Publishing House ASV

begell house, inc. publishers

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

Volume 14 • Issue 2 • 2018

ISSN 2588-0195 (Online)
ISSN 2587-9618 (Print) Continues ISSN 1524-5845

International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering

Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций

http://raasn.ru/public.php
http://ijccse.iasv.ru/

DOI: 10.22337/2587-9618
GICID: 71.0000.1500.2830

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Urban Planning Institute
of Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Moscow Institute of Architecture (State Academy);
Perm National Research Polytechnic University;
Kielce University of Technology (Poland);
9b9, Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D.,
Director of ASV Publishing House;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "StaDyO";
Tomsk State University of Architecture and Building;
Russian University of Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Scientific Research Center "StaDyO";
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Perm National Research Polytechnic University;
Tomsk State University of Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.,
SemanticPro;
Boston, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute, Polish Academy of
Sciences; Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analise Numerique; NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251, Saint-Petersburg, Russia

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

PUBLISHER

ASV Publishing House
(ООО «Издательство АСВ»)
19/1,12, Yaroslavskoe Shosse, 120338, Moscow, Russia
Tel. +7(925)084-74-24; E-mail: iasv@iasv.ru; Интернет-сайт: http://iasv.ru/

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Robert M. Aloyan,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University; 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Mojtaba Aslami, Ph.D,
Fasa University; Daneshjou blvd,
Fasa, Fars Province, Iran

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Yuri M. Bazhenov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Alexander T. Bekker,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Far Eastern Federal University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
8, Sukhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Tomas Bock, Professor, Dr.-Ing.,
Technical University of Munich,
Arcisstrasse 21, D-80333
Munich, Germany

Jan Buynak, Professor, Ph.D.,
University of Žilina;
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University; 14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir T. Erofeev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University; 68, Bolshevistskaya
Str., Saransk 430005, Republic of
Mordovia, Russia

Victor S. Fedorov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey V. Fedosov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Sergiy Yu. Fialko,
Professor, Dr.Sc.,
Cracow University of
Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Vladimir G. Gagarin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Alexander S. Gorodetsky,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
LIRA SAPR Ltd.;
7a Kiyanovsky Side Street
(Pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Podzemproekt Ltd.;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego Kielce, 25 – 314,
Poland

Sergey Yu. Kalashnikov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Volgograd State Technical
University; 28, Lenin avenue,
Volgograd, 400005, Russia

Semen S. Kaprielov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutskaya St., Moscow,
109428, Russia

Nikolay I. Karpenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences; Russian Academy of
Architecture and Construction
Sciences; 21, Lokomotivny
Proezd, Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov,
Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Perm National Research
Polytechnic University;
29 Komsomolsky pros., Perm,
Perm Krai, 614990, Russia

John T. Katsikadelis,
Professor, Dr.Eng, PhD, Dr.h.c.,
National Technical University of
Athens; Zografou Campus
9, Iroon Polytechniou str
15780 Zografou, Greece

Vitaly I. Kolchunov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Southwest State University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
94, 50 let Oktyabrya, Kursk,
305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT); 9b9 Obrazcova
Street, Moscow, 127994, Russia

Sergey B. Krylov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutskaya St., Moscow,
109428, Russia

Sergey V. Kuznetsov,
Professor, Dr.Sc.,
Ishlinsky Institute for Problems
in Mechanics of the Russian
Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo,
Moscow, 119526, Russia

Vladimir V. Lalin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint-Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya Sq., Tomsk,
634003, Russia

Rashid A. Mangushev,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc., Kazan State
University of Architecture and
Engineering; 1, Zelenaya Street,
Kazan, 420043, Republic
of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Valery I. Morozov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Anatoly V. Perelmuter,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc., SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov,
Advisor of RAACS, Professor,
Dr.Sc., Petrozavodsk State
University; 33, Lenina Prospect,
Petrozavodsk, 185910,
Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
7, Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor, Dr.Sc.,
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Vladimir P. Selyaev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc., Ogarev
Mordovia State University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Eun Chul Shin,
Professor, Ph.D.,
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh,
Professor, Ph.D,
University of Roorkee;
Roorkee, India, 247667

Wacław Szcześniak,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka,
Professor, Dr.Sc.,
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Josef Vican,
Professor, Ph.D,
University of Žilina;
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Zbigniew Wojcicki,
Professor, Dr.Sc.,
Wroclaw University
of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University of
Technology;
Pl. Politechniki 1, 00-661
Warsaw, Poland

Segrey I. Zhavoronok, Ph.D.,
Institute of Applied Mechanics of
Russian Academy of Sciences;
Moscow Aviation Institute
(National Research University);
7, Leningradsky Prt.,
Moscow, 125040, Russia

Askar Zhussupbekov,
Professor, Dr.Sc.,
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D.,
Deputy Executive Scientific
Secretary of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

EDITORIAL TEAM

Alexander V. Kuzmin,
Full Member of RAACS,
President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
Research Center of Construction;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc., National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc., Executive Scientific Secretary of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO"; Tomsk State University of Architecture and Building; Russian University of Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc., Research & Development Center "STADYO"; Russian University of Transport (RUT – MIIT); Russian University of Friendship of Peoples; Perm National Research Polytechnic University; Tomsk State University of Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya, 125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc., SemanticPro; Boston, USA

Charles El Nouty, Professor, Dr.Sc., LAGA Paris-13 Sorbonne Paris Cite; 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Natalya N. Fedorova, Professor, Dr.Sc., Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (SIBSTRIN);
113 Leningradskaya Street, Novosibirsk, 630008, Russia

Darya Filatova, Professor, Dr.Sc., Kielce University of Tecnology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25-314, Poland

Vladimir Ya. Gecha, Professor, Dr.Sc., Research and Production Enterprise All-Russia Scientific-Research Institute of Electromechanics with Plant Named after A.G. Iosiphyan;
30, Volnaya Street, Moscow, 105187, Russia

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D,
Deputy Executive Scientific Secretary of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Amirlan A. Kusainov,
Foreign Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Kazakh-American University,
9, Toraighyrov Str., Almaty, 050043, Republic of Kazakhstan

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D., Director of ASV Publishing House;
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii,
Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom; 29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor, Dr.Sc., Equipe d'Analise Numerique NMR CNRS 5585 University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya, 195251 Saint-Petersburg, Russia

Marina V. Shitikova,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical University;
14, Moscow Avenue, Voronezh, 394026, Russia

Igor L. Shubin,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc., Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport (RUT – MIIT); Russian University of Friendship of Peoples; Moscow Institute of Architecture (State Academy); Perm National Research Polytechnic University; Kielce University of Technology (Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
Urban Planning Institute of Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Maldybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Irina N. Afanasyeva, Ph.D.,
University of Florida; Gainesville, FL 32611, USA

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Tatyana L. Dmitrieva, Professor, Dr.Sc.,
Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov street, Irkutsk, 664074, Russia

Petr P. Gaidzhurov, Professor, Dr.Sc.,
Don State Technical University; 1, Gagarina Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

Jacek Grosel, Associate Professor, Dr inz.
Wroclaw University of Technology; 11 Grunwaldzki Sq., 50-377, Wrocław, Poland

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.,
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.,
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, Ph.D.,
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Marina L. Mozgaleva, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал "International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)" (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года (ISSN 2588-0195 (Online); ISSN 2587-9618 (Print) Continues ISSN 1524-5845). В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники (в том числе академики, члены-корреспонденты, иностранные члены, почетные члены и советники Российской академии архитектуры и строительных наук). Основной критерий отбора статей для публикации в журнале − их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень Высшей аттестационной комиссии (ВАК) РФ при Министерстве образования и науки Российской Федерации ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по отраслям науки

- 01.00.00 Физико-математические науки;
- 05.00.00 Технические науки

и группам специальностей

- 01.02.00 Механика
- 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление
- 05.23.00 Строительство и архитектура.

В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ).

Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science. Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – *Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/* (Россия, г. Москва) и до 2017 года *Издательский дом Begell House Inc.* (США, г. Нью-Йорк). Официальными партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук* (*РААСН*), осуществляющая научное курирование издания, и *Научно-исследовательский центр СтаДиО* (ЗАО НИЦ СтаДиО).

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных ме-

тодов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

- предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности публиковать результаты своих исследований;
- привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;
- обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взымается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Журнал предоставляет непосредственный открытый доступ к своему контенту, исходя из следующего принципа: свободный открытый доступ к результатам исследований способствует увеличению глобального обмена знаниями.

Индексирование. Публикации в журнале входят в системы расчетов индексов цитирования авторов и журналов. «Индекс цитирования» — числовой показатель, характеризующий значимость данной статьи и вычисляющийся на основе последующих публикаций, ссылающихся на данную работу.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (http://raasn.ru); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (http://iasv.ru); подраздел «Журнал IJCCSE»): с основной информацией о журнале, его целями и задачами, составом редакционной коллегии и редакционного совета, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей, сведениями о соблюдении редакционной этики, о политике авторского права и лицензирования, о представлении журнала в информационных системах (индексировании), информацией о подписке на журнал, контактными данными и пр. Журнал рабо-

тает по лицензии Creative Commons типа cc by-nc-sa (Attribution Non-Commercial Share Alike) – Лицензия «С указанием авторства – Некоммерческая – Копилефт».

Рецензирование. Все научные статьи, поступившие в редакцию журнала, проходят обязательное двойное слепое рецензирование (рецензент не знает авторов рукописи, авторы рукописи не знаю рецензентов).

Заимствования и плагиат. Редакционная коллегия журнала при рассмотрении статьи проводит проверку материала с помощью системы «Антиплагиат». В случае обнаружения многочисленных заимствований редакция действует в соответствии с правилами COPE.

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ − 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: http://www.rosp.ru/) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж, офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33;

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация. По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала члену-корреспонденту РААСН *Сидорову Владимиру Николаевичу* (адреса электронной почты: sidorov.vladimir@gmail.com, sidorov@iasv.ru, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или к техническому редактору журнала советнику РААСН *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: tkaytukov@gmail.com; kaytukov@raasn.ru). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство АСВ с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (Publishers International Linking Association (PILA)), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

С октября 2016 года стал возможен прием статей на рассмотрение и рецензирование через онлайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала (электронная редакция): http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE.

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

В феврале 2018 года журнал был зарегистрирован в Directory of Open Access Journals (DOAJ) – это один из самых известных поисковых сервисов в мире, который предоставляет открытый доступ к материалам и индексирует не только заголовки журналов, но и научные статьи.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)
Volume 14, Issue 2 ***2018***

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

СОДЕРЖАНИЕ

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач 14
П.А. Акимов, О.А. Негрозов

О методах расчета напряженно-деформированного состояния и на устойчивость к прогрессирующему обрушению пространственных плитно-оболочечных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности, трещинообразования и приобретаемой анизотропии 30
А.М. Белостоцкий, Н.И. Карпенко, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, С.Н. Карпенко, А.Н. Петров, Т.Б. Кайтуков, В.А. Харитонов

Результаты численного моделирования напряженно-деформированного состояния стыкового соединения деревянных конструкций на углепластиковых нагелях 48
М.А. Водянников

Локальный принцип минимума для задач оптимизации с различными типами управляемых систем при наличии смешанных ограничений на фазу и состояние 57
А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Автоматизация теплофизических исследований образцов наружных стеновых ограждений 65
С.В. Федосов, П.Н. Муреев, В.Г. Котлов, А.Н. Макаров, А.В. Иванов

Совершенствование методов расчета плоскостных железобетонных конструкций с учетом действительных свойств высокопрочных бетонов 78
Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко, А.Н. Петров

Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей 90
М.Н. Кирсанов

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения 96
Л.С. Ляхович, П.А. Акимов, Б.А. Тухфатуллин

Оценка и анализ несущей способности буронабивных свай и свай-баррет глубокого заложения для высотного здания на слабых грунтах по результатам расчетов и полевых испытаний 109
Р.А. Мангушев, Н.С. Никитина

Методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» стадионов Чемпионата мира по футболу 2018 года в России. Описание и верификация 117
А.И. Нагибович

Решение физически нелинейных задач изгиба пластин переменной толщины 133
В.В. Петров, Р.В. Мищенко, Д.А. Пименов

Совершенствование гидравлических расчетов систем водоснабжения с использованием электронных моделей 141
О.Г. Примин, Г.Н. Громов

Железобетонные плиты покрытия автомобильных дорог на упругом полупространстве 149
С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов

Кинетика структурных превращений при формировании пор в процессе высокотемпературной обработки пеностекла 158
С.В. Федосов, М.О. Баканов, С.Н. Никишов

Об итогах выборов членов Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) в 2018 году 169

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 14, Issue 2 ***2018***

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

CONTENTS

About Solution of Multipoint Boundary Problems of Three-Dimensional Structural Analysis with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method.
Part 1: Formulation and Basic Principles of Approximation 14
Pavel A. Akimov, Oleg A. Negrozov

About Development of Methods of Analysis and Assessment of Vulnerability of Spatial Plate – Shell Reinforced Concrete Structures with Allowance for Physical Non-Linearities, Crack Formation and Induced Anisotropy 30
Alexander M. Belostotsky, Nikolay I. Karpenko, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov, Sergey N. Karpenko, Alexey N. Petrov, Taymuraz B. Kaytukov, Vladimir A. Kharitonov

Results of Numerical Modelling of the Stressed-Deformed State of the Joint Connection of Wood Constructions with CFRP Dowel Pins 48
Mikhail A. Vodiannikov

Local Minimum Principle for Optimization Problems with Different Types of Control Systems Subject to Mixed State-Control Constraints 57
Andrey V. Dmitruk, Nikolay P. Osmolovskii

Automation of Thermophysical Researches Samples Exterior Wall Fences 65
Sergej V. Fedosov, Pavel N. Mureev, Vitalij G. Kotlov, Aleksandr N. Makarov, Andrej V. Ivanov

Enhancement of the Reinforced Concrete Plain Structures Design Methods With the Taking Into Consideration the True Properties of High Performance Concretes 78
Nikolay I. Karpenko, Sergey N. Karpenko, Alexey N. Petrov

Formulas for Computing of Deflection and Forces in the Truss with Arbitrary Number of Panels 90
Mikhail N. Kirsanov

Criterion of Minimum Material Consumption of Flange of I-Shaped Bar with a Variation in Its Thickness and Outline of the Width, With Restriction to the Value of the Critical Force or Restriction to the Value of the First Natural Frequency in Two Principal Planes of Inertia of the Section 96
Leonid S. Lyakhovich, Boris A. Tukhfatullin, Pavel A. Akimov

Evaluation and Analysis of Bearing Capacity of Bores Piles and Deep Laid Pile-Barrette for a High-Rise Building on Loose Grounds Based on Calculations and Field Tests 109
Rashid. A. Mangushev, Nadezda S. Nikitina

Technique of Superelement Simulation of Dynamics for System "Basis – Foundations Structures and Stands – Structures of the Roof" for Stadiums for the 2018 FIFA World Cup in Russia. Description and Verification 117
Alexander I. Nagibovich

The Solution of Physically Nonlinear Problems of Bending Valve Plates 133
Vladilen V. Petrov, Roman V. Mishchenko, Dmitry A. Pimenov

Hydraulic Calculations Improvements of Water Supply Systems by Using Electronic Models 141
Oleg G. Primin, Grigory N. Gromov

Reinforced Concrete Coating Plates of Highways on an Elastic Half-Space 149
Slava D. Semeniuk, Roman V. Kumashov

Kinetics of Structural Transformations at Pores Formation During High-Temperature Treatment of Foam Glass 158
Sergey V. Fedosov, Maksim O. Bakanov, Sergey N. Nikishov

About Results of the Election of Members of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS) in 2018 169

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-14-29

О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 1: ПОСТАНОВКА И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ

П.А. Акимов [1, 2, 3, 4]***, О.А. Негрозов*** [1, 5]

[1] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[2] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
[3] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[4] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ
[5] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета трехмерной конструкции на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. В частности, описаны основные обозначения и соглашения, представлены расчетная модель и общая постановка задачи (на основе трехмерной теории упругости), общие принципы аппроксимации области, принятые правила нумерации подобластей, правила нумерации конечных элементов и дискретно-континуальных конечных элементов; описано построение дискретной (конечноэлементной) и дискретно-континуальной аппроксимирующих моделей на подобластях.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, трехмерные задачи, постановки задач, аппроксимация

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD PART 1: FORMULATION AND BASIC PRINCIPLES OF APPROXIMATION

Pavel A. Akimov [1, 2, 3, 4]***, Oleg A. Negrozov*** [1, 5]

[1] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[2] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[3] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[4] The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA
[5] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to formulation and basic principles of approximation of multipoint boundary problem of static analysis of three-dimensional structure with the use of combined application of finite element method and discrete-continual finite element method. Basic notation system, design model, general for-

mulation of the problem (based on three-dimensional theory of elasticity), basic principles of domain approximation, rule of numbering of subdomains, rule of numbering of finite elements, rule of numbering of discrete-continual finite elements are considered. Construction of discrete (finite element) and discrete-continual approximation models for subdomains is under consideration as well.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, three-dimensional problems, formulation of problems, approximation

В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета трехмерной конструкции на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова [1] и развитого в исследованиях П.А. Акимова [2-11], М.Л. Мозгалевой [12-22], Моджтаба Аслами [3-6,16-19,23], О.А. Козырева [24] и О.А. Негрозова [25-28]. Ранее в статьях [29-30] рассматривались аналогичные проблемы для двумерных задач расчета конструкций.

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется решить многоточечную краевую задачу статического расчета (определить напряжения и перемещения) трехмерной конструкции. Расчетная модель – трехмерная (пространственная) задача теории упругости. Математическая постановка этой задачи приведена, например, в [31-45].

Пусть Ω – область, занимаемая рассматриваемой конструкцией,

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, x_3) : \ 0 < x_1 < l_1, \ 0 < x_2 < l_2, \ \ 0 < x_3 < l_3 \}, \tag{1.1}$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_b - 1} \Omega_k \ , \tag{1.2}$$

где соответственно

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2) : \ 0 < x_1 < l_{1,k}, \ 0 < x_2 < l_{2,k}, \ x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \}; \tag{1.3}$$

$x_{3,k}^b, \ k = 1, 2, \ldots, n_b$ – координаты граничных точек (при $n_b > 2$ и имеем многоточечную краевую задачу); n_b – количество граничных точек; $\Omega_k, \ k = 1, 2, \ldots, n_b - 1$ – подобласти рассматриваемой области Ω.

Заметим, что типовым является случай

$$l_{1,k} = const; \ \ l_{2,k} = const \ \text{ при } \ x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b ,$$

однако в общем случае, разумеется, имеем

$$l_1 = l_1(x_3) \neq const; \quad l_2 = l_2(x_3) \neq const ,$$

т.е. допускается случай кусочного постоянства l_1 и l_2.

Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [46], можем окаймить области $\Omega_k, \ k = 1, 2, \ldots, n_b - 1$ соответствующими расширенными $\omega_k, \ k = 1, 2, \ldots, n_b - 1$ и перейти к расширенной области ω,

$$\omega = \bigcup_{k=1}^{n_b - 1} \omega_k \ , \tag{1.4}$$

где

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2, x_3) : \ 0 < x_1 < \widetilde{l}_{1,k}, \ 0 < x_2 < \widetilde{l}_{2,k}, \ \ x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \} \supset \Omega_k , \tag{1.5}$$

причем, в частности, для указанного выше типового случая можно выбрать

$$\widetilde{l}_{q,k} = \widetilde{l}_q = const,\ k = 1, 2, \ldots, n_b - 1,\ q = 1, 2,$$

т.е.

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3):\ 0 < x_1 < \widetilde{l}_1,\ 0 < x_2 < \widetilde{l}_2,\ x^b_{3,k} < x_3 < x^b_{3,k+1}\} \supset \Omega_k. \quad (1.6)$$

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ

Пусть в пределах одной группы областей ω_k из числа указанных в (1.4) физико-геометрические параметры конструкции не зависят от переменной x_2, отвечающей так называемому основному направлению – для таких областей целесообразно использовать дискретизацию в рамках ДКМКЭ (имеем дискретно-континуальную модель). Пусть в пределах другой группы областей ω_k соответствующие физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно – для таких областей следует использовать дискретизацию в рамках МКЭ (имеем дискретную модель). Итак, целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ.

Для удобства изложения введем параметр ρ_k, называемый параметр дискретизации и принимающий следующие значения: $\rho_k = 1$ – используется дискретизация в рамках МКЭ [47-49]; $\rho_k = 2$ – используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

3. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ ПОДОБЛАСТЕЙ

Вообще, могут использоваться различные подходы к нумерации подобластей (или, что эквивалентно, областей), определяемых формулой (1.5).

Первый подход предусматривает раздельную нумерацию областей с различными типами дискретизации:

$$k_1 = k_1(k) = \sum_{s=1}^{k} |\ \rho_s - 2\ |;$$

$$k_2 = k_2(k) = \sum_{s=1}^{k} |\ \rho_s - 1\ |, \quad (3.1)$$

где k – исходный номер подобласти ω_k; $k_1 = k_1(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках МКЭ или $k_2 = k_2(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках ДКМКЭ.

Разумеется, также можно построить обратные зависимости

$$k = k(k_1);\quad k = k(k_2), \quad (3.2)$$

выполнив табуляцию результатов вычислений по формулам (3.1).

Таким образом, можем переписать (1.4) в следующем виде:

$$\omega = \bigcup_{k_1=1}^{N_{fe}} \omega^{fe}_{k_1} + \bigcup_{k_2=1}^{N_{dc}} \omega^{dc}_{k_2}, \quad (3.3)$$

причем справедливы соотношения

$$N_{fe} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\ \rho_s - 2\ |;\quad N_{dc} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\ \rho_s - 1\ |; \quad (3.4)$$

$$N_{fe} + N_{dc} = n_b - 1, \quad (3.5)$$

где $\omega^{fe}_{k_1}$, $k_1 = 1, 2, \ldots, N_{fe}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках МКЭ; $\omega^{dc}_{k_2}$, $k_2 = 1, 2, \ldots, N_{dc}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

Второй подход, напротив, основан на единой нумерации областей с различными типами дискретизации, т.е. на использовании представления вида (1.4), в котором

$$\omega_k = \begin{cases} \omega^{fe}_k, & \text{если } \rho_k = 1 \\ \omega^{dc}_k, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (3.6)$$

В таком случае, очевидно, соответствующие пересчеты по формулам (3.1)-(3.2) не требуются. В настоящей статье далее будет использоваться именно второй подход.

4. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ КОНЕЧНЫХ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe}.
Введем обозначение

$$l_{3,k}^{fe} = x_{3,k+1}^{b} - x_{3,k}^{b}, \quad \text{если} \quad \rho_k = 1. \qquad (4.1)$$

Пусть

$$x_{1,i,j,r}^{fe,k},\ x_{2,i,j,r}^{fe,k}\ \ x_{3,i,j,r}^{fe,k},\ i = 1,2,...,N_{1,k}^{fe},\ j = 1,2,...,N_{2,k}^{fe},\ r = 1,2,...,N_{3,k}^{fe}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1, x_2 и x_3) узлов конечных элементов в области ω_k^{fe};

$$(N_{1,k}^{fe} - 1);\quad (N_{2,k}^{fe} - 1);\quad (N_{3,k}^{fe} - 1)$$

– количество конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{fe} по направлениям, соответствующим переменным x_1, x_2 и x_3 (рассматривается аппроксимирующая сетка топологически эквивалентная прямоугольной). Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{fe} будем применять четырехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k,i,j,r), где k – номер подобласти дискретизации в рамках МКЭ; i, j и r – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1, x_2 и x_3; $\omega_{k,i,j,r}^{fe}$ – обозначение соответствующего конечного элемента.

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc}. Введем обозначение

$$l_{3,k}^{dc} = x_{3,k+1}^{b} - x_{3,k}^{b}, \quad \text{если} \quad \rho_k = 2. \qquad (4.2)$$

Пусть

$$x_{1,i,j}^{dc,k},\ x_{2,i,j}^{dc,k},\ i = 1,2,...,N_{1,k}^{dc},\ j = 1,2,...,N_{2,k}^{dc}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_k^{dc};

$$(N_{1,k}^{dc} - 1);\quad (N_{2,k}^{dc} - 1)$$

– количество дискретно-континуальных конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{dc} по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 (по сечению поперечному по отношению к основному направлению рассматривается аппроксимирующая сетка топологически эквивалентная прямоугольной). Для узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{dc} будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k,i,j), где k – номер подобласти; i и j – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 и x_2; $\omega_{k,i,j}^{dc}$ – обозначение соответствующего дискретно-континуального конечного элемента.
Введем обозначения:

$$N_{1,k} = \begin{cases} N_{1,k}^{fe}, & \text{если} \quad \rho_k = 1 \\ N_{1,k}^{dc}, & \text{если} \quad \rho_k = 2; \end{cases} \qquad (4.3)$$

$$N_{2,k} = \begin{cases} N_{2,k}^{fe}, & \text{если} \quad \rho_k = 1 \\ N_{2,k}^{dc}, & \text{если} \quad \rho_k = 2; \end{cases} \qquad (4.4)$$

$$N_{3,k} = N_{3,k}^{fe}, \quad \text{если} \quad \rho_k = 1; \qquad (4.5)$$

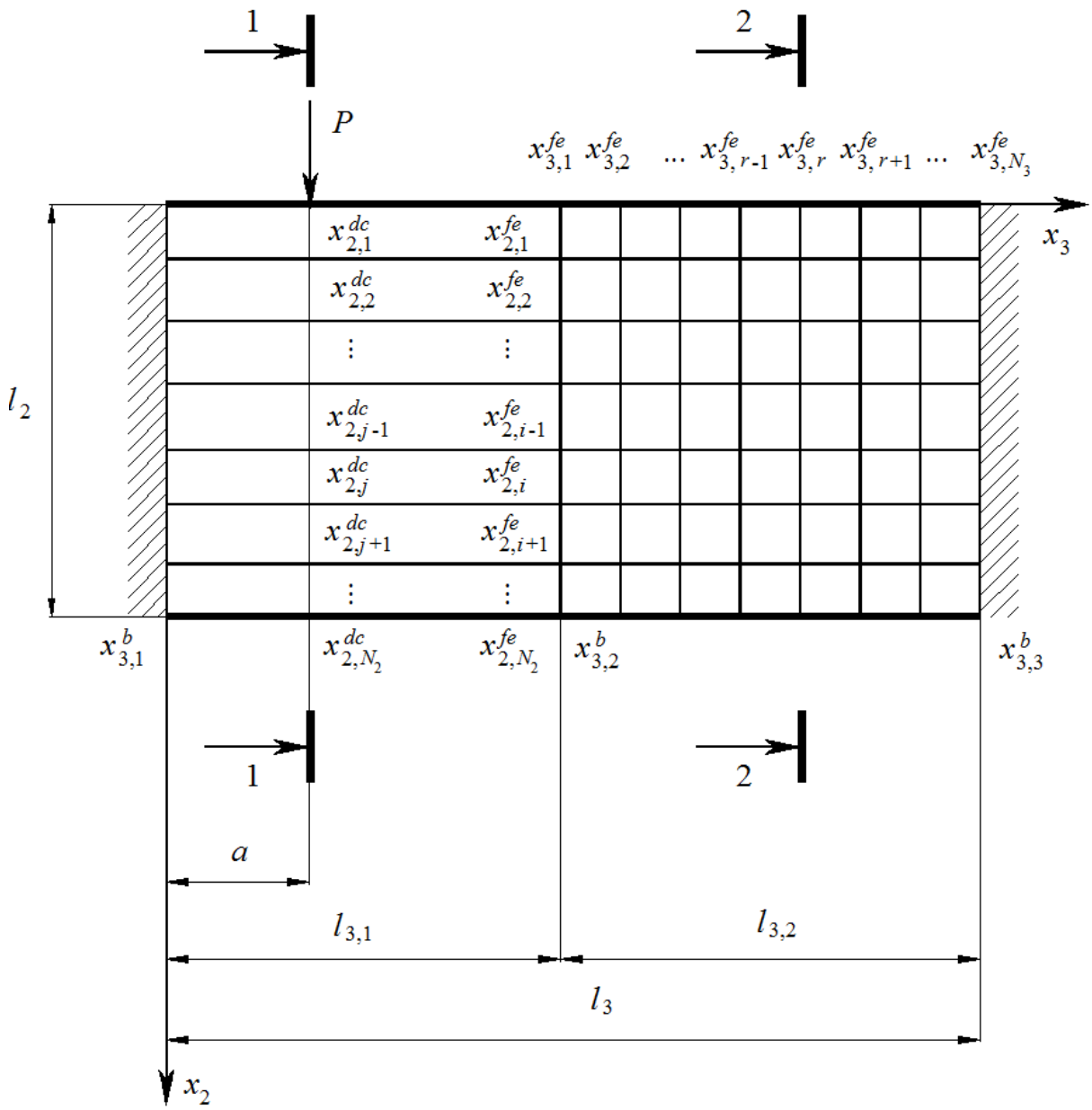


Рисунок 4.1. Пример к постановке трехточечной краевой задачи.

$$l_{3,k} = \begin{cases} l^{fe}_{3,k}, & \text{если} \quad \rho_k = 1 \\ l^{dc}_{3,k}, & \text{если} \quad \rho_k = 2. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Заметим, что в простейших типовых случаях схема дискретизации конструкции по направлениям, отвечающим переменным x_1 и x_2, неизменна по всей области, т.е. справедливы равенства

$$N_{q,k} = N_q = const, \quad q = 1, 2; \qquad (4.7)$$

$$x^{dc,k}_{q,i,j} = x^{dc}_{q,i,j}, \quad i = 1, 2, ..., N^{dc}_1, \quad j = 1, 2, ..., N^{dc}_2, \quad q = 1, 2; \qquad (4.8)$$

$$x^{fe,k}_{q,i,j,r} = x^{fe}_{q,i,j}, \; i = 1, 2, ..., N^{fe}_{1,k}, \; j = 1, 2, ..., N^{fe}_{2,k}, \; r = 1, 2, ..., N^{fe}_{3,k}, \; q = 1, 2; \qquad (4.9)$$

$$x^{dc}_{q,i,j} = x^{fe}_{q,i,j}, \quad i = 1, 2, ..., N_1, \quad j = 1, 2, ..., N_2, \quad q = 1, 2; \qquad (4.10)$$

$$x^{fe,k}_{q,i,j,r} = x^{fe}_{q,i,j}, \; i = 1, 2, ..., N^{fe}_{1,k}, \; j = 1, 2, ..., N^{fe}_{2,k}, \; r = 1, 2, ..., N^{fe}_{3,k}, \; q = 1, 2; \qquad (4.11)$$

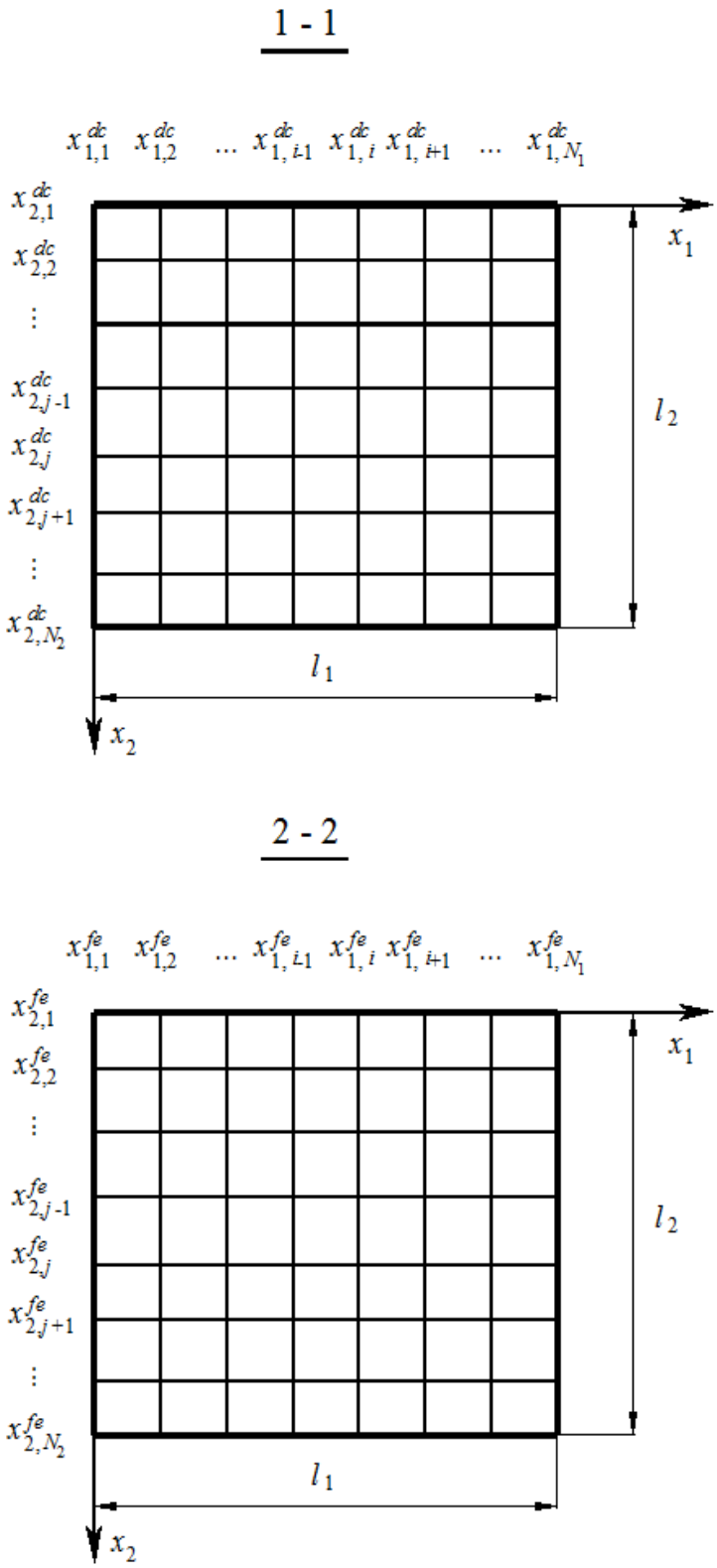


Рисунок 4.2. К постановке задачи: поперечные по отношению к основному направлению сечения трехмерного бруса с соответствующими сеточными аппроксимациями сечения в осях x_1 и x_2.

Примеры соответствующих обозначений показаны на рис. 4.1 и 4.2. Заметим, что здесь для аппроксимации поперечного по отношению к x_3 сечения (т.е. переменным x_1 и x_2) используется прямоугольная сетка, т.е.

$$x^{dc}_{1,i,j} = x^{dc}_{1,i},\ \ i = 1, 2, ..., N^{dc}_1,\ \ j = 1, 2, ..., N^{dc}_2; \quad (4.11)$$

$$x^{dc}_{2,i,j} = x^{dc}_{2,j},\ \ i = 1, 2, ..., N^{dc}_1,\ \ j = 1, 2, ..., N^{dc}_2; \quad (4.12)$$

$$x^{dc}_{1,i} = x^{fe}_{1,i} = x_{1,i},\ \ i = 1, 2, ..., N_1; \quad (4.13)$$

$$x^{dc}_{2,j} = x^{fe}_{2,j} = x_{2,j},\ \ j = 1, 2, ..., N_2; \quad (4.14)$$

$$x^{fe,k}_{3,i,j,r} = x^{fe,k}_{3,r},\ \ i = 1, 2, ..., N_1,\ \ j = 1, 2, ..., N_2,\ \ r = 1, 2, ..., N^{fe}_{3,k}. \quad (4.15)$$

5. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω^{fe}_k. Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по всем координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω^{fe}_k разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega^{fe}_k = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_{2,k}-1} \bigcup_{r=1}^{N_{3,k}-1} \omega^{fe}_{k,i,j,r}, \quad (5.1)$$

причем, в частности, при условии справедливости формул (4.11)-(4.15) имеем:

$$\omega^{fe}_{k,i,j,r} = \{(x_1, x_2, x_3):\ x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1},\ x_{2,k,j} < x_2 < x_{2,k,j+1},\ x^{fe,k}_{3,r} < x_2 < x^{fe,k}_{3,r+1}\}. \quad (5.1)$$

Характеристическую функцию элемента $\omega^{fe}_{k,i,j}$ определяется по формуле

$$\theta_{k,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \omega^{fe}_{k,i,j,r} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega^{fe}_{k,i,j,r} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (5.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\overline{\lambda}_{k,i,j,r} = \theta_{k,i,j,r}\lambda; \quad \overline{\mu}_{k,i,j,r} = \theta_{k,i,j,r}\mu. \quad (5.4)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений $u^{(k)}_1, u^{(k)}_2, u^{(k)}_3$ (верхний индекс «(k)», следуя по аналогии с [29,30], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega^{fe}_k$), т.е. для (k, i, j, r)-го узла это $u^{(k,i,j,r)}_1, u^{(k,i,j,r)}_2, u^{(k,i,j,r)}_3$.

Поля $u^{(k)}_1, u^{(k)}_2, u^{(k)}_3$ по всем координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) в пределах каждого конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные восьмиузловые конечные элементы трехмерной задачи теории упругости (в перемещениях) [47-49]).

Можно показать [47-49], что в рамках рассмотрения подобласти ω^{fe}_k, разрешающая система $3N_1N_2N_{3,k}$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_k\overline{U}_k = \overline{R}_k, \quad (5.5)$$

где

$$\{\overline{U}_k\}_{i_g} = u^{(k,i,j,r)}_q; \quad (5.6)$$

i_g – глобальный индекс глобального $3N_1N_2N_{3,k}$-мерного вектора неизвестных $\overline{U}_k$; k, i, j, r, q – соответствующие локальные индексы, определяемые по формулам:

$$k = 2; \quad (5.7)$$

$$r = \left[\frac{i_g}{3N_1N_2}\right] + 1; \quad (5.8)$$

$$j = \left[\frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2}{3N_1} \right] + 1; \qquad (5.9)$$

$$i = \left[\frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1}{3} \right] + 1; \qquad (5.10)$$

$$q = i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1 - 3i; \qquad (5.11)$$

K_k – глобальная матрица жесткости $3N_1N_2N_{3,k}$-го порядка; $\overline{R}_k$ – $3N_1N_2N_{3,k}$- мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок); запись типа $[a]$ обозначает целую часть числа a.

6. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc}. Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси $0x_3$) решается континуальная задача, а остальным направлениям (вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$) производится конечноэлементная аппроксимация. Итак, область ω_k^{dc} разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\omega_k^{dc} = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \omega_{k,i,j}^{dc}; \qquad (6.1)$$

причем, в частности, при условии справедливости формул (4.11)-(4.15) имеем:

$$\omega_{k,i,j}^{dc} = \{ (x_1, x_2, x_3) : \; x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \; x_{2,j} < x_2 < x_{2,j+1}, \; x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \}, \qquad (6.2)$$

определяя характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента (ДККЭ) $\omega_{k,i,j}^{dc}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j}^{dc} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i,j}^{dc} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\overline{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j}\lambda; \quad \overline{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j}\mu. \qquad (6.4)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$ по переменной x_3, т.е. для (k,i,j)-го узла это $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}, u_3^{(k,i,j)}$ и $v_1^{(k,i,j)}, v_2^{(k,i,j)}, v_3^{(k,i,j)}$.
Поля $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}, u_3^{(k,i,j)}$ и $v_1^{(k,i,j)}, v_2^{(k,i,j)}, v_3^{(k,i,j)}$ по неосновным направлениям (вдоль x_1 и x_2) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются полилинейно.
Можно показать, что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{dc}, разрешающая система $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\overline{U}_k'(x_3) = A_k\overline{U}_k(x_3) + \overline{\overline{R}}_k(x_3), \qquad (6.5)$$

где $$\overline{U}_k = \overline{U}_k(x_3) = [\,(\overline{u}_k)^T \quad (\overline{v}_k)^T\,]^T \qquad (6.6)$$

– $6N_1N_2$-мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «(k)», следуя по аналогии [29,30], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$);

$$\overline{u}_k = \overline{u}_k(x_3) = \\ = [\,(\overline{u}_n^{(1,1,1)})^T \quad (\overline{u}_n^{(1,2,1)})^T \quad \dots \quad (\overline{u}_n^{(1,N_1,1)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (\overline{u}_n^{(1,1,2)})^T \quad (\overline{u}_n^{(1,2,2)})^T \quad \dots \quad (\overline{u}_n^{(1,N_1,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (\overline{u}_n^{(1,1,N_2)})^T \quad (\overline{u}_n^{(1,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\overline{u}_n^{(1,N_1,N_2)})^T\,]^T; \qquad (6.7)$$

$$\overline{v}_k = \overline{v}_k(x_3) = \\ = [\,(\overline{v}_n^{(1,1,1)})^T \;\; (\overline{v}_n^{(1,2,1)})^T \;\; \ldots \;\; (\overline{v}_n^{(1,N_1,1)})^T \;\; \ldots \\ \ldots \;\; (\overline{v}_n^{(1,1,2)})^T \;\; (\overline{v}_n^{(1,2,2)})^T \;\; \ldots \;\; (\overline{v}_n^{(1,N_1,2)})^T \;\; \ldots \\ \ldots \;\; (\overline{v}_n^{(1,1,N_2)})^T \;\; (\overline{v}_n^{(1,2,N_2)})^T \;\; \ldots \;\; (\overline{v}_n^{(1,N_1,N_2)})^T \,]^T; \tag{6.8}$$

$$\overline{u}_n^{(k,i,j)} = \overline{u}_n^{(k,i,j)}(x_3) = \\ = [\,u_1^{(k,i,j)} \;\; u_2^{(k,i,j)} \;\; u_3^{(k,i,j)}\,]^T; \tag{6.9}$$

$$\overline{v}_n^{(k,i,j)} = \overline{v}_n^{(k,i,j)}(x_3) = \\ = [\,v_1^{(k,i,j)} \;\; v_2^{(k,i,j)} \;\; v_3^{(k,i,j)}\,]^T; \tag{6.10}$$

A_k – матрица коэффициентов $6N_1N_2$-го порядка; $\overline{\overline{R}}_k(x_2)$ – $6N_1N_2$-мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (6.5) может быть представлено в виде [2]:

$$\overline{U}_k(x_3) = E_k(x_3)\overline{C}_k + \overline{S}_k(x_3), \tag{6.11}$$

где $E_k(x_3) = \varepsilon_k(x_3 - x_{3,k}^b) - \varepsilon_k(x_3 - x_{3,k+1}^b)$; (6.12)

$$\overline{S}_k(x_3) = \varepsilon_k(x_3) * \overline{\overline{R}}_k(x_3); \tag{6.10}$$

$\varepsilon_k(x_3)$ – фундаментальная матрица-функция системы (6.5), определяемая согласно [2]; символ «*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций [2]; $\overline{C}_k$ – $6N_1N_2$-мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // Proceedings of the International Symposium LSCE 2002 organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.
2. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
3. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
4. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
5. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 1040, pp. 664-669.
6. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 2-7.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 89-94.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 95-103.

9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp.14-19.
10. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
11. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 926-932.
12. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings, 2014, 1623, 3, pp. 3-6;
13. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.
14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 405-408, pp. 3165-3168.
15. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 351-352, pp. 13-16.
16. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Aslami M., Negrozov O.A.** Local High-Accuracy Plate Analysis Using Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method. // Key Engineering Materials, 2016, Vol. 685, pp. 962-966.
17. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 670-671, pp. 720-723.
18. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 670-671, pp. 724-727.
19. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method of Local Structural Analysis for Two-Dimensional Problems. // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 8-13.
20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // ACSR-Advances in Computer Science Research, 2015, Volume 18, pp. 713-716.
21. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 1: Structures with Constant Physical and Geometrical of Structural Analysis Parameters Along Basic Direction. // Applied Mechanics & Materials, 2015, Vol. 709, pp. 105-108.
22. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 2: Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along

Basic Direction of Structural Analysis. // Applied Mechanics & Materials, 2015, Vol. 709, pp. 109-112.

23. **Mojtaba Aslami, Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // Thin-Walled Structures, 2015-2016, Volume 98, Part B, pp. 392-402.
24. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Kozirev O.A.** Opredelenie Sobstvennyh Znachenij i Sob-stvennyh Funkcij Kraevyh Zadach Stroi-tel'noj Mehaniki na Osnove Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnyh Elemen-tov [Computing of Eigenvalues and Eigenfunctions of Boundary Problems of Structural Mechanics on the Basis of a Discrete-Continual Finite Element Method]. // Vestnik MGSU, 2009, Issue 3, pp. 255-259.
25. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Application of Unstructured Approximating Meshes in Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Materials Physics and Mechanics, 2016, 26, pp. 5-8.
26. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 8-15.
27. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 2: Three-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 16-23.
28. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 3: Plate Analysis. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 24-31.
29. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Negrozov O.A.** O Reshenii Mnogotochechnyh Kraevyh Zadach Rascheta Konstrukcij v Dvumernoj Postanovke na Osnove Sovmestnogo Primeneniya Metoda Konechnyh Elementov i Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnyh Elementov. CHast' 1: Postanovka i Obshchie Principy Approksimacii Zadach [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis With the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation and Basic Principles of Approximation]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 1, 2017, pp. 23-33.
30. **Akimov P.A., Belostotsky A.M., Kaytukov T.B., Negrozov O.A.** Reshenii Mnogotochechnyh Kraevyh Zadach Rascheta Konstrukcij v Dvumernoj Postanovke na Osnove Sovmestnogo Primeneniya Metoda Konechnyh Elementov i Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnyh Elementov. CHast' 2: Osobennosti Konechnoehlementnoj Approksimacii i Zadanie Granichnyh Uslovij [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis With the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Special Aspects of Finite Element Approximation and Boundary Conditions]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 14-36.
31. **Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D.** Method of Fundamental Solutions for Mixed and Crack Type Problems in the Classical Theory of Elasticity. // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, 2017, Volume 171, Issue 3, pp. 264-292.

32. **Chu P., Li X.-F., Wang Z.-G., Lee K.Y.** Double Cantilever Beam Model for Functionally Graded Materials Based on Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Engineering Fracture Mechanics, 2015, Volume 135, pp. 232-244.
33. **Daneshjoua K., .Talebitooti R., Tarkashvand A.** Analysis of Sound Transmission Loss Through Thick-Walled Cylindrical Shell Using Three-Dimensional Elasticity Theory. // International Journal of Mechanical Sciences, 2016, Volume 106, pp. 286-296.
34. **Karttunen A.T., von Hertzen R., Reddy J.N., Romanoff J.** Exact Elasticity-Based Finite Element for Circular Plates. // Computers & Structures, 2017, Volume 182, pp. 219-226.
35. **Lee C.-Y., Wang H., Qin Q.-H.** Method of Fundamental Solutions for 3D Elasticity With Body Forces by Coupling Compactly Supported Radial Basis functions. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, Volume 60, pp. 123-136.
36. **Liu L.-W., Hong H.-K.** Clifford Algebra Valued Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasticity. // Applied Mathematical Modelling, 2018, Volume 54, pp. 246-267
37. **Pourasghar A., Chen Z.** Thermoelastic Response of CNT Reinforced Cylindrical Panel Resting on Elastic Foundation Using Theory of Elasticity. // Composites Part B: Engineering, 2016, Volume 99, pp. 436-444.
38. **Qu Y., Meng G.** Dynamic Analysis of Composite Laminated and Sandwich Hollow Bodies of Revolution Based on Three-Dimensional Elasticity Theory. // Composite Structures, 2014, Volume 112, pp. 378-396.
39. **Sakihara K., Matsubara H., Edo T.-A., Yagawa G.** Multi-Dimensional Moving Least Squares Method Applied to 3D Elasticity Problems. // Engineering Structures, 2013, Volume 47, pp. 45-53.
40. **Salehipour H., Nahvi H., Shahidi A.R.** Exact Closed-Form Free Vibration Analysis for Functionally Graded Micro / Nano Plates Based on Modified Couple Stress and Three-Dimensional Elasticity Theories. // Composite Structures, 2015, Volume 124, pp. 283-291.
41. **Shaban M., Alibeigloo A.** Three-Dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with Corrugated Cores by Using Energy Method. // Thin-Walled Structures, 2017, Volume 119, pp. 404-411.
42. **Shariyat M., Asemi K.** Uniaxial and Biaxial Post-Buckling Behaviors of Longitudinally Graded Rectangular Plates on Elastic Foundations According to the 3D Theory of Elasticity. // Composite Structures, 2016, Volume 142, pp. 57-70.
43. **Wang B., Xia K., Wei G.-W.** Second Order Method for Solving 3D Elasticity Equations With Complex Interfaces. // Journal of Computational Physics, 2015, Volume 294, pp. 405-438.
44. **Wang Q., Zheng J.J., Miao Y., Lv J.H.** The multi-domain hybrid boundary node method for 3D elasticity. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, Volume 35, Issue 6, pp. 803-810.
45. **Wang Y., Wang Q., Wang G., Huang Y., Wang S.** An Adaptive Dual-Information FMBEM for 3D Elasticity and its GPU Implementation. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, Volume 37, Issue 2, pp. 236-249.
46. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
47. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** Finite Elements and Approximation. Dover Publications, 2006, 352 pages.
48. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method for Solid and Struc-

tural Mechanics. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.
49. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.

REFERENCES

1. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // Proceedings of the International Symposium LSCE 2002 organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.
2. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
3. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
4. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
5. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 1040, pp. 664-669.
6. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 2-7.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 89-94.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 95-103.
9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp.14-19.
10. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
11. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 926-932.
12. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite el-

ement method for global and local analysis of multilevel systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings, 2014, 1623, 3, pp. 3-6;

13. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.
14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 405-408, pp. 3165-3168.
15. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 351-352, pp. 13-16.
16. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Aslami M., Negrozov O.A.** Local High-Accuracy Plate Analysis Using Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method. // Key Engineering Materials, 2016, Vol. 685, pp. 962-966.
17. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 670-671, pp. 720-723.
18. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 670-671, pp. 724-727.
19. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method of Local Structural Analysis for Two-Dimensional Problems. // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 8-13.
20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // ACSR-Advances in Computer Science Research, 2015, Volume 18, pp. 713-716.
21. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 1: Structures with Constant Physical and Geometrical of Structural Analysis Parameters Along Basic Direction. // Applied Mechanics & Materials, 2015, Vol. 709, pp. 105-108.
22. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 2: Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction of Structural Analysis. // Applied Mechanics & Materials, 2015, Vol. 709, pp. 109-112.
23. **Mojtaba Aslami, Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // Thin-Walled Structures, 2015-2016, Volume 98, Part B, pp. 392-402.
24. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе дискретно-континуального метода конечных элементов. // Вестник МГСУ, №3, 2009, с. 255-259.
25. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Application of Unstructured Approximating Meshes in Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Materials Physics and Mechanics, 2016, 26, pp. 5-8.
26. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Com-

bined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 8-15.

27. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 2: Three-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 16-23.
28. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 3: Plate Analysis. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 24-31.
29. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 1, 2017, pp. 23-33.
30. **Акимов П.А., Белостоцкий А.М., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 14-36.
31. **Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D.** Method of Fundamental Solutions for Mixed and Crack Type Problems in the Classical Theory of Elasticity. // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, 2017, Volume 171, Issue 3, pp. 264-292.
32. **Chu P., Li X.-F., Wang Z.-G., Lee K.Y.** Double Cantilever Beam Model for Functionally Graded Materials Based on Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Engineering Fracture Mechanics, 2015, Volume 135, pp. 232-244.
33. **Daneshjoua K., .Talebitooti R., Tarkashvand A.** Analysis of Sound Transmission Loss Through Thick-Walled Cylindrical Shell Using Three-Dimensional Elasticity Theory. // International Journal of Mechanical Sciences, 2016, Volume 106, pp. 286-296.
34. **Karttunen A.T., von Hertzen R., Reddy J.N., Romanoff J.** Exact Elasticity-Based Finite Element for Circular Plates. // Computers & Structures, 2017, Volume 182, pp. 219-226.
35. **Lee C.-Y., Wang H., Qin Q.-H.** Method of Fundamental Solutions for 3D Elasticity With Body Forces by Coupling Compactly Supported Radial Basis functions. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, Volume 60, pp. 123-136.
36. **Liu L.-W., Hong H.-K.** Clifford Algebra Valued Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasticity. // Applied Mathematical Modelling, 2018, Volume 54, pp. 246-267
37. **Pourasghar A., Chen Z.** Thermoelastic Response of CNT Reinforced Cylindrical Panel Resting on Elastic Foundation Using Theory of Elasticity. // Composites Part B: Engineering, 2016, Volume 99, pp. 436-444.
38. **Qu Y., Meng G.** Dynamic Analysis of Composite Laminated and Sandwich Hollow Bodies of Revolution Based on Three-Dimensional Elasticity Theory. // Composite Structures, 2014, Volume 112, pp. 378-396.
39. **Sakihara K., Matsubara H., Edo T.-A., Yagawa G.** Multi-Dimensional Moving

Least Squares Method Applied to 3D Elasticity Problems. // Engineering Structures, 2013, Volume 47, pp. 45-53.

40. **Salehipour H., Nahvi H., Shahidi A.R.** Exact Closed-Form Free Vibration Analysis for Functionally Graded Micro / Nano Plates Based on Modified Couple Stress and Three-Dimensional Elasticity Theories. // Composite Structures, 2015, Volume 124, pp. 283-291.
41. **Shaban M., Alibeigloo A.** Three-Dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with Corrugated Cores by Using Energy Method. // Thin-Walled Structures, 2017, Volume 119, pp. 404-411.
42. **Shariyat M., Asemi K.** Uniaxial and Biaxial Post-Buckling Behaviors of Longitudinally Graded Rectangular Plates on Elastic Foundations According to the 3D Theory of Elasticity. // Composite Structures, 2016, Volume 142, pp. 57-70.
43. **Wang B., Xia K., Wei G.-W.** Second Order Method for Solving 3D Elasticity Equations With Complex Interfaces. // Journal of Computational Physics, 2015, Volume 294, pp. 405-438.
44. **Wang Q., Zheng J.J., Miao Y., Lv J.H.** The multi-domain hybrid boundary node method for 3D elasticity. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, Volume 35, Issue 6, pp. 803-810.
45. **Wang Y., Wang Q., Wang G., Huang Y., Wang S.** An Adaptive Dual-Information FMBEM for 3D Elasticity and its GPU Implementation. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, Volume 37, Issue 2, pp. 236-249.
46. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
47. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** Finite Elements and Approximation. Dover Publications, 2006, 352 pages.
48. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.
49. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63;
факс +7 (495) 650-27-31; Email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; советник информационно-издательского отдела, Российская академия архитектуры и строительных наук, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94;
Email: NegrozovOA@mgsu.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University of Russia; Professor of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia;
phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31;
E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Advisor to Editorial and Publishing; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: NegrozovOA@mgsu.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-30-47

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ПРОГРЕССИРУЮЩЕМУ ОБРУШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЛИТНО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ, ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ И ПРИОБРЕТАЕМОЙ АНИЗОТРОПИИ

А.М. Белостоцкий [1, 2, 3 ,4, 5], ***Н.И. Карпенко*** [6, 7], ***П.А. Акимов*** [1, 2, 3, 6], ***В.Н. Сидоров*** [3, 4, 5, 8, 9], ***С.Н. Карпенко*** [7], ***А.Н. Петров*** [7, 10], ***Т.Б. Кайтуков*** [6, 11], ***В.А. Харитонов*** [12]

[1] Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ
[2] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[3] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ
[4] Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ
[5] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ
[6] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[7] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[8] Московский архитектурный институт (государственная академия), г. Москва, РОССИЯ
[9] Свентокшиский технический университет в Кельце, г. Кельце, ПОЛЬША
[10] Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск, РОССИЯ
[11] Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации, г. Москва, РОССИЯ
[12] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Современный уровень моделирования состояния железобетонных конструкций связан с широким использованием численных методов. Настоящая статья посвящена актуальным вопросам, связанным с разработкой и численной реализацией методов расчета напряженно-деформированного состояния и на устойчивость к прогрессирующему обрушению пространственных плитно-оболочечных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности, трещинообразования и приобретаемой анизотропии. Обоснована актуальность темы исследования, проанализировано современное состояние исследований по данной теме в России и за рубежом (в том числе в части вопросов, связанных с типами диаграмм, используемых для моделирования поведения строительных объектов, построением общих деформационных моделей железобетона, разработкой, развитием и применением критериев прочности железобетонных конструкций), определены цели, задачи и границы исследования, сформулированы положения, составляющие научную новизну, теоретическую значимость и практическую значимость, представлен научный задел и основные публикации по рассматриваемой теме. Следует подчеркнуть, что в целом, исключительно важными остаются исследования, направленные на дальнейшее совершенствование моделей поведения железобетонных конструкций и их интеграция в современные программные комплексы промышленного типа. Представляется, что развитые, реализованные на численном и программно-алгоритмическом уровнях методы расчета железобетонных конструкций, позволят заменить многоитерационые подходы к решению физически нелинейных задач и перейти от практически возможного высокоточного расчета отдельных конструкций к расчету сложных пространственных конструктивных систем с учетом различных факторов физической нелинейности и анизотропии. тем самым существенно повысить надежность проектных решений. Используемые при этом критерии прочности, в свою очередь, также позволят устранить ряд погрешностей существующих методов определения прочности.

О методах расчета напряженно-деформированного состояния и на устойчивость к прогрессирующему обрушению пространственных плитно-оболочечных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности, трещинообразования и приобретаемой анизотропии

Ключевые слова: численные методы, железобетонные конструкции, плитно-оболочечные конструкции, напряженно-деформированное состояние, трещинообразование, прогрессирующее обрушение, приобретаемая анизотропия

ABOUT DEVELOPMENT OF METHODS OF ANALYSIS AND ASSESSMENT OF VULNERABILITY OF SPATIAL PLATE-SHELL REINFORCED CONCRETE STRUCTURES WITH ALLOWANCE FOR PHYSICAL NON-LINEARITIES, CRACK FORMATION AND INDUCED ANISOTROPY

Alexander M. Belostotsky [1,2,3,4,5], ***Nikolay I. Karpenko*** [6,7], ***Pavel A. Akimov*** [1,2,3,6], ***Vladimir N. Sidorov*** [3,4,5,8,9], ***Sergey N. Karpenko*** [7], ***Alexey N. Petrov*** [7,10], ***Taymuraz B. Kaytukov*** [6,11], ***Vladimir A. Kharitonov*** [12]

[1] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[2] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[3] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA
[4] Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA
[5] Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA
[6] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[7] Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[8] Moscow Institute of Architecture (State Academy), Moscow, RUSSIA
[9] Kielce University of Technology, Kielce, POLAND
[10] Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, RUSSIA
[11] Central Institute for Research and Design of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation, Moscow, RUSSIA
[12] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The modern stage of modelling of behavior of reinforced concrete structures is associated with the widespread use of numerical methods. The distinctive paper is devoted to development and numerical implementation of methods of structural analysis including progressive collapse analysis of spatial plate-shell reinforced concrete structures with allowance for physical nonlinearity, crack formation and induced anisotropy. The relevance of the research topic is substantiated, the current status of research on this topic in Russia and abroad (including various aspects dealing with types of diagrams for modelling of reinforced concrete structures, construction of general deformation models of reinforced concrete, strength criteria for reinforced concrete structures and methods of structural analysis) is analyzed, the goals, objectives and boundaries of the study are determined, the provisions constituting scientific novelty, theoretical significance and practical significance are formulated, publications on the topic are under consideration. It should be noted that generally further improvement and modifications of reinforced concrete models and their integration in contemporary software systems for structural analysis remain very important. It is assumed that developing methods of analysis of reinforced concrete structures will replace multi-iterative approaches to the solution of physically nonlinear problems and move from the practically possible high-precision analysis of individual structures to the analysis of complex structural systems with allowance for various factors of physical nonlinearity and anisotropy. As a result, reliability of design solutions will increase significantly. The strength criteria used in this way, in turn, will also eliminate a number of errors in existing methods for strength analysis.

Keywords: numerical methods, reinforced concrete structures, plate-shell structures, stress-strain state, crack formation, progressive collapse, induced anisotropy

1. АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Как известно, железобетонные конструкции составляют значительную долю конструкций, используемых в объектах промышленного и гражданского строительства. Все чаще проявляются тенденции усложнения конструктивных решений зданий и сооружений, особенно из монолитного железобетона. В числе подобного рода решений, например, пространственные каркасы зданий с нерегулярной сеткой несущих колонн и стен, монолитно связанных с плитами перекрытий, переходными плитами, конструктивно неоднородными фундаментными плитами, каркасы высотных зданий с сильно нагруженными массивными колоннами, стенами, ядрами жесткости, фундаментными плитами и их соединениями. С одной стороны, методы расчета и проектирования таких конструкций практически не нашли отражения в действующем СП 63.13330.2012 «СНиП 52-01-2003. «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения», в котором в основном приведены методы расчета простейших железобетонных конструкций – балок, колонн, балочных плит. С другой стороны, именно такие конструкции, как и конструкции типовых зданий, работают в условиях сложных неоднородных напряженных состояний, что существенно влияет на характер физической нелинейности железобетона, без надлежащего учета которой снижается точность и надежность расчетных обоснований проектных решений. В связи с этим актуальной проблемой расчетного обоснования и проектирования является построение корректных и высокоточных методов расчета конструкций зданий и сооружений при сложных напряженных состояниях с учетом различных факторов физической нелинейности, включая трещинообразование и приобретаемую при этом анизотропию.

Основной недостаток большинства существующих моделей и методов решения физически нелинейных задач железобетона заключается в том, что они сводят решение к многоитерационным процедурам, что для сложных пространственных систем, даже при наличии современной вычислительной техники, становится трудно решаемой проблемой ввиду существенного объема вычислительной работы. Исследования авторского коллектива показали, что указанных трудностей можно в значительной степени избежать, построив систему физических соотношений не в традиционной (для железобетона) форме – в виде связей между напряжениями и деформациями, а в виде связей между приращениями напряжений и деформаций (в инкрементальной форме). Развиваемые в рамках проекта новые системы физических соотношений позволяют значительно снизить количество итераций, или избежать их вовсе, заменив шагово-итерационные процедуры шаговыми. При этом эффективно решается задача перестройки нелинейных физических состояний, записанных в виде связей между напряжениями и деформациями, в связи между их приращениями на шагах нагрузки за счет пошаговой линеаризации.

Принимая во внимание тот факт, что в рамках представляемого в настоящей статье исследования соответствующие физические соотношения строятся в инкрементальной форме, еще одной актуальной задачей является стыковка таких моделей железобетона с более совершенными критериями прочности. К последним относят критерии прочности элементов пластин и пологих оболочек при совместном действии всех шести компонентов усилий – изгибающих и крутящих моментов, нормальных и касательных сил. Кроме оценки прочности важна и обратная задача – рационального армирования, удовлетворяющего критериям прочности.

Подавляющее большинство аварий зданий и сооружений, независимо от окончательных размеров их последствий, начинается с локальных повреждений несущих конструкций. При этом в одних случаях все исчерпывается первоначальным локальным разрушением, а в других – несущие конструкции,

сохранившиеся в первый момент чрезвычайного происшествия, не выдерживают дополнительной нагрузки, ранее воспринимавшейся поврежденными элементами, и тоже разрушаются. Аварии последнего типа получили в литературе наименование «прогрессирующее обрушение». Реалии современного российского законодательства в области регулирования проектирования ответственных конструкций требуют от фундаментальной и прикладной науки новых методов и алгоритмов, позволяющих анализировать точный динамический отклик здания (сооружения) на внезапное выключение элементов с учетом нелинейностей, при этом, по возможности, не требующих исключительных вычислительных мощностей.

2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

2.1. Общие замечания.

Современный этап решения задач моделирования поведения железобетонных конструкций связан с широким использованием численных методов [1]. Прогресс в компьютерной индустрии и вычислительной математике, продолжающийся последние десятилетия, обусловил изменение соотношения аналитических, экспериментальных (модельных и натурных) и численных подходов к анализу сложных конструкций, зданий и сооружений. Практика выдвигает задачи многовариантных исследований двумерных и трехмерных систем, адекватное решение которых может быть зачастую получено только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Этим, в частности, и объясняется определенное превалирование численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Вообще, на всех этапах изучения поведения строительного объекта математическая теория, исследования аналитическими и экспериментальными методами и численный расчет должны применяться совместно и согласованно. В основе математического моделирования рассматриваемых задач лежат, как правило, современные численные методы их дискретизации по пространству и времени, а именно, метод конечных элементов для задач механики деформируемого твердого тела и строительной механики.

Таким образом, для выполнения расчетного обоснования строительных конструкций широко используются универсальные и специализированные конечноэлементные программные комплексы. Заметим, что в качестве физических соотношений между усилиями и деформациями при этом нередко используются зависимости для сплошного упругого изотропного тела. Между тем, для железобетонных элементов такой подход может приводить к существенным погрешностям, поскольку в них при действии эксплуатационных нагрузок, как правило, образуются трещины и начинают развиваться неупругие деформации, что вызывает снижение жесткостных (деформативных) характеристик и перераспределение усилий в элементах системы, увеличение прогибов и перемещений. В этой связи дальнейшее совершенствование и развитие моделей железобетона и разработка на их основе методов расчета, учитывающих образование трещин и развитие неупругих деформаций в железобетонных элементах, а также дальнейшая численная и программно-алгоритмическая реализация в виде комплексов программ (программных модулей) для расчета строительных конструкций, остается весьма важной.

2.2. О типах диаграмм в теории расчета железобетонных конструкций.

В настоящее время в теории расчета железобетонных конструкций используются три основных типа диаграмм: в аналитическом виде; в виде кусочной линеаризации аналитических зависимостей диаграмм в процессе

шагового нагружения; в виде многозвенной ломаной линии (посредством многоточечного задания напряжений и относительных деформаций). Отдельно выделяется диаграмма деформирования арматуры в элементах с трещинами. Аналитические зависимости задания диаграмм деформирования бетона и арматуры получили развитие в работах многих исследователей, среди которых, в частности, необходимо отметить В.Н. Байкова [2], В.М. Бондаренко [3,4], С.В. Бондаренко [5], В.Я. Бачинского, А.Б. Голышева, Е.А. Гузеева [6], Ю.П. Гущи, П.Ф. Дроздова, Н.И. Карпенко [7,8], В.И. Колчунова [3,4,9], В.М. Круглова, С.Ф. Клованича, С.А. Мадатяна, Л.Р. Маиляна [10,11], С.И. Меркулова, В.М. Митасова, Г.В. Мурашкина, Я.М. Немировского, В.Г. Назаренко, Л.Л. Паньшина, А.Н. Петрова [8], А.Б. Пирадова, Б.С. Расторгуева, Р.С. Санжаровского [5], В.И. Травуша [9,12-16], В.С. Федорова, В.П. Чайки, Е.Н. Щербакова, P. Desayi [17-19], K. Gerstle [20,21], S. Krisnuan, L. Saennz, B. Sinha, L. Tulin и др. Используются два способа задания диаграмм: непосредственно в виде кривых «напряжение – деформация», или в виде аналогичных кривых, задаваемых через секущие модули. В основном развивался первый способ, который нашел свое применение, в частности, в работах Т.А. Балана, С.Ф. Клованича для построения модели бетона в инкрементальном виде на основе диаграммы, рекомендованной Европейским комитетом по бетону (ЕКБ). Секущие модели использовались в построениях Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиева, А.Н. Петрова и др, при этом модули выражались через уровни напряжений. Заметим, что в диаграммах арматуры в железобетонных элементах в момент трещинообразования возможны разрывы производных, входящих в аналитические зависимости функций, что требует специальных приёмов, которые усложняют расчёт. Этого недостатка лишен второй из указанных выше типов построения связей между приращениями напряжений и деформаций путём кусочной линеаризации диаграмм применительно к шаговому нагружению. Развитие этого направления было положено работами С.Н. Карпенко. Третий тип задания диаграмм является наиболее универсальным. В связи с быстрым развитием новых эффективных видов бетона и арматуры не всегда удается быстро описать аналитическими зависимостями диаграммы деформирования. В этих случаях можно принять многоточечную форму задания диаграмм с линейными отрезками между точками. Следует отметить, что замены реальных диаграмм двумя-тремя отрезками ломаной линии производились во многих работах, в том числе в трудах А.А. Гвоздева [22], Н.И. Карпенко [7,8,12], О.А. Коковина, А.С. Залесова и др. Предложение по использованию кусочно-линейных диаграмм общего вида для линеаризации систем нелинейных дифференциальных уравнений сделано в работе В.М. Бондаренко [3,4] и С.В. Бондаренко [5], затем развивалось в работах С.Н. Карпенко [7,8,12].

2.3. О построении общих деформационных моделей железобетона.

Построение общих деформационных моделей железобетона рассматривалось в работах О.Я. Берга, В.М. Бондаренко [3,4], С.В. Бондаренко [5], Т.А. Балана, А.А. Гвоздева [22], Г.А. Гениева [23-27], Ю.В. Зайцева [28,29], Н.И. Карпенко [7,8,12], В.И. Колчунова, В.М. Круглова, В.Н. Киссюка, С.Ф. Клованича, А.Н. Петрова [8], Б.С. Соколова [30], Г.А. Тюпина и др. В частности, методы расчета плит и оболочек на основе различных деформационных моделей рассматривались в работах В.Н. Байкова, В.М. Бондаренко, В.Ф. Владимирова, Н.И. Карпенко, С.М. Крылова, С.Б. Крылова, Л.Д. Лифшица, И.Е. Милейновского, М.М. Онищенко, С.Н. Палювиной, И.Т. Тимко, Ю.В. Чиненкова, П.А. Шагина, В.В. Шугаева [25,31] и др. Наиболее общей представляется анизотропная модель деформирования плит с трещинами, прошедшая проверку в работах А.Л. Гуревича, М.И. Леви, А.Н. Петрова С.Н. [8] Палювиной, С.Н. Карпенко и др. Вместе с тем,

вплоть до недавнего времени деформационные модели в приращениях оставались не разработанными. Отдельное исключение составляют работы Г.А. Гениева, Т.А. Балана, Г.В. Василькова, А.Н. Донца, В.М. Круглова, С.Ф. Клованича, Л.Ю. Соловьева, Г.А. Тюпина, С.А. Тихомирова и др., основанные на развитии применительно к бетону теории пластического течения. Наиболее общими здесь являются разработки В.М. Круглова, Л.Ю. Соловьева, Г.В. Василькова для бетона, в которых учитывается несовпадение поверхности начала текучести с поверхностью пластического потенциала, эффект дилатации и некоторые другие особенности деформирования бетона. Однако это приводит к значительному усложнению расчетной модели. В целом, с точки зрения практического применения наибольшее распространение получили нелинейные модели железобетона, в которых свойства железобетона с трещинами аппроксимируются свойствами некоторого сплошного анизотропного тела, причем наиболее успешно разрабатываются модели, основанные на деформационной теории пластичности бетона и железобетона Г.А. Гениева и теории деформирования железобетона с трещинами Н.И. Карпенко.

2.4. О критериях прочности железобетонных конструкций.

Результаты исследования в области разработки, развития и применения критериев прочности железобетонных конструкций представлены в работах М.С. Боришанского, А.А. Гвоздева [22], Х.А. Загиншина, А.С. Залесова, А.И. Звездова, О.Ф. Ильина, К. Йогансена, Н.И. Карпенко [7,8,12], С.Н. Карпенко [7,8,13], А.А. Кондратчика, Е.Н. Панькова, И.А. Титова, В.В. Тура и др.

В числе ученых-механиков, внесших значительный вклад в разработку и развитие математических постановок, аналитических методов, основ численных методов, используемых в задачах расчета строительных конструкций, зданий и сооружений, необходимо отметить В.В. Болотина [32], А.С. Вольмира, А.Б. Золотова [33,34], А.И. Лурье [35,36], Я.Г. Пановко [37], Ю.Н. Работнова [38], А.Р. Ржаницына [39], С.П. Тимошенко [40], В.И. Травуша [9,12-16], К. Васидзу [41], Вестергарда, А. Гриффитса, Р. Клафа, Ж.-Л. Лионса [42,43], Н. Ньюмарка и др. Общие теоретические и прикладные аспекты современных численных методов (метод конечных элементов, метод конечных разностей, вариационно-разностный метод, метод граничных элементов) и полуаналитических (численно-аналитических) методов отражены в работах Н.П. Абовского, П.А. Акимова [44-50], С.М. Алейникова [51], Н.С. Бахвалова [52], М.В. Белого [33], А.М. Белостоцкого, В.Е. Булгакова [33], П.П. Гайджурова, С.К. Годунова [53], А.Б. Золотова [33,34], В.А. Ильичева [3], Г.Г. Кашеваровой [15,16,54], Л.С. Ляховича [37], А.В. Перельмутера [55,56], Л.А. Розина [57], А.А. Самарского, В.А. Семенова, В.Н. Сидорова [58,59], В.И. Сливкера, Р.П. Федоренко [60], В.В. Шайдурова [61], К. Бате [62,63], К. Бреббиа [64], Е. Вилсона [63], Р. Галлагера [65], О. Зенкевича [66,67], Дж. Одена [66], Г. Стренга, Дж. Фикса [68] и др.

Проблема живучести зданий и сооружений в целом и защиты от прогрессирующего обрушения в частности активно развивается в последние десятилетия, особенно после серии трагических аварий природного и техногенного характера. Указанной теме посвятили свои работы такие ученые, как В.О. Алмазов, А.М. Белостоцкий [1,69,70], Ю.В. Бондарев [71], В.М. Бондаренко, А.С. Городецкий, Г.А. Гениев, В.И. Драган, П.Г. Еремеев [72], К.И. Ерёмин, В.И. Колчунов, Н.В. Клюева, В.В. Ларионов, С.И. Меркулов [73], О.В. Мкртычев [74], В.Л. Мондрус, Ю.П. Назаров, Е.В. Осовских, А.С. Павлов, А.В. Перельмутер, И.А. Петров, В.И. Плетнев, А.И. Плотников, А.Н. Потапов, К.П. Пятикрестовский, Б.С. Расторгуев [75], В.М. Ройтман, И.Н. Серпик, В.Н. Симбиркин, Ю.М. Стругацкий, А.Г. Тамразян, В.И. Травуш, Е.М. Уфимцев, Ю.Т. Чернов, Г.И. Шапиро [76] и др. На настоящий момент, в той или иной степени задача защиты зданий от

прогрессирующего обрушения отражена в нормах Европы, России, США и Канады, причем актуальная редакция нормативной литературы требует проведения оценки стойкости целого ряда зданий и сооружений к прогрессирующему (лавинообразному) обрушению.

Расчет зданий и сооружений на устойчивость против прогрессирующего обрушения с учетом развитых физической, геометрической и конструктивной нелинейностей наиболее целесообразно проводить на основе нелинейной динамической методики, использующей прямое численное интегрирование уравнений движения. Практическая применимость данного метода в части железобетонных конструкций может быть эффективно подкреплена результатами настоящего проекта, а также использованием мощных высокопроизводительных конечноэлементных комплексов программ промышленного типа, применяющих явные схемы интегрирования (ANSYS, SIMULIA Abaqus и др.). В числе наиболее наглядных примеров использования решения в форме соответствующего численного эксперимента можно привести работы А.М. Белостоцкого, посвященные анализу причин обрушения спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк».

В целом, опыт ведущих отечественных и зарубежных научно-образовательных центров позволяет заключить, что широкое применение методов математического и компьютерного моделирования, а также вычислительного эксперимента служит ближайшим стратегическим резервом ускорения научно-технического прогресса, в том числе в рамках рассматриваемой области исследований.

3. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Цель исследования.

Цель представляемого исследования – развитие, численная и программно-алгоритмическая реализация инкрементальной модели деформирования железобетона и методов расчета железобетонных конструкций при сложных напряженных состояниях с учетом физической нелинейности, анизотропии и конструктивной неоднородности (на основе новой системы физических соотношений в конечных приращениях с учетом различных факторов физической нелинейности и анизотропии, соответствующих малоитерационных алгоритмов расчета, критериев прочности, построение многофакторных конечно-элементных моделей зданий и сооружений, в том числе уникальных), развитие методов уточненной оценки зданий и сооружений к устойчивости против прогрессирующего обрушения [77].

3.2. Задачи исследования

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- исследование, развитие, численная и программно-алгоритмическая реализация расчетной модели деформирования железобетона при различных напряженных состояниях в инкрементальной форме с учетом физической нелинейности компонент железобетона, трещинообразования и приобретаемой в результате трещинообразования неоднородности и анизотропии и малоитерационных алгоримов расчета на ее основе;
- исследование, развитие, численная и программно-алгоритмическая реализация многофакторной системы критериев прочности для железобетонных элементов при сложных напряженных состояниях;
- построение и верификация пространственных конечноэлементных моделей строительных объектов, решенных в железобетоне, в том числе в части уникальных зданий и сооружений с высокоточным моделированием сложных узлов сопряжения различных конструктивных элементов;
- разработка и численная реализация методов уточненной оценки зданий и сооружений к устойчивости против прогрессирующего обрушения.

Дополнительным фактором достижимости поставленных задач является наличие и активное применение признанных программных комплексов численного моделирования для большеразмерных задач, в частности ANSYS и SIMULIA Abaqus, как эффективных инструментов верификации моделей, методов, алгоритмов и программ, а также определенный научный задел.

Соответствующие результаты настоящего исследования будут представлены в последующих статьях авторского коллектива.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2018 год, тема 7.4.2 «Разработка и численная реализация методов определения напряженно-деформированного состояния пространственных плитно-оболочечных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности, трещинообразования и приобретаемой анизотропии».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Belostotsky A.M., Akimov P.A., Afanasyeva I.N., Kaytukov T.B.** Contemporary Problems of Numerical Modelling of Unique Structures and Buildings. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Volume 13, Issue 2, pp. 9-34.
2. **Ivashenko I.A.** Optimization of the Prestress Value in Binding of Reinforced Concrete Structures // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1771-1775.
3. **Ilyichev V., Emelyanov S., Kolchunov V., Bakayeva N., Kobeleva S.** Estimation of Indicators of Ecological Safety in Civil Engineering. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 126-131.
4. **Klueva N., Emelyanov S., Kolchunov V., Gubanova M.** Criterion of Crack Resistance of Corrosion Damaged Concrete in Plane Stress State // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.
5. **Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N.** Method of Calculation of Strengthening of the Loaded Rod Structures Taking into Account Plastic Deformations. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1741-1747.
6. **Perfilov V.A., Oreshkin D.V., Zemlyanushnov D.Yu.** Concrete Strength and Crack Resistance Control. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1474-1478.
7. **Karpenko N.I., Karpenko S.N.** Determination of the Strength and Orientation of Destruction Concrete's Surfaces for Different Types of Bulk Stress State. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 378-385.
8. **Karpenko N.I., Karpenko S.N., Petrov A.N., Voronin Z.A., Evseeva A.V.** Incremental Approach to the Nonlinear Analysis of Reinforcement Concrete with Cracks at Plane Stress State. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 386-389.
9. **Travush V., Emelianov S., Kolchunov V., Bulgakov A.** Mechanical Safety and Survivability of Buildings and Building Structures under Different Loading Types and Impacts. // Procedia Engineering, 2016, Volume 164, pp. 416-424.
10. **Chepurnenko A., Mailyan L., Jazyev B.** Calculation of the Three-layer Shell Taking into Account Creep. // Procedia Engineering, 2016, Volume 165, pp. 990-994.
11. **Mailyan L., Chepurnenko A., Ivanov A.** Calculation of Prestressed Concrete Cylinder Considering Creep of Concrete. // Procedia Engineering, 2016, Volume 165, pp. 1853-1857.
12. **Karpenko N.I., Mishina A.V., Travush V.I.** Impact of Growth on Physical, Mechanical and Rheological Properties of High Strength Steel Fiber Reinforced Con-

crete. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 390-397.
13. **Karpenko S.N., Travush V.I., Chepyzubov I.G.** Deformability and Strength Determining of Coupling Fittings of Steel Reinforcement in the Reinforced Concrete Structures. // Procedia Engineering, 2015, Volume 165, pp. 1853-1857.
14. **Travush V.I.** On a Method of Solving Problems of the Bending of Rods and Plates of Piecewise-Constant Stiffness. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1986, Volume 50, Issue 4, pp. 470-474.
15. **Travush V.I., Kashevarova G.G., Martirosyan A.S., Avhacheva I.A.** Experimental Study of Possible Ways to Increase Cohesion Strength in the "Steel-Concrete" Contact Zone under Displacement Conditions. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 766-772.
16. **Travush V.I., Martirosyan A.S., Kashevarova G.G.** Computer Modeling as Evaluation Method of Column Base Bearing Capacity in Tower Buildings. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 773-780.
17. **Desayi P., Ganesan N.** Determination of Maximum Crack width in Ferrocement Flexural Elements of Channel Cross Section. // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1984, Volume 6, Issue 3, pp. 169-177.
18. **Desayi P., Ganesan N.** Fracture Properties of Ferrocement Using Double Cantilever Beam Specimens. // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1986, Volume 8, Issue 2, pp. 121-132.
19. **Desayi P., Nandakumar N.** A Semi-empirical Approach to Predict Shear Strength of Ferrocement. // Cement and Concrete Composites, 1995, Volume 17, Issue 3, pp. 207-218.
20. **Bursi O.S., Gerstle K.H.** Analysis of Flexibly Connected Braced Steel Frames. // Journal of Constructional Steel Research, 1994, Volume 30, Issue 1, pp. 61-83.
21. **Bursi O.S., Gerstle K.H., Sigfusdottir A., Zitur J.L.** Behavior and Analysis of Bracing Connections for Steel Frames. // Journal of Constructional Steel Research, 1994, Volume 30, Issue 1, pp. 39-60.
22. **Gvozdev A.A.** The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation. // International Journal of Mechanical Sciences, 1960, Volume 1, Issue 4, pp. 322-335.
23. **Andreev V.I., Barmenkova E.V., Potekhin I.A.** Way of Optimization of Stress State of Elements of Concrete Structures. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 37-44.
24. **Chepurnenko A.S., Saibel A.V., Yazyev B.M.** Determination of the Breaking Load for Concrete Slabs Based on the Deformation Theory of Plasticity. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1694-1700.
25. **Ermakova A.** Additional Finite Elements and Additional Loads for Analysis of Systems with Several Nonlinear Properties. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1817-1823.
26. **Krishan A., Rimshin V., Erofeev V., Kurbatov V., Markov S.** The Energy Integrity Resistance to the Destruction of the Long-term Strength Concrete. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.
27. **Korsun V., Kalmykov Y., Niedoriezov A., Korsun A.** The Influence of the Initial Concrete Strength on its Deformation Under Triaxial Compression. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.
28. **Zaitsev Yu.V., Kovler K.L.** Notch Sensitivity of Concrete and Size Effect Part I: Effect of Specimen Size and Crack Length by 3-point Bending. // Cement and Concrete Research, 1985, Volume 15, Issue 6, pp. 979-987.
29. **Zaitsev Yu.V., Kovler K.L.** Notch Sensitivity of Concrete and Size Effect Part II: Stress State Effect. // Cement and Concrete Research, 1986, Volume 16, Issue 1, pp. 7-16.
30. **Filatov V.B., Suvorov A.A.** Research of the Stress Condition of the Normal Section of Reinforced Concrete Elements using Non-

linear Deformation Model. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 144-150.
31. **Ermakova A.** Ideal Failure Models of Structures for Analysis by FEM and AFEM. // Procedia Engineering, 2017, Volume 206, pp. 9-15.
32. **Bolotin V.V.** A Unified Approach to Damage Accumulation and Fatigue Crack Growth. // Engineering Fracture Mechanics, 1985. Volume 22, Issue 3, pp. 387-398.
33. **Belyi M.V., Bulgakov V.E., Zolotov A.B.** A Semi-Iterative Multigrid Method and its Implementation as a Program for Solving Spatial Boundary Value Problems. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1987, Volume 27, Issue 3, pp. 153-161.
34. **Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N.** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2007, Volume 2, Issue 1, pp. 77-82.
35. **Lurie K.A.** Some Recollections About Anatolii Isakovich Lurie. // IFAC Proceedings Volumes, 2001, Volume 34, Issue 6, pp. 35-38.
36. **Zhilin P.A.** A.I. Lurie – The Works on Mechanics. // IFAC Proceedings Volumes, Volume 34, Issue 6, pp. 29-30.
37. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.** Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-type Cross-section with Stability Constraints on the Value of the First Natural Frequency. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 427-433.
38. **Rabotnov Yu.N., Suvorova J.V.** Dynamic Problems for Elastic-Plastic Solids with Delayed Yielding. // International Journal of Solids and Structures, 1971, Volume 7, Issue 2, pp. 143-159.
39. **Tamrazyan A.G.** The Assessment of Reliability of Punching Reinforced Concrete Beamless Slabs under the Influence of a Concentrated Force at High Temperatures. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 715-720.
40. **Frishter L.Yu.** Application of the Methods of the Theory Similarity and Dimensional Analysis for Research the Local Stress-strain State in the Neighborhood of an Irregular Point of the Boundary. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 151-156.
41. **Andreev V.I.** Axisymmetric Thermoelastic Deformation of the Cylinder with Two-dimensional Inhomogeneity of Material. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 32-36.
42. **Lions J.L.** Some Topics on Variational Inequalities and Applications. // North-Holland Mathematics Studies, 1976, Volume 21, pp. 1-38.
43. **Lions J.L.** On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. // North-Holland Mathematics Studies, 1978, Volume 30, pp. 284-346.
44. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials. 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
45. **Akimov P.A.** Correct Indirect Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2013, Vols. 671-674, pp. 1614-1618.
46. **Akimov P.A.** Correct Direct Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 395-396, pp. 529-532.
47. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Volume 1040, pp. 664-669.
48. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 166-169, pp. 3155-3158.
49. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-

Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.

50. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 580-583, pp. 2898-2902.
51. **Aleynikov S.M., Stromov A.V.** Comparison of Complex Methods for Numerical Solutions of Boundary Problems of the Laplace Equation. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, Volume 28, Issue 6, pp. 615-622.
52. **Bakhvalov N.S.** Properties of optimal methods for the solution of problems of mathematical physics. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1970, Volume 10, Issue 3, pp. 1-19.
53. **Godunov S.K., Ryaben'kii V.S.** Canonical Forms of Systems of Ordinary Linear Difference Equations with Constant Coefficients. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1963, Volume 3, Issue 2, pp. 281-295.
54. **Kashevarova G.G., Makovetskiy O.A.** Analysis of Experimental and Estimated Jet-grouted Soil Mass Deformations. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 2223-2227.
55. **Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V.** Safe Fatigue Life of Steel Towers Under the Action of Wind Vibrations. // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1998, Volumes 74-76, pp. 1091-1100.
56. **Perelmuter A.V., Mikitarenko M.A.** Wind Energy Converter Towers: An Experience and a Prognostication. // Journal of Constructional Steel Research, 1998, Volume 46, Issues 1-3, pp. 16-17.
57. **Rozin L.A.** The Growth of a Laminar Boundary Layer on a Flat Plate Set Impulsively into Motion. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1958, Volume 22, Issue 3, pp. 568-575.
58. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of Discrete-Continual Finite Element Method for Global and Local Analysis of Multilevel Systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings, 2014, Volume 1623, Issue 3, pp. 3-6.
59. **Akimov P.A, Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems. // Procedia Engineering, 2014, Volume 91, pp. 14-19.
60. **Fedorenko R.P.** The Approximate Solution of Variational Problems with Non-differentiable Functionals. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1971, Volume 11, Issue 2, pp. 68-85.
61. **Shaidurov V.V.** Some Estimates of the Rate of Convergence for the Cascadic Conjugate-Gradient Method. // Computers & Mathematics with Applications, 1996, Volume 31, Issue 4-5, pp. 161-171.
62. **Bathe K.J.** Some Remarks and References on Recent Developments in Finite Element Analysis Procedures. // Computers & Structures, 1991, Volume 40, Issue 2, pp. 201-202.
63. **Wilson E.L., Bathe K.J., Peterson F.E.** Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer. // Nuclear Engineering and Design, 1974, Volume 29, Issue 1, pp. 110-124.
64. **Brebbia C.A.** The Boundary Element Method in Engineering Practice. // Engineering Analysis, 1984, Volume 1, Issue 1, pp. 3-12.
65. **Patnaik S.N., Berke L., Gallagher R.H.** Integrated Force Method Versus Displacement Method for Finite Element Analysis. // Computers & Structures 38(4) 377-407.
66. **Oden J.T., Duarte C.A.M., Zienkiewicz O.C.** A New Cloud-Based hp Finite Element Method. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, Volume 153, Issues 1-2, pp. 117-126

67. **Zienkiewicz O.C., De S.R. Gago J.P., Kelly D.W.** The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis. // Computers & Structures, 1983, Volume 16, Issues 1-4, pp. 53-65.
68. **Fix G.J., Liang G., Lee D.N.** Penalty-Hybrid Finite Element Method. // Computers & Mathematics with Applications, 1982, Volume 8, Issue 5, pp. 393-399.
69. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А.** Научно-исследовательский центр СтаДиО. 25 лет на фронте численного моделирования. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 1, 2016, pp. 8-45.
70. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Петряшев Н.О., Петряшев С.О., Негрозов О.А.** Расчетные исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости несущих конструкций высотного здания с учетом фактического положения железобетонных конструкций. // Вестник МГСУ, №4, 2015, с. 50-68.
71. **Бондарев Ю.В., Талантов И.С.** Подходы к решению задачи о внезапном удалении элементов из стержневой системы. // Вестник гражданских инженеров, 2014, №2(43), с. 48-52.
72. **Еремеев П.Г.** Лавинообразное (прогрессирующее) разрушение. // Мир строительства и недвижимости, 2008, №29, с. 78-79.
73. **Меркулов С.И.** К вопросу обеспечения живучести железобетонных конструкций и конструктивных систем. // Строительство и реконструкция, 2015, №2(58), с. 63-67.
74. **Мкртычев О.В., Мкртычев А.Э.** Расчет большепролетных и высотных сооружений на устойчивость к прогрессирующему обрушению при сейсмических и аварийных воздействиях в нелинейной динамической постановке. // Строительная механика и расчет сооружений, 2009, №1, с. 38-40.
75. **Тихонов И.Н., Козелков М.М., Расторгуев Б.С.** Основы проектирования железобетонных конструкций с учетом защиты зданий от прогрессирующего обрушения. // Бетон и железобетон, 2014, №6, с. 22-29.
76. **Шапиро Г.И., Гасанов А.А.** Численное решение задачи устойчивости панельного здания против прогрессирующего обрушения. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, pp. 158-166.
77. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н.** Определение прочности и ориентация площадок разрушения бетона при различных видах объемного напряженного состояния. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 52-61.

REFERENCES

1. **Belostotsky A.M., Akimov P.A., Afanasyeva I.N., Kaytukov T.B.** Contemporary Problems of Numerical Modelling of Unique Structures and Buildings. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Volume 13, Issue 2, pp. 9-34.
2. **Ivashenko I.A.** Optimization of the Prestress Value in Binding of Reinforced Concrete Structures // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1771-1775.
3. **Ilyichev V., Emelyanov S., Kolchunov V., Bakayeva N., Kobeleva S.** Estimation of Indicators of Ecological Safety in Civil Engineering. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 126-131.
4. **Klueva N., Emelyanov S., Kolchunov V., Gubanova M.** Criterion of Crack Resistance of Corrosion Damaged Concrete in Plane Stress State // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.

5. **Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N.** Method of Calculation of Strengthening of the Loaded Rod Structures Taking into Account Plastic Deformations. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1741-1747.
6. **Perfilov V.A., Oreshkin D.V., Zemlyanushnov D.Yu.** Concrete Strength and Crack Resistance Control. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1474-1478.
7. **Karpenko N.I., Karpenko S.N.** Determination of the Strength and Orientation of Destruction Concrete's Surfaces for Different Types of Bulk Stress State. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 378-385.
8. **Karpenko N.I., Karpenko S.N., Petrov A.N., Voronin Z.A., Evseeva A.V.** Incremental Approach to the Nonlinear Analysis of Reinforcement Concrete with Cracks at Plane Stress State. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 386-389.
9. **Travush V., Emelianov S., Kolchunov V., Bulgakov A.** Mechanical Safety and Survivability of Buildings and Building Structures under Different Loading Types and Impacts. // Procedia Engineering, 2016, Volume 164, pp. 416-424.
10. **Chepurnenko A., Mailyan L., Jazyev B.** Calculation of the Three-layer Shell Taking into Account Creep. // Procedia Engineering, 2016, Volume 165, pp. 990-994.
11. **Mailyan L., Chepurnenko A., Ivanov A.** Calculation of Prestressed Concrete Cylinder Considering Creep of Concrete. // Procedia Engineering, 2016, Volume 165, pp. 1853-1857.
12. **Karpenko N.I., Mishina A.V., Travush V.I.** Impact of Growth on Physical, Mechanical and Rheological Properties of High Strength Steel Fiber Reinforced Concrete. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 390-397.
13. **Karpenko S.N., Travush V.I., Chepyzubov I.G.** Deformability and Strength Determining of Coupling Fittings of Steel Reinforcement in the Reinforced Concrete Structures. // Procedia Engineering, 2015, Volume 165, pp. 1853-1857.
14. **Travush V.I.** On a Method of Solving Problems of the Bending of Rods and Plates of Piecewise-Constant Stiffness. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1986, Volume 50, Issue 4, pp. 470-474.
15. **Travush V.I., Kashevarova G.G., Martirosyan A.S., Avhacheva I.A.** Experimental Study of Possible Ways to Increase Cohesion Strength in the “Steel-Concrete” Contact Zone under Displacement Conditions. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 766-772.
16. **Travush V.I., Martirosyan A.S., Kashevarova G.G.** Computer Modeling as Evaluation Method of Column Base Bearing Capacity in Tower Buildings. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 773-780.
17. **Desayi P., Ganesan N.** Determination of Maximum Crack width in Ferrocement Flexural Elements of Channel Cross Section. // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1984, Volume 6, Issue 3, pp. 169-177.
18. **Desayi P., Ganesan N.** Fracture Properties of Ferrocement Using Double Cantilever Beam Specimens. // International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1986, Volume 8, Issue 2, pp. 121-132.
19. **Desayi P., Nandakumar N.** A Semi-empirical Approach to Predict Shear Strength of Ferrocement. // Cement and Concrete Composites, 1995, Volume 17, Issue 3, pp. 207-218.
20. **Bursi O.S., Gerstle K.H.** Analysis of Flexibly Connected Braced Steel Frames. // Journal of Constructional Steel Research, 1994, Volume 30, Issue 1, pp. 61-83.
21. **Bursi O.S., Gerstle K.H., Sigfusdottir A., Zitur J.L.** Behavior and Analysis of Bracing Connections for Steel Frames. // Journal of Constructional Steel Research, 1994, Volume 30, Issue 1, pp. 39-60.
22. **Gvozdev A.A.** The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically

Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation. // International Journal of Mechanical Sciences, 1960, Volume 1, Issue 4, pp. 322-335.

23. **Andreev V.I., Barmenkova E.V., Potekhin I.A.** Way of Optimization of Stress State of Elements of Concrete Structures. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 37-44.
24. **Chepurnenko A.S., Saibel A.V., Yazyev B.M.** Determination of the Breaking Load for Concrete Slabs Based on the Deformation Theory of Plasticity. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1694-1700.
25. **Ermakova A.** Additional Finite Elements and Additional Loads for Analysis of Systems with Several Nonlinear Properties. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 1817-1823.
26. **Krishan A., Rimshin V., Erofeev V., Kurbatov V., Markov S.** The Energy Integrity Resistance to the Destruction of the Long-term Strength Concrete. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.
27. **Korsun V., Kalmykov Y., Niedoriezov A., Korsun A.** The Influence of the Initial Concrete Strength on its Deformation Under Triaxial Compression. // Procedia Engineering, 2015, Volume 117, pp. 179-185.
28. **Zaitsev Yu.V., Kovler K.L.** Notch Sensitivity of Concrete and Size Effect Part I: Effect of Specimen Size and Crack Length by 3-point Bending. // Cement and Concrete Research, 1985, Volume 15, Issue 6, pp. 979-987.
29. **Zaitsev Yu.V., Kovler K.L.** Notch Sensitivity of Concrete and Size Effect Part II: Stress State Effect. // Cement and Concrete Research, 1986, Volume 16, Issue 1, pp. 7-16.
30. **Filatov V.B., Suvorov A.A.** Research of the Stress Condition of the Normal Section of Reinforced Concrete Elements using Nonlinear Deformation Model. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 144-150.
31. **Ermakova A.** Ideal Failure Models of Structures for Analysis by FEM and AFEM. // Procedia Engineering, 2017, Volume 206, pp. 9-15.
32. **Bolotin V.V.** A Unified Approach to Damage Accumulation and Fatigue Crack Growth. // Engineering Fracture Mechanics, 1985. Volume 22, Issue 3, pp. 387-398.
33. **Belyi M.V., Bulgakov V.E., Zolotov A.B.** A Semi-Iterative Multigrid Method and its Implementation as a Program for Solving Spatial Boundary Value Problems. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1987, Volume 27, Issue 3, pp. 153-161.
34. **Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N.** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2007, Volume 2, Issue 1, pp. 77-82.
35. **Lurie K.A.** Some Recollections About Anatolii Isakovich Lurie. // IFAC Proceedings Volumes, 2001, Volume 34, Issue 6, pp. 35-38.
36. **Zhilin P.A.** A.I. Lurie – The Works on Mechanics. // IFAC Proceedings Volumes, Volume 34, Issue 6, pp. 29-30.
37. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.** Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-type Cross-section with Stability Constraints on the Value of the First Natural Frequency. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 427-433.
38. **Rabotnov Yu.N., Suvorova J.V.** Dynamic Problems for Elastic-Plastic Solids with Delayed Yielding. // International Journal of Solids and Structures, 1971, Volume 7, Issue 2, pp. 143-159.
39. **Tamrazyan A.G.** The Assessment of Reliability of Punching Reinforced Concrete Beamless Slabs under the Influence of a Concentrated Force at High Temperatures. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 715-720.
40. **Frishter L.Yu.** Application of the Methods of the Theory Similarity and Dimensional Analysis for Research the Local Stress-strain State in the Neighborhood of an Irregular Point of the Boundary. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 151-156.
41. **Andreev V.I.** Axisymmetric Thermoelastic Deformation of the Cylinder with Two-dimensional Inhomogeneity of Mate-

rial. // Procedia Engineering, 2016, Volume 153, pp. 32-36.
42. **Lions J.L.** Some Topics on Variational Inequalities and Applications. // North-Holland Mathematics Studies, 1976, Volume 21, pp. 1-38.
43. **Lions J.L.** On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. // North-Holland Mathematics Studies, 1978, Volume 30, pp. 284-346.
44. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials. 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
45. **Akimov P.A.** Correct Indirect Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2013, Vols. 671-674, pp. 1614-1618.
46. **Akimov P.A.** Correct Direct Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 395-396, pp. 529-532.
47. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Volume 1040, pp. 664-669.
48. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 166-169, pp. 3155-3158.
49. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.
50. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, 2014, Vols. 580-583, pp. 2898-2902.
51. **Aleynikov S.M., Stromov A.V.** Comparison of Complex Methods for Numerical Solutions of Boundary Problems of the Laplace Equation. // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, Volume 28, Issue 6, pp. 615-622.
52. **Bakhvalov N.S.** Properties of optimal methods for the solution of problems of mathematical physics. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1970, Volume 10, Issue 3, pp. 1-19.
53. **Godunov S.K., Ryaben'kii V.S.** Canonical Forms of Systems of Ordinary Linear Difference Equations with Constant Coefficients. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1963, Volume 3, Issue 2, pp. 281-295.
54. **Kashevarova G.G., Makovetskiy O.A.** Analysis of Experimental and Estimated Jet-grouted Soil Mass Deformations. // Procedia Engineering, 2016, Volume 150, pp. 2223-2227.
55. **Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V.** Safe Fatigue Life of Steel Towers Under the Action of Wind Vibrations. // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1998, Volumes 74-76, pp. 1091-1100.
56. **Perelmuter A.V., Mikitarenko M.A.** Wind Energy Converter Towers: An Experience and a Prognostication. // Journal of Constructional Steel Research, 1998, Volume 46, Issues 1-3, pp. 16-17.
57. **Rozin L.A.** The Growth of a Laminar Boundary Layer on a Flat Plate Set Impulsively into Motion. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1958, Volume 22, Issue 3, pp. 568-575.
58. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of Discrete-Continual Finite Element Method for Global and Local Analysis of Multilevel Systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings, 2014, Volume 1623, Issue 3, pp. 3-6.

59. **Akimov P.A, Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems. // Procedia Engineering, 2014, Volume 91, pp. 14-19.
60. **Fedorenko R.P.** The Approximate Solution of Variational Problems with Non-differentiable Functionals. // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1971, Volume 11, Issue 2, pp. 68-85.
61. **Shaidurov V.V.** Some Estimates of the Rate of Convergence for the Cascadic Conjugate-Gradient Method. // Computers & Mathematics with Applications, 1996, Volume 31, Issue 4-5, pp. 161-171.
62. **Bathe K.J.** Some Remarks and References on Recent Developments in Finite Element Analysis Procedures. // Computers & Structures, 1991, Volume 40, Issue 2, pp. 201-202.
63. **Wilson E.L., Bathe K.J., Peterson F.E.** Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer. // Nuclear Engineering and Design, 1974, Volume 29, Issue 1, pp. 110-124.
64. **Brebbia C.A.** The Boundary Element Method in Engineering Practice. // Engineering Analysis, 1984, Volume 1, Issue 1, pp. 3-12.
65. **Patnaik S.N., Berke L., Gallagher R.H.** Integrated Force Method Versus Displacement Method for Finite Element Analysis. // Computers & Structures 38(4) 377-407.
66. **Oden J.T., Duarte C.A.M., Zienkiewicz O.C.** A New Cloud-Based hp Finite Element Method. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, Volume 153, Issues 1-2, pp. 117-126
67. **Zienkiewicz O.C., De S.R. Gago J.P., Kelly D.W.** The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis. // Computers & Structures, 1983, Volume 16, Issues 1-4, pp. 53-65.
68. **Fix G.J., Liang G., Lee D.N.** Penalty-Hybrid Finite Element Method. // Computers & Mathematics with Applications, 1982, Volume 8, Issue 5, pp. 393-399.
69. **Belostosky A.M., Akimov P.A.** Nauchno-Issledovatel'skij Centr StaDyO. 25 let na fronte Chislennogo Modelirovaniya [Scientific and Research Center “StaDyO”. 25 years on the Front of Numerical Simulation]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 1, 2016, pp. 8-45.
70. **Belostosky A.M., Akimov P.A., Petryashev N.O., Petryashev S.O., Negrozov O.A.** Raschetnye Issledovaniya Napryazhenno-Deformirovannogo Sostoyaniya, Prochnosti i Ustojchivosti Nesushchih Konstrukcij Vysotnogo Zdaniya s Uchetom Fakticheskogo Polozheniya Zhelezobetonnyh Konstrukcij [Analysis of the Stress-Strain State, Strength and Stability of Load-Bearing Structures of a High-Rise Building with Allowance for Actual Positions of Reinforced Concrete Structures]. // Vestnik MGSU, 2015, Issue 4, pp. 50-68.
71. **Bondarev Yu.V., Talantov I.S.** Podhody k Resheniyu Zadachi o Vnezapnom Udalenii Elementov iz Sterzhnevoj Sistemy [Approaches to the Solution of the Problem of the Sudden Removal of Elements from the Bar System]. // Vestnik grazhdanskih inzhenerov, 2014, №2(43), pp. 48-52.
72. **Eremeev P.G.** Lavinoobraznoe (Progressirujushhee) Razrushenie [Progressive Collapse]. Mir stroitelstva i nedvizhimosti, 2008, No. 29, pp. 78-79.
73. **Merkulov S.I.** K Voprosu Obespechenija Zhivuchesti Zhelezobetonnyh Konstrukcij i Konstruktivnyh Sistem [About Ensuring the Survivability of Reinforced Concrete Structures and Structural Systems]. // Stroitelstvo i Reconstructsiya, 2015, No. 2(58), pp. 63-67.
74. **Mkrtichev O.V., Mkrtichev A.E.** Raschet Bol'sheproletnyh i Vysotnyh Sooruzhenij na Ustojchivost' k Progressirujushhemu Obrusheniju pri Sejsmicheskih i Avarijnyh Vozdejstvijah v Nelinejnoj Dinamicheskoj Postanovke [Progressive Collapse Analysis

of Long-Span and High-Rise Structures for Resistance Under Seismic and Emergency Impacts in a Nonlinear Dynamic Formulation]. // Stroitelnaya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy, 2009, No. 1, pp. 38-40.

75. **Tikhonov I.N., Kozelkov M.M., Rastorguev B.S.** Osnovy Proektirovanija Zhelezobetonnyh Konstrukcij s Uchetom Zashhity Zdanij ot Progressirujushhego Obrushenija [The Fundamentals of Designing of Reinforced Concrete Structures with Allowance for Protection of Buildings from Progressive Collapse. // Beton i Zhelezobeton, 2014, No. 6, pp. 22-29.
76. **Shapiro G.I., Gasanov A.A.** Chislennoe Reshenie Zadachi Ustojchivosti Panel'nogo Zdanija Protiv Progressiru-jushhego Obrushenija [Numerical Solution of the Problem of Stability of a Panel Building Against Progressive Collapse]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, pp. 158-166.
77. **Karpenko N.I., Karpenko S.N.** Opredelenie Prochnosti i Orientaciya Ploshchadok Razrusheniya Betona pri Razlichnyh Vidah Ob'emnogo Naprya-zhennogo Sostoyaniya [Determination of Strength and Orientation of Planes of Failure for Various Types of Volumetric Stress State]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015, Volume 11, Issue 1, pp. 52-61.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения» Российского университета транспорта (МИИТ); профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета; 125040, Россия, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810; тел. +7 (499) 706-88-10;
E-mail: amb@stadyo.ru.

Карпенко Николай Иванович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 127238, Россия, Москва, Локомотивный проезд, д. 21; тел. +7 (495) 482-40-76; факс +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63;
факс +7 (495) 650-27-31; Email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Сидоров Владимир Николаевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения» Российского университета транспорта (МИИТ); профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета; профессор Московского архитектурного института (государственной академии); профессор Свентокшиского технического университета в Кельце (Факультет строительства и архитектуры); Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации; 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9;
тел. +7 (495) 684-22-96, (495) 684-26-92,
(495) 681-43-81, (495) 684-22-96;
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

Карпенко Сергей Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 127238, Россия, Москва, Локомотивный проезд, д. 21; тел. +7 (495) 482-40-76; факс +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Петров Алексей Николаевич, советник РААСН, доцент, доктор технических наук; заведующий кафедрой архитектуры, строительных конструкций и геотехники Петрозаводского государственного университета; Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и

строительных наук; 185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33, каб. 366;
тел. +7 (814-2) 71-10-37; E-mail: petr@petrsu.ru.

Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, заместитель главного ученого секретаря Российской академии архитектуры и строительных наук; Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1;
тел. +7(495) 625-81-53; факс +7 (495) 650-27-31;
Email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Харитонов Владимир Анатольевич, доцент, кандидат технических наук; доцент кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел/факс: +7 (499) 183-59-94;
Email: kharitonov1246@mail.ru.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Director of Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – MIIT); Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University; Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (499) 706-88-10;
E-mail: amb@stadyo.ru.

Nikolay I. Karpenko, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Principal Researcher, Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia; phone +7 (495) 482-40-76; fax +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University of Russia; Professor of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia;
phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31;
E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Vladimir N. Sidorov, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – MIIT); Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University; Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia; Professor of Moscow Institute of Architecture (State Academy); Professor of Kielce University of Technology (Faculty of Civil Engineering and Architecture); Central Institute for Research and Design of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation; 9b9, Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia; phone +7 (495) 684-22-96, (495) 684-26-92, (495) 681-43-81, (495) 684-22-96;
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

Sergey N. Karpenko, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia; phone +7 (495) 482-40-76; fax +7(495) 482-40-60;
E-mail: niisf@niisf.ru.

Alexey N. Petrov, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Associate Professor, Dr.Sc.; Head of Department of Architecture, Building Structures, Petrozavodsk State University; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; office 366, 33, pr. Lenina, Petrozavodsk, the Republic of Karelia, 185910, Russia; phone +7 (814-2) 71-10-37;
E-mail: petr@petrsu.ru.

Taymuraz B. Kaytukov, Advisor of of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Associated Professor, Ph.D.; Deputy Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Central Institute for Research and Design of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-81-53; fax: +7 (495) 650-27-31;
Email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Vladimir A. Kharitonov, Associate Professor, Ph.D.; Associate Professor of Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: kharitonov1246@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-48-56

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЫКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА УГЛЕПЛАСТИКОВЫХ НАГЕЛЯХ

М.А. Водянников
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

Аннотация: Проведена серия вычислительных экспериментов в программном комплексе ANSYS по определению несущей способности и оптимальной схемы расположения углепластиковых нагелей в соединениях деревянных конструкций на углепластиковых накладках. В качестве варьируемых параметров принято количество нагелей в соединении и углы вклейки нагелей в древесину. Сделаны обобщенные выводы по различным вариантам конфигурации с подбором оптимальных параметров работы конструкции при одинаковой нагрузке. Показаны изополя распределения напряжении, построены графики зависимостей контролируемых параметров для каждого рассмотренного случая. Выполнен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния соединения с результатами расчетов по методике, предусмотренной действующими нормами и правилами сопромата. Даны рекомендации по расстановке нагелей, а также по усовершенствованию стыковых соединений с применением композитных материалов.

Ключевые слова: деревянные конструкции, углепластик, численный эксперимент, модель, ANSYS, механические свойства, наблюдение, строительные материалы, испытание, конечный элемент

RESULTS OF NUMERICAL MODELING OF THE STRESSED-DEFORMED STATE OF THE JOINT CONNECTION OF WOOD CONSTRUCTIONS WITH CFRP DOWEL PINS

Mikhail A. Vodiannikov
Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: A comparative analysis based on a series of numerical simulation experiments in the ANSYS software for determining the bearing capacity and the optimal arrangement of CFRP dowel pins in the joints of wooden structures. As variable parameters, the number of pins in the joint and the angles of pasting dowels into the wood are taken. Generalized conclusions are drawn on various configuration options with the selection of optimal design performance parameters for the same load. The voltage distribution iso-poles are shown, the dependence curves of the controlled parameters are plotted for each case considered. A comparative analysis of the stress-strain state of the compound with the results of calculations is carried out according to the procedure stipulated by the current norms and rules of the strength. Recommendations are given on the arrangement of dowels, as well as on the improvement of joints with the use of composite materials.

Keywords: ANSYS, carbon fiber, computer modeling, composite material, layer, contact, wood, computer model, finite element analysis

1. ВВЕДЕНИЕ

Стыки конструкций из цельной и клееной древесины являются наиболее ответственным и чрезвычайно трудоемким разделом проектирования при возведении большепролетных архитектурных форм. Сложность компоновочных решений стыков и узлов со-

единения деревянных конструкций обусловлена совокупностью факторов, таких как анизотропия древесины, наличие естественных пороков, невозможность применения сварки и других температурных воздействий при устройстве закладных деталей, требованиями к огнестойкости конструкции, и других.

По совокупности характеристик наиболее широкое распространение получили стыки на вклеенных стержнях (система ЦНИИСК) с применением стальных нагелей и накладок. Однако в ряде случаев (химически агрессивная среда, высокая влажность в помещении, и т.д.) такое решение не является надежным, поскольку существует риск преждевременного выхода конструкции из строя в связи с процессами коррозии стальных деталей. В работах [1, 2] показана принципиальная возможность применения композитных материалов для создания равнопрочных узлов стыка деревянных конструкций [3].

На сегодняшний день отсутствует нормативная база [4] для расчета композитов, поэтому рациональным путем решения этой задачи может являться построение математической модели и вычислительные эксперименты с помощью метода конечных элементов [5]. Применение современных программных комплексов и мощностей ЭВМ позволяет с высокой точностью моделировать поведение конструкции в тех или иных условиях [6].

В статье приведены данные численного моделирования напряженно-деформированного состояния стыкового соединения деревянных конструкций на вклеенных стержнях при различных конфигурациях расстановки нагелей.

2. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве испытуемого образца принят деревянный брус сечением 100×225×3000 мм, разрезанный в середине пролета. Выполнена компьютерная модель испытания по методике четырехточечного изгиба, расчетная схема приведена на рис. 1. Нагрузка передавалась в виде двух сосредоточенных сил F=1,25 кН. Величина нагрузки принята в соответствии с критической силой, определенной по методике СП «Деревянные конструкции» [4] для неразрезной балки аналогичного сечения. При F=1,25 кН неразрезной образец достигает предельно допустимого расчетного значения прогиба 10 мм (п. 4.3.3 [4]), запас прочности при действии изгибающего момента от данной величины нагрузки (п. 4.9 [4]) составляет 11,2 %. Модель деревянной балки и узла стыка запроектирована и построена при помощи программного комплекса AUTODESK AutoCAD®. Далее модель экспортирована в программный комплекс ANSYS с помощью макросов, написанных на языке параметрического программирования APDL.

На рис. 2 показана полная конечно-элементная модель образца. Балка разрезана в середине пролета и жестко соединена накладками толщиной 5 мм, расположенными по верхней и нижней грани образца. Накладки заанкерованы к телу древесины при помощи вклеенных нагелей диаметром 5 мм (рис. 3).

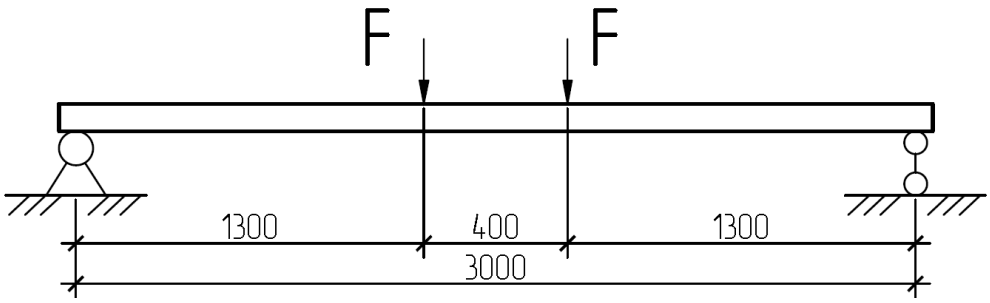


Рисунок 1. Расчетная схема.

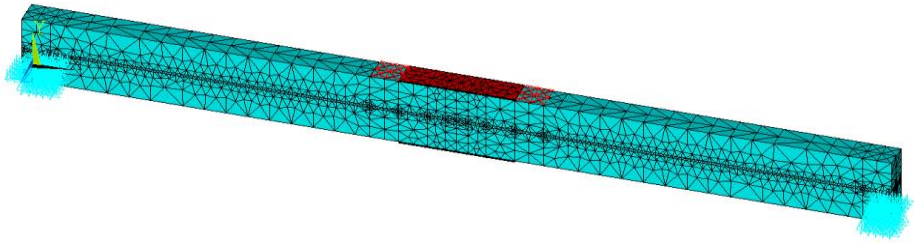


Рисунок 2. Конечно-элементная модель образца.

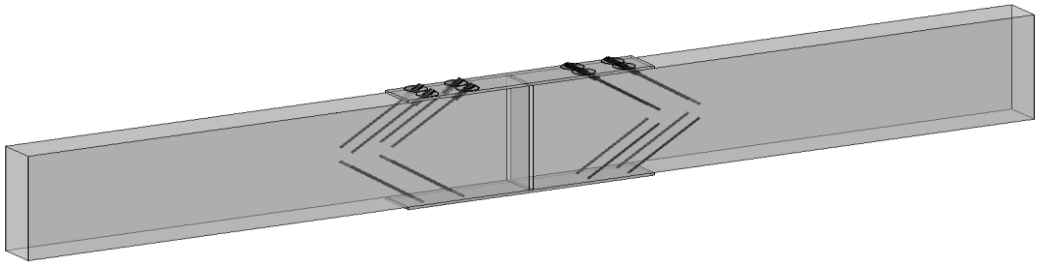


Рисунок 3. Схема нагельного соединения.

Расчетные модели дискретизированы при помощи конечных элементов [5]. Древесина задана как трансверсально-изотропный материал [7, 8] со следующими характеристиками: модуль упругости по оси x, Ex=1,1×1010 (Па), модуль упругости Ey=Ez=4,5×108 (Па), коэффициенты Пуассона νxy=0,45, νyz= νxz=0,018; модуль сдвига Gx=Gy=Gz=6×108 (Па). Тело балки смоделировано 8-узловым конечным элементом SOLID187.

Вклеиваемые нагели – углепластиковые стержни на полимерной матрице [9] с пределом прочности при разрыве σв=2248×106 (Па); модуль упругости E=117×109 (Па); коэффициент Пуассона νxy= νyx = 0,31. Для стержней применен 3-узловой элемент BEAM189. Накладки заданы как трансверсально-изотропный двунаправленный углепластик с направлением армирующих слоев ±45 градусов со следующими характеристиками [10, 11]: предел прочности при разрыве σв=765×106 (Па); модули упругости Ex=Ey=87,2×109, Ez=65,4×109 (Па); коэффициенты Пуассона νxy= νyx =0,268= νxz=0,018. Накладки определены 8-узорвым конечным элементом SHELL281.

При моделировании клеевого соединения учитывалась нелинейность, связанная с наличием сил трения по поверхностям контакта (плоскости соприкосновения древесина-углепластик). В модель введены специальные контактные конечные элементы. Одна из поверхностей условно называется «контактной» поверхностью, а вторая – «целевой» поверхностью [5]. Такие поверхности моделируются соответственно при помощи конечных элементов CONTA174 и TARGE170. Контактные и целевые конечные элементы, составляющие контактную пару, связаны между собой посредством общего набора характеристик.

Существующая методика расчета соединений «системы ЦНИИСК» сводится к сравнению минимальной несущей способности нагеля из условия смятия древесины гнезда или изгиба наиболее нагруженного нагеля. Однако методики определения усилий в нагелях и определения наиболее нагруженного в нормативных документах не приводятся [12].

С целью анализа влияния различных параметров на усилия был выполнен многофакторный численный эксперимент. В качестве контролируемых были приняты два параметра, влияющих на несущую способность стыка:

- количество нагелей в соединении (N=4, 8 либо 12 шт., рис. 4);
- положение (угол вклеивания) нагеля (φ=15, 30, 45, 60°, рис. 5).

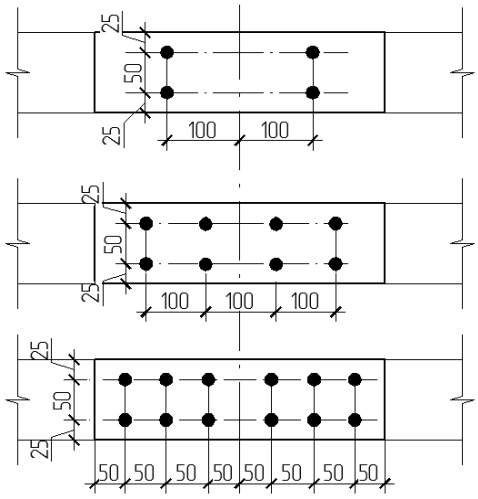


Рисунок 4. Схема расположения нагелей.

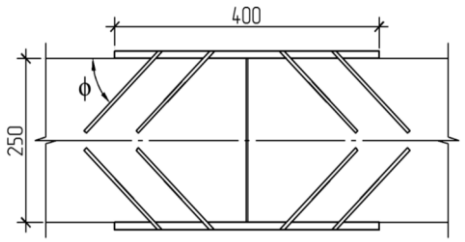


Рисунок 5. Угол вклеивания нагеля.

Нагели устанавливаются в два продольных ряда, расположение нагелей принято в соответствии с требованиями п.7.18, 7.19 [4].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Расчет производился в нелинейной постановке приложением нагрузки F для каждого случая. По окончании расчета в качестве контрольных приняты следующие параметры:

- усилие в древесине (рис. 6);
- усилие в стержнях (рис. 7);
- усилие в накладках (рис. 8);
- прогиб образца в вертикальной плоскости (рис. 9).

Для каждой измеряемой величины и конфигурации расположения нагелей в соединении построены графики зависимости усилий и прогибов от угла наклона вклейки нагеля. Анализируя полученные данные распределения усилий и прогибов исследуемого образца можно сделать следующие выводы.

По мере увеличения количества нагелей в соединении усилия в древесине, стержнях и накладках распределяются более равномерно. При этом для вариантов с 8 и 12 нагелями, по мере увеличения угла наклона нагеля, резко снижается общая деформативность соединения. Усилие в накладках и стержнях наименьшее при установке 8 нагелей, при этом усилие в древесине наименьшее при их установке под углом близким к 45°.

Исходя из этого оптимальным вариантом конфигурации нагельного соединения образца при четырехточечном изгибе под действием критической силы F следует принимать вариант с расстановкой восьми нагелей по каждой стороне под углом 45° к линии, проходящей вдоль длинного края балки.

На рис. 10 и 11 показаны изополя распределения напряжений в древесине и соединительных деталях (накладках и стержнях) для наиболее оптимальной конфигурации.

ВЫВОДЫ

Численное моделирование позволяет с большой точностью оценивать несущую способность строительных конструкций и их соединений. Экспериментальные данные [1, 2] показывают высокую степень достоверности расчетных величин. Современное проектирование жестких стыков деревянных конструкций с использованием мощностей ЭВМ позволяет рассматривать задачи с большим количеством контролируемых параметров при этом экономя время и материальные средства на проведение многочисленных дорогостоящих экспериментов. В рассматриваемой задаче оптимальный результат получен путем вариантного моделирования конструкции с оценкой полученных графиков. Предельные прогибы конструкции с жестким стыком получаются несколько меньше, чем для неразрезной балки [13], что говорит об армирующем эффекте углепластиковых деталей. Аналогичные результаты показаны в работе [12] по усилению древесины углепластиковыми накладками.

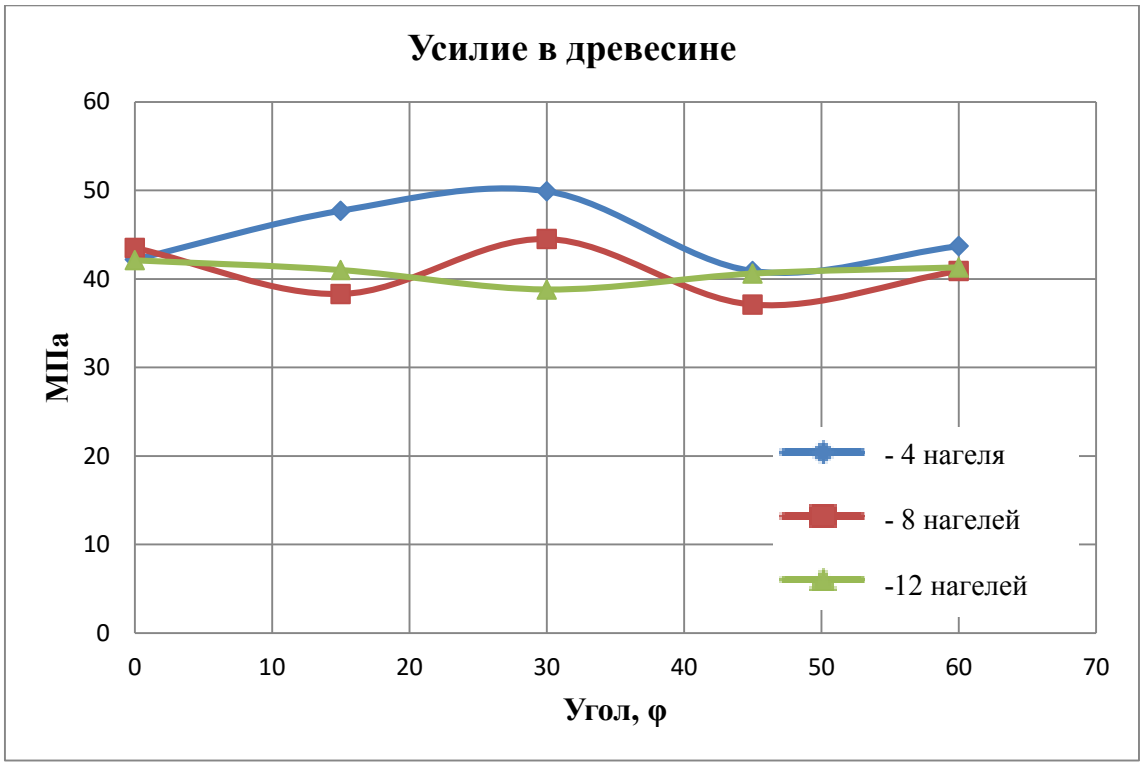


Рисунок 6. График зависимости максимальных усилий в древесине от угла вклейки и количества нагелей.

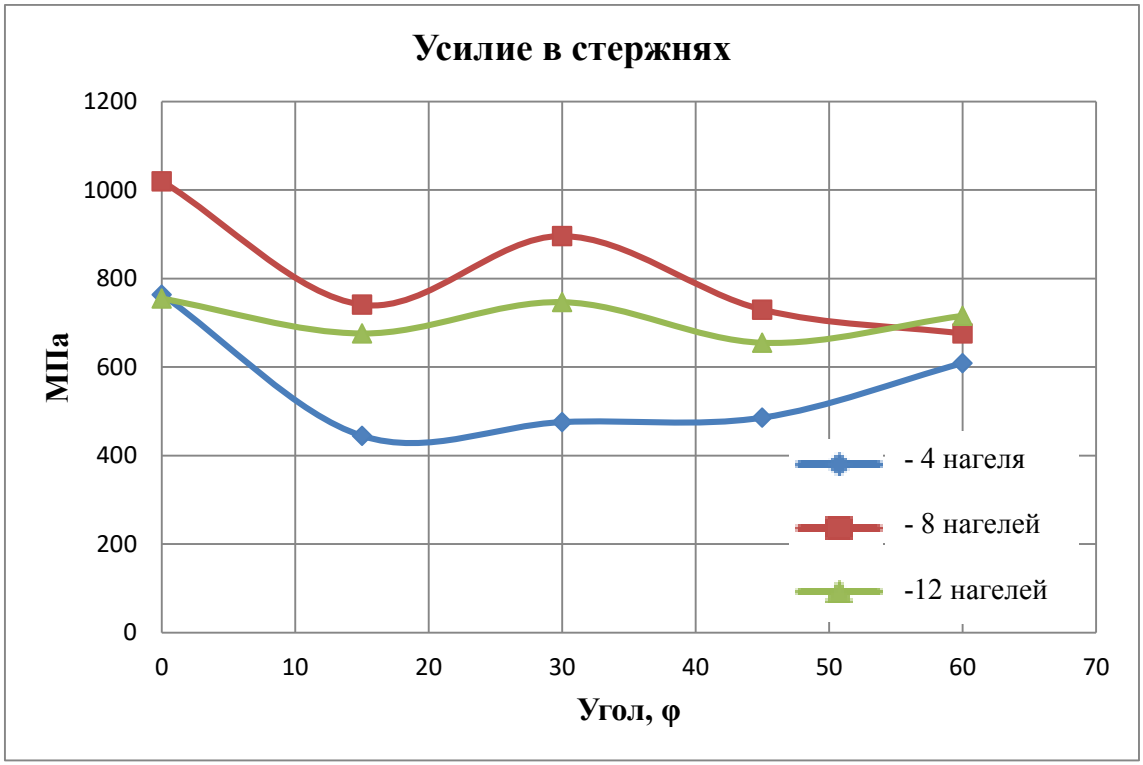


Рисунок 7. График зависимости максимальных усилий в стержнях от их количества и угла вклейки.

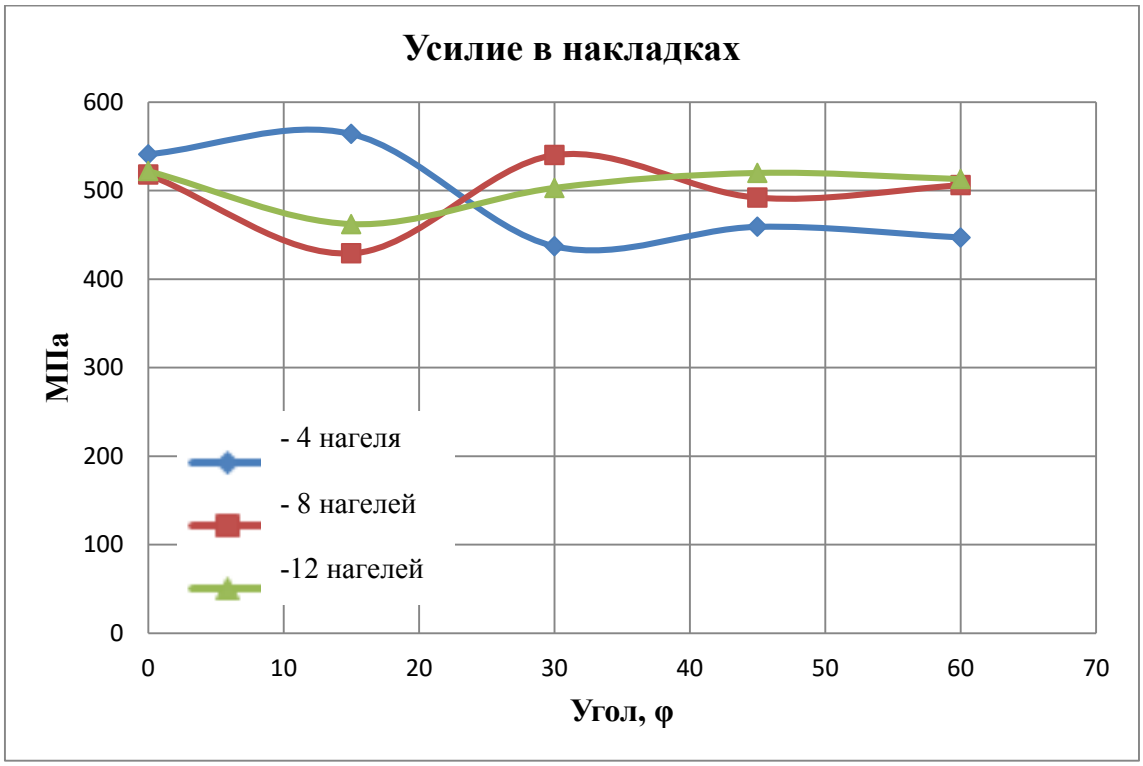


Рисунок 8. График зависимости максимальных усилий в накладках от угла вклейки и количества нагелей.

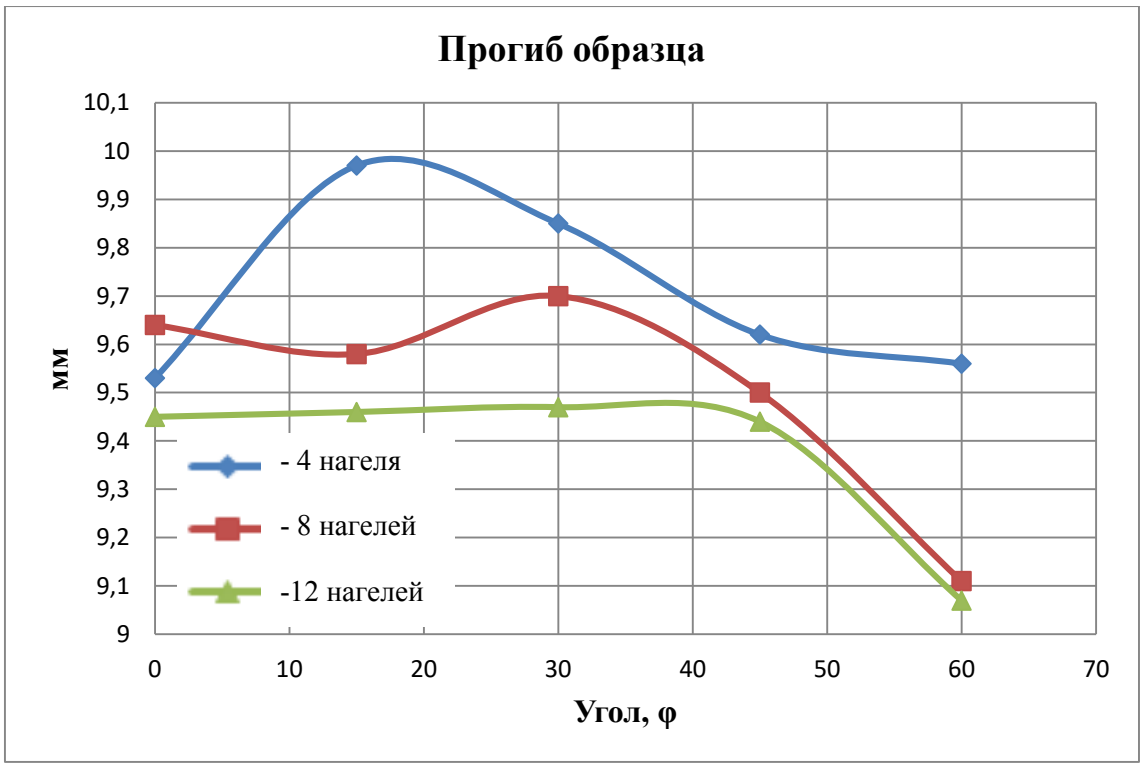


Рисунок 9. Предельные вертикальные перемещения (прогибы) образца в зависимости от угла вклейки и количества нагелей.

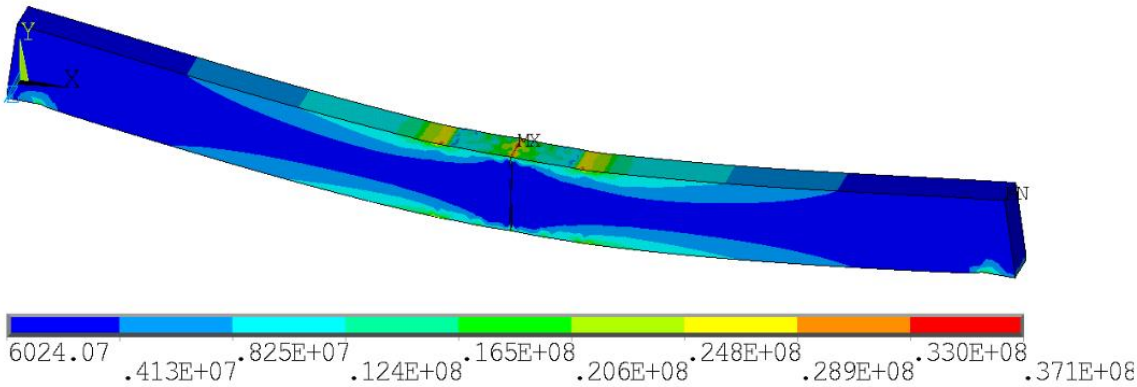


Рисунок 10. Изополя распределения напряжений в теле древесины.

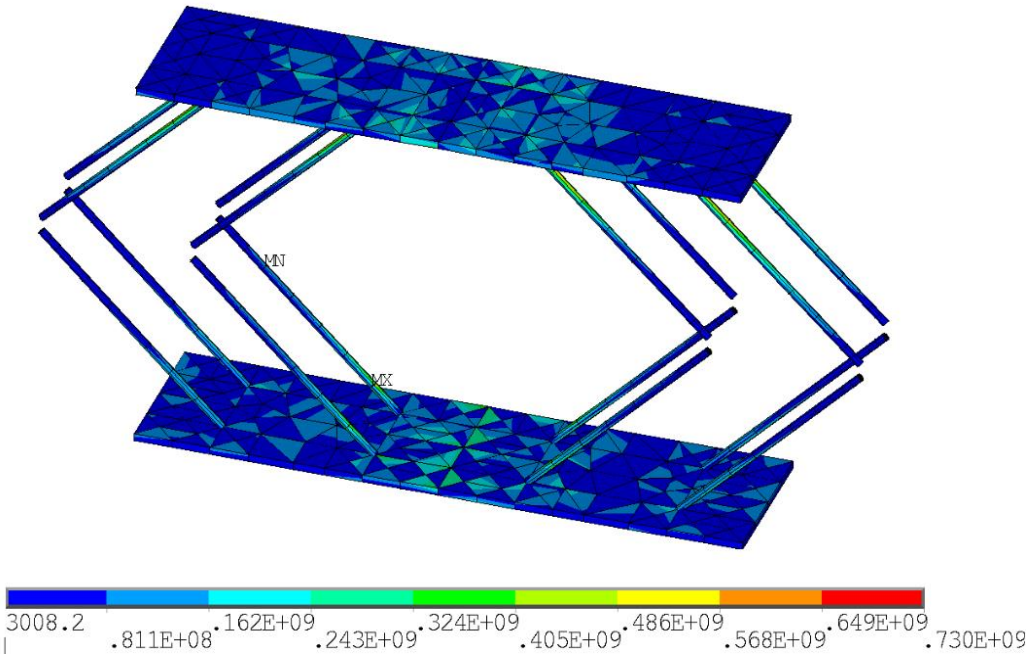


Рисунок 11. Изополя распределения напряжений соединительных деталях.

Наиболее ответственным является стык сопряжения нагель-накладка в растянутой (нижней) зоне конструкции.

Экспериментальные и теоретические данные показывают, что применение композитных материалов, инертных к коррозионным процессам, в ряде случаев является наиболее целесообразным [14, 15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашеварова Г.Г., Водянников М.А.** Численное и экспериментальное моделирование жесткого стыка слоистых деревянных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 2, 2017, pp. 84-92.
2. **Vodiannikov M., Kashevarova G.** Analysis of Wood Structure Connections Using Cylindrical Steel and Carbon Fiber Dowel Pins. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2017, Vol. 205.
3. **Калугин А.В.** Деревянные конструкции. – М.: АСВ, 2008. – 286 с.
4. СП 64.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП II-25-80 «Деревянные конструкции». – М: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2011.

5. **Басов К.А.** ANSYS в примерах и задачах. – М: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с.
6. **Lennartz M., Jacob-Freitag S.** New Architecture in Wood: Forms and Structures. Birckhauser, 2016.
7. **Арленинов Д.К.** Конструкции из дерева и пластмасс. – М.: АСВ, 2002.
8. **Хрулев В.М.** Деревянные конструкции и детали. – М.: Стройиздат, 1983. – 288 с.
9. **Перепелкин К.Е.** Химические волокна: развитие производства, методы получения, свойства, перспективы – СПб.: Издание СПГУТД, 2008. – 354 с.
10. **Мэттьюз Ф., Ролингс Р.** Композитные материалы. Механика и технология. – М.: Техносфера, 2004. – 408 с.
11. **Симамура С.** Углеродные волокна. – М.: Мир, 1987.
12. **Gugutsidze G., Draskovic F.** Reinforcement of Timber Beams With Carbon Fibers Reinforced Plastics. // Slovak Journal of Civil Engineering, 2010, No. 2, pp. 1-6.
13. **Гаппоев М.М.** Конструкции из дерева и пластмасс. – М.: АСВ, 2004. – 440 с.
14. High Performance Carbon Fibers. American Chemical Society National Historic Chemical Landmarks. Ohio: GrafTech International, 2003.
15. Дорожная карта «Использование нанотехнологии в производстве углеродных волокон и продуктов на их основе». – М.: ГК «РОСНАНОТЕХ», 2010.
16. **Параничева Н.В., Назмеева Т.В.** Усиление строительных конструкций с помощью углеродных композиционных материалов. // Инженерно-строительный журнал, 2010, №2, с. 19-22.

REFERENCES

1. **Kashevarova G.G., Vodiannikov M.A.** Chislennoe i Eksperimental'noe Modelirovanie Zhestkogo Styka Sloistykh Dereviannykh Konstruktsii. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 2, pp. 84-92.
2. **Vodiannikov M., Kashevarova G.** Analysis of Wood Structure Connections Using Cylindrical Steel and Carbon Fiber Dowel Pins. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2017, Vol. 205.
3. **Kalugin A.V.** Dereviannye Konstruktsii [Wood Structure]. Moscow, ASV Publishing House, 2008, 286 pages.
4. SP 64.13330.2011. Aktualizirovannaia redaktsiia SNiP II-25-80 «Dereviannye konstruktsii» [Updated version of SNiP II-25-80 "Wooden structures"]. Moscow, TsNIISK im. V.A. Kucherenko, 2011.
5. **Basov K.A.** ANSYS v Primerakh i Zadachakh [ANSYS in examples and tasks]. Moscow, Computer Press, 2002, 224 pages.
6. **Lennartz M., Jacob-Freitag S.** New Architecture in Wood: Forms and Structures. Birckhauser, 2016.
7. **Arleninov D.K.** Konstruktsii iz Dereva i Plastmass [Structures from Wood and Plastics]. Moscow, ASV Publishing House, 2002.
8. **Khrulev V.M.** Dereviannye Konstruktsii i Detali [Wooden Structures and Devices]. Moscow, Stroiizdat, 1983, 288 pages.
9. **Perepelkin K.E.** Khimicheskie Volokna: Razvitie Proizvodstva, Metody Polucheniia, Svoistva, Perspektivy [Chemical Fibers: Development of Production, Methods of production, Properties, Prospects]. Saint-Petersburg, SPGUTD, 2008, 354 pages.
10. **Mett'iuz F., Rolings R.** Kompozitnye Materialy. Mekhanika i Tekhnologiia [Composite Materials. Mechanics and Technology]. Moscow, Tekhnosfera, 2004, 408 pages.
11. **Simamura S.** Uglerodnye volokna [Carbon fibers]. Moscow, Mir, 1987.
12. **Gugutsidze G., Draskovic F.** Reinforcement of Timber Beams With Carbon Fibers Reinforced Plastics. // Slovak Journal of Civil Engineering, 2010, No. 2, pp. 1-6.
13. **Gappoev M.M.** Konstruktsii iz Dereva i Plastmass [Structures from Wood and Plas-

tics]. Moscow, ASV Publishing House, 2004, 440 pages.
14. High Performance Carbon Fibers. American Chemical Society National Historic Chemical Landmarks. Ohio: GrafTech international, 2003.
15. Dorozhnaia Karta “Ispol'zovanie Nanotekhnologii v Proizvodstve Uglerodnykh Volokon i Produktov na Ikh Osnove” [Road Map “Use of Nano-Technology in the Production of Carbon Fibers and Products Based on Them”]. Moscow, GK “ROSNANOTEKh”, 2010
16. **Paranicheva N.V., Nazmeeva T.V.** Usilenie Stroitel'nykh Konstruktsii s Pomoshch'iu Uglerodnykh Kompozitsionnykh Materialov [Strengthening of Building Structures with the Use of Carbon Composite Materials]. // Magazine of Civil Engineering, 2010, No. 2, pp. 19-22.

Водянников Михаил Алексеевич, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета; 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29;
тел./факс: +7 (342) 2-198-361;
E-mail: vodyannikov@mail.ru.

Mikhail A. Vodiannikov, Ph.D. Student of the Department of Building constructions and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990,Russian Federation; phone/fax: +7 (342) 2-198-361;
E-mail: vodyannikov@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-57-64

LOCAL MINIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMIZATION PROBLEMS WITH DIFFERENT TYPES OF CONTROL SYSTEMS SUBJECT TO MIXED STATE-CONTROL CONSTRAINTS

Andrey V. Dmitruk [1, 2], ***Nikolay P. Osmolovskii*** [3, 4, 5]

[1] Russian Academy of Sciences, CEMI, Moscow, RUSSIA
[2] Lomonosov Moscow State University, Moscow, RUSSIA
[3] University of Technology and Humanities in Radom, Radom, POLAND
[4] Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences Warszawa, POLAND
[5] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper discusses the first-order optimality conditions for optimal control problems with two different types of control systems, considered on a fixed time interval: systems of ordinary differential equations and systems of Volterra-type integral equations.

Keywords: integral equation, control system, mixed constraints, local minimum principle, weak minimum, stationarity conditions

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ФАЗУ И СОСТОЯНИЕ

А.В. Дмитрук [1, 2], ***Н.П. Осмоловский*** [3, 4, 5]

[1] Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, РОССИЯ
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, РОССИЯ
[3] Университет технологий и естественных наук, г. Радом, ПОЛЬША
[4] Институт системных исследований, Польская академия наук, г. Варшава, ПОЛЬША
[5] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются условия оптимальности первого порядка для задач оптимального управления с двумя различными типами управляемых систем, рассматриваемых на фиксированном отрезке времени: системами обыкновенных дифференциальных уравнений и системами интегральных уравнений типа Вольтерра.

Ключевые слова: интегральное уравнение, управляемая система, смешанные ограничения, локальный принцип минимума, слабый минимум, условия стационарности

1. INTRODUCTION

The aim of this paper is to observe some results on the first-order optimality conditions for a weak local minimum, for control problems with two different types of control systems, considered on a fixed time interval, subject to mixed state-control constraints. We will consider problems with systems of ordinary differential equations (ODEs), and with systems of Volterra-type nonlinear integral equations. We will show that the appropriate definition of the Pontryagin function allows to give very similar formulations of the optimality conditions for these two types of systems. The proofs of the observed results

could be based on one and the same abstract Lagrange multipliers rule.

Let us note that necessary conditions for the weak local minimum in optimal control problems constitute an important stage in derivation of any further necessary optimality condition, including maximum principle or higher order conditions, and thus, they deserve a separate thorough study for each specific class of problems, like it is done in the classical calculus of variations. This is why we focus on these conditions. Following the tradition, we call them *stationarity conditions* (or *local minimum principle*).

The paper is organized as follows. In Section 2 we formulate first-order necessary optimality conditions for problems with ordinary differential equations. Section 3 gives such conditions for problems with Volterra-type integral equations. Finally in Section 4 we present an abstract Lagrange multipliers rule, used for the proofs.

2. OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A FIXED TIME INTERVAL

2.1. Statement of the problem (Problem A)

We consider the following control system of ordinary differential equations on a fixed time interval $[t_0, t_1]$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

where $x(\cdot)$ is an absolutely continuous $n-$ dimensional and $u(\cdot)$ a measurable essentially bounded $r-$dimensional vector-function on $[t_0, t_1]$. We call x the *state* variable and u the *control* variable (or simply the *control*). We assume that the function f is continuous together with its partial derivatives with respect to x and u on an open set $Q \subset \mathrm{I}R^{1+n+r}$.

The problem is to minimize the *Bolza-type* cost functional

$$J = \varphi_0(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_0(t, x(t), u(t))dt \to \min \tag{2}$$

on the set of solutions of system (1) satisfying the *Bolza-type constraints*

$$\eta_j(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Psi_j(t, x(t), u(t))dt = 0, \ j = 1, \ldots, d(\eta), \tag{3}$$

$$\phi_i(x(t_0), x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_i(t, x(t), u(t))dt = 0, \ i = 1, \ldots, d(\phi), \tag{4}$$

and the *mixed state-control constraints*

$$F_i(t, x(t), u(t)) \le 0 \quad \text{for a.e. } t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \ldots, d(F), \tag{5}$$

$$G_j(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \text{for a.e. } t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \ldots, d(G), \tag{6}$$

where the functions $\varphi_0, \varphi_i, \eta_j$ are defined and continuously differentiable on an open set $P \subset \mathrm{I}R^{2n}$, and the functions Φ_i, Ψ_j, F_i, G_j are defined and continuous together with their partial derivatives with respect to x and u on an open set $Q \subset \mathrm{I}R^{1+n+r}$. The notation $d(\varphi), d(\eta), d(F)$, etc. stand for the numbers of these functions.

Moreover, we impose the following important **Assumption RMC (on the regularity of mixed constraints).** The mixed constraints (5)-(6) are *regular* in the following sense: at any point $(t, x, u) \in Q$ satisfying relations $F_i \leqq 0 \ \forall i$ and $G_j = 0 \ \forall j$, the system of vectors

$$F'_{iu}(t, x, u), \quad i \in I(t, x, u), \ G'_{ju}(t, x, u), \ j = 1, \ldots, d(G),$$

is *positively--linearly independent*, where $I(t, x, u) = \{i : F_i(t, x, u) = 0\}$ is the set of active

indices of mixed inequality constraints at the given point.

Recall that a system consisting of two tuples of vectors $p_1,\dots,p_m$ and $q_1,\dots q_k$ in the space $\mathrm{I}R^r$ is said to be *positively-linearly independent* if there does not exist a nontrivial tuple of multipliers $\alpha_1,\dots,\alpha_m, \beta_1,\dots\beta_k$ with all $\alpha_i \geq 0$ such that

$$\sum_i \alpha_i p_i + \sum_j \beta_j q_j = 0.$$

The problem (1)-(6) will be called *Problem A*.

Obviously, each pair $(x(t),u(t))$ under consideration must "lie" in the domain Q of the function $f(t,x,u)$, i.e.

$$(t,x(t),u(t)) \in Q \quad for\ a.e. \quad t \in [t_0,t_1].$$

We will need even a stronger condition.

Definition. A pair of functions $w(t) = (x(t),u(t))$ defined on an interval $t \in [t_0,t_1]$ (with absolutely continuous $x(t)$ and measurable essentially bounded $u(t)$) will be called *a process* in Problem A if it satisfies (1) and its graph

$$G(w) = \{(t,x(t),u(t)) \mid t \in [t_0,t_1]\}$$

lies in the set Q with some "margin", i.e.,

$$\begin{aligned} &dist((t,x(t),u(t)),\partial Q) \geq const > 0 \\ &for\ a.a.\ t \in [t_0,t_1], \end{aligned} \tag{7}$$

or equivalently, there exists a compact set $\Omega \subset Q$ such that $(t,x(t),u(t)) \in \Omega$ for a.a. $t \in [t_0,t_1]$. A process in problem A is called *admissible* if it satisfies all the constraints of the problem.

Definition. We will say that an admissible process

$$w^0(t) = (x^0(t),u^0(t)), \quad t \in [t_0,t_1] \tag{8}$$

provides *the weak minimum* if there exists an $\varepsilon > 0$ such that for any admissible process $w(t) = (x(t),u(t)), \quad t \in [t_0,t_1]$, satisfying the conditions

$$\begin{aligned} &|x(t) - x^0(t)| < \varepsilon \quad \forall t, \\ &and \quad |u(t) - u^0(t)| < \varepsilon \quad (\forall)t, \end{aligned} \tag{9}$$

the following inequality holds: $J(w) \geq J(w^0)$.

(Notation $(\forall)$ conveniently means "for almost all".)

2.2. The local minimum principle in Problem A

Let a process (8) provide the weak minimum in Problem A. To formulate optimality conditions, let us introduce a tuple of Lagrange multipliers corresponding to all the constraints and the cost of Problem A:

$$\begin{aligned} &(\alpha,\ \beta,\ \psi(t),\ h_i(t),\ m_j(t)), \\ &i = 1,\dots,d(F),\ j = 1,\dots,d(G), \end{aligned} \tag{10}$$

where $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{d(\varphi)}) \in \mathrm{I}R^{d(\varphi)+1}$ with $\alpha_i \geq 0\ \ \forall i$ (for short, we will simply write $\alpha \geq 0$), and $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_{d(\eta)}) \in \mathrm{I}R^{d(\eta)}$ are vectors, $\psi : [t_0,t_1] \to \mathrm{I}R^n$ is a Lipschitz continuous function,

$$\begin{aligned} h_i :&\ \ [t_0,t_1] \to \mathrm{I}R_+,\ i = 1,\dots,d(F), \quad and \\ m_j :&\ \ [t_0,t_1] \to \mathrm{I}R,\ j = 1,\dots,d(G), \end{aligned}$$

are measurable bounded functions.

Further, introduce the *Pontryagin function* (or *pre-Hamiltonian*)

$$\begin{aligned} &H(t,x,u) = \psi f(t,x,u) + \\ &+ \sum_{i=0}^{d(\varphi)} \alpha_i \Phi_i(t,x,u) + \sum_{j=1}^{d(\eta)} \beta_j \Psi_j(t,x,u) \end{aligned} \tag{11}$$

(here, ψf is the product of the row and column $n-$vectors), and the *augmented Pontryagin function* (or *augmented pre-Hamiltonian*)

$$\overline{H}(t,x,u) = H(t,x,u) + \\ + \sum_i h_i F_i(t,x,u) + \sum_j m_j G_j(t,x,u). \quad (12)$$

Also, introduce the *endpoint Lagrange function*

$$l(x_0,x_1) = (\sum_{i=0}^{d(\varphi)} \alpha_i \varphi_i + \sum_{j=1}^{d(\eta)} \beta_j \eta_j)(x_0,x_1). \quad (13)$$

Both these functions refer to the tuple (10).
The functions $H, \overline{H}, l$ will be used in formulation of optimality conditions.
For the process (8) and tuple (10) with the specified properties, let us formulate the conditions of *local minimum principle* (or the *stationarity conditions*):
a) the nonnegativity conditions

$$\alpha \geq 0, \quad h_i(t) \geq 0, \quad i = 1,\dots,d(F), \quad (14)$$

b) the nontrivality condition

$$|\alpha| + |\beta| + \sum_i \int_{t_0}^{t_1} h_i(t)dt > 0, \quad (15)$$

c) the complementary slackness conditions

$$\alpha_i(\phi_i(x^0(t_0),x^0(t_1)) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_i(t,x^0(t),u^0(t))dt) = 0, \\ i = 1,\dots,d(\varphi), \quad (16)$$

d) the pointwise complementary slackness conditions

$$h_i(t)F_i(t,x^0(t),u^0(t)) = 0 \quad a.e. \quad on\ [t_0,t_1], \\ i = 1,\dots,d(F), \quad (17)$$

e) the adjoint equation

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} = \overline{H}_x(t,x^0(t),u^0(t)),$$

f) the transversality conditions

$$\psi(t_0) = -l_{x_0}(x^0(t_0),x^0(t_1)), \\ \psi(t_1) = l_{x_1}(x^0(t_0),x^0(t_1)), \quad (18)$$

g) the stationarity condition of the extended Pontryagin function with respect to the control

$$\overline{H}_u(t,x^0(t),u^0(t)) = 0 \qquad a.e. \quad on \quad [t_0,t_1].$$

The main result of this section is the following
Theorem 1. *If a process* $w^0(t) = (x^0(t),u^0(t))$, $t \in [t_0,t_1]$ *provides the weak minimum in Problem A and satisfies assumption RMC, then there exists a tuple of multipliers* $(\alpha,\beta,\psi,h_i,m_j)$ *satisfying the specified above properties and such that conditions a) - g) of the local minimum principle hold true.*
The proofs can be found in the book [3]. This book also contains further results of that kind, namely: the first-order conditions for a *strong* local minimum in the form of Pontryagin minimum principle. Moreover, along with regular mixed state-control constraints, the problem can also allow pure state constraints, and the time interval can be both fixed and variable.

3. OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH VOLTERRA-TYPE INTEGRAL EQUATIONS ON A FIXED TIME INTERVAL

3.1. Statement of the problem (Problem B)

We consider the following control system of Volterra-type integral equations on a fixed time interval $[t_0,t_1]$:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s))ds, \quad (19)$$

where $x(\cdot)$ is a continuous $n-$dimensional and $u(\cdot)$ a measurable essentially bounded $r-$dimensional vector-function on $[t_0,t_1]$. Again, we call x the *state* variable and u the *control* variable. We assume for simplicity that the function f is defined and *twice continuously differentiable* on an open set $R \subset \mathrm{I}R^{2+n+r}$.

The problem is to minimize the Bolza-type cost functional (2) on the set of solutions of system (19) satisfying the Bolza-type constraints (3), (4) and the mixed state-control constraints (5), (6), where the functions $\varphi_0,\varphi_i,\eta_j$ are defined and continuously differentiable on an open set $P \subset \mathrm{I}R^{2n}$, and the functions Φ_i,Ψ_j,F_i,G_j are defined and continuously differentiable on an open set $Q \subset \mathrm{I}R^{1+n+r}$.

Again, we impose the assumption RMC (on the regularity of mixed constraints), given in Section 2.1. The problem (2)-(6), (19) will be called *Problem B*.

Note that the function f explicitly depends on two time variables, t and s, the roles of which are essentially different. Conventionally, the variable s will be called *inner*, while t will be called *outer*, time variable, and one should carefully distinguish between them in further considerations. Among the four arguments of the function f and its derivatives, the first argument will always be the outer and the second one the inner time variable, no matter by which letters they will be denoted.

Note also that the integral equation (19) is equivalent to the following integro-differential equation:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,t,x(t),u(t)) + \\ + \int_{t_0}^{t} f_t(t,s,x(s),u(s))ds, \qquad (20)$$

where the last integral shows, in a sense, how ``far'' we are from an ordinary differential equation. (Here f_t means the partial derivative of the function $f(t,s,x,u)$ with respect to the first, outer time variable t.) If f does not depend on the outer time t, i.e., $f = f(s,x(s),u(s))$, then this integral disappears, and Problem B becomes a standard optimal control problem with the ODE

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),u(t)).$$

Obviously, each pair $(x(t),u(t))$ under consideration must ``lie'' in the domain R of the function $f(t,s,x,u)$, i.e.

$$(t,s,x(s),u(s)) \in R \quad fora.e. \quad (t,s) \in D[t_0,t_1],$$

where $D[t_0,t_1] = \{(t,s): t_0 \leq s \leq t \leq t_1\}$. Again, we will need even a stronger condition.

Definition. A pair of functions $w(t) = (x(t),u(t))$ defined on an interval $t \in [t_0,t_1]$ (with continuous $x(t)$ and measurable essentially bounded $u(t)$) will be called *a process* in Problem B if it satisfies (19) and its "extended graph"

$$G(w) = \{(t,s,x(s),u(s)): (t,s) \in D[t_0,t_1]\}$$

lies in the set R with some "margin"', i.e.,

$$dist((t,s,x(s),u(s)),\partial R)\, const > 0 \\ fora.a. \ (t,s) \in D[t_0,t_1], \qquad (21)$$

or equivalently, there exists a compact set $\Omega \subset R$ such that $(t,s,x(s),u(s)) \in \Omega$ for a.a. $(t,s) \in D[t_0,t_1]$. A process in problem B is called *admissible* if it satisfies all the constraints of the problem.

The notion of a weak local minimum in Problem B is the same as that in Problem A.

3.2. The local minimum principle in Problem B

Let a process

$$w^0(t) = (x^0(t),u^0(t)), \quad t \in [t_0,t_1]$$

provide the weak minimum in Problem B.

To formulate optimality conditions, let us introduce a tuple (10) of Lagrange multipliers corresponding to all the constraints and the cost of Problem B:

$$(\alpha, \beta, \psi(t), h_i(t), m_j(t)),$$
$$i = 1,\dots,d(F),\ j = 1,\dots,d(G),$$

where, as in Section 2.2, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(\varphi)}) \in \mathrm{I\!R}^{d(\varphi)+1}$ with $\alpha_i \ge 0\ \ \forall i$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{d(\eta)}) \in \mathrm{I\!R}^{d(\eta)}$ are vectors, $\psi : [t_0, t_1] \to \mathrm{I\!R}^n$ is a Lipschitz continuous function, (ψ is a row $n-$vector),

$$h_i : [t_0, t_1] \to \mathrm{I\!R}_+,\ i = 1,\dots,d(F), \quad \text{and}$$
$$m_j : [t_0, t_1] \to \mathrm{I\!R},\ j = 1,\dots,d(G),$$

are measurable bounded functions. In what follows, all pointwise relations involving continuous functions hold for any t, and those involving measurable functions hold for almost all t.

Further, introduce the *modified Pontryagin function*

$$H(t,s,x,u) = \psi(t) f(t,s,x,u) + \int_t^{t_1} \psi(\tau) f_t(\tau,s,x,u)\, d\tau + \sum_{i=0}^{d(\varphi)} \alpha_i \Phi_i(s,x,u) + \sum_{j=1}^{d(\eta)} \beta_j \Psi_j(s,x,u) \qquad (22)$$

and the *augmented* (or *extended*) *modified Pontryagin function*

$$\overline{H}(t,s,x,u) = H(t,s,x,u) + \sum_i h_i(t) F_i(s,x,u) + \sum_j m_j(t) G_j(s,x,u). \qquad (23)$$

Again, introduce the *endpoint Lagrange function* (13). Both these functions refer to the tuple (10). In Problem B, for the process (8) and tuple (10) with the specified properties, let us formulate the conditions of *local minimum principle* (or the *stationarity conditions*): a') the nonnegativity conditions (14), b') the nontrivality condition (15), c') the complementary slackness conditions (16), d') the pointwise complementary slackness conditions (17), e') the adjoint equation

$$-\dot\psi(t) = \overline{H}_x(t,t,x^0(t),u^0(t)),$$

f') the transversality conditions (18), g') the stationarity condition of the extended Pontryagin function with respect to the control

$$\overline{H}_u(t,t,x^0(t),u^0(t)) = 0 \qquad a.e.on \quad [t_0,t_1].$$

The main result of this section is the following

T*heorem* 2. *If a process* $w^0(t) = (x^0(t), u^0(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ *provides the weak minimum in Problem B and satisfies assumption RMC, then there exists a tuple of multipliers* $(\alpha, \beta, \psi, h_i, m_j)$ *satisfying the specified above properties and such that conditions a')--g') of the local minimum principle hold true.*

The proof of this theorem (for a more general problem, with pure state constraints) is given in [4].

In the next section we formulate an abstract Lagrange multiplies rule which can be used for the proofs of Theorems q1 and 2.

4. AN ABSTRACT LAGRANGE MULTIPLIERS THEOREM

Let X, Y, and Z_i, $i = 1,\dots,\nu$ be Banach spaces, $D \subset X$ an open set, and $K_i \subset Z_i$, $i = 1,\dots,\nu$ closed convex cones with nonempty interiors.

Let $F_0 : D \to \mathrm{I\!R}$, $g : D \to Y$, and $f_i : D \to Z_i$,

$i = 1,\dots,\nu$, be given mappings. Consider the following optimization problem:

$$F_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) \in K_i, \quad i = 1,\dots,\nu, \qquad g(x) = 0. \qquad (24)$$

Let $K_i^0 := \{z_i^* \in Z_i^* : \langle z_i^*, z_i \rangle \square 0 \; for every z_i \in K_i\}$ be the polar cone to K_i, $i = 1,\ldots,\nu$. Here $\langle z_i^*, z_i \rangle$ is the duality pairing between Z_i and its dual space Z_i^*. We study the local minimality of an admissible point $x^0 \in D$.

It is worth noting that the inequality constraints $f_i(x) \leq \square 0$, where $f_i : D \to \mathrm{I}R$ are given functionals, may also be presented in the form $f_i(x) \in K_i$ if we put $K_i = \mathrm{I}R_- := (-\infty, 0]$. Then $K_i^0 = \mathrm{I}R_+ := [0, \infty)$.

We impose the following

Assumptions.

1. The objective function F_0 and the mappings f_i are Fréchet differentiable at x_0; the operator g is has a Frechet derivative in a neighborhood of x_0 and this derivative is continuous at x_0 (smoothness of the data functions),
2. the image of the derivative $g'(x_0)$ is closed in Y (weak regularity of equality constraint).

The following theorem gives necessary conditions for a point $x_0 \in D$ to be a local minimizer for problem (24).

Theorem 3. *Let x_0 provide a local minimum in problem (24). Then there exist Lagrange multipliers*

$$\alpha_0 \geq 0,\ z_i^* \in K_i^0,\ i = 1,\ldots,\nu,\ \text{and}\ y^* \in Y^*,$$

satisfying the nontriviality condition

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{\nu} \left\| z_i^* \right\| + \left\| y^* \right\| > 0, \qquad (25)$$

the complementary slackness conditions

$$\langle z_i^*, f_i(x_0) \rangle = 0, \qquad i = 1, \ldots, \nu, \qquad (26)$$

and such that the Lagrange function

$$L(x) = \alpha_0 F_0(x) + \sum_{i=1}^{\nu} \langle z_i^*, f_i(x) \rangle + \langle y^*, g(x) \rangle$$

is stationary at x_0: $L'(x_0) = 0$. i.e.,

$$\alpha_0 F_{0'}(x_0) + \sum_{i=1}^{\nu} \langle z_i^*, f_{i'}(x_0) \rangle + \langle y^*, g'(x_0) \rangle = 0. \qquad (27)$$

This theorem is an efficient tool for a wide range of optimization problems with an infinite number of constraints. Its proof, based on the so-called Dubovitskii--Milyutin approach [1], can be found in [3,4,5].

In a particular case when $Y = \mathrm{I}R^n$, Assumption 2 is valid automatically, and $y^* = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ is an $n-$dim vector.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research under grant 16-01-00585.

REFERENCES

1. **Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A.** Extremum Problems in the Presence of Restrictions. // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., USSR Comput. Math. and Math. Phys., 1965, 5(3), pp. 1-80.
2. **Afanasjev A.P., Dikusar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A.** Nieobhodimoe Uslovie v Optimalnom Upravlenii. Moscow, Nauka, 1990.
3. **Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** Princip Maksimuma v Optimal'nom Upravlenii [Maximum Principle in Optimal Control]. Moscow, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 2004 (in Russian), 168 pages.
4. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** Necessary Conditions for a Weak Minimum

in Optimal Control Problems with Integral Equations Subject to State and Mixed Constraints. // SIAM J. on Control and Optimization, 2014, Volume 52, pp. 3437-3462.
5. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** A General Lagrange Multipliers Theorem and Related Questions, Springer (submitted).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A.** Extremum Problems in the Presence of Restrictions. // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., USSR Comput. Math. and Math. Phys., 1965, 5(3), pp. 1-80.
2. **Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В.** Необходимое условие в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
3. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. – 168 с.
4. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** Necessary Conditions for a Weak Minimum in Optimal Control Problems with Integral Equations Subject to State and Mixed Constraints. // SIAM J. on Control and Optimization, 2014, Volume 52, pp. 3437-3462.
5. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** A General Lagrange Multipliers Theorem and Related Questions, Springer (submitted).

Andrey V. Dmitruk, Professor, Dr.Sc., Russian Academy of Sciences, CEMI, Moscow, Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
E-mail: dmitruk@member.ams.org

Nikolay P. Osmolovski, Professor, Dr.Sc., University of Technology and Humanities in Radom, Poland; Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences Warszawa, Poland; National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia;
тел. +7(499)183-59-94; e-mail: osmolovski@uph.edu.pl.

Дмитрук Андрей Венедиктович, профессор, доктор физико-математических наук; профессор кафедры оптимального управления Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического институт Российской академии наук;
E-mail: dmitruk@member.ams.org.

Осмоловский Николай Павлович, профессор, доктор физико-математических наук; профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; phone +7(499)183-59-94;
E-mail: osmolovski@uph.edu.pl.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-65-77

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ОБРАЗЦОВ НАРУЖНЫХ СТЕНОВЫХ ОГРАЖДЕНИЙ

С.В. Федосов [1], П.Н. Муреев [2], В.Г. Котлов [2], А.Н. Макаров [2], А.В. Иванов [2]

[1] Ивановский государственный политехнический университет, г. Иваново, РОССИЯ

[2] Поволжский государственный технологический университет, г. Йошкар-Ола, РОССИЯ

Аннотация: В статье обсуждается область гражданского строительства и объектом рассмотрения является теплопроводность наружных стен. Ключевая идея заключается в представлении автоматизированного лабораторного комплекса. Этот комплекс может производить непрерывный контроль изменения температуры по всей толщине стены в течение длительного времени. Для этого в каждый образец установлены термопары на разную глубину. Температурные данные регистрируются специальным прибором. Далее данные через адаптер интерфейса попадают в компьютер. Непрерывно поступающая информация формируется в базу данных. После этого они обрабатываются в виде таблиц и графиков. С помощью установки исследуют различные строительные материалы для наружных стен, которые представлены предприятиями Республики Марий Эл. Для обработки и анализа полученных данных был разработан математический алгоритм. С его помощью написана компьютерная программа. Она сделала обработку данных очень простой. Благодаря полученным данным были предложены новые конструктивные решения наружных стен. Также были открыты два физических эффекта. Данный комплекс разработан для научно-исследовательской работы. Разработка была представлена на различных международных выставках инноваций и изобретений. Исследования по данной теме важны для строительной и производственной отрасли Республики Марий Эл. Материал, представленный в статье, может открыть новые перспективы для дальнейших исследований. Этот материал будет интересен тем, кто работает в области архитектуры и проектирования зданий и сооружений.

Ключевые слова: гражданское строительство, наружные стены, проектирование зданий, автоматизация исследований, теплофизика, теплопроводность, математический алгоритм, компьютерное моделирование

AUTOMATION OF THERMOPHYSICAL RESEARCHES SAMPLES EXTERIOR WALL FENCES

Sergej V. Fedosov [1], Pavel N. Mureev [2], Vitalij G. Kotlov [2], Aleksandr N. Makarov [2], Andrej V. Ivanov [2]

[1] Ivanovo State Politechnical University, Ivanovo, RUSSIA

[2] Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, RUSSIA

Abstract: The paper under discussion covers the area of civil engineering and deals with the object of thermal conductivity of exterior walls. The key idea is to present an automated laboratory complex. This complex can produce continuous monitoring of temperature changes over all wall thickness for a long time. For this, thermocouples are placed in each sample at different depths. A special device records temperature data. Further, the data through the interface adapter enters the computer. The continuously incoming information is generated in the database. After that, they are processed in the form of tables and graphs. With the help of the installation, various building materials for exterior walls, which are represented by enterprises of the Republic of Mari El, are examined. To process and analyze the data obtained, a mathematical algorithm was developed. With his help, a computer program written. She made the data processing very simple. Thanks to the received data, new design solutions for exterior walls were proposed. Two physical effects were also discovered. This complex is designed for research work. The development was presented at various international exhibitions of innovations and inventions. Research on this topic are important for the construction and production branches of the Republic of Mari El. The material presented can open new prospects for further research. this material to be interesting to those who work in the field of structural engineering and architecture.

Keywords: civil engineering; exterior walls, design of building, automation of research, thermophysics, thermal conductivity, mathematical algorithm, computer modeling

Применение вычислительной техники настолько прочно вошло в нашу жизнь, что уже не кажется чем-то необычным и новым. Почти во всех сферах деятельности человека она занимает важную и неотъемлемую часть. Это управление производственными процессами, транспортом, связью, строительством, лечением пациентов и многое другое. Современное общество настолько привыкло к компьютерам и другой мобильной технике, что уже не может отказаться от неё. Но еще каких-то 30-40 лет назад многие современные достижения казались нереальными, фантастическими, недосягаемыми.

Говорить об изменениях в жизни людей, которые произошли с внедрением компьютерной техники, в лучшую или худшую сторону еще рано, но безусловно с точки зрения сбора, хранения и обработки массивов информации это огромное достижение. Благодаря созданию систем автоматизированного проектирования (САПР) в области строительства произошли огромные изменения, причем в лучшую сторону [1, 2, 5, 13]. В разы увеличилась скорость разработки проектной документации, 3D моделирование позволило улучшить качество проектирования и сделало его более информативным и реалистичным. Но это всё относится к области прямого проектирования. Нас интересует область теплофизических исследований ограждающих конструкций стен и автоматизация сбора и обработка полученных данных.

На сегодняшний день при возведении стеновых ограждающих конструкций используют как обычные однородные материалы, так и различные многослойные конструкции. Их спектр на строительном рынке очень велик. Производители предоставляют различные сертификаты о хороших теплозащитных качествах материалов, но на практике это не всегда так.

В связи с повышением требований в области энергоэффективности ограждающих конструкций, возникает много вопросов при проектировании новых объектов и реконструкции уже существующих. Новые разработанные конструктивные решения не всегда эффективны. На начальном этапе первые два-три года после возведения, они могут соответствовать всем необходимым требованиям. Но в процессе эксплуатации здания стена накапливает влагу. Это приводит к оседанию и намоканию утеплителя, тем самым в разы снижая параметры по теплозащите здания. Такие воздействия могут привести к печальным последствиям, вплоть до разрушения конструкций. В результате необходимо проводить реконструкцию, затрачивая на это огромные денежные средства. Многие существующие постройки 60-90х годов не соответствуют современным требованиям по теплозащите. Поэтому необходимо проводить реконструкцию зданий, но без полного анализа существующей ситуации, происходящей в стенах, сложно сделать правильные выводы и провести грамотно и эффективно работу [11-12].

Цель исследования заключается в анализе теплозащитных свойств образцов стеновых ограждений при помощи разработанного лабораторного комплекса, который функционирует в климатических условиях Республики Марий Эл; разработке алгоритма обработки и анализа получаемых температурных данных; в написании с помощью разработанного алгоритма компьютерной программы; в разработке новых энергоэффективных конструктивных схем наружных стеновых ограждений, а также улучшении свойств существующих вариантов.

Данная разработка рассчитана в основном на научно-исследовательскую работу, а главным требованием является сбор данных с устройств, подключенных к сети Интернет, а также представление этих данных в виде отчетов и графиков, доступных в сети Интернет.

В поставленные задачи входит получение наиболее полной и достоверной информации по теплозащитным качествам наружных ограждений, проводя как можно более длительные натурные экспериментальные исследования; модернизация лабораторного комплекса, созданного на базе института строительства и архитектуры ФГБОУ ВО «ПГТУ». Основная задача сделать его полностью автоматизированным и решить проблему, связанную с долгосрочностью проведения мониторинга изменения температур в толще ограждения (рис. 1).



Рисунок 1. Развернутая схема автоматизированного лабораторного комплекса.

В лаборатории строительной физики установлен стенд с пятью образцами материалов стеновых ограждающих конструкций. В каждый из пяти материалов: деревянный брус, многослойная конструкция производство фирмы «Стезя», многослойная конструкция из бетона и утеплителя, газобетонные блоки фирмы «Bikton», кирпичная стена толщиной 640 мм., установлены термопары по всей толщине материала. С их помощью определяются данные об изменении температуры в стене. Образцы исследуемых ограждений установлены в специальных ячейках, оборудованных в ограждающей конструкции здания корпуса ПГТУ и допускающих возможность замены.

В течение нескольких лет лабораторный комплекс претерпевал ряд изменений и дополнений. Все модификации были защищены патентами [5-10]. Первые результаты эксперимента, полученные на лабораторной установке, подтвердили ее работоспособность. Непрерывно поступающая информация с приборов обрабатывается в виде таблиц и графиков.

В процессе разработки комплекса возникла проблема связанная с обработкой данных. На начальном этапе обработка значений производилась вручную. Сначала все значения необходимо было отсортировать из базы данных, а потом уже в программе Excel их обработать и получить необходимые графики и диаграммы. Процесс был долгий и трудоемкий. При этом могли возникнуть погрешности и неточности. В результате появилась необходимость автоматизировать исследования. Разработанный математический алгоритм стал основой для написания компьютерной программы. Она позволила автоматизировать комплекс и в режиме реального времени проводить круглогодичный мониторинг изменения температуры по всей толщине ограждений. В интерфейсе программы можно производить настройку термопар, добавлять новые материалы. Данные по изменению температуры в исследуемом образце в течении дня можно просматривать поочередно в режиме реального времени (рис. 2). Также есть возможность выбирать интересующий временной промежуток для анализа и более подробного изучения и наблюдения (рис.3). Имеется доступ ко всем данным, накопившимся за весь период создания комплекса. Это дает возможность анализировать процессы, происходившие в разные годы и сравнивать показания.

Благодаря полученным данным, были открыты два физических эффекта (рис. 4). Это «Способ оценки теплофизических характеристик ограждающих конструкций зданий и сооружений, выполненных из кирпича, в зимний период по результатам испытаний в натурных условиях» патент на изобретение №2454659 и «Способ определения внутри наружного стенового ограждения, выполненного из кирпича, зон, характеризующихся квазистационарными условиями теплопередачи при натурных экспериментальных исследованиях в зимний период» патент на изобретение №2618501.

Разработанная программа функционировала только на компьютере, который находился в лаборатории строительной физики ФГБОУ ВО «ПГТУ». Для того, чтобы посмотреть все графики изменения температуры и анализировать происходящие процессы, необходимо работать в данной аудитории. Рабочий компьютер только один, в результате чего возникла проблема с очередностью работы сотрудников лаборатории с базой данных. Из-за неудобства эксплуатации появилась необходимость дистанционного доступа к базе данных и графикам, независимо от местонахождения человека. Поэтому компьютерная программа была усовершенствована и доработана с целью передачи данных через сети Интернет, а также представление этих данных в виде отчетов и графиков, доступных в сети Интернет (рис. 5).

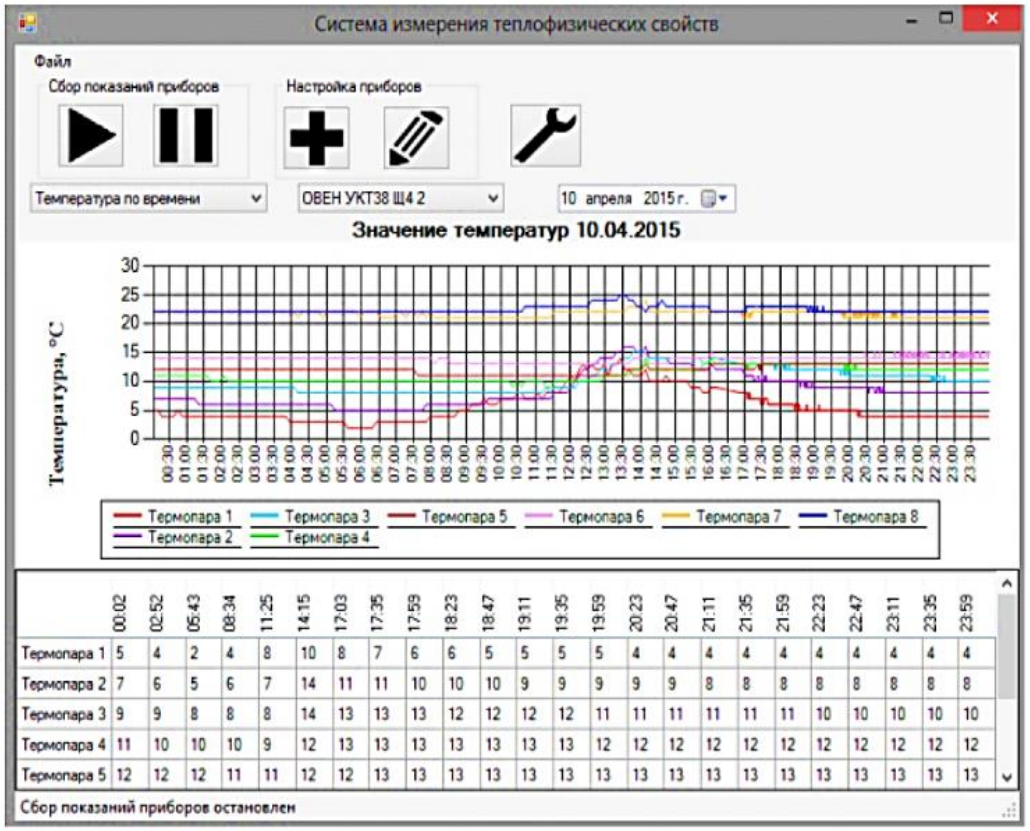


Рисунок 2. График распределения температур по толщине ограждения в течение дня.

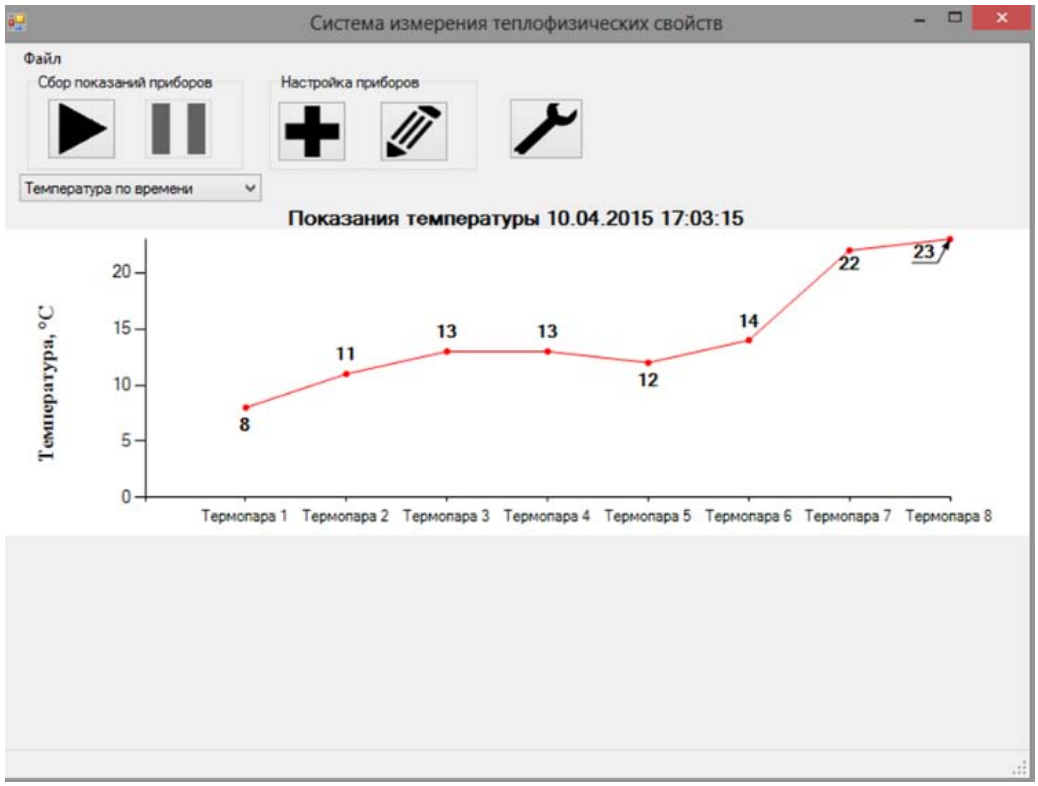


Рисунок 3. График изменения температуры по толщине стене в определенный момент времени.

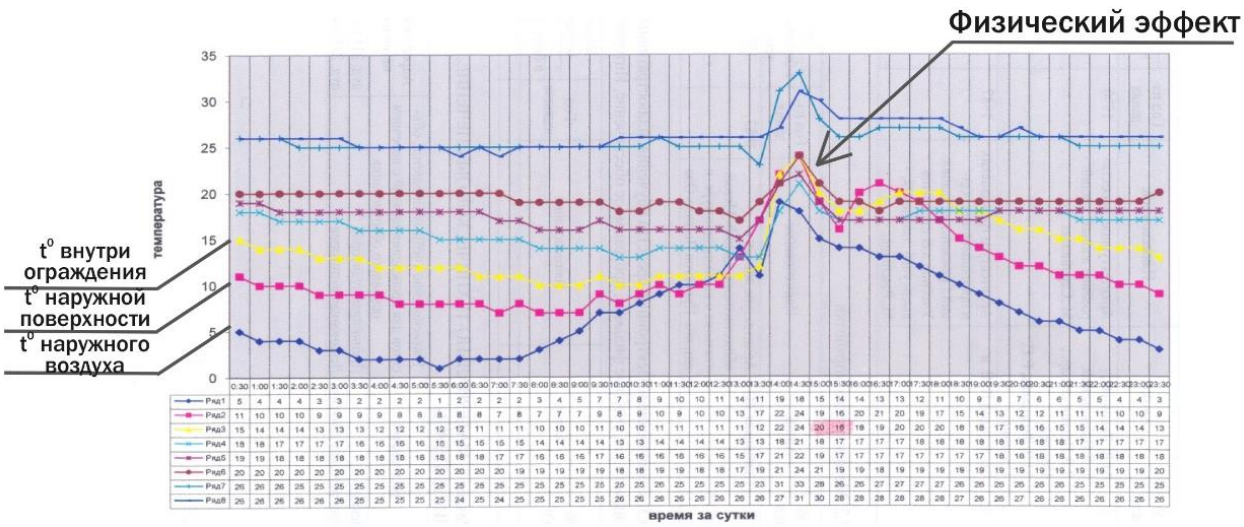


Рисунок 4. График изменения температуры в течение суток 08.04.2016 г. на котором наблюдается эффект встречных тепловых потоков.

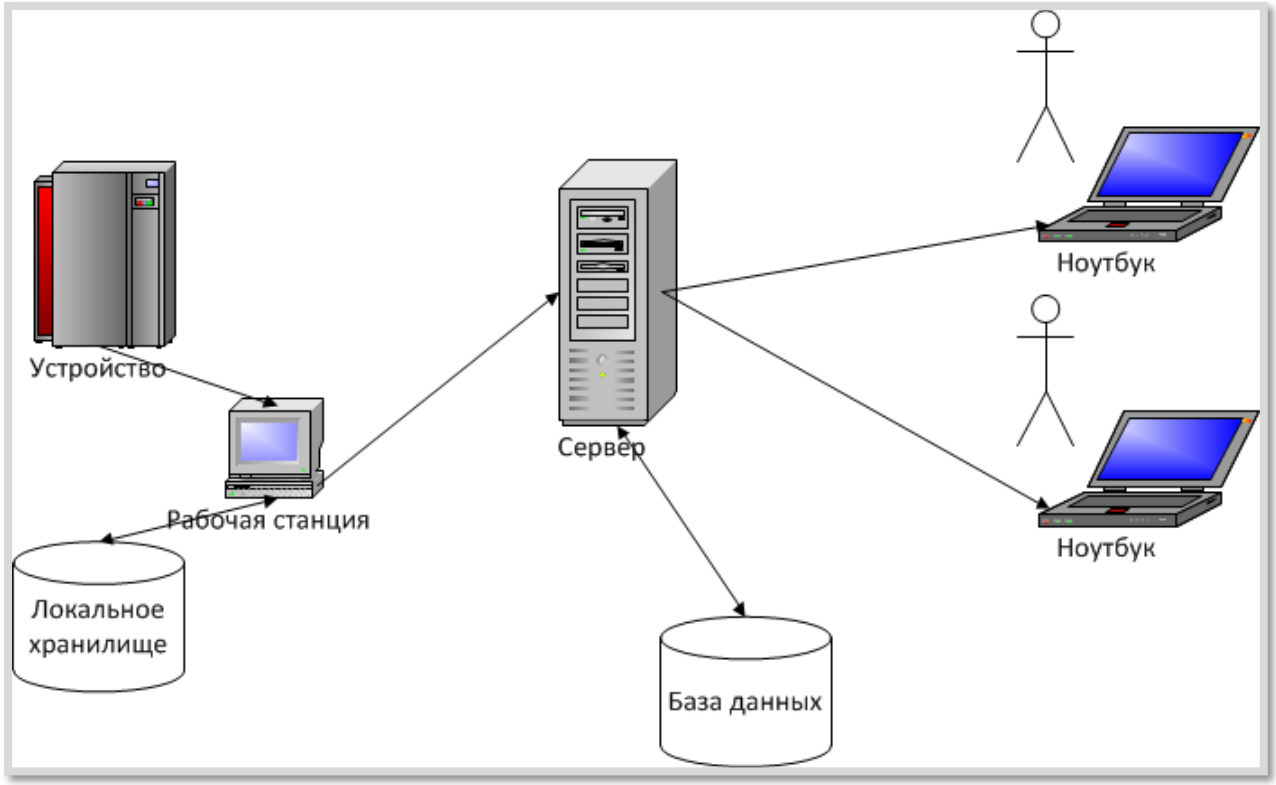


Рисунок 5. Принципиальная схема работы компьютерной программы.

Компьютерная программа включает в себя следующие модули (рис. 6):

- Клиентское приложение для сбора и анализа параметров установки
- Веб-сервис для сбора параметров установки с клиентского приложения и их хранение
- Веб-приложение для анализа отчетов и графиков

Основные функциональные требования, предъявляемые к разрабатываемой системе:

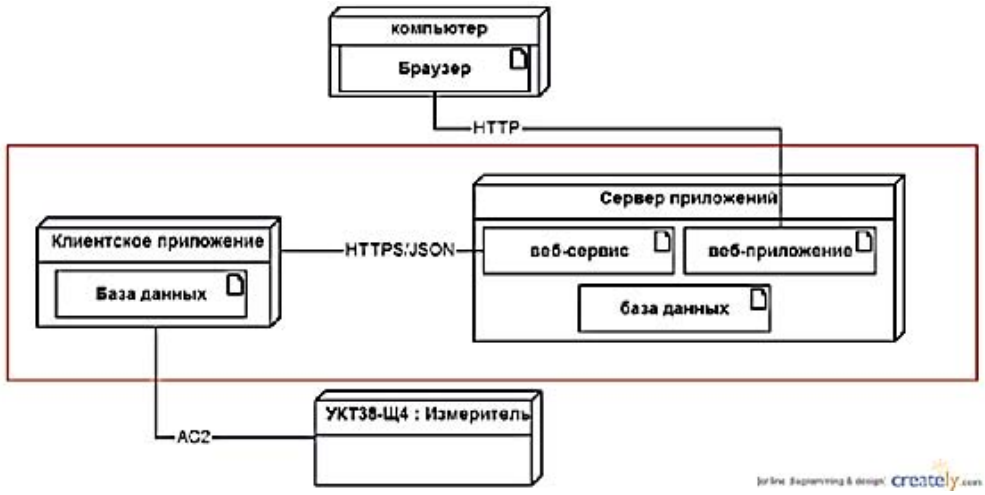


Рисунок 6. Диаграмма развертывания компьютерной программы.

- **Клиентскому приложению:** периодический сбор показаний установки и хранение их в локальной базе данных; периодическая отправка показаний на сервер; настройка периодичности сбора и отправки показаний; работа в offline режиме; отображение отчета о последних собранных данных; отображение графика изменения температуры в выбранный день; отображение графика изменения температура «по стене»; возможность сохранения графиков в форматах PDF, PNG, JPEG.
- **Веб-сервису:** сохранение параметров установок, полученных с авторизованных клиентских программ; уведомление владельцев о неактивности установоки.
- **Веб-приложению:** показания температуры в выбранный день; среднемесячная температура в выбранный год; ежемесячный абсолютный минимум температуры в выбранный год; ежемесячный абсолютный максимум температуры в выбранный год; показания температуры за определенный период.

Данные с термопар поступают на один из 6 приборов УКТ38-Щ4 фирмы ОВЕН, подключенных к компьютеру с помощью адаптера сети АС-2. Адаптер сети АС-2 предназначен для подключения до 8 приборов к одному COM-порту персонального компьютера. Каждый прибор может иметь от 1 до 8 каналов измерения, таким образом, через 1 порт компьютера может считываться до 64 аналоговых параметров. Для работы с адаптером сети АС-2 фирма ОВЕН предоставляет открытую библиотеку на C++.

Для написания клиентского приложения был выбран язык C#, поскольку на нем удобно создавать графический интерфейс (в том числе различные графики) и среда разработки Visual Studio 2013. Системой управления локальной базой является Microsoft Access.

Веб-сервис написан на языке PHP, для отправки email сообщений используется сторонняя библиотека PHPMailer [3,4,]. PHPMailer — одна из самых популярных PHP библиотек с открытым исходным кодом, предназначенная для отправки email сообщений. Веб-приложение написано на языке PHP использованием Yii Framework.

Для взаимодействия с физической установкой в клиентском приложении реализованы следующие классы: IInstalationReader, Ukt38Sh4TrpReader, OwenLibWrapper, InstallationReaderCreator (рис. 7).

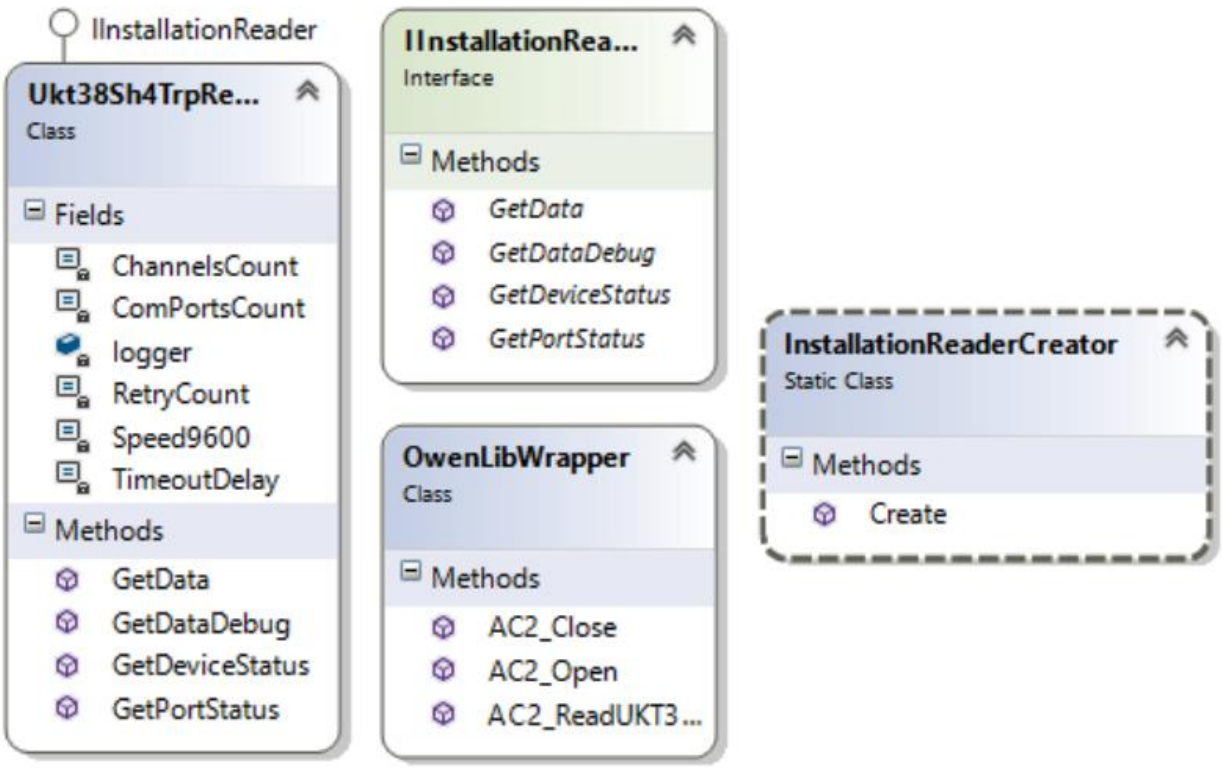


Рисунок 7. Диаграмма классов для взаимодействия с физическими приборами.

Клиентское приложение в фоновом потоке периодически опрашивает подключенные приборы. В случае возникновения каких-либо ошибок в статус бар выводится сообщение ошибки, если показания собраны успешно – показания записываются в базу данных.

Поскольку одним из основных требований является возможность работы в оффлайн режиме, то возникает необходимость не только собирать показания с установок, но и хранить их в локальной базе данных, чтобы во периода отсутствия Интернет-соединения поступающие с установки значения температур не были потеряны.

Также организация локальной базы данных позволяет клиентскому приложению не только собирать показания, но строить различные отчеты и графики по поступающим данным в режиме реального времени, позволяя производить анализ показаний приборов даже в offline режиме. Для хранения показаний приборов используется MS Access с одной единственной таблицей.

Также организация локальной базы данных позволяет клиентскому приложению не только собирать показания, но строить различные отчеты и графики по поступающим данным в режиме реального времени, позволяя производить анализ показаний приборов даже в offline режиме.

Для отображения различных графиков в клиентском приложении используется класс Chart из пакета DataVisualization.Charting, появившийся в .NET Framework 4. Данный класс позволяет не только отображать графики, но и предоставляет широкие возможности для их настройки, включая использование в качестве точек значения даты и времени, увеличение отдельных областей, а также сохранение графика в формате PNG или PDF.

Для отправки показаний приборов на сервере используется API веб-сервиса, с клиентского приложения по протоколу HTTP, методом POST отправляется файл в JSON формате,

содержащие массив отчетов. Основой HTTP является технология «клиент-сервер», то есть предполагается существование потребителей (клиентов), которые инициируют соединение и посылают запрос, и поставщиков (серверов), которые ожидают соединения для получения запроса, производят необходимые действия и возвращают обратно сообщение с результатом. За отправку показаний в клиентском приложении используются различные классы (рис. 8).

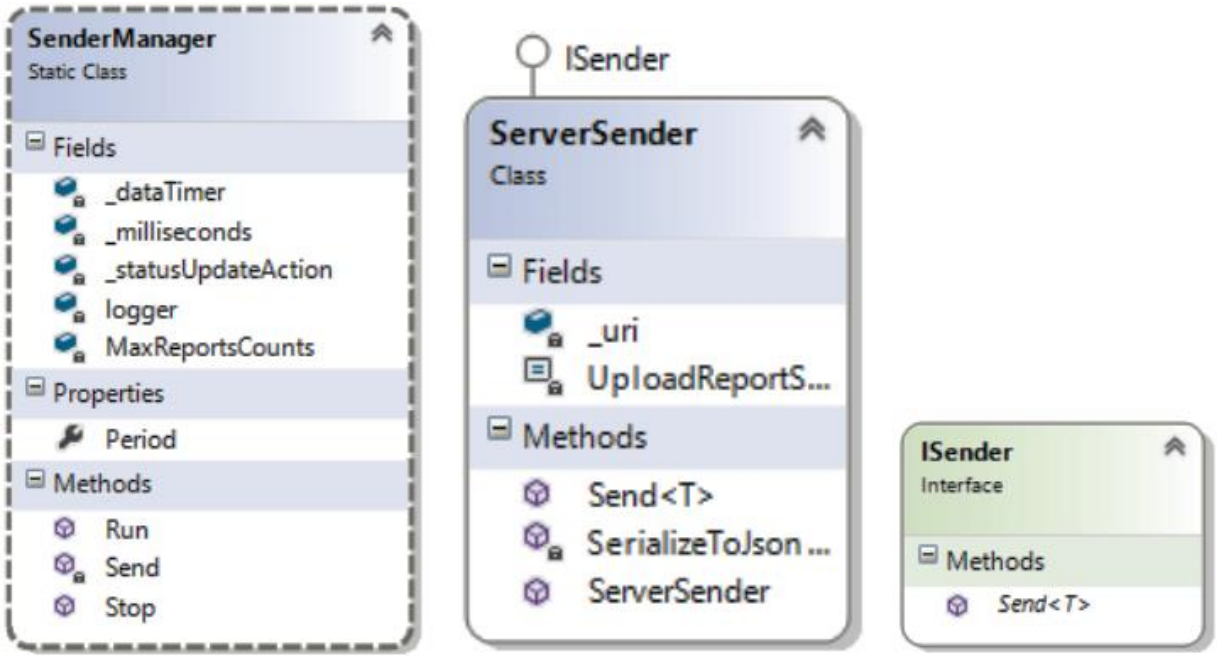


Рисунок 8. Диаграмма используемых классов для отправки показаний.

В качестве системы управления базами данных (СУБД) было решено использовать MySQL, а взаимодействия осуществляются с помощью php расширения mysqli. MySQL — свободная реляционная система управления базами данных. MySQL является решением для малых и средних приложений. Входит в состав серверов WAMP, AppServ, LAMP и в портативные сборки серверов Денвер, XAMPP. При проектировании базы данных было решено использовать различные таблицы (рис. 9).

Основной задачей веб-сервиса является сбор, обработка и сохранение показаний приборов клиентских установок, которые поступают в виде JSON файла, в имени которого обязательно должен присутствовать токен установки. После получения, файл обрабатывается согласно схеме (рис. 10).

Для того чтобы войти в веб-приложение нужно перейти по следующему адресу: **tpms.team-force.ru/tpms.**

Типы пользователей и их возможности:

- **Гость** - Показания температуры сегодня
- **Зарегистрированный** – дополнительных графиков нет
- **Учащиеся** – все графики
- **Владельцы установок** – все графики, информация о своих установках
- **Администратор** – все графики, информация о пользователях

В рамках исследований была разработана и запатентована новая модификация автоматизированного лабораторного комплекса, дополненная метеостанцией DAVIS instruments Vantage Pro2, которая расширяет возможности теплофизических исследований ограждающих конструкций.

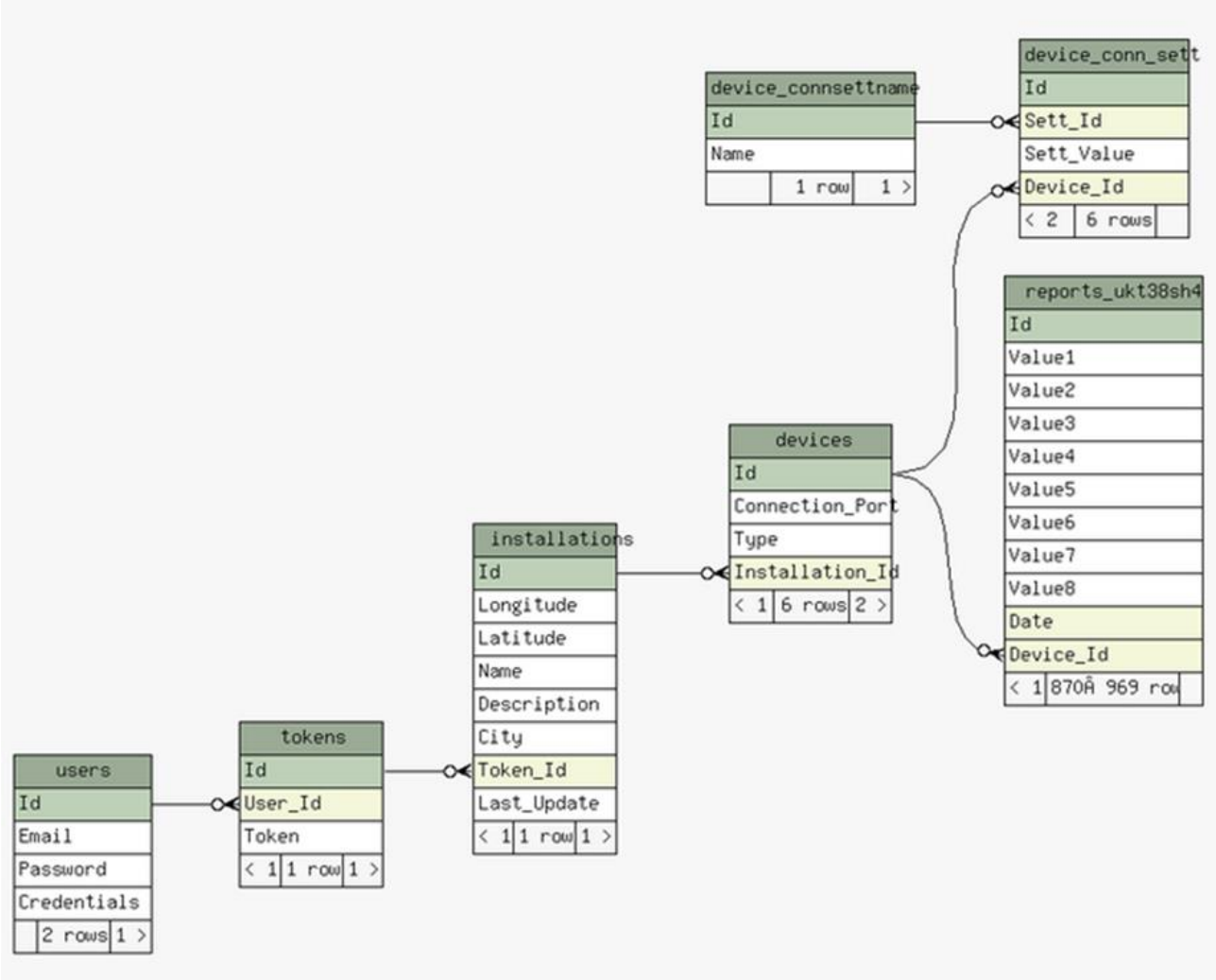


Рисунок 9. ER-диаграмма базы данных.

С помощью сформированной модели функционирования программы и математического алгоритма разработана компьютерная программа для обработки получаемых данных с лабораторной установки, которая позволяет дистанционно наблюдать за всеми изменяющимися параметрами через сеть Интернет. Она расширяет возможности для исследования. Её активно использую студенты института строительства и архитектуры ФГБОУ ВО «ПГТУ» во время научно-исследовательских проектов и выполнения лабораторных работ. Лабораторный комплекс представлен на Московском международном салоне изобретений и инновационных технологий «Архимед» и Международном фестивале инноваций, знаний и изобретательства “Tesla Fest-2016”, на которых был удостоен золотых медалей. В 2015 году разработка включена в перечень важнейших научных достижений ФГБОУ ВО «Поволжский государственный технологический университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авдотьин Л. Н.** Применение вычислительной техники и моделирования в архитектурном проектировании. – М.: Стройиздат, 1978. – 255 с.

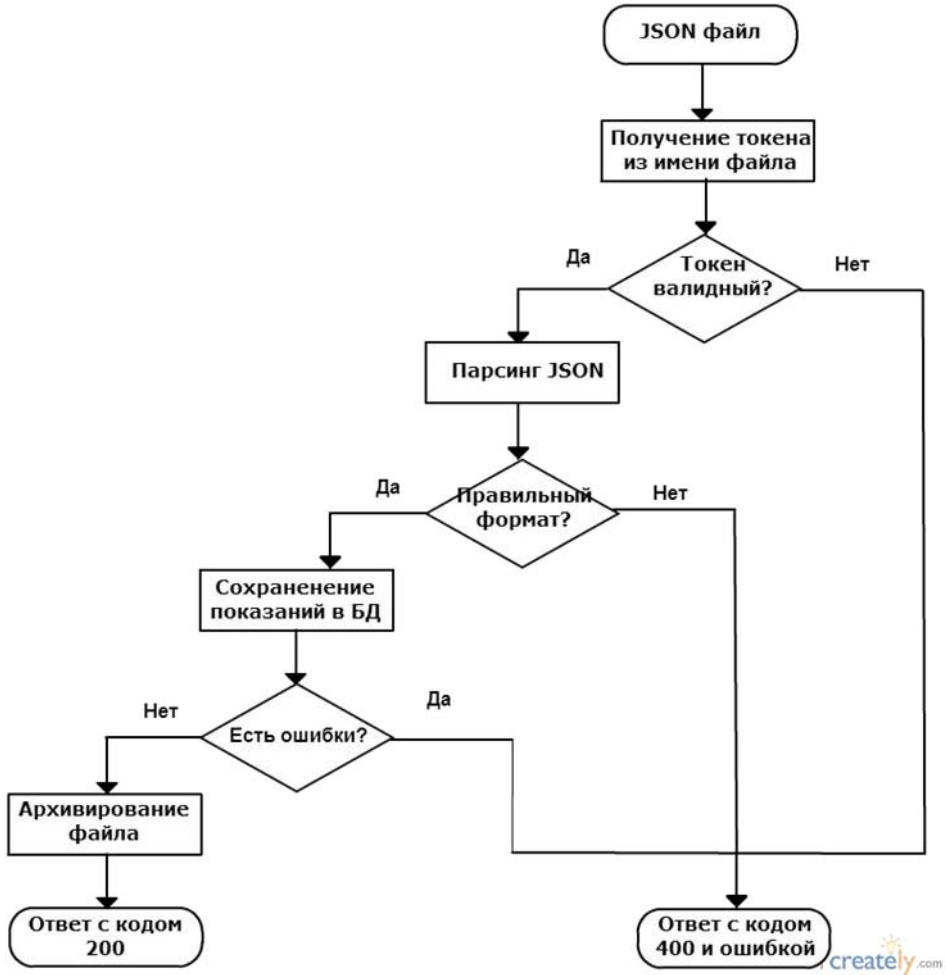


Рисунок 10. Диаграмма действий при обработке файла показаний установки.

2. **Алоян Р.М., Федосов С.В., Мизонов В.Е.** Теоретические основы математического моделирования механических и тепловых процессов в производстве строительных материалов: монография. – Иваново: Ивановский государственный архитектурно-строительный университет, 2011. – 256 с.
3. **Makarov A.** Web Application Development with Yii and PHP. Moscow, Packt Publishing, 2012.
4. **Фаулер М.** Рефакторинг. Улучшение существующего кода. – М: «Символ-Плюс», 2003.
5. **Павлов Г.Н.** Автоматизация архитектурно-строительного проектирования геодезических куполов и оболочек. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.12 – «Системы автоматизации проектирования (строительство, архитектура)». – Нижний Новгород, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2007. – 245 с.
6. **Патент РФ** на изобретение №2454659. Опубликовано 27.06.2012 г. Бюл. №18. / Способ оценки теплофизических характеристик ограждающих конструкций зданий и сооружений, выполненных из кирпича в зимний период по результатам испытаний в натурных условиях// Муреев П.Н. и др.
7. **Патент РФ** на полезную модель №124395. Опубликовано 20.01.2013 г. Бюл. №2. / Устройство для определения теплофизических качеств ограждающих конструкций зданий и сооружений в натурных условиях// Муреев П.Н. и др.

8. **Патент РФ** на полезную модель №146848. Опубликовано 20.10.2014 г. Бюл. №29. / Измеритель тепловых потоков // Муреев П.Н. и др.
9. **Патент РФ** на полезную модель №153276. Опубликовано 10.07.2015 г. Бюл. №19. / Лабораторный комплекс для определения теплофизических характеристик образцов стеновых ограждений при длительных режимах испытаний год и более в натурных условиях // Муреев П.Н. и др.
10. **Патент РФ** на изобретение №2618501. Опубликовано 03.05.2017 г. Бюл. №13./ Способ определения внутри наружного ограждения, выполненного из кирпича, зон, характеризующих квазистационарными условиями теплопередачи при натурных экспериментальных исследованиях в зимний период // Муреев П.Н. и др.
11. **Фокин К. Ф.** Строительная теплотехника ограждающих частей здания. – М.: Стройиздат, 2007. – 319 с.
12. **Федосов С.В.** Тепломассоперенос в технологических процессах строительной индустрии. – Иваново: ИПК «ПресСто», 2010. – 364 с.
13. **Черепашков А.А., Носов Н.В.** Компьютерные технологии, моделирование и автоматизированные системы в машиностроении. – Новосибирск: ИнФолио, 2009. 642 с.

REFERENCES

1. **Avdot'in L.N.** Primenenie Vychislitel'noj Tekhniki i Modelirovaniya v Arhitekturnom Proektirovanii [Application of Computer Technology and Modeling in Architectural Design]. Moscow, Strojizdat, 1978, 255 pages.
2. **Aloyan R.M., Fedosov S.V., Mizonov V.E.** Teoreticheskie Osnovy Matematicheskogo Modelirovaniya Mekhanicheskih i Teplovyh Processov v Proizvodstve Stroitel'nyh Materialov [Theoretical Foundations of Mathematical Modeling of Mechanical and Thermal Processes in the Production of Building Materials]. Ivanovo, Ivanovo State University of Architecture and Civil Engineering, 2011, 256 pages.
3. **Makarov A.** Web Application Development with Yii and PHP. Moscow, Packt Publishing, 2012.
4. **Fauler M.** Refaktoring. Uluchshenie Sushchestvuyushchego Koda [Refactoring. Improvement of Existing Code]. Moscow, “Simvol-Plyus”, 2003.
5. **Pavlov G.N.** Avtomatizaciya Arhitekturno-Stroitel'nogo Proektirovaniya Geodezicheskih Kupolov i Obolochek [Automation of Architectural and Structural Design of Geodesic Domes and Shells]. Dissemination for the degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 05.13.12 – “Automation systems for design (construction, architecture)”. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, 2007, 245 pages.
6. **Patent of the Russian Federation** for invention No. 2454659. Published on June 27, 2012 in Bulletin No. 18. Sposob Ocenki Teplofizicheskih Harakteristik Ograzhdayushchih Konstrukcij Zdanij i Sooruzhenij, Vypolnennyh iz Kirpicha v Zimnij Period po Rezul'tatam Ispytanij v Naturnyh Usloviyah [A Method for Assessing the Thermophysical Parameters of the Enclosing Structures of Buildings and Facilities made of Bricks in Winter by the Results of Tests in Full-Scale Conditions (Mureev PN. and etc.).
7. **Patent of the Russian Federation** for Utility Model No. 124395. Published on January 20 in Bulletin No. 2. Ustrojstvo Dlya Opredeleniya Teplofizicheskih Kachestv Ograzhdayushchih Konstrukcij Zdanij i Sooruzhenij v Naturnyh Usloviyah [Device for Determining the Thermophysical Qualities of the Enclosing Structures of Buildings and Facilities in Full-Scale Conditions (Mureev PN. and etc.).
8. **Patent of the Russian Federation** for Utility model No. 146848. Published on Octo-

ber 20, 2014 in Bulletin No. 29. Izmeritel' Teplovyh Potokov [Meter of heat fluxes] (Mureev P.N. and etc.).
9. **Patent of the Russian Federation** for Utility Model No. 153276. Published on October 07, 2015 in Bulletin No. 19. Laboratornyj Kompleks Dlya Opredeleniya Teplofizicheskih Harakteristik Obrazcov Stenovyh Ograzhdenij pri Dlitel'nyh Rezhimah Ispytanij God i Bolee v Naturnyh Usloviyah [Laboratory Complex for Determining the Thermophysical Parameters of Specimens of Wall Fences Under Long Test Conditions for a Year or More Under Field Conditions (Mureev PN. and etc.).
10. **The patent of the Russian Federation** for the Invention No. 2618501. Published on May 3, 2017 in Bulletin No. 13. Sposob Opredeleniya Vnutri Naruzhnogo Ograzhdeniya, Vypolnennogo iz Kirpicha, Zon, Harakterizuyushchih Kvazistacionarnymi Usloviyami Teploperedachi pri Naturnyh Eksperimental'nyh Issledovaniyah v Zimnij Period [The Method of Determining Inside an External Fence Made of Bricks, Zones Characterized by Quasistationary Heat Transfer Conditions in Full-Scale Experimental Studies in the Winter (Mureev P.N. and etc.).
11. **Fokin K.F.** Stroitel'naya Teplotekhnika Ograzhdayushchih Chastej Zdaniya [Building Heat Engineering of the Enclosing Parts of the Building]. Moscow, Strojizdat, 2007, 319 pages.
12. **Fedosov S.V.** Teplomassoperenos v Tekhnologicheskih Processah Stroitel'noj Industrii [Heat and Mass Transfer in the Technological Processes of the Construction Industry]. Ivanovo, IPK “PresSto”, 2010, 364 pages.
13. **Cherepashkov A.A., Nosov N.V.** Komp'yuternye Tekhnologii, Modelirovanie i Avtomatizirovannye Sistemy v Mashinostroenii [Computer technologies, modeling and automated systems in engineering]. Novosibirsk, InFolio, 2009, 642 pages.

Федосов Сергей Викторович, академик РААСН, доктор технических наук, профессор, президент Ивановского государственного политехнического университета; 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20.
E-mail: fedosov-academic53@mail.ru.

Муреев Павел Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Проектирование зданий» Поволжского государственного технологического университета; 424000, Россия, г. Йошкар-Ола, ул. Панфилова, д.17; E-mail: pavel.mureev@yandex.ru.

Котлов Виталий Геннадьевич, кандидат технических наук, профессор кафедры «Строительные конструкции и водоснабжение», директор института строительства и архитектуры Поволжского государственного технологического университета; 424000, Россия, г. Йошкар-Ола, ул. Панфилова, д.17;
E-mail: kotlov.vitaliy@mail.ru.

Макаров Александр Николаевич, главный инженер Поволжского государственного технологического университета; 424000, Россия, г. Йошкар-Ола, ул. Панфилова, д.17; E-mail: saha240164@mail.ru

Иванов Андрей Владимирович, ассистент кафедры «Проектирование зданий» Поволжского государственного технологического университета; 424000, Россия, г. Йошкар-Ола, ул. Панфилова, д.17.
E-mail: IvanovAVL@volgatech.net

Sergey V. Fedosov, Full Member of RAACS, Doctor of Technical Sciences, Professor, President of Ivanovo State Politechnic University; 20, 8 Marta Street, 153037, Ivanovo, RUSSIA. E-mail: fedosov-academic53@mail.ru.

Pavel N. Mureev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department "Designing Buildings" Volga State University of Technology; 17, Panfilova Street, 424000, Yoshkar-Ola, RUSSIA.
E-mail: pavel.mureev@yandex.ru

Vitaliy G. Kotlov, Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department "Building Structures and Water Supply", Director of the Institute of Construction and Architecture Volga State University of Technology; 17, Panfilova Street, 424000, Yoshkar-Ola, RUSSIA.
E-mail: kotlov.vitaliy@mail.ru

Aleksandr N. Makarov, Chief Engineer Volga State University of Technology; 17, Panfilova Street, 424000, Yoshkar-Ola, RUSSIA; E-mail: saha240164@mail.ru

Andrey V. Ivanov, Assistant of the Department of Building Design Volga State University of Technology; 17, Panfilova Street, 424000, Yoshkar-Ola, RUSSIA.
E-mail: IvanovAVL@volgatech.net.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-78-89

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПЛОСКОСТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВЫСОКОПРОЧНЫХ БЕТОНОВ

Н.И. Карпенко [1, 2], С.Н. Карпенко [2], А.Н. Петров [3]

[1] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

[2] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

[3] Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается совершенствование методики расчета плоскостных железобетонных конструкций на базе деформационной теории пластичности железобетона с трещинами Н.И. Карпенко, где наиболее полно учитываются основные факторы физической нелинейности железобетона, образование и развитие трещин в растянутом бетоне, действительный характер деформирования бетона и арматуры. Деформационная модель железобетона с трещинами с учетом диаграмм деформирования бетона и арматуры использована для численного анализа напряженно-деформированного состояния балки-стенки из высокопрочного бетона класса В100. Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что учет действительных свойств материалов существенно повышает точность компьютерного моделирования. Прочность бетона является решающим фактором, определяющим механизм разрушения конструкции и эффективность использования арматуры. На стадии проектирования наиболее надежным и точным инструментом оценки эксплуатационной пригодности плоскостных железобетонных конструкций является компьютерное моделирование на базе нелинейной деформационной модели с учетом действительных прочностных и деформативных свойств бетона и арматуры.

Ключевые слова: деформационная модель железобетона с трещинами, плоское напряженное состояние, метод конечных элементов, компьютерное моделирование, диаграммы состояния, высокопрочный бетон, железобетонные балки-стенки

ENHANCEMENT OF THE REINFORCED CONCRETE PLAIN STRUCTURES DESIGN METHODS WITH THE TAKING INTO CONSIDERATION THE TRUE PROPERTIES OF HIGH PERFORMANCE CONCRETES

Nikolay I. Karpenko [1, 2], Sergey N. Karpenko [2], Alexey N. Petrov [3]

[1] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

[2] Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

[3] Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, RUSSIA

Abstract: The enhancement of the reinforced concrete plain structures design methods on the basis of the deformation theory of the plasticity of reinforced concrete with cracks by N.I. Karpenko is considered. The deformation model of reinforced concrete with cracks taking into account the deformation diagrams of concrete and reinforcement is used for numerical analysis of a deep beam made of high-strength concrete of class B100. The analysis makes it possible to conclude that taking into account the actual properties of materials significantly improves the accuracy of computer modeling. The strength of concrete is the decisive factor determining the mechanism of structural failure and the efficiency of using reinforcement. At the design stage, the most reliable and accurate tool for assessing the operational fitness of planar reinforced concrete structures is computer modeling based on a nonlinear deformation model, taking into account the actual strength and deformation properties of concrete and reinforcement.

Key words: deformation model of reinforcement concrete with cracks, plane stress state, finite element method, computer modelling, strass-strain diagrams, high performance concrete, reinforced deep beams

Физические соотношения для железобетона, а также известные уравнения равновесия, совместности деформаций, геометрические соотношения и граничные условия составляют системы определяющих уравнений механики бетона и железобетона. Поскольку элементы матриц жесткости в физических соотношениях не являются константами, а представляются функциями напряжений, деформаций или неаналитическими зависимостями, то решения задач выполняются численными методами. Разрешающие уравнения, как правило, конструируются с помощью метода конечных элементов. Их решение достигается шагово-итерационными методами, в основе которых обычно лежат различные модификации метода переменной жесткости применительно к железобетону. Наиболее эффективной, с точки зрения сходимости итерационного процесса, является запись разрешающих уравнений в приращениях для решения задач малоитерационными методами [1].

В деформационной модели железобетона [2] учитывается нелинейный характер деформирования бетона и арматуры и образование трещин, что приводит к приобретаемой анизотропии. Согласно этой модели, связь между деформациями и напряжениями представляется в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где $[C]$ – симметричная матрица податливости железобетона.

При формировании матрицы $[C]$ учитываются приобретаемая анизотропия бетона, нелинейность деформирования бетона и арматуры, связи зацепления берегов трещин, влияние сцепления арматуры с бетоном между трещинами на её диаграмму растяжения как основные факторы физической нелинейности. Физические соотношения (1) и коэффициенты матрицы податливости $[C]$ устанавливаются на основании анализа напряженно-деформированного состояния конечных элементов. При этом выделяются четыре стадии работы материала:

- линейная без трещин (упругая стадия работы бетона и арматуры);
- нелинейная без трещин (с учетом влияния пластических деформаций в бетоне);
- с трещинами при упругой работе арматуры в трещинах;
- с трещинами при работе арматуры за пределом упругости.

Характер деформирования бетонных элементов до образования трещин наиболее точно описывает ортотропная модель, позволяющая учитывать направленное развитие микротрещин и отличия в изменении физико-механических характеристик бетона по направлениям сжимающих и растягивающих напряжений. Ортотропия приобретается в провесе нагружения конструкции, оси симметрии *n,l* приобретаемой ортотропии в элементах без трещин совпадают с направлениями главных площадок. Связи между напряжениями $(\sigma_{bn}, \sigma_{bl}, \tau_{bnl},)$ и относительными деформациями $(\varepsilon_n, \varepsilon_l, \gamma_{nl})$ бетона до появления трещин записывается в осях ортотропии *n,l.*

При этом

$$\sigma_{bn} = \sigma_{bt}; \sigma_{bl} = \sigma_{b2}; \quad \tau_{bnl} = \tau_{bn2} = 0,$$

однако величины τ_{bnl} при записи определяющих соотношений оставлены с целью использования стандартных матричных преобразований. В осях n,l связи между напряжениями и относительными деформациями $(\varepsilon_n, \varepsilon_l, \gamma_{nl})$ записываются в виде

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_n\\ \varepsilon_l\\ \gamma_{nl}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E_b}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(1/\nu_{b1}) & (-\mu_{b12}/\nu_{b12}) & 0\\ (-\mu_{b12}/\nu_{b12}) & (1/\nu_{b2}) & 0\\ 0 & 0 & (1/\nu_{bG})\end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}\sigma_{bn}\\ \sigma_{bl}\\ \tau_{bnl}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{bn}\\ \varepsilon^0_{bl}\\ \gamma^0_{bnl}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

или сокращенно, сохраняя последовательность написания вектор-столбцов и матрицы,

$$\{\varepsilon\}_n=E_b^{-1}[C_b]_n\{\sigma_b\}_n+\{\varepsilon_b^0\}_n, \qquad (3)$$

где индекс n указывает, что элементы относятся к осям n ,l.

В выражении (2) $\nu_{b1},\nu_{b2},\nu_{b12},$– коэффициенты изменения секущих модулей деформаций бетона ($\nu_{b1}E_b,\nu_{b2}E_b$ – секущие модули по направлениям n и l, $\nu_{b12}E_b$ – модуль взаимного влияния; μ_{b12} – коэффициент поперечной деформации); ν_{bG} – коэффициент изменения секущего модуля сдвига $E_b\nu_{bG}$

$$\frac{1}{\nu_{bG}}=\frac{1}{\nu_{b1}}+\frac{1}{\nu_{b2}}+\frac{2\mu_{b12}}{\nu_{b12}}, \qquad (4)$$

$\varepsilon^0_{bn},\varepsilon^0_{bl},\varepsilon^0_{bnl}$ – собственные деформации бетона (усадочные, температурные и др.).

Коэффициенты изменения секущих модулей деформации бетона зависят от уровней напряжений

$$\eta_{b1}=\left|\frac{\sigma_{b1}}{\hat\sigma_{b1}}\right|;\ \ \eta_{b2}=\left|\frac{\sigma_{b2}}{\hat\sigma_{b2}}\right|. \qquad (5)$$

Соотношения (2) в осях x и y могут быть записаны в виде

$$\{\varepsilon\}_x=[C_b]_x\{\sigma_b\}_x+\{\varepsilon_b^0\}_x, \qquad (6)$$

где соответственно имеем

$$[C_b]_x=[\alpha]^{\mathrm T}[C_b]_n[\alpha];\ \{\varepsilon_b^0\}_x=[\alpha]^{\mathrm T}\{\varepsilon_b^0\}_n, \qquad (7)$$

здесь $[C_b]_x$ – матрица податливости бетона в осях x и y; $\{\varepsilon_b^0\}_x$ – вектор-столбец вынужденных деформаций бетона в осях x и y;

$$\{\sigma_b\}_x=\{\sigma_{bx},\sigma_{by},\tau_{bxy}\}^{\mathrm T}$$

– вектор-столбец напряжений в осях x и y.

При решении отдельных задач соотношение (6) удобно записывать в обратном виде

$$\{\sigma_b\}_x=[d_b]_x\{\varepsilon\}_x-[d_b]_x\{\varepsilon_b^0\}_x, \qquad (8)$$

где $[d_b]_x$ – матрица жесткости в осях x и y;

$$[d_b]_x=[C_b]_x^{-1}. \qquad (9)$$

В развёрнутом виде, после перемножения матриц, входящих в первое выражение (7), матрица податливости примет вид

$$[C_b]_x=\begin{bmatrix}C_{b11} & C_{b12} & C_{b13}\\ C_{b12} & C_{b22} & C_{b23}\\ C_{b13} & C_{b23} & C_{b33}\end{bmatrix}, \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{b11}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\nu_{b1}}+\frac{\cos^2\alpha}{\nu_{b2}}\right);\\
&C_{b23}=C_{b13}=\frac{\sin 2\alpha}{2E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b1}}-\frac{1}{\nu_{b2}}\right);\\
&C_{b22}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\nu_{b1}}+\frac{\sin^2\alpha}{\nu_{b2}}\right);\\
&C_{b12}=-\mu_{b12}/(E_b\nu_{b12});\\
&C_{b33}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b1}}+\frac{1}{\nu_{b2}}+\frac{2\mu_{b12}}{\nu_{b12}}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Построение определяющих соотношений для железобетонного элемента без трещин производится на основании следующих предпосылок:

- деформации железобетонного элемента совпадают с деформациями бетона ($\varepsilon_{bx}=\varepsilon_x;\ \varepsilon_{by}=\varepsilon_y;\ \tau_{bxy}=\tau_{xy}$);
- принимается равенство осевых относительных деформаций арматуры и бетона ($\varepsilon_{si}=\varepsilon_{bi}$), за исключением зон анкеровки арматуры, где условие совместности нарушается;
- нормальные напряжения элемента $\{\sigma\}_x=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}^{\mathrm{T}}$ полагают составными величинами, состоящими из напряжений в бетоне и приведённых напряжений в арматуре:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_{bx}-\mu_{sx}\sigma_{sx};\\ \sigma_y&=\sigma_{by}-\mu_{sy}\sigma_{sy};\\ \tau_{xy}&=\tau_{bxy}+0{,}5\tau_{sxy}(\mu_{sx}+\mu_s)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

(допускается принимать $\tau_{xy}\approx\tau_{bxy}$).

$\{\sigma_s^0\}_x=\{\sigma_{sx}^0,\sigma_{sy}^0,0\}^{\mathrm{T}}$ – начальные напряжения в арматуре (например, в результате предварительного напряжения) до начала совместной работы арматуры и бетона.

$\{\varepsilon_s^0\}_x=\{\varepsilon_{sx}^0,\varepsilon_{sy}^0,0\}^{\mathrm{T}}$ – вынужденные деформации арматуры, которые реализуются в процессе совместной работы арматуры и бетона (как и вынужденные деформации бетона).

При указанных общих предпосылках определяющие соотношения для железобетонного элемента без трещин принимается в виде

$$\{\sigma\}_x=[d]_x\{\varepsilon\}_x-[\beta^0]_x+\{\sigma_s^0\}_x, \qquad (13)$$

где $[d]_x$ – матрица жесткости железобетона,

$$[d]_x=[d_b]_x+[d_s]_x, \qquad (14)$$

$[d_s]_x$ – матрица упругости арматуры:

$$[d_s]_x=\begin{vmatrix}\mu_{sx}E_{sx} & 0 & 0\\ 0 & \mu_{sy}E_{sy} & 0\\ 0 & 0 & 0{,}2(E_{sx}\mu_{sx}+E_{sy}\mu_{sx})\end{vmatrix}, \qquad (15)$$

E_{sx},E_{sy} – модули упругости арматуры (при работе арматуры в упругопластической стадии они заменяются на секущие модули деформаций, которые определяемые по диаграммам состояния арматуры);

$$\{\beta^0\}_x=\{\beta^0{}_x,\beta^0{}_y,\beta^0{}_{xy}\}^{\mathrm{T}}$$

– вектор-столбец вынужденных условных (эквивалентных) напряжений,

$$\{\beta^0\}_x=[d_x]_x\{\varepsilon_s^0\}_x+[d_b]_x\{\varepsilon_b^0\}_x. \qquad (16)$$

Напряжения в арматуре вычисляют по формуле

$$\{\sigma_s\}_x=[d_s]_x\{\varepsilon\}_x-[d_s]_x\{\varepsilon_s^0\}_x+\{\sigma_s^0\}_x, \qquad (17)$$

а напряжения в бетоне – по формулам (2) или (8) после определения деформаций $\{\varepsilon\}_x$.

Определяющие соотношения для железобетона с трещинами формируются в зависимости от схемы трещин. При анализе напряженного состояния следует проверять возможность образования двух схем трещин: непересекающихся и пересекающихся. Непересекающиеся трещины образуются, когда нарушается первое из двух условий (при $\sigma_{b1}>\sigma_{b2}$):

$$\sigma_{b1}\le R_{bt,ser}\tilde{\gamma}_{bt}\ ;\quad \sigma_{b2}\le R_{bt,ser}\tilde{\gamma}_{bt}, \qquad (18)$$

где $\tilde{\gamma}_{bt}$ – коэффициент условий работы бетона, определяемый по формуле

$$1\ge\tilde{\gamma}_{bt}=\frac{R_b\varphi_b}{(0{,}2+\alpha B)R_b\varphi_b+R_{bt}}, \qquad (19)$$

значения α и B принимаются согласно указаниям нормативных источников;

$$\varphi_b = \left|\sigma_{b1}/\sigma_{b2}\right|.$$

Пересекающиеся трещины образуются, когда нарушаются оба условия (18). Главные напряжения в бетоне вычисляют по компонентам $\{\sigma_b\}_x$ по формулам (8) после нахождения деформаций элемента $\{\varepsilon\}_x$. Угол наклона трещин α в бетоне определяется в момент нарушения первого условия (18) и считается неизменным. В упругой стадии работы арматуры допускается угол α определять, исходя из условия прохождения трещин вдоль площадок приложения главных сжимающих напряжений.

После появления непересекающихся трещин элемент разделяется ими на отдельные полосы, соединенные стержнями арматурной сетки за счёт сил сцепления. Сцепление таковó, что происходит нарушение совместности осевых деформаций арматуры и бетона вследствие перемещений (смещений) арматуры относительно бетона (в основном происходящих по кососимметричной схеме в пределах одной полосы между трещинами). Полосы бетона между трещинами могут самостоятельно работать на осевое сжатие (растяжение) вдоль трещин или на сжатие со сдвигом. В трещинах все усилия (за исключением некоторых усилий в связях зацепления берегов трещин) передаются на арматуру, которая воспринимает как осевые, так и касательные напряжения (нагельный эффект в арматуре). В полосах между трещинами напряжения в арматуре уменьшаются за счёт сил сцепления, что сказывается на средних относительных деформациях арматуры и жёсткости элемента. Осевые смещения арматуры относительно бетона приводят к раскрытию трещин, а наклонное к трещинам расположение арматуры и касательные напряжения в ней – ещё и к сдвигу берегов трещин. При пересекающихся трещинах бетон выключается из работы, но продолжает оказывать влияние на снижение средних деформаций и напряжений в арматуре и сдвиг элемента.

Под относительными деформациями элемента с непересекающимися трещинами в осях *n, l,* где ось *n* проходит по нормали к трещине, подразумеваются деформации, которые складываются из двух частей: средних (сглаженных на отрезке расстояния между трещинами) относительных деформаций от раскрытия трещин α_{cr} и сдвига берегов Δ_{cr} и средних и средних относительных деформаций $(\varepsilon_{bn}, \varepsilon_{bt}, \gamma_{bnl})$ полос бетона между трещинами:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n = \alpha_{cr}/t_{cr} + \varepsilon_{bn};\\ &\varepsilon_l = \varepsilon_{nl};\\ &\gamma_{nl} = \Delta_{cr}/l_{cr} + \gamma_{bnl}, \end{aligned} \qquad (20)$$

где l_{cr} – расстояние между трещинами (или ширина полосы бетона между трещинами). Здесь общие сдвиги γ_{nl} состоят из двух частей

$$\gamma_{nl} = \gamma_n + \gamma_l,$$

где соответственно

$$\gamma_n = \Delta_{cr}/l_{cr} + 0{,}5\gamma_{bnl};\ \gamma_l = 0{,}5\gamma_{bnl}; \qquad (21)$$

γ_{bnl} – угол сдвига полос бетона между трещинами.

Оси *n, l* до появления трещин совпадают с осями 1,2 главных напряжений, а после появления трещин могут с ними не совпадать.

В случае пересекающихся трещин, ориентированных вдоль осей *n, l* ,

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_n = \alpha_{cr1}/l_{cr1}; \varepsilon_l = \alpha_{cr2}/l_{cr2};\\ &\gamma_{nl} \approx \gamma_n + \gamma_l \approx \Delta_{cr1}/l_{cr1} + \Delta_{cr2}/l_{cr2}, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где α_{cri} – ширина раскрытия трещин, нормальных к оси n при $i=1$ и к оси l при $i=2$; Δ_{cri} – сдвиги берегов трещин; l_{cri} – рас-

стояние между трещинами одного и второго направления.

Под напряжениями железобетонного элемента с трещинами подразумеваются двухкомпонентные величины, состоящие из приведенных напряжений в арматуре и бетоне, которые, однако, имеют существенные особенности:

− компоненты напряжений в бетоне и арматуре (как и относительных деформаций) в отдельности изменяются по законам несимметричного тензора напряжений так, что на площадках с трещинами составляющая напряжений в бетоне практически обращается в ноль (за исключением некоторых напряжений в связях зацепления), а на площадках, нормальных к трещинам, присутствуют обе составляющие, которые вычисляются по средним напряжениям в бетоне и арматуре;

− общие напряжения в железобетонном элементе изменяются по законам симметричного тензора напряжений;

− из-за нарушения сцепления арматуры с бетоном знаки одноименных компонент в бетоне и арматуре могут не совпадать.

Методика физически нелинейного расчета реализована в виде программы компьютерного моделирования железобетонных балок-стенок с трещинами, с помощью которой был проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния двух конструкций с одинаковым армированием, но из бетона существенно разной прочности.

Железобетонные балки-стенки БС-1 и БС-2 высотой 1000 мм, толщиной 200 мм и пролетом 4 м, армировались сетками из ортогональных стержней ∅16А500 с шагом 200 мм. В качестве продольной рабочей арматуры в растянутой зоне были установлены четыре стержня ∅28А500. Опирание балок-стенок осуществлялось по углам через стальные прокладки 300×300 мм толщиной 30 мм. Схема армирования балок-стенок показана на рис.1. Физико-механические свойства бетона представлены в таблице 1.

Расчетная схема балок-стенок и схема загружения показаны на рис. 2. При назначении расчетной схемы учитывалась симметрия конструкции и приложения нагрузки. Симметричная часть балки-стенки была разбита на 110 прямоугольных конечных элементов со 135 узлами. Типы конечных элементов на рис.2 выделены тоном и отличаются коэффициентами армирования в направлении оси *x*. Коэффициенты армирования конечных элементов представлены в таблице 2.

Загружение балок-стенок осуществлялось ступенями равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 20 кН/м для балки-стенки БС-1 и 40 кН/м для балки-стенки БС-2. Подъем нагрузки до разрушения включал 14 ступеней для балки-стенки БС-1 и 24 для балки-стенки БС-2. На рис.3 показаны кривые зависимости прогиба балок-стенок от внешней нагрузки.

Нагрузка трещинообразования для балки-стенки БС-1 составила 40 кН/м, первые трещины появились в нижнем ряду конечных элементов (КЭ) с номерами 108,109,110. Для балки-стенки БС-2 нагрузка трещинообразования составила 100 кН/м, первые трещины появились в нижнем ряду КЭ с номерами 107,108,109,110. Схема трещинообразования в балке-стенке БС-2 показана на рис. 4. Ниже, на рис. 5, для сопоставления приводится схема трещинообразования при нагрузке 100 кН/м в балке-стенке БС-1.

Балка-стенка БС-1 разрушилась при нагрузке 280 кН/м, схема трещинообразования в стадии разрушения показана на рис.6. Причиной разрушения явилось исчерпание несущей способности и расслоение сжатого бетона в середине пролета в КЭ с номерами 8,9,10,11 (верхний ряд) и 20,21,22 (средний ряд). Исчерпание прочности бетона сопровождалось текучестью продольной сжатой арматурой. При этом максимальные напряжения в продольной растянутой арматуре в сечении с трещиной (КЭ 110) достигли 320 МПа, что для арматуры класса А500 составляет только 62,5% предела текучести.

Таблица 1. Физико-механические свойства бетона.

Марка эл-та	Кубиковая прочность $R(15\times15$ см), МПа	Призменная прочность R_b, МПа	Прочность при осевом растяжении R_{bt}, МПа	Модуль мгновенно-упругих деформаций E_b, МПа	Абцисса вершины диаграммы сжатия $\hat{\varepsilon}_b$
БС-1	20	15	1.35	27500	0.0020
БС-2	100	71	3.8	43000	0.0029

Таблица 2. Коэффициенты армирования конечных элементов.

Номера конечных элементов	Коэффициент армирования в направлении оси x	Коэффициент армирования в направлении оси y
1 – 22	0.01	0.01
23 – 44	0.0001	0.01
45 – 66	0.01	0.01
67 – 88	0.0001	0.01
89 – 110	0.0616	0.01

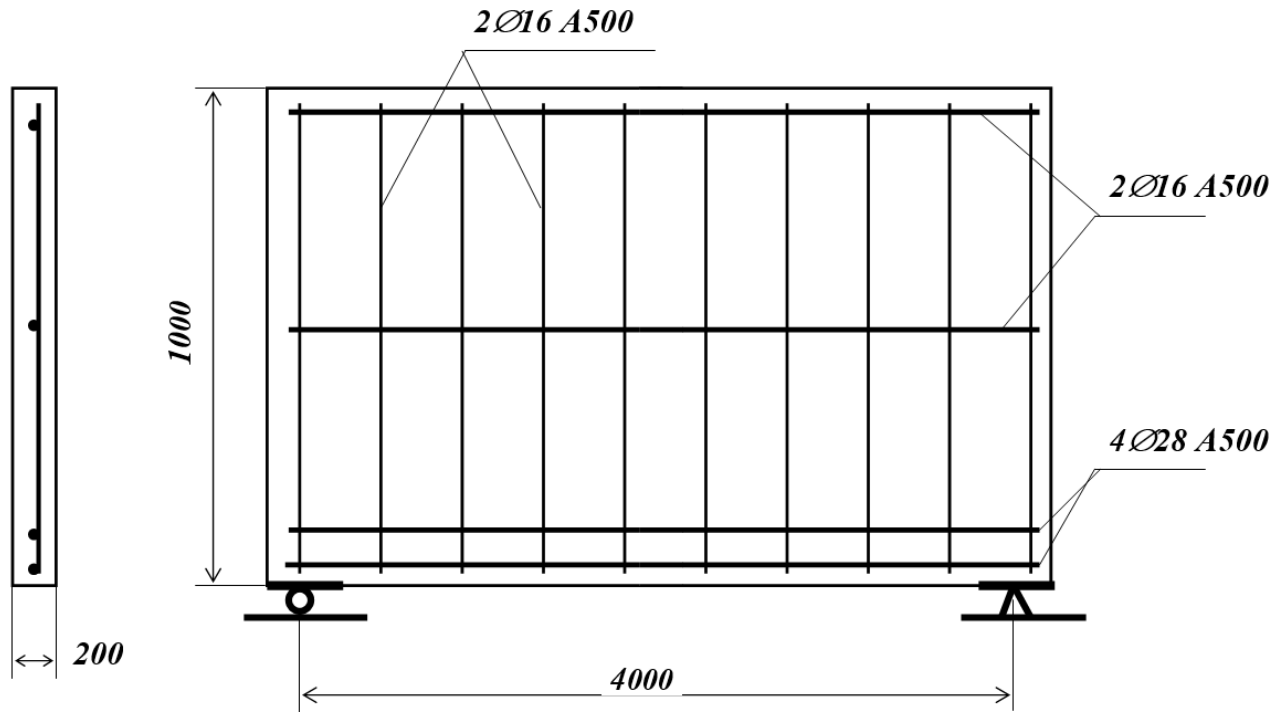


Рисунок 1. Схема армирования балок-стенок.

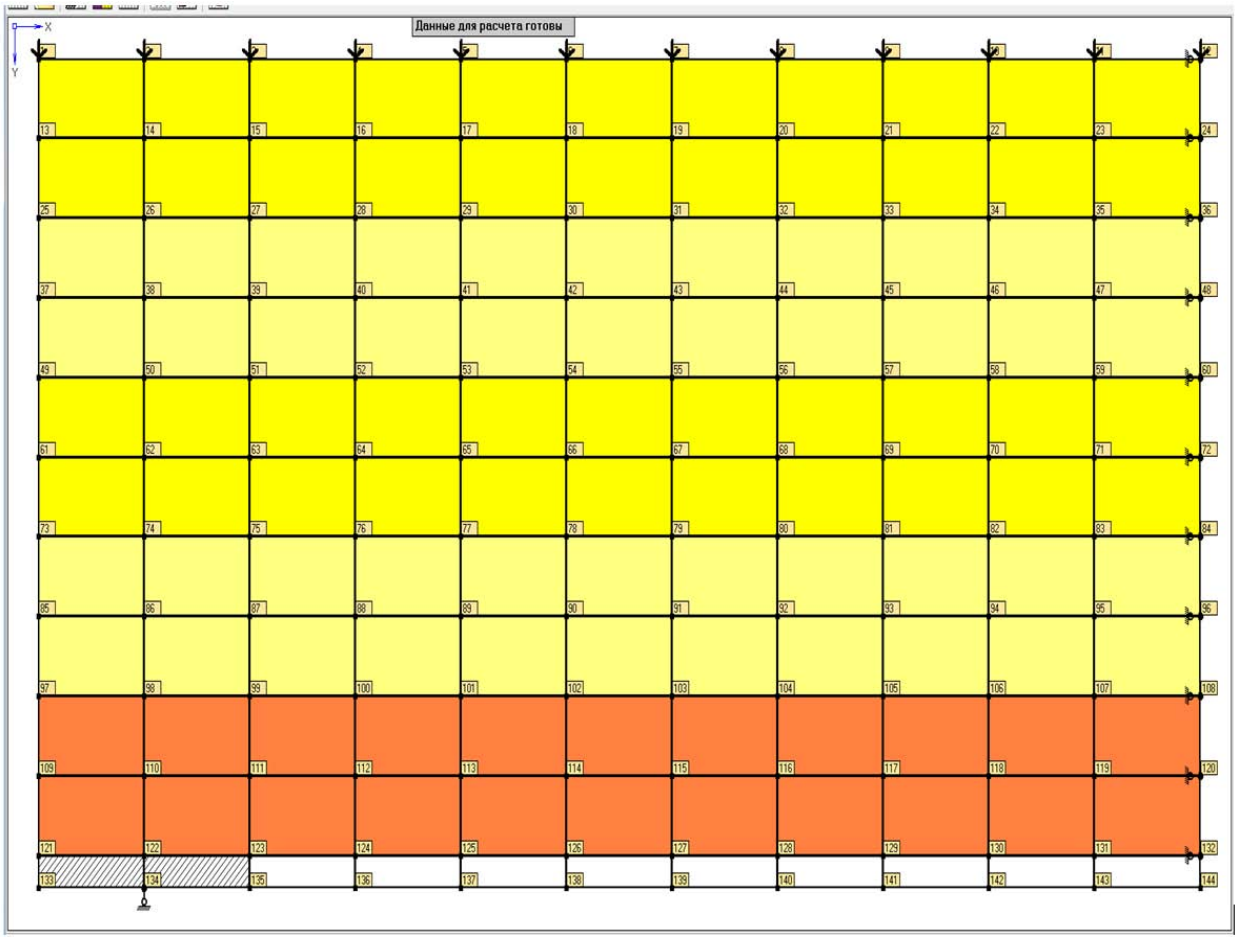


Рисунок 2. Схема конечно-элементной аппроксимации.

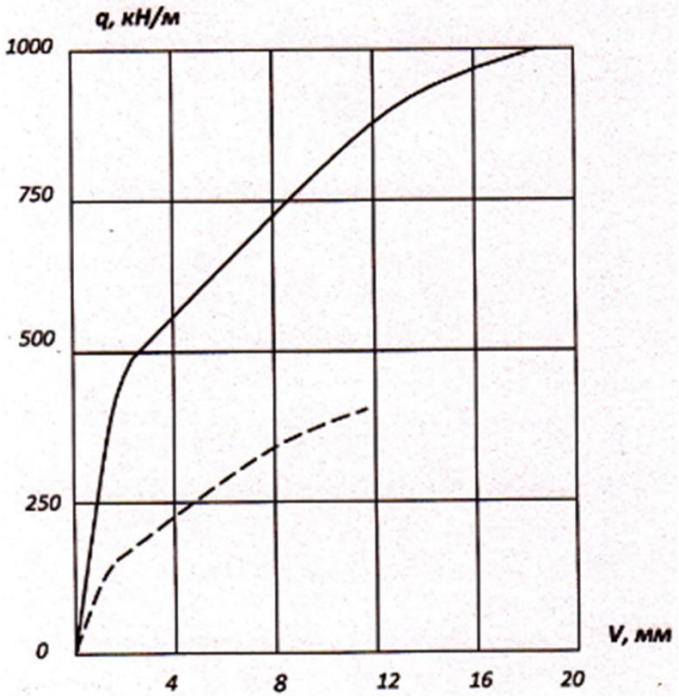


Рисунок 3. Кривые прогиба балок-стенок БС-1 (пунктир) и БС-2 (сплошная линия).

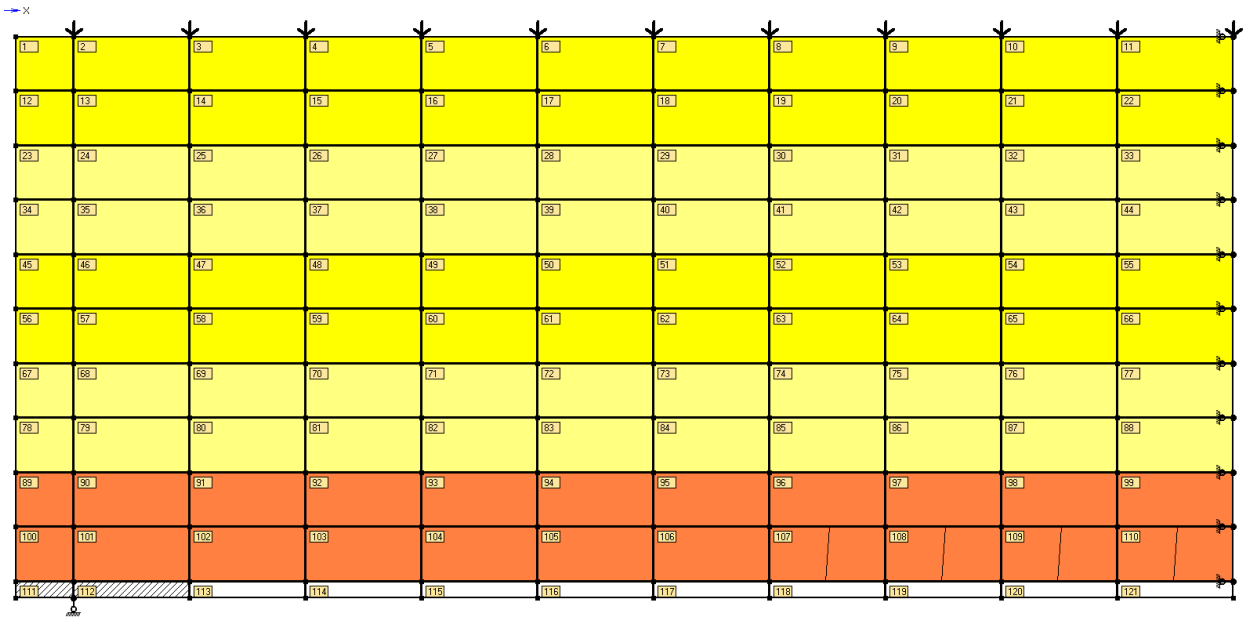


Рисунок 4. Схема трещинообразования в БС-2 при нагрузке 100 кН/м.

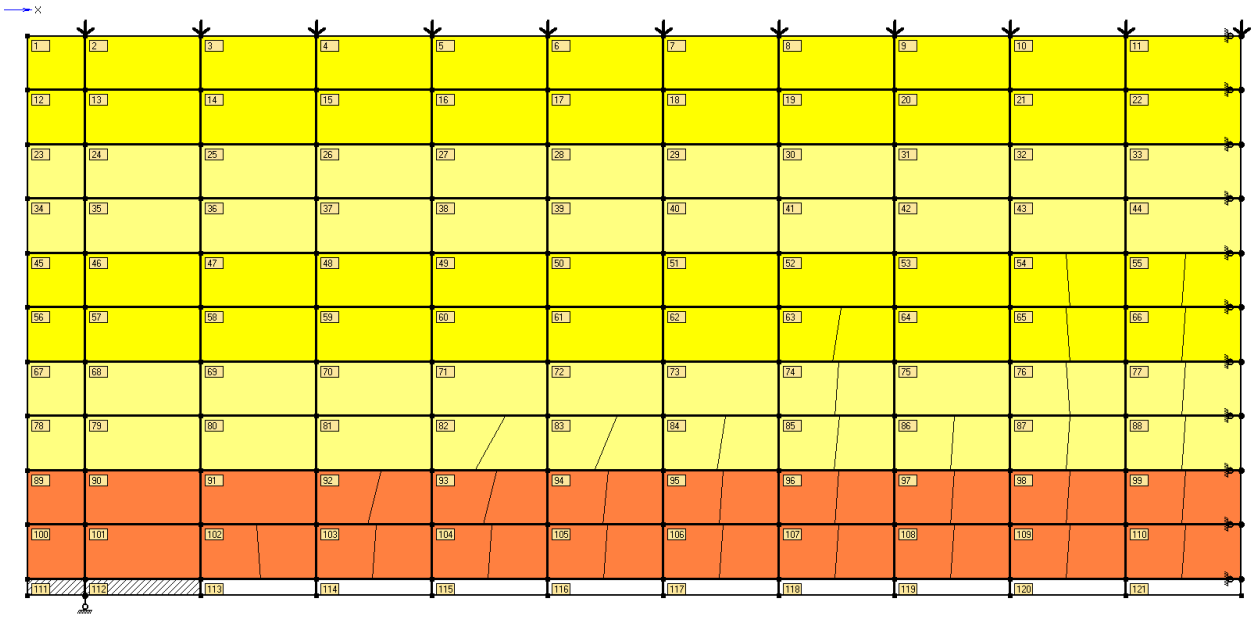


Рисунок 5. Схема трещинообразования в БС-1 при нагрузке 100 кН/м.

Механизм разрушения балки-стенки БС-2 носил принципиально иной характер. Разрушение конструкции сопровождалось текучестью продольной растянутой арматуры, при этом напряжения в бетоне сжатой зоны не достигли призменной прочности. Текучесть продольной растянутой арматуры началась при нагрузке 580 кН/м в нижнем ряду КЭ с номерами 108,109,110. Схема трещинообразования в этот момент показана на рис. 8. Дальнейшее увеличение нагрузки сопровождалось увеличением числа конечных элементов, где напряжения в арматуре достигли предела текучести.

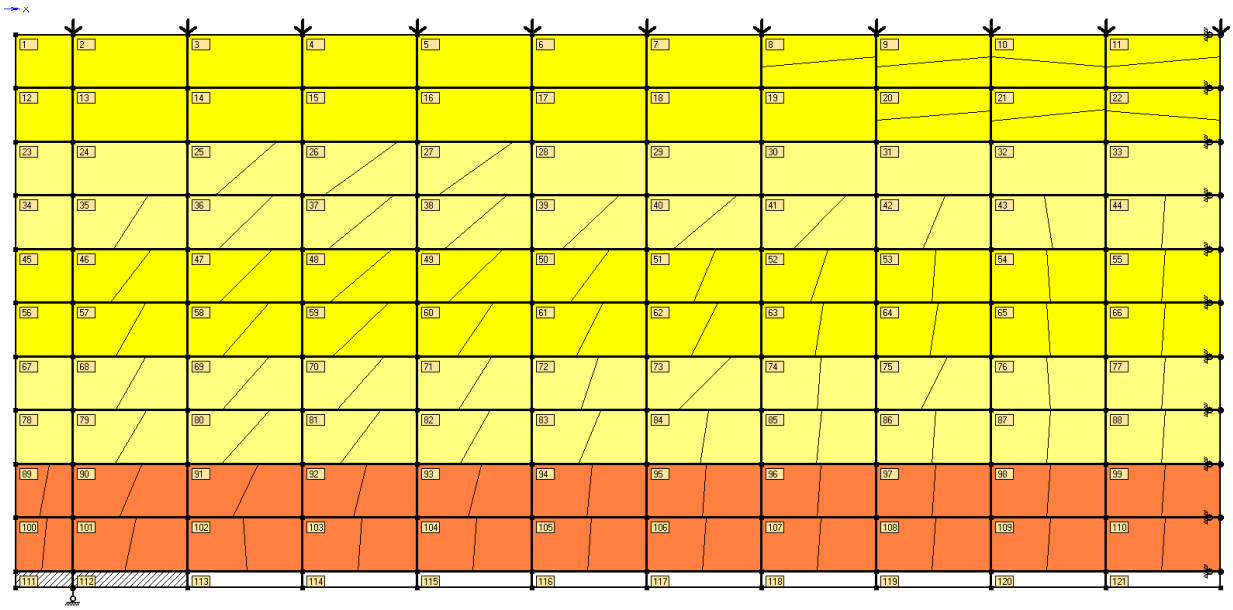


Рисунок 6. Схема трещинообразования в БС-1 при разрушении (нагрузка 280 кН/м).

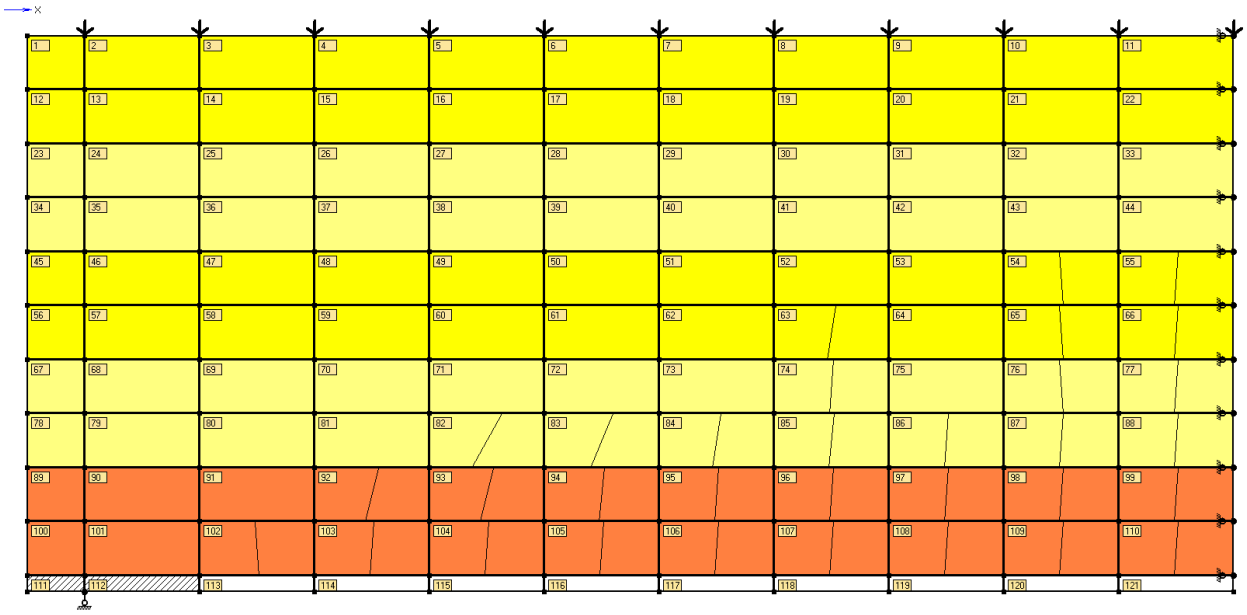


Рисунок 7. Схема трещинообразования в БС-2 при нагрузке 280 кН/м.

При нагрузке 680 кН/м текучесть арматуры отмечается во втором ряду КЭ с номерами 95-99. Исчерпание несущей способности конструкции произошло при нагрузке 960 кН/м и сопровождалось существенным, на 16,5% увеличением прогиба на последней ступени нагружения и резким ухудшением сходимости итерационного процесса. При этом текучесть арматуры имела место практически по всему нижнему поясу балки-стенки (в КЭ с номерами 103-110 в нижнем ряду и в КЭ с номерами 93-99 во втором ряду). Схема трещинообразования в балке-стенке БС-2 при разрушении показана на рис.9.

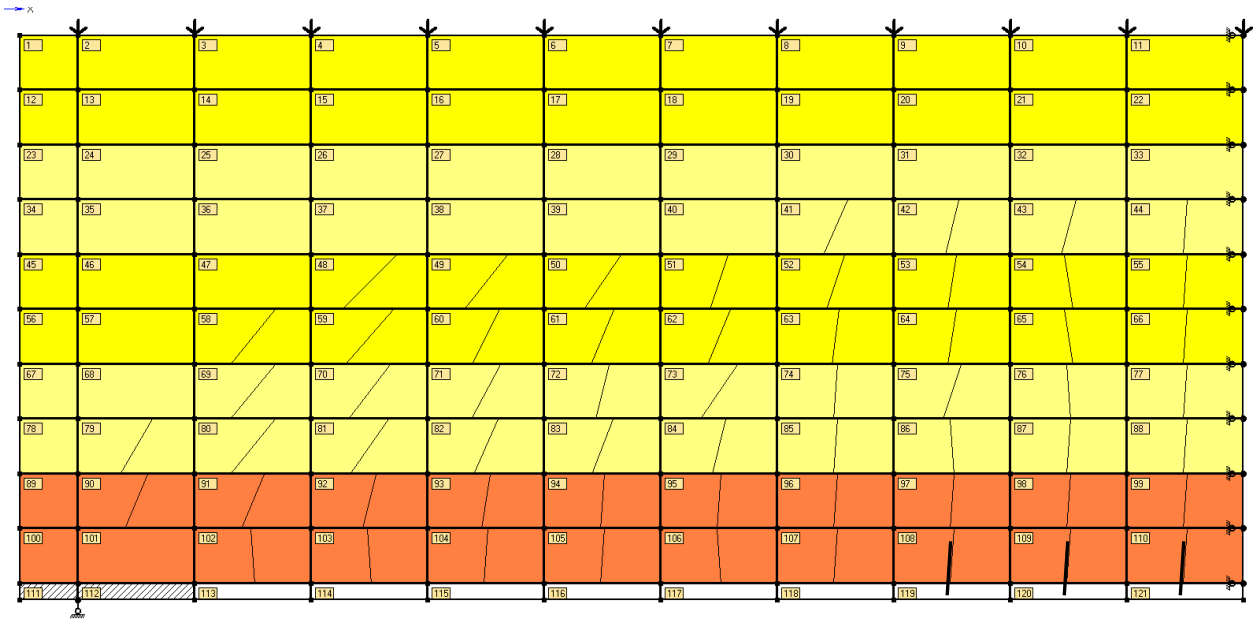


Рисунок 8. Схема трещинообразования в БС-2 при нагрузке 580 кН/м.

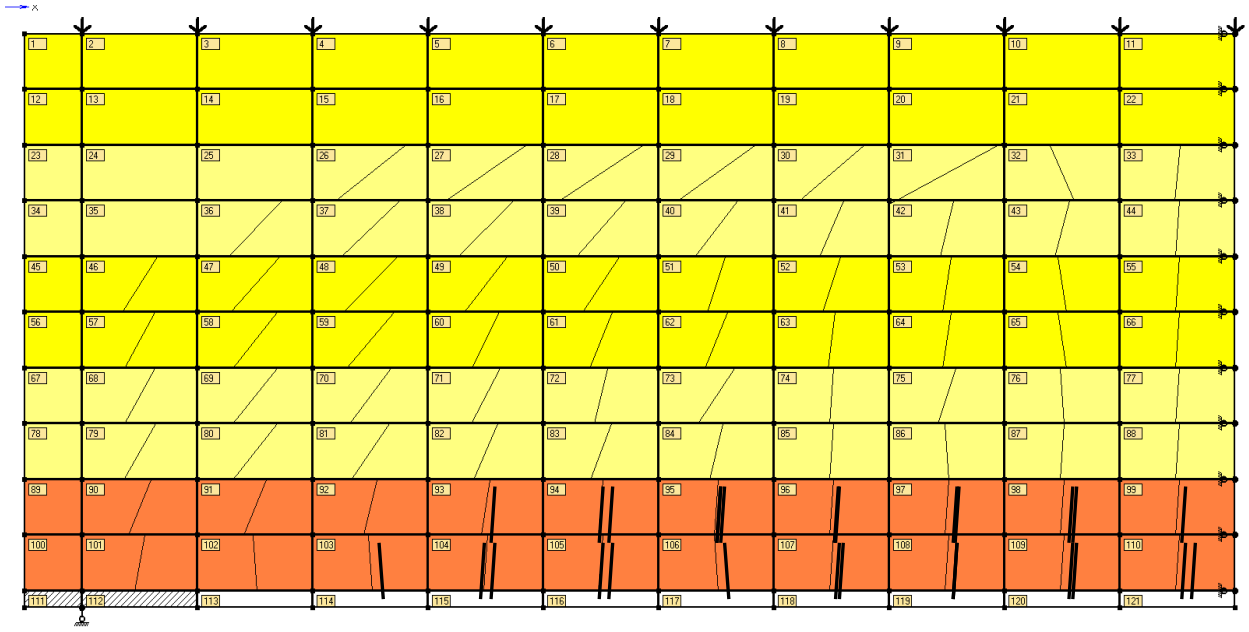


Рисунок 9. Схема трещинообразования в БС-2 при разрушении (нагрузка 960 кН/м).

Сравнительный анализ позволяет сделать вывод, что учет действительных свойств материала существенно повышает точность компьютерного моделирования. Прочность бетона является решающим фактором, определяющим механизм разрушения конструкции и эффективность использования арматуры. На стадии проектирования наиболее надежным и точным инструментом оценки эксплуатационной пригодности плоскостных железобетонных конструкций является компьютерное моделирование на базе нелинейной деформационной модели с учетом действительных прочностных и деформативных свойств бетона и арматуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н., Петров А.Н., Палювина С.Н.** Модель деформирования железобетона в приращениях и расчет железобетонных балок-стенок и изгибаемых плит с трещинами. – Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2013. – 200 с.
2. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики железобетона. − М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Karpenko N.I., Karpenko S.N., Petrov A.N., Paluvina S.N.** Model Deformirovanija Zhelezobetona v Prirashhenijah i Raschet Zhelezobetonnyh Balok-Stenok i Izgibaemyh Plit s Treshhinami [Model of Deformation of Reinforced Concrete in Increments and Analysis of Reinforced Concrete Deep Beams and Plates with Cracks]. Petrozavodsk, Petrozavodsk State University, 2013, 200 pages.
2. **Karpenko N.I.** Obshhie Modeli Mehaniki Zhelezobetona [General Models of Reinforced Concrete Mechanics]. Moscow, Stroyizdat, 1996, 416 pages.

Карпенко Николай Иванович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 127238, Россия, Москва, Локомотивный проезд, д. 21; тел. +7 (495) 482-40-76; факс +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Карпенко Сергей Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 127238, Россия, Москва, Локомотивный проезд, д. 21; тел. +7 (495) 482-40-76; факс +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Петров Алексей Николаевич, советник РААСН, доцент, доктор технических наук; заведующий кафедрой архитектуры, строительных конструкций и геотехники Петрозаводского государственного университета; Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33, каб. 366;

Nikolay I. Karpenko, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Principal Researcher, Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia; phone +7 (495) 482-40-76; fax +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Sergey N. Karpenko, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia; phone +7 (495) 482-40-76; fax +7(495) 482-40-60; E-mail: niisf@niisf.ru.

Alexey N. Petrov, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Associate Professor, Dr.Sc.; Head of Department of Architecture, Building Structures, Petrozavodsk State University; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; office 366, 33, pr. Lenina, Petrozavodsk, the Republic of Karelia, 185910, Russia; phone +7 (814-2) 71-10-37; E-mail: petr@petrsu.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-90-95

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА И УСИЛИЙ В ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М.Н. Кирсанов
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Задача о прогибе плоской статически определимой фермы, имеющей две опоры и сложную решетку, решена в системе компьютерной математики Maple в символьной форме. Использован метод индукции и соответствующие операторы получения и решения рекуррентных уравнений. Найдены выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Проанализировано влияние распределения материала по стержням поясов фермы и решетки, зависимость прогиба от высоты фермы и числа панелей. Получено асимптотическое приближение решения для случая пролета фиксированной длины и заданной нагрузке, равномерно распределенной по узлам нижнего пояса.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, интеграл Мора, Maple

FORMULAS FOR COMPUTING OF DEFLECTION AND FORCES IN THE TRUSS WITH ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Mikhail N. Kirsanov
National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow, RUSSIA

Abstract: The problem of the deflection of the flat statically determinate truss, having two supports and a complex lattice is solved in the system of computer mathematics Maple in symbolic form. The induction method and special operators receiving and solving recurrence equations are used to obtain the solution. The expression for forces in the most compression and tie rods are detected. Analyzed the distribution of material along the rods of the belts, girders and lattice, dependence of a deflection of the height of the truss and the number of panels. The asymptotic approximation of the solution for the case of fixed span length and a given load, uniformly distributed over the nodes of the lower belt, is obtained.

Keywords: truss, deflection, induction, Mohr' integral, Maple

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С развитием систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Maxima и др.) появилась возможность на основе алгоритмов, ранее применяемых в численных расчетах, получать точные формульные решения задач механики, в том числе и механики стержневых систем [1-3]. Ценность аналитического результата, помимо всего прочего, определяется числом независимых параметров исследуемой конструкции. Для ферм это, как правило, размеры, свойство материала и нагрузки. Получить в системе компьютерной математики конечную формулу, включающую в себя эти параметры, не составляет труда. Достаточно уравнения равновесия составить не в численной, а в символьной форме; получить решение системы; и с помощью интеграла Мора вывести итоговую формулу для прогиба, если ставится такая задача. Ввести же в эту формулу число панелей можно далеко не всегда. Во-первых, это возможно при условии регулярности схемы фермы с одним, реже с двумя натуральными числами, характеризующими степень ее сложности. Простая балочная ферма с параллельными поясами и раскосной решеткой — пример такой регу-

лярной конструкции. Число панелей — это параметр сложности системы. Во-вторых, специфика аналитических преобразований такова, что с увеличением числа стержней, а следовательно, и уравнений равновесия, время преобразований растет значительно быстрее, чем это происходит для численных расчетов, и, начиная с некоторого порядка системы уравнений, время счета настолько велико, что получить аналитическое решение практически невозможно.
Обзор некоторых аналитических решений для плоских ферм содержится в [4-6].

2. ГЕОМЕТРИЯ ФЕРМЫ

Рассмотрим балочную ферму с решеткой шпренгельного типа (рис. 1). В качестве панели будем считать здесь ячейку периодичности длиной $2a$ из семи стержней.
В ферме с n панелями в половине пролета содержится

$$m=16n+4$$

стержней, включая три стержня, моделирующие опоры. Число узлов (шарниров) при этом равно $8n+2$, следовательно, система статически определима. В такой ферме традиционными способами, например, методом сечений, можно вычислить усилия не во всех стержнях. Для некоторых стержней сечений Риттера не существует. Поэтапный метод вырезания узлов возможен, но чтобы добраться до стержней где-нибудь в середине пролета потребуется вырезать много узлов. При этом, как всегда, возникает погрешность вычислений, неизбежная в результате накопления ошибок округления. Поэтому наиболее простым и точным способом решения задачи определения усилий в стержнях остается аналитический метод с использованием метода индукции, который и предлагается применить в данной задаче. Основываясь на алгоритме [7], реализованном на языке Maple (хотя на этом этапе решения задачи вполне допустимы любые другие языки программирования), найдем усилия в стержнях фермы. Введем данные о координатах узлов в программу. Выберем начало координат в левой подвижной опоре. Пронумеруем узлы и стержни (рис. 2).
Имеем следующие координаты узлов:

$$x_i = a(i-1),\ y_i = 0,\ \ i=1,\dots,4n+1,$$
$$x_{i+4n+1} = a(2i-1),\ \ y_{i+4n+1} = h,\ \ i=1,\dots,2n,$$
$$x_{i+6n+1} = 2a(i-1),\ \ y_{i+6n+1} = 2h,\ \ i=1,\dots,2n+1.$$

Порядок соединения стержней и узлов зададим по аналогии с заданием вершин и ребер графа условными векторами, координаты которых соответствуют номерам конечных шарниров стержня. Для стержней поясов имеем:

$$\bar{V}_i = [i, i+1)],\ \ i=1,\dots,4n,$$
$$\bar{V}_{i+4n} = [i+6n+1,\ \ i+6n+2],\ \ i=1,\dots,2n,$$
$$\bar{V}_{i+6n} = [2i-1, i+6n+1],\ \ i=1,\dots,2n+1,$$

Стержни решетки заданы векторами:

$$\bar{V}_{i+8n+1} = [2i, i+4n+1],\ i=1,\dots,2n,$$
$$\bar{V}_{i+10n+1} = [2i-1, i+4n+1)],$$
$$\bar{V}_{i+11n+1} = [2i+2n+1,\ \ i+5n+1],$$
$$\bar{V}_{i+12n+1} = [i+6n+1, i+4n+1)],$$
$$\bar{V}_{i+13n+1} = [i+7n+2,\ \ i+5n+1],$$
$$\bar{V}_{i+14n+1} = [i+6n+2, i+4n+1)],$$
$$\bar{V}_{i+15n+1} = [i+7n+1,\ \ i+5n+1],\ \ i=1,\dots,n.$$

Для вычисления направляющих косинусов, являющихся коэффициентами уравнений равновесия узлов в проекциях, вычислим длины стержней и проекции их условных векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{{l_{1,i}}^2 + {l_{2,i}}^2},\ \ l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}},$$
$$l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}},\ \ i=1,\dots,m.$$

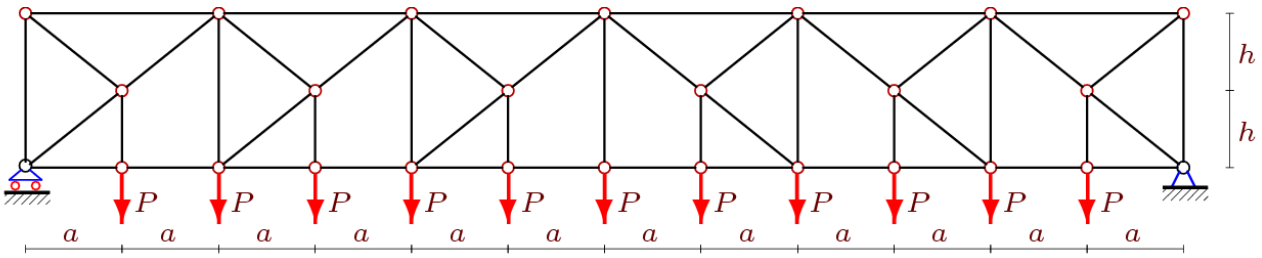


Рисунок 1. Ферма, n=3.

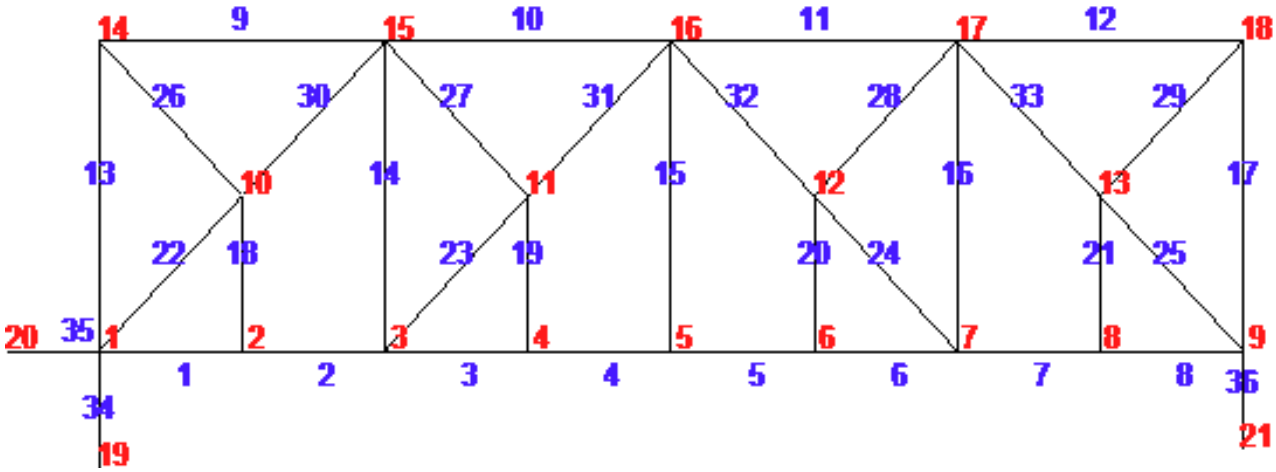


Рисунок 2. Номера стержней и узлов, n=2.

В номере $V_{j,i}$ индекс j принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора $\bar{V}_i$, второй – номеру стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i}/l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \le n_s,$$
$$j = 1,2, \quad G_{k,i} = l_{j,i}/l_i, \; k = 2V_{i,1} - 2 + j,$$
$$k \le m, \quad j = 1,2, \quad i = 1,...,m.$$

Система уравнений равновесия узлов имеет вид

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B},$$

где $\bar{S} = \{S_1,...,S_m\}$ – вектор усилий, $\bar{B}$ – вектор внешних нагрузок. Для определения прогиба фермы используем интеграл Мора,

$$\Delta = P\sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_i),$$

где суммирование ведется только по стержням фермы и обозначено: $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (узел $2n$+1, рис. 2), $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней. Жесткости стержней EF_i в общем случае разные. Пусть площади сечений верхнего и нижнего пояса выражаются через некоторую условную (можно и единичную) площадь: $F_i = F/\gamma_1$, $i = 1,...,6n$. Площади сечений всех стержней решетки имеют вид: $F_i = F/\gamma_2$, $i = 6n+1,...,m-3$. Последовательный аналитический расчет ферм с увеличивающимся всякий раз числом панелей выявил, что формула для прогиба имеет один и тот же вид:

$$\Delta = P\frac{A_n a^3\gamma_1 + (H_n h^3 + C_n c^3)\gamma_2}{2h^2 EF}, \qquad (1)$$

отличаясь только коэффициентами при степенях (кубах) размеров a, h и

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}\ .$$

Для того, чтобы найти общий член последовательности коэффициентов 4, 58, 282, 876, 2120, 4374, 8078, 13752, 21996, 33490 при a^3 необходимо с помощью специального оператора rgf_findrecur найти рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет эта последовательность

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5},$$

а затем решить его, используя оператор rsolve. Решение имеет вид

$$A_n = n(10n^3 + 5n - 3)/3\,.$$

Аналогично получаем выражения для других коэффициентов:

$$H_n = 4(n^2 - n + 1), C_n = n(4n - 1).$$

3. АНАЛИЗ ПРОГИБА

Рассмотрим случай фермы с заданным пролетом L и произвольным числом панелей, так что

$$a = L/(4n)\,.$$

Аналитическая форма решения позволяет наглядно выявить некоторые его особенности. Зафиксируем также общую нагрузку на ферму

$$P_{sum} = (4n - 1)P\,.$$

Введем обозначение для безразмерного прогиба

$$\Delta' = \Delta EF/(P_{sum}L)\,.$$

На рисунке 3 при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ и L=50 м даны кривые зависимости прогиба (1) от числа панелей, показывающие, что в данной постановке решение имеет явно выраженный экстремум, зависящий от высоты фермы. Это дает возможность проектировщику выбрать оптимальное число панелей. Кроме того заметны и асимптоты кривых. Для аналитического их выражения $\Delta' = \Delta_0 + kn$ вычислим пределы:

$$k = \lim_{n\to\infty} \Delta'/n = \gamma_2 h/L\,,$$

$$\Delta_0 = \lim_{n\to\infty}(\Delta' - kn) = (5\gamma_1 L^3 - 288\gamma_2 h^3)/(768Lh^2).$$

Интересно отметить, что угол наклона асимптоты зависит только от жесткости решетки γ_2, высоты h и пролета L. Зависимость прогиба от высоты фермы (рис.4) также обнаруживает экстремум. С увеличением жесткости решетки (уменьшение γ_2) оптимальная по жесткости высота фермы увеличивается.

4. УСИЛИЯ В СТЕРЖНЯХ

Для определения закономерности образования коэффициентов в усилиях стержней потребовалась последовательность расчетов меньшей длины. Индукция по результатам шести ферм с числом панелей от 1 до 6 дает общую формулу для наиболее растянутого стержня в середине нижнего пояса

$$S_{2n}^{(P)} = Pn^2 a/h\,.$$

Аналогично, формула для усилия в наиболее сжатом стержне середины верхнего пояса имеет вид:

$$S_{5n}^{(P)} = -P(2n^2 - 1)a/(2h).$$

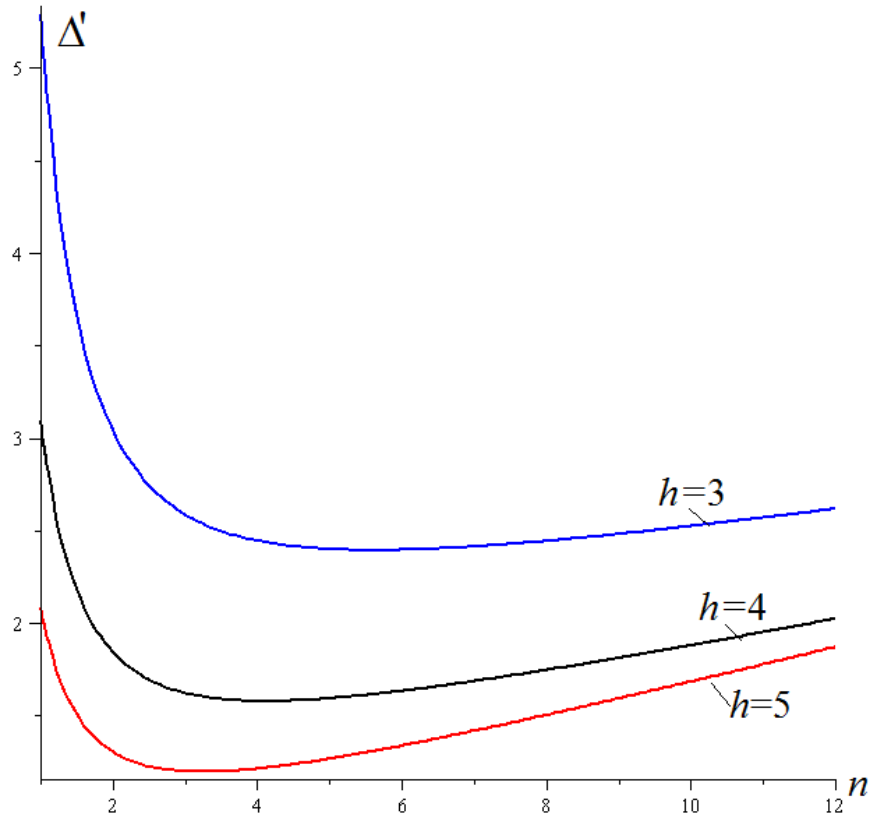


Рисунок 3. Зависимость прогиба от числа панелей.

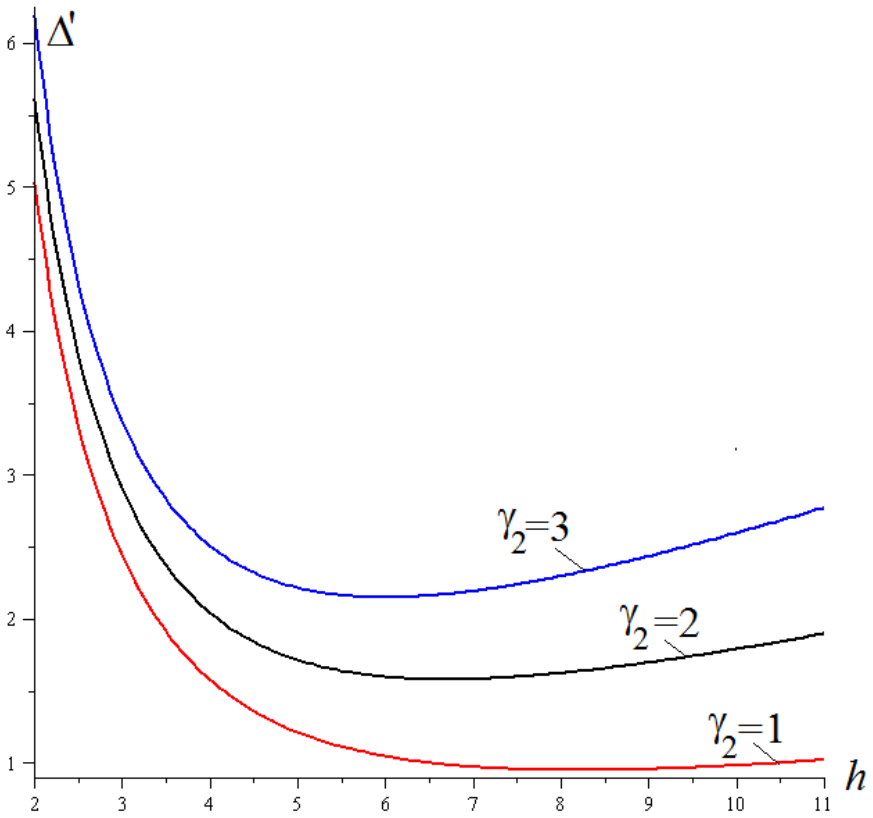


Рисунок 4. Зависимость прогиба от высоты фермы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kirsanov M. N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover// Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.
2. **Кирсанов М.Н.** Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly"// Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4. С. 2-5.
3. **Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N.** Line of influence of the deflection for cantilever truss //Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6–7.
4. **Тиньков Д.В.** Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
5. **Тиньков Д.В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
6. **Кийко Л.К.** Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
7. **Кирсанов М.Н.** Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

REFERENCES

1. **Kirsanov M.N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 3(31), pp. 71-79.
2. **Kirsanov M.N.** Analiticheskij Raschet Balochnoj Fermy s Reshetkoj Tipa “Butterfly” [An Analytical Analysis of a Beam Farm with a “Butterfly”]. // Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenij, 2016, No. 4, pp. 2-5.
3. **Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M.N.** Line of Influence of the Deflection for Cantilever Truss. // Vestnik nauchnyh konferencij, 2016, No. 2-1(6), pp. 6-7.
4. **Tinkov D.V.** Analiz Tochnyh Reshenij Progiba Regulyarnyh Sharnirno-Sterzhnevyh Konstrukcij [Analysis of Exact Solutions to the Deflection of Regular Hinge-Rod Structures]. // Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernyh Konstrukcij i Sooruzhenij, 2015, No. 6, pp. 21-28.
5. **Tinkov D.V.** Sravnitel'nyj Analiz Analiticheskih Reshenij Zadachi o Progibe Fermennyh Konstrukcij [Comparative Analysis of Analytical Solutions of the Problem of Deflection of Truss Structures]. // Inzhenerno-Stroitel'nyj Zhurnal, 2015, No. 5(57), pp. 66-73.
6. **Kijko L.K.** Analiticheskaya Otsenka Progiba Arochnoj Fermy pod Dejstviem Vet-rovoj Nagruzki [Analytical Estimation of Arch Deflection Under the Influence of Wind Load]. // Nauchnyj vestnik, 2016, No. 1(7), pp. 247-254.
7. **Kirsanov M.N.** Maple i Maplet. Resheniya Zadach Mekhaniki [Maple and Maplet. Solution of Problems of Structural Analysis]. Saint-Petersburg, Lan, 2012, 512 pages.

Кирсанов Михаил Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра теоретической механики и мехатроники; 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, дом 14;
тел. +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru.

Kirsanov Mikhail Nikolaevich, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics; 111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya str., 14; phone +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-96-108

КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ ПОЛКИ СТЕРЖНЯ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ЕЁ ТОЛЩИНЫ И ОЧЕРТАНИЯ ШИРИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ИЛИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДВУХ ГЛАВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Л.С. Ляхович [1], П.А. Акимов [1, 2, 3, 4], Б.А. Тухфатуллин [1]

[1] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[3] Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ
[3] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Ранее был сформулирован критерий минимальной материалоемкости при проектировании очертания ширины полок стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты в одной главной плоскости инерции сечения. В данной работе формулируется критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании её толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения.

Ключевые слова: оптимизация, функция цели, ограничения по устойчивости, частоте собственных колебаний, критерии минимальной материалоемкости, формы потери устойчивости, формы собственных колебаний, напряжения, двутавр

CRITERION OF MINIMUM MATERIAL CONSUMPTION OF FLANGE OF I-SHAPED BAR WITH A VARIATION IN ITS THICKNESS AND OUTLINE OF THE WIDTH, WITH RESTRICTION TO THE VALUE OF THE CRITICAL FORCE OR RESTRICTION TO THE VALUE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY IN TWO PRINCIPAL PLANES OF INERTIA OF THE SECTION

Leonid S. Lyakhovich [1], Pavel A. Akimov [1, 2, 3, 4], Boris A. Tukhfatullin [1]

[1] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[3] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[4] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

Abstract: We have already presented original criterion of minimum material consumption within the design of the outline of the width of the I-shaped bar and the stability constraints or restriction to the value of the first natural frequency in one principal plane of inertia of the cross-section. This paper is devoted in its turn to a criterion for the minimum material capacity of the I-shaped bar with a variation in its thickness and outline of the width, with restrictions to the value of the critical force or restriction to the value of the first natural frequency in two principal planes of inertia of the section.

Keywords: optimization, target function, stability constraints, natural frequency, criteria of minimum material consumption, mode of buckling, natural modes, stresses, I-shaped bar

В настоящей статье рассматриваются стержни двутаврового поперечного сечения. Соответствующая принятая система координат показана на рисунке 1.

Критерий минимальной материалоемкости при проектировании очертания ширины полок стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты в одной главной плоскости инерции сечения $x-0-y$ был сформулирован в [1]. В некоторых случаях появляется необходимость введения ограничений на величину первой критической силы или частоты собственных колебаний и во второй главной плоскости инерции $x-0-z$. При наличии такого рода условий появляется возможность варьировать при оптимизации не только очертанием ширины полки, но и величиной её толщины.

Итак, варьируется функция ширины полки ($b_2(x)$) и величина толщины полки (δ_p); не варьируются высота стенки (b_1), толщина стенки (δ_{st}); ограничиваются величины первой критической силы или частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции. Отметим, что учитывается влияние продольной силы на величину собственной частоты и влияние возможности вибрационных воздействий заданной частоты на величину критической силы.

Запишем функционал цели в виде

$$V_0 = 2\int_0^l b_2(x)\delta_p dx, \qquad (1)$$

где V_0 – объем материала полок; $2b_2(x)\delta_p$ – площадь сечения полок.

Выведем при поставленных условиях критерий минимальной материалоемкости полки при ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний, но с учетом влияния продольной силы. Сформулированный таким образом критерий может использоваться и при ограничениях по устойчивости, если в нем будет принято нулевое значение собственной частоты.

Ограничения на величину низшей частоты собственных колебаний записываются в виде

$$\omega_0 \le \omega 1[1]; \qquad (2)$$

$$\omega_0 \le \omega 2[1], \qquad (3)$$

где ω_0 – число, ограничивающее величину низшей частоты собственных колебаний; $\omega 1[1]$ – низшая частота собственных колебаний в плоскости $x-0-y$; $\omega 2[1]$ соответственно в плоскости $x-0-z$.

Если принять ограничения в виде

$$\omega_0 = \omega 1[1] = \omega 2[1], \qquad (4)$$

то, как известно [1, 2], должны иметь место следующие условия

$$\Theta_{\omega 1} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EI_1(x)(v_\omega'')^2 - P(x)(v_\omega')^2 - (\omega_O)^2[m(x)+\rho F(x)v_\omega^2]\}dx = 0; \qquad (5)$$

$$\Theta_{\omega 2} = \frac{1}{2}\int_0^l \{EI_2(x)(w_\omega'')^2 - P(x)(w_\omega')^2 - (\omega_O)^2[m(x)+\rho F(x)w_\omega^2]\}dx = 0, \qquad (6)$$

где $\Theta_{\omega 1}$ и $\Theta_{\omega 2}$ – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции; $I_1(x)$ и $I_2(x)$ – соответствующие моменты инерции сечения; E, ρ – соответственно модуль упругости и удельная масса материала стержня; $P(x)$ – продольная сила; $m(x)$ – интенсивность внешней массы; $F(x)$ – площадь сечения стержня; v_ω и w_ω – ординаты форм собственных колебаний соответственно в главных плоскос-

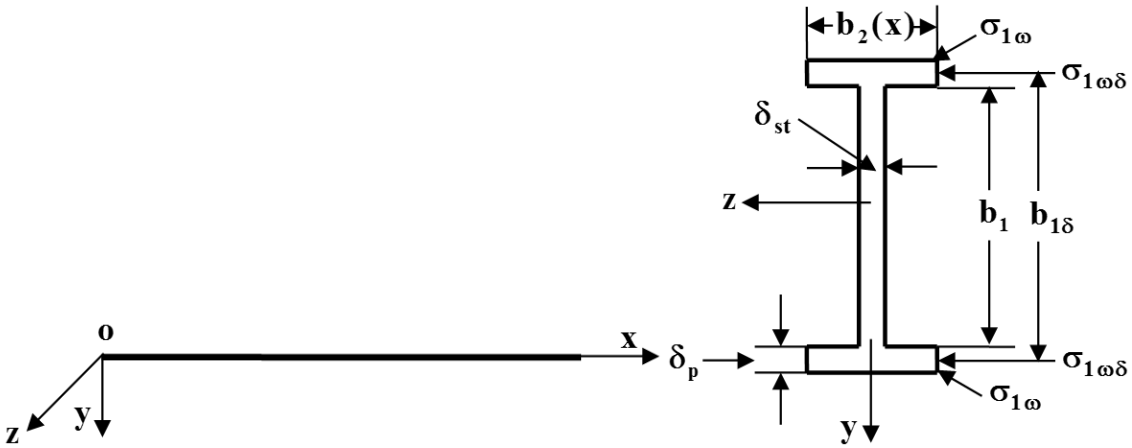


Рисунок 1. Принятая система координат и некоторые обозначения.

колебаний соответственно в главных плоскостях инерции $x-0-y$ и $x-0-z$.

Таким образом, требуется отыскать такую функцию изменения ширины полки $b_2(x)$ и такое значение толщины полки δ_p, при которых будут выполняться условия (5)-(6) и функционал объема полки (1) будет минимальным.

Функционал, экстремум которого обеспечит минимум функционалу (1) и выполнение условий (5) и (6), запишется в виде

$$V_{0\omega} = \int_0^l \{[2b_2(x)\delta_p] - \lambda_1[EI_1(x)(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - (\omega_O)^2[m(x) + \rho F(x)v_\omega^2]] - \lambda_2[EI_2(x)(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - (\omega_O)^2[m(x) + \rho F(x)w_\omega^2]]\}dx, \quad (7)$$

где λ_1 и λ_2 – неопределенные множители.

С учетом соотношений (5) и (6) рассматриваемая задача является изопериметрической, а λ_1 и λ_2 постоянными величинами.

Очевидно, что вариации функционала $V_{0\omega}$ по v и w приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации $V_{0\omega}$ по λ_1 и λ_2 – к выполнению условий (5) и (6).

Моменты инерции сечения запишем в виде

$$I_1(x) = \frac{b_2(x)}{12}(b_1 + 2\delta_p)^3 - \frac{b_2(x) - \delta_{st}}{12}(b_1)^3 = \frac{1}{12}[(b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^3 - (b_2(x) - \delta_{st)})b_1^3]; \quad (8)$$

$$I_2(x) = \frac{2[b_2(x)]^3\delta_p + [b_{st}]^3 b_1}{12}. \quad (9)$$

Следовательно, функционал (7) принимает следующий вид:

$$V_{0\omega} = \int_0^1 \{[2b_2(x)\delta_p] - \lambda_1[\frac{E}{12}[(b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^3 - (b_2(x) - \delta_{st})b_1^3](v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - (\omega_0)^2[m(x) + \rho(2b_2(x)\delta_p + b_1\delta_{st})]v_\omega^2] - \lambda_2[E\frac{2[b_2(x)]^3\delta_p + [b_{st}]^3 b_1}{12}(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - (\omega_0)^2[m(x) + \rho(2b_2(x)\delta_p + b_1\delta_{st})]w_\omega^2]\}dx. \quad (10)$$

Экстремум функционала (19) определяется решением системы уравнений [2]

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = 0, \quad \delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0 \qquad (11)$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = \int_0^1 \{2b_2(x) - \lambda_1 \{[\frac{E}{2}(b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^2)] \times$$
$$\times (v''_\omega)^2 - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x) v_\omega^2\} -$$
$$- \lambda_2 [\frac{E}{6} b_2(x)^3 (w''_\omega)^2 - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x) w_\omega^2]\} \mathrm{d}x = 0; \qquad (12)$$

$$\delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = 2\delta_p - \lambda_1 \{\frac{E}{12}[b_1 + 2\delta_p)^3 - b_1^3] \times$$
$$\times (v''_\omega)^2 - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p v_\omega^2\} -$$
$$- \lambda_2 [E \frac{b_2^2(x)\delta_p}{2} (w''_\omega)^2 - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p w_\omega^2 = 0. \qquad (13)$$

Преобразуем некоторые выражения из уравнений (12) и (13). Рассмотрим из уравнения (13) выражение

$$\frac{E}{12}[b_1 + 2\delta_p)^3 - b_1^3](v''_\omega)^2 =$$
$$= \frac{E^2(b_1^3 + 6b_1^2\delta_p + 12b_1\delta_p^2 + 8\delta_p^3 - b_1^3)}{12E}(v''_\omega)^2 =$$
$$= \frac{2E^2\delta_p(3b_1^2 + 6b_1\delta_p + 4\delta_p^2)}{12E}(v''_\omega)^2 =$$
$$= \frac{E^2\delta_p[(b_1^2 + 4b_1\delta_p + 4\delta_p^2) + 2b_1^2 + 2b_1\delta_p)}{6E}(v''_\omega)^2 =$$
$$= \frac{E^2\delta_p[(b_1 + 2\delta_p)^2 + 2b_1(b_1 + \delta_p)]}{6E}(v''_\omega)^2. \qquad (14)$$

Умножим числитель и знаменатель (14) на $[I_1(x)]^2$. Как известно,

$$EI_1(x)v''_\omega = M_1(x) \qquad (15)$$

– изгибающий момент в плоскости $x - 0 - y$. Очевидно, что

$$\frac{M_1(x)(b_1 + 2\delta_p)}{2I_1(x)} = \sigma_{1\omega} \qquad (16)$$

– нормальное напряжение в крайних волокнах поперечного сечения стержня.
Обозначим

$$b_{1\delta} = \sqrt{b_1(b_1 + \delta_p)}\,. \qquad (17)$$

Тогда имеем (рис. 1):

$$\frac{M_1(x)b_{1\delta}}{2I_1(x)} = \sigma_{1\omega\delta} \qquad (18)$$

– нормальное напряжение в волокнах поперечного сечения стержня, отстоящих от нейтральной оси на расстояние

$$\frac{1}{2}b_{1\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{b_1(b_1 + \delta_p)}\,. \qquad (19)$$

Теперь выражение (14) запишется в виде

$$\frac{2\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{4\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega\delta}^2(x) \qquad (20)$$

Аналогично имеем:

$$E\frac{b_2^2(x)\delta_p}{2}(w''_\omega)^2 = \frac{\delta_p E^2 b_2^2(x)}{2E}\frac{[I_2(x)]^2}{[I_2(x)]^2}(w''_\omega)^2, \qquad (21)$$

где соответственно

$$EI_2(x)w''_\omega = M_2(x) \qquad (22)$$

– изгибающий момент в плоскости $x - 0 - z$;

$$\frac{M_2(x)b_2(x)}{2I_2(x)} = \sigma_{2\omega}(x) \qquad (23)$$

– нормальное напряжение в крайних волокнах поперечного сечения стержня от момента $M_2(x)$.

Далее с учетом проведенных преобразований уравнения (12) и (13) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = \int_0^1 \{2b_2(\mathrm{x}) - \\ - \lambda_1[\frac{2}{E}(b_2(x)\sigma_{1\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2\rho b_2(x)v_\omega^2] - \\ - \lambda_2[\frac{2}{3E}b_2(x)\sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2\rho b_2(x)w_\omega^2]\}dx = 0; \quad (24)$$

$$\delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = 2\delta_p - \lambda_1[\frac{2\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega}^2(x) + \\ + \frac{4\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega\delta}^2(x) - 2(\omega_0)^2\rho\delta_p v_\omega^2] - \\ - \lambda_2[\frac{2\delta_p}{E}\sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2\rho\delta_p w_\omega^2] = 0. \quad (25)$$

Умножим все слагаемые уравнений (24) и (25) на E, слагаемые первого уравнения еще и на δ_p, а второго – на $b_2(x)$.

Обозначим площадь сечения полки

$$b_2(x)\delta_p = F_p(x), \quad (26)$$

а затем проинтегрируем второе уравнение в пределах от 0 до 1. В результате соответствующие уравнения примут вид

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = \int_0^1 \{2EF_p(x) - \lambda_1[2\sigma_{1\omega}^2(x)F_p(x) - \\ - 2(\omega_0)^2\rho F_p(x)Ev_\omega^2] - \lambda_2[\frac{2}{3}\sigma_{2\omega}^2(x)F_p(x) - \\ - 2(\omega_0)^2\rho F_p(x)Ew_\omega^2]\}dx = 0; \quad (27)$$

$$\delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = \int_0^1 \{2EF_p(x) - \\ - \lambda_1[\frac{2}{3}\sigma_{1\omega}^2(x)F_p(x) + \frac{4}{3}\sigma_{1\omega\delta}^2(x)F_p(x) - \\ - 2(\omega_0)^2\rho F_p(x)Ev_\omega^2] - \\ - \lambda_2[2\sigma_{2\omega}^2(x)F_p(x) - 2(\omega_0)^2\rho F_p(x)Ew_\omega^2]\}dx \\ = 0. \quad (28)$$

Разность уравнениями (27) и (28), очевидно, определяется выражением

$$\int_0^1 \{\lambda_1[\frac{4}{3}(\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x))F_p(x) - \\ - \lambda_2[\frac{4}{3}\sigma_{2\omega}^2(x)]F_p(x)\}dx = 0. \quad (29)$$

На основании (29) можем записать:

$$\lambda_1\int_0^1[\frac{4}{3}F_p(x)(\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x)]dx = \\ = \lambda_2\int_0^l[\frac{4}{3}F_p(x)\sigma_{2\omega}^2(x)]dx; \quad (30)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1\frac{\int_0^1\frac{4}{3}F_p(x)(\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x))]dx}{\int_0^l[\frac{4}{3}F_p(x)\sigma_{2\omega}^2(x)]dx} = \mu\lambda_1; \quad (31)$$

Уравнение (25) можно записать в виде

$$2\delta_p - \lambda_1[\frac{2\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{4\delta_p}{3E}\sigma_{1\omega\delta}^2(x) - \\ - 2(\omega_0)^2\rho\delta_p v_\omega^2] - \\ - \mu\lambda_1[\frac{2\delta_p}{E}\sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2\rho\delta_p w_\omega^2] = 0. \quad (32)$$

Умножив слагаемые этого уравнения на E и поделив на $2\delta_p$, получим:

$$[\frac{1}{3}\sigma_{1\omega}^2(x)+\frac{2}{3}\sigma_{1\omega\delta}^2(x)-(\omega_0)^2\rho E v_\omega^2]+\mu[\sigma_{2\omega}^2(x)-(\omega_0)^2\rho E w_\omega^2]=\frac{E}{\lambda_{1\omega}}=const \quad (33)$$

или

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x)=\sqrt{[\frac{1}{3}\sigma_{1\omega}^2(x)+\frac{2}{3}\sigma_{1\omega\delta}^2(x)-(\omega_0)^2\rho E v_\omega^2]+\mu[\sigma_{2\omega}^2(x)-(\omega_0)^2\rho E w_\omega^2]}=const\,. \quad (34)$$

Таким образом, показано, что критерием минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения, когда варьируется очертание и толщина полки, и не варьируются высота и толщина стенки при ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты будет постоянство по длине стержня приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega t}(x)$*, возникающих по соответствующей собственной форме при собственных колебаниях или потери устойчивости.*

При ограничении величины первой частоты собственных колебаний и действии продольной силы её влияние критерий (33) учитывает. При действии только ограничений по устойчивости в (33) подставляется $\omega_0=0$.

Приведенные напряжения нормируются так, чтобы наибольшее значение каждого из $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ по длине стержня было бы равно единице. Тогда близость полученного решения к минимально материалоемкому оценивается близостью величины $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ к единице по всей длине стержня.

Для иллюстрации использования критерия (33) рассмотрим пример.

Стержень двутаврового поперечного сечения, у которого задана высота стенки $b_1=0.28\,м$, толщина стенки $b_{st}=0.006\,м$. Граничные условия в плоскости $x-0-y$ приведены на верхней части рис. 2, а в плоскости $x-0-z$ – на нижней части рис. 2. На стержень действует продольная сила $P=300\,кН$. Внешние массы отсутствуют. Собственные колебания обусловлены массой стержня. Удельная масса материала стержня $\rho=7850\,кг/м^3$. Модуль упругости $E=206000\ МПа$. Стержень может быть подвержен вибрационным воздействиям с частотой $\omega_0=15\,сек^{-1}$.

Решение реализуется на основе дискретной модели [1, 2] из 30 участков. Варьируются размеры ширины полки ($b_2[i]$) и величина толщины полки (δ_p). Не варьируются высота стенки (b_1), толщина стенки (δ_{st}). Ограничиваются величины первой критической силы и частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции. Учитывается влияние продольной силы на величину собственной частоты и влияние возможности вибрационных воздействий заданной частоты на величину критической силы.

Для дискретной модели функция цели запишется в виде

$$V_0=2\sum_{i=1}^{n}b_2[i]\delta_p\,, \quad (35)$$

где n – количество участков дискретной модели.

Ограничения по устойчивости запишутся в виде

$$P\le P1[1];\quad P\le P2[1], \quad (36)$$

где $P1[1]$, $P2[1]$ – первые критические силы соответственно в плоскостях $x-0-y$ и $x-0-z$. Ограничения на величину первой собственной частоты (4).

Критерий (34) для дискретной модели принимает вид

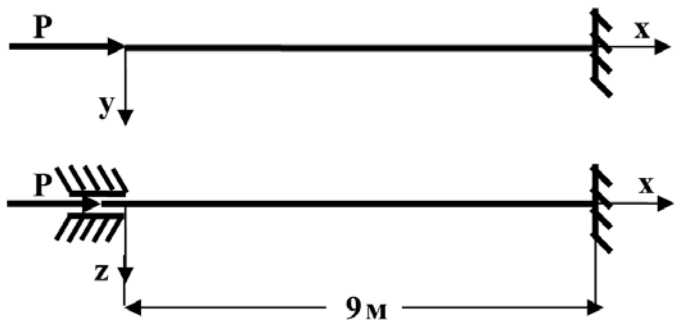


Рисунок 2. Рассматриваемые граничные условия.

$$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]=\sqrt{\left[\frac{1}{3}\sigma^2_{1\omega}[i]+\frac{2}{3}\sigma^2_{1\omega\delta}[i]-(\omega_0)^2\rho E v^2_{\omega}\right]+\mu[\sigma^2_{2\omega}[i]-(\omega_0)^2\rho E w^2_{\omega}]}=const \qquad (37)$$

Для отыскания величины предельно минимальной материалоемкости рассмотрим задачу, не используя конструктивные ограничения. Решение реализуется методом случайного поиска. Результаты приведены в таблице 1.

Над вторым и третьим столбцами приводится величина оптимального при выбранных условиях значения толщины полки $\delta po = 0.000764\ м$, а в третьем столбце значения ширины $b_2[i]$. Во втором столбце показаны величины приведенного напряжения $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$. Во всех сечениях кроме второго и третьего величина $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ близка к единице, что подтверждает минимальную материалоемкость объема полки двутавра. В сечениях 2 и 3 ширина полки практически равна толщине стенки, то есть практически слилась с ней. В предпоследней строке под столбцами 2 и 3 приводится значение объема материала полки $ft = 0.01597\ м^3$. Очевидно, что полученное решение неприемлемо, так как размеры полки близки к вырождению. Однако, полученное решение дает значение величины минимально материалоемкого объема полки при ограничениях величины критической силы с учетом влияния возможных вибрационных воздействий. Этот результат позволит оценить близость конструктивно приемлемых решений к минимально материалоемкому.

Рассмотрим примеры оптимизации значений δ_p и $b_2[i]$ при функции цели (35), ограничениях (4), (36) и дополнительно при конструктивных ограничениях величин варьируемых параметров. Введение при оптимизации конструктивных ограничений приближает оптимальное решение к практически приемлемому [1,2].

Рассматриваются семь вариантов выбора ограничений. В трех из них вводятся ограничения величины толщины полки, в трех других ширины полки и в одном ограничивается и толщина и ширина полки. Результаты решений приведены в таблице 1.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки $\delta_{po} \geq 0.006\ м$ приведен в столбце 4. Объем полки $ft = 0.01773\ м^3$, что на 10.88% больше, чем минимально материалоемкий объем.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки $\delta_{po} \geq 0.008\ м$ приведен в столбце 5. Объем полки $ft = 0.01919\ м^3$, что на 20.01% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки $\delta_{po} \geq 0.01\ м$ приведен в столбце 6. Объем полки $ft = 0.02107\ м^3$, что на 31.93% больше, чем минимально материалоемкий.

Таблица 1. Результаты расчета (без конструктивных ограничений; с ограничениями на величину δ_{po}).

№ п/п	Без конструктивных ограничений		С ограничениями на величину δ_{po}		
	$\delta_{po} = 0.000764$		$\delta_{po} \geq 0.006$	$\delta_{po} \geq 0.008$	$\delta_{po} \geq 0.01$
			$\delta_{po} = 0.006$	$\delta_{po} = 0.008$	$\delta_{po} = 0.01$
	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$
1	0,999	0.092	0.097	0.116	0.125
2	0,710	0.061	0.093	0.114	0.123
3	0,617	0.075	0.080	0.107	0.117
4	0,934	0.089	0.050	0.095	0.105
5	0,987	0.145	0.065	0.075	0.093
6	0,994	0.240	0.096	0.044	0.072
7	1	0.350	0.117	0.070	0.039
8	0,996	0.467	0.128	0.097	0.072
9	0,994	0.583	0.136	0.111	0.093
10	0,997	0.692	0.142	0.123	0.108
11	0,996	0.804	0.143	0.130	0.117
12	0,995	0.914	0.147	0.133	0.125
13	0,991	1.023	0.143	0.135	0.128
14	0,994	1.122	0.140	0.134	0.131
15	0,998	1.215	0.139	0.129	0.130
16	0,992	1.317	0.139	0.124	0.130
17	0,993	1.404	0.141	0.117	0.120
18	0,997	1.484	0.157	0.108	0.113
19	0,996	1.566	0.172	0.108	0.102
20	0,996	1.642	0.186	0.119	0.091
21	0,997	1.712	0.196	0.136	0.082
22	0,996	1.781	0.211	0.149	0.095
23	0,994	1.845	0.220	0.164	0.114
24	0,997	1.895	0.230	0.171	0.130
25	0,997	1.949	0.241	0.183	0.141
26	0,995	2.002	0.252	0.192	0.153
27	0,998	2.036	0.261	0.195	0.156
28	0,996	2.083	0.265	0.201	0.162
29	0,998	2.111	0.269	0.208	0.169
30	0,997	2.144	0.269	0.213	0.174
ft	0.01597		0.01773	0.01919	0.02107
eft %	0%		10.88%	20.01%	31.93%

Таблица 2. Результаты расчета (с ограничениями на величину $b_2[i]$).

№ п/п	С ограничениями на величину $b_2[i]$			$b_2[i] \le 0.14$
	$b_2[i] \le 0.18$	$b_2[i] \le 0.16$	$b_2[i] \le 0.14$	$\delta_{po} \ge 0.01$
	$\delta_{po} = 0.0071$	$\delta_{po} = 0.0079$	$\delta_{po} = 0.0091$	$\delta_{po} = 0.01$
	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$
1	0.106	0.108	0.118	0.126
2	0.098	0.102	0.113	0.124
3	0.091	0.097	0.114	0.118
4	0.076	0.084	0.099	0.106
5	0.075	0.076	0.089	0.094
6	0.078	0.079	0.093	0.072
7	0.105	0.092	0.102	0.046
8	0.117	0.113	0.097	0.073
9	0.134	0.122	0.127	0.098
10	0.147	0.140	0.129	0.109
11	0.151	0.145	0.140	0.126
12	0.151	0.151	0.140	0.129
13	0.159	0.158	0.140	0.136
14	0.157	0.160	0.140	0.138
15	0.171	0.160	0.140	0.139
16	0.171	0.160	0.140	0.138
17	0.175	0.160	0.140	0.138
18	0.177	0.160	0.140	0.132
19	0.180	0.160	0.140	0.125
20	0.180	0.160	0.140	0.117
21	0.180	0.160	0.140	0.106
22	0.180	0.160	0.140	0.112
23	0.180	0.160	0.140	0.105
24	0.180	0.160	0.140	0.119
25	0.180	0.160	0.140	0.134
26	0.180	0.160	0.140	0.140
27	0.180	0.160	0.140	0.140
28	0.180	0.160	0.140	0.140
29	0.180	0.160	0.140	0.140
30	0.180	0.160	0.140	0.140
ft	0.01910	0.01982	0.02124	0.02137
eft %	19.61%	24.11%	32.99%	33.81%

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки $b_2[i] \le 0.18\,м$ приведен в столбце 7. Объем полки $ft = 0.01910\ м^3$, что на 19.61% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки $b_2[i] \le 0.16\,м$ приведен в столбце 8. Объем полки $ft = 0.01982\ м^3$, что на 24.11% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки $b_2[i] \le 0.14\,м$ приведен в столбце 9. Объем полки $ft = 0.02124\ м^3$, что на 32.99% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничениях величин толщины полки $\delta_{po} \ge 0.01\,м$ и ширины полки $b_2[i] \le 0.14\,м$ приведен в столбце 10. Объем полки $ft = 0.02137\ м^3$, что на 33.81% больше, чем минимально материалоемкий.

Рассмотрим ещё один вариант оптимизации полки при функции цели (35), ограничениях (4), (36) и конструктивных ограничениях величины толщины полки, её ширины, но при условии постоянства ширины по длине стержня. Примем ограничения в виде $\delta_{po} \ge 0.01\,м$ и $b_2[i] = b_2 \le 0.14\,м$.

В результате оптимизации получим $\delta_{po} = 0.0104\,м$ и $b_2[i] = b_2 = 0.126\,м$. Объём полки $ft = 0.02360\ м^3$, что отличается от минимально материалоемкого на 47.78%. От приведенных выше оптимизационных решений, в которых ширина полки меняется по длине стержня, разница в материалоемкости существенно меньше. Так разница с решением при переменной по длине стержня ширине полки и при ограничениях $\delta_{po} \ge 0.01\,м$ и $b_2[i] \le 0.14\,м$ составит 10.44%.

Во всех оптимизационных решениях, как с конструктивными ограничениями, так и без них достигается равноустойчивость в обеих главных плоскостях инерции.

Таким образом, набор оптимизационных решений может служить ориентиром при выборе системы ограничений, отвечающих конкретным условиям проектирования. При этом появляется возможность сравнения оптимизированных вариантов по материалоемкости как между собой, так и на основе критерия (15) с минимально материалоемким [1,2]. Полученный в данной работе критерий, также как и полученные ранее (например [3-6]), могут использоваться также в задачах оптимизации конструкций, в частности оптимального усиления конструкций [7-16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. – 372 с.
2. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 10, Issue 2, с. 14-23.
3. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П.** Критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. // Вестник ТГАСУ, 2015, №5, с. 41-50.
4. **Ляхович Л.С., Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Григорьев А.И.** Использование методов оптимизации в задачах усиления конструкций. // Вестник ТГАСУ, 2015, №6, с. 57-70.
5. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П., Тухфатуллин Б.А.** Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. //. Interna-

tional Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, c. 118-125.
6. **Чудновский В.Г.** Метода расчёта колебаний и устойчивости стержневых систем. – Киев: Издательство АН УССР, Киев, 1952. – 414 с.
7. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А.** Научно-исследовательский центр СтаДиО. 25 лет на фронте численного моделирования. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 1, c. 8-45.
8. **Lyakhovich L.S.** Dual Approach to Solving the Problems of Structural Optimization. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 510-515.
9. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** О задачах поиска минимума и максимума в строительной механике. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 2, c. 103-124.
10. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 1, c. 9-22.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Дмитриева Т.Л.** Адаптивные многоуровневые математические модели в численной оптимизации пластинчато-стержневых конструкций. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». – М.: МГСУ, 2012. – 38 с.
14. **Agrama F.A.** Multi-objective Genetic Optimization for Scheduling a Multi-storey Building. // Automation in Construction, 2014, Volume 44, pp. 119-128.
15. **Martini K.** Harmony Search Method for Multimodal Size, Shape, and Topology Optimization of Structural Frameworks. // Journal of Structural Engineering, 2011, Volume 137, Number 11, pp. 1332-1339.
16. **Scherer M., Steinmann P., Denzer R.** A Fictitious Energy Approach for Shape Optimization. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, Volume 82, Number 3, pp. 269-302.

REFERENCES

1. **Lyakhovich L.S.** Osobye Svojstva Optimal'nyh Sistem i Osnovnye Napravleniya ih Realizacii v Metodah Rascheta Sooruzhenij [Special properties of optimal systems and the main directions of their implementation in methods of calculating structures], Tomsk, Publishing House of Tomsk State University of Architecture and Building, 2009, 372 pages.
2. **Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V.** Nekotorye Voprosy Optimal'nogo Proektirovaniya Stroitel'nyh Konstrukcij [Some Problems of Building Constructions Optimal Projecting]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.

3. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P.** Kriterij Minimal'noj Materialoemkosti pri Usilenii Sterzhnej Dvutavrovogo Poperechnogo Secheniya i Ogranicheniyah na Velichinu Kriticheskoj Sily ili Pervoj Sobstvennoj Chastoty [The Criterion of the Minimum Material Consumption in Cases of Reinforcing the I-Bars and the Restrictions on the Value of the Critical Force or the First Natural Frequency]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture, 2015, No. 5, pp. 41-50.
4. **Lyakhovich L.S., Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Grigoryev A.I.** Ispol'zovanie Metodov Optimizacii v Zadachah Usileniya Konstrukcij [The Application of Optimization Methods in Problems of Strengthening Structures]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno -stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture, 2015, No. 6, pp. 57-70.
5. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.** Kriterii Optimal'nogo Usileniya Stenki Sterzhnej Dvutavrovogo Poperechnogo Secheniya pri Ogranicheniyah po Ustojchivosti ili na Velichinu Pervoj Sobstvennoj Chastoty [Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-Type Cross-Section with Stability Constraints or With Constraints on the Value of the First Natural Frequency]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, pp. 118-125.
6. **Chudnovsky V.G.** Metoda Raschyota Kolebanij i Ustojchivosti Sterzhnevyh Sistem [Method for Calculating the Oscillations and Stability of Rod Systems]. Kiev, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1952, 414 pages.
7. **Belostosky A.M., Akimov P.A.** Nauchno-Issledovatel'skij Centr StaDyO. 25 Let na Fronte Chislennogo Modelirovaniya [25th Anniversary of Scientific Research Centre StaDyO]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 1, c. 8-45.
8. **Lyakhovich L.S.** Dual Approach to Solving the Problems of Structural Optimization. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 510-515.
9. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** O Zadachah Poiska Minimuma i Maksimuma v Stroitel'noj Mekhanike [About Hill-Climbing Problems in Structural Mechanics]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 2, pp. 103-124.
10. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** Kriterii Minimal'noj Materialoemkosti Sterzhnej Pryamougol'nogo Poperechnogo Secheniya pri Ogranicheniyah po Ustojchivosti ili na Velichinu Pervoj Sobstvennoj Chastoty [Criteria of Minimum Materials Consumption for Bars with Rectangular Cross-Section and Restrictions on Stability or Limitations on the Value of the First Natural Frequency]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Dmitriyeva T.L.** Adaptivnyye Mnogourovnevyye Matematicheskiye Modeli v

Chislennoy Optimizatsii Plastinchato-Sterzhnevykh Konstruktsiy [Adaptive Multilevel Mathematical Models in Numerical Optimization of Lamellar and Rod Designs]. Doctorial Thesis. Abstract. 05.13.18. Moscow, 2012, 38 pages.
14. **Agrama F.A.** Multi-objective Genetic Optimization for Scheduling a Multi-storey Building. // Automation in Construction, 2014, Volume 44, pp. 119-128.
15. **Martini K.** Harmony Search Method for Multimodal Size, Shape, and Topology Optimization of Structural Frameworks. // Journal of Structural Engineering, 2011, Volume 137, Number 11, pp. 1332-1339.
16. **Scherer M., Steinmann P., Denzer R.** A Fictitious Energy Approach for Shape Optimization. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, Volume 82, Number 3, pp. 269-302.

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2;
E-mail: lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63;
факс +7 (495) 650-27-31; Email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru.

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2;
E-mail: lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center "StaDyO"; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia; Professor of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia;
phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31;
E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-109-116

EVALUATION AND ANALYSIS OF BEARING CAPACITY OF BORED PILES AND DEEP-LAID PILE-BARRETTE FOR A HIGH-RISE BUILDING ON LOOSE GROUNDS BASED ON CALCULATIONS AND FIELD TESTS

***Rashid. A. Mangushev*[1], *Nadezda S. Nikitina*[2]**
[1] Saint-Petersburg State Architecture and Construction University, Saint-Petersburg, RUSSIA
[2] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract. The study describes the standard procedure of the assessment of the bearing capacity of piles by field methods used in the Russian Federation. Basing on the example of an experimental deep-laid foundation pile (length L = 65 m, diameter D = 1.2 m) intended for a high-rise building designed for a thick layer of loose ground the study demonstrates the structure of a loading system on site and the results of static tests of piles in comparison with the results of analytical and numerical calculations. On the same construction site an experimental barrette-pile of rectangular cross-section measuring 3.3 × 1.1 with a length of 65 m was installed with the base in solid Proterozoic clays. The pile test was carried out using Osterberg cells. For this purpose in the process of the installation of the pile strain gauges were mounted in its reinforcing cage at 9 levels. The test barrette-pile was carried out in two stages. On the first stage a standard test of the whole pile in the top-down direction was performed (Top - Down). On the second stage, after reaching the maximum possible load, the "O – cell" element test was performed transmitting the load in two directions (up and down). "O – cell" was located at a depth of 50 m in the layer of bluestone. The article contains the graphs of the movements of pile from under the load applied on the first and second stages of the tests and the general assessment of the load-bearing capacity of the barrette-piles by different methods.

Keywords: experimental studies, piles-barrettes, bored piles, dependence of sediment-load, bearing capacity, test methods

ОЦЕНКА И АНАЛИЗ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ БУРОНАБИВНЫХ СВАЙ И СВАЙ-БАРРЕТ ГЛУБОКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫСОТНОГО ЗДАНИЯ НА СЛАБЫХ ГРУНТАХ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАСЧЕТОВ И ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ

***Р.А. Мангушев*[1], *Н.С. Никитина*[2]**
[1]Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Санкт-Петербург, РОССИЯ
[2]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация. Описана стандартная процедура оценки несущей способности свай полевыми методами, используемой в Российской Федерации. На примере изготовленной опытной сваи глубокого заложения (длина L= 65 м, диаметр D =1,2 м) под высотное здание, спроектированное на большой толще слабых грунтов, показано устройство нагрузочной системы на строительной площадке и приведены результаты статического испытания сваи в сопоставлении с результатами аналитических и численных расчетов. На этой же строительной площадке выполнена опытная свая-баретта прямоугольного сечения размером 3,3 х 1,1 длиной 65 м с расположением основания в твердых протерозойских глинах. Испытание сваи проводилось с использованием ячеек Остерберга. Для этого, при устройстве сваи в ее арматурный каркас на 9 уровнях монтировались датчики деформации. Испытание опытной сваи-барреты проводилось в два этапа. На первом этапе выполнялось стандартное испытание всей сваи в направлении сверху-вниз (Top-Down). На втором этапе, после достижения максимально возможной нагрузки, выполнялись испытания

методом с помощью ячейки “O-cell” - элемента, передающего нагрузку в двух направлениях (вверх и вниз). Ячейка “O-cell” располагалась на глубине 50 м в толще твердых глин. В статье приведены графики перемещения сваи от приложенной нагрузки на первом и втором этапах испытаний и общая оценка несущей способности сваи-барреты по различным методам.

Ключевые слова: экспериментальные исследования, свай-баррет, буронабивные сваи, зависимость осадка-нагрузка, несущая способность, методики испытаний

INTRODUCTION

Evaluation of the bearing capacity of piles by analytical methods and further verification of these values by field tests is an important aspect of the design of pile foundations. There is a large number of analytical methods for calculation of load capacity of single piles which take into account the geometrical dimensions of the pile and characteristics of the surrounding soil [1]. However, very often the values obtained by calculation based on these methods significantly differ from the results of the field tests of the piles by vertical load method. First of all, it concerns large length piles designed in the ground with the protection of clay mortar or pipe casing. Generally, calculations results of the bearing capacity of piles made in accordance with the methodology based on Russian standards SNiP 24.13330.2011 [2] and SP 50-102-2003 [3] are significantly lower than the values of the carrying capacity obtained by standard vertical load capacity tests made in accordance with GOST 5686-2012 Soils. Methods of field tests by piles [4]. Field tests of barrette piles in Russia are still not standardized.

When preparing the design of the building of “Ohta-center” public and business complex with the height of 396 m two experimental cased bore piles with the diameter of 1.2 m and the length of 52.8 m as well as 5 experimental barrette-piles of 3,3 ×1,0 m and with the length of 65 m were made and tested.

One of the tasks of the field tests was to determine the total bearing capacity of bore piles and barrette piles, as well as the bearing capacity calculated separately along the side surface and the base.

ENGINEERING AND GEOLOGICAL CONDITIONS OF THE PILE TEST SITE

Within drilling depth (170 m) the following deposits of subsoil were observed: man-triggered soils tg IV; lacustrine-marine deposits m, lIV; lacustrine-glacial deposits (upper sediments) of the Baltic Glacial Lake lg IIIb; lacustrine-glacial sediments of Luzhskaya glacial clay (bottom sediments) lgIIIz; glacial deposits of the Luzhskaya glacial clay gIIIlz; bed-rock disturbed and undisturbed clay Venda Vkt 2.

The averaged basic characteristics of soils are given in Table 1.

EVALUATION OF THE BEARING CAPACITY OF THE EXPERIMENTAL PILE WITH DIAMETER D = 1.2 M AND LENGTH L = 52.8 M

In accordance with Russian standards [1, 2] analytical bearing capacity of hanging piles is determined by the formula

$$F_d = \gamma_c [g_{cR} RA + u\Sigma \gamma_{cf} f_i h_i], \qquad (1)$$

where γ_c is the coefficient of pile work conditions in the ground, for driven piles, $\gamma_c = 1$; R is the design resistance of the ground below the lower end of the pile; A is the cross-sectional area of the pile, m^2 ; u is the perimeter of the cross-section of the pile, m; f_i is the design resistance of the i-th soil layer along the lateral surface of the pile, kPa; h_i is the thickness of the i-th layer of soil in contact with the side surface of the pile, m, etc. and Niemann $h_i \leq 2\ m$;

Table 1. The averaged basic characteristics of soils.

No.	Ground name	icalindex	γ, kN / m^3	*W*	*e*	I_L	*E*, MPa	φ, deg	*s*, MPa
1	Filled soil	tg IV	17.5	-					
2	Marine and lacustrine deposits	m, l IV	19.6	0.256	0.683	0.71	14	24	0
3	Upper lacustrine-glacio sediments	lg III b	18.6	0.360	0.980	1.1	4.5	7th	0.006
4	Bottom lacustrine-glacio sediments	Lg II Iz	20.4	0.220	0.600	0.87	10.5	17th	0.030
5	Glacial clay deposits	G III lz	21.5	0.160	0.43	0.25	17th	22	0.036
6	Disturbed Venda clay	Vkt2	21.4	0.176	0.503	-0.35	16	14	0.130
7	Undisturbed Venda clay	Vkt2	22.3	0.129	0.367	-0.79	113	22	0.840

$g_{cR,}; g_{with\ f}$ is the coefficients of the working conditions of the ground under the bottom end and on a side surface of the pile, taking into account the effect of the pile manufacturing method.

The tests of piles with the diameter of 1.2 m and a length of 52.8 m with vertical static load were carried out using hydraulic jacks with the maximum load up to 3,500 (35.000 kN) [Works on installation and testing of bored-injecting piles were conducted in 2009 by JSC Geoizol.]. For this purpose, a special loading platform was constructed from the cross beams, based on a system of 33 bored-injecting anchors of the Titan type (Fig. 1).

According to the Russian standards [4] the total bearing capacity of the pile is estimated by the value of load on the pile which results in its vertical deformation corresponding to value Δ = 20 mm. In this case, it corresponded to a load value of $F_{d,site}$ = 25.000 kN.

Analytical calculations according to formula (1) showed the value of the total bearing capacity of this pile equaling to $F_{d,calc}$ = 8320 kN. With that 71% (5.985 kN) corresponded to tip of the pile and only 29% (3.145 kN) to a side surface.

The value of the total load-bearing capacity calculated by [2, 3] turned out to be comparable with the results of calculations of this pile for vertical load (Fd, PLAXIS 11000 kN), performed under the PLAXIS 3D program.

The results of evaluation general bearing capacity of an experimental pile by various methods are listed in Table 2.



Figure 1. General view of the loading system for testing a pile with a static vertical load.

Table 2. The total load bearing capacity F_d, kN, of the pile (D = 1.2 m and L = 52.8 m).

Calculation by the formula (1) [1, 2], $F_{d,calc}$	8.320 (-301%)
Calculation by PLAXIS 3D, $F_{d,PLAXIS}$	11,000 (-227%)
The results of field tests, $F_{d,site}$	25,000

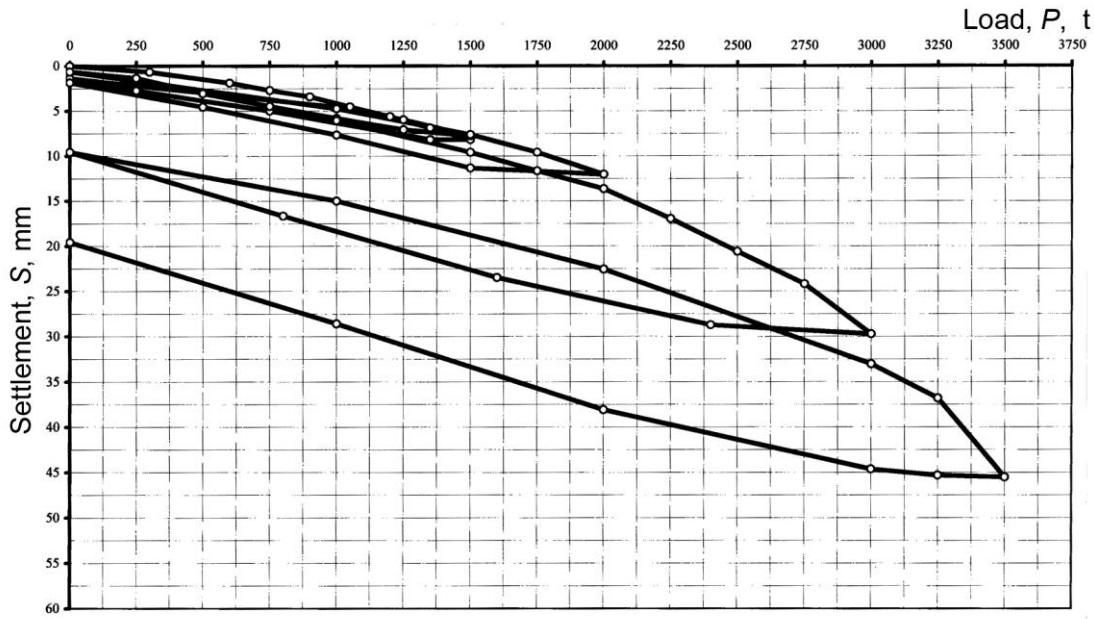


Figure 2. The results of the test of a pile with a diameter of 1.2 m and a length of 52.8 m with a vertical static load.

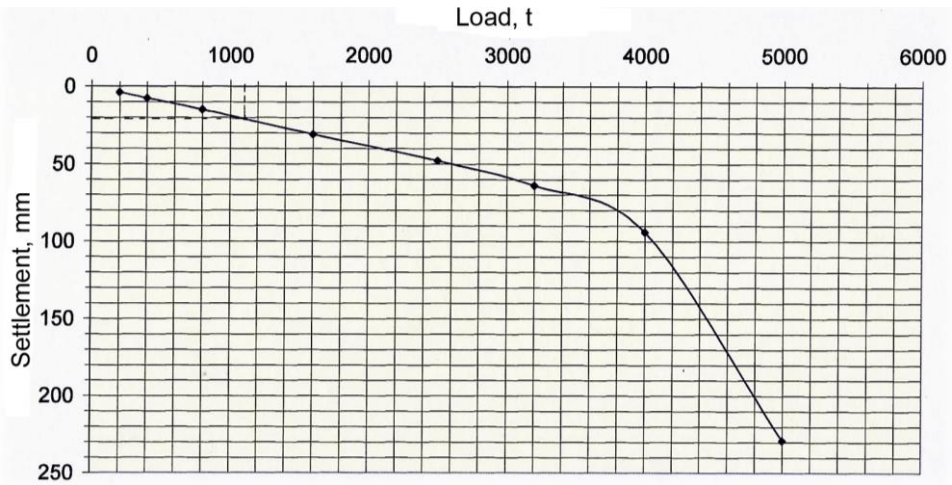


Figure 3. The results of calculations of the experimental pile by the vertical load, performed in PLAXIS D.

EVALUATION OF THE BEARING CAPACITY OF THE EXPERIMENTAL BARRETTE-PILE WITH THE SIZE OF $L \times B = 3.3 \times 1.0$ M AND LENGTH $L = 65$ M

At the same construction site an experimental test of a pile of the size $l \times b = 3.3 \times 1.0$ mand length $L = 65$ m with the location of the base in the thickness of the bedrock — Vendian clay Vkt 2 — took place. The tests were supposed to be carried out applying among other Osterberg cell "O – cell" and strain gauge, the scheme of disposition of which is shown in Fig. 4. The experimental barrette was tested by a vertical static load in two stages. The first stage involved a standard test by a vertical load applied to the head of the barrette-pile and directed down-

wards (Top - down). After reaching maximal possible load, the second stage was carried out using "O – cell" at an altitude (-45.00). With this method the load was transmitted in two directions — up and down [5].

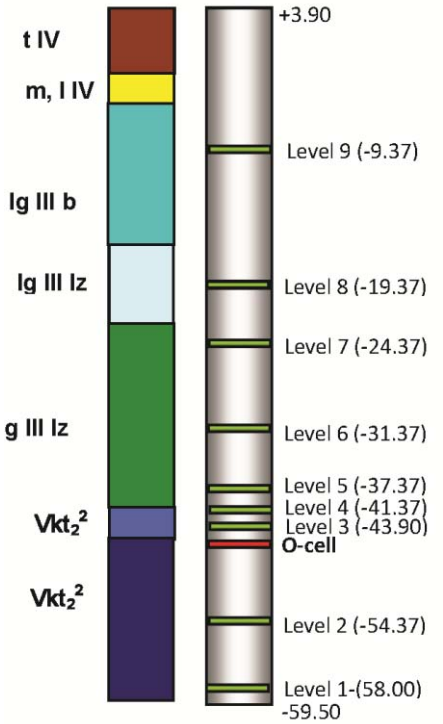


Figure 4. The layout of the "O – cell" and displacement sensors on an experimental barrette-pile

Fig. 5 shows the results of the tests of the experimental barrettes at the first stage of loading by the method (Top - down). With maximum load 35000 kN the settlement was less than 20 mm.

Extrapolation of the load-settlement graph to the horizontal line corresponding to Δ = 20 mm, made it possible to estimate the overall bearing capacity of the experimental barrette-pile at its primary load case at the value $F_{d,Top\ -\ Down}$ = 32.000 kN.

The analytical calculation of the experimental barrette-pile according to formula (1) [2, 3] showed the value of its total load-bearing capacity $F_{d,calc}$ = 31.244 kN, which is very close to the results of the tests carried out using the Top - Down method.

The results of calculations according to the program PLAXIS 3D showed a total value of the bearing capacity of barrette $F_{d,PLAXIS}$ = 27.800 kN (Fig. 6), which is slightly less than the results obtained using Top – Down method.

The results obtained by the tests using Osterberg cell method "O – cell", carried out after the Top - Down method test are presented in Fig. 7.

The blue line corresponds to the bottom-up test of the top part of the pile and allows to estimate the bearing capacity of the lateral surface of the barrette-pile. The red line corresponds to the Top-Down test and allows to estimate the bearing capacity of the heel of the barrette.

Extrapolation of the upper part of the graph 'loading' (blue line) to the intersection with the horizontal axis corresponding to the value Δ = -20 mm allows to estimate the bearing capacity of a lateral surface of a pile by the value of $F_{d\ o\text{-}cell}^{f}$ = 29.500 kN. The lower part of the graph (red line) estimates the bearing capacity of the barrette tip with a value of at least $F_{d\ o\text{-}cell}^{R}$ = 13.000 kN. The total bearing capacity of the pile according to this test method was not less than $F_{d,o\text{-}cell}$ = 42.500 kN.

As expected the total value of the bearing capacity of the barrette-pile by the repeated loading by the method of "O – cell" was higher than the value obtained by the primary loading by the Top - Down method (more than 30%).

The summary table 3 shows test results of the tests using "O – cell" method and analytical calculations.

CONCLUSION

1) The results of the tests of the bearing capacity of experimental barrette piles of a diameter D = 1.2 m and the length L = 52.8 m showed that observed values were significantly higher (over 200%) than the results obtained by calculations according with the Russian standards [2, 3], as well as by PLAXIS 3D program.

2) Results of the tests of the bearing capacity of the experimental barrette-pile of 3.3×1.0 m and with a length L = 65 m were very close to the results of calculations according to Russian standards [1, 2] (2.5%), and differed by 15% from the results obtained in PLAXIS 3D.

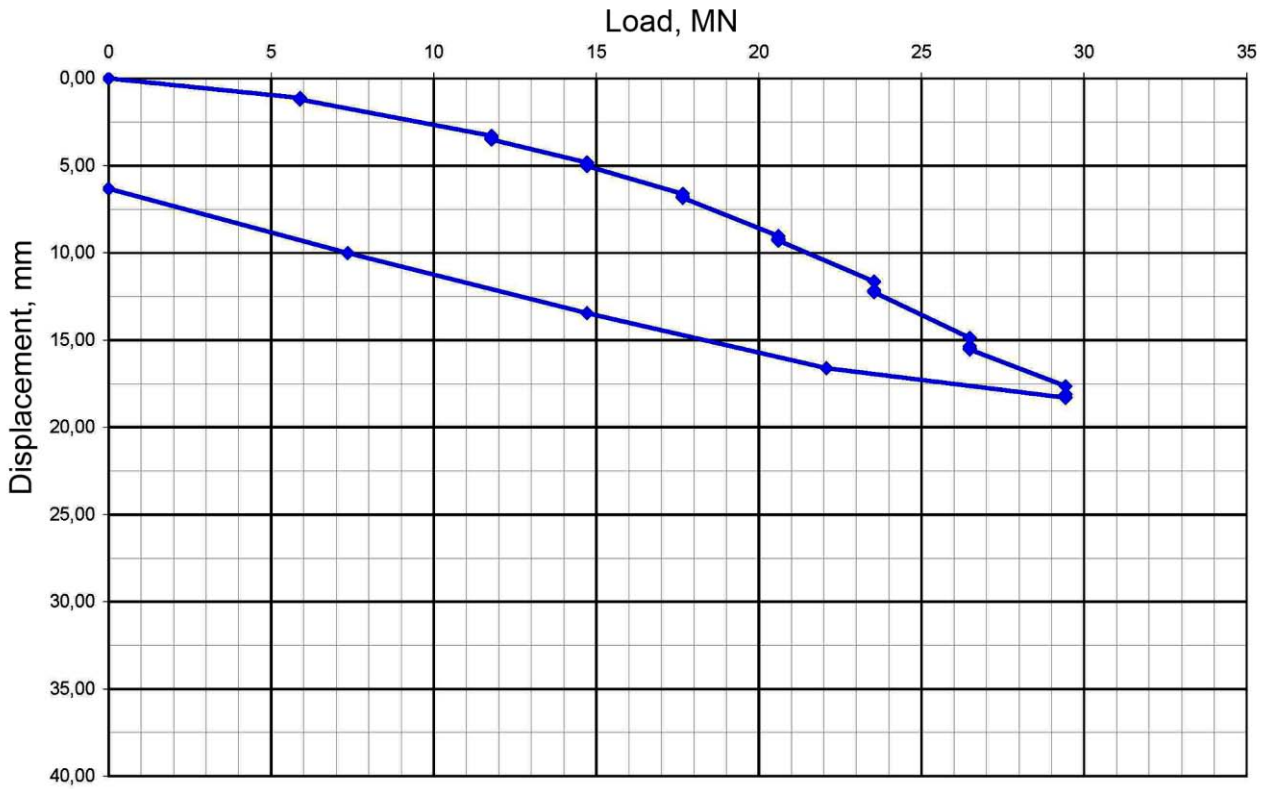


Figure 5. Graph of displacement the barrettes-pile resulted by the applied vertical load.

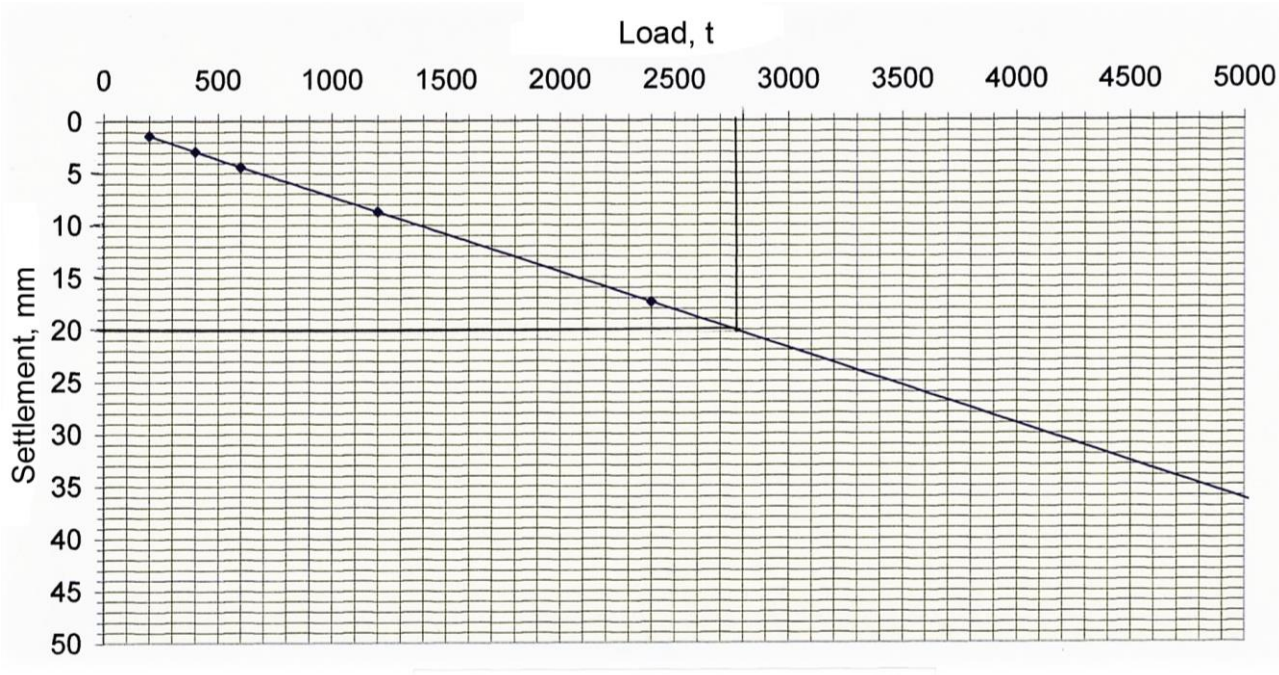


Figure 6. The results of the calculations of the experimental barrette-pile tests by vertical load (Top - down), formed in PLAXIS 3D

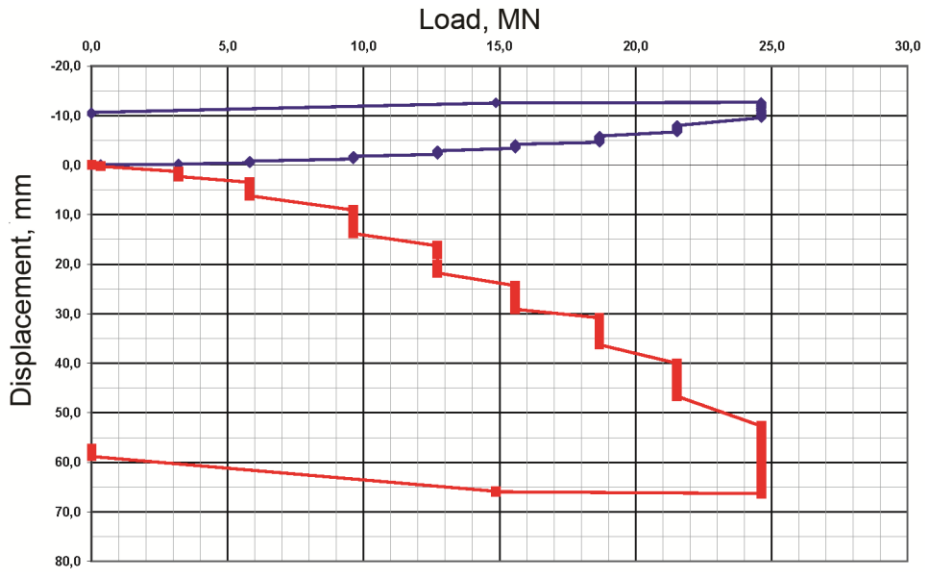


Figure 7. Graph of displacement of the pile from the applied vertical load By «O-cell» method.

Table 3. The total load bearing capacity F_d, kN, of the barrette-pile 3.3 × 1.0 m and L = 65 m).

Calculation by the formula (1) [1,2], $F_{d,calc}$	31244 (-2.5%)
Calculation by PLAXIS 3D, $F_{d,PLAXIS}$	27800 (-15%)
The results of Top - Down field tests (primary loading), $F_{d,Top-Down}$	32000
The results of «O – cell» field tests (secondary loading): $F_{d,\,o\text{-}cell}$ $F_{d,\,o\text{-}cell}^{f}$ $F_{d}^{R}{}_{,o\text{-}cell}$	 42.500 29.500 13.000

3) The bearing capacity of the ground by the tip (13.000 kN) turned out to be twice lower than the bearing capacity of the lateral surface (29.000 kN), despite the presence of a large thickness of weak soils alongside the barrette-pile shaft.

REFERENCES

1. **Mangushev R.A., Gotman A.L., Znamenskiy V.V., Ponomarev A.B.** Svai i svaynyye fundayenty. Konstruk-tsii, proektirovanie i tekhnologii [Piles and Pile Foundations: Construction, Design and Technology]. Moscow: izd-vo ASV, 2015. 320 p. (rus)
2. **SNiP 24.13330.2011.** Svod pravil. Svaynye fundamenty. Aktualizirovannaya redaktsiya SNiP 2.02.03-85. Utv. Prikazom Minregiona RF ot 29.12.2011. № 635/2 [SP 24.13330.2011. Pile foundations. SNIP 2.02.03-85 updated edition] (rus)
3. **SP 50-102-2003.** Proektirovanie i ustroystvo svaynykh fundamentov. [SP 50-102-2003. Design and installation of pile foundations]. Moscow: Stroyizdat, 2004. 81 p. (rus).
4. **GOST 5686-2012.** Grunty. Metody polevykh ispytaniy svayami. [GOST 5686-2012. Soils. Methods of field testing of piles]. Moscow: 2013. (rus)
5. **Kolodiy Ye.V.** Sravnitelnyy analiz sovremennykh metodov otsenki nesushchey sposobnosti svay (na primere svai-baretty v inzhenerno-geologicheskikh usloviyakh Sankt-Peterburga) [Comparative analysis of

modern methods of assessing the load-carrying capacity of piles (on the example of a pile-barrette in the engineering and geological conditions of St. Petersburg] // Sbornik trudov nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Aktualnye voprosy geotekhniki pri reshenii slozhnykh zadach novogo stroitelstva i rekonstruktsii [Topical issues of geotechnics at the solution of complex challenges of new construction and reconstruction: collection of works of scientific and technical conference], SPbGASU, Saint-Petersburg: 2010. Pp. 87-95. (rus)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мангушев Р.А., Готман А.Л., Знаменский В.В., Пономарев А.Б.** Сваи и свайные фундаменты. Конструкции, проектирование и технологии / Под. ред.чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф. Мангушева Р.А. М.: Изд-во АСВ, 2015. 320 с.
2. **СНиП 24.13330.2011.** Свод правил. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85. Утв. Приказом Минрегиона РФ от 29.12.2011. № 635/2.
3. **СП 50-102-2003.** Проектирование и устройство свайных фундаментов. М.: Стройиздат, 2004. 81 с.
4. **ГОСТ 5686-2012.** Грунты. Методы полевых испытаний сваями. М., 2013.
5. **Колодий Е.В.** Сравнительный анализ современных методов оценки несущей способности свай (на примере сваи-баретты в инженерно-геологических условиях Санкт-Петербурга) // Сборник трудов научно-технической конференции «Актуальные вопросы геотехники при решении сложных задач нового строительства и реконструкции», СПбГАСУ, СПб, 2010. С. 87-95.

Mangushev Rashid Abdullovich, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Con-struction Sciences, Professor, Doctor of Technical Sci-ences; Head of Geotechnical Department, Saint-Petersburg State Architecture and Construction Universi-ty, Director of Scientific and Consulting Centre of Ge-otechnologies, Russia, Saint-Petersburg, 2-ya Krasnoarmeyskaya 4;
e-mail: ramangushev@yandex.ru.

Nadezda Sergeevna. Nikitina, PhD, Professor, Department of "Soil Mechanics and Geotechnical", Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaro-slavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(495) 287-49-14; e-mail: nsnikitina@mail.ru.

Мангушев Рашид Абдуллович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; заведующий кафедрой геотехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ), директор научно производственного консалтингового центра геотехнологий СПбГАСУ. Россия, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская 4;
e-mail: ramangushev@yandex.ru.

Никитина Надежда Сергеевна, профессор кафедры «Механики грунтов и геотехники» Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия, 129337, Ярославское шоссе, д.26,тел./факс: +7(495) 287-49-14; e-mail: nsnikitina@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-117-132

МЕТОДИКА СУПЕРЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – КОНСТРУКЦИИ ФУНДАМЕНТОВ И ТРИБУН – КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ» СТАДИОНОВ ЧЕМПИОНАТА МИРА ПО ФУТБОЛУ 2018 ГОДА В РОССИИ. ОПИСАНИЕ И ВЕРИФИКАЦИЯ

А.И. Нагибович
ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлены: описание и верификация разработанной методики численного (суперэлеметного) моделирования динамики трехмерных систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года в России при основных и особых сочетаниях нагрузок.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, суперэлемент, метод динамического синтеза подконструкций, напряженно-деформированное состояние, динамические характеристики, собственные частоты и формы колебаний, механическая безопасность, футбольный стадион

TECHNIQUE OF SUPERELEMENT SIMULATION OF DYNAMICS FOR SYSTEM “BASIS – FOUNDATIONS STRUCTURES AND STANDS – STRUCTURES OF THE ROOF” FOR STADIUMS FOR THE 2018 FIFA WORLD CUP IN RUSSIA. DESCRIPTION AND VERIFICATION

Alexander I. Nagibovich
Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article presents descriptions and verification of the developed technique of numerical (superelement) simulation of dynamics of the three-dimensional systems "ground base - reinforced concrete foundation structures and stands - metal structures of the roof" of stadiums for the 2018 World Cup in Russia with basic and special combinations of loads.

Keywords: math modeling, numerical methods, finite element method, superelement, component mode synthesis, stress-strain state, strain-stress state, dynamic characteristics, natural frequencies and modes, mechanical safety, football stadium

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование напряженно-деформированного состояния таких уникальных большепролетных сооружений как футбольные стадионы имеет ряд особенностей, подробно они были описаны в предыдущей статье.

Одна из ключевых особенностей, с которой приходиться столкнуться при расчетном обосновании сооружений такого типа заключается в том, что проектированием и

расчетами различных подсистем несущих конструкций, таких как «основание», «железобетонные конструкции фундаментов и трибун» и «металлические конструкции покрытия и фасадов» занимаются независимые проектные организации. Такой подход характерен как для отечественной практики, так и для зарубежной. Следовательно, необходимо обосновать возможность перехода от исследования полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия и фасадов» футбольных стадионов к отдельным моделям подсистем. Альтернативным подходом является использование метода динамического синтеза подконструкций. Для преодоления указанной проблемы/особенности разработана и верифицирована приведенная ниже методика.

1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Методика численного моделирования динамики систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов предназначена для определения параметров НДС, прочности, динамики указанных комбинированных систем при действии основных и особых сочетаний нагрузок и воздействий. Разработанная методика предусматривает различные подходы решения поставленной задачи в зависимости от влияния жесткостных характеристик подсистем друг на друга, имеющегося в распоряжении программного обеспечения, а также совместимости форматов различных расчетных моделей.

Одним из основных этапов разработанной методики является сравнительный анализ динамических характеристик (собственных частот и форм колебаний значимого спектра) полной модели конструкций стадиона и составляющих её моделей подсистем «металлические конструкции покрытия» и «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун». При расчетах моделей подсистем недостающая часть учитывается с использованием сосредоточенных масс (для учета покрытия) или заданных жесткостей (для учета железобетонного каркаса).

Сопоставив собственные частоты и формы колебаний полной модели сооружения и подмодели конструкций покрытия можно оценить насколько велико влияние податливости опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции чаши» на статическое состояние, динамику и устойчивость упомянутой подсистемы «металлоконструкции покрытия».

При отсутствии связанных форм и незначительном расхождении значений частот колебаний для родственных форм, можно сделать вывод о возможности исследования НДС в рамках сепаратных моделей.

Альтернативным подходом, который может быть применен даже в том случае, когда сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной модели и моделей подсистем конструкций стадиона не дает удовлетворительного ответа (о возможности декомпозиции), является метод динамического синтеза подконструкций или метод суперэлементов (МСЭ). Этот подход позволяет при расчете отдельной модели подсистемы подключать матрицы жесткости и масс остальных подсистем, тем самым учитывая влияние последних на НДС всей системы.

Методика реализована на основе программного комплекса ANSYS Mechanical и собственных программных разработок автора.

Общая структурная схема методики представлена на рисунке 1.

2. МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПОДКОНСТРУКЦИЙ

Суперэлементный расчет систем включает следующие основные этапы:

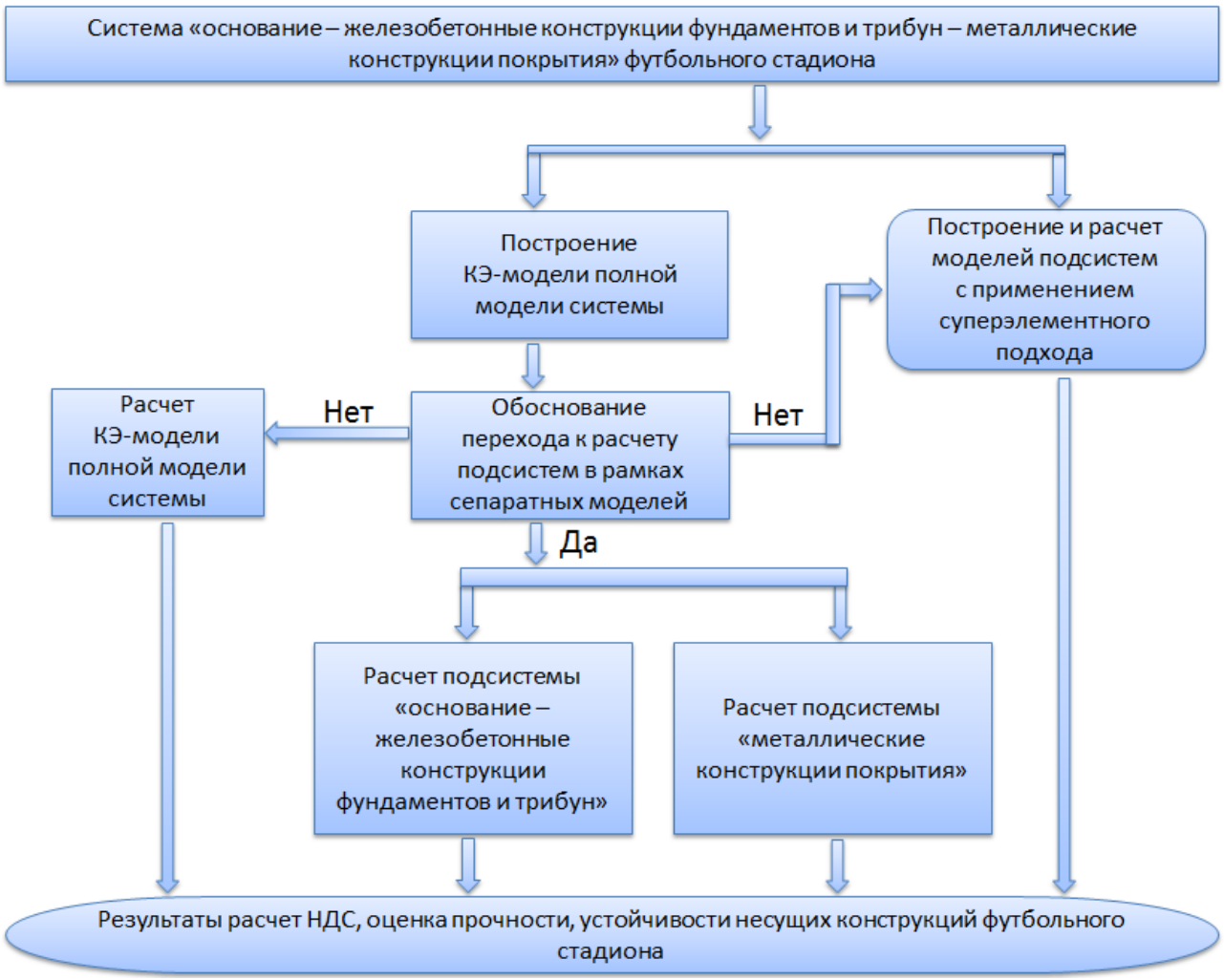


Рисунок 1. Общая структурная схема разработанной методики суперэлементного моделирования систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» футбольных стадионов.

1. Декомпозиция. Исходное сооружение разбивается на независимые подконструкции, для каждой из которых решение задачи проще, чем расчет всей системы в целом. Узловые неизвестные для каждой подконструкции разделяются на две группы – «внутренние» и «граничные».
2. Конденсация. Неизвестные, соответствующие внутренним узлам для каждой подконструкции, выражаются через граничные неизвестные и исключаются из системы разрешающих уравнений. После этого подконструкцию можно рассматривать как конечный элемент, узлами которого являются граничные узлы – «суперэлемент».
3. Сборка. Суперэлементы объединяются для образования модели исходного сооружения. При этом у стыкуемых суперэлементов отождествляются их соответствующие степени свободы, и системы уравнений для всех суперэлементов объединяются в глобальную систему уравнений относительно граничных неизвестных.
4. Вычисление решения. Производится решение полученной глобальной системы уравнений. В результате этого находятся значения граничных неизвестных для всех подконструкций. Значения внутренних неизвестных для всех подконструкций вычисляются с помощью зависимостей, использовавшихся для их исключения.

Современные «тяжелые» универсальные конечноэлементные программные комплексы, такие как ANSYS, NASTRAN, ABAQUS имеют в своем функционале возможность построения и импорта-экспорта редуцированных матриц влияния (жесткости, масс, демпфирования) для обеспечения, в частности, совместных разработок и точного анализа сложных многосвязных статически и динамически нагруженных конструкций и сооружений.

Так же модальный синтез часто используется как эффективный метод уменьшения вычислительной размерности решаемой задачи. В этом методе расчетная область разделяется на компоненты (подконструкции). Для каждой подконструкции, определяемой перемещением $\{u\}$, матрицей жёсткости, $[K]$, матрицей масса $[M]$ и силами $\{f\}$, система уравнений движения записывается в виде:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\} \qquad (1)$$

Разделим эти уравнения в соответствии со стыковочными (граничными) $\{u_b\}$ и внутренними $\{u_i\}$ степенями свободы.

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_b \\ f_i \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Суть методов динамического синтеза подконструкций состоит в переходе от полного набора физических степеней свободы к редуцированному набору обобщённых координат, т.е. для представления перемещения подконструкции используется процедура Релея-Ритца, в которой перемещение представляется в виде суперпозиции базисных векторов (форм)

$$\{u\}=[\Psi]\{q\}$$

где $[\Psi]$ – набор базисных векторов для подконструкции, а соответствующие им обобщённые модальные координаты.

Таким образом, уравнение (2) может быть записано как

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{q}\}+[\Psi]^T[K][\Psi]\{q\}=[\Psi]^T\{f\} \qquad (3)$$

или

$$\left[\hat{M}\right]\{\ddot{q}\}+\left[\hat{K}\right]\{q\}=\left\{\hat{f}\right\},$$

где

$$\begin{aligned} \left[\hat{M}\right]&=[\Psi]^T[M][\Psi] \\ \left[\hat{K}\right]&=[\Psi]^T[K][\Psi] \\ \left\{\hat{f}\right\}&=[\Psi]^T\{f\} \end{aligned} \qquad (4)$$

В итоге, после стыковки подконструкций, описываемых редуцированными матрицами жёсткости и масс, получится общая модель существенно меньшей размерности.

Методы динамического синтеза подконструкций классифицируются по способу выбора базисных векторов метода Релея-Ритца для подконструкций, а также по способу их стыковки. Как правило, в качестве базиса для подконструкций используются ее формы колебаний при определенных граничных условиях:

- для закрепленной границы R.R.Craig. M.C.C.Bampton и W.C.Hurty;
- для свободной границы. W.A.Benfield. R.F.Hruda;
- для частично закрепленной границы подконструкции. R.H.MacNeal;

Из трех рассмотренных вариантов метода наиболее предпочтительным, с вычислительной и реализационной точек зрения, является первый, использующий формы колебаний основной системы метода перемещений.

Все три отмеченных выше способа ограничения стыковочных степеней свободы реализованы в программном комплексе ANSYS Mechanical.

Общий набор физических степеней свободы обозначим как $\overline{P}$. Набор внутренних степеней свободы обозначим как $\overline{I}$, полный набор стыковочных координат обозначим как $\overline{T}$. Эти наборы координат содержат p, i, и t степеней свободы, соответственно. Для использования смешанной границы, пусть набор $\overline{T}$ составлен из объединения наборов $\overline{B}$ и $\overline{C}$. При вычислении собственных частот и форм степени свободы из набора $\overline{B}$ фиксированы, степени свободы из набора $\overline{C}$ свободны.

3. МЕТОД ОСТАТОЧНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ СМЕШАННОЙ ГРАНИЦЫ (ОПСГ)

Метод смешанной границы использует три набора форм:

- ограничительные формы $\left[\Psi_b^C\right]$, определённые на наборе $\overline{B}$;
- формы остаточной податливости $\left[g_c^R\right]$, определённые на наборе $\overline{C}$;
- усеченный набор нормальных форм $\left[\phi_k^N\right]$.

Как имеет место в методе Харти / Крейга – Бемптона, набор $\overline{B}$ как минимум достаточен, чтобы исключить компоненты соответствующие движению твердого тела. Для случая свободной границы, то есть, все граничные координаты содержаться в наборе $\overline{C}$, вычисление остаточной податливости требует процедуры инерционной компенсации как в методе Рубина.

Координационное преобразование представленного метода из физических координат в координаты смешанной границы может быть записано в следующем виде

$$\{x\} = [T_1][T_2]\{q_2\} \tag{5}$$

или в развернутой форме

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 \\ 0 & I_c & 0 \\ \psi_{ib}^C - g_{ic}^R \left(g_{cc}^R\right)^{-1} \psi_{cb}^C & g_{ic}^R \left(g_{cc}^R\right)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R \left(g_{cc}^R\right)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Метод фиксированной границы: точная редукция к методу Харти / Крейга – Бемптона. Преобразования координат метода ОПСГ точно приводят к методу Харти/Крейга – Бемптона в случае всей зафиксированной границы, то есть, отсутствуют степеней свободы набора $\overline{C}$.

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ \psi_{ib}^C & \varphi_{ik}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ q_k \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Этот метод является наиболее популярным в универсальных «коммерческих» программных комплексах. Он сводится к построению редуцированных матриц жесткости и масс

$$[\hat{K}] = [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{CC} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{NN} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{M}] = [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ib} \\ M_{bi} & M_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{M}_{CC} & \hat{M}_{NC} \\ \hat{M}_{CN} & \hat{M}_{NN} \end{bmatrix}$$

где $$[\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{iC} & \Phi_{iN} \end{bmatrix}$$

Φ_{iC} – перемещения внутренних степеней свободы СЭ для заданных единичных перемещений граничных (стыковочных) узлов, Φ_{iN} – перемещения внутренних степеней свободы, соответствующие удерживаемым собственным формам колебаний при ограни-

чении степеней свободы (заделке) граничных узлов, $[\hat{K}_{NN}]$ и $[\hat{M}_{NN}]$ – диагональные модальные матрицы жесткости и масс,

$$[\hat{K}_{CC}] \equiv [\overline{K}]; \quad [\hat{M}_{CC}] \equiv [\overline{M}];$$
$$[\hat{M}_{NC}] = [\hat{M}_{CN}]^T$$

– заполненные матрицы.

Метод свободной границы: точная редукция к методу Рубина.
Преобразования координат метода ОПСГ приводят к методу Рубина в случае всей свободной границы, то есть, отсутствуют степеней свободы набора $\overline{B}$.

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ g_{ic}^R \left(g_{cc}^R\right)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R \left(g_{cc}^R\right)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Таким образом, преобразование ОПСГ (6) является обобщением надёжных и широко используемых методов Харти / Крейга-Бемптона и Рубина.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ

В качестве верификационной задачи выбран реальный и показательный объект – блок «Е» гипермаркета в г. Волжский (рис. 2). Конструкции рассматриваемого блока имеют схожий тип с большепролетными комбинированными конструкциями стадионов: железобетонный каркас и купол металлоконструкций покрытия. На этом тестовом примере исследуются возможности и особенности применения метода динамического синтеза подконструкций к расчетам комбинированных систем. Также исследуется влияние выбора метода учета внутренних форм колебаний конструкции, записываемой в суперэлемент (метод фиксированной границы и метод свободной границы). При сопоставлении результатов динамических расчетов сравниваются частоты и формы собственных колебаний модели полной системы «ж.б. конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» и моделей составляющих её подсистем с использование суперэлементов. На базе этого делается вывод о возможности перехода к исследованию НДС системы в рамках сепаратных моделей.
Расчетные многовариантные верификационные численные исследования модели несущих конструкций блока «Е» гипермаркета проводились для полной модели, , а также для моделей подсистем «ж.б. конструкции» и «металлические конструкции покрытия» с применением метода динамического синтеза подконструкций.
Несущие конструкции блока «Е» гипермаркета в г. Волжский состоят из опорного железобетонного каркаса и металлического купола покрытия.
Железобетонный каркас представлен колоннами сечением 600×600 мм, 2-ми перекрытиями и «козырьком» с балками. Фундамент – монолитные железобетонные ростверки на свайном основании.
Купол образуется 18-ю радиальными решетчатыми «треугольными» фермами арочного очертания, расположенными под углом 20° друг к другу. Фермы состоят из трех поясов кольцевого сечения, соединенных трубчатыми связями-раскосами. По внешнему радиусу фермы жестко оперты на колонны, по внутреннему – соединены верхним и нижним кольцевыми поясами.
В программном комплексе ANSYS Mechanical построены и верифицированы следующие пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели (таблица 1) несущих конструкций блока «Е» гипермаркета в г. Волжский (здесь и далее «ж.б.» – сокращенно «железобетонный»):

1. модель полной системы “ж.б. конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия”;
2. модель подсистемы “ж.б. конструкции каркаса”;
3. модель подсистемы “металлические конструкции покрытия”;

Вид с фасада



Вид сверху с указанием положения блока «Е» гипермаркета (выделен красной рамкой).



Вид на несущие конструкции купола изнутри

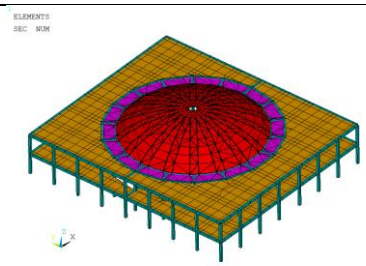
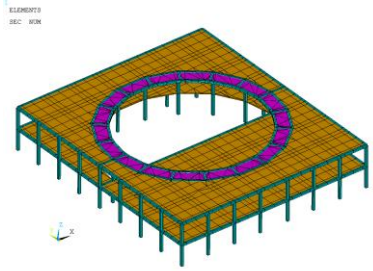
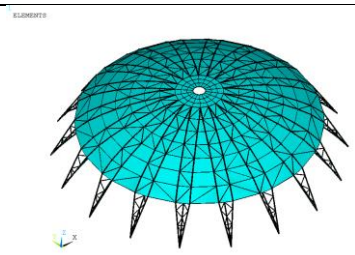
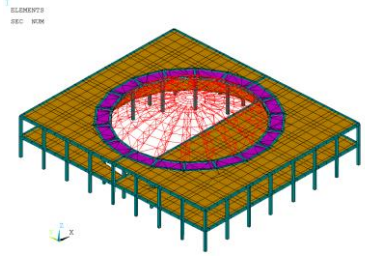
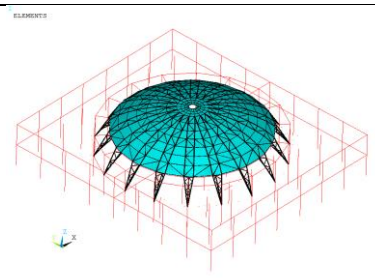


Рисунок 2. Фотографии гипермаркета г. Волжский (ТЦ ВолгаМолл).

4. модель подсистемы “ж.б. конструкции каркаса” с учетом металлических конструкции покрытия как суперэлемента;
5. модель подсистемы “металлические конструкции покрытия” с учетом железобетонных конструкций каркаса как суперэлемента.

Разработанные расчетные модели системы и подсистем адекватно отражают геометрико-жесткостные и инерционные свойства и наг-

Таблица 1. Разработанные расчетные конечноэлементные модели несущих конструкций блока «Е» гипермаркета в г. Волжский.

№ п/п	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Количество узлов	Количество элементов	Типы КЭ
1	«железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия»		***6 145***	***8 289***	SHELL181 BEAM188
2	«железобетонные конструкции каркаса»		***1 536***	***1 947***	SHELL181 BEAM188
3	«металлические конструкции покрытия»		***4 632***	***6 342***	SHELL181 BEAM188
4	«железобетонные конструкции каркаса» + суперэлемент «покрытие»		***1 554***	***1 948***	SHELL181 BEAM188 ***MATRIX50***
5	«металлические конструкции покрытия» + суперэлемент «железобетонные конструкции каркаса»		***4 632***	***6 343***	SHELL181 BEAM188 ***MATRIX50***

рузочные характеристики строительных конструкций. Об этом, в частности, свидетельствует и вычислительная размерность построенных ANSYS-моделей – до 6 145 узлов (36 870 степеней свободы) и 8 289 конечных элементов.

При создании модели длина грани конечного элемента принята в среднем 1.2 – 2.8м. При этом сетка КЭ на плитах и перекрытий обладает необходимой подробностью для воспроизведения перемещений, сил и моментов.

Общий вид, размерность и типы используемых элементов, построенных КЭ-моделей блока «Е» гипермаркета в г. Волжский приведены в таблице 1.

Для моделирования плит перекрытий использовались четырёхугольные и треугольные в плане КЭ оболочки типа SHELL181 – 4-х узловой оболочечный элемент, реализующий теорию Миндлина-Рейсснера. Балки и колонны выполнены стержневыми КЭ типа BEAM188 – 2-х узловой пространственный балочный элемент. 2 узла расположены на концах элемента, третий узел необходим для позиционирования сечения в пространстве. Узел ориентации может быть задан общим для нескольких элементов. Элемент MATRIX50 (суперэлемент) – является группой предварительно собранных конечных элементов, которая рассматривается в качестве отдельного элемента и представлена редуцированными матрицами (жесткости, масс, нагрузок). После того, как суперэлемент сформирован, он может быть включен в любую модель программного комплекса (ПК) ANSYS Mechanical и использоваться в любом типе расчета, для которого допускается его применение.

Граничные условия – жесткое защемление (заделка) узлов по низу колонн.

Расчет методом динамического синтеза подконструкций проводился с применением двух подходов учета внутренних форм колебаний суперэлемента: метода фиксированной границы и метода свободной границы. Далее проводилось сопоставление результатов полученных для всех моделей систем и подсистем несущих конструкций блока Е гипермаркета в г. Волжский.

5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

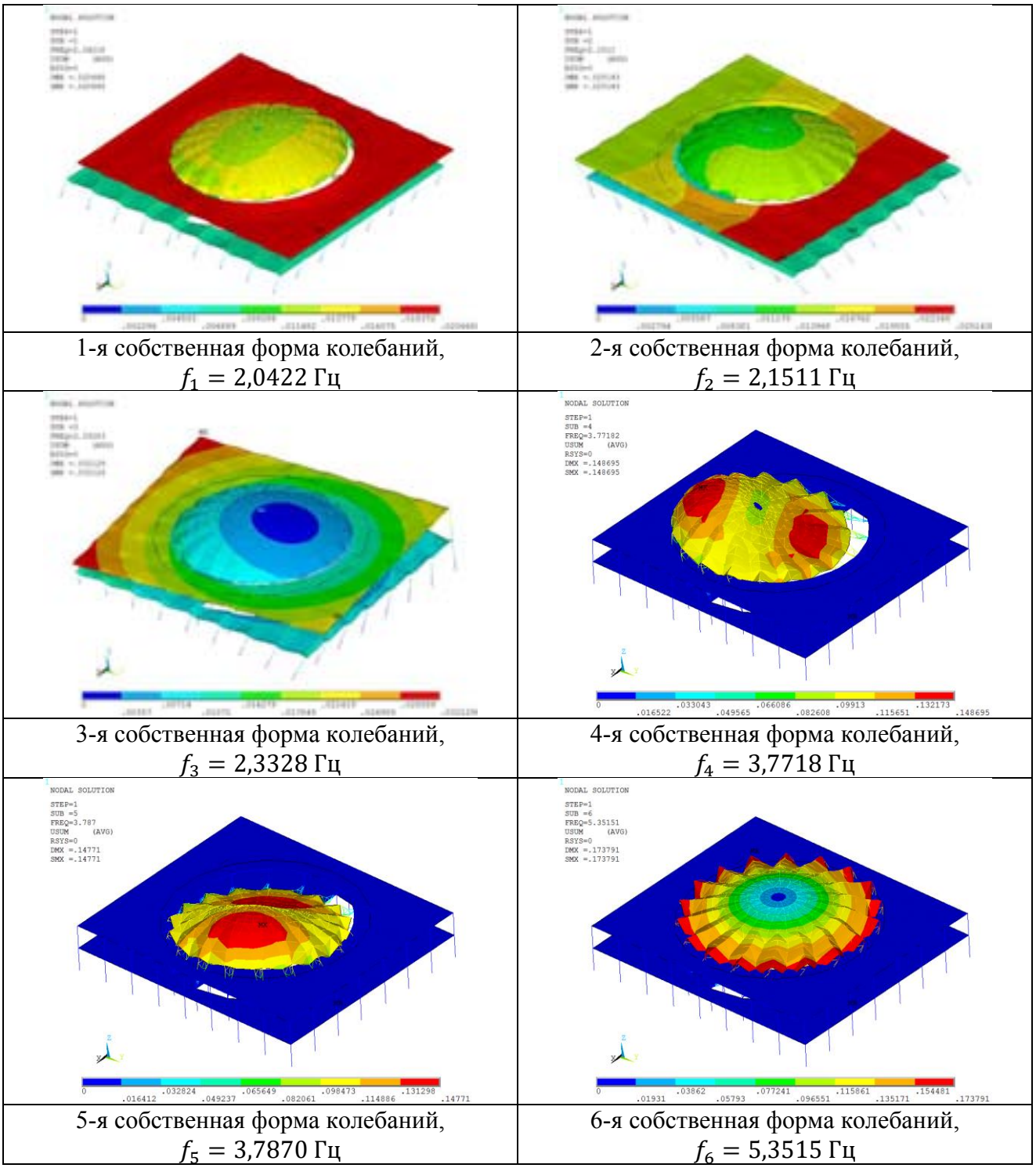
При сопоставлении результатов динамических расчетов сравнивались частоты и формы собственных колебаний модели полной системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» блока «Е» гипермаркета в г. Волжский и моделей составляющих её подсистем.

При расчетах с применением суперэлементного подхода использовались два альтернативных метода учета внутренних форм колебаний конструкций, учтенных как суперэлементы: метод фиксированной и свободной границы.

В таблице 2 приведены частоты собственных колебаний исследуемых моделей. Сравнивались собственные частоты и формы колебаний полной модели и моделей подсистем с использованием суперэлементов. Результаты такого сопоставления приведены в таблицах 1 и 2. Δ_1 и Δ_2 в указанных таблицах – максимальная разница частот собственных колебаний полной модели и моделей подсистем с применением суперэлементного подхода с учетом внутренних форм колебаний методом фиксированной и свободной границы соответственно.

В таблицах данные расположены таким образом, что в одной строке приведены частоты, близкие по величине, а также имеют сходные или совпадающие форм собственных колебаний

Сопоставление и анализ собственных частот и форм колебаний полных моделей систем «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» и моделей подсистем учетом суперэлементов показывает, что расчеты динамических характеристик с применением указанного подхода дают результаты, практически идентичные полученным при расчете полной системы.



1-я собственная форма колебаний, $f_1 = 2{,}0422$ Гц

2-я собственная форма колебаний, $f_2 = 2{,}1511$ Гц

3-я собственная форма колебаний, $f_3 = 2{,}3328$ Гц

4-я собственная форма колебаний, $f_4 = 3{,}7718$ Гц

5-я собственная форма колебаний, $f_5 = 3{,}7870$ Гц

6-я собственная форма колебаний, $f_6 = 5{,}3515$ Гц

Рисунок 3. Низшие формы собственных колебаний полной модели системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» блока «Е» гипермаркета в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

Следует отметить, что при применении суперэлементного подхода для систем несущих конструкций исследуемого типа более точным показал себя метод свободной границы.

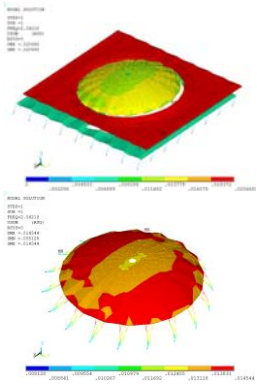
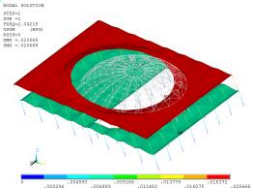
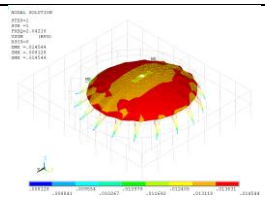
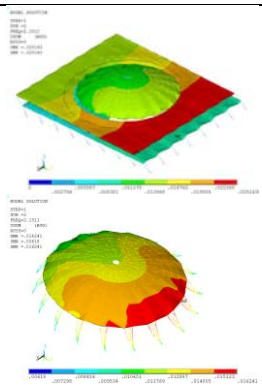
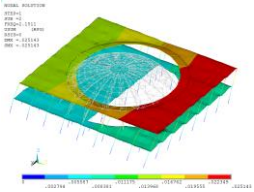
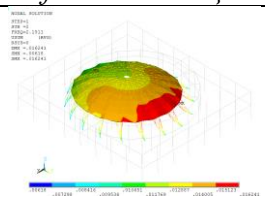
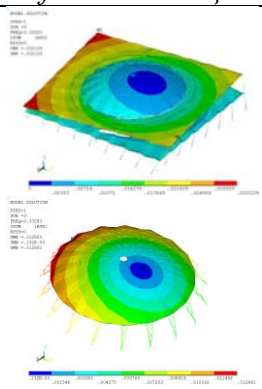
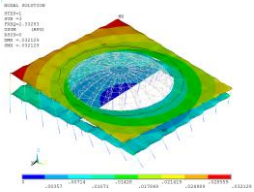
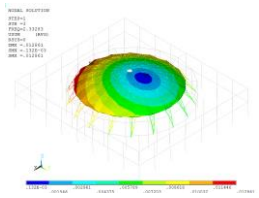
Таблица 2. Сопоставление собственных частот колебания моделей полной системы и составляющих её подсистем блока «Е» гипермаркета в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

Полная модель системы «ж.б. конструкции каркаса – метал. конструкции покрытия»		Модель подсистемы «ж.б. конструкции каркаса» с учетом метал. конструкции покрытия как суперэлемента FIX		Модель подсистемы «метал. конструкций покрытия» с учетом ж.б. конструкций каркаса как суперэлемента FIX	Δ_1, %	Модель подсистемы «ж.б. конструкции каркаса» с учетом метал. конструкции покрытия как суперэлемента FREE		Модель подсистемы «метал. конструкций покрытия» с учетом ж.б. конструкций каркаса как суперэлемента FREE	Δ_2, %
№ п/п	Частота, Гц	№ п/п	Частота, Гц	Частота, Гц		№ п/п	Частота, Гц	Частота, Гц	
1	2.0422	1	2.0422	2.0427	0.024	1	2.0422	2.0422	0.000
2	2.1511	2	2.1511	2.1517	0.028	2	2.1511	2.1511	0.000
3	2.3328	3	2.3328	2.3339	0.047	3	2.3328	2.3328	0.000
4	3.7718	4	3.7718	3.7718	0.000	4	3.7720	3.7718	0.005
5	3.7870	5	3.7870	3.7870	0.000	5	3.7871	3.7870	0.003
6	5.3515	6	5.3515	5.3515	0.000	6	5.3516	5.3515	0.002
7	6.2311	7	6.2311	6.2328	0.027	7	6.2311	6.2311	0.000
8	6.3335	8	6.3336	6.3442	0.169	8	6.3335	6.3335	0.000
9	6.5406	9	6.5407	6.5511	0.160	9	6.5406	6.5406	0.000
10	7.1281	10	7.1282	7.1392	0.155	10	7.1281	7.1281	0.000
11	7.2008	11	7.2008	7.2024	0.022	11	7.2008	7.2008	0.000
12	7.4110	12	7.4112	7.4374	0.355	12	7.4110	7.4110	0.000
13	7.8657	13	7.8660	7.8923	0.337	13	7.8658	7.8657	0.001
14	8.5772	14	8.5772	8.5798	0.030	14	8.5772	8.5772	0.000
15	8.7472	15	8.7476	8.8014	0.616	15	8.7472	8.7472	0.000
16	8.9045	16	8.9045	8.9154	0.122	16	8.9045	8.9045	0.000
17	9.0157	17	9.0160	9.0337	0.199	17	9.0158	9.0157	0.001
18	9.0454	18	9.0459	9.1039	0.643	18	9.0455	9.0454	0.001
19	9.0574	19	9.0577	9.1433	0.939	19	9.0575	9.0574	0.001
20	9.1367	20	9.1368	9.1556	0.206	20	9.1368	9.1367	0.001
21	9.1532	21	9.1533	9.1634	0.111	21	9.1532	9.1532	0.000

22	9.1625	22	9.1625	9.2111	0.528	22	9.1625	9.1625	0.000
23	9.2486	23	9.2487	9.2748	0.282	23	9.2486	9.2486	0.000
24	9.3700	24	9.3701	9.3978	0.296	24	9.3701	9.3700	0.001
25	9.4190	25	9.4191	9.4417	0.240	25	9.4191	9.4190	0.001
26	9.4919	26	9.4924	9.6393	1.529	26	9.4922	9.4919	0.003
27	9.8804	27	9.8805	9.8844	0.040	27	9.9877	9.8828	1.074
28	10.259	28	10.259	10.266	0.068	28	10.259	10.259	0.000
29	10.345	29	10.345	10.356	0.106	29	10.345	10.345	0.000
30	10.364	30	10.365	10.436	0.690	30	10.365	10.364	0.010
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

* Примечание: FIX – метод фиксированной границы; FREE – метод свободной границы.

Таблица 3. Сопоставление собственных частот и форм колебания полной модели и моделей подсистем с применением суперэлементного подхода блока «Е» гипермаркета в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

Полная модель системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия»		Модель подсистемы «железобетонные конструкции каркаса» с учетом металлических конструкции покрытия как суперэлемента FREE		Модель подсистемы «металлические конструкций покрытия» с учетом железобетонных конструкций каркаса как суперэлемента FREE		Δ_2 %
№ п/п	Форма колебания / частота	№ п/п	Форма колебания / частота	№ п/п	Форма колебания / частота	
1	 $f_1 = 2.0422Гц$	1	 $f_1 = 2.0422Гц$	1	 $f_1 = 2.0422Гц$	0.000
2	 $f_2 = 2.1511Гц$	2	 $f_2 = 2.1511Гц$	2	 $f_2 = 2.1511Гц$	0.000
3	 $f_3 = 2.3328Гц$	3	 $f_3 = 2.3328Гц$	3	 $f_3 = 2.3328Гц$	0.000
…	…	…	…	…	…	:

* Примечание: FREE – метод свободной границы

Погрешность вычисленных собственных частот и форм колебаний при использовании метода фиксированной границы составила, в основном, не более 0,40%, а для отдельных форм 1,53%. При применении метода свободной границы – в целом не более 0,01%, а для отдельных форм колебаний – до 1,07%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты, изложенные в настоящей статье, можно сделать следующие выводы:

1) Предложена и теоретически обоснована методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» футбольных стадионов.
2) Разработанная методика реализует современные подходы математического моделирования, в том числе – суперэлементные – и основана на подробных большеразмерных пространственных динамических конечноэлементных моделях упомянутых систем.
3) Методика реализована в универсальном («тяжелом») программном комплексе численного моделирования ANSYS Mechanical с использованием собственных программных разработок автора.
4) Разработаны и верифицированы пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели системы “железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия” и основных составляющих подсистем (блока «Е» гипермаркета в г. Волжский), адекватно отражающие их геометрико-жесткостные, инерционные и нагрузочные характеристики и результирующее напряженно-деформированное состояние, параметры динамики.
5) По разработанным КЭ-моделям в верифицированном универсальном программном комплексе ANSYS Mechanical вычислены динамические характеристики несущих конструкций (собственные частоты и формы колебаний). Сопоставление и анализ собственных частот и форм колебаний полных моделей систем «ж.б. конструкции каркаса – метал. конструкции покрытия» и моделей подсистем учетом суперэлементов показывает, что расчеты динамических характеристик с применением указанного подхода дают результаты, практически идентичные полученным при расчете полной системы.
6) Результаты проведенной верификации разработанной методики подтвердили, что применяемый подход при использовании метода динамического синтеза подконструкций, реализованного в ней, обеспечивает желаемую возможность проведения независимых расчетов проектируемых подсистем в рамках сепаратных моделей.
7) В ходе дальнейших исследований планируется провести апробацию разработанной методики численного (суперэлементного) моделирования динамики систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» на реальных футбольных стадионах чемпионата мира 2018 года.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Модернизация и применение численных методов к расчету плитно-оболочечных систем на статические и динамические воздействия. // В кн. “Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования”. – М.: Наука, 1980, с. 11-58.
2. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем «сооружение–основание». //

Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, 1990, с. 175-180.

3. **Белостоцкий А.М., Белый М.В.** Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. Труды XVIII Международной конференции BEM&FEM-2000, – СПб., с. 65-69.
4. **Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л.** Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2011, Volume 7, Issue 1, с. 76-83.
5. **Гайан Р.** Приведение матриц жесткости и массы. // Ракетная техника и космонавтика, 1965, том 3, №2, с. 277-278.
6. **Belyi M.V.** Superelement Method for Transient Dynamic Analysis of Structural Systems. // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1993, Volume 36, pp. 2263-2286.
7. **Benfield W.A., Hruda R.F.** Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. // AIAA Journal J., 1976, Volume 9, pp. 1255-1261.
8. **Craig R.R.,Jr., Bampton M.C.C.** Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. // AIAA Journal, 1968, Volume 6, Number 7, pp. 1313-1319.
9. **Hale A.L., Meirovitch L.** A General Procedure for Improving Substructures Representation in Dynamic Synthesis. // Journal of Sound and Vibration, 1982, Volume 84, Number 2, pp. 269-287.
10. **Hurty W.C.** Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. // AIAA Journal., 1984, Volume 4, pp. 733-738.
11. **Leung Y.T.** Dynamic Substructure Response. // Journal of Sound and Vibration, 1991, Volume 149, Number 1, pp. 83-90.
12. **MacNeal R.H.** A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. // Computers and Structures, 1971, Volume 4, pp. 591-601.
13. **Wang J.H., Chen H.R.** Substructure Modal Synthesis Method With High Computation Efficiency. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, Volume 79, Number 2, pp. 203-217.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Belostotsky A.M.** Modernizaciya i Primenenie Chislennyh Metodov k Raschetu Plitno-Obolochechnyh Sistem na Staticheskie i Dinamicheskie Vozdejstviya [Modernization and Application of Numerical Methods to Static and Dynamic Analysis of Plate-Shell Systems]. // In the book “Dinamicheskie Kharakte-ristiki i Kolebaniya Elementov Enzhenerge-Tekhnicheskogo Oborudovaniya”. Moscow, Nauka, 1980, pp. 11-58.
2. **Belostotsky A.M.** Postroenie Effektivnyh Prostranstvennyh Modelej Dlya Staticheskogo i Dinamicheskogo Rascheta Sistem “Sooruzhenie – Osnovanie” [Construction of Effective Spatial Models for Static and Dynamic Analysis of “Building – Foundation” Systems. // Proceedings of TSNIISK im. Kucherenko, 1990, pp. 175-180.
3. **Belostotsky A.M., Belyi M.V.** Superehlementnye Algoritmy Resheniya Prostranstvennyh NelinejnyhStati-cheskih i Dinamicheskih Zadach Bol'shoj Razmernosti. Realizaciya v Programmnom Komplekse STADYO I Opyt Raschetnyh Issledovanij [Superelement Algorithms for Solving Spatial Nonlinear Static and Dynamic Problems of Large Dimension. Implementation in the STADYO Software Package and Experience in Computational Research]. // Proceedings of BEM&FEM'2000 18-th Inter-

national Conference Mathematical Modeling in Mechanics of Solids and Constructions Methods of Boundary and Finite Elements September, Saint-Petersburg, pp. 65-69.

4. **Belostotsky A.M., Potapenko A.L.** Realizaciya i Verifikaciya Metodov Submodelirovaniya i Dinamicheskogo sinteza Podkonstrukcij v Universal'nyh i Specializirovannyh Programmnyh Kompleksah [Realization and Verification of Methods of Submodeling and Dynamic Synthesis of Substructures in Universal and Specialized Software Complexes]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2011, Volume 7, Issue 1, pp. 76-83.
5. **Gayan R.** Privedenie Matric Zhestkosti i Massy [The Reduction of the Stiffness and Mass Matrices]. // Raketnaya Tekhnika i Kosmonavtika, 1965, Volume 3, Number 2, pp. 277-278.
6. **Belyi M.V.** Superelement Method for Transient Dynamic Analysis of Structural Systems. // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1993, Volume 36, pp. 2263-2286.
7. **Benfield W.A., Hruda R.F.** Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. // AIAA Journal J., 1976, Volume 9, pp. 1255-1261.
8. **Craig R.R.,Jr., Bampton M.C.C.** Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. // AIAA Journal, 1968, Volume 6, Number 7, pp. 1313-1319.
9. **Hale A.L., Meirovitch L.** A General Procedure for Improving Substructures Representation in Dynamic Synthesis. // Journal of Sound and Vibration, 1982, Volume 84, Number 2, pp. 269-287.
10. **Hurty W.C.** Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. // AIAA Journal., 1984, Volume 4, pp. 733-738.
11. **Leung Y.T.** Dynamic Substructure Response. // Journal of Sound and Vibration, 1991, Volume 149, Number 1, pp. 83-90.
12. **MacNeal R.H.** A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. // Computers and Structures, 1971, Volume 4, pp. 591-601.
13. **Wang J.H., Chen H.R.** Substructure Modal Synthesis Method with High Computation Efficiency. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, Volume 79, Number 2, pp. 203-217.

Нагибович Александр Игоревич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810;
тел. +7 (499) 706-88-10;
E-mail: nagibovich@yandex.ru

Alexander I. Nagibovich, Senior Engineer of Scientific Research Center “StaDyO”; PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia;
phone +7 (499) 706-88-10;
E-mail: nagibovich@yandex.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-133-140

РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В.В. Петров, Р.В. Мищенко, Д.А. Пименов
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, РОССИЯ

Аннотация: Алгоритм градиентного метода Канторовича применительно к нелинейным задачам строительной механики и механики деформируемого твердого тела, предложенный в [1], применен к исследованию изгиба физически нелинейных пластин переменной толщины. Данную статью следует рассматривать как логическое развитие содержания работы [2].

Ключевые слова: нелинейная строительная механика,
метод последовательных нагружений, метод наискорейшего спуска

THE SOLUTION OF PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF BENDING VALVE PLATES

Vladilen V. Petrov, Roman V. Mishchenko, Dmitry A. Pimenov
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, RUSSIA

Abstract: The algorithm of Kantorovich gradient method applied to nonlinear problems of construction mechanics and mechanics of deformable solids, proposed in [1], is applied to the study of the bending of physically nonlinear plates of variable thickness. This article should be considered as a logical development of the content of the work [2].

Keywords: nonlinear structural mechanics, method of successive loadings, method of steepest descent

Многие проблемы математической физики сводятся к задаче поиска экстремумов квадратичных функционалов. Рассмотрим особенности применения градиентного метода Канторовича к решению задач изгиба физически нелинейных пластин переменной толщины, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. В теореме, доказанной Л.В. Канторовичем, оговаривалось, что для применения этого метода необходимо, чтобы задача описывалась ограниченным, симметричным линейным оператором.

При решении нелинейных задач теории пластинок и оболочек методом последовательных нагружений (МПН) [3] на каждом этапе нагружения решается линейная задача. Следовательно, на каждом этапе решения имеем соответствующий квадратичный функционал. Л.В. Канторович [1] развил градиентный метод наискорейшего спуска для решения линейных дифференциальных уравнений в операторной форме при существовании соответствующего квадратичного функционала. Поэтому если при решении нелинейных задач применить метод последовательных нагружений и на каждом этапе нагружения решать инкрементальные уравнения градиентным методом наискорейшего спуска, то получим алгоритм применения градиентного метода Канторовича для решения нелинейных задач механики.

Так как на каждом этапе нагружения имеем упругую консервативную линейную систему, то на основании теоремы Максвелла можно утверждать, что оператор будет симметричным. Следующим требованием применения градиентного метода наискорейшего спуска является ограниченность операто-

ра задачи. Если рассматриваемая задача описывается дифференциальными уравнениями, то оператор будет неограниченным. Л.В. Канторовичу принадлежит идея, что неограниченный сложный оператор *A* можно ограничить другим более простым неограниченным оператором *B*. Им доказана теорема: если положительно определенный линейный оператор A является B- ограниченным, то есть справедливо выражение:

$$m\langle Bu,u\rangle \le \langle Au,u\rangle \le M\langle Bu,u\rangle, \quad (0<m\le M<+\infty)$$

$$m\ Bu,u\ \le\ Au,u\ \le M\ Bu,u\ , \quad (0<m\le M<+\infty), \quad (1)$$

то имеет место *B*-сходимость процесса наискорейшего спуска к обобщенному решению уравнения с быстротой геометрической прогрессии. Здесь и далее используется обозначение скалярного произведения двух функций F и f в виде $\langle F, f\rangle$.

В методе последовательных нагружений решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линейных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$A(u_{n-1})\Delta u_n = \Delta q_n, \qquad (2)$$

где произведение $A(u_{n-1})\Delta u_n$ – дифференциал Гато исходного нелинейного оператора в точке u_{n-1}, n – номер этапа нагружения, u_{n-1} – суммарное решение, полученное за $n-1$ предыдущие этапы нагружения. Если $n=1$, то уравнение (2) вырождается в уравнение соответствующей линейной теории. Присваивая n последовательные значения $1, 2, 3....N$ мы будем перемещаться вдоль ведущего параметра q, решая при этом поставленную нелинейную задачу.

Для реализации градиентного метода необходимо на некотором линейном множестве Ω плотном в гильбертовом пространстве H выбрать симметричный положительно полуограниченный оператор *B*:

$$\langle Bu,u\rangle \ge \langle Au,u\rangle,$$

область определения которого совпадает с областью определения оператора A, и при этом справедливо неравенство (1). При решении задач строительной механики *B*-ограниченность оператора A обеспечивается, если упругая система, описываемая оператором *B* является мажорантой, то есть более жесткой по сравнению с исходной, описываемой оператором A [4]. Поэтому оператор *B* при решении конкретной задачи можно построить исходя из инженерных соображений, при этом чем ближе оператор B к исходному оператору A, тем меньше будет разница $M-m$ в (1) и тем быстрее сходится процесс.

При выборе упрощенного оператора B для конкретных задач механики полезно обращать внимание на физическое содержание коэффициентов оператора A и, заменяя их теми или иными постоянными числами, сделать конструкцию более жесткой по сравнению с рассматриваемой.

В нелинейных уравнениях изгиба пластинки переменной толщины в полных функциях переменная жесткость является функцией искомого прогиба пластинки, а в инкрементальных уравнениях переменная жесткость является известной функцией пространственных координат x и y, поскольку суммарный прогиб пластинки w известен из предыдущих этапов нагружения.

При расчете физически нелинейных пластинок переменной толщины инкрементальное уравнение на каждом этапе нагружения имеет вид [3]:

$$\nabla^2\left(D_k\nabla^2\Delta w\right) - \frac{1}{2}L\left(D_k,\Delta w\right) = \Delta q(x,y), \quad (3)$$

где $\Delta q(x,y)$ – приращение нагрузки, ∇^2 – оператор Лапласа, L – дифференциальный оператор вида

$$L\left(D_k,\Delta w\right)=\frac{\partial^2 D_k}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 D_k}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D_k}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x\partial y}.$$

$$L\left(D_k,\Delta w\right)=\frac{\partial^2 D_k}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 D_k}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D_k}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x\partial y}. \quad (4)$$

Переменная вдоль пространственных координат x и y жесткость пластинки переменной толщины при изгибе определяется из выражения:

$$D_k\left(x,y\right)=\frac{4}{3}\int_{-h(x,y)}^{0}E_k\left(\varepsilon_i\right)\left[z+0{,}5h\left(x,y\right)\right]^2 dz,$$

$$D_k\left(x,y\right)=\frac{4}{3}\int_{-h(x,y)}^{0}E_k\left(\varepsilon_i\right)\left[z+0{,}5h\left(x,y\right)\right]^2 dz, \quad (5)$$

где $h\left(x,y\right)-$ переменная толщина пластинки. Переменная жесткость в инкрементальных уравнениях содержит касательный модуль E_k, в то время как в уравнениях, записанных через полные функции, она содержит секущий модуль E_c, ε_i-интенсивность деформаций.

На каждом этапе нагружения уравнение (3) будем решать методом наискорейшего спуска. В соответствии с этим методом за нулевое приближение берем решение задачи изгиба пластинки с выбранной нами постоянной жесткостью. Постоянную жесткость определяем, заменяя переменную жесткость $D_{k,j-1}$ некоторой постоянной жесткостью D^*_{j-1}, величина которой определяется из условия *B*-ограниченности дифференциального оператора уравнения (3). В этом случае пластинка, имеющая постоянную жесткость, по сравнению с исходной пластинкой должна быть более жесткой. Учитывая, что в каждой точке пластинки $E_c>E_k$ и, следовательно $D_c>D_k$, то в качестве одного из возможных вариантов постоянную жесткость D^*_{j-1} определим как осредненную жесткость следующим образом

$$D^*_{j-1}=\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b D_{c,j-1}dxdy\cdot$$

Можно использовать условие

$$D^*_{j-1}=D^{\max}_{c,j-1}\quad\text{или}\quad D^*_{j-1}=D_0,$$

где D_0-цилиндрическая жесткость упругой пластинки постоянной толщины.

Это отразится на скорости сходимости метода наискорейшего спуска.

Следовательно, в пределах этапа нагружения (далее индекс j опускаем) нулевое приближение есть решение дифференциального уравнения:

$$D^*\nabla^4\Delta w_0=\Delta q\left(x\right). \quad (6)$$

Далее определяем невязку решения $F\left(x,y\right)$, подставляя Δw_0 в уравнение (3). В результате получим функцию невязки решения:

$$F_0\left(x,y\right)=\nabla^2\left(D_k\nabla^2\Delta w_0\right)-\frac{1}{2}L\left(D_k,\Delta w_0\right)-\Delta q\left(x,y\right).$$

$$F_0\left(x,y\right)=\nabla^2\left(D_k\nabla^2\Delta w_0\right)-\frac{1}{2}L\left(D_k,\Delta w_0\right)-\Delta q\left(x,y\right). \quad (7)$$

Первое приближение принимаем в следующем виде:

$$\Delta w_1=\Delta w_0-\varepsilon_1 Z_1, \quad (8)$$

где Z_1 решение уравнения:

$$D^*\nabla^4 Z_1=F_0\left(x,y\right). \quad (9)$$

Величина спуска ε_1 определяется уравнением вида:

$$\varepsilon_1=\frac{\left\langle BZ_1,Z_1\right\rangle}{\left\langle AZ_1,Z_1\right\rangle}, \quad (10)$$

где соответствующие скалярные произведения определяются формулами:

$$\langle BZ_1, Z_1 \rangle = D^* \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 Z_1 \right] Z_1 dxdy,$$

$$\langle AZ_1, Z_1 \rangle = \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 \left(D_k \nabla^2 Z_1 \right) - \frac{1}{2} L\left(D_k, Z_1 \right) \right] Z_1 dxdy \tag{11}$$

Далее итерационный процесс повторяется:

$$\Delta w_n = \Delta w_{n-1} - \varepsilon_n Z_n, \tag{12}$$

где Z_n есть решение уравнения вида:

$$D^* \nabla^4 Z_n = F_{n-1}(x, y), \tag{13}$$

правая часть уравнения – невязка решения, вычисляется по формуле:

$$F_{n-1}(x, y) = \nabla^2 \left(D_k \nabla^2 \Delta w_{n-1} \right) - \frac{1}{2} L\left(D_k, \Delta w_{n-1} \right) - \Delta q(x, y), \tag{14}$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{\langle BZ_n, Z_n \rangle}{\langle AZ_n, Z_n \rangle}.$$

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемом алгоритме последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей.

Процесс решения следует начинать с аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования материала балки подходящим аналитическим выражением и определения аналитических выражений E_c и E_k.

Если в интересующем нас диапазоне деформаций экспериментальная диаграмма деформирования может быть, например, представлена в виде

$$\sigma_i = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3. \tag{15}$$

то секущий и касательный модули принимают вид:

$$E_k = E_0 - 4\left(z + 0.5h \right)^2 mR(W), \quad E_c = E_0 - \frac{4}{3}\left(z + 0.5h \right)^2 mR(W). \tag{16}$$

Жесткостные параметры пластинки переменной толщины имеют вид:

$$D_k(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{15} mR(W), \quad D_c(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{45} mR(W), \tag{17}$$

где E_0 – модуль упругости, $R(W)$ – квадратичная функция прогиба пластинки, которая имеет следующий вид:

$$R(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2. \tag{18}$$

Подставляя (17) в (3), получим инкрементальное уравнение изгиба пластинки.

Таким образом, совместное применение метода последовательных нагружений и метода *B*-ограниченных операторов позволяет использовать для решения нелинейных задач строительной механики эффективный метод наискорейшего спуска.

В качестве примера, для реализации метода наискорейшего спуска, рассмотрим задачу изгиба квадратной пластинки переменной толщины выполненной из нелинейно-деформируемого материала в безразмерном виде. Пластинка находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Ниже на рис. 1 приведена расчетная схема рассматриваемой пластинки с соответствующими обозначениями: h_0 – толщина пластинки по контуру, h_c – толщина пластинки в центре, P – равномерно распределенная поперечная нагрузка.

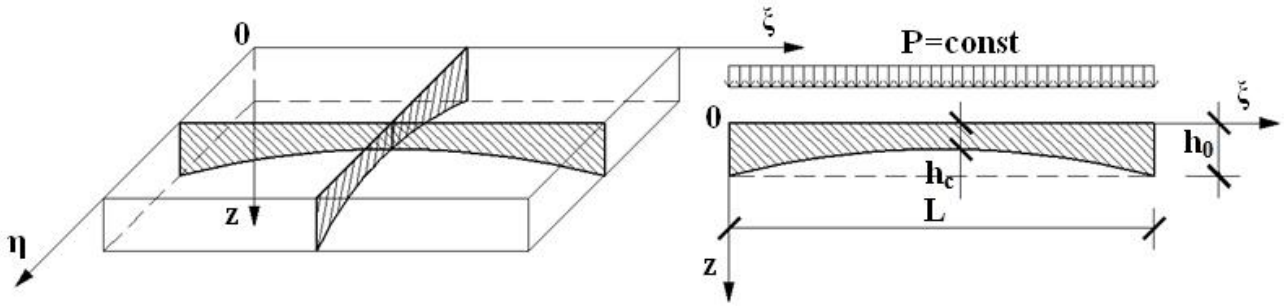


Рисунок 1. Расчетная схема пластинки с основными обозначениями.

Функцию переменной толщины $h(\xi,\eta)$ примем в виде синусоидального велароида [5]:

$$h(\xi,\eta)=1-\lambda\sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta), \quad (19)$$

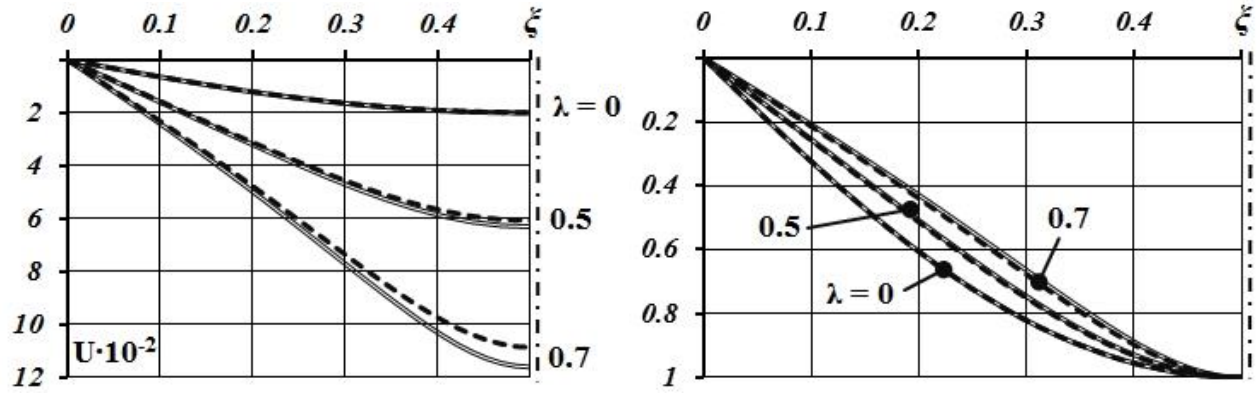
где соответственно

$$\lambda=\frac{h_0-h_c}{h_0}-$$

– безразмерный параметр относительной толщины пластинки.

Для решения дифференциальных уравнений (6) и (9) применялся метод конечных разностей с сеткой 32×32. Вычисление двойных определенных интегралов (11) выполнялось с использованием метода Симпсона. Для реализации алгоритма метода последовательных нагружений (*МПН*) нагрузка разбивалась на 10 частей и на каждом этапе метода *МПН* задача решалась методом наискорейшего спуска (*МНС*).

Ниже на рис. 2а приведены эпюры прогибов пластинки шарнирно опертой по контуру при различных значениях параметра относительной толщины λ.



(а) *(б)*

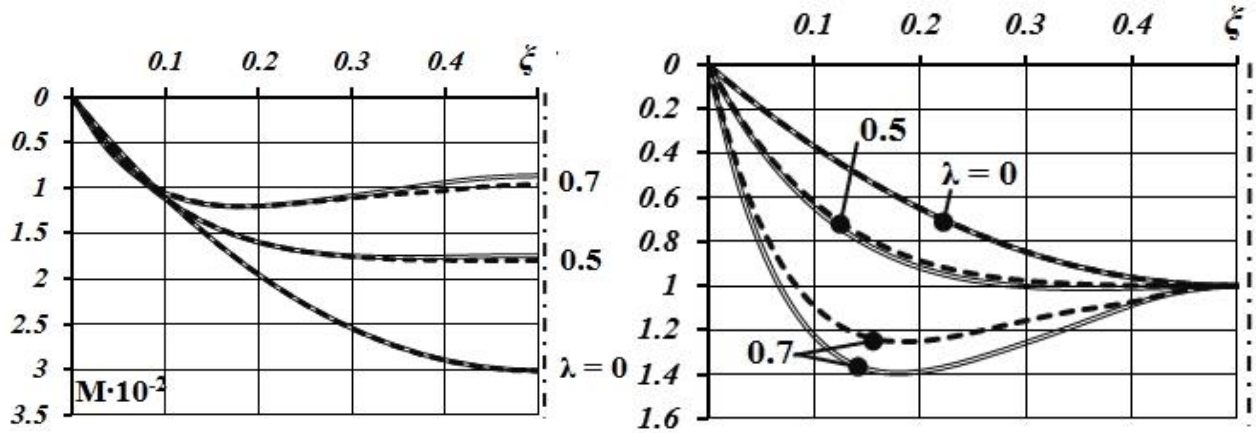
Рисунок 2. Эпюры прогибов при различных значениях параметра λ (а). Эпюры прогибов, нормированные к единице в центре (б).

Для оценки качественных изменений на рис. 2б приведены эти же эпюры прогибов, нормированные к единице в центре пластинки. Ниже на рис. 2-5 пунктирными линиями обозначены кривые соответствующие решению физически нелинейной задачи, а сплошными линиями решению физически линейной задачи.

Результаты, приведенные на рис. 2а, рис. 2б показывают, что с ростом параметра относительной толщины λ скорость роста прогибов пластинки в различных точках различна и достигает максимума в центре пластинки.

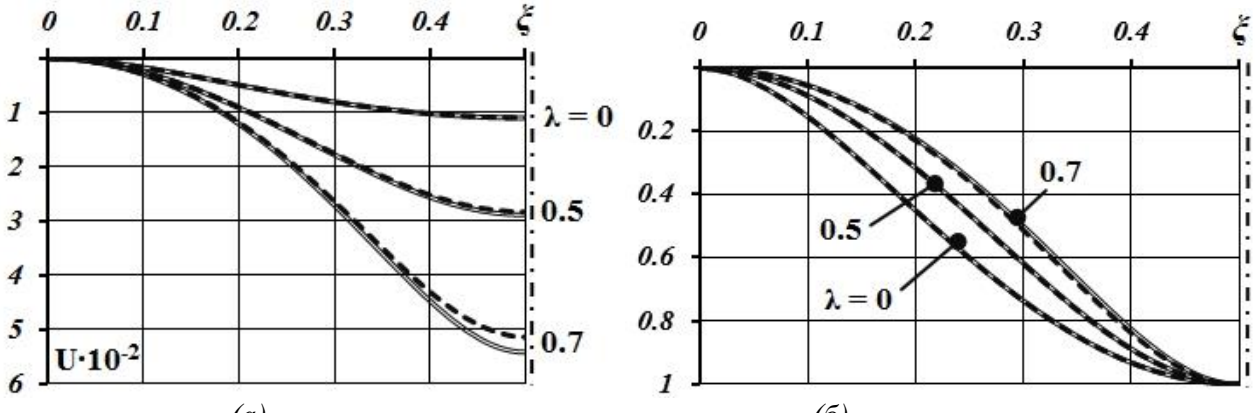
Для более качественной оценки влияния переменной толщины пластинки на ее напряженно-деформированное состояние ниже рис. 3а приведены эпюры изгибающих моментов в пластинке вдоль линии $\eta = 0{,}5$ при различных значениях параметра λ, а на рис. 3б приведены эпюры изгибающих моментов, нормированных к единице в центре пластинки. Видны качественные изменения в эпюрах, с ростом λ, происходит перемещение максимальных значений изгибающих моментов из центра пластинки в ее четверти.

Далее рассмотрим пластинку, жестко защемленную по всему контуру. На рис. 4а приведены эпюры прогибов пластинки вдоль линии $\eta = 0{,}5$ при различных значениях параметра λ, а на рис. 4б – аналогичные эпюры, нормированные к единице в центре пластинки.



(а) *(б)*

Рисунок 3. Эпюры изгибающих моментов при различных значениях λ (а). Эпюры изгибающих моментов, нормированные к единице в центре (б)

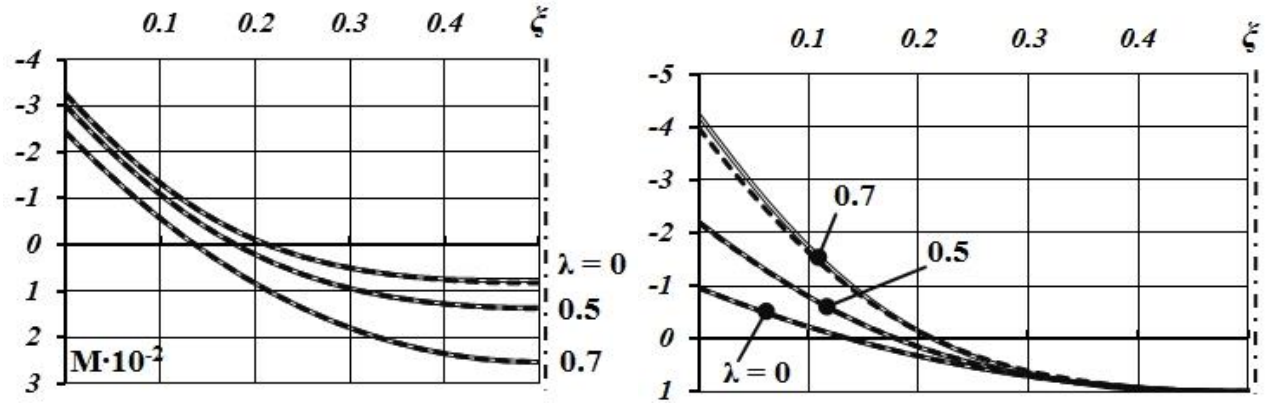


(а) *(б)*

Рисунок 4. Эпюры прогибов при различных значениях параметра λ (а). Эпюры прогибов, нормированные к единице в центре (б).

Результаты, приведенные на рис. 4,а показывают, что с ростом параметра λ значительно увеличиваются прогибы в центре. Из рис. 4,б видно, что качественные изменения в эпюрах прогибов происходят не только в центре пластинки, но и в ее четвертях, с ростом параметра λ прогиб пластинки в четверти уменьшается, однако по сравнению с изменениями, происходящими в центральной части пластинки эти изменения малы.

Для качественной оценки влияния переменной толщины пластинки на ее напряженно-деформированное состояние ниже на рис. 5,а приведены эпюры изгибающих моментов в пластинке жестко защемленной по контуру при различных значениях параметра λ. Для оценки качественных изменений в кривых изгибающих моментов на рис. 5,б приведены эпюры моментов, нормированные к единице в центре пластинки.



(а) *(б)*

Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов при различных значениях λ (а). Эпюры изгибающих моментов, нормированные к единице в центре (б).

Результаты, приведенные на рис. 5,а, показывают, что с увеличением параметра λ изгибающие моменты в центре пластинки уменьшаются, а в опорной зоне изгибающие моменты наоборот растут.

В заключение следует отметить, что совместное использование метода последовательных нагружений и метода наискорейшего спуска позволяет сводить решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к решению уравнений с постоянными коэффициентами, также следует сказать, что использование МНС позволяет на каждом этапе решения задачи качественно улучшать получаемый результат, что обеспечивается построением последовательных приближений не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л.В.** Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. // ДАН СССР, 1945, №7, с. 48.
2. **Петров В.В.** Решение нелинейных задач строительной механики методом наискорейшего спуска / В.В. Петров // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 3, с. 103-111.
3. **Петров В.В.** Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
4. **Деркачев А.А.** Общая теория метода мажорантной упругой системы. – Душанбе, 1963. – 350 с.
5. **Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.Н.** Аналитические поверхности. – М.: Наука, 2006. – 544 с.

REFERENCES

1. **Kantorovich L.V.** Ob Odnom Effektivnom Metode Resheniya Ekstremalnyx Zadach dlya Kvadratichnogo Funkcionala [An Effective Method for Solving Extremal Problems for a Quadratic Functional]. // DAN SSSR, 1945, No. 7. pp. 48.
2. **Petrov V.V.** Reshenie Nelinejnyx Zadach Stroitelnoj Mekhaniki Metodom Naiskorejshego Spuska [Solving Nonlinear Problems of Structural Mechanics by the Method of Steepest Descent]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 3, pp. 103-111.
3. **Petrov V.V.** Nelinejnaya Inkrementalnaya Stroitelnaya Mekhanika [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2014, 480 pages.
4. **Derkachev A.A.** Obshhaya Teoriya Metoda Mazhorantnoj Uprugoj Sistemy [The General Theory of the Method of the Majorant Elastic System]. Dushanbe, 1963, 350 pages.
5. **Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.N.** Analiticheskie Poverxnosti [Analytical Surfaces]. Moscow, Nauka, 2006, 544 pages.

Петров Владилен Васильевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Теория сооружений и строительных конструкций», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77;
тел. +7(8452)99-86-03; факс +7(8452)99-88-10;
E-mail: vvp@sstu.ru.

Мищенко Роман Викторович, аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.; 410036, Россия, Саратовская область, г. Саратов, ул. Ростовская, д. 38;
тел. +7(987)338-40-22; e-mail: roman_radon4@mail.ru.

Пименов Дмитрий Алексеевич, аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, Саратовская область, г. Саратов, ул. 2-я Садовая, д. 97;
тел. +7(937)632-19-12; e-mail: scorpions91@inbox.ru.

Vladilen V. Petrov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr. Sc., Head of the Department «Theory of Constructions and Building Structures», Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410054, Russian Federation, Saratov, 77 Polytechnicheskaya;
phone +7 (8452) 99-86-03; fax +7 (8452) 99-88-10;
E-mail: vvp@sstu.ru.

Roman V. Mischenko, Ph.D. Student of the Department «Theory of Constructions and Building Structures» Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410036, Saratov Region, Saratov, 38 Rostovskaya;
phone +7(987) 338-40-22;
E-mail: roman_radon4@mail.ru.

Dmitriy A. Pimenov, postgraduate student of the Department «Theory of Constructions and Building Structures» Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410054, Saratov Region, Saratov, 97 2-nd Sadovaya;
phone +7(937) 632-19-12;
E-mail: scorpions91@inbox.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-141-148

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ СИСТЕМ ВОДОСНАБЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЕЙ

О.Г. Примин, Г.Н. Громов
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
АО «МосводоканалНИИпроект», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Разработка гидравлической модели регулируется в соответствии с российским законодательством. Однако, законодательные акты не содержат пояснений относительно методологии и уровня детализации гидравлической модели, а также требований для достаточного уровня калибровки модели. В настоящей статье представлена методология внедрения гидравлической модели для систем водоснабжения.

Ключевые слова: система водоснабжения, электронная модель, реализация

HYDRAULIC CALCULATIONS IMPROVEMENT OF WATER SUPPLY SYSTEMS BY USING ELECRONIC MODELS

Oleg G. Primin, Grigory N. Gromov
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
JSC «MosvodokanalNIIproekt», Moscow, RUSSIA

Abstract: Development of hydraulic model is regulated according to Russian legislation acts. However, these legislation acts do not contain explanations regarding the methodology and detail level of hydraulic model, as well as requirements for sufficient level of model calibration. This paper presents hydraulic model implementation methodology for water supply systems.

Keywords: water supply system, electronic model, realization

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть населения городов и поселений России обеспечена питьевой водой гарантированного качества (хотя бы по 50 параметрам). Однако, большая часть населения потребляет воду, качество которой не гарантировано, причем десятки миллионов человек используют природную воду без предварительной очистки.

Для поэтапной реализации этой задачи и в целях определения долгосрочной перспективы развития систем водоснабжения и водоотведения городов и поселений России, а также экономического стимулирования правительством РФ утвержден и введен в действие Федеральный закон от 7 декабря 2011 г. № 416-ФЗ «О водоснабжении и водоотведении» [1]. На основании этого закона развитие централизованных систем водоснабжения и водоотведения городов и поселений России осуществляется только в соответствии с Генеральными схемами этих систем [1]. В составе схемы необходимо разработать электронную модель централизованной системы водоснабжения и водоотведения города.

Значительный объем статистической и эксплуатационной информации, сложная конфигурация и структура систем водоснабжения и водоотведения, неопределенность спроса на

воду потребовали применения информационных технологий для оценки и анализа функционирования этих систем и оптимизации их работы. В статье приведены направления совершенствования гидравлических расчетов систем водоснабжения с использованием электронных моделей.

В соответствии с требованиями, предъявляемыми законодательством России, развитие водного хозяйства и инженерной инфраструктуры городов и населенных пунктов необходимо осуществлять в соответствии с проектами генеральных схем водоснабжения и водоотведения. Проекты схем разрабатываются в соответствии с документами территориального планирования города и основываются на разработке проектных решений, позволяющих определить инженерные решения и требуемые капитальные вложения

При численности населения города более 150 тыс. человек данные схемы обязательно должны включать в себя электронные модели систем водоснабжения и водоотведения.

Электронная модель системы водоснабжения – это геоинформационная система (ГИС), которая отражает в электронном виде актуальную информацию о структуре и технико-экономическом состоянии систем, а также обеспечивает проведение гидравлических расчетов. Электронная модель является инструментом анализа работы системы водоснабжения, а также позволяет моделировать ее реконструкцию и перспективное её развитие.

Стоит отметить, что в соответствии с «Правилами разработки и утверждения схем водоснабжения и водоотведения» [2], регламентируются требования к разработке электронной модели. Однако эти требования относятся к ее содержанию и программному обеспечению и не содержат в себе разъяснений в части методики и степени детализации модели, а также требований к сходимости электронной модели с фактическими показателями работы системы.

На текущий момент для реализации электронных моделей можно использовать различные программные комплексы (Bentley, MIKE URBAN, Zulu, ИСИГР,Citi Com и др. [3-7]). В Российской Федерации наиболее популярными являются отечественные программные продукты, это объясняется небольшой ценой по сравнению с рассмотренными программными комплексами и достаточным набором функций согласно «Правилам разработки и утверждения схем водоснабжения и водоотведения» [2]. Однако стоит отметить, что отечественные программные комплексы уступают иностранным программным продуктам в ряде функциональных возможностей, в том числе в ряде функциональных возможностей, необходимых для построения электронной модели.

Институт «МосводоканалНИИпроект» успешно реализовал электронные модели систем водоснабжения таких городов, как: Уфа, Иркутск, Пенза, Оренбург, Тюмень, Салават, Минск. В данной работе представлен опыт разработки и алгоритм построения электронной модели системы водоснабжения.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Построение электронной модели предусматривает следующие этапы:

1. Построение расчетной схемы.
2. Определение расходной характеристики модели.
3. Калибровка модели.

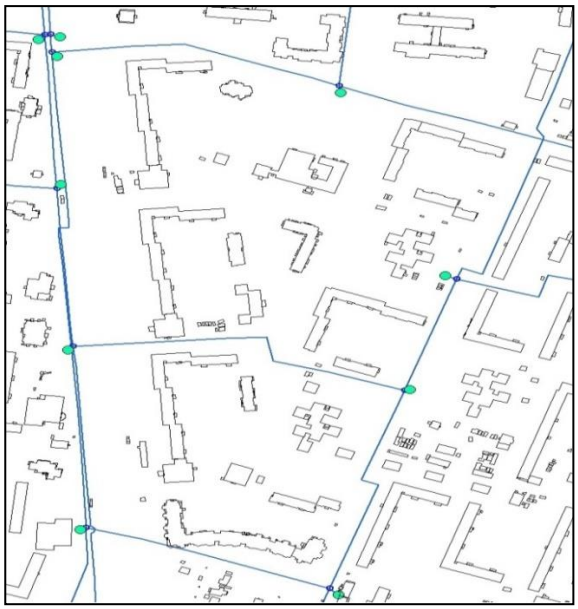
При этом к основным видам данных относятся:

1. Топографические данные по трубопроводам и сооружениям сети.
2. Данные об оборудовании сооружений сети.
3. Статистические данные работы системы водоснабжения.

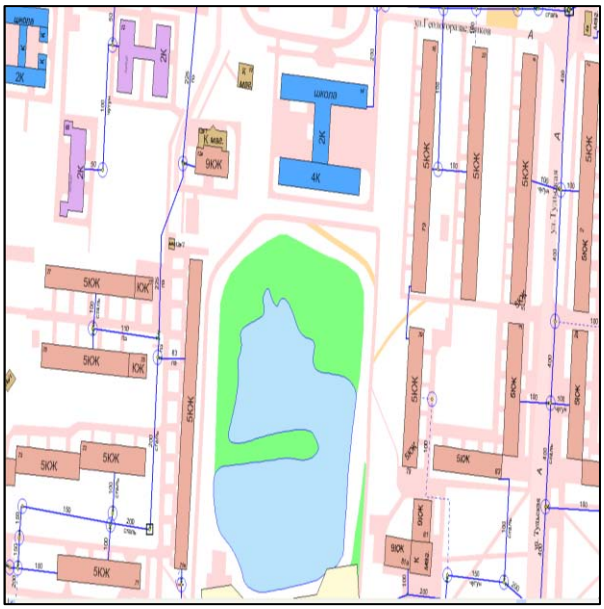
В практике различают 2 вида моделей: детализированная и укрупненная электронные модели. Детализированная электронная модель системы водоснабжения города вклю-

чает в себя всю информацию о системе водоснабжения. При построении укрупнённой модели используется условная схема водоотбора.

Условная схема водоотбора предполагает отбор воды из сети путем нефиксированных узловых отборов. Расстановка расчетных узловых отборов производится в местах пересечения магистральных трубопроводов, а также в местах сосредоточенного отбора промышленными предприятиями и других крупных потребителей воды. Различие между детализированной и укрупненной электронными моделями представлено на рис. 1.



Расчётная схема укрупненной электронной модели



Расчётная схема детализированной электронной модели

<u>Рисунок 1.</u> Примеры расчётных схем детализированной и укрупненной электронных моделей.

Укрупненная электронная модель отличается меньшей степенью сходимости в сравнении с детализированной моделью, но, в свою очередь, также отличается на порядок меньшим объемом необходимых исходных данных и сроком её реализации.

После выбора типа и построения расчетной схемы определяется расходная характеристика модели, которая основывается на анализе статистики подачи насосных станций второго подъема. На основе анализа определяется максимальный день и максимальный час водоподачи. Далее формируется балансовая схема системы, которая включает в себя зоны, а также подзоны системы водоснабжения.

На основе балансовой схемы гидравлический расчёт системы водоснабжения может быть выполнен на расчётный час или проведено 24-ёх часовое моделирование системы. Стоит отметить, что 24-ёх часовое моделирование системы требует построения 24 балансовых схем соответственно.

При построении укрупненных электронных моделей необходим расчёт расхода нефиксированных узловых отборов. Анализ российских программных комплексов показал отсутствие таких функций. В связи с этим, АО

«МосводоканалНИИпроект» разработал алгоритм расчёта нефиксированных узловых отборов, который применим к программному обеспечению «Zulu». Алгоритм реализован на языке Visual Basic for Application (VBA) с использованием таблиц Excel. Структура алгоритма включает в себя:

1. Выгрузка базы данных ПО «Zulu» (предварительно узловые отборы нумеруются).
2. Формирование матрицы инцидентности.
3. Занесение данных по расходам зон и подзон системы водоснабжения.
4. Расчёт нефиксированных узловых отборов.
5. Загрузка результатов расчёта в базу данных «потребитель» ПО «Zulu».

Разработанный алгоритм расчёта расходов нефиксированных узловых отборов был апробирован и внедрен при разработке укрупненной модели водоснабжения города Минска.

Для объективной оценки влияния перспективных мероприятий, направленных на улучшение работы сети, а также развитие системы водоснабжения города, необходимо моделирование с использованием адекватной электронной модели. Адекватность электронной модели достигается путем её калибровки.

Основной целью калибровки электронной модели сети водоснабжения является соблюдение моделью замеренных характеристик реальной системы водоснабжения. С математической точки зрения процесс калибровки гидравлической модели водоснабжения заключается в минимизации целевой функции E:

$$E = \sum_{i=1}^{P} w_h \, (h_i^m - h_i)^2 + \sum_{i=1}^{Q} w_q \, (q_i^m - h_i)^2, \quad (1)$$

где P и Q являются измеряемыми значениями давления и расхода; h_i^m- измеряемый напор в узле i; h_i - расчетный напор в узле i; q_i^m- измеряемый расход в i трубе; q_i- расчетный расход в i трубе.

На текущий момент во всемирно известных программных продуктах Mike Urban, Bentley используются неявные (оптимизационные) калибровочные модели. Неявные калибровочные модели основываются на решении оптимизационной проблемы (уравнение 1). Для решения данной задачи в программных продуктах Mike Urban, Bentley используется сложный генетический алгоритм [8-9].

Анализ российских программных продуктов показал отсутствие функции алгоритмизированной калибровки. В связи с этим, АО «МосводоканалНИИпроект» разработал алгоритм автоматической калибровки электронной модели для российского программного обеспечения «Zulu» на основе генетического алгоритма. Алгоритм реализован на языке Visual Basic for Application (VBA) с использованием таблиц Excel и библиотеки ActiveX компонентов «ZuluNetTools».

Несмотря на высокую производительность генетического алгоритма, при задании большого количества неизвестных, время работы достаточно высоко для детализированных электронных моделей. Поэтому в руководстве пользователя Mike Urban [8], а также в [10] предложена предварительная группировка трубопроводов по шероховатости или другим характеристикам. Для связи материала, года прокладки и шероховатости трубопровода в работе [11] была предложена следующая формула:

$$\varepsilon_i=\varepsilon_{max}-(\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min})[(t_{max}-t_i)/(t_{max}-t_{min})]^b, \quad (2)$$

где ε_i – шероховатость для трубы i, мм; ε_{min} и ε_{max} – минимальные и максимальные значения шероховатости, которые соответствуют минимальному и максимальному возрастам труб, мм; t_{min} и t_{max} – минимальный и максимальный возрасты трубопроводов в группе, год.

На основе формулы 2 АО «МосводоканалНИИпроект» разработал алгоритм калибровки, реализованный на языке Visual Basic for Application (VBA) с использованием таблиц Excel и библиотеки ActiveX компонентов «ZuluNetTools». Алгоритм применим к программному обеспечению Zulu.

Структура работы алгоритма включает в себя:

1. В качестве исходных данных задаётся диапазон максимальных шероховатостей, соответствующий максимальному возрасту трубопровода.
2. Используя значения из заданного диапазона, рассчитываются значения шероховатости каждого трубопровода.
3. Данные экспортируются в базу данных Zulu и производится гидравлический расчёт.

Используя формулу 1, оценивается сходимость модели при заданном значении максимальной шероховатости. На основе полученных значений функции *E* формируется поверхность, по которой пользователь может определить оптимальное соотношение между максимальными значениями шероховатостей трубопроводов и сходимостью модели.

3. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Одними из последних работ, выполненных АО «МосводоканалНИИпроект», являлись: разработка укрупненной электронной модели города Минска и калибровка детализированной модели города Салават.

Построение электронной модели системы водоснабжения города Минска основывалось на условной схеме водоотбора, которая предполагала фиктивные и сосредоточенные узловые отборы.

В модель были включены основные магистральные водоводы системы с диаметром более 300 мм. Расстановка сосредоточенных отборов производилась в местах отбора воды крупными потребителями (промышленные предприятия РПНС и ЛПНС г. Минска). Расстановка фиктивных узловых отборов в местах пересечения магистральных водоводов.

В модель было внесено 4800 элементов, включая: 15 насосных станций, 694 потребителя. Крупные потребители воды в электронной модели системы водоснабжения г. Минска учитывались как сосредоточенные отборы. Для этого проводился анализ опросных листов промышленных предприятий, также анализировалась статистика потребления воды районных повысительных насосных станций и локальных повысистельных насосных станций). При расчёте расхода повысительных насосных станций учитывался коэффициент неравномерности, полученный на основании распределения суточных расходов в течение года.

Калибровка модели была произведена на основании фактических показаний свободного напора в контрольных точках (100 точек). Суммарная относительная сходимость расчётного расхода воды от главных насосных станций в водопроводную сеть г. Минска с фактическим составляет 95%. Суммарная относительная сходимость по напору составила 77%.

Для калибровки электронной модели водоснабжения г. Салават были проведены замеры свободного напора (36 точек измерения). Замеры были проведены с использованием манометров марки ДМ02-100-2-М. Полученные результаты натурных измерений были привязаны к соответствующим колодцам в электронной модели водоснабжения.

Для оценки значения шероховатости конкретного трубопровода использовалось уравнение (2). Минимальные значения шероховатости стальных и чугунных трубопроводов, соответствующие минимальному возрасту, были приняты согласно гидравлическому справочнику.

Калибровка электронной модели осуществлялась путем варьирования максимальными значениями шероховатостей стальных и чугунных трубопроводов, которые соответствуют максимальному возрасту трубопроводов. Среднее абсолютное расхождение по свободным напорам между электронной моделью и фактической работой сети составило 4,03%. Среднее абсолютное расхождение по расходам источников между электронной моделью и фактической работой сети составило 0,95%.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Оценка фактического удельного водопотребления в городах-представителях (Пенза, Оренбург, Тюмень) показала, что в последние годы отмечается общая тенденция снижения общей величины подачи воды в сеть и величины удельного водопотребления на хозяйственно-питьевые нужды жителей исследованных городов. Это в целом требует проведения соответствующих исследований по обоснованию и оптимизации удельных нормативов водопотребления для проектирования централизованных систем водоснабжения, при их развитии и реконструкции и определения технических условий подключения объектов капитального строительства и при проектировании систем внутреннего водопровода.

Для этого были разработаны электронные модели системы водоснабжения, с использованием которых была проведена сравнительная оценка капитальных затрат на развитие систем водоснабжения, при учёте различных норм удельного водопотребления.

На конкретных примерах перспективного развития систем водоснабжения городов- представителей (при использовании нормативных значений удельного водопотребления и при использовании данных, основанных на анализе и прогнозе фактического водопотребления) было показано увеличение капитальных затрат при использовании приведенных в СП нормативов в среднем на 30 %.

На основании проведенного анализа могут быть рекомендованы следующие нормативы удельного водопотребления:

- застройка зданиями, оборудованными внутренним водопроводом и канализацией, с ванными и местными водонагревателями - 140 – 190 л/сут;
- застройка зданиями, оборудованными внутренним водопроводом и канализацией, с ванными и местными водонагревателями с централизованным горячим водоснабжением - 195 – 220 л/сут.

Используя программу водного баланса, а также статистические данные работы системы водоснабжения города Тюмени и данные электронной модели, была получена зависимость прямых потерь воды в системе водоснабжения от давления, наблюдаемого в системе [12].

Также стоит отметить, что электронная модель системы водоснабжения является базисом для проведения таких работ, как:

- выявление проблемных участков в системе и составление списков реконструируемых трубопроводов;
- оптимизация диаметров действующих трубопроводов;
- разработка мероприятий, направленных на недопущение снижения минимально необходимого давления в системе;
- разработка программы по снижению давления в городе;
- выбор точек контроля давления в системе;
- выбор места установки регуляторов давления;
- выбор оптимального режима работы насосных станций;
- разработка программ по снижению всех видов потерь воды.

5. ВЫВОДЫ

1. Электронные модели являются инструментом оценки текущего состояния системы водоснабжения, а также позволяют моделировать её перспективное положение. Для объективной оценки влияния мероприятий, направленных на улучшение работы системы водоснабжения и её развития, необходимо моделирование её работы с использованием адекватной электронной модели. Адекватность электронной модели достигается путем её калибровки.

2. Анализ российского программного обеспечения и сравнения с иностранными аналогами показывает отсутствие ряда необходимых функций для разработки электронных моделей, что потребовало дополнительной разработки необходимых алгоритмов.
3. Институт «МосводоканалНИИпроект» успешно реализовал электронные модели систем водоснабжения таких городов, как Уфа, Иркутск, Пенза, Оренбург, Тюмень, Салават, Минск. На основании опыта реализации была разработана методика построения электронных моделей, а также разработаны алгоритмы, применимые к российскому программному обеспечению «Zulu» и необходимые для построения моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный закон от 7 декабря 2011 г. №416-ФЗ «О водоснабжении и водоотведении». Принят Государственной Думой 23 ноября 2011 года.
2. Постановление правительства Российской Федерации от 5 сентября 2013 года №782 «О схемах водоснабжения и водоотведения».
3. Официальный сайт программного обеспечения Bentley URL: https://www.bentley.com/ru (дата обращения: 16.01.2018).
4. Официальный сайт программного обеспечения Mike Urban URL: https://www.mikepoweredbydhi.com/products/mike-urban (дата обращения: 16.01.2018).
5. Официальный сайт программного обеспечения «Zulu» 2018. URL: https://www.politerm.com/.
6. Официальный сайт программного обеспечения «City Com» URL: http://citycom.ru/citycom/hydrograph/ (дата обращения: 16.01.2018).
7. Официальный сайт программного обеспечения «ИСИГР» URL: http://51.isem.irk.ru/ (дата обращения: 16.01.2018).
8. DHI. MIKE URBAN. 2016. 145-150 pp.
9. **Wu Z.Y., Wang Q, Butala S., Mi T.** Darwin Optimization Framework User Manual. Watertown, CT 06795: Bentley Systems, Incorporated, 2011. 28-37 pp.
10. **Некрасов А.В.** Компьютерное моделирование гидродинамических процессов систем водоснабжения. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет им первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2014. с. 161-164.
11. **Koppel T., Vassiljev A.** Calibration of a Model of an Operational Water Distribution System Containing Pipes of Different Age. // Advances in Engineering Software, 2009, No. 40, pp. 659-664.
12. **Громов Г.Н., Примин О.Г., Бычков Д.А.** Модель расчета потерь и неучтенных расходов воды в водопроводной сети г. Тюмени. // Водоснабжение и Санитарная Техника, 2016, №9, с. 16-22.

REFERENCES

1. Federal Law No. 416-FZ, November 07, 2011 “O Vodosnabzhenii i Vodootvedenii” [On Water Supply and Sanitation]. Adopted by the State Duma on November 23, 2011.
2. Decree of the Government of the Russian Federation of September 5, 2013 No. 782 “O Skhemakh Vodosnabzheniia i Vodootvedeniia” [About Schemes of Water Supply and Water Disposal].
3. The official website of the software Bentley URL: https://www.bentley.com/ru (Accessed data: January 16, 2018).
4. The official website of the software Mike Urban URL: https://www.mikepoweredbydhi.com/products/mike-urban (Accessed data: January 16, 2018).

5. The official website of the software “Zulu” 2018. URL: https://www.politerm.com/.
6. The official website of the software “City Com” URL: http://citycom.ru/citycom/hydrograph/ (Accessed data: January 16, 2018).
7. The official website of the software “ISIGR”. URL: http://51.isem.irk.ru/ (Accessed data: January 16, 2018).
8. DHI, MIKE URBAN, 2016, pp. 145-150.
9. **Wu Z.Y., Wang Q, Butala S., Mi T.** Darwin Optimization Framework User Manual. Watertown, CT 06795: Bentley Systems, Incorporated, 2011, pp. 28-37.
10. **Nekrasov A.V.** Komp'iuternoe Modelirovanie Gidrodinamicheskikh Protsessov Sistem Vodosnabzheniia [Computer Modeling of Hydrodynamic Processes of Water Supply Systems]. Ekaterinburg, Ural Federal University, 2014, pp. 161-164.
11. **Koppel T., Vassiljev A.** Calibration of a Model of an Operational Water Distribution System Containing Pipes of Different Age. // Advances in Engineering Software, 2009, No. 40, pp. 659-664.
12. **Gromov G.N., Primin O.G., Bychkov D.A.** Model' Rascheta Poter' i Neuchtennykh Raskhodov Vody v Vodoprovodnoi Seti g. Tiumeni [Model for Analysis of Losses and Unaccounted for Water Flows in the Water Supply Network in Tyumen]. // Vodosnabzhenie i Sanitarnaia Tekhnika, 2016, No. 9, pp. 16-22.

Примин Олег Григорьевич, профессор, доктор технических наук; профессор кафедры водоснабжения и водоотведения Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; заместитель генерального директора по научным исследованиям АО «МосводоканалНИИпроект»; 105005, Россия, г. Москва, Плетешковский переулок д. 22; тел: +7 (495) 956-93-00;
E-mail: primin@mvkniipr.ru.

Григорий Николаевич Громов, заведующий группой АО «МосводоканалНИИпроект»; 105005, Россия, г. Москва, Плетешковский переулок д. 22;
тел: +7 (495) 956-77-79;
E-mail: gromov_grigorii@mail.ru.

Oleg G. Primin, Professor, Dr.Sc., Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering, Deputy General Director of JSC «Mosvodokanal-NIIproekt»; 22, Pleteshkovsky per., Moscow, 105005, Russia; phone: +7 (495) 956-93-00;
E-mail: primin@mvkniipr.ru.

Grigory N. Gromov, Ph.D. student of National Research Moscow State University of Civil Engineering, Head of group of JSC «MosvodokanalNIIproekt»; 22, Pleteshkovsky per., Moscow, 105005, Russia;
phone: +7 (495) 956-77-79,
E-mail: gromov_grigorii@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-149-157

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ ПЛИТЫ ПОКРЫТИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов
Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика БЕЛАРУСЬ

Аннотация: Статический анализ НДС плиты на упругом основании выполняется двумя способами на примере железобетонной дорожной плиты покрытия 2ПП30.18-30 серии Б3.503.1-1, предназначенной для временных дорог. Данные плиты рассматриваются как плоскостные конструкции на упругом основании под воздействием эксплуатационных нагрузок. Плита рассчитана способом Б.Н. Жемочкина с использованием метода Ритца, для определения прогибов плиты в основной системе, с применением математического пакета «MathCad». Также выполнен дублирующий статический расчет плиты на ПК «ЛИРА». Приводятся результаты экспериментальных и численных исследований.

Ключевые слова: железобетонная дорожная плита покрытия, плоскостная конструкция, упругое основание, способ Б.Н. Жемочкина, метод Ритца, расчетная модель, контакт, эпюра, каноническое уравнение, эксперимент

REINFORCED CONCRETE COATING PLATES OF HIGHWAYS ON AN ELASTIC HALF-SPACE

Slava D. Semeniuk, Roman V. Kumashov
Belarusian-Russian University, Mogilev, BELARUS

Abstract: Static analysis of the stress-strain state of a plate on elastic foundation is made in two ways on the example of a reinforced concrete road plate 2PP30.18-30 series B3.503.1-1 intended for temporary roads. These plates are considered as a planar structure on an elastic foundation. The plates are calculated by the method of B.N. Zhemochkin using the Ritz method to determine plate deflections in the main system using the mathematical package «MathCad». Also the plates are calculated on the PC «LIRA». There are given the results of experimental and numerical studies in this article.

Keywords: reinforced concrete road plate, planar structure, elastic foundation, Zhemochkin method, Ritz method, calculation model, contact, diagram, canonical equation, experiment

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных автомобильных дорогах все большее значение приобретают монолитные и сборные железобетонные покрытия, предназначенные для автомобильного движения большой интенсивности, скорости и грузоподъемности.

Неравномерные деформации основания и несимметричность приложения нагрузки приводят к возникновению в сечениях плит изгибающих и крутящих моментов, что отрицательно сказывается на эксплуатационных характеристиках данных плит. В общем случае плиты работают как пространственные конструкции, поэтому требуется учитывать влияние каждого из воздействий на несущую способность железобетонных плитных конструкций при их проектировании и изготовлении [1].

2. ТЕОРИЯ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Расчёт плит выполняется способом Б.Н. Жемочкина [2] (общая постановка и аналитическое решение) и, частично, методом Ритца (определение прогибов плиты в основной системе) с применением математического пакета «MathCad».

Данный подход позволяет рассчитывать плиты на произвольном линейно-упругом деформируемом основании любой формы в плане и загруженные произвольной нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузкой [3].

Плиты разбиваются на прямоугольные участки Б.Н. Жемочкина (рис. 1). В середине каждого участка ставится связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием, а в центре плиты вводится защемление. Принимается, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка Б.Н. Жемочкина [2].

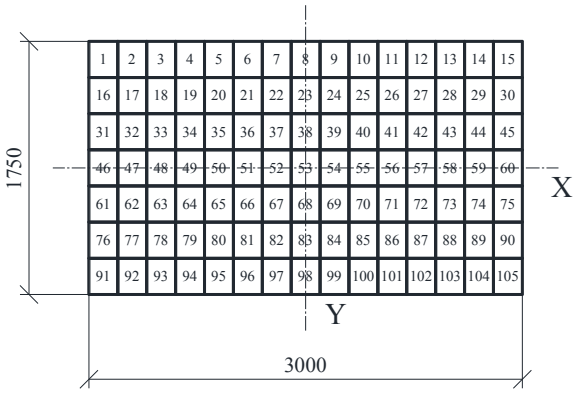


Рисунок 1. Пример разбивки плиты на участки Б.Н. Жемочкина.

При определении перемещений точки *M(x,y)*, находящейся на поверхности упругого однородного изотропного полупространства от действия едиичной силы, распределенной по площади участка Ω поверхности полупространства, необходимо вычислить интеграл:

$$W_m(x,y)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\frac{1}{\Omega}\iint\limits_{\Omega}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \quad (1)$$

где Ω – площадь участка Б.Н. Жемочкина.

Перемещение точки *M(x,y)*, поверхности упругого полупространства при загружении участка прямоугольной формы на поверхности полупространства равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1, после вычислния интеграла (1) имеет вид:

$$W_M(x,y)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0\Delta_x}\left[\frac{y-d}{\Delta_y}\times\right.$$
$$\times ln\frac{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}}+$$
$$+\frac{y-c}{\Delta_y}ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}+$$
$$+\frac{x-b}{\Delta_y}ln\frac{y-d+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{y-c+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}+$$
$$\left.+\frac{x-a}{\Delta_y}ln\frac{y-c+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{y-d+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}}\right], \quad (2)$$
$$\Delta_x=b-a,\quad \Delta_y=d-c,$$

где a,b,c,d – координаты границ участка Б.Н. Жемочкина [3].

Для расчёта при определении коэффициентов канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина задаёмся функцией прогибов прямоугольной плиты с защёмленной в начале координат нормалью в виде особого решения и совокупности частных решений Клебша:

$$W(x,y)=W_0(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}A_nW_n(x,y) \quad (3)$$
$$W_0(x,y)=\frac{Pb^2}{16\pi D}\left\{\left[\left(\frac{x}{b}-\frac{t}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{b}\right)^2\right]\times\right.$$

$$\times ln\left[\left(\frac{x}{b}-\frac{t}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{b}\right)^2\right]+$$

$$+2\left(\frac{xt}{b^2}-\frac{yz}{b^2}\right)\times\left[1+ln\left(\frac{t^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{t^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\times ln\left(\frac{t^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)ln\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\Bigg\}$$

$$W_1(x,y)=\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2},\quad W_2(x,y)=\frac{2xy}{b^2},$$

$$W_3(x,y)=\frac{x}{b}\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),\ W_4(x,y)=\frac{y}{b}\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),\ldots,$$

где $W_0(x,y)$ – особое решение; $W_n(x,y)$ – частное решение Клебша, априори удовлетворяющее уравнениями равновесия плиты с защемлённой нормалью под действием сосредоточенной силы и кинематическим граничным условиям во введенном защемлении; t, z – координаты точки приложения сосредоточенной силы; A_n – неопределённые коэффициенты; b – некоторый линейный размер плиты [3].

При определении коэффициентов канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина для расчета прямоугольной плиты на произвольном упругом основании можно написать:

$$\delta_{ik}=\frac{(P=1)\left(1-\nu_0^2\right)}{\pi E_0 b}\left(F_{ik}^0+F_{ik}^1\right)+$$

$$+\frac{(P=1)b^2}{D}\left[A_{22}\left(\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+2B_{22}\frac{xy}{b^2}+\ldots\right], \quad (4)$$

где F_{ik}^0 – безразмерная функция для определения перемещений точки i на поверхности упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределённой по прямоугольному участку k поверхности полупространства. Определяется выражением (2); F_{ik}^1 – корректирует F_{ik}^0 применительно к рассматриваемой модели упругого основания.

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{ik}R_k+\varphi_{0x}y_i+\varphi_{0y}x_i+u_0+\Delta_{ip}=0\right);\\ -\sum\limits_{k=1}^{n}R_k y_k+M_{px}=0;\\ -\sum\limits_{k=1}^{n}R_k x_k+M_{py}=0;\\ -\sum\limits_{k=1}^{n}R_k+Q=0,\end{cases} \quad (5)$$

где u_0, φ_{0x}, φ_{0y} – линейное и угловые перемещения введённого защемления на плите; Q, M_{px}, M_{py} – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей; R_k – реактивные усилия.

После решения системы канонических уравнений (5) по найденным значениям реактивных усилий R_k находятся реактивное давление под плитой и осадка. Далее по известным значениям осадок точек плиты легко определить изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы в сечениях плиты.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Испытания проводятся с целью определения реального распределения осадок упругого основания под плитой дорожного покрытия.

До проведения испытания на площадке были выполнены инженерно-геологические изыскания. Результаты статического зондирования грунтов приведены на рис. 2.

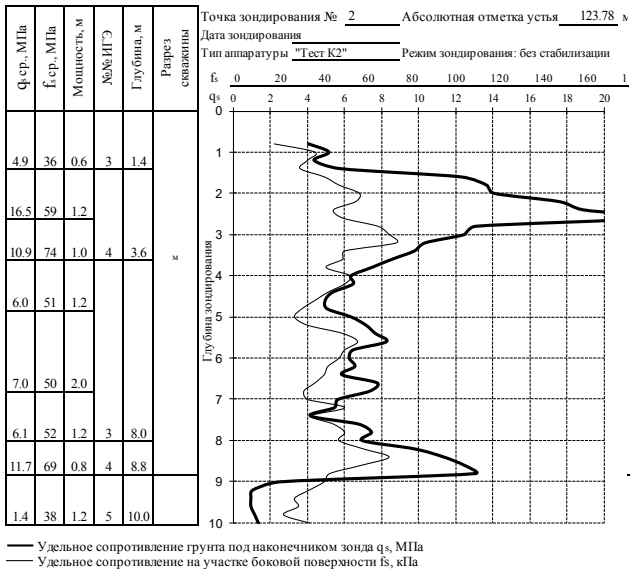


Рисунок 2. Результаты статического зондирования на площадке проведения испытаний.

По результатам статического зондирования для каждого грунта в соответствии с таблицей 6.7 ТКП 45-5.01-15-2005 определен модуль деформации грунта (Таблица 1).

Таблица 1. Характеристики грунтов.

Номер слоя	Тип грунта	Мощность слоя, м	q_s МПа	E_0 МПа	ν
1	Песок мелкий	0,8	0,5	4,0	0,3
2		0,6	4,9	19,8	
3		1,2	16,5	44,4	
4		1,0	10,9	32,7	
5		1,2	6,0	22,0	
6		2,0	7,0	24,0	
7		1,2	6,1	22,2	
8		0,8	11,7	35,0	

Измерение перемещений производилось 9 прогибомерами с точностью 0.01 мм. Точки закрепления прогибомеров приведены на рис. 3.

Испытание плиты производились для следующих расчетных схем:

а – одно колесо на плите. Последовательно в 4 точках (в центре плиты, на краях плиты и в углу плиты, см. рис. 4а) производится испытание одним домкратом на нагрузку 100 кН;

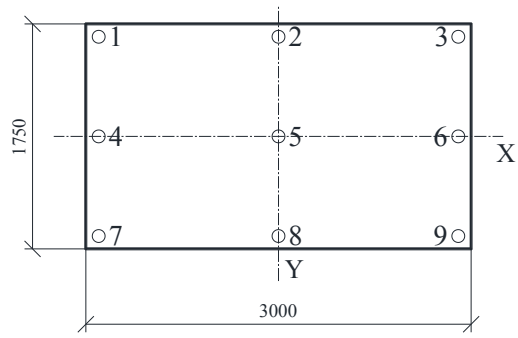


Рисунок 3. Схема расположения прогибомеров 6 ПАО с ценой деления 0.01.

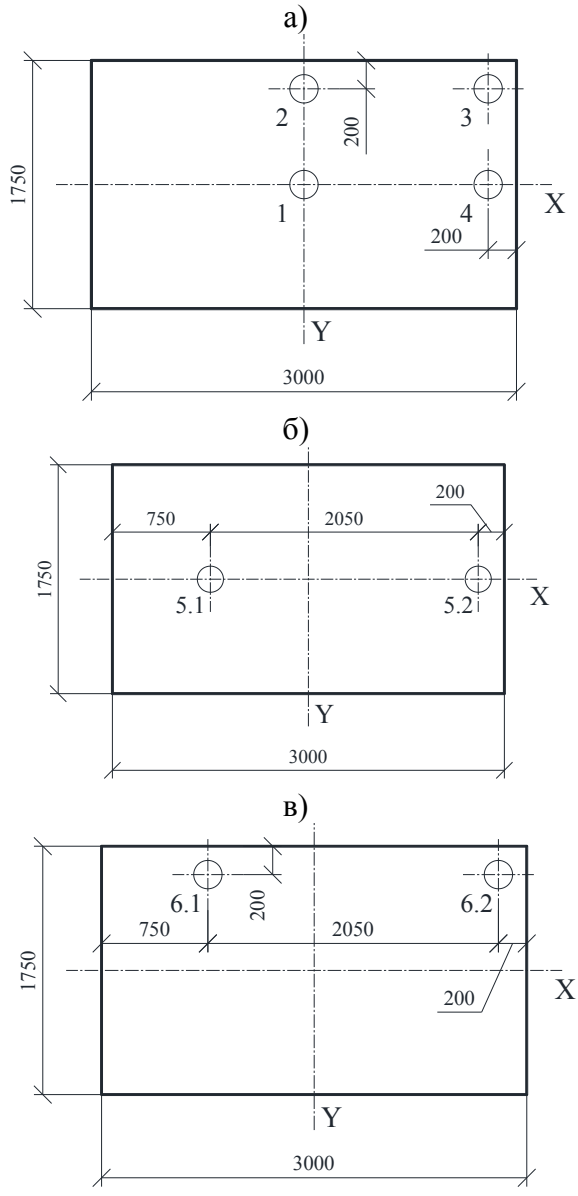
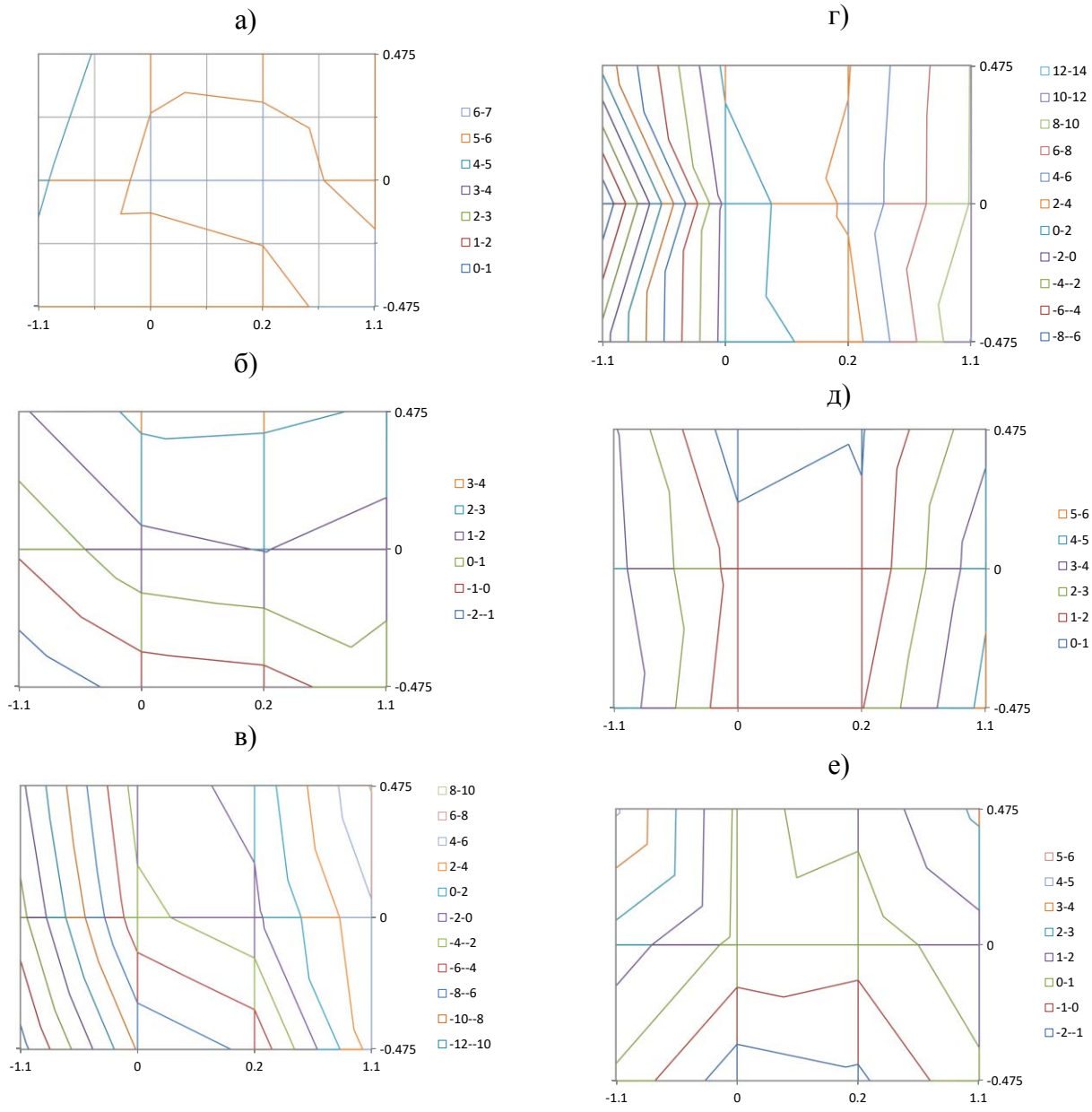


Рисунок 4. Схемы расположения домкратов при испытаниях.

б – два колеса на плите. Производится испытание одновременно двумя домкратами в середине плиты (рис. 4б) на нагрузку 100 кН каждый, следующее испытание – на краю плиты (рис. 4в) на нагрузку 100 кН каждый. Испытание производилось в каждой из 6 точек последовательным приложением нагрузки ступенями до максимальной величины, равной 100 кН. В процессе испытания замерялись только вертикальные перемещения. Результаты экспериментальных исследований приведены на рис. 5.



<u>Рисунок 5.</u> Распределение осадок основания плиты по результатам эксперимента: а) загружение 1; б) загружение 2; в) загружение 3; г) загружение 4; д) загружение 5; е) загружение 6.

После проведения экспериментальных исследований было выполнено численное исследование рассматриваемой плиты на идентичные нагрузки и загружения. Статический расчет плиты выполнен способом Б.Н. Жемочкина. Эквивалентный модуль деформации основания плиты, равный $E_0^э = 4{,}65\ МПа$ (в расчет приняты три верхних слоя грунта), вычислен по формуле:

$$E_0^э = \frac{\left[1.05 - 0.1 \cdot \frac{h_i}{D} \cdot \left(1 - 3\sqrt{\frac{E_{общ}}{E_i}}\right)\right] \cdot E_i}{0.71 \cdot \sqrt[3]{\frac{E_{общ}}{E_i}} \cdot arctg\left(\frac{1.35 \cdot h_э}{D}\right) + \frac{E_i}{E_{общ}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot arctg\left(\frac{D}{h_э}\right)}$$

$$\frac{h_э}{D} = \frac{2 \cdot h_i}{D} \cdot \sqrt[3]{\frac{E_{общ}}{6 \cdot E_i}},$$

где i – номер, рассматриваемого слоя; h_i – толщина i-го слоя; D – диаметр нагруженной площади; $E_{общ}$ – общий модуль упругости полупространства, подстилающего i-ый слой; E_i – модуль деформации i-го слоя.

Результаты расчета приведены на рисунке 6.

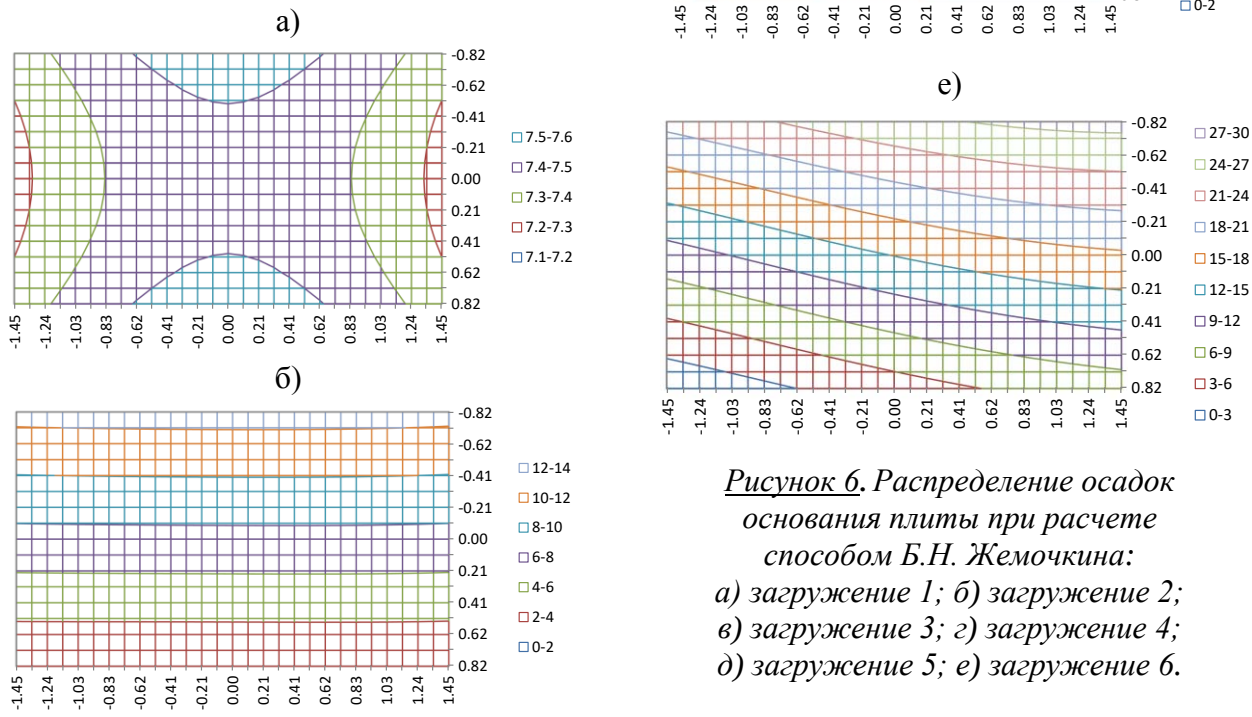


Рисунок 6. Распределение осадок основания плиты при расчете способом Б.Н. Жемочкина: а) загружение 1; б) загружение 2; в) загружение 3; г) загружение 4; д) загружение 5; е) загружение 6.

Рассматриваемая выше плита была также рассчитана в программном комплексе «Лира».

При постановке задачи используются следующие гипотезы и допущения: в зоне контакта плиты с упругим основанием возникают только нормальные напряжения, силы трения пренебрежительно малы.

В расчет принимаются следующие упругие характеристики: для плиты – конечный элемент КЭ-41, $E = 31500\ МПа$, $\nu = 0{,}167$, $H = 0{,}17\ м$; для основания – конечный элемент КЭ-36, модуль упругости E_0 и коэффициент Пуассона ν_0 в соответствии с таблицей 1. На рисунке 7 приведена расчетная модель плиты в ПК «Лира».

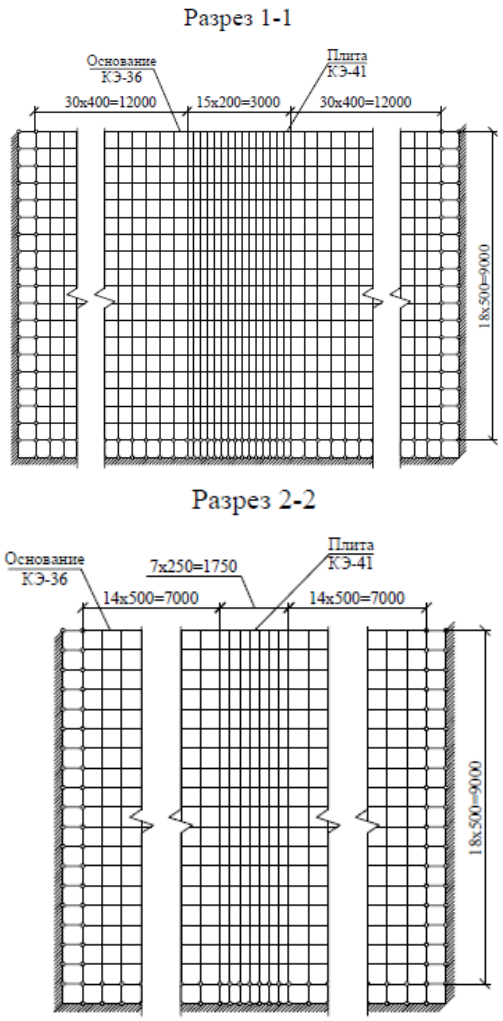
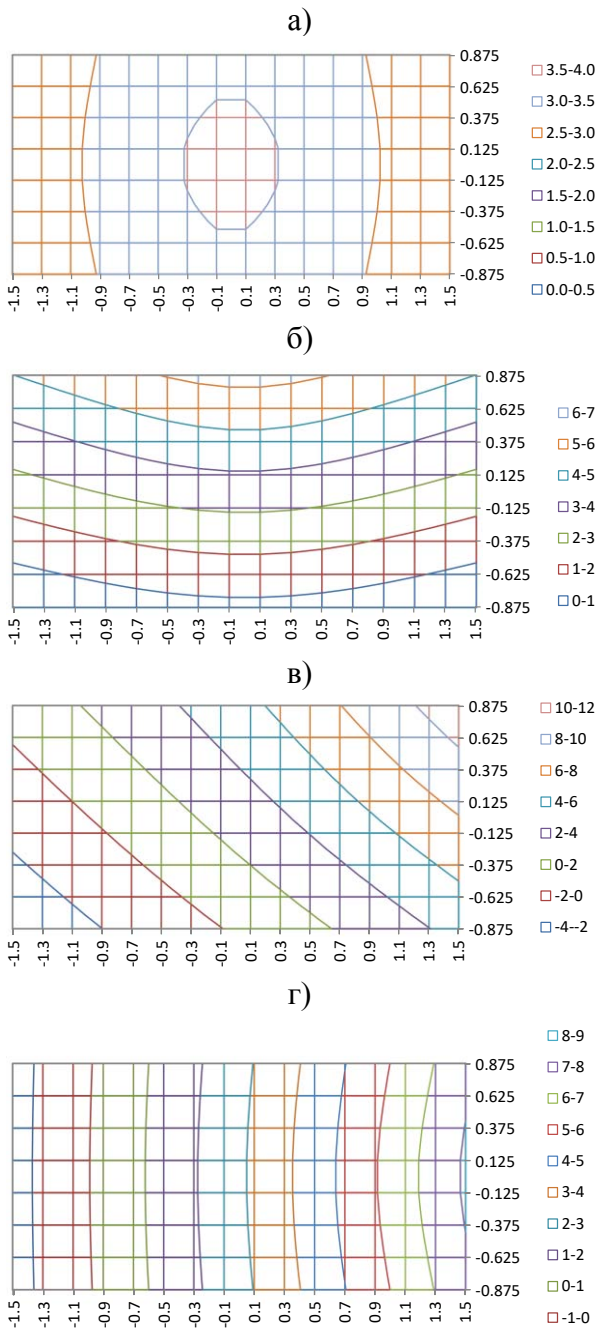


Рисунок 7. Расчетная модель плиты в ПК «ЛИРА».

Размеры расчетной области основания составляют 18a и 18b соответственно в продольном и поперечном направлениях. Здесь a и b – полуширина плиты в продольном и поперечном направлениях. Глубина расчетной области основания составляет 6a.

Результаты расчета приведены на рисунке 7.



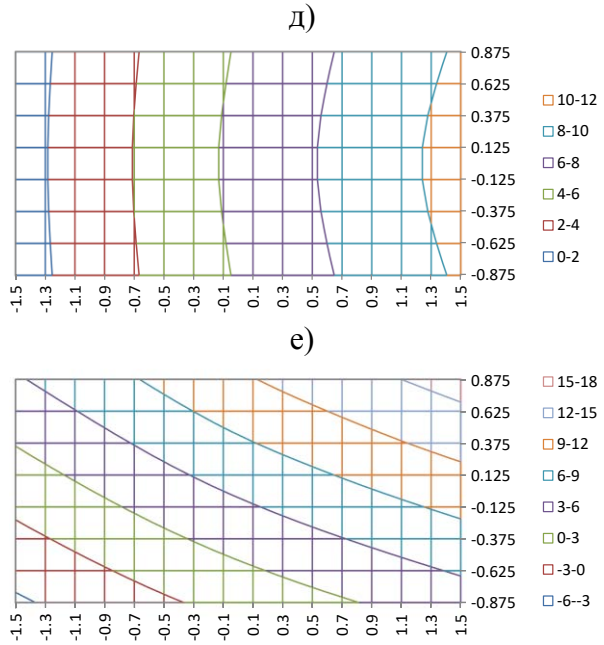


Рисунок 8. Распределение осадок основания плиты при расчете в ПК «Лира»: а) загружение 1; б) загружение 2; в) загружение 3; г) загружение 4; д) загружение 5; е) загружение 6.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статический расчёт и экспериментальные исследования показывают, что в условиях эксплуатации плиты покрытия автодорог всегда будут подвержены сложному деформированию, так как нагрузки от колес автомобиля прикладываются вне оси симметрии плиты и дорожное основание под плиты неоднородно как по длине плиты, так и по ширине.

По результатам сравнения экспериментальных и численных исследований можно отметить, что способ Б.Н. Жемочкина позволяет довольно точно отразить общую тенденцию распределения осадок под плитой. Однако, в связи с довольно большим расхождением значений осадок, требуется корректировка расчетной модели и уточнение параметров плиты. При расчете в ПК «Лира» моделирование слоистого основания позволяет при определении осадок плиты приблизится к результатам экспериментального исследования. Однако, наблюдается расхождение при краевых загружениях плиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кумашов Р.В.** Статический расчет железобетонных плит покрытий автомобильных дорог на упругом основании. // Вестник гражданских инженеров, 2016, №5(58), с. 127-132.
2. **Жемочкин Б.Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. –240 с.
3. **Босаков С.В.** Статические расчеты плит на упругом основании. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
4. **Семенюк С.Д.** Расчет плит покрытия автомобильных дорог на эксплуатационные нагрузки способом Б.Н. Жемочкина. // Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений: сборник трудов Всероссийской научно-технической конференции. – СПб.: СПбГАСУ, 2017, с. 139-145.
5. **Семенюк С.Д.** Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2003. – 269 с.

REFERENCES

1. **Kumashov R.V.** Staticheskii Raschet Zhelezobetonnykh Plit Pokrytii Avtomobil'nykh Dorog na Uprugom Osnovanii [Static Analysis of Reinforced Concrete Slabs of Coatings of Motor Roads on an Elastic Foundation]. // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov, 2016, No. 5(58), pp. 127-132.

2. **Zhemochkin B.N.** Prakticheskie Metody Rascheta Fundamentnykh Balok i Plit na Uprugom Osnovanii [Practical Methods of Analysis of Foundation Beams and Plates on an Elastic Foundation]. Moscow, Gosstroiizdat, 1962, 240 pages.
3. **Bosakov S.V.** Staticheskie Raschety Plit na Uprugom Osnovanii [Static Analysis of Plates on an Elastic Foundation]. Minsk, Belarusian National Technical University, 2002, 128 pages.
4. **Semeniuk S.D.** Raschet Plit Pokrytiia Avtomobil'nykh Dorog na Ekspluatatsionnye Nagruzki Sposobom B.N. Zhemochkina [Analysis of Plates for Covering Motor Roads for Operational Loads by the Method of B.N. Zhemochkina]. // Proceedings of All-Russian Scientific and Technical Conference "Inzhenerno-geotekhnicheskie izyskaniia, proektirovanie i stroitel'stvo osnovanii, fundamentov i podzemnykh sooruzhenii". Saint Petersburg, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 2017, pp. 139-145.
5. **Semeniuk S.D.** Zhelezobetonnye Prostranstvennye Fundamenty Zhilykh i Grazhdanskikh Zdanii na Neravnomerno Deformirovannom Osnovanii [Reinforced Concrete Spatial Foundations of Residential and Civil Buildings on an Unevenly Deformed Base]. Mogilev, Belarusian-Russian University, 2003, 269 pages.

Семенюк Слава Денисович, профессор, доктор технических наук; Белорусско-Российский университет; 212000, Республика Беларусь, г. Могилев, проспект Мира, д. 43; тел: +375 (222) 22-09-27;
факс +375 (222) 22-58-21; e-mail: skzs@bru.by.

Кумашов Роман Владимирович, кандидат технических наук; Белорусско-Российский университет»; 212000, Республика Беларусь, г. Могилев, проспект Мира, д. 43; тел: +375 (29) 306-21-18; факс +375 (222) 22-58-21; E-mail: gunner09@yandex.ru.

Slava D. Semeniuk, Professor, Dr.Sc.; Belarusian-Russian University; 43, prospect Mira, Mogilev, 212000, Belarus; phone: +375 (222) 22-09-27; fax: +375 (222) 22-58-21; E-mail: skzs@bru.by.

Roman V. Kumashov, Post-graduate student of Belarusian-Russian University; 43, prospect Mira, Mogilev, 212000, Belarus; phone: +375 (29) 306-21-18;
fax: +375 (222) 22-58-21; e-mail: gunner09@yandex.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-158-168

KINETICS OF STRUCTURAL TRANSFORMATIONS AT PORES FORMATION DURING HIGH-TEMPERATURE TREATMENT OF FOAM GLASS

Sergey V. Fedosov [1], Maksim O. Bakanov [2], Sergey N. Nikishov [1,2]

[1] Ivanovo State Politechnical University, Ivanovo, RUSSIA

[2] Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Ivanovo, RUSSIA

Annotation: The work shows the key points used in the simulation of pores formation and growth in the foam glass structure. Pore is represented as a separate radius growth center with the outer boundary of a spherical shape and with a specified value of the initial radius surrounded by a finite volume of molten glass that is a part of foam glass charge stock. Solution of three-dimensional problem is reduced to one-dimensional setting in spherical coordinates. The presented model takes into consideration kinetics of pores radius growth, taking into account the influence of glass viscosity and surface tension, as well as the effect of moving (stretching) glass cladding when pores radius increases.

Keywords: foam glass, separate pore, mathematic simulation, glass cladding, surface tension, viscosity

КИНЕТИКА СТРУКТУРНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОР В ПРОЦЕССЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОБРАБОТКИ ПЕНОСТЕКЛА

С.В. Федосов [1], М.О. Баканов [2], С.Н. Никишов [1,2]

[1] Ивановский государственный политехнический университет, г. Иваново, РОССИЯ

[2] Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, г. Иваново, РОССИЯ

Аннотация: В работе показаны ключевые моменты, применяемые при моделировании процесса формирования и роста пор в структуре пеностекла. Пора представляется как единичный центр роста радиуса с внешней границей сферической формы и с заданным значением начального радиуса, окруженный конечным объемом расплава стекла, входящего в состав пеностекольной шихты. Решение трехмерной задачи сведено к одномерной постановке в сферических координатах. Представленная модель учитывает кинетику роста радиуса пор с учетом влияния вязкости стекла и поверхностного натяжения, а также эффект движущейся (растягивающейся) стеклянной оболочки при увеличении радиуса поры.

Ключевые слова: пеностекло, единичная пора, математическое моделирование, стеклянная оболочка, поверхностное натяжение, вязкость

1. INTRODUCTION

Currently, manufacturers of heat insulating materials have to adapt to the dynamically changing market conditions, since consumers start to pay interest to the materials with high structural performance and materials with good heat and sound insulation properties.

In this regard, such heat insulating material as foam glass [15] gains growing popularity. Foam glass production technology is associated with thermal treatment of raw material mixture (foam glass charge stock), which involves consumption of a significant amount of electrical power [2, 5], due to which the finished product cost is higher than for example, in case of expanded-clay con-

crete, foamed concrete, autoclaved aerated concrete, pumice stone concrete, sawdust concrete and other heat insulating materials.

It is required to pay attention to scheduling thermal treatment processes in order to reduce the production cost of foam glass. Knowledge of the heating processes peculiarities, foaming and annealing of foam glass charge stock will enable to adjust the material quality, energy consumption and production areas by adjusting the thermal treatment modes and sizes of process equipment [13].

It is worth noting that one of the main factors in the foam glass technology is to obtain the material with uniformly distributed pores throughout the volume. Foam glass porous structure formation is very important, because physical and chemical properties of finished product are formed during this process [3, 6].

Currently, foam glass powder production method is the most widespread because it enables to receive the finished product with different characteristics depending on composition and ratio of raw feedstock and gas developing agent [12].

For receive foam glass with the use of powder method the mixture of crushed glass and gas developing agent is subjected to thermal treatment at the temperatures above the glass softening point and gas developing agent decomposition. During the heating the glass particles are sintered together forming the pores, which gas developing agent particles get into [16]. Thus, the pores radius growth centers are formed. External boundaries of pores radius growth centers must be increased in order to produce foam glass with low density and with large volumetric weight. Due to similar processes the thickness of formed interporous glassy partitions decreases [11]. Sintering and pores initial formation is shown schematically in Fig. 1.

Thermal decomposition of gas developing agent and increase in the gas stage content in the foam glass charge stock determines the pore-forming potential of the whole charge stock.

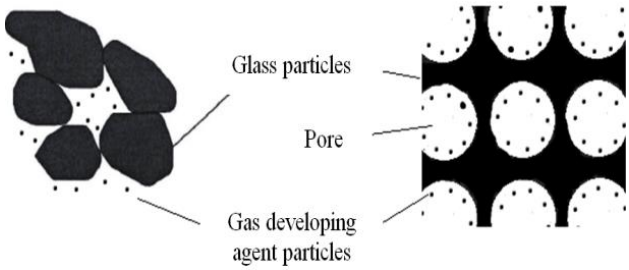


Figure 1. Pores initial formation during sintering of glass/gas developing agent mixture.

Equilibrium state of gas phase pressure inside a pore and surface tension of molten glass on its boundaries contributes to formation of a uniform porous structure throughout the material volume. Gas developing agent activation leading to increase in gas phase pressure and as a consequence the volume inside a pore constitutes inertial potential of call growth. Gas generation depends on the bulk transfer of chemically and physically dissolved oxygen in the glass volume around the pore surface [7], during its interaction with carbon the CO or CO_2, the gas, is formed.

The most developed models describing the pores growth or shrinkage in the glass melt consider only separate pore in an infinite glass melt with a spherical shape. Obvious conclusion is that simulation of pore growth in foam glass charge stock taking into consideration limitless glass melt surrounding the latter one does not provide adequate dependencies and perceptions of structural transformations in the process of foam glass charge stock thermal treatment.

The works [20, 22] demonstrate that the approaches in which assumptions about infinite melt of foam glass charge stock surrounding a separate pore are adopted, can be applied to simulate the structural transformations only at the initial stages of pores radius growth with the sizes about 10 microns. However, over time, in terms of pores radius growth, the latter ones start to interact with each other, thereby forming a porous matrix (Fig. 2).

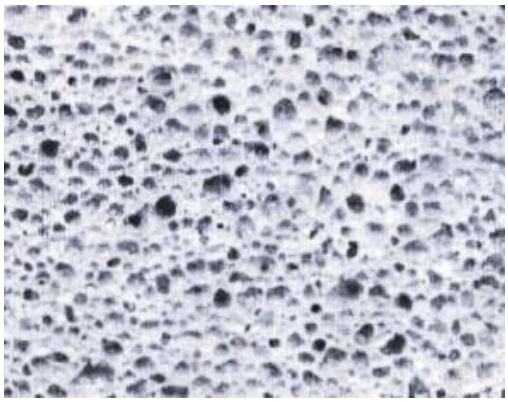


Figure 2. Foam glass final structure.

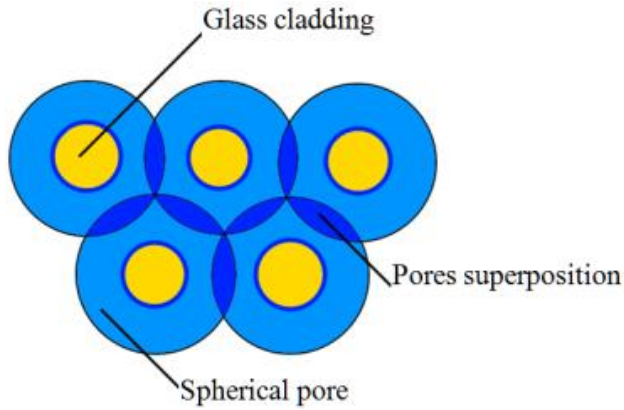


Figure 3. Model of spherical pores in foam glass.

2. RESEARCH METHODS

Simulation of separate pore radius growth taking into consideration infinite melt glass volume surrounding a pore is non-rational because with this assumption the cellular structure of the target material and interaction of neighboring pores is not taken into account. Cellular structure of foam glass shows that each pore cladding is surrounded by a finite volume within the limits of its glass partitions. Pores shape in the finished foam glass is more polygonal than spherical. This deviation from spherical nature dramatically increases the mathematic simulation complexity.

However, taking pores spherical shape during mathematic simulation with small volume-equal partitions, as shown in Figure 3, instead of polygons, permissible error in this case does not exceed 5%. This ratio was determined by comparing the models with the structure in the pores form with systems of closely spaced pores [19]. Figure 3 demonstrates the model of spherical pores in foam glass where spherical pores (cells) and glass claddings around them are displayed in such a way having described a single unit cell then the rest of the cells can be similarly described.

In developing the model we consider a separate spherical pore with an initial radius surrounded by a finite volume of foam glass charge stock melt. This allows to reduce the three dimensional problem to one-dimensional problem in spherical coordinates.

Important aspect of pores growth simulation is the influence of pore radius increasing on the molten glass volume. Taking into consideration the spherical shape of pores, surrounded by glass cladding, the cladding thickness decreases with pore radius increasing, since constant volume of the mold for foaming is assumed. Glass particles melt, stick together with each other and form voids at the initial stage. With increasing temperature, first shrinkage of the charge stock as a result of transition from solid to molten state takes place, and then gas developing agent inside the voids starts to activate, and the internal pressure starts to increase thereby forming a pore. Shrinkage (decrease of the geometric dimensions) occurs as long as the pressure generated inside the forming pore is equal to the pressure on the surface. Growth of the produced gas concentration gradually leads to increasing in internal pressure and increasing in the pore radius. This effect is shown schematically in Fig. 4.

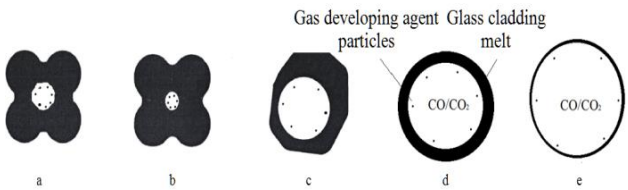


Figure 4. Dynamics of change of the radius of separate pores and melt glass cladding volume (a– sticking of particles and the pores formation, b – pore reduction; c – glass cladding formation; d – pore growth; e – decrease of glass cladding volume).

Analysis of the existing mathematical models describing the formation of foam glass porous structure [14, 17] has shown that it is required to develop such a model that will enable to describe the foaming process not only at the micro level (separate pore change, but at the macro level as well (size change of the total charge stock volume), since it is required to resolve the boundary value problem with moving boundaries for the ability to describe the temperature fields in foam glass charge stock, and without knowledge of the law regarding changing the geometry of the charge stock is almost impossible. Simulation of temperature fields' distribution in charge stock is one of the key issues in improving the foam glass production technology. In this work we didn't state the aim to describe influence of the law regarding pore size change on the solution of equations on heat conductivity factor in charge stock. However, we should not keep silence about the fact. Returning to the question of bubble growth simulation, it should be noted that ideally, the model should consider not only described by us below effects of glass viscosity and surface tension, but also the diffusion processes as the mass transfer of the molten glass determines the laws of the porous structure of foam glass formation.

3. BASIC PART

Complexity of pores formation in the foam glass during its production significantly complicates the analytical solution for such problems. Thus, it's required to simplify certain conditions or even neglect them, so let's take a number of assumptions.

1. Melt glass around a pore is taken as incompressible

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

while the glass density forming a part of foam glass charge stock – as constant at any point and time moment

$$\nabla\rho = 0.$$

2. Melt viscosity of foam glass charge stock will be taken as depending only on temperature and pressure.
3. We consider a separate pore of a completely spherical shape, therefore,

$$v_\theta = v_\varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0.$$

The assumption shows that cladding external boundary is the boundary between two pores of identical size, including its cladding.
4. Temperature is taken as constant for every small time interval, i.e. there is no temperature gradient in the area pore/glass cladding.
5. Spherical coordinates with the system origin of coordinates in the pore center are used (Fig. 5).
6. Despite the fact that external boundary of the considered pore cladding out of the glass melt is the boundary between the neighboring pores of identical size (Fig. 3) we assume that the external surface of separate pore (when $r = R_2$) is impermeable to penetration of gaseous products that are generated as a result of thermal decomposition reaction of the gas developing agent in the neighboring pores.

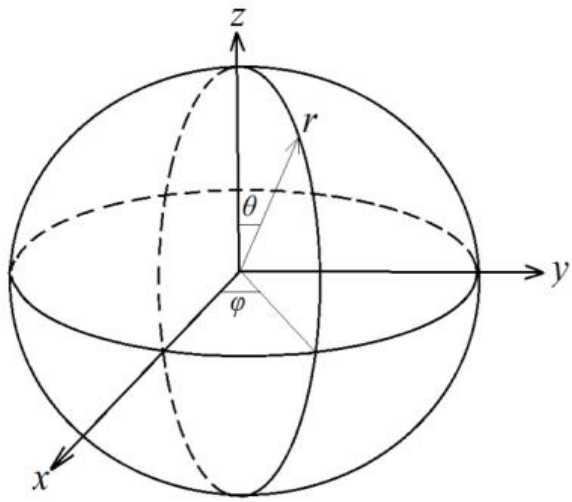


Figure 5. The coordinates system used for the considered pore.

7. Glass melt behaves as a Newtonian fluid, i.e. viscosity, according to this definition, depends only on temperature and pressure, but not from movement rate.

Continuity equation for fluid in accordance with [4] can be written down as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathrm{pv}), \quad (1)$$

where ρ – fluid density [kg/m^3], t – time [sec] and $\boldsymbol{v}$ – vector of the sustained mass flow rate [m/sec]. For incompressible fluid with constant density values, we get the following:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = 0. \quad (2)$$

Spherical symmetry eliminates expression for directions θ and φ. At a constant glass density for the continuity equation at the glass phase we get:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) = 0, \quad (3)$$

where r – radial coordinate in spherical coordinates [m], v_r – average fluid rate in r direction [m/sec].

Integration of equation (3) between the two boundaries R_1 and R_2, where R_1 is the pores inner radius [m] and R_2 is the outer radius [m], leads to:

$$r^2 v_r = constant = R_1^2 v_{R_1} \leftrightarrow v_r = \frac{R_1^2}{r^2} v_{R_1}, \quad (4)$$

where v_{R_1}–pores radius growth rate R_1.

$$v_{R_1} = \frac{dR_1}{dt}. \quad (5)$$

Under the conditions that the pore has a spherical shape, the glass melt is a continuous medium that fills the space without voids and gaps, and, neglecting gravitational forces, the Navier – Stokes equation for incompressible viscous fluid is reduced to the following view [3]:

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (6)$$

where p – pressure [Pa], τ_{rr} – radial component of the stress tensor in the r-direction [Pa], $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\varphi\varphi}$ – similar components of the stress tensor in the indicated directions θ and φ.

Assuming that the viscous fluid follows the Newton's law of viscous friction in its flow, τ_{rr} is obtained:

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right] + \frac{2}{3}\mu\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}), \quad (7)$$

where μ – factor of fluid dynamic viscosity [PA·s]. In terms of equation (2) we get:

$$\tau_{rr} = -2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}. \quad (8)$$

Similarly, the equations for $\tau_{\theta\theta}$ and $\tau_{\varphi\varphi}$ are converted to the following view:

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)\right] + \frac{2}{3}\mu\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = -2\mu\frac{v_r}{r}. \quad (9)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r + v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right)\right] + \frac{2}{3}\mu\,(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = -2\mu\frac{v_r}{r}. \quad (10)$$

Then by putting the values of equations (8)-(10) in equation (5), we get:

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot r^2\right) - 4\mu\frac{v_r}{r^2}. \quad (11)$$

Temperature range of the foam glass froth building varies from 600 °C to 900 °C, and corresponding dynamic viscosity μ of foam glass charge stock modifies in the interval from 10^8 to 10^3 [Pa]. Duration of foaming process makes from 0.5 to 1 hour, and the pore radius varies double-order from standard 10^{-5} to 10^{-3} [m]. Reynolds Number:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_R 2R}{\mu}$$

less than 10^{-9} throughout the total froth building mode [8, 9]. In other words: for liquids with high viscosity two members of the left-hand side of equation (10) can be neglected since v_r is very small and changes very slowly. Therefore, the thermal inertia $v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$ and the inertial member $\frac{\partial v_r}{\partial t}$ can be neglected. This simplifies equation (11) to the view:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot r^2\right) - 4\mu\frac{v_r}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Let's integrate equation (12), between $r = R_1$ and $r = R_2$ (glass cladding boundaries):

$$\int_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)dr - \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot r^2\right)dr - \\ - \int_{R_1}^{R_2} 4\mu\frac{v_r}{r^2}dr \quad (13)$$

Let's integrate the first additive component:

$$\int_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{\partial p_l}{\partial r}\right)dr = p_l(R_1) - p_l(R_2) \quad (14)$$

Let's integrate the second additive component by substituting equation (4):

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot r^2\right)dr = \\ = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4\mu R_1^2 v_{R_1}}{r}\right)dr = \\ = 4\mu R_1^2 v_{R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^4}dr = \\ = \frac{4}{3}\mu R_1^2 v_{R_1}\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right] \quad (15)$$

Let's integrate the third additive component by substituting equation (4):

$$\int_{R_1}^{R_2} 4\mu\frac{v_r}{r^2}dr = \\ = 4\mu R_1^2 v_{R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^4}dr = \frac{4}{3}\mu R_1^2 v_{R_1}\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right] \quad (16)$$

Difference of equations (15) and (16) is equal to zero, so during integration of equation (12) between R_1 and R_2 we'll get:

$$p_l(R_1) - p_l(R_2) = 0, \quad (17)$$

where $p_{ж}(R_1)$ – fluid pressure at the inner radius $r = R_1$, $p_{ж}(R_2)$ – fluid pressure at the outer radius $r = R_2$.

It should be noted that R_1 and R_2 are functions of time (R_1 (t) and R_2 (t)).

It is required to obtain the power balance in order to determine the values of various pressures, arising in the glass melt when $r = R_1$ and $r = R_2$, as well as surface tension effect on pores growth. In the absence of external powers on the fluid power balance can be obtained in accordance with Fig. 6.

As it has been already noted, the pore outer boundary at $r = R_2$ is not the real outer boundary, but is the boundary of the glass cladding of the adjacent pore. Since one pore with its cladding is considered, initial pressure is the pressure applied to the entire system (pore + glass cladding).

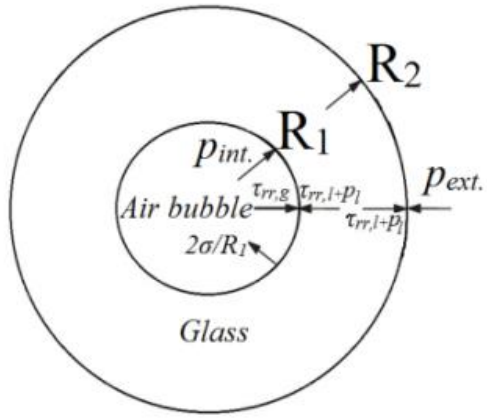


Figure 6. Power balance on the external and internal border of the glass cladding, arrows indicate the direction of forces.

Taking into account symmetry of the porous structure in the considered model of porous structure, the pressure acting on the glass cladding when $r = R_2$(pressure at the external boundary of glass melt), formed during gas formation reaction at thermal decomposition of gas developing agent in the foaming stages, we'll receive the balance of powers:

1) for $r = R_1$:

$$p_{int.} + \tau_{rr,г}(R_1) = \\ = p_l(R_1) + \tau_{rr,l}(R_1) + \frac{2\sigma}{R_1}, \qquad (18)$$

where $p_{int.}$ – gas pressure inside the pore [PA], σ – surface tension factor [N/m], $\frac{2\sigma}{R_1}$ – voltage acting perpendicularly to the fluid surface due to surface tension.

2) for $r = R_2$:

$$p_{ext.} = p_l(R_2) + \tau_{rr,l}(R_2), \qquad (19)$$

where $p_{ext.}$ – pressure on external (outer) border of the glass melt [Pa].

Radial viscosity tension of gas phase $\tau_{rr,g}$ is very small compared to $\tau_{rr,l}$ of liquid phase and therefore it can be neglected. $\tau_{rr,l}$ is given by equation (7) therefore, by combining equations (8) and (4), we get the equation describing the stresses in the inner radius (R_1) and outer radius (R_2):

$$\tau_{rr,l}(R_1) = \frac{4\mu}{R_1}\frac{dR_1}{dt}. \qquad (20)$$

$$\tau_{rr,l}(R_2) = \frac{4\mu}{R_2}\frac{dR_2}{dt}. \qquad (21)$$

From power balance and equations (17), we get:

$$p_{int.} - p_{ext.} - \frac{2\sigma}{R_1} - \\ -4\mu\left(\frac{dR_1}{dt}\frac{1}{R_1} - \frac{dR_2}{dt}\frac{1}{R_2}\right) = 0. \qquad (22)$$

Since the total volume of pore cladding glass melt ($V_{ж}$) is adopted by us as constant, R_1 and R_2 will be linked through the equation:

$$V_l = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) = constant. \qquad (23)$$

Thus:

$$R_2 = \left[\frac{V_l}{\frac{4}{3}\pi} + R_1^3\right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (24)$$

In order to get the formula of radius R_1 change it is required to calculate the change in R_2 depending on R_1:

$$\frac{dR_2}{dt} = \frac{dR_2}{dR_1}\frac{dR_1}{dt} = \frac{R_1^2}{\left(\frac{3V_l}{4\pi} + R_1^3\right)^{\frac{2}{3}}}\frac{dR_1}{dt}. \qquad (25)$$

Combining equations (22), (24) and (25), we get the equation for the pore growth:

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{\frac{3V_l}{4\pi} + R_1^3}{4\mu\frac{3V_l}{4\pi}}(\Delta p R_1 - 2\sigma), \qquad (26)$$

where

$$\Delta p = p_{int.} - p_{ext.}. \qquad (27)$$

The Runge–Kutta fourth-order method [1] in the MathCAD program was used for calculations and equation graphical interpretation (26).

Four function values for two intermediate points were used on the following step: two values in the center of the step and the two values at the ends of the step:

$$k_1 = h \cdot f(t_i, R_i); \qquad (28)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}\cdot h, R_i + k_1 \cdot \frac{1}{2}\cdot \Delta R_i\right); \qquad (29)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}\cdot h, R_i + k_2 \cdot \frac{1}{2}\cdot \Delta R_i\right). \qquad (30)$$

$$k_4 = f(t_i + h, R_i + k_3 \cdot \Delta R_i). \qquad (31)$$

$$R_{i+1} = R_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\cdot\frac{1}{6}\Delta R_i. \qquad (32)$$

Runge–Kutta fourth-order method was used, as it provides the calculations with required accuracy and is characterized by resistance and possibility of monitoring the error and calculation step change, unlike «Euler», «Adams» and «Predictor-corrector methods».

Calculations results are presented in Fig. 7.

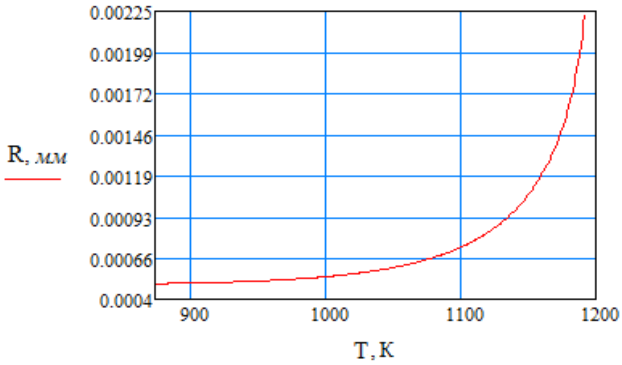


Figure 7. Diagram of pores radius growth depending on the temperature.

Values μ and σ at calculations are taken as variables.

Changing the values of dynamic viscosity was calculated by the formula [10, 18]:

$$\mu = \mu_0 \cdot 10^{A \cdot \frac{T_0 - T}{(T-B)\cdot(T_0-C)}}, \qquad (33)$$

where μ_0 – factor of dynamic viscosity at the initial moment of time [Pa·s], T_0 – temperature at initial moment of time [K], T – temperature [K], A and B – empirical factors.

Changing the values of surface tension factor calculated by the formula [21]:

$$\sigma = \sigma_0 - 0{,}004 \cdot \frac{T-1173}{100}, \qquad (34)$$

where σ_0 – factor of surface tension at the initial moment of time [N/m].

Temperature change over time was prescribed as follows:

$$T = T_0 + k \cdot t, \qquad (35)$$

where k – factor taking into account the heating rate, t – time [sec].

Value μ_0 was taken equal to 10^{10} [Pa]. Value σ_0 was taken equal to 0.2 [N/m]. Factor A was taken equal to 3700. Factor B was taken equal to 510. Dynamics of pores radius growth was examined at initial temperature of 293 [K]. Value k was taken equal to 0.25, which allowed defining the temperature change in increments of 15 [K/min], that is, we have been simulating total froth building process within 1 hour.

The diagram (Fig. 7) shows that the pore radius starts to increase when the temperature reaches 900 [K], herewith the temperature increase up to 1000 [K] leads to radius increase only by 0.0001 [m]. However, the active melting of glass particles starts at temperatures above 1000 [K], while concentration and pressure of the gas developing agent becomes sufficient for overcoming surface tension forces, and the pore radius starts to increase. When reaching temperatures of 1200 [K] the pore radius increases to the sizes 2-2.5 [mm], after which pore radius growth slows down and then stops. This fact is due to a number of reasons. First, the formed pores start to collapse, as the glass cladding does not withstand high pressures that occur inside and outside the pores due to decrease of surface tension ratio and decrease of viscosity of raw material mixture glass particles (foam glass charge stock). Second, as a result of prolonged exposure to temperatures above 1200 [K], complete thermal decomposition of the gas developing agent takes place, and its amount gradually becomes not sufficient for the new pores formation. The formed pores start to collapse, which ultimately can lead to deterioration of final thermos-physical properties of the finished material.

4. CONCLUSIONS

Equation (26) shows that pressure in a pore ($p_{int.}$) should be by 2σ greater than the pressure at the outer boundary ($p_{ext.}$) of a pore in order to form glass cladding around the source of gas developing agent by overcoming the surface tension forces. Increase of viscosity of melt glass particles in raw material mixture slows down the pores radius growth rate. Pressure increase inside a pore depends on several factors, major of which is the mass transfer process of glass melt along a pore surface. For further refinement of the pore growth model it's required to consider not only physical parameters but also chemical reactions occurring during the gas generation on the glass

cladding / pore boundary, this will enable to obtain results through analytical calculations, at mathematic simulation, as close to the real physical and chemical process as possible.

Absence, at present, of mathematical relationships and physically clear concepts regarding this process inhibits the industry development as a whole, but also directly affects the material cost. Development of adequate mathematical models able to describe the dynamics of porous structure formation of foam glass, taking into account temperatures distribution in the material at all stages of thermal treatment, will allow for comprehensive approach to the technological process of foam glass production, as well as to take into account all the peculiarities of heat and mass transfer in the material.

REFERENCES

1. **Bakhvalov N.S.** Chislennye metody (Analiz, Algebra, Obyknovennye Differencial'nye Uravnenija) [Numerical Methods (Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1975, 632 pages.
2. **Demidovich B.K.** Proizvodstvo i Primenenie Penostekla [Foam Glass Production and Application. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1972, 304 pages.
3. **Kitaigorodskii I.I., Keshishian, T.N.** Penosteklo [Foam Glass]. Moscow: Promstroiizdat, 1953, 80 pages.
4. **Landau L.D. Lifshits E.M.** Teoreticheskaja Fizika [Theoretical Physics]. Moscow, Nauka, 1986, 736 pages.
5. **Lotov V.A.** Foam Glass Production Based on Natural and Technogeneous Aluminosilicates. // Glass and ceramics, 2011, No. 9, pp. 34-37.
6. **Lotov V.A., Krivepkova Ye.V.** Kinetics of the Porous Structure Formation in the Foam Glass. // Glass and Ceramics, 2002, No. 3.
7. **Lykov A.V.** Javlenie Perenosa v Lapilljarno-Poristyh Telah [Transport Phenomenon in Capillary-Porous Bodies]. Moscow, Stroiizdat, 1954, 298 pages.
8. **Lotov V.A., Kutugin V.A.** Method for Heat-Insulating Material and Charge Stock Producing for its Manufacturing: pat. 2478586 the Russian Federation. / Appl. 30.09.11; publ. 10.04.13, Bull. No. 10.
9. **Lotov V.A., Kutugin V.A.** Method for Foam Glass and Foam Glass Charge Stock Production for its Manufacturing: pat. 2478587 the Russian Federation. / Appl. 30.09.11; publ. 10.04.13, Bull. No. 10.
10. **Sangadiev S.Sh., Munkueva S.B., Sanditov D.S.** Opredelenie Parametrov Uravnenija Fogelja-Ful'chera-Tammana Dlja Temperaturnoj Zavisimosti Vjazkosti v Oblasti Perehoda Zhidkost'-steklo [Determination of the Vogel-Fulcher-Tammann Equation Parameters for Viscositytemperature Dependence in the Liquid-Glass Transition Area]. // Bulletin of the Buryat State University, 2009, No. 3, pp. 153-156.
11. **Tagantsev D.K.** Stekloobraznye Materialy [Glassy Materials]. Saint Petersburg, Saint Petersburg Polytechnic University Publishing House, 2010, 204 pages.
12. **Fedosov S.V., Bakanov M.O.** Development of Integrated Approach to Mathematic Simulation of Foam Glass Charge Stock Thermal Processing. Part 1. Physical Concepts About the Process. // Bulletin of the Volga State University of Technology. Series: Materials. Designs. Technologies, 2017, No. 2, pp. 95-100.
13. **Fedosov S.V., Bakanov M.O.** Penosteklo: Osobennosti Proizvodstva, Modelirovanie Processov Teploperenosa i Gazoobrazovanija [Foam Glass: Production Specifics, Heat Transfer and Gas Formation Simulation]. // Academia. Architecture and Construction, No 1, 2015, pp. 108-113.
14. **Fedosov S.V., Bakanov M.O., Volkov A.V.** et al. Mathematical Model of the Pore Formation Dynamics Owing to Heat Treatment of the Foam Glass Batch. // Journal of

Higher Educational Establishments. Chemistry and Chemical Technology, 2014, Vol. 57, Ed. 3, pp. 73-79.
15. **Fedosov S.V., Bakanov M.O., Nikishov S.N.** Variability of Approaches to Mathematic Simulation of Foam Glass Charge Stock Thermal Processing. // Academic Journal Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov, 2017, No. 11, pp. 110-116.
16. **Shill F.** Penosteklo [Foam glass]. Moscow, Stroiizdat, 1965, 307 pages.
17. **Kose S.** Study of the Dynamics of Foaming of the Foam Glass. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1981.
18. **Lakatos T., Johansson L.-G., Simmingskold B.** Viscosity Temperature relation in the Glass System SiO2-Al2O3-Na2O-K2O-CaO-MgO in the Composition Range of Technical Glasses. Glass Technol., 1972, No. 13(3), pp. 88-95.
19. **Nemec L., Klouzek J.** Modeling of Glass Refining Kinetics Part 1. Single Bubbles. // Ceramics − Silicate, 2003, 1980, Volume 47, Number 3, pp. 81-87.
20. **Princen H.M., Aronson M.P., Moser J.C.** Highly Concentrated Emulsions, II. Real Systems. The Effect of Film Thickness and Contact Angle on the Volume Fraction in Creamed Emulsions. // J. Colloid. Interface Sci., 1980, Volume 75 Number 1, pp. 246-270.
21. **Scholze H.** Glass Nature, Structure and Properties. Springer – Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
22. **Subramanian R. S.,** Chi Bo. Bubble dissolution with Chemical Reaction. // Chem. Eng. Sci., 1980, Volume 35, pp. 2185-2194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С.** Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975. – 632 с.
2. **Демидович В.К.** Производство и применение пеностекла. – Минск: Наука и техника, 1972. – 304 с.
3. **Китайгородский И.И., Кашишян Т.Н.** Пеностекло. – М.: Промстройиздат, 1953. – 80 с.
4. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
5. **Lotov V.A.** Foam Glass Production Based on Natural and Technogeneous Aluminosilicates. // Glass and ceramics, 2011, No. 9, pp. 34-37.
6. **Lotov V.A., Krivepkova Ye.V.** Kinetics of the Porous Structure Formation in the Foam Glass. // Glass and Ceramics, 2002, No. 3.
7. **Лыков А.В.** Явление переноса в капиллярно-пористых телах. – М.: Стройиздат, 1954. – 298 с.
8. **Lotov V.A., Kutugin V.A.** Method for Heat-Insulating Material and Charge Stock Producing for its Manufacturing: pat. 2478586 the Russian Federation. / Appl. 30.09.11; publ. 10.04.13, Bull. No. 10.
9. **Lotov V.A., Kutugin V.A.** Method for Foam Glass and Foam Glass Charge Stock Production for its Manufacturing: pat. 2478587 the Russian Federation. / Appl. 30.09.11; publ. 10.04.13, Bull. No. 10.
10. **Сангадиев С.Ш., Мункуева С.Б., Сандитов Д.С.** Определение параметров уравнения Фогеля-Фульчера-Таммана для температурной зависимости вязкости в области перехода жидкость-стекло. // Вестник Бурятского государственного университета, 2009, Вып. 3, с. 153-156.
11. **Таганцев Д.К.** Стеклообразные материалы. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 2010. – 2014 с.
12. **Fedosov S.V., Bakanov M.O.** Development of Integrated Approach to Mathematic Simulation of Foam Glass Charge Stock Thermal Processing. Part 1. Physical Concepts About the Process. // Bulletin of the Volga State University of Technology. Series: Materials. Designs. Technologies, 2017, No. 2, pp. 95-100.

13. **Федосов С.В., Баканов М.О.** Пеностекло: особенности производства, моделирование процессор теплопереноса и газообразования. // ACADEMIA. Архитектура и строительство, 2015, №1, с. 108-113.
14. **Fedosov S.V., Bakanov M.O., Volkov A.V.** et al. Mathematical Model of the Pore Formation Dynamics Owing to Heat Treatment of the Foam Glass Batch. // Journal of Higher Educational Establishments. Chemistry and Chemical Technology, 2014, Vol. 57, Ed. 3, pp. 73-79.
15. **Fedosov S.V., Bakanov M.O., Nikishov S.N.** Variability of Approaches to Mathematic Simulation of Foam Glass Charge Stock Thermal Processing. // Academic Journal Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov, 2017, No. 11, pp. 110-116.
16. **Шилл Ф.** Пеностекло. Производство и применение. – М.: Стройиздат, 1965 – 308 с.
17. **Kose S.** Study of the Dynamics of Foaming of the Foam Glass. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1981.
18. **Lakatos T., Johansson L.-G., Simmingskold B.** Viscosity Temperature relation in the Glass System SiO2-Al2O3-Na2O-K2O-CaO-MgO in the Composition Range of Technical Glasses. Glass Technol., 1972, No. 13(3), pp. 88-95.
19. **Nemec L., Klouzek J.** Modeling of Glass Refining Kinetics Part 1. Single Bubbles. // Ceramics − Silicate, 2003, 1980, Volume 47, Number 3, pp. 81-87.
20. **Princen H.M., Aronson M.P., Moser J.C.** Highly Concentrated Emulsions, II. Real Systems. The Effect of Film Thickness and Contact Angle on the Volume Fraction in Creamed Emulsions. // J. Colloid. Interface Sci., 1980, Volume 75 Number 1, pp. 246-270.
21. **Scholze H.** Glass Nature, Structure and Properties. Springer – Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
22. **Subramanian R. S.,** Chi Bo. Bubble dissolution with Chemical Reaction. // Chem. Eng. Sci., 1980, Volume 35, pp. 2185-2194.

Федосов Сергей Викторович, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, президент Ивановского государственного политехнического университета; 153037, Россия, Ивановская область, г. Иваново, ул. 8 Марта, дом 20;
тел. + 7(4932) 32-85-40; факс +7(4932) 37-19-42;
E-mail: fedosov-academic53@mail.ru

Баканов Максим Олегович, кандидат технических наук, начальник кафедры, Ивановская пожарно-спасательная академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; 153040, Россия, Ивановская область, г. Иваново, Строителей пр-кт, 33; тел. +7(4932)34-37-09;
E-mail: mask-13@mail.ru

Никишов Сергей Николаевич, аспирант Ивановского государственного политехнического университета; старший преподаватель кафедры пожарно-строевой, физической подготовки и газодымозащитной службы Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России; 153040, Россия, Ивановская область, г. Иваново, Строителей пр-кт, 33;
тел. +7(4932)34-37-09; e-mail: mordov5988@mail.ru

Sergey V. Fedosov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Science (RAACS), president of the Ivanovo state Polytechnic University; Ivanovo State Politechnical University; 20, Ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; phone + 7(4932) 32-85-40;
Fax: +7(4932) 37-19-42;
e-mail: fedosov-academic53@mail.ru.

Maxim O. Bakanov, Candidate of technical Sciences, Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters; 33, Prospekt Stroiteley, Ivanovo, 153040, Russia; tel. +7(4932)34-37-09; e-mail: mask-13@mail.ru.

Sergey N. Nikishov, Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters; 33, Prospekt Stroiteley, Ivanovo, 153040, Russia; tel. +7 (4932)34-37-09;
E-mail: mordov5988@mail.ru.

ОБ ИТОГАХ ВЫБОРОВ ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК (РААСН) В 2018 ГОДУ

В соответствии с постановлением Президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 8 декабря 2017 г. №13 о проведении выборов академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН научными организациями, действующими в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, и членами РААСН были выдвинуты 8 кандидата в академики РААСН и 40 кандидатов в члены-корреспонденты РААСН. Общим собранием членов РААСН 19-20 апреля 2018 года, согласно уставу РААСН, академиками РААСН и членами-корреспондентами РААСН были избраны следующие ученые:

АКАДЕМИКИ РААСН

Фамилия, имя, отчество	По научному направлению (специальности)

Отделение архитектуры РААСН

Нащокина Мария Владимировна	– наука и образование
Гнедовский Сергей Викторович	– архитектурная практика
Мамошин Михаил Александрович	– архитектурная практика

ЧЛЕНЫ-КОРРЕСПОНДЕНТЫ РААСН

Фамилия, имя, отчество	По научному направлению (специальности)

Отделение архитектуры РААСН

Салимов Алексей Маратович	– наука и образование*
Юдинцев Владимир Петрович	– архитектурная практика
Хомяков Александр Иванович	– архитектурная практика

Отделение градостроительства РААСН

Косенкова Юлия Леонидовна	– градостроительная наука
Самойленко Ирина Борисовна	– градостроительная практика
Мазаев Антон Григорьевич	– градостроительная практика*

Отделение строительных наук РААСН

Сидоров Владимир Николаевич	– теоретические основы строительных наук
Трещев Александр Анатольевич	– теоретические основы строительных наук*

Примечание: Символ * означает, что данная вакансия объявлена с ограничением возраста кандидата на момент избрания в члены-корреспонденты РААСН – до 60 года включительно.