building and the base interaction under seismic loads // Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering. 2741. – Auckland: University of Canterbury, 2000. – P. 1–6.
15. **Мусаев В.К.** Метод конечных элементов в задачах безопасности сооружений с окружающей средой // Материалы всероссийской научно-технической конференции «Проблемы прогнозирования, предотвращения и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций». – Уфа: НИИБЖД РБ, 2000. – С. 85–86.
16. **Мусаев В.К.** Численное моделирование безопасности подводного подземного подкрепленного круглого отверстия при нестационарных динамических воздействиях // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. – 2000. – Вып. 5. – С. 191–197.
17. **Филиппов В.М., Мусаев В.К., Щесняк Е.Л.** Распространение упругих волн в подкрепленном круглом отверстии, находящемся под водной и грунтовой средой // Оценка и управление природными рисками. Материалы Общероссийской конференции «РИСК-2000». – М.: Анкил, 2000. – С. 124.
18. **Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.** Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
19. **Мусаев В.К.** Численное решение некоторых задач безопасности жизнедеятельности с помощью метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 17–23.
20. **Мусаев В.К.** О моделировании сейсмических волновых процессов в подкрепленном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 6–17.
21. **Мусаев В.К.** О разрушениях в сложных деформируемых телах вызванных импульсными воздействиями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 36–42.
22. **Мусаев В.К.** О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.
23. **Мусаев В.К.** О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.
24. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.
25. **Мусаев В.К.** Определение упругих волновых напряжений в подкрепленном круглом отверстии с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 3. – С. 29–33.
26. **Мусаев В.К.** Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы наро-

дов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

27. **Мусаев В.К.** Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.
28. **Мусаев В.К.** Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
29. **Мусаев В.К.** О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета. – 2009. – № 5. – С. 21–33.
30. **Мусаев В.К.** Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 44–52.
31. **Мусаев В.К.** Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 138–149.
32. **Ситник С.В., Куранцов В.А., Сазонов К.Б., Шепелина П.В., Шиянов С.М.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении дифракционных задач на круглом свободном и подкрепленном отверстиях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 256–262.
33. **Ситник С.В., Сазонов К.Б., Шиянов С.М., Куранцов В.В., Кормилицин А.И.** Моделирование волнового напряженного состояния в объектах сложной формы с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго- и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XIII. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011. – С. 262–268.
34. **Мусаев В.К.** О математическом моделировании контурных напряжений в подкрепленном круглом отверстии с помощью волновой теории сейсмостойкости // Ревальвация публичной безопасности. Материалы Международной научной конференции. – Гожув Влкп.–Познань, Польша: Институт научных исследований и экспертиз, 2011. – С. 264–274.
35. **Мусаев В.К.** О моделировании отражения упругих волн напряжений от свободной поверхности деформируемой области // Двойные технологии. – 2012. – № 4. – С. 61–64.
36. **Сазонов К.Б., Сущев Т.С., Шепелина П.В., Куранцов О.В., Акатьев С.В.** Моделирование нестационарного волнового напряженного состояния в деформируемых объектах с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2012. – С. 332–334.
37. **Мусаев В.К.** Моделирование контурных напряжений в обделке круглого профиля с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сбор-

ник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 263–271.

38. **Сущев Т.С., Ситник С.В., Савичев В.А., Шепелина П.В., Денисюк Д.А.** Сопоставление численного метода Мусаева В.К. в перемещениях с результатами метода динамической фотоупругости при решении дифракционной задачи на круглом свободном отверстии // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 293–496.
39. **Ситник С.В., Акатьев С.В., Денисенков А.Н., Савичев В.А., Денисюк Д.А.** Достоверность результатов численного метода Мусаева В.К. в перемещениях при решении нестационарной дифракционной задачи на обделке круглого профиля // Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути. Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2012. – С. 473–477.
40. **Ситник С.В., Куранцов В.В., Куранцов О.В., Шепелина П.В., Акатьев С.В.** Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Безопасность и экология технологических процессов и производств. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Поселок Персиановский Ростовской области: Донской государственный аграрный университет, 2012. – С. 59–62.
41. **Мусаев В.К.** Практическая реализация математического мониторинга комплексной безопасности объектов экономики // Экология пограничной области. Материалы Международной научной конференции. – Гожув Влкп.–Познань, Польша: Институт научных исследований и экспертиз, 2012. – С. 227–240.
42. **Тахо-Годи А.З.** Математическое моделирование нестационарных волн напряжений в деформируемых областях с помощью численного метода Мусаева В.К. в перемещениях // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 1 (часть 1). – С. 159–162; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10000125.
43. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование системы «сооружение-окружающая среда» на ударные, взрывные и сейсмические воздействия // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2013. – С. 197–200.

Мусаев Вячеслав Кадыр оглы – почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры экологического мониторинга и прогнозирования Российского университета дружбы народов,
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РОССИЯ,
тел. +7(926) 5670558; E-mail: musayev-vk@yandex.ru

Musayev Vyacheslav Kadyr ogly – honorary worker of higher professional education of the Russian Federation, doctor of technical Sciences, Professor, Professor of the chair of ecological monitoring and prognostication of the Russian University of friendship of peoples,
6, st. Miklukho-Maklay, 117198, Moscow, RUSSIA
tel. +7(926)5670558; E-mail: musayev-vk@yandex.ru