International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 5, Issue 1&2 ***2009***

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Pavel A. Akimov, Professor
Department of Applied Mathematics and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Radii P. Fedorenko, Professor
Institute of Applied Mathematics
Russian Academy of Sciences
4, Miusskaya Pl., Moscow, Russia

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analise Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Alexander B. Zolotov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
Isdatelstvo ASV
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Igor A. Aleynikov, Professor,
Department of Theoretical and Applied Mechanics, Russian State Open Technical University for Railway Transportation
22/2, Ul. Chasovaya, Moscow, 125993, Russia

Sergey M. Aleynikov, Professor,
Dept. of Appl. Math., Voronezh State Architecture and Civil Engineering University, Bld. 84, Ul. 20-Letya Oktyabrya, Voronezh, 394006, Russia

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Department of Mechanical Engineering
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
1, Kurchatova Pl.
123182, Moscow, Russia

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and Cybernetics
Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakonov, Professor
Dept. of Comp. Math. and Cybernetics
Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosa
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Elena A. Korol, Professor
Department of Construction Technology
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Tecnologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Nickolay N. Leontiev, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkechoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatikn und Festigkeitslehre
Techiache Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Andrey B. Pavlov, Professor
The Director of the Institute
Melnikov Central Research & Design Institute of Steel Building Structures TSNIIPSK
49, Ul. Arkhitektora Vlasova, Moscow, 117997, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart, Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State Univ. of Civil Engineering, Yaroslavskoe shosse
26, 129337 Moscow, Russia

Bernhard A. Scfhrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti. Via Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for Technical Education, New Delhi, India

W. Szczesniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmes University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Московский государственный строительный университет (Издательство АСВ) и Издательство Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк).

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основной критерий отбора статей для публикации в журнале − их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ − 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2]

[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed**.

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addiction all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

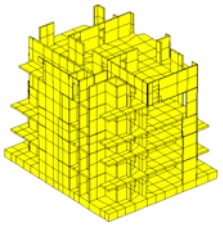


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or technical editor professor Pavel A. Akimov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well**. Label CD or diskette with** author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

- **Editor-in-Chief**
  Professor Vladimir N. Sidorov
  Department of Applied Mathematics and Information Technology
  Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
  e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Technical Editor**
  Professor Pavel A. Akimov
  Department of Applied Mathematics and Information Technology
  Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
  e-mail: pavel.akimov@gmail.com

REFERENCES

1. Fish, J. and Belsky, V. (1995a). "Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case". Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1-16.
2. Fish, J. and Belsky, V. (1995b). "Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 2: multidimensions". Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 17-38.

[1]) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров[1], П.А. Акимов[2]

[1]Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210х297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Бумажный экземпляр статьи должен быть распечатан на лазерном принтере. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2]

[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.). При публикации статьи на русском языке

далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использование шрифта Times New Roman, 12 пт.; списко литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательно нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. Тоже самое касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Очень желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в текстовом процессоре Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}\,. \qquad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков –** JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

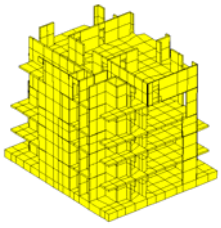


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Владимира Ни-

колаевича (см. параграф Контактные сведения) или техническому редактору журнала, профессору Акимову Павлу Алексеевичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору или техническому редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

- **Главный редактор**
  Профессор, доктор технических наук
  Сидоров Владимир Николаевич
  Московский государственный строительный университет,
  кафедра информатики и прикладной математики,
  129337, Россия, г. Москва,
  Ярославское шоссе, дом 26.
  e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Технический редактор**
  Профессор, доктор технических наук
  Акимов Павел Алексеевич
  Московский государственный строительный университет,
  кафедра информатики и прикладной математики,
  129337, Россия, г. Москва,
  Ярославское шоссе, дом 26.
  e-mail: pavel.akimov@gmail.com

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fish, J. and Belsky, V. (1995a). “Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case”. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1-16.
2. Fish, J. and Belsky, V. (1995b). “Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 2: multidimensions”. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 17-38.

---

[1]) Сидоров Владимир Николаевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Акимов Павел Алексеевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.

[1]) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 5, Issue 1&2 ***2009***

TABLE OF CONTENTS

Deformation of Reinforced Concrete Spherical Dome with Cutouts on the Damped Foundation Beds 13
Vladimir G. Dmitriev, Anatoly A. Sudyin

Actual Problems of Nonlinear Design of Reinforced Concrete Structures 23
Anna V. Ermakova

Stability Analysis of Space Trusses 35
Vera V. Galishnikova

Study of Possible Application of Different Design Models of "Foundation – Soil" System for a Pile-Raft Foundation of a High-Rise Building 45
Galina G. Kashevarova, Oleg U. Smetannikov, Alexandra U. Zobacheva

Matrix analysis of viscoelastic elements 57
Alexey Kuznetsov

Метод множителей Лагранжа в задачах синтеза оптимальной балочной конструкции 63
К.Р. Айдемиров

Структура рециркуляционного течения и массоперенос твердых частиц в гидротехническом отстойнике 70
В.К. Ахметов

Приложения дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики. Часть 1: Двумерная задача теории упругости 76
А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев

Приложения дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики. Часть 2: Задача изгиба плиты 92
А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев

Приложения дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики. Часть 3: Трехмерная задача теории упругости 118
А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев

Использование дискретного базиса Хаара для получения локального решения краевых задач 127
М.Л. Мозгалева, А.Б. Золотов

Моделирование эволюционной деструкции композиционных материалов 133
Б.Е. Победря

Применение матриц жесткости и масс конечных элементов высоких порядков для определения частот собственных продольных колебаний 152
О.Л. Рудых, В.А. Бырканов

Памяти Александра Борисовича Золотова 161

О научно-творческой деятельности Александра Борисовича Золотова 166
В.Н. Сидоров, П.А. Акимов

DEFORMATION OF REINFORCED CONCRETE SPHERICAL DOME WITH CUTOUTS ON THE DAMPED FOUNDATION BEDS

Vladimir G. Dmitriev, Anatoly A. Sudyin
Moscow State Opened University, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This research develops adequate mathematical models and efficient numerical methods for investigation of specific features of nonlinear deformation of reinforced concrete shells with cutouts under various static and dynamic loading, including seismic forces. Influence of the parameters of viscoelastic damping elements on the crack growth resistance of reinforced concrete spherical dome with cutouts of various shapes is studied with the use computational experiment.

Keywords: mathematical modeling, shells, numerical methods, reinforced concrete structures, finite differences, conservative finite-difference schemes

Influence of the integral values of damping elements' parameters on the stress-strain state of the bearing elements of reinforced concrete structures of shell type with various cutouts under seismic forces is investigated by the mathematical modeling methods in this research. Shell elements of revolution type with variable thickness $h=h(\alpha_1,\alpha_2)$ are considered; where α_1,α_2 are Gaussian parameters of basic surface. Edges of the cutouts are assumed to be coinciding with the grid lines of coordinate system.

Due to the predominantly bending type of strain-stress state in the proximity of the cutout, characterized with the significant surface deformations even at low load levels, computing of manifold shell structures has to be performed taking into consideration geometrically nonlinear effects, which, unlike linear approach, provides good correlation with the experimental data [1-3]. This research uses formulas of Reissner-Mindlin-Timoshenko hypothesis, allowing more precise description of deformation specifics of reinforced concrete shells of medium thickness ($R/h\approx 30\div 100$) and low transverse shear rigidity; R is a characteristic value of curvature radius.

It is assumed that concrete and reinforcing carcass are operated in the elastic stage. Shell structure is subject to the system of various static and dynamic loads (own weight, equipment weight, snow load, seismic forces etc.) [4,5].

Geometrically nonlinear equations for tangential E_{11}, E_{22}, E_{12} and transverse E_{13}, E_{23} deformations of shell's coordinate surface are formularized as follows:

$$E_{11}=\varepsilon_1+\frac{1}{2}\theta_1^2;\qquad E_{22}=\varepsilon_2+\frac{1}{2}\theta_2^2;$$
$$E_{12}=\Omega_1+\Omega_2+\theta_1\theta_2;$$
$$E_{13}=\gamma_1-\theta_1;\ E_{23}=\gamma_2-\theta_2, \qquad (1)$$

where

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+k_1 w;\quad \Omega_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha_1};$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u+k_2 w;$$
$$\Omega_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}v; \qquad (2)$$
$$\theta_1=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+k_1 u;\ \theta_2=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}+k_2 v,$$

and where A_i,k_i are Lame's parameters and eigen curvatures of coordinate surface $z=0$ in the coordinate directions α_i, $(-h/2\le z\le+h/2)$; $u_1=u$, $u_2=v$, $u_3=w$, $u_4=\gamma_1$, $u_5=\gamma_2$ are generalized displacements u_k $(k=1,2,...,5)$; θ_1,θ_2 are pivot an-

gles according the "rigid" normal hypothesis and γ_1,γ_2 are full pivot angles of normal.
The bending deformation components are described by the following equations:

$$K_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1};\ K_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\gamma_1;$$
$$K_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\gamma_2+$$
$$+k_1\Omega_2+k_2\Omega_1. \qquad (3)$$

Both one-sided and two-sided reinforcement schemes are considered in this research. Reinforcing carcass is modeled as an orthotropic layer with equivalent rigidity and subject to tension-compression and transverse shear in reinforcement direction at null Poisson's ratios and null tangential shear modulus in the layer's plane. The equivalent layers' thicknesses h_1, h_2 are determined by reinforcement factors as follows:

$$h_1=\mu_1\cdot h;\qquad h_2=\mu_2\cdot h, \qquad (4)$$

where μ_1,μ_2 are reinforcement factors in layers $z<0$ and $z>0$ respectively. Force factors, reduced to the coordinate surface - tangential force T_{11}, shear force S, transverse force Q_{13}, bending moment M_{11} and twisting moment H – are expressed in terms of deformation components as follows:

$$T_{11}=(B_b+C_{1a})E_{11}+\nu_bB_bE_{22}+B_{1a}K_{11};$$
$$S=B_{33}E_{12};\qquad Q_{13}=(A_{1a}+C_b)E_{13};$$
$$M_{11}=(D_b+D_{1a})K_{11}+\nu_bD_bK_{22}+B_{1a}E_{11};$$
$$H=D_{33}K_{12}, \qquad (5)$$

where the rigidities are expressed in terms of concrete and reinforcing carcass physical properties as follows:

$$B_b=\frac{E_bh}{1-\nu_b^2};\quad D_b=\frac{E_bh^3}{12(1-\nu_b^2)};$$
$$C_b=k^2G_bh;\quad B_{33}=G_bh;\qquad D_{33}=\frac{G_bh^3}{12};$$
$$C_{1a}=\sum_{i=1}^{n}E_a\cdot h_i;\qquad B_{1a}=\sum_{i=1}^{n}E_a(z_i\cdot h_i); \qquad (6)$$
$$D_{1a}=\sum_{i=1}^{n}E_a\left[(z_i^2\cdot h_i)+\frac{h_i^3}{12}\right];$$
$$A_{1a}=k^2\sum_{i=1}^{n}G_a\cdot h_i,$$

where E_a,G_a are Young's and shear moduli of reinforcement, E_b,G_b,ν_b are Young's module, shear module and Poisson's ratio of concrete, z_1, z_2 are coordinates of h_1, h_2 layers' midsurfaces, $k^2=5/6$. In the formulae (6) n=2 is applied in two-sided reinforcement scheme, n=1 is applied in one-sided reinforcement scheme. Forces in the cross-section α_2=const may be determined similarly to (6) [3].
Lagrange variation principle is applied to formulate equations of static equilibrium:

$$\delta\Theta=\delta\Pi-\delta A=0, \qquad (7)$$

and Hamilton variation principle is applied to formulate equations of motion:

$$\delta I=\int_{t_o}^{t_1}(\delta K-\delta\Pi-\delta A)dt=0, \qquad (8)$$

where Π and K are potential energy of deformation and kinetic energy of shell, A is the external forces' work [1,2]. After corresponding rearrangements, based on (7), an operator form of equations of static equilibrium can be written as follows:

$$[L_{\alpha_1,\alpha_2}(U)]_k+q_k=0, \qquad (9)$$

where $[L_{\alpha_1,\alpha_2}(U)]_k$ are corresponding differential operators for generalized displacement vector $U=U(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$, $q_k=q_k(\alpha_1,\alpha_2)$ are loading vector's components, including q_{gk} as weight loads. In a similar way to the above,

based on (8), equations of motion can be written as follows:

$$[L_{\alpha_1,\alpha_2}(U)]_k + q_k = m_k \ddot{u}_k, \qquad (10)$$

where $q_k=q_k(\alpha_1,\alpha_2,t)$. Inertial parameters for reinforced concrete structures are determined as

$$\begin{aligned} m_k &= \rho_b h + \sum_{i=1}^{n} \rho_a h_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_a h_j \qquad (k = 1,2,3); \\ m_4 &= \frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^{n} \rho_a \left[\frac{h_i^2}{12} + (z_i^2 \cdot h_i) \right]; \\ m_5 &= \frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{j=1}^{m} \rho_a \left[\frac{h_j^2}{12} + (z_j^2 \cdot h_j) \right], \end{aligned} \qquad (11)$$

where ρ_a is carcass density, ρ_b is concrete density, n,m=1 are used for the one-sided reinforcement scheme, n,m=2 are used for the two-sided reinforcement scheme in coordinate direction α_1 (n ratio) or α_2 (m ratio) [3].

Various boundary conditions on external and internal contours (cutout contours), mathematical formulations of which display specific types of supports, are considered in this research. Initial conditions are formulated for generalized displacements u_k and their velocities $\dot{u}_k$.

For the analysis of shells on damped foundation beds (Figure 1) the system of "structure – foundation bed plate" is considered as a jointly acting composite structure. Mathematical model of the shell on the foundation bed plate is formulated in an accordingly similar way [3,6].

The foundation bedplate's movement is assumed being a rigid body displacement x_f only along vertical axis, coinciding with the shell's rotation axis (Figure 1).

Characteristics of fairly wide range of modern damping elements can be described by the viscoelastic model [4,7], so that the rigid bedplate's equation of motion can be written as follows

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_\varepsilon - (P_f + F_s + F^*) = 0, \qquad (12)$$

where m_f is the bedplate mass, $P_f=m_f \cdot g$ is the bedplate's weight, F^* is the load on the bedplate (installed equipment, etc.), F_s is the shell's reaction, F_c and F_ε are elastic and viscous reactions of the damping element. Generally, $F^*=F^*(t)$, in the quasi-static F^*=const. Accordingly to the rule of signs (Figure 1b)

$$\begin{aligned} &F_s = \int_{\Gamma_f} T_s \cdot r_f d\alpha_2; \quad F_c = c_z(x_f + x_{sw}); \quad F_\varepsilon = \varepsilon_v \dot{x}_f; \\ &T_s = T_{11} \cdot \sin\alpha_f - Q_{11} \cdot \cos\alpha_f; \\ &Q_{11} = Q_{13} - T_{11} \cdot \theta_1 - S \cdot \theta_2, \end{aligned} \qquad (13)$$

where c_z, ε_v are integral values of elastic and viscous components of damping element, $x_{sw}=x_{sw}(t)$ is the known law of foundation displacement due to dynamic loads, particularly seismic wave [4,5,7]. On the boundary Γ_f kinematical boundary conditions are formulated for rigidly bound shell and foundation bedplate (Figure 1b):

$$\begin{aligned} &u = x_f \cdot \sin\alpha_f; \qquad w = -x_f \cdot \cos\alpha_f; \\ &v = \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Developing of difference scheme is done with the use finite-differences method, applied for discretization along spatial and time coordinates. Two orthogonal uniform grids with the parameters λ_1=const, λ_2=const are applied in the arguments α_1,α_2 continuous variations range of the main coordinates plane: the main grid which nodes have integer indices i,j and the auxiliary grid which nodes have the fractional indices (i± 1/2,j±1/2) (Figure 2).

In the nodes of the main grid the generalized displacements $u_k(\alpha_1,\alpha_2)$ and velocities $\dot{u}_k(\alpha_1,\alpha_2)$ are corresponding to the grid functions $u_k(i,j)$ and $\dot{u}_k(i,j)$. Differential operators are approximated by the finite differences of the second order accuracy $0(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$ using the piecewise linear interpolation in the mesh by the grid functions $u_k(i,j)$ in the main grid nodes.

Variation-difference method is applied to obtain the finite-difference equivalents of the equations

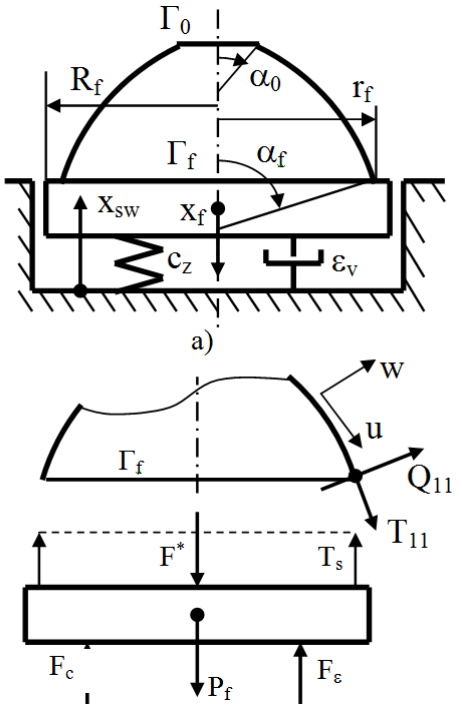


Figure 1

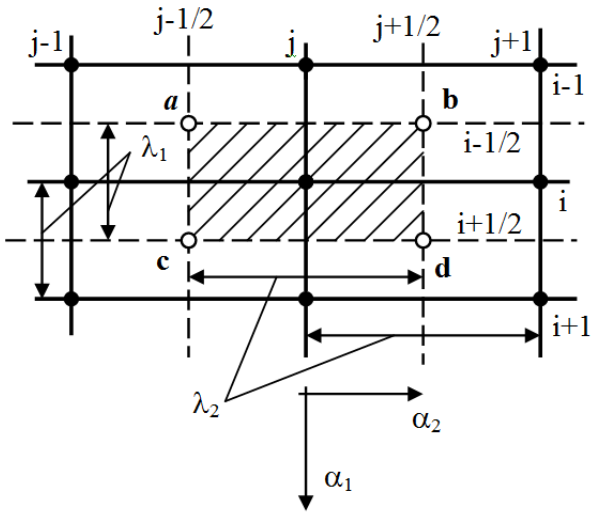


Figure 2

of static equilibrium and equations of motion. For the purpose of determining potential energy of deformation $\Pi_{i,j}$ and external force work $A_{i,j}$ in the grid area on the element $\Delta F_{i,j}=(c^{*}\cdot A_1A_2\cdot\lambda_1\lambda_2)_{i,j}$ (Figure 2, shaded area), where c^{*} is the weight factor, the discrete Lagrangian (10) for the domain $L_\lambda(\Lambda_1,\Lambda_2)$ can be formularized as a following sum:

$$\Im_\Sigma=\sum_i\sum_j(\Pi_{i,j}-A_{i,j}), \qquad (15)$$

where Λ_1, Λ_2 are the variation range of arguments α_1 and α_2. Weight factors, reflecting integration area when the shell's surface or contour are mapped on the grid area, are to be introduced in (15) at the time of performing

numerical integration [2,8]. Summation in (15) is done using those nodes of difference scheme, in which generalized displacements $u_k(i,j)$ are varying. Finally, the difference equivalent of equations of static equilibrium (10) follows the Lagrangian's minimum condition (15)

$$\frac{\partial \Im_\Sigma}{\partial u_k(i,j)} = 0, \qquad (16)$$

and can be written in the operator form as follows:

$$[L_{\lambda_1,\lambda_2}(U_k)]_{i,j} + (Q_k)_{i,j} = 0, \qquad (17)$$

where $[L_{\lambda_1,\lambda_2}]_{i,j}$ are corresponding finite-difference operators for generalized displacement grid functions vector $u_k(i,j)$; $(Q_k)_{i,j}$ are grid functions of generalized components of surface, weight and contour load.

For the numerical solution of non-stationary problems in the time domain $t\geq 0$ a main grid $t^{(n)}=\Delta t\cdot n$ (Δt=const, $n\geq 0$) is introduced, which nodes are corresponding to the grid functions of the generalized displacements $u_k(i,j)$. Velocities grid functions $\dot{u}_k(i,j)$ are corresponding to the nodes of the auxiliary grid $t^{(n\pm 1/2)}$. Differential operators are approximated by the finite differences of the second order approximation $O(\Delta t^2)$. By presenting kinetic energy in discrete form as

$$K_\Sigma = \sum_i \sum_j \left\{ 0{,}5 \left[\sum_k (m_k \dot{u}_k^2)_{i,j} \right] \Delta F_{i,j} \right\}, \qquad (18)$$

and by replacing integration in (8) by the summation over the grid area $t^{(n)}$, the discrete form of the functional **I** may be formulated as the following sum:

$$I_\Sigma = \sum_n \{ 0{,}5[(f_2 K_\Sigma)^{(n-1/2)} + (f_3 K_\Sigma)^{(n+1/2)}] - (f^* \Im_\Sigma)^{(n)} \} \Delta t, \qquad (19)$$

where $\Im_\Sigma^{(n)}$ is the discrete Lagrangian (15) expressed through the values of grid functions of generalized displacements $[u_k]_{i,j}^{(n)}$ and physical and mechanical properties and loads on the n-th time layer as its arguments. Thus, the finite-difference equivalents of motion equations (10) are following the variation-difference equations of the type

$$\frac{\partial I_\Sigma}{\partial [u_k]_{i,j}^{(n)}} = 0. \qquad (20)$$

so that using (17) we have

$$\{ f^* [L_{\lambda_1,\lambda_2}(U_k) + Q_k] \}_{i,j}^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_{i,j}^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_{i,j}^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \qquad (21)$$

where $f^*, f_1, f_2, f_3, f_4, f_{11}^*, f_{22}^*$ are weight factors [1-3]. It is assumed for the shells structural analysis that the line mapping the cutout boundary on the main coordinate plane passes through main grid nodes. The generalized displacements and velocities grid functions in the nodes on the cut-out's boundary contour are determined from the main equations' solution carried out by the approximation in these nodes.

The variation-difference formulation of the initial-boundary value problem allows construction of conservative difference schemes, which provide convergence of the numerical solution $u_k(i,j)$ to the exact $u_k(\alpha_1,\alpha_2)$ with the refinement of the grid .

Numerical solution of the static problems is performed by adaptation of quasi-dynamic form of stabilization method («dynamic relaxation» method) for solving of grid equations (17) [1-3,8-10]. In going to evolutionary problems, the equations of equilibrium (17) are replaced by the equations, similar to the equations of the shell's movement in the viscous media, of the following type:

$$[L_{\lambda_1,\lambda_2}(U_k)]_{i,j} + (Q_k)_{i,j} = (c^* m_k \ddot{u}_k)_{i,j} + \\ + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_{i,j}, \qquad (22)$$

where $\varepsilon_k(i,j)$ are the specific viscosity parameters of the artificial media. Approximation of the equations (22) on the time grid with pitch Δt=const similar to (18) – (21) allows to get the explicit formulae for the generalized velocities $\left[\dot{u}_k\right]_{i,j}^{(n+1/2)}$ on the time layer $t^{(n+1/2)}$:

$$\left[\dot{u}_k\right]_{i,j}^{(n+1/2)} = \frac{\left[2m_k - \varepsilon_k^{(n-1/2)}\Delta t\right]_{i,j}}{\left[2m_k + \varepsilon_k^{(n+1/2)}\Delta t\right]_{i,j}} \cdot \left[\dot{u}_k\right]_{i,j}^{(n-1/2)} + \\ + \frac{2\Delta t\left[L_{\lambda_1,\lambda_2}(U_k) + Q_k\right]_{i,j}^{(n)}}{c^*_{i,j}\left[2m_k + \varepsilon_k^{(n+1/2)}\Delta t\right]_{i,j}}; \qquad (23)$$

and the generalized displacements $\left[u_k\right]_{i,j}^{(n+1)}$ on the time layer $t^{(n+1)}$:

$$\left[u_k\right]_{i,j}^{(n+1)} = \left[u_k\right]_{i,j}^{(n)} + \Delta t \cdot \left[\dot{u}_k\right]_{i,j}^{(n+1/2)}. \qquad (24)$$

Thus, the difference approximation of non-stationary equations (22) leads to the iteration process (23), (24) of the solution of the initial static problem (17). The relaxation method, adapted for the numerical solution of grid equations (17) in the form of optimal linear iteration process [8], reduces the initial nonlinear static problem (17) solution to the solution of the quasi-dynamic problem (22), which significantly simplifies developing and implementation of computation algorithm for solving static problems of shells' nonlinear mechanics.

Convergence's acceleration and stability of difference scheme define iteration's process parameters:

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon,(k)}\sqrt{\frac{m_k\mu_{1,(k)}\mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}; \\ \Delta t_k = 2a_{t,(k)}\sqrt{\frac{m_k}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \qquad (25)$$

where $\mu_{1,(k)}$, $\mu_{2,(k)}$ are minimal and maximal eigenvalues of finite-difference operators' matrices in equations (17); $a_{\varepsilon,(k)}$ and $a_{t,(k)}$ are correction factors close to 1 [2,8]. Taking into account physical relations (5),(6) estimation formulae for $\mu_{1,(k)}$, $\mu_{2,(k)}$ will be written as follows:

- minimal eigenvalues

$$\mu_{1,(1)} = 4\left[\frac{B_b + C_{1a}}{(A_1\lambda_1)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right. \\ \left. + \frac{B_{33}}{(A_2\lambda_2)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right];$$

$$\mu_{1,(2)} = 4\left[\frac{B_b + C_{2a}}{(A_2\lambda_2)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} + \right. \\ \left. + \frac{B_{33}}{(A_1\lambda_1)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\right]; \qquad (26)$$

$$\mu_{1,(3)} = 16\left[\frac{D_b + D_{1a}}{(A_1\lambda_1)^4}\sin^4\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right. \\ + \frac{2\nu_b D_b + 4D_{33}}{(A_1\lambda_1)^2(A_2\lambda_2)^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} + \\ \left. + \frac{D_b + D_{2a}}{(A_2\lambda_2)^4}\sin^4\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right] + \\ + k_1^2(B_b + C_{1a}) + 2k_1k_2\nu_b B_b + k_2^2(B_b + C_{2a});$$

$$\mu_{1,(4)} = 4\left[\frac{D_b + D_{1a}}{(A_1\lambda_1)^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right. \\ \left. + \frac{D_{33}}{(A_2\lambda_2)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right];$$

$$\mu_{1,(5)} = 4\left[\frac{D_b + D_{2a}}{(A_2\lambda_2)^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} + \right. \\ \left. + \frac{D_{33}}{(A_1\lambda_1)^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\right];$$

- maximal eigenvalues

$$\mu_{2,(1)} = 4\left[\frac{B_b + C_{1a}}{(A_1\lambda_1)^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{B_{33}}{(A_2\lambda_2)^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right];$$
$$\mu_{2,(2)} = 4\left[\frac{B_b + C_{2a}}{(A_2\lambda_2)^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{B_{33}}{(A_1\lambda_1)^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\right]; \qquad (27)$$
$$\mu_{2,(3)} = 16\left[\frac{D_b + D_{1a}}{(A_1\lambda_1)^4}\cos^4\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right.$$
$$+\frac{2\nu_b D_b + 4D_{33}}{(A_1\lambda_1)^2(A_2\lambda_2)^2}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} +$$
$$\left. +\frac{D_b + D_{2a}}{(A_2\lambda_2)^4}\cos^4\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right] +$$
$$+ k_1^2(B_b + C_{1a}) + 2k_1k_2\nu_b B_b + k_2^2(B_b + C_{2a});$$
$$\mu_{2,(4)} = 4\left[\frac{D_b + D_{1a}}{(A_1\lambda_1)^2}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{D_{33}}{(A_2\lambda_2)^2}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2}\right];$$
$$\mu_{2,(5)} = 4\left[\frac{D_b + D_{2a}}{(A_2\lambda_2)^2}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{D_{33}}{(A_1\lambda_1)^2}\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_1}{\Lambda_1}\right],$$

where A_i, k_i are representative values of Lame's parameters and principal curvatures.

Approximation of time derivatives in the equations (21) using finite-difference operators of the second order of accuracy $O(\Delta t^2)$ allows to develop the unified difference scheme in the shape of (23),(24) for both static and dynamic problems, which is important for the computing of building structures' strength against dynamic load when it is necessary to take into consideration the initial strain-stress state (own weight, external loads, etc.). Artificial viscosity factors ε_k may be used for taking into account energy's dissipation and can be estimated as follows:

$$\varepsilon_k = a_{\varepsilon,(k)}\frac{\delta_k}{\pi}\sqrt{\frac{m_k\mu_{1,(k)}\mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \qquad (28)$$

where δ_k is the logarithmic vibrations decrement, $a_{\varepsilon,(k)}$ are correction factors [2,6].

Finite-difference equivalents of equations of motion or static equilibrium of foundation bedplate, works consistency equations (12)-(14) and numerical computing algorithms for static and dynamic problems are constructed similar to (15)-(28), so that

$$\left[\dot{x}_f\right]^{(n+1/2)} = \frac{\left[2m_f - \varepsilon_v\Delta t\right]}{\left[2m_f + \varepsilon_v\Delta t\right]}\cdot\left[\dot{x}_f\right]^{(n-1/2)} +$$
$$+\frac{2\Delta t\cdot\left[P_f + F_s + F^* - F_c\right]^{(n)}}{2m_f + \varepsilon_v\Delta t}; \qquad (29)$$
$$\left[x_f\right]^{(n+1)} = \left[x_f\right]^{(n)} + \Delta t\cdot\left[\dot{x}_f\right]^{(n+1/2)}.$$

Influence of the integral properties of viscoelastic damping elements on to the strain-stress state of the spherical dome with various cutouts on the damped foundation bedplate under dynamic loading, modeling vertical components of seismic forces [4,7], is investigated with the following geometrical parameters of the composite structure: $R/h=100$; $r_f/R=0{,}87$; $H_s/r_f=0{,}54$; $R_f/r_f=1{,}2$; $R_f/h_f=41{,}6$; $\alpha_0=15^0$; $\alpha_f=60^0$ (Figure 1,3).

The considered spherical dome has 4 diametrically opposite equivalent cutouts with boundaries Γ_1 and Γ_2 coinciding with the coordinate curves α_1=const and α_2=const respectively and one circular cutout Γ_0 in the dome's vertex x=0. Homogeneous free-contour-type boundary conditions exist on the cutouts boundaries $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2$. The shell's contour $\Gamma_f(x=L_x)$ is rigidly connected to the foundation bedplate; $L_x=R(\alpha_f-\alpha_0)$. Cutouts have the following geometrical parameters: $r_0/R=0{,}26$; $x(\Gamma_1)=0{,}535\cdot L_x$; $\beta=36^0$.

Shell's material is a reinforced concrete B30 with the carcass of A-II-class [5]. Meridianal μ_{1x} and peripheral μ_{1y} reinforcement factors (4) in the layer $z<0$ are assumed as $\mu_{1x}=0{,}09$; $\mu_{1y}=0{,}1$, and in the layer $z>0$ these factors are

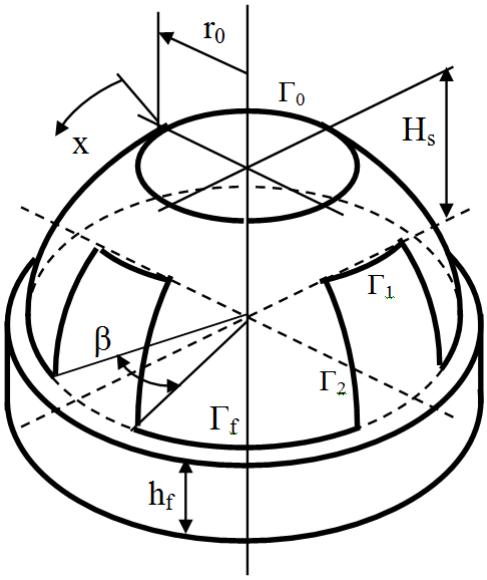


Figure 3

assumed as μ_{2x}=0,05, μ_{2y}=0,07. Foundation bedplate mass m_f and shell mass m_s ratio is m_f/m_s=2,42. The load is a combination of own weight of the composite structure and of the vertical component of seismic wave load on the foundation bedplate, which may be either rigidly fixed on the ground soil or installed on the viscoelastic damping elements system (Figure 1). Integral value c_z of the elastic component of the damping element is determined by the value of predefined setting h_z of the elastic elements under the own weight of the foundation bedplate, taken equal to h_z=0,25·h. Integral value ε_v of the viscous component is determined by the viscosity in the case of aperiodic foundation bedplate's motion as follows:

$$\varepsilon_v = 2 \cdot k_\varepsilon \sqrt{c_z m_f}, \qquad (30)$$

where $k_\varepsilon \geq 0$ is a correction factor.

Analysis of typical seismograms [4,7], taking into account their stochastic nature, has shown that in many cases instrumental seismogram can be approximated by the set of trigonometric functions on the certain time intervals Δt_k (k=1,2,3,..,k_{sw})

$$x_{sw} = \begin{cases} \pm X_k \sin \pi \dfrac{t - t_{k-1}}{\Delta t_k} & - \text{for} \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k; \\ & \qquad (31) \\ 0 & - \text{for} \quad t \geq t_{sw}, \end{cases}$$

where t_0=0, t_{sw}=max(t_k), X_k, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ are amplitude-frequency responses of approximation functions defined in accordance with the known parameters of instrumental seismogram. An approximated seismogram, used in the calculations, is constructed from two sine half-waves (k_{sw}=2) with the following parameters: X_2/X_1=-0,7 (X_1>0); $\Delta t_2/\Delta t_1$=1; t_{sw}/T_f=1,08; a_1/a_2=1,43, where $t_{sw}=\Delta t_1+\Delta t_2$, T_f is the free vibrations period of damped foundation bedplate

$$T_f = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m_f}{c_z}}, \qquad (32)$$

and a_1,a_2 are maximum values of accelerations for the first and second half-waves. Assumed values of parameters X_1=0,015 m and a_1=0,255g correspond to the seismicity level of about 7÷8 points [4,7].

Due to structure's symmetry the computing area of the considered structure can be reduced to 1/8 of the shell with the following dimensions: $0 \le x \le L_x$, $0 \le \theta \le 0{,}25\pi$; $\alpha_2 = \theta$. For the assumed number of discretization points NxM=52x61, the unknowns number is K=5355. Transient processes in the shell structure under the seismic wave's excitation x_{sw} with the parameters described by (31) have been investigated for three cases: a) foundation bedplate rigidly fixed on the ground soil, $x_f = x_{sw}$; b) foundation bedplate installed on elastic damping elements, $k_\varepsilon = 0$; $c_z \neq 0$; c) foundation bedplate installed on viscoelastic damping elements, where integral value ε_v is defined by (30) at $k_\varepsilon = 1$, so that the viscosity level is optimal for iteration process (29).

Table 1

Case	Non-damped bedplate	Damped bedplate	
	$x_f = x_{sw}$	$c_z \neq 0$; $\varepsilon_v = 0$	$c_z \neq 0$; $\varepsilon_v \neq 0$
k_g	-5,08	-1,48	-1,3
$\frac{\Delta x_f}{X_1}$	-1	-0,6	-0,382
$(\ddot{x}_f)_{max}$	0,255·g	0,122·g	0,071·g
k_σ	2,32	0,862	0,716

Deformation processes investigation results for the reinforced concrete spherical dome under seismic forces with non-damped and damped foundation bedplates are presented in the Table 1, where

$$k_g = \max\left(\frac{F_s}{P_s}\right); \quad \Delta x_f = \max(x_f - x_{f0}); \quad k_\sigma = \max\left(\frac{\sigma_b^+}{R_{bt}}\right), \qquad (33)$$

and where P_s is the dome's weight (for static problem according to (13) $F_s = P_s$, $k_g = 1$); x_{f0} is the initial displacement of the damped foundation bedplate, defined by static loading and equal to $x_{f0} = 0{,}354 \cdot h$ (or $x_{f0} = 0$ for the non-damped plate); σ_b^+ is the maximum tensile stress in concrete computed on the faces of shells $z = \pm h/2$ basing on the principal stresses values and considering the plane character of actual stress condition; R_{bt} is the ultimate (break-point) tensile strength of concrete.

Investigations results have shown that the damping elements' properties noticeably influence to the strain-stress state of reinforced concrete shells with cutouts. For the non-damped foundation bedplate the first crack appeared near the Γ_1 cutout's corner oblique at an angle $\alpha = 47{,}6^0$ to the coordinate curve α_2. Next cracks were localized at the support contour Γ_f near Γ_2 cutout's edge. Using of the damping elements system allowed to reduce maximum stress in shell significantly and to raise crack growth resistance noticeably; with the value of factor k_σ for viscoelastic damping elements being near its corresponding value for the static problem, $k_\sigma = 0{,}54$.

Similar mathematical model can be developed also for the horizontal component of the seismic wave.

ACKNOWLEDGEMENT

This work has been made with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR Project No 08-07-00160a).

REFRENCES

1. **Dmitriev V.G., Preobrazhensky I.N.** Flexible shells with cutouts deformation / Izvestia AN USSR, Mechanics of Solids, 1988, No 1, Pp. 177 - 184.
2. **Dmitriev V.G.** Variation-difference schemas in nonlinear shells mechanics / Proceedings of IV International Workshop "Technological problems of Strength". Podolsk, MGOU, 1997, Pp. 57 - 67.

3. **Dmitriev V.G., Korovin E.K., Sudyin A.A.** Numerical analysis of nonlinear deformation of reinforced concrete shells with cutouts / Engineering Physics, 2007, No 6, Pp. 10 - 13.
4. Loads and effects on buildings and structures / **Gordeev V.N., Lantuh-Lyaschenko A.I., Pashinskiy V.A., Perelmuter A.V., Pichugin S.F.** – Moscow, Association of Civil Engineering Universities, 2006. – 482 pp.
5. **Kolchunov V.I., Pyatikrestovskiy K.P., Kliueva N.V.** Spatial structures of coverings. – Moscow: ASV, 2008. - 352 pp.
6. **Dmitriev V.G., Dzerzhinskiy R.I.** Numerical analysis of nonlinear impact interaction of shells of revolution and rigid bodies / Proceedings of XI International workshop "Dynamic and Technological Problems in Structural and Continous Mechanics". Moscow – Yaropolets, 2005. Vol. 2, pp. 74 - 82.
7. **Plevkov V.S., Mal'ganov A.I., Baldin I.V.** Reinforced concrete and masonry structures of aseismic buildings. – Tomsk: Tomsk State Civil Engineering Univ., 2006. – 290 pp.
8. **Bachvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.** Numerical Methods. – Moscow, Fizmatlit, Laboratory of Basic Knowledges, 2001. - 632 pp.
9. **Frieze P.A., Hobbs R.E., Dowling P.J.** Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analisys of plates. - Computers & Structures, 1978, v. 8, № 2, pp. 301-310.
10. **Turvey G.J., Der Avanessian N.G.V.** Elastic large deflection of circular plates using graded finite-differences. - Computers & Structures, 1986, v. 23, № 6, pp. 763-774.

Vladimir G. Dmitriev, Professor, Head of Department of Machinery of Moscow State Opened University. 107996, Russia, Moscow, Pavel Korchagin str., 22.

Anatoly A. Sudyin, Postgraduate Student, Department of Machinery of Moscow State Opened University. 107996, Russia, Moscow, Pavel Korchagin str., 22.

ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

Anna V. Ermakova
South Ural State University, Chelaybinsk, RUSSIA

ABSTRACT: The paper includes the main states of the report of the same name delivered by the author at the conference of scientific council of Russian Academy of Architecture and Civil Engineering "Software for Architecture and Civil Engineering". 26 November 2008. The main problems connecting with a computer realization of design of reinforced concrete structures for accounting of their nonlinear properties were explained in the report. The ways of solving of some problems by means of Additional Finite Element Method were suggested in the report too.

1. GENERAL PROBLEMS OF NONLINEAR ANALYSIS BY MEANS OF FINITE ELEMENT METHOD

The problem of obtaining of the yielding matrices of finite elements is solved for bar systems if the method of redundant reactions is used.
The problem solving for the other systems has met some serious difficulties, therefore the development of Finite Element Method in this direction was reduced.

PROBLEM: *obtaining of the yielding matrices of finite elements for non-bar systems.*
At present Finite Element Method is realyzed by the second variant, i.e. by the variant of deflection method. In this case the solving of any problem is reduced to the sequential fulfilment of six computer operations:

1. Composition of design diagram;
2. Calculation of stiffness matrices of separate finite elements;
3. Formation of general stiffness matrix of the system;
4. Solution of algebraic system of linear equations;
5. Calculation of strains, stresses and node reactions;
6. Analysis of stress-strain of the structure.

The problem may be considered solved after fulfilment of these operations in linear design of one loading. However it should be noted that linear design in most cases does not give sufficiently certain information of the structural behaviour. The presence of physical and geometric nonlinearity of structural behaviour under load prevents it.

PROBLEM: *allowance of the physical nonlinear properties in design of reinforced concrete structures under static load.*
The main nonlinear properties are: plasticity of concrete, bond between concrete and reinforcement, cracking, prestressing, reload, action of temperature. Algorithms describing the real behaviour of material are required for realization of this design [2,3].
The SN and P's require to carry out the design of concrete and reinforced concrete structures at limit states taking account of their nonlinearity. This design is based on use of the method of limit equilibrium [4].
In particular s.6.1.3. [5] contains the partition: "The definition of ultimate stresses and strains of concrete and reinforced concrete structures one must carry out on the base of design diagrams (models) most close to the real physical character of behaviour of structures and materials at ultimate limit state."
The realization of design according to these requirements is possible if all physical nonlinear properties exhibiting by the structure at the moment when the ultimate limit state is reached, i.e. with regard to the degree of influence and the moment of appearance of each separate nonlinear property.

Thus the requirements of the SN and P's do not agree with the algorithms of the used programs where a taking account of the different nonlinear properties of the structures are developed insufficiently.

PROBLEM: *computer realization of the design of structures at limit state*.
Besides in this case it is necessary to fulfil a step-by-step loading of the structure for obtaining of the real phase portrait of its real stress-strain state. In addition it is necessary to guarantee a taking account of nonlinear properties which appear at this step only.

PROBLEM: *computer realization of step-by-step design of reinforced concrete structures*.

2. PROBLEMS OF THE CALCULATING OPERATIONS OF FINITE ELEMENT METHOD

Now we may pass to an analysis of the problems, which appear progressively in computer realization of stractural design by finite element method at each of six calculating operation:
1.Composition of a design diagram of the structure, i.e. a representation of the structure in the form of assembly of separate finite elements (FEs). This operation includes the assignment of size, shape of finite elements and the way of their joint. Usually the finite elements are jointed in the definite points – nodes.
There is rather often the difficulty connecting with the fact that far off always the increase of number of finite elements in design diagram leads to the increase of precision of design at this stage. It is necessary to remain the size of finite elements which correspond to the theoretical premises of it's elaboration. Especially it is relating to the thin plates.

PROBLEM: *necessity of estimation of design diagrams from the point view of optimal combination of the degree of detailing with the precision of linear and nonlinear structural design.*
2. Calculation of a stiffness matrix of the separate finite element. This matrix determines the connection between node forces (stresses) and corresponding node displacements:

$$R = K_e V, \qquad (1)$$

where R = vector of node reactions of the finite element; V = vector of node displacements of the finite element; K_e = stiffness matrix of the given finite element.
In solving of linear problems the finite elements of linear isotropic material are used as far as precisely these elements were used for elaboration of their properties. For example, the theory of behaviour of thin plates was used for the thin finite elements. The number of finite elements ought to be optimal as well as their size. It is closely connecting with the in previous section.

PROBLEM: *necessity of estimation of finite elemenst in design diagrams from the point of view of their optimal number and size in solving of linear and nonlinear structural design.*
In the solving of nonlinear problems the main difficulty is contained in the necessity of inclusion of accounting of the different phisycal nonlinear properties of the finite elements, where these properties are differed from each other both in the character and in the moment of appearance. This main difficulty requires the solving of some accompaning problems which in structural design may be divided into four groups.

PROBLEMS *of solving of nonlinear design connected with analysis of finite elements behaviour:*

1) *necessity of taking account of behaviour of the specific constructive material of finite elements, for example, for reinforced concrete structures they are concrete and reinforcement;*

2) *gradual appearance of different nonlinear properties as the ultimate limit state is reaching;*
3) *passage from one type of stress-strain state to another one, for example, at cracking or appearance of residual strains after unloading;*
4) *enabling of a mechanism of gradual destruction of the finite element.*

3. Formation of a decision system of linear algebraic equations from the equations of equilibrium at each node of the considered structure with node displacements as the unknowns:

$$K\,V = P, \tag{2}$$

where V = matrix–column of unknown node displacements; P = matrix–column of external load; K = stiffness matrix of the considered structure. This matrix is formed from coefficients of stiffness matrices of the separate finite elements and is constant during solving of linear problem (K=*const*).

In case the nonlinear problem is considered the equation (2) has the next form:

$$K_{nonl}\,V = P, \tag{3}$$

where K_{nonl} = stiffness matrix of the structure with linear properties. During design this matrix ought to be changed step-by-step depending on the nonlinear properties, which are exhibited by the finite elements *($K_{nonl} \neq const$)*.

It is reached by gradual loading of the structure and by inclusion of iteration at each step.

The iteration may be constructed by one of two ways:

1) change of matrix K_{nonl} and solving of system of equations (3) at each iteration;
2) use of method of additional loads (method of elastic weights) [6].

If the second way is used the stiffness matrix of the structure is considered as the sum of two components:

$$K_{nonl} = K + \Delta K_{nonl}, \tag{4}$$

where K = stiffness matrix of the structure with linear properties; ΔK_{nonl} = nonlinear component, providing the change of matrix K up to the value K_{nonl} .

If the structure exhibits some nonlinear properties, this nonlinear component has the next form:

$$\Delta K_{nonl} = \Delta K_{nonl,1} + \Delta K_{nonl,2} + \ldots + \Delta K_{nonl,i} + \Delta K_{nonl,n}, \tag{5}$$

where $\Delta K_{nonl,i}$ = the part of nonlinear component of the matrix ΔK_{nonl} , determining it's change due to manifestation of i -th *($i=1\div n$)* nonlinear property.

If we substitute (2) for (4) and carry of the second term in the right hand part of equation we may obtain the main decision equation in the form:

$$K\,V = P - \Delta K_{nonl}\,V, \tag{6}$$

where *($-\Delta K_{nonl}\,V$)* = the additional load taking account of the nonlinear properties of the structure.

The equation (6) may be solved by a number of linear iterations.

PROBLEM: *necessity of providing of gradual change of stiffness matrix of the structure due to manifestation of nonlinear properties at each iteration of each step of loading*.

4. Calculation of node displacements by means of solution of the system of linear algebraic equations:

$$V = K^{-1}\,P\,, \tag{7}$$

where K^{-1} = inverse stiffness matrix of the considered structure.

Most commonly Gauss elimination of unknowns is used for solution of the system of linear algebraic equations. This means that the step-by-step elimination of unknowns in the system of equations first is carried out beginning with the second equation up to the last one (direct execution), and then the of step-

by-step calculation of unknowns is carried out beginning with the last equation up to the first one (reverse execution).
The operations of derect and reverse executions are fulfilled completely at each iteration of each step of loading if the nonlinear properties are taking into account by change of stiffness matrix of the structure.
The process of iteration may be constructed more rationally if the nonlinear properties are taken into account by method of additional loads due to reduction for the most part of operations of direct execution at all iterations except the first one.
However both of these cases in design of reinforced concrete structures ought to provide the conditions of realization of design by method of limit equilibrium recommended by SN and P's.

PROBLEM: *necessity of construction and development of iteration process in two directions (for the whole structure and for the separate finite element) on the basis of possibilities of FEM in the solving of n-nonlinear analysis:*

1) *guarantee of gradual change of stiffness matrix of the structure K_{nonl} in order that it gradually transfers into stiffness matrix of the structure at limit state K_{lim};*
2) *gradual taking account of each nonlinear property exhibited by finite elements up to their collapse for the moving off behaviour of the whole structure one-by-one in the step-by-step design by method of limit equilibrium.*

5. Calculation of strains, stresses and node reactions on the basis of determined displacements.
In the linear analysis stresses σ , strains ε , node reactions R of the finite element are calculated rather simple by means of determined node displacements V after solving of the system of equations (7).
The culculation of these values is difficult in the nonlinear analysis. In this case the influence of nonlinear properties may be taken into account by two ways (Fig.1): the first way is based on the use of the method of additional stresses; the second one uses the method of additional strains [7,8].
If we use the method of additional stresses the next formula for definition of stress in the finite element with nonlinear properties σ_{nonl} is the main one:

$$\sigma_{nonl} = \sigma + \Delta \sigma_{nonl}, \tag{8}$$

where σ = the stresses of the same finite element with linear properties; $\Delta \sigma_{nonl}$ = the value of stresses taking into account the variation of linear stresses due to appearance of nonlinear properties.
If it is necessary to take into account the influence of n nonlinear properties this value $\Delta \sigma_{nonl}$ is the sum of n terms:

$$\Delta \sigma_{nonl} = \Delta \sigma_{nonl,1} + \Delta \sigma_{nonl,2} + \ldots + \Delta \sigma_{nonl,i} + \Delta \sigma_{nonl,n}, \tag{9}$$

where $\Delta \sigma_{nonl,i}$ = the variation of stresses due to appearance of the i-th nonlinear property $(i=1 \div n)$.
In the second variant if the method of additional strains is used the formula for definition of the strains of finite element with nonlinear properties is the main one:

$$\varepsilon_{nonl} = \varepsilon + \Delta \varepsilon_{nonl}, \tag{10}$$

where ε = the strains of the same finite element with linear properties; $\Delta \varepsilon_{nonl}$ = the value of strains taking into account the variation of linear strains due to appearance of nonlinear properties.
If it is necessary to take into account the influence of n nonlinear properties this value $\Delta \varepsilon_{nonl}$ is the sum of n terms:

$$\Delta \varepsilon_{nonl} = \Delta \varepsilon_{nonl,1} + \Delta \varepsilon_{nonl,2} + \ldots + \Delta \varepsilon_{nonl,i} + \Delta \varepsilon_{nonl,n}, \tag{11}$$

where $\Delta \varepsilon_{nonl,i}$ = the variation of stresses due to appearance of the i-th nonlinear property $(i=1 \div n)$.

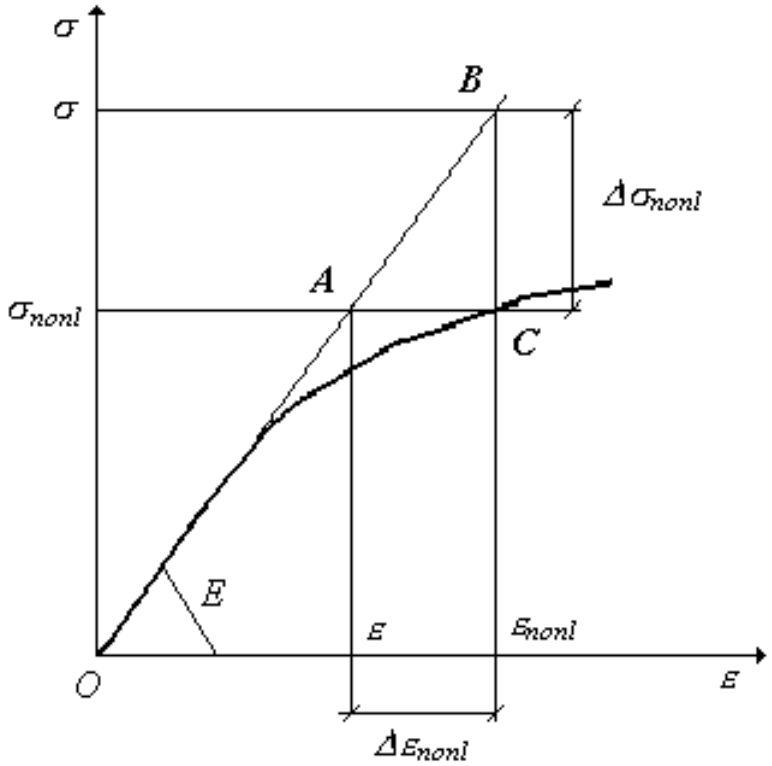


Figure 1. Diagram of allowance for nonlinear properties by means of the vector of additional load F: 1 – nonlinear relationship between strains ε_{nonl} and stresses σ_{nonl} (line OA); 2 – linear relationship between strains ε and stresses σ (line OBC); E = initial modulus of elasticity of material; ε_{nonl}, σ_{nonl} = nonlinear strains and stresses under external load P; σ = elastic stresses corresponding to nonlinear stresses ε_{nonl}, i.e. simultaneous applied external load P and additional load F; $\Delta\sigma_{nonl}$ = value of change of elastic stresses σ up to σ_{nonl}; ε = elastic strains corresponding to nonlinear σ_{nonl}; $\Delta\varepsilon_{nonl}$ = value of change of elastic strains ε up to nonlinear strains ε_{nonl}.

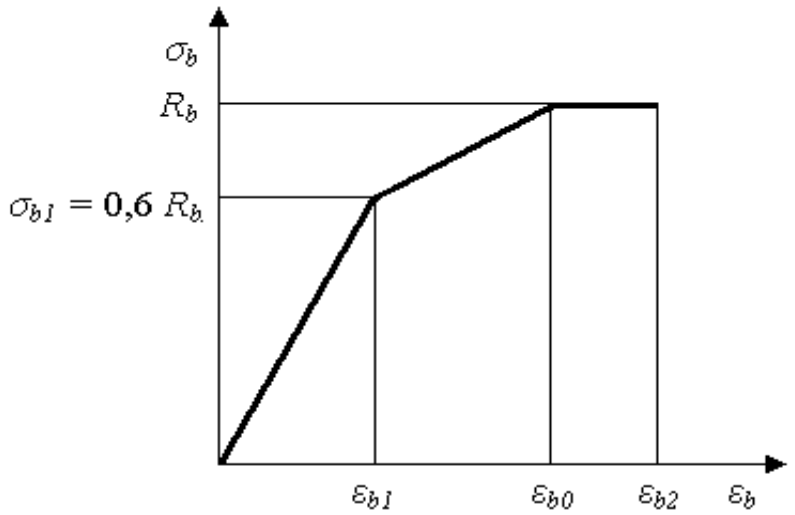


Figure 2. Three-lined diagram of σ_b–ε_b state of compressed concrete [9].

Thus for each of these *n* nonlinear properties it's own algorithm which realizes the degree of it's influence on the behaviour of the structure is necessary.
Specifically in design of reinforced concrete structures SN and P's [9] suggest to input a three-lined diagram relationship between stresses (σ_b) and strains (ε_b) of concrete (Fig.2). Introduction of this diagram requires a definite effort.
In the second variant if the method of additional strains is used the formula for definition of the strains of finite element with nonlinear properties is the main one:

$$\varepsilon_{nonl} = \varepsilon + \Delta \varepsilon_{nonl}, \qquad (10)$$

where ε = the strains of the same finite element with linear properties; $\Delta \varepsilon_{nonl}$ = the value of strains taking into account the variation of linear strains due to appearance of nonlinear properties.
If it is necessary to take into account the influence of *n* nonlinear properties this value $\Delta \varepsilon_{nonl}$ is the sum of *n* terms:

$$\Delta \varepsilon_{nonl} = \Delta \varepsilon_{nonl,1} + \Delta \varepsilon_{nonl,2} + \ldots + \Delta \varepsilon_{nonl,i} + \Delta \varepsilon_{nonl,n}, \qquad (11)$$

where $\Delta \varepsilon_{nonl,i}$ = the variation of stresses due to appearance of the *i*-th nonlinear property $(i=1 \div n)$.
Thus for each of these *n* nonlinear properties it's own algorithm which realizes the degree of it's influence on the behaviour of the structure is necessary.
Specifically in design of reinforced concrete structures SN and P's [9] suggest
to input a three-lined diagram relationship between stresses (σ_b) and strains (ε_b) of concrete (Fig.2). Introduction of this diagram requires a definite effort.
Besides a singular difficulty appears if it is necessary to analyse the reinforced concrete structures under reloading and unloading.
For example, the three stages of behaviour are considered in a single reloading: initial loading, unloading, reloading (Fig.3). At each of these stages the special relationship between stresses (σ_b) and strains (ε_b) in concrete [2] ought to be input. It means that it is necessary to do a passage from one diagram of σ_b–ε_b state to another one and to take into account of an appearance of nonrecoverable plastic deformation of concrete in unloading (residual strain $\varepsilon_{pl,2}$).

PROBLEM: *necessity of development of algorithms taking into account the peculiarities of influence of each nonlinear property on behaviour of the structure*

6. Analysis of stress-strain of the structure.
This stage is assigned to estimation of the obtained results, analysis of the achieved degree of stress-strain state of the structure, comparison of this state with limit state which is determined by SN and P's. At limit state the structure exhibits all inherent in the given conditions physical nonlinear properties. At the same time at the achieved state the degree of manifestation of each nonlinear property may reach some intermediate stage, but not the limit state. Therefore the parameters charactarizing this intermediate stage are necessary.
In description of this stage it is necessary to take into account of the fact that the limit state of the structure may be reached when limit state is reached in one finite element or in several ones. It is necessary to determine these critical for the given construction finite elements.

PROBLEM: *comparison of the reached stress-strain state with the limit state determined by SN and P's.*

3. THE MAIN PROBLEMS OF ANALYSIS BY FINITE ELEMENT METHOD

The three main problems may be distinguished after analysis of enumerated above difficulties without solving of which the computer realization of this analysis is impossible:

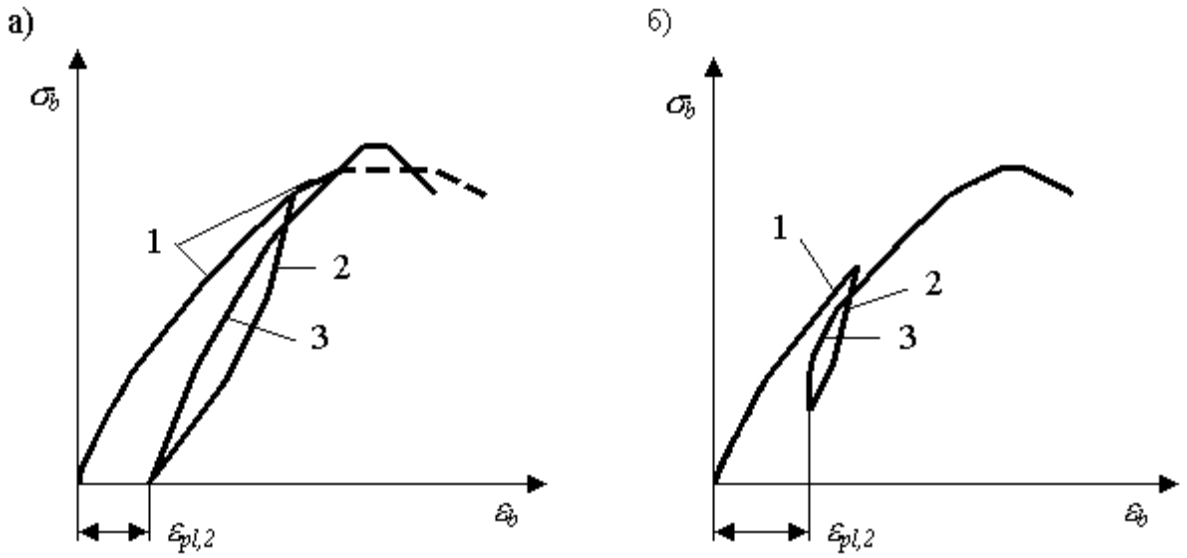


Figure 3. Diagrams of relationship between stresses and deformations of concrete under uniaxial compression in single reloading: a) full unloading; b) partial unloading; 1– loading; 2 – unloading; 3 – reloading; σ_b = stresses of concrete; E_b = initial module of elasticity of concrete in loading; ε_b = deformation of concrete; $\varepsilon_{pl,2}$ = nonrecoverable plastic deformation of concrete in unloading or residual deformation.

1) determination of the way of description of gradually changed properties of each finite element of the design diagram;
2) determination of the character of gradual change of structural behaviour in accordance with the achieved degree of its limit state at this moment;
3) choice of the way of construction of iteration in solving of the main system of algebraic equations thus it shall provide a gradual elimination of separate finite element out off behaviour of the structure and gradual change of it's properties.
These three interconnected problems define a run of the problem solving and it's computer realization.

4. SOLVING OF SOME PROBLEMS BY ADDITIONAL FINITE ELEMENT METHOD

Now we may pass to the developed Additional Finite Element Method (AFEM), which is a variant of the Finite Element Method destined for analysis of reinforced concrete structures at limit state [10,11,12].
AFEM adds to the traditional sequence of problem solving by FEM the units of two wellknown methods for structural design: limit state method and method of additional loads.
AFEM suggests to use in solving of the first problem and the second one of the stated above problems such known concepts as limit state of the structure and limit state of the finite element. Each finite element from the design diagram is considered as a separate small structure of simple form with it's own limit state defined by the given conditions of loading. Each finite element may have several such limit states.
For example the triangular deep-beam finite element has two types of limit states (in compression and in tension). The concrete finite element "Bar of general attitude" has 12 limit states. If this finite element is reinforced it has 23 limit states. Moreover the behaviour of finite element at each limit state has it's own singularities. This fact requires the special research of each type of finite element and the determination of number, type and way of description of each it's characteristic limit state.

For transformation of the initial finite element with linear properties into the finite element with nonlinear properties depending on the reached stage of their limit state it is offer to use additional finite element (AFE). Each additional finite element is a geometric replica of the main finite element with it's own stiffness, which transforms the stiffness of the main finite element into a necessary one at the given stage.

It's scheme of action on the intermediate stages is:

Finite element with nonlinear properties = Finite element with linear properties + Additional finite element for allowance of the nonlinear properties.

The scheme of action at limit state is:

Finite element at limit state = Finite element with linear properties + Additional finite element for the allowance of the limit state. The main characteristic of the additional finite element is it's stiffness matrix $\Delta K_{nonl,e}$, which is determined by the next formula:

$$\Delta K_{nonl,e} = K_{nonl,e} - K_e, \qquad (12)$$

where $K_{nonl,e}$ = stiffness matrix of the main finite element with nonlinear properties; K_e = stiffness matrix of the same finite elment with linear properties. For example, if at the given stage of design $K_{nonl,e} = 0{,}5K_e$, then $K_{nonl,e} = 0{,}5K_e - K_e = -0{,}5K_e$.

Stiffness matrix connects node reactions of additional finite element (ΔR_{nonl}) with node displacements V:

$$\Delta R_{nonl} = \Delta K_{nonl,e}\, V, \qquad (13)$$

At each stage design diagram of the structure consists of two design diagrams: the initial design diagram from the main finite elements with linear properties and the additional design diagram.

The additional design diagram is a geometric copy of the initial design diagram with it's own stiffness, which changes the stiffness of the main design diagram in accordance with the nonlinear properties exhibited at this moment.

It's scheme of action on the intermediate stages is:

Design diagram consisting of the finite elements with nonlinear properties = Design diagram consiting of the finite elements with linear properties + Additional design diagram consisting of the additional finite elements for allowance of the nonlinear properties.

The scheme of action at limit state is:

Design diagram of the structure at limit state (ideal failure model) = Design diagram consisting of the finite elements with linear properties + Additional design diagram for allowance of limit state of structure.

The main characteristic of the additional design diagram is it's stiffness matrix ΔK_{nonl}, which is determined by the next formula:

$$\Delta K_{nonl} = K_{nonl} - K, \qquad (14)$$

where K_{nonl} = stiffness matrix of the structure with nonlinear properties; K = stiffness matrix of the structure with linear properties.

The additional design diagram consists of additional finite elements and gradually transforms the initial design diagram into the design diagram which corresponds to the reached stage of limit state of the structure. Where the main finite elements go through several stages before the achievement of ultimate limit state the additional design diagram ought to consist of several design diagrams, each of which combines the additional finite elements corresponding to each stage.

For example, the triangular concrete finite element goes through two stages in compression: plastic behaviour and complete failure. In tension the same finite element goes through four stages: plastic behaviour; reload in part due to cracking; partial plastic behaviour after cracking; collapse.

It means that the resulting additional design diagram ought to be formed from the corresponding component design diagrams,

each of which combines additional finite elements taking into account the definite stage of behaviour of the main finite elements. For description of the structure at ultimate limit state the concept of ideal failure model, which is the design diagram of the structure at ultimate limit state, is used.

The ideal failure model is necessary for simulation of the ultimate limit state of the structure. The ideal failure model differs from the initial design diagram by presence of finite elements in limit state and by another changes simulating the ultimate limit state of the considered structure.

The example of gradual transformation of the initial design diagram of concrete bending cantilever into the ideal failure model (design diagram at ultimate limit state) by means of additional design diagrams consisting of additional finite elements is given in Fig.4.

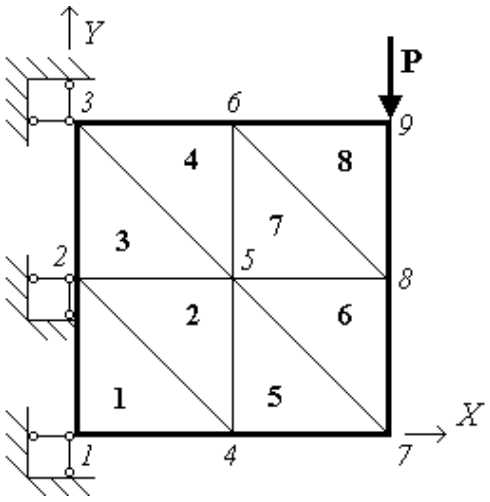
Introduction of additional finite elements makes possible not only to combine FEM and design the structure at limit state but also to solve the third problem connecting with the choice of way of solving of the main system of linear equations of FEM.

In this case the iterative process may be constructed for the guarantee of gradual elimination of each finite element out of behaviour of the structure and in view of that the change of properties of the structure. If it is necessary a step-by-step design of the structure may be realized for a gradual definition of the finite elements which ought to be eliminated out of behaviour of the structure at the given step. Besides, the critical for the given structure finite elements, when their elimination defines the ultimate limit state of the structure, may be determined. Realization of the iterative process by use of both by change of stiffness matrix of the structure K_{nonl} and by use of elastic weights method. In the second case the additional load of the whole structure is formed on the basis of additional design diagram, which consists of the values of additional load of each finite element composed it. Each of these values is equal to the modulus of node reactions with the opposite sign ($-\Delta R_{nonl}$), which appears in the corresponding additional finite element.

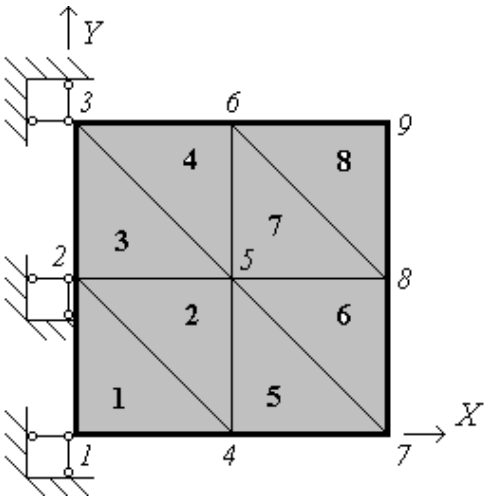
Thus the developed Additional Finite Element Method (AFEM) permits to solve a number of problems connecting with nonlinear design of reinforced concrete structures. The method has a generalized character independent of the type and nature of the exhibited nonlinear physical property. Simultaneously the method is sufficiently flexible and in all it's universality it reflects the essential singularities of each property. The method reflects a change of stress-strain state of the structure and gives the possibility to realize a step-by-step design of reinforced concrete structures and to determine it's ultimate limit state.

REFERENCES

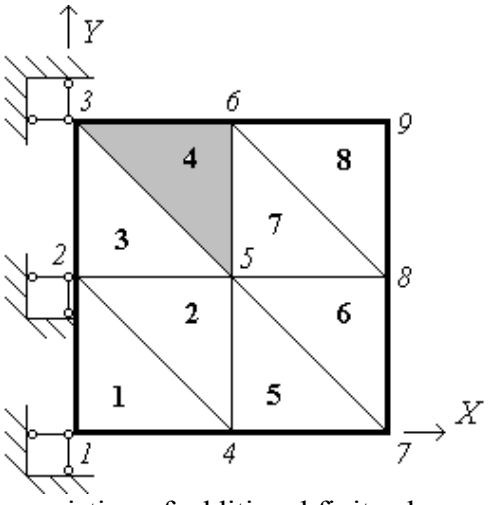
1. **Постнов В.А.** Численные методы расчета судовых конструкций. – Л., Судостроение, 1977 – 280 с.
2. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики железобетона. М., Стройиздат, 1996– 416 с.
3. **Шугаев В.В.** Инженерные методы в нелинейной теории предельного равновесия оболочек. – М.: Готика, 2001 – 368 с.
4. **Гвоздев А.А.** Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1, Сущность метода и его обоснование. М: Госстройиздат, 1949 – 280 с.
5. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. – М., ФГУП ЦПП, 2004 – 26 с.
6. **Ильюшин А.А.** Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948 – 376 с.
7. **Зенкевич О.К.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир,1975–541с.
8. Расчет и проектирование элементов железобетонных конструкций на основе применения ЭВМ. /**Оатул А.А., Карякин А.А., Кутин Ю.Ф.** Конспект лекций, Ч.4. Под ред. Оатула А.А. – Челябинск: ЧПИ, 1980 – 67 с.



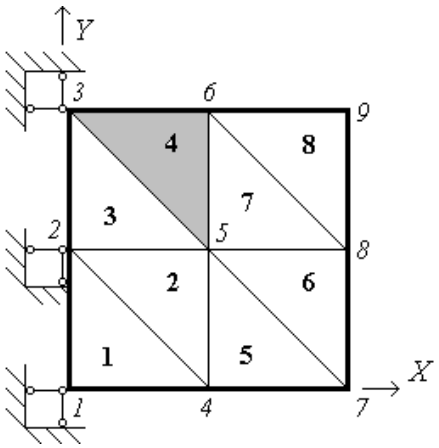
a) initial design diagram consisting of triangular deep- beam finite elements with linear properties;



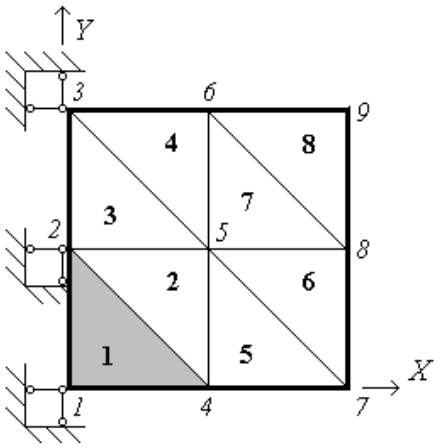
b) additional design diagram consisting of additional finite elements, which take into account of plastic properties of concrete (stiffness matrix of all eight additional finite elements is not equal to 0);



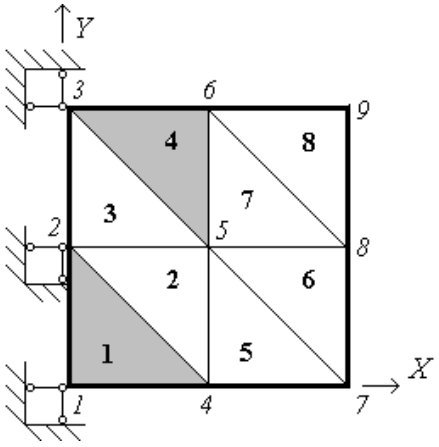
c) additional design diagram consisting of additional finite elements, which take into account of appear of residual deformations in finite element № 4 after it's partial unload due to cracking (stiffness matrix of additional finite element № 4 only is not equal to 0).



d) additional design diagram consisting of additional finite elements, which take into account of crack in finite element № 4 (stiffness matrix of finite element № 4 only is not equal to 0);



e) additional design diagram consisting of additional finite elements, which take into account collapse of finite element № 1 if the criterion of ultimate strength in compression is reached (stiffness matrix of only additional finite element № 1 is not equal to 0);



f) ideal failure model of cantilever (design diagram at ultimate limit state) after appearance of crack in finite element № 4 and finite element № 1 reachs the criterion of ultimate strength in compression.

Figure 4. Transformation of initial design diagram of concrete bending cantilever into ideal failure model (design diagram at ultimate limit state) by means of additional finite elements (AFE).

9. СП 52-102-2004. Предварительно напряженные железобетонные конструкции. – ФГУП ЦПП, 2005 – 36 с.
10. **Ермакова А.В.** Теоретические основы метода дополнительных конечных элементов для расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям. Сб. статей. Вып. 10. МОО «Пространственные конструкции»; под ред. Шугаева В.В. – М.: 2006, с. 30-41.
11. **Ермакова А.В.** Метод дополнительных конечных элементов для расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям. М., АСВ, 2007 – 128 с.
12. **Ermakova A.** Limit State Analysis of Reinforced Concrete Structures by Additional Finite Element Method. / Role for Concrete in Global Development. Proceedings of the International Conference held at the University of Dundee, Scotland, UK on 8–9 July 2008. BrePress, Dundee, Scotland, UK, P. 763-774.

Anna V. Ermakova, Cand. Tech. Sc., Assistant Professor, South Ural State University, Chelaybinsk; 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080;
E-mail: eavi@susu.ac.ru

STABILITY ANALYSIS OF SPACE TRUSSES

Vera V. Galishnikova
Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Volgograd, RUSSIA

ABSTRACT: A space truss is unstable if the determinant of its incremental stiffness matrix is null. A numerical method is presented that predicts unstable configurations (singular states) by computing the nonlinear load-displacement behavior of the truss prior to instability, detecting nearly singular configurations and then computing the singular state. The method is robust since the parameters which control the computation can be chosen over a wide range without impairing the convergence of the algorithm. The stability analysis of space trusses in this paper is derived by specialization of the nonlinear theory of elastic bodies. The initial value formulation of the governing equations is derived analytically and transformed to the algebraic form by the finite element method. The equations are solved by the constant arc increment method outside the singularity range and by a new method of limit analysis near a singular point.

Key words: space truss; geometrical nonlinearity; stability analysis; singular points; finite element method

INTRODUCTION

Loss of stability is an inherent problem of the nonlinear behavior of structures. A space truss is unstable if it can displace incrementally without a change in its loading and supports. The load path which follows after an unstable configuration can be unique (snap-through), or there can be several possible load paths (bifurcation). Singularity of the tangential stiffness matrix is a necessary condition for the instability of an instant configuration of a structure. This condition is, however, not sufficient for instability. The structure is only unstable if, in addition, the load decreases due to a finite incremental displacement in the direction of the eigenvector which is associated with the eigenvalue null at the singular point.

The detection of configurations, in which the tangent stiffness matrix of a structure is singular, is not difficult in principle: the determinant of the tangent stiffness matrix of an unstable structure is null. In practice, significant difficulties arise. Since the determinant of a matrix is equal to the product of its eigenvalues, its value for large matrices can lie outside the range of data type double in computers. The determinant therefore cannot be used directly as a criterion for instability. Near singular points of the tangential stiffness matrix, the product of the eigenvalues contains at least one value which nearly equals null. The determinant is nearly null, and the governing incremental equations become ill-conditioned. As a result, the methods for the solution of the nonlinear equations become unreliable near singular points.

Therefore, in order to be able to treat the problem of structural stability reliably, three main problems must be solved: identification of nearly singular configurations, direct computation of singular points and singular configurations, and continuation of load paths beyond singular points.

Exact methods for the determination of the configurations of a structure in which its tangent stiffness matrix is singular are treated in the works of Belytschko [1], Wriggers [2]. The continuation of load paths is treated systematically by Wagner [3]. He presents several methods of deflation which permit reliable solution of the nearly singular governing equations near singular points if the eigenstate with the smallest eigenvalue is known. However, according to Belytschko [1] robust automatic procedures for continuation are not yet available.

This paper presents methods for computing the nonlinear load-displacement behavior of a truss prior to instability, for detecting nearly unstable configurations of a truss, and for determining the loading, displacements and reactions of the unstable configuration of a truss. Methods for continuation of load paths are beyond the scope of this paper.

1. GOVERNING EQUATIONS

The behaviour of space trusses is described with analytical governing equations which are a specialisation of the nonlinear theory of elasticity [4].
It is shown in [5] that the analytical incremental governing equations for a load step of a space truss are given by:

$$\sum_e \int_{C_e} \delta(\varepsilon+\Delta\varepsilon)(s+\Delta s)\,dv \; - \sum_e \int_{C_e} \delta\varepsilon\, s\, dv \; = \\ \delta e + \delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T \Delta\mathbf{q}_s \; + \delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T \Delta\mathbf{r}_s \qquad (1)$$

where $\varepsilon = v_{1,1} + (v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2)/2$ is an axial strain in the Green strain tensor for the current displacement state, s is the axial stress in the 2.Piola-Kirchhof tensor; $\mathbf{d}_s, \mathbf{q}_s$, and $\mathbf{r}_s$ are system displacement, load and reaction vectors. The error term in equation (1) is

$$\delta e = -\sum_e \int_{C_e} \delta(\Delta\varepsilon^0)\, s\, dv + \\ \delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T \mathbf{q}_s + \delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T \mathbf{r}_s \qquad (2)$$

Equations (1) and (2) are approximated with iterated values of the strain increment and its variation:

$$\Delta\varepsilon = (1 + v_{1,1} + \Delta\overline{v}_{1,1}/2)\Delta v_{1,1} + \\ (v_{2,1} + \Delta\overline{v}_{2,1}/2)\Delta v_{2,1} + (v_{3,1} + \Delta\overline{v}_{3,1}/2)\Delta v_{3,1}$$

$$\delta(\Delta\varepsilon) = (1 + v_{1,1} + \Delta\overline{v}_{1,1})\,\delta(\Delta v_{1,1}) + \\ (v_{2,1} + \Delta\overline{v}_{2,1})\,\delta(\Delta v_{2,1}) + (v_{3,1} + \Delta\overline{v}_{3,1})\,\delta(\Delta v_{3,1})$$

where $v_{m,1}$ are the derivatives of the displacement coordinates in the state $C^{(s)}$ with respect to y_1, $\Delta v_{m,1}$ are the derivatives of the displacement increments from the state $C^{(s)}$ to the state $C^{(s+1)}$; $\Delta\overline{v}_{m,1}$ are approximate derivatives of the displacement increments.
Thus, equations (1) are linear in the unknown displacement increments Δv_1 to Δv_3. These equations are approximate because the derivatives $\Delta\overline{v}_{1,1}$ to $\Delta\overline{v}_{3,1}$ are approximated with values from the previous cycle of iteration in the load step.
Equations (1) are transformed into algebraic governing equations by linear interpolation of the displacement on the axis of the bar:

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\,\mathbf{v}_e, \qquad (3)$$

where $\mathbf{v}$ is the displacement vector from reference to instant configuration, $\mathbf{S}$ is the interpolation matrix for the displacement coordinates in instant configuration, $\mathbf{v}_e$ is the element nodal displacement vector from reference to instant configuration.
The derivatives of the displacement coordinates are obtained from (3):

$$v_{m,1} = \mathbf{g}_m^T \mathbf{v}_e, \qquad (4)$$

where $\mathbf{g}_m$ are derivative vectors. Substitution of the derivatives of the displacement increments (4) into (1) and (2) leads to the following algebraic incremental equations:

$$\delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T \mathbf{K}_s\, \Delta\mathbf{d}_s = \delta(\Delta\mathbf{d}_s)^T (\mathbf{e}_s + \Delta\mathbf{q}_s + \Delta\mathbf{r}_s), \qquad (5)$$

where $\mathbf{K}_s$ is a system stiffness matrix, $\mathbf{e}_s$ is a system error vector, $\Delta\mathbf{d}_s, \Delta\mathbf{q}_s, \Delta\mathbf{r}_s$ are system displacement, load and reaction increment vectors respectively.
The system stiffness matrix is assembled from the element contributions:

$$\mathbf{K}_s = \sum_e \mathbf{T}_e^T\, \mathbf{R}_{esy}\, \mathbf{K}_e\, \mathbf{R}_{esy}^T\, \mathbf{T}_e \qquad (6)$$

Unit values of the displacement variables at the nodes of the truss are chosen as variations of the system displacement vector in (5). The resulting system of algebraic governing equations for the increments of the displacements and the reactions of a space truss in a load step is:

$$\mathbf{K}_s \triangle\mathbf{d}_s = \mathbf{e}_s + \triangle\mathbf{q}_s + \triangle\mathbf{r}_s \qquad (7)$$

The system error vector is given by

$$\mathbf{e}_s = \sum_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{R}_{esy} \mathbf{e}_e + \mathbf{q}_s + \mathbf{r}_s \qquad (8)$$

The element error vectors are computed as follows:

$$\mathbf{e}_e = -AE\varepsilon((1+\nu_{1,1})\mathbf{g}_1 + \nu_{2,1}\mathbf{g}_2 + \nu_{3,1}\mathbf{g}_3) \qquad (9)$$

2. STEP-WISE SOLUTION PROCEDURE

The load path of a truss in Fig.1 is the relationship between the norm a of the system displacement vector and the norm p of the system force vector.

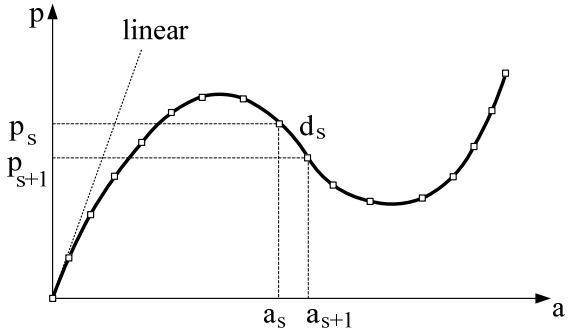


Figure 1. Normalised displacement- force diagram of a space truss (load path)

Since the physical dimensions of the displacements and forces differ, the displacement norm is scaled with a factor μ.

$$\begin{aligned} a &= \mu\sqrt{\mathbf{d}_s^T\mathbf{d}_s} \\ b &= \sqrt{\mathbf{p}_s^T\mathbf{p}_s} \quad \text{with} \quad \mathbf{p}_s = \mathbf{q}_s + \mathbf{r}_s \end{aligned} \qquad (10)$$

The calibration factor μ is chosen so that the slope of the curve for the first step of the analysis has a specified value m:

$$\mu = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\mathbf{p}_t^T\mathbf{p}_t}{\mathbf{d}_t^T\mathbf{d}_t}} \qquad (11)$$

where $\mathbf{d}_t, \mathbf{p}_t$ are displacement and force vectors computed by linear analysis for the pattern load. The system equations are ordered so that the displacement vector contains first the free and then the prescribed values. This leads to the following block structure:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \triangle\mathbf{d}_1 \\ \triangle\mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \triangle\mathbf{q}_1 \\ \triangle\mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \triangle\mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

where $\triangle\mathbf{d}_1$ is free displacement increment, and $\triangle\mathbf{d}_2$ is prescribed displacement increment.

Let the load pattern $\mathbf{q}_t$ and the displacement pattern $\mathbf{d}_{2t}$ which act on the truss be specified. The fraction λ of the load and displacement patterns which acts on the truss in a given configuration is called the load factor of that configuration. The load factor increment specifies the change in loading during a load step:

$$\triangle\mathbf{q}_1 = \triangle\lambda\,\mathbf{q}_{1t}, \quad \triangle\mathbf{q}_2 = \triangle\lambda\,\mathbf{q}_{2t}, \quad \triangle\mathbf{d}_2 = \triangle\lambda\,\mathbf{d}_{2t} \qquad (13)$$

where $\triangle\lambda$ is a load factor increment.

The load factor increment for a load step is not known a priori. It is determined by the following iterative procedure, which also yields the displacement and reaction increments for the load step.

Total load solution for iteration m in step s:

The incremental stiffness matrix and the load vector of the truss are computed in each iteration m of step s. The nonlinear terms are neglected in iteration 0 and are approximated with the results of iteration $m-1$ in the subsequent iterations. The displacements $\mathbf{d}_{1t}^{(s,m)}$ and the reactions $\mathbf{r}_{2t}^{(s,m)}$ for the load pattern $\mathbf{q}_t^{(s,m)}$ and the displacement pattern $\mathbf{d}_{2t}$ are computed with the incremental stiffness matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^{(s,m)}\mathbf{d}_t^{(s,m)} &= \mathbf{q}_t^{(s,m)} + \mathbf{r}_t^{(s,m)} \qquad (14) \\ \mathbf{d}_{1t}^{(s,m)} &= \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_{1t}^{(s,m)} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{d}_{2t}) \\ \mathbf{r}_{2t}^{(s,m)} &= \mathbf{K}_{21}\mathbf{d}_{1t}^{(s,m)} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{d}_{2t} - \mathbf{q}_{2t}^{(s,m)} \end{aligned}$$

The force vector $\mathbf{p}_t^{(s,m)}$ for total load is the sum of the load and reaction vectors:

$$\mathbf{p}_t^{(s,m)} = \mathbf{q}_t^{(s,m)} + \mathbf{r}_t^{(s,m)} \qquad (15)$$

Incremental solution for increment m in step s: The increments (14) of the load and of the prescribed displacement are substituted into (13). Equations (12) are solved for the displacement increment and the reaction increment as functions of the unknown load factor increment $\triangle\lambda$:

$$\mathbf{K}^{(s,m)} \triangle\mathbf{d}^{(s,m)} = \triangle\lambda^{(s,m)}\mathbf{q}_t^{(s)} + \triangle\mathbf{r}^{(s,m)} + \mathbf{e}^{(s)} \qquad (16)$$

Equations (16) are solved for the free displacement increments and for the reaction increment:

$$\begin{aligned} \triangle\mathbf{d}_1^{(s,m)} &= \triangle\lambda^{(s,m)}\mathbf{d}_{1t}^{(s)} + \mathbf{f}_1^{(s,m)}, \\ \mathbf{f}_1^{(s,m)} &= \mathbf{K}_{11}^{-1}\,\mathbf{e}_1^{(s)} \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} \triangle\mathbf{r}_2^{(s,m)} &= \triangle\lambda^{(s,m)}\mathbf{r}_{2t}^{(s)} + \mathbf{t}_2^{(s,m)}, \\ \mathbf{t}_2^{(s,m)} &= \mathbf{K}_{21}\mathbf{f}_1^{(s,m)} - \mathbf{e}_2^{(s)} \end{aligned} \qquad (18)$$

The increment of the force vector is:

$$\triangle\mathbf{p}^{(s,m)} = \triangle\lambda^{(s,m)}\mathbf{p}_t^{(s,m)} + \mathbf{t}^{(s,m)} \qquad (19)$$

After the value $\triangle\lambda$ of the load factor increment is computed as shown below, it is substituted into (17) to (19) to obtain the incremental vectors $\triangle\mathbf{d}^{(s,m)}$, $\triangle\mathbf{q}^{(s,m)}$, and $\triangle\mathbf{r}^{(s,m)}$. The incremental vectors are added to the state of the structure at the beginning of the step to obtain the trial values for state $s+1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(s+1,m)} &= \mathbf{d}^{(s)} + \triangle\mathbf{d}^{(s,m)} \\ \mathbf{q}^{(s+1,m)} &= \mathbf{q}^{(s)} + \triangle\mathbf{q}^{(s,m)} \\ \mathbf{r}^{(s+1,m)} &= \mathbf{r}^{(s)} + \triangle\mathbf{r}^{(s,m)} \end{aligned} \qquad (20)$$

Termination of the iteration: The system error vector $\mathbf{e}_s$ is computed for the trial state (18) of the structure, using expression (9). The iteration in step s is terminated if the norm of the system error vector is less than a preset limit. Otherwise, the computations in step s are continued with iteration $m+1$. The error limit can, for example, be a prescribed fraction of the force norm in the first load step. If the iteration in step s has converged, the algorithm proceeds to step $s+1$ and the steps which follow. The process is terminated when the load factor 1.0 is reached.

Load factor increment: The load factor increment is chosen so that the length of the chord of the arc for step s in the load path is equal to the length h_0 of the chord for the first load step, which follows from the prescribed value $\triangle\lambda_0$ of the load factor in the first iteration of the first load step:

$$h_0^2 = \triangle\lambda_0^2\,\mathbf{p}_0^T\mathbf{p}_0 + \mu^2\,\triangle\lambda_0^2\,\mathbf{d}_0^T\mathbf{d}_0 \qquad (21)$$

The arc length h_0 computed with (21) in the first cycle of iteration of the first load step h_0 is recomputed at the end of each cycle of iteration in the first load step. In order to simplify the expressions which are derived in this section, the notation for the variables is redefined. The system displacement vector at the end of the step is given by:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \mathbf{f} + z\,\mathbf{a} \qquad (22)$$

where $\bar{\mathbf{d}}$ and $\mathbf{d}$ is a system displacement vector at the end and at the beginning of the step respectively, $\mathbf{f}$ is a displacement correction vector, $\mathbf{a}$ is displacement reference vector (pattern displacement or eigenvector), and z is load increment $\triangle\lambda$ for the step.

The system force vector at the end of the step is given by:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{t} + z\,\mathbf{b} \qquad (23)$$

where $\bar{\mathbf{p}}$ and $\mathbf{p}$ is system force vector end and at the beginning of the step respectively; $\mathbf{t}$ is a force correction vector, and $\mathbf{b}$ is force reference vector (pattern force or reaction due to eigenvector).
The displacement norms at the beginning and the end of the step are:

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu\sqrt{(\mathbf{d}+\mathbf{f})^T(\mathbf{d}+\mathbf{f})} \\ a_2 &= \mu\sqrt{(\mathbf{d}+\mathbf{f}+z\,\mathbf{a})^T(\mathbf{d}+\mathbf{f}+z\,\mathbf{a})} \end{aligned} \quad (24)$$

The force norms at the beginning and the end of the step are:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{t})^T(\mathbf{p}+\mathbf{t})} \\ b_2 &= \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{t}+z\,\mathbf{b})^T(\mathbf{p}+\mathbf{t}+z\,\mathbf{b})} \end{aligned} \quad (25)$$

The chord length in step s is set equal to the chord length h_0 in the first load step:

$$(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)^2+(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)^2 = h_0^2 \quad (26)$$

The following dimensionless parameters are defined:

$$\begin{aligned} &n_0 = (\mathbf{d}+\mathbf{f})^T(\mathbf{d}+\mathbf{f}), \quad n_1 = (\mathbf{a}^T(\mathbf{d}+\mathbf{f}))/n_0, \\ &n_2 = (\mathbf{a}^T\mathbf{a})/n_0, \qquad n_3 = (\mathbf{p}+\mathbf{t})^T(\mathbf{p}+\mathbf{t}), \\ &n_4 = (\mathbf{b}^T(\mathbf{p}+\mathbf{t}))/n_3, \quad n_5 = (\mathbf{b}^T\mathbf{b})/n_3 \end{aligned} \quad (27)$$

The terms on the left hand side of equation (26) are expressed in terms of the parameters (27):

$$\begin{aligned} (a_2-a_1)^2 &= \mu^2 n_0\,(2+2\,n_1 z+n_2 z^2 - \\ &\qquad 2\sqrt{1+2\,n_1 z+n_2 z^2}\,) \\ (b_2-b_1)^2 &= n_3\,(2+2\,n_4 z+n_5 z^2 - \\ &\qquad 2\sqrt{1+2\,n_4 z+n_5 z^2}\,) \end{aligned} \quad (28)$$

Substitution of expressions (28) into equation (26) shows that the equation for the determination of the load factor increment z is highly nonlinear. It is solved iteratively by the method of Newton-Raphson. The residual function $f(z)$ is defined as follows:

$$f(z) = (a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2-h_0^2 \quad (29)$$

Since the derivative of the residual function is null at $z=0$, the iteration cannot be started at the origin. In order to obtain a suitable starting value z_0 for the iteration, the residual function (27) is approximated by a Taylor expansion at $z=0$. It is truncated after the fifth term in order to obtain a quadric equation in the load factor increment z :

$$\begin{aligned} f(z) = f_0 + \frac{d\,f_0}{d\,z}z + \frac{1}{2}\frac{d^2 f_0}{dz^2}z^2 + \\ \frac{1}{6}\frac{d^3 f_0}{dz^3}z^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4 f_0}{dz^4}z^4 \end{aligned} \quad (30)$$

Equation (30) is solved for the load factor increment by one of the available standard algorithms. The equation can have 4 real roots or 2 real and 2 conjugate complex roots or 2 pairs of conjugate complex roots. If it has 4 real roots, the two roots with the smallest absolute value are considered. If it has at least two real roots, the root which leads to the largest distance between the pivot state $s-1$ and new state $s+1$ on the load path is chosen as starting point for the Newton-Raphson iteration for the load factor increment and denoted by z_0.
The approximate solution z_0. of equation (29) which is determined with the Taylor expansion (30) is improved by Newton-Raphson iteration. At the beginning of cycle m of the iteration, the residual function f_m and its first derivative are computed. The iterated value z_{m+1} of the load factor increment is obtained by solving the linearization of equation (30):

$$f_m + \frac{df_m}{dz}(z_{m+1}-z_m) = 0$$

$$z_{m+1} = z_m - \left(\frac{df_m}{dz}\right)^{-1} f_m \qquad (31)$$

The iteration is continued until the change in the load factor increment in a cycle of the iteration is less than a prescribed value.

3. DETERMINATION OF NEARLY SINGULAR POINTS

The step-wise solution procedure requires that submatrix $\mathbf{K}_{11}$ in (12) is regular so that $\mathbf{d}_{1t}^{(s,m)}$ in (14) and $\mathbf{f}_1$ in (17) can be computed. Since $\mathbf{K}_{11}$ is singular or nearly singular in the vicinity of a singular point, additional algorithms are required which solve two tasks: detection of configurations in which the truss is near a singular point; computation of the system displacement and reaction vectors at the singular point.

Consider the decomposition of matrix $\mathbf{K}_{11}$ into the product of a left triangular matrix $\mathbf{S}$ with unit diagonal coefficients, a diagonal matrix $\mathbf{D}$ that can contain positive and negative coefficients d_k, and a right triangular matrix $\mathbf{S}^T$. The determinant of $\mathbf{K}_{11}$ is equal to the product of the coefficients of $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^T \\ \det \mathbf{K}_{11} &= \det \mathbf{S} \det \mathbf{D} \det \mathbf{S}^T = d_0 \ldots d_{n-1} \end{aligned} \qquad (32)$$

Matrix $\mathbf{D}$ is used as follows to detect nearly singular configurations of a structure:

(a) The linear elastic stiffness matrix of the structure is determined at the start of the analysis and decomposed as shown in (32) into the product $\mathbf{S}_e \mathbf{D}_e \mathbf{S}_e^T$. The coefficients d_{ke} of the diagonal matrix $\mathbf{D}_e$ are stored in the algorithm.

(b) The tangential stiffness matrix for the instant configuration is decomposed into the product $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^T$. Let the coefficients of $\mathbf{D}$ be d_k.

(c) If at least one of the diagonal coefficients of the diagonal matrix $\mathbf{D}$ has changed sign as compared to the linear elastic value, the structure has passed a singular point and is considered to be in a nearly singular range. The instant configuration is called a nearly singular configuration.

$$\exists\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\}:\ sign(d_k^{(s)}) \neq sign(d_{ke}) \rightarrow \text{state is a nearly singular configuration} \qquad (33)$$

If the decomposition of the tangent stiffness matrix $\mathbf{K}^{t(s+1)}$ has negative diagonal coefficients, the algorithm back-steps to configuration s and performs stability analysis with this configuration as nearly singular point.

4. DETERMINATION OF SINGULAR CONFIGURATIONS

If the truss is near a singular point, two strategies can be followed: the singular limit-point is avoided empirically or the system displacement vector and the system reaction vector at the singular point are determined. The first approach is simpler and can be used at snap-through points where there is only one direction in which the truss can displace beyond the singular point. The second approach must be used if a load path is to be continued beyond a bifurcation point.

A singular point is determined by computing the displacement and reaction vectors for which the tangent stiffness matrix in the governing equation (7) is singular. Let A be a nearly singular point which precedes the singular point L. The displacement increments from the nearly singular point A to the singular point L are expressed as functions of the unknown load factor increment from A to L with (17).

The derivatives of the displacement increments are substituted into the expressions for the tangent element stiffness matrices. The resulting expressions for the tangent element stiffness

matrices are nonlinear functions of the load factor increment $\triangle\lambda$. The value of $\triangle\lambda$ which drives the determinant of the tangent stiffness matrix to null is determined by iteration.
In iteration 0, the terms which are nonlinear in $\triangle\lambda$ are neglected. The value of $\triangle\lambda$ for which the determinant of the tangent stiffness matrix is null is determined by solving for the eigenvalues of the general eigenvalue problem:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K}_{s0} + \triangle\lambda\mathbf{K}_{s1}) &= 0 \\ \mathbf{K}_{s0}\mathbf{x} &= \triangle\lambda(-\mathbf{K}_{s1})\mathbf{x} \end{aligned} \quad (34)$$

where $\mathbf{K}_{s0}$ is a residual stiffness matrix, $\mathbf{K}_{s1}$ is a modification stiffness matrix.
The increment in the element displacement vector due to the displacement (17) is given by

$$\triangle\mathbf{v}_e = \mathbf{R}_{esy}^T\mathbf{T}_e\triangle\mathbf{d}_s \quad (35)$$

The derivatives of the displacement increment $\triangle\mathbf{v}_e$ with respect to the axial coordinate y_1 are obtained using expression (4):

$$\begin{aligned} \triangle v_{m,1} &= \frac{1}{a}\mathbf{g}_m^T\mathbf{R}_{esy}^T\mathbf{T}_e(\triangle\lambda\,\mathbf{d}_t + \mathbf{f}), \text{ or} \\ \triangle v_{m,1} &= \triangle\lambda\, d_{m1} + d_{m2}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$d_{m1} := \frac{1}{a}\mathbf{g}_m^T\mathbf{R}_{esy}^T\mathbf{T}_e\mathbf{d}_t \quad d_{m2} := \frac{1}{a}\mathbf{g}_m^T\mathbf{R}_{esy}^T\mathbf{T}_e\mathbf{f}$$

The derivatives of the node displacement of the truss at the singular point with respect to y_1 are denoted by $\bar{v}_{m,1}$ and expressed with (37) as functions of the load factor increment $\triangle\lambda$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{m,1} &= v_{m,1} + \triangle v_{m,1} = d_{m0} + \triangle\lambda\, d_{m1} \\ d_{m0} &= v_{m,1} + d_{m2} \end{aligned} \quad (37)$$

Tangential stiffness matrix $\bar{\mathbf{K}}_e$ at the singular point has constant $\bar{\mathbf{K}}_c$, deviatoric $\bar{\mathbf{K}}_d$ and geometric $\bar{\mathbf{K}}_g$ components:

$$\mathbf{K}_c = \frac{AE}{a}\mathbf{G}_{11} \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_d = \frac{AE}{a}(c_1\mathbf{G}_{11} + c_2\mathbf{G}_{22} + c_3\mathbf{G}_{12}) \quad (39)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \frac{AE}{a}c_4(\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{22}) \quad (40)$$

where $\mathbf{G}_{km}$ are the products of vectors $\mathbf{g}_m$ in (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{kk} &:= \mathbf{g}_k\mathbf{g}_k^T && k,m \in \{1,2,3\} \\ \mathbf{G}_{km} &:= \mathbf{g}_k\mathbf{g}_m^T + \mathbf{g}_m\mathbf{g}_k^T && k \neq m \end{aligned}$$

The coefficients in (39) to (41) are:

$$\begin{aligned} c_1 &= (d_{10} + \triangle\lambda\, d_{11})(2 + d_{10} + \triangle\lambda\, d_{11}) \\ c_2 &= (d_{20} + \triangle\lambda\, d_{21})^2 \\ c_3 &= (d_{20} + \triangle\lambda\, d_{21})(1 + d_{10} + \triangle\lambda\, d_{11}) \\ c_4 &= (d_{10} + \triangle\lambda\, d_{11}) + \\ &\quad (d_{10} + \triangle\lambda\, d_{11})^2/2 + (d_{20} + \triangle\lambda\, d_{21})^2/2 \end{aligned} \quad (41)$$

Expressions (39) to (42) show that tangential element stiffness matrix can be written as a quadratic function of the load factor increment:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{K}_{e0} + \triangle\lambda\mathbf{K}_{e1} + \triangle\lambda^2\mathbf{K}_{e2} \quad (42)$$

Herein $\mathbf{K}_{e0}$ is a residual element stiffness matrix, $\mathbf{K}_{e1}$ and $\mathbf{K}_{e2}$ are components of a modification element stiffness matrix.
The component system matrices $\mathbf{K}_i$ for the incremental system stiffness matrix are assembled from the element matrices:

$$\mathbf{K}_i = \sum_e \mathbf{T}_e^T\mathbf{R}_{esy}\mathbf{K}_{ei}\mathbf{R}_{esy}^T\mathbf{T}_e \quad i \in \{0,1,2\} \quad (43)$$

The residual and modification stiffness matrices in (35) are computed with the approximate load factor increment $\triangle\bar{\lambda}$:

$$\mathbf{K}_{s0} = \mathbf{K}_0 \qquad \mathbf{K}_{s1} = \mathbf{K}_1 + \triangle\bar{\lambda}\,\mathbf{K}_2 \tag{44}$$

The load factor increment for the singular point is determined iteratively as follows.
Cycle 0: Only the terms which are linear in $\triangle\lambda^{(0)}$ are retained in the system stiffness matrix:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}^{(0)} &= \mathbf{K}_0 + \triangle\lambda^{(0)}\,\mathbf{K}_1^{(0)} \quad \text{with} \quad \mathbf{K}_1^{(0)} = \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_1 &= \sum_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{R}_{esy} \mathbf{K}_{e1} \mathbf{R}_{esy}^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \tag{45}$$

Cycle m: The nonlinear term $\triangle\lambda^{(m)} \circ \triangle\lambda^{(m)}$ is approximated by $\triangle\lambda^{(m)}\triangle\lambda^{(m-1)}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}^{(m)} &= \mathbf{K}_0 + \triangle\lambda^{(m)}\,\mathbf{K}_1^{(m)} \\ \mathbf{K}_1^{(m)} &= \mathbf{K}_1 + \triangle\lambda^{(m-1)}\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 &= \sum_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{R}_{esy} \mathbf{K}_{e2} \mathbf{R}_{esy}^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \tag{46}$$

The eigenvalue problem (34) is solved by inverse vector iteration for the matrix pair $(\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1^{(m)})$ to yield $\triangle\lambda^{(m)}$. Matrices $\mathbf{K}_{s0}$ and $\mathbf{K}_{s1}$ contain rows and columns which are associated with prescribed displacements. Eigenstates corresponding to rigid body motions are not of interest for the limit point analysis. The inverse vector iteration is therefore restricted to the stiffness submatrix $\mathbf{K}_{11}$ which corresponds to the free displacements. If matrices $\bar{\mathbf{K}}_{s0}$ and $\bar{\mathbf{K}}_{s1}$ are determined for a nearly singular state, $\triangle\lambda$ is small compared to the next larger eigenvalue, so that the iteration converges very fast.
State of the truss at the singular point: The iteration is terminated if the absolute value of the change in the load factor increment $\triangle\lambda$ in a cycle is less than a prescribed limit value such as 10^{-6}. The load factor increment is then used to compute the displacements at the singular point:

$$\begin{aligned} \triangle\mathbf{d}^{(A)} &= \triangle\lambda^{(A)}\mathbf{d}_t^{(A)} \\ \mathbf{d}^{(L)} &= \mathbf{d}^{(A)} + \triangle\mathbf{d}^{(A)} \end{aligned} \tag{47}$$

where $\mathbf{d}^{(L)}$ is a system displacement vector at the singular point L, $\mathbf{d}^{(A)}$ is a system displacement vector at nearly singular point A, $\mathbf{d}_t^{(A)}$ is pattern displacement at point A, and $\triangle\mathbf{d}^{(A)}$ is displacement increment from nearly singular point A to the singular point L.

5. IMPLEMENTATION AND VERIFICATION OF THE METHODS

The methods presented are implemented as parts of the software test bed developed on the Java platform.
An example is presented that demonstrates the accuracy of the algorithms implemented in the software. The exact analytical solution obtained by the author [5] is used for the verification of the numerical results.
For the numerical analysis of the behavior of the tripod the model shown in Fig.2 is used that has the following properties. The base a is 2.00 m. The height of the apex above the supports is 0.15m. The bars carry axial forces but not bending moments. The area of the bar cross-section is 10 cm^2. The modulus of elasticity of the bar material is $2.0*10^8\ kN/m^2$. The supports A and C of the truss are pinned. The truss carries a vertical pattern load $P = (0.0, -10.0)\ kN$ at the apex D.
The step size of the constant arc increment method is determined by the initial load factor increment for step 0. The iteration in a load step is terminated if the norm of the unbalanced forces in the trial state at the end of the step is less than the product of the linear force norm with the initial load factor and a specified error test factor.
Table 1 presents the results of the numerical analysis of the truss for test factor $f_e = 10^{-2}$ and initial load factor increment $\Delta\lambda = 0.50$.
It can be seen that the accuracy of the deformation analysis is very high, and the computed values for the singular points are practically exact.

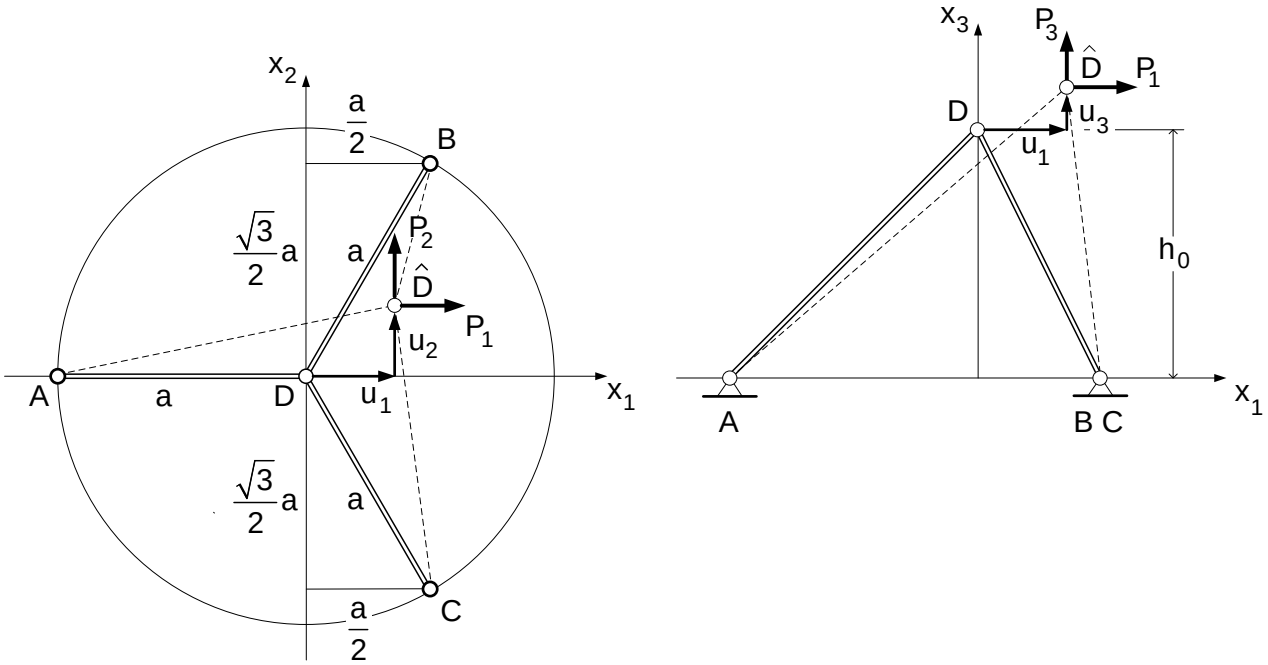


Figure 2: Displacements of a regular tripod

Table 1: Error in the Displacement-Load Curve for $f_e = 10^{-2}$ and $\Delta\lambda = 0.50$

Step	**Displacement** u_3, m	**Load** P_3, kN	**Exact value** P_3, kN	**Error** ε, %
1	-0.003082264	-5.000000000	-4.999854298	0.002914125
5	-0.016185170	-22.858054820	-22.857765439	0.001266007
10	-0.034951366	-39.633274572	-39.632216805	0.002668957
15	-0.060788321	-48.295855224	-48.239346556	0.117142275
16	-0.063396583	-48.305776344	-48.305776344	0.000000000
17	**-0.063397460**	**-48.305776352**	**-48.305776352**	**0.000000000**
	| The configuration is at a TURNING POINT in step 17 |			
	| Load factor = 4.830577635 |			
20	-0.078854674	-46.14152722	-46.13481196	0.014555718
25	-0.111247574	-30.26025916	-30.25931986	0.003104151
30	-0.172802252	18.63782577	18.6373315	0.002652021
35	-0.22123336	46.1693256	46.15869695	0.023026335
38	-0.236603178	48.30577635	48.30577635	0.000000000
39	**-0.23660254**	**48.30577635**	**48.30577635**	**0.000000000**
	| The configuration is at a TURNING POINT in step 39 |			
	| Load factor = -4.830577635 |			
40	-0.241526461	48.06152525	48.06710242	-0.011602873
45	-0.261347109	41.82901148	41.82691188	0.005019737
50	-0.278910691	28.1970399	28.19639703	0.002279947
60	-0.309085064	-16.61143186	-16.61164357	-0.001274461
65	-0.32230765	-46.06856653	-46.06872352	-0.000340782

CONCLUSIONS

The procedure of stability analysis which is presented in this paper includes the following methods: method for computing the nonlinear load-displacement behavior of a truss prior to instability, method for determination of nearly singular configurations of a truss, and method for determining the loading, displacements and reactions of the unstable configuration of a truss. These methods have been implemented in an object-oriented Java application that is used as a test bed for the research in geometrically nonlinear analysis. The results obtained demonstrate that the proposed methods are suited for the stability analysis of space trusses. The developed algorithm is capable of finding singular points with high accuracy and permits subsequent calculation of snap-through and bifurcation paths.

REFERENCES

1. **Belytscho T., Liu W., Moran B.** Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. J Wiley & Sons, 2000. ISBN 0-948-749-261.
2. **Wriggers P.** Nichtlineare Finite-Element Methoden. Springer Verlag, 2001, ISBN 3-540-67747-X.
3. **Wagner W.** Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente. Foschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, F91/1 (1991).
4. **Galishnikova V.V.** Unified and General Approach to the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures // Journal of Volgograd State University for Architecture and Civil Engineering. Technical Science. 2006. 6(20). P. 42—66 (in Russian).
5. **Galishnikova V.V.** Analytical Solution of the Nonlinear Stability Problem of a 3-D Truss // Journal of Volgograd State University for Architecture and Civil Engineering. Natural Science. 2007. 6(23). P. 53—64 (in Russian).

Vera V. Galishnikova, Professor, Department of structural mechanics, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, 1 Akademicheskaya Street, 400074, Volgograd, Russia, E-mail: galishni@gmail.com.

STUDY OF POSSIBLE APPLICATION OF DIFFERENT DESIGN MODELS OF "FOUNDATION – SOIL" SYSTEM FOR A PILE-RAFT FOUNDATION OF A HIGH-RISE BUILDING

Galina G. Kashevarova, Oleg U. Smetannikov, Alexandra U. Zobacheva
Perm State Technical University, Perm, RUSSIA

ABSTRACT: Different design models of 'foundation – soil' system with taking into account physically nonlinear properties of materials are considered in the distinctive paper. Possibilities of simplification of settlement model are investigated.

Keywords: Design models, foundation, soil, nonlinear properties of materials, settlement model

INTRODUCTION

Soil-base structures refer to the class of hard formalized problems because soil is usually a non-homogenous poorly studied medium, whereas a foundation must provide the possibility of interaction between the upper structure and the soil base.

The objective of this paper is to simulate and study a stress-strain state of a 'foundation-soil' system taking into account physically non-linear soil properties, soil compaction when driving the piles and a comparative analysis of the results obtained in different design models.

Investigations were conducted using a Combined Pile-Raft Foundation as an example because that has often been in use in high-rise buildings lately.

The following sequence of problems was solved:

I. Study of non-elastic soil properties influence on the base settlements when using different pile field models.
II. Study of soil compaction influence on the base settlements when driving the piles and the comparative analysis of using different compaction models.

An universal multi-functional programmed finite-element system ANSYS was used for doing the calculations and investigation.

There are a lot of methods to define soil mechanical properties, their number being as large as the number of researchers. Rather simple models of soil bases are used in the practice of building design at present, for example: Vincler mechanical model and its modifications; models of elastic half-space and linear-strained layer of finite thickness; non-linear models.

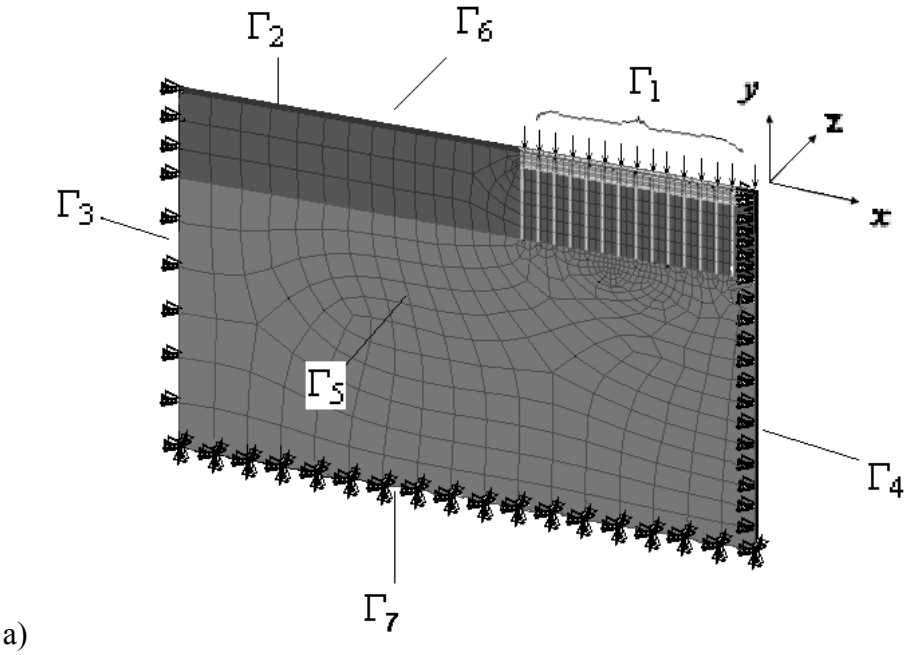
Vincler model, in principle, can't reflect the real interaction between the structure and the bedrock adequately. But it continues to be used in building design because It is ultimate mathematical simple.

Application of linear elasticity theory to soils is grounded by the fact that in accordance with the requirements in normative documents foundations are to be so designed that the pressure to soil wouldn't induce non-linear settlements.

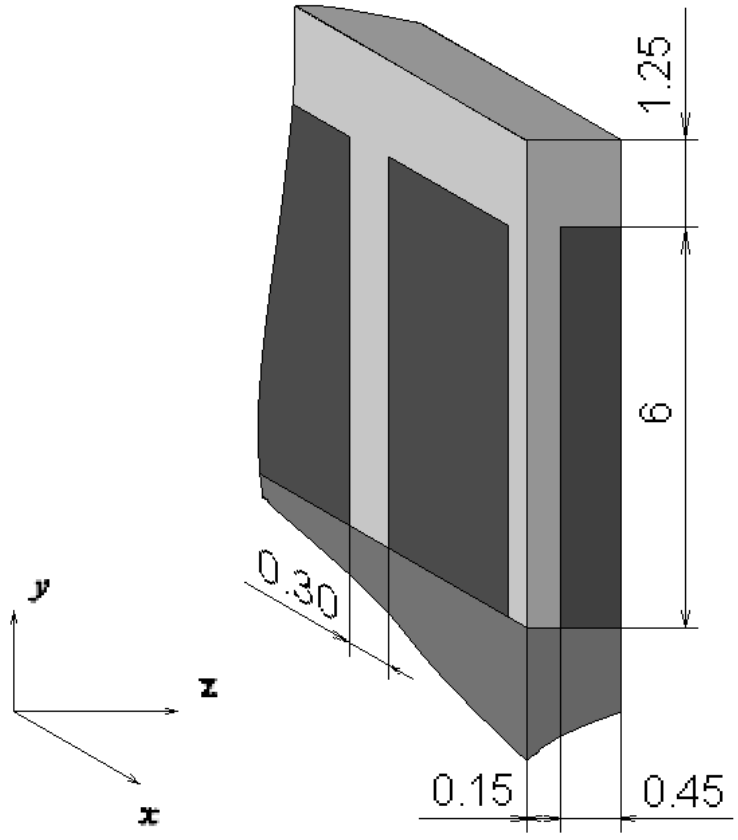
The use of soil base model in the form of a linear- strained layer is directed by the normative documents currently in use, issued more than 20 years ago, and is defined by the possibility to realize it in some simple engineering design methods.

In the course of maintenance soil bases can be subjected to some additional forces that were not specified by the design (for example, reconstruction, superstructure, building new structures into already existent development, changing physico-mechanical soil properties, etc.). In these cases it is necessary to use non-linear soil models.

Modern methods of computing mathematics and industrial programmed systems in powerful computers allow the wide use of numerical load tests with the use of non-linear soil mechanics,



a)



b)

Figure 1. A foundation fragment with non-uniform soil mass in depth;
a) *yoz* plane symmetry; b) Two layers in z-direction: 0,15m - ½ of the pile layer ; 0,45m - of the layer between piles

whose basis is the notion of soil as an elasto-plastic substance.

Soil mass is represented as a form of a finite-element model taking into account soil heterogeneity and non-linear relations between stresses and strains based on this or that strength theory. Giving different physico-mechanical properties to each element or a group of elements it is possible to simulate any soil base structure with appropriate parameters obtained in the result of field and laboratory tests. The main problem of creating a spatial picture of soil structure is connected with the fact that geological survey data are usually based on the results obtained for a limited number of boreholes. The nature of soil seam bedding when going farther from the borehole surface is not known for sure and can be determined only with some degree of possibility.

The Combined Pile-Raft Foundation under study represents a rectangular reinforced concrete 36x18x1.25m raft rested on piles (the cross section of a pile is 0.3x0.3m, the length of a pile is 6m). The foundation raft is reinforced by the grid with 200mm spacing in upper and lower zones; the reinforcement diameter is 28mm. The middle layer has antisettlement reinforcement neglected in design.

A foundation fragment with non-uniform soil mass in depth was taken as a design model for stress-strain state study (fig.1a). On virtue of *yoz* plane symmetry of the model only its half is considered. Two layers in z-direction are taken (fig.1b). The first one with the depth of 150mm contains half of the pile layer; the second one has ½ of the layer between piles (450mm deep). The volume model was made with the help of the fragment extrusion method.

A three-dimensional model of 'foundation-base' system occupies volume V, which consists of the volumes of the foundation elements (V_1) and soil base (V_2) and is limited to the surface Γ (Fig.1a). 'Foundation-base' system is referred to rectangular Cartesian coordinates, whose origin is found in the centre of a foundation raft.

I. STUDY OF NON-ELASTIC SOIL PROPERTIES INFLUENCE ON THE BASE SETTLEMENTS WHEN USING DIFFERENT PILE FIELD MODELS.

The following design models of 'foundation-soil' system were considered:

1. The spatial model of a Pile-Raft foundation, in which piles were directly included into the design model of foundation and simulated with the help of volume finite elements as well as a pile.
2. In another design model a pile field was replaced by its homogenious anisotropic analog with averaged properties – effective characteristics.

To determine stress-strain state of the system we have the following system of equations:

- *equilibrium equations*

$$\sigma_{ij,j}(\vec{r}) + \rho(\vec{r}) F(\vec{r})_i = 0, \quad \vec{r} \in V, \quad (1)$$

where: σ_{ij} – components of stress tensor σ; r - radius-vector of the spatial position of the particle; ρF_i – components of mass force vector.

- *geometrical Koshi relationships*

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})\right), \qquad \vec{r} \in V \qquad (2)$$

where ε_{ij} – components of strain tensor $\hat{\varepsilon}$; u_i – components of displacement vector.

- *physical (defining) relationships* for the case of linear connection between stresses and strains*:*

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\varepsilon_{kl}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in V \qquad (3)$$

where C_{ijkl} – components of elastic constant tensor.

When taking into account non-linear relation between stresses and strains in soil (Drucker-Prager theory of plastic flow), where $\varepsilon^{з}_{ло}$ – components of plastic strain tensor $\hat{\varepsilon}^{p}$ (defined by the law of flow)

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\left[\varepsilon_{kl}(\vec{r}) - \varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r})\right], \quad \vec{r} \in V_2 . \quad (4)$$

- *Boundary conditions of mixed type* depend on the conditions of loading and grouting (Fig.1.a, the conditions of grouting on boundaries Γ_5 and Γ_6 are not shown). Equally distributed surface loads are assigned to the parts of body boundaries. They include the weight of the building, P_3 = 28,000t, transmitted to the foundation through load-bearing walls. This load is applied to the pile surface.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{r})n_j(\vec{r}) &= P_i(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in \Gamma_1 \\ \sigma_{ij}(\vec{r})n_j(\vec{r}) &= 0 \qquad \vec{r} \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Apart from boundary stress conditions we assign boundary displacement conditions prohibiting the displacement in the soil mass faces in the direction of a normal to a certain face and rigid grouting of a low base plane.

$$\begin{aligned} u_x(\vec{r}) &= 0 \qquad \vec{r} \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ u_z(\vec{r}) &= 0 \qquad \vec{r} \in \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \\ u_i(\vec{r}) &= 0 \qquad \vec{r} \in \Gamma_7 \end{aligned} \quad (6)$$

The soil mass was seen as a limited finite area whose outer boundaries were chosen so that edge effects on them practically could influence neither the settlements beneath the structure nor the stresses in the constructions of a building (namely, mass depth is 30m, the mass boundary is removed to the distance of 0.7 building length). The conditions of complete adhesion between system elements were assigned.

To determine elastic properties of reinforced raft layers (reinforced concrete) the following relations were used (Foight hypothesis):

$$E = E_{\alpha} V_{\alpha} + E_{б} (1 - V_{\alpha}) \quad \nu = \nu_{б} (1 - V_{\alpha}) + \nu_{\alpha} V_{\alpha} \quad (7)$$

Initially the problem of a stress-strain state of spatial 'foundation-base' system was solved as linear-elastic (fig.3a). Then non-linear Drucker-Prager model of soil was used, defining relations which are:

$$\sigma_{ij}(\bar{r}) = C_{ijkl}(\bar{r})\left[\varepsilon_{kl}(\bar{r}) - \varepsilon^{p}_{kl}(\bar{r})\right], \ \bar{r} \in V_2$$

or

$$\hat{\varepsilon}^{p}_{ij} = \lambda\left(\frac{1}{2\sqrt{I_2(\hat{s})}} s_{ij} + \beta\delta_{ij}\right), \quad (8)$$

where:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2I_2(\hat{e})}}{\sqrt{0.5 + 3\beta^2}}; \ \beta = \frac{2\sin\gamma}{\sqrt{3}(3 - \sin\gamma)}$$

– constant material soil; $\hat{s}$ - deviator of stress tensor; $\hat{e}$ - deviator of strain tensor.

The transition to plastic state is

$$\sigma_{ekv} - \sigma_p = 0 \quad (9)$$

$\sigma_{ekv} = \beta I_1(\hat{\sigma}) + \left[I_2(\hat{s})\right]^{1/2}$ - equivalent strain;

$\sigma_p = \frac{6C_0\cos\gamma}{\sqrt{3}(3 - \sin\gamma)}$ - yield material soil;

$I_1(\hat{\sigma}) = \sigma_{ii}$, $I_2(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ji} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})$ - 1-st and 2-nd invariants of the stress tensor;

C_0 - Coefficient of internal friction; γ - Angle Shear.

Non-linear properties of concrete were not taken into consideration when doing this calculation. Soil material in the pile field was also considered elastic.

The non-linear analysis showed redistribution, the jump of a base settlement value near the raft edges and essentional (about 1,5 times) increase of the maximum displacement (settlement) value. Rafr deflection value practically did not change in comparison with a linear variant.

In another design model a pile field was replaced by its homogenious anisotropic analog with averaged properties – effective characteristics.

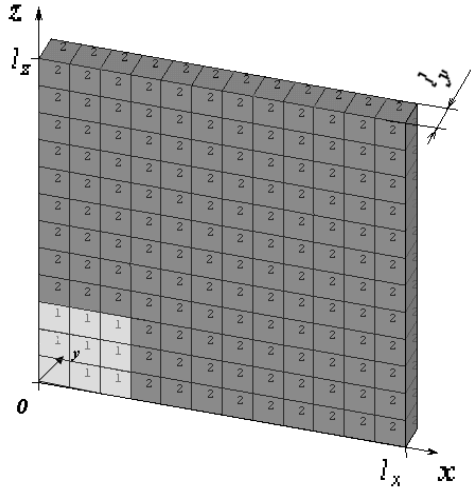


Figure 2 Three-dimensional element periodicity of a pile field
1 – fragment of pile (concrete),
2 – fragment of soil

The following things were considered:

- various methods of characterization;
- different variants of pile arrangement in a pile field;
- different material composition of a soil mass.

Effective characteristics were defined by the solution of two boundary-value problems calculating stress-strain state of three-dimensional element periodicity (fig.2), finite element decomposition being so done that the boundaries of the elements coincided with the soil – concrete separation boundaries.

Displacements U_{i0} (i=x, y) were applied in sequence to x- and y-directions and a uniform stress field was formed.

Boundary conditions under the kinematic impact along x- and y-axes exist. What is more, tangential stresses on all surfaces are equal to zero.

In numerical experiments coefficients of elasticity and Poisson ratios in directions of main system axes were defined with the help of formulae:

$$E_x = \frac{\langle \sigma_{xx} \rangle}{\varepsilon^0_{xx}};\ \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon^0_{yy}}{\varepsilon^0_{xx}};\ \nu_{xz} = -\frac{\varepsilon^0_{zz}}{\varepsilon^0_{xx}} \qquad (10)$$

where

$$\varepsilon^0_{xx} = \frac{U_{0x}}{l_x},\ \varepsilon^0_{yy} = \frac{U^{(y)}_{const}}{l_y},\ \varepsilon^0_{zz} = \frac{U^{(z)}_{const}}{l_z},$$

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{xx} dV\ .$$

Calculated effective characteristics are:

$$E_x = E_z = 0{,}182\text{e}8\ \Pi\text{a} \quad E_y = 0{,}189\text{e}10\ \Pi\text{a}$$
$$\nu_{xy} = \nu_{yz} = 0{,}256\text{e}-2 \quad \nu_{xz} = 0{,}356$$

To find effective shear modules, spatial boundary-value problems of pure shear of a periodicity element were considered, and

$$G_{xy} = G_{yz} = 0{,}679\text{e}7\ \Pi\text{a} \qquad G_{xz} = 0{,}671\text{e}7\ \Pi\text{a}$$

The results obtained and the character of vertical displacements are comparable with similar results of the previous model. The difference is not more than 1,5%, which speaks about adequacy and possible application of this simplified pile field model when calculating raft settlements.

Computational experiments with closer arrangement of piles in a pile field were conducted as an additional legitimacy check of the replacement of the volume occupied by the pile field by its homogenous transversally isotropic analog in stress-strain state problems (fig. 3b,d). And again, alteration of design settlement values under the replacement of material in a pile field by its homogenous transversally isotropic analog appeared insignificant (the difference was no more than 2%).

To generalize the results obtained, an additional investigation of various material composition of soil mass on base settlements was carried out. The analysis of obtained results showed that the degree of influence of nonlinear soil layer properties in different combinations when taken into consideration was different (tabl. 1). But in all cases the design model with homogenous transversally isotropic mate-

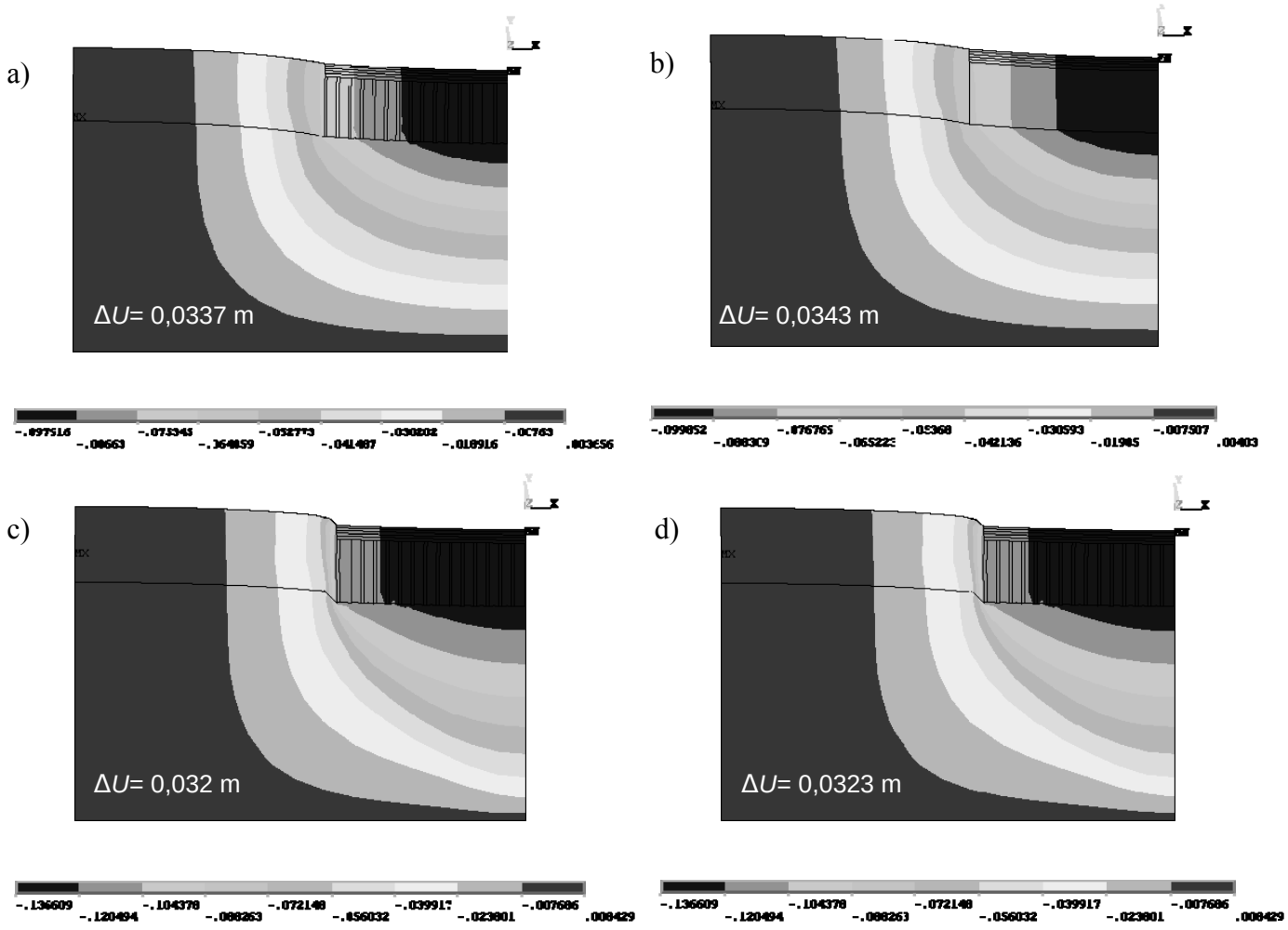


Figure 3. Computational experiments with closer arrangement of piles in a pile field
a) Settlements in linear soil model in which piles are directly include into the design model of foundation; b) Settlements in linear soil model with homogenious anisotropic properties of pile field; c) Settlements in non-linear soil model in which piles are directly include into the design model of foundation; d) Settlements in non-linear soil model with homogenious anisotropic properties of pile field

Table1. Settlements and deflection calculated for a shallow foundation

Combination of soil layers	**The difference settlements (%)**	
	in linear soil model and non-linear one	non-linear soil model, in which piles are directly include into the design model of foundation and model with homogenious anisotropic properties of pile field
(1)-(2)	13,34	1,29
(1)-(3)	5,26	0
(2)-(3)	5,28	2,06
(2)-(3)	8,02	2,09

(1) – Sandstone; (2) – Clay; (3) – Rocky Marl

rial is suitable for the description of a soil base stress- strain state.

To generalize the results obtained, an additional investigation of various material composition of soil mass on base settlements was carried out. The analysis of obtained results showed that the degree of influence of non-linear soil layer properties in different combinations when taken into consideration was different (tabl. 1). But in all cases the design model with homogenous transversally isotropic material is suitable for the description of a soil base stress- strain state.

II. STUDY OF SOIL COMPACTION INFLUENCE ON THE BASE SETTLEMENTS WHEN DRIVING THE PILES AND THE COMPARATIVE ANALYSIS OF USING DIFFERENT COMPACTION MODELS

In pile driving process soil material in a pile field is compacted due to the reduction of the volume that it occupies. Bearing resistance (soil strength) is increased with the compaction, and, therefore, foundation settlement resistance is increased, too.

For taking into account soil compaction different methods were used:

1. Simulation of a real soil compact process.
2. Alternation of unconsolidated soil strength properties so that its strength can conform to consolidated soil strength.

In the first case the following problems were solved: Assuming that compaction takes place in the direction of normal to the forming pile surface, horizontal displacements

$$U_x = B_{CB} - \frac{B_{CB}}{10}$$

were applied to the soil –pile contact boundary in the direction of *x*-axis. Soil compaction occurred in consequence of the increase of the volume assigned to a pile from negligibly small value to its actual sizes (Fig.4 snows the size increase of volume 1along *x*-axis to the value equal to $B_{CB.}$ The midline of the interval between piles was fixed in all directions. To fix boundaries y= O and y=H associated sets (scheme setting of flat-strained state). The volume occupied by a pile was assumed empty (area 1 in Fig.4). A non-linear problem, described by equations (1), (2), (4) was solved.

The results of the stress-strain state model definition for the soil being consolidated during the pile driving process are given in Figures 5-6.

When solving the problem uniform component distributions of stress tensor σ in the soil from maximal module value on the pile boundary to the minimal value on the midline of the interval between piles were obtained (Fig.5).

Normal components of stress tensor (σ_{ii}, *I=x, y,* z) coincide with principal normal stresses σ_1, σ_2 , σ_3 (here $\sigma 1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ taking into account the symbol). Tangential stress values are negligibly small in comparison with normal components and can be considered zero values. The soil in the pile field resulted from the compaction after pile driving appears to be in the state of hydrostatic compression.

After that the process of soil mass shear with respect to the pile across the pile-soil contact surface (Fig.7) was simulated with the account of previous results. Displacements U_y are applied to the pile contact boundary in a preliminary consolidated pile field element in the direction opposite to *y*-axis.

The results of the model shear reaction study are shown in Figure 8. There are also the results of the experiment with the soil without preliminary compaction and the results of the elastic solution.

Another method of the consideration of soil compaction in a pile field was carried out without simulation of the process of real compaction, but with the help of characteristics given to the soil and equivalent to compacted state.

For the description of soil behavior as elastic-plastic material the model of Drucker –Prager (8) – (9) was used. Fluidity surface for that model in principal stress space represents a circular cone (Fig. 9). The location and geometrical surface characteristics are defined by

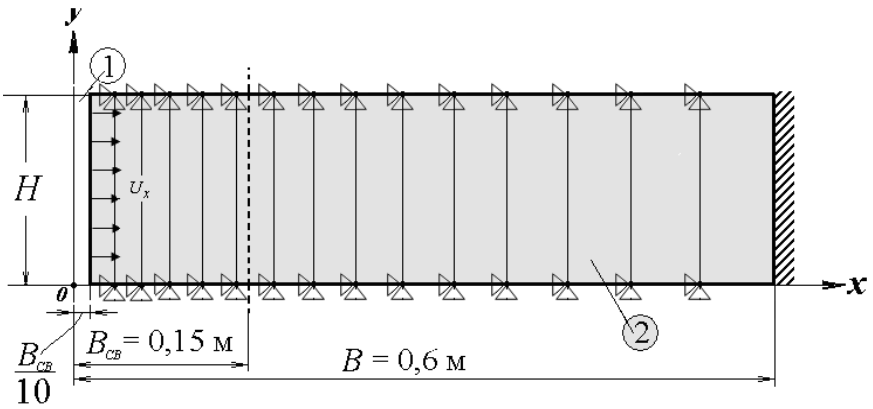


Figure 4. *FE*-model of soil compaction when driving the piles
1 – part of pile volume; 2 – part of soil volume

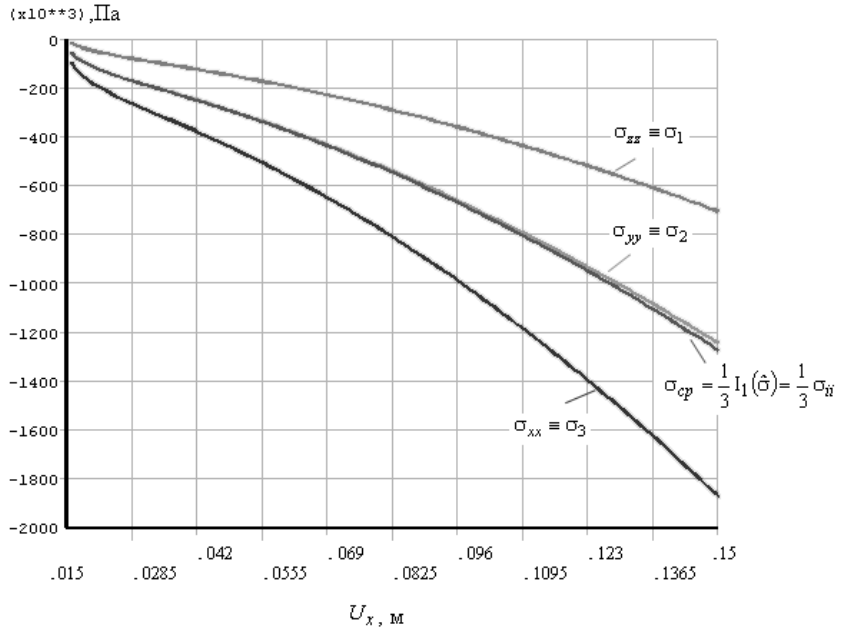


Figure 5. The influence of displacements when driving the piles to the component of stress tensor σ on the pile-soil boundary

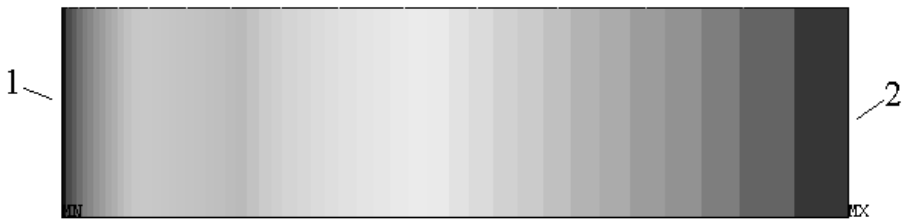


Figure 6. Distributions of principal normal stresses in element of pile field after driving the piles

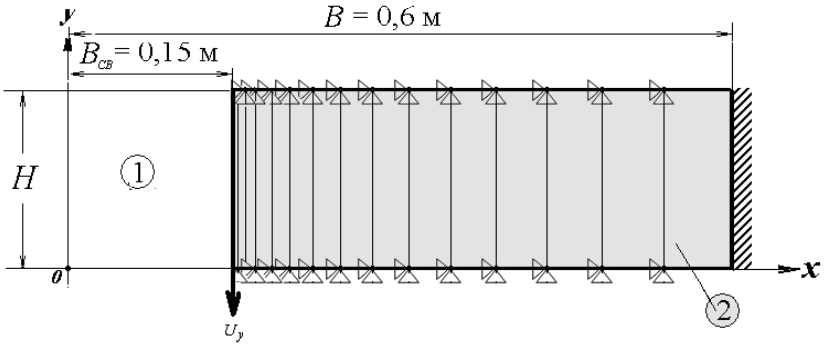


Figure 7. *FE*-model for the process of soil mass shear with respect to the pile across the pile-soil contact surface

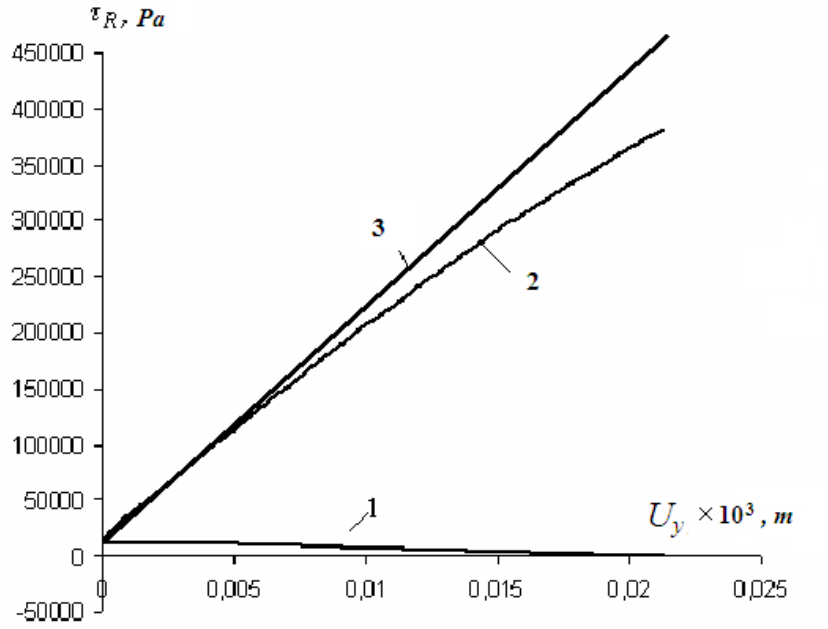


Figure 8. The dependence of tangential stresses on the border soil - pile of vertical displacement
1 - soil without compaction; 2 - to soil compaction; 3 - elastic solution

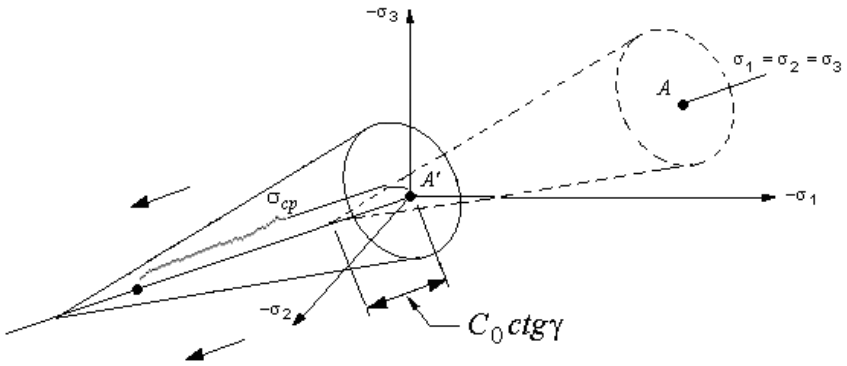


Figure 9. Drucker–Prager fluidity surface displacement

Drucker-Prager model parameters, C_o and γ. The part of a cone situated in a positive half-space is removed to a compression stress value. To assign soil the properties similar to its compacted state, it is necessary to take into account compression stress occurring in real compaction process σ_{cp} (see Fig.9). Fluidity surface displacement along the line of equal principal stresses conforms to the increase of soil specific adhesion value.

Values σ_{cp} in elements depending on the distance to a pile and resulted from the stress-strain state definition of real compacted soil are given in Fig.10 (on the left).

To define mean stress values corresponding to the coordinates of the grid point centres in the model without compaction (x'_{Ci}) different from the compacted grid coordinates (x_{Ci}) it is necessary to set functional relation $\sigma_{cp} = f(x)$. Cube polynomial was chosen as an approximation function:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Coefficients a_i, $i = 0.3$ were obtained in the result of equation system solution using the method of least squares.

Specific adhesion value for the soil material in pile field element was assigned by the formula

$$C'_{0i} = C_0 + \sigma_{cp}(x'_{Ci}) \cdot tg\gamma .$$

Then an experiment on shearing the pile field element was done similar to the one described above, which resulted in the definition of an equal tangential stress value on the foundation contact boundary and its behavior as the applied vertical displacement was increasing (Fig.11).

The axial-symmetric element loading problem of pile field periodicity with a foundation part was solved with the use of this soil compaction model (Fig.12).

The problem of base settlement definition was solved in two settings:

1) Soil material is elasto-plastic with the account of compaction as the result of pile driving.
2) Soil material is linear-elastic.

The results of problem solution are given in Fig.13.

The distribution of vertical displacements and their values for problems 1and 2 are completely the same. This fact states the legitimacy of the application of soil material having elastic properties in a pile field, whereas in other parts of soil mass the relation between material stresses and strains can be non-linear.

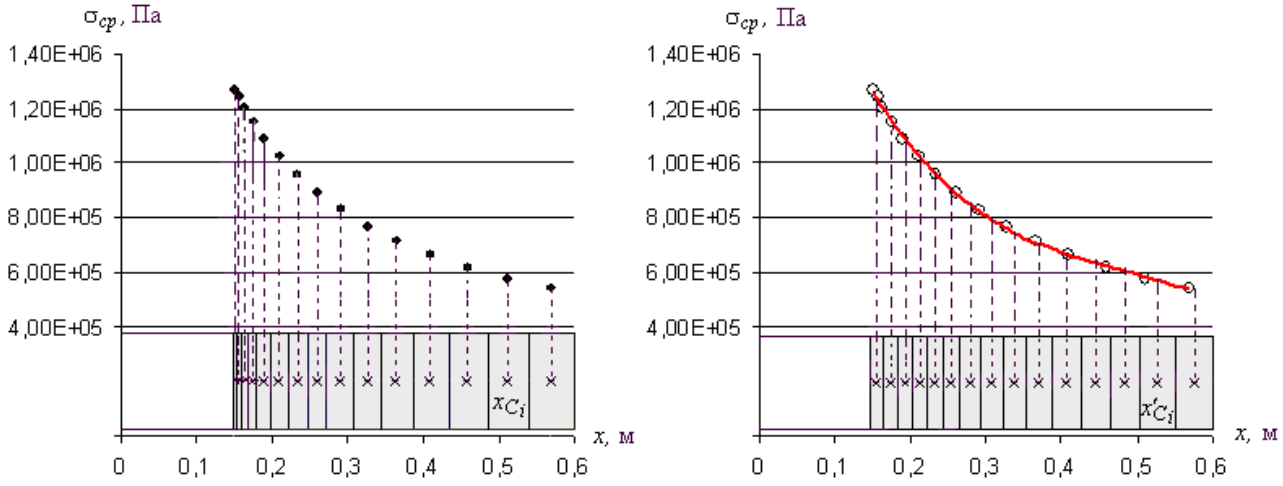
CONCLUSIONS

1. The account of physically non-linear soil properties in the problems defining a 'foundation-base' system stress-strain state leads to the essential increase of maximal base settlement values and to the alternation in the ways of their distribution, but, at the same time, it practically does not influence the amount of pile deflection.
2. Settlement definition for buildings on pile-pile foundations is better to do with the replacement of pile field volume by its homogeneous anisotropic analog. The use of such a design model allows to lower solution error specified by the presence of so called 'degenerate' elements in the finite-element model. The difference in settlement definition results is not more than 2%.
3. The properties of pile field soil can be assumed linear-elastic.

Кашеварова Галина Геннадьевна, доктор технических наук, заведующая кафедрой «Строительная механика и вычислительные технологии» Пермского государственного технического университета. 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, E-mail: ggk@pstu.ru.

Сметанников Олег Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета. 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, E-mail: vmm@cpl.pstu.ru.

Зобачева Александра. Пермского государственного технического университета. 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.



a) b)

Figure 10. Values σ_{cp} in elements depending on the distance to a pile:
a) compacted soil; b) soil without compaction

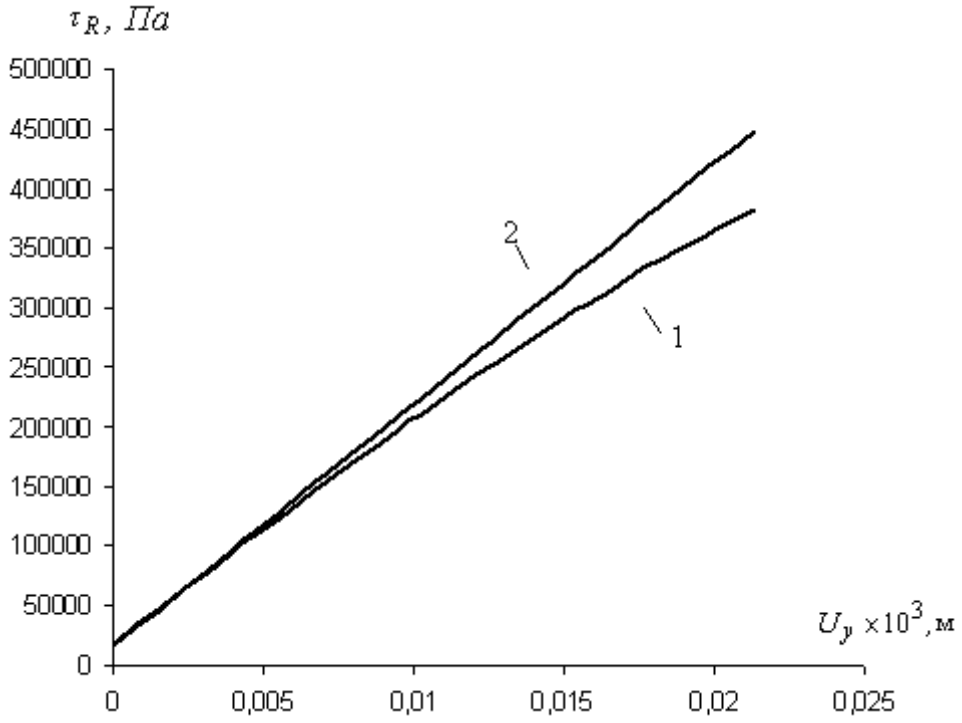


Figure 11. The schedule of an equal tangential stress value on the foundation contact boundary dependencing from the applied vertical displacement
1 – for actually condensed soil; 2 – for a a soil with characteristics equivalent to compacted state

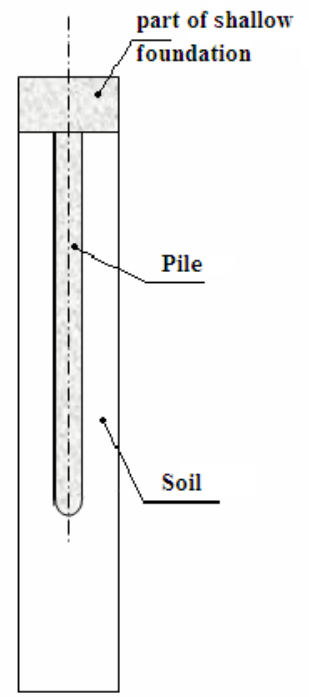


Figure 12. The axial-symmetric element of pile field periodicity with a foundation part

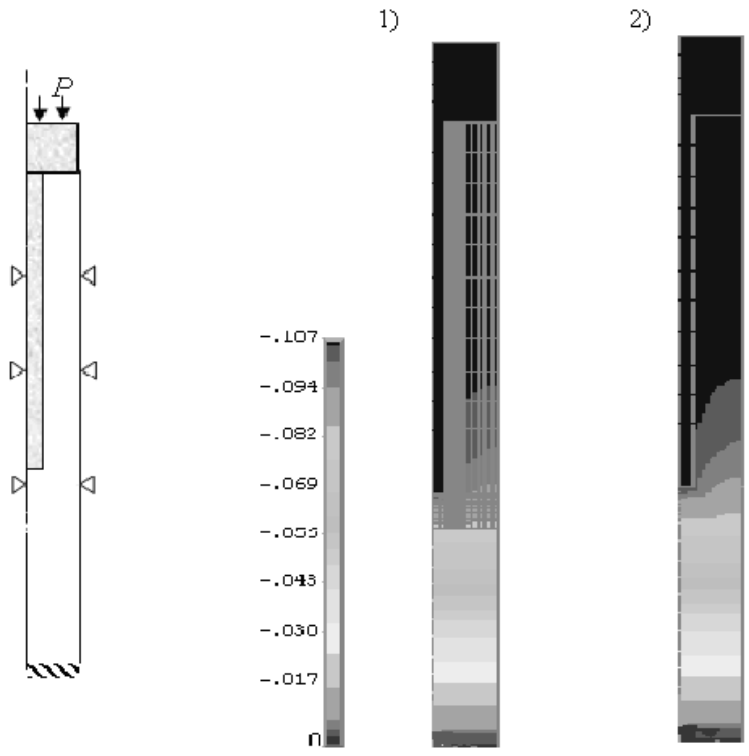


Figure 13. Settlements of the soil in an element of pile field periodicity (m)

MATRIX ANALYSIS OF VISCOELASTIC ELEMENTS

Alexey Kuznetsov
University of Ballarat, School of Information Technology and Mathematical Sciences
University of Ballarat, Mt. Helen Campus, Victoria, AUSTRALIA

ABSTRACT: Behavior of the main viscoelastic models is studied by reducing the governing second order differential equations to systems of equations of the first order. That results in constructing the fundamental matrices, which retain the main properties of the considered models. Cases of degeneracy, non-semisimple degeneracy, and semistability of these matrices are analyzed.

Keywords: Kelvin's element, Maxwell's element, standard linear element, viscoelasticity, fundamental matrix, non-semisimple degeneracy, semistability

1. INTRODUCTION.

Herein we analyze behavior of different viscoelastic elements used in modeling vibrations of discrete mass systems composed of masses bounded with each other by different combinations of springs and dashpots. These systems arise in different areas of science and technology starting from analyses of vibrating molecular chains [1 - 4] to biology and biochemistry [5], transport engineering [6, 7], and seismic protection [8, 9].
In the following sections we shall study the main models (elements) and outline a procedure of reducing the second order differential equations of vibrations to a system of differential equations of the first order. This is known as the generalized Hamiltonian formalism. Analyzing the corresponding fundamental matrices allows us to establish some important properties of the solutions and their structure. Such an analysis is done apparently, for the first time.

2. KELVIN'S (VOIGT'S) ELEMENT.

Such an element (Fig.1) was introduced independently by Thomson (Lord Kelvin) [10] and Voigt [11]. Linearity of this element means that the ordinary differential equation for the freely vibrating mass is linear:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0 \qquad (2.1)$$

where x is the deflection from the equilibrium position; the mass m, the viscosity factor η, and the spring rate k are material constants independent of x, $\dot{x}$, and time t. Physical reasons imply:

$$m > 0,\ \eta \geq 0,\ k \geq 0\,. \qquad (2.2)$$

When the external loading $p(t)$ is applied to the vibrating mass, Eq. (2.1) becomes inhomogeneous:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = p\,. \qquad (2.3)$$

By introducing a new variable $v = \dot{x}$ Eq. (2.1) can easily be reduced to a system of coupled equations of the first order:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ m\dot{v} = -\eta v - kx \end{cases}. \qquad (2.4)$$

or in a matrix form

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{G}_{2\times 2} \cdot \mathbf{x}_2\,, \qquad (2.5)$$

where $\mathbf{x}_2 = (x, v)$ is a two-dimensional vector and

$$\mathbf{G}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\eta/m \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

The analysis of (2.5), (2.6) reveals that to form a well-defined system, the both mass m and spring rate k should not vanish (if k vanishes matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ becomes degenerate), while the viscosity factor η can vanish, thus

Proposition 2.1. *a*) Matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ is not degenerate, if along with (2.2)

$$k \neq 0 . \qquad (2.7)$$

b) Matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ admits *non-semisimple* degeneracy [12], if

$$k = \frac{\eta^2}{4m}, \qquad (2.8)$$

here the non-semisimple degeneracy means appearing the Jordan block at reducing $\mathbf{G}_{2\times 2}$ to the Jordan normal form.
c) Matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ is a *semistable* matrix [12]:

$$\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0, \quad k = 1,2 , \qquad (2.9)$$

where λ_k are eigenvalues of matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$. Relation (2.9) admits another interpretation: at any admissible values of parameters m, k, and η satisfying (2.2), (2.7), there are no exponentially growing free vibration solutions, and at $\eta \neq 0$ all the admissible solutions oscillate without attenuation.
d) A necessary and sufficient condition for appearing oscillating attenuating solutions is

$$k > \frac{\eta^2}{4m}, \quad \eta \neq 0 . \qquad (2.10)$$

Proof a) follows from the preceding consideration. Proof of b) is straightforward and flows out from analyzing the Jordan normal form of $\mathbf{G}_{2\times 2}$:

$$\mathbf{G}_{2\times 2} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{2\times 2} \cdot \mathbf{W}, \qquad (2.11)$$

where $\mathbf{W}$ is a unitary matrix with $\det(\mathbf{W}) = 1$, and

$$\mathbf{J}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

when (2.8) does not hold, while at (2.8) there is a Jordan block:

$$\mathbf{J}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta}{2m} & 1 \\ 0 & -\frac{\eta}{2m} \end{pmatrix}. \qquad (2.13)$$

Diagonal elements in (2.12) and (2.13) are eigenvalues of matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$. Proofs c) and d) flow out from analyzing structure of the eigenvalues in (2.12) and (2.13).
The inhomogeneous Eq. (2.3) in a matrix form is

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{G}_{2\times 2} \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{p}_2, \qquad (2.14)$$

where $\mathbf{p}_2 = \left(0, {}^{p}\!/_{m}\right)$.

Remark 2.1. *a*) The outlined procedure of reducing the higher order differential equations to a system of differential equations of the first order is well known (e.g. [13]) and serves a basis for constructing the fundamental matrix method. Even the considered case of a single Kelvin's element demonstrates principle advantage of the matrix formalism (2.14) over the direct formalism based on Eq. (2.3). Indeed, while the direct formalism allows one to get solutions related only to the external force loadings $p(t)$, the matrix method gives solutions corresponding to both applied external force loadings $p(t)$ and the applied displacement $u(t)$. In the latter case

the external "loading" vector $\mathbf{p}_2$ is $\mathbf{p}_2 = (u, 0)$. Later on, we shall present some other advantages of the matrix formalism.

b) In a case, when $k = 0$ and matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ is degenerate, no vibration occurs:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-(c/m)t}. \qquad (2.15)$$

For the inhomogeneous Eq. (2.3) with oscillating force $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$, the corresponding solution (up to a free vibrating solution (2.15)) is

$$x(t) = \frac{p_0}{ic\omega - m\omega^2} e^{i\omega t}. \qquad (2.16)$$

Solution (2.16) reveals that at $\omega \to 0$ motion becomes unbounded, resembling motion of a viscous fluid.

c) When matrix $\mathbf{G}_{2\times 2}$ fails to be semisimple, the solution of Eq. (2.5) is of the form

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(c/2m)t}. \qquad (2.17)$$

Expression (2.17) reveals that at the non-semisimple degeneracy, no free vibrations occur.

3. STANDARD LINEAR ELEMENT.

Sometimes in applications instead of Kelvin's element a more general element called the standard linear element is used [14, 15]; see Fig.2. For that element the corresponding system of governing equations becomes a more elaborate:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \eta\dot{x}_2 + kx = 0 \\ x_1 + x_2 = x \\ \eta\dot{x}_2 = k'x_1 \end{cases}, \qquad (3.1)$$

where x_1 is a deflection of the spring k', and x_2 is a deflection of the dashpot. The natural physical limits for the material constants in Eqs. (3.1) are:

$$m > 0,\ k \ge 0,\ k' \ge 0,\ \eta \ge 0. \qquad (3.2)$$

Again, by introducing a new variable $v = \dot{x}$, system (3.1) can be reduced to the following system:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \eta\dot{x}_2 = k'(x - x_2) \\ m\dot{v} = -k'(x - x_2) - kx = 0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

or in a matrix form:

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{G}_{3\times 3} \cdot \mathbf{x}_3, \qquad (3.4)$$

where $\mathbf{x}_3 = (x, x_2, v)$ and

$$\mathbf{G}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k'/\eta & -k'/\eta & 0 \\ -(k+k')/m & k'/m & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Analogously to Eq. (2.14), the equation of forced vibrations for the standard linear element is:

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{G}_{3\times 3} \cdot \mathbf{x}_3 + \mathbf{p}_3, \qquad (3.6)$$

where $\mathbf{p}_3 = (0, 0, p/m)$ for the external force loading $p(t)$ and $\mathbf{p}_3 = (u, 0, 0)$ for the applied displacement $u(t)$.

Proposition 3.1. *a*) Matrix $\mathbf{G}_{3\times 3}$ is not degenerate, if and only if along with (3.2)

$$k' \ne 0,\ \ k \ne 0,\ \ \eta \ne 0. \qquad (3.7)$$

b) Matrix $\mathbf{G}_{3\times 3}$ admits non-semisimple degeneracy, if

$$\left(\frac{k}{m}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{k'}{m}\right),\quad \left(\frac{k'}{\eta}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{4}\sqrt{\left(\frac{k'}{m}\right)}. \quad (3.8)$$

c) Matrix $\mathbf{G}_{3\times 3}$ is a semistable matrix.

Proofs a) and b) are straightforward and flows out from analyzing the determinant and the Jordan normal form of $\mathbf{G}_{3\times 3}$. It should be noted that at (3.8) the corresponding Jordan block is of the third rank:

$$\mathbf{J}_{3\times 3}=\begin{pmatrix} -\sqrt{3/8\cdot k'/m} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3/8\cdot k'/m} & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3/8\cdot k'/m} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

To prove c) consider the eigenvalue problem for $\mathbf{G}_{3\times 3}$:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ k'/\eta & -k'/\eta-\lambda & 0 \\ -(k+k')/m & k'/m & -\lambda \end{pmatrix}=0 \quad (3.10)$$

Equation (3.10) is a polynomial equation with respect to λ:

$$-\lambda^3-\left(\frac{k'}{\eta}\right)\lambda^2-\left(\frac{k+k'}{m}\right)\lambda-\left(\frac{k'}{m}\right)=0 \quad (3.11)$$

with negative coefficients. Applying to Eq. (3.11) the *Descartes rule of signs* (e.g. [16]) reveals that there are no positive real roots. Similar argument shows that two possible complex-conjugate roots can have no positive real parts.

Remark 3.1. *a*) Relation (3.8) is not unique, at which the non-semisimple degeneracy takes place.

b) At (3.8) the free-vibration solution of Eqs. (3.1) is of the form:

$$x(t)=\left(C_1+C_2t+C_3t^2\right)e^{-t\sqrt{3/8\cdot k'/m}}, \quad (3.12)$$

thus at (3.8) no oscillating motion exists.

4. MAXWELL'S LINEAR ELEMENT.

Maxwell's linear element [15] represents a series connection of a spring and a dashpot; see Fig. 3. For such an element the governing system of equations is

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx_1=0 \\ x_1+x_2=x \\ \eta\dot{x}_2=kx_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

where x_1 is a deflection of the spring, and x_2 is a deflection of the dashpot. The natural physical limits for the material constants in Eqs. (4.1) are:

$$m>0,\ k>0,\ \eta>0. \quad (4.2)$$

Vanishing k or η leads to existence of only rigid motions of mass m.

By introducing a new variable $v=\dot{x}$, system (4.1) can be reduced to the following system:

$$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \eta\dot{x}_2=k(x-x_2) \\ m\dot{v}=-k(x-x_2)=0 \end{cases} \quad (4.3)$$

or in a matrix form:

$$\dot{\mathbf{x}}_3=\mathbf{G}_{3\times 3}\cdot\mathbf{x}_3, \quad (4.4)$$

where $\mathbf{x}_3=(x,x_2,v)$ and

$$\mathbf{G}_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k/\eta & -k/\eta & 0 \\ -k/m & k/m & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Proposition 4.1. *a*) Matrix $\mathbf{G}_{3\times3}$ is degenerate at any physically admissible values of parameters m,k,η.

b) Matrix $\mathbf{G}_{3\times3}$ is not non-semisimple degenerate.

c) The Jordan normal form of $\mathbf{G}_{3\times3}$ is:

$$\mathbf{J}_{3\times3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/2\eta+\sqrt{\left(k/2\eta\right)^2-k/m} & 0 \\ 0 & 0 & -k/2\eta-\sqrt{\left(k/2\eta\right)^2-k/m} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

d) Matrix $\mathbf{G}_{3\times3}$ is semistable.

Proof of conditions *a*) – *d*) is analogous to proof of Proposition 3.1.

Remark 4.1. *a*) Analysis of eigenvalues (4.6) reveals that at

$$\left(k/2\eta\right)^2 \geq k/m \tag{4.7}$$

there are no oscillating solutions.

b) The zero eigenvalue corresponds to a constant motion of the system.

5. CONCLUSIONS.

Analysis of the basic viscoelastic elements reveals that for all the considered cases their fundamental matrices are semistable, which ensures that no exponentially ascending solutions can exist. For Kelvin's and standard linear elements the non-semisimple degeneracy associated with appearing the Jordan blocks can take place. This results in change of the structure of the solution; see, representations (2.17) and (3.12). For Maxwell's linear element the non-semisimple degeneracy is impossible.

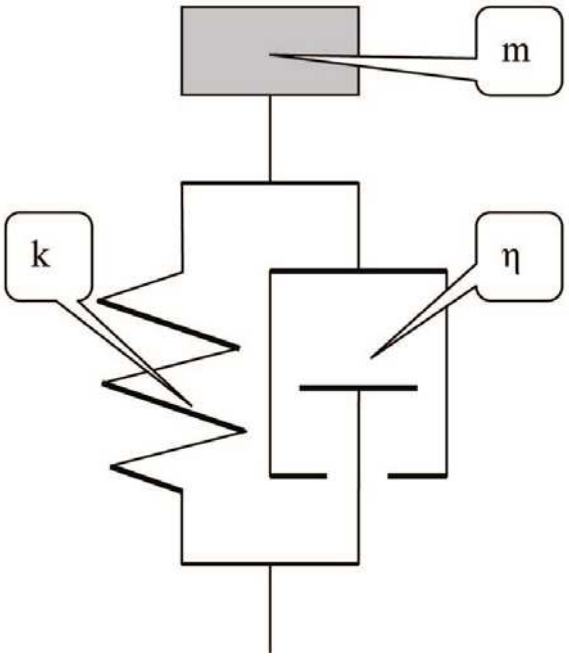


Figure 1. Kelvin's element

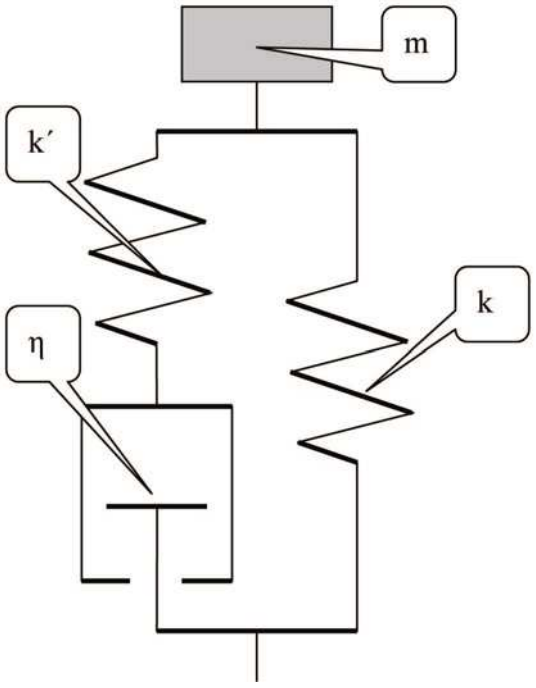


Figure 1. Standard linear element

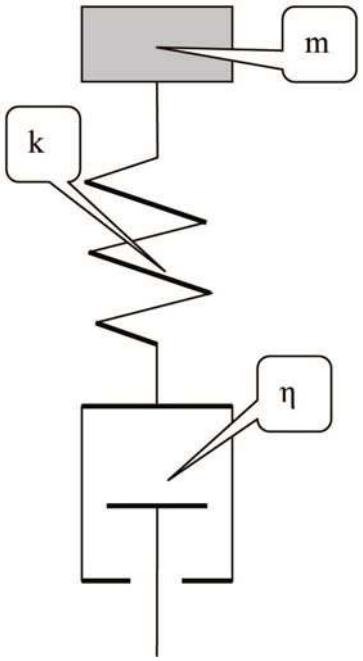


Figure 2. Maxwell's element

REFRENCES

1. **Raabe D.** Computational material science. The simulation of materials, microstructures, and properties, Wiley-VCH, Weinheim, 1998.
2. **Chakraborty G., Mallik A.K.** Dynamics of a weakly non-linear periodic chain, International Journal of Non-Linear Mechanics, 36 (2001) 375-389.
3. **Vakakis A.F., King M.E.** Non-linear wave transmission in a monocoupled elastic periodic system, J. Acoust. Soc. Am., 98 (1995) 1534 – 1546.
4. **Schlick T.** Molecular modeling and simulation, Springer, N.Y., 2002.
5. **Becker O.M., Mackerell Jr. A.D., Roux B., Watanabe M.** Computational biochemistry and biophysics, Marcel Dekker Inc., N.Y., 2002.
6. **Dekkerv H.** Vibrational dynamics of modern lightrail modules, Archive Appl. Mech., 77 (2007), in press.
7. **Kuznetsov A.S.** A new method for tuning of car suspensions (in Russian), The Integrated Scientific Journal, 23 (2005) 1 – 5.
8. **Aiken I.D.** Testing of seismic isolators and dampers - considerations and limitations, Proc. Structural Engineering World Congress, San Francisco, July, 1998.
9. **Chopra A.K.** Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
10. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.** Treatise on Natural Philosophy, Part.2, Cambridge, 1883.
11. **Voigt W.** Theoretischen Physik, Veit, Leipzig, 1895.
12. **Meyer C.D.** Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, N.Y., 2000.
13. **Hartman P.** Ordinary differential equations, John Wiley, N.Y., 1964.
14. **Harris C.M., Pierson A.G.** Harris' shock and vibration handbook, 5th ed., McGraw-Hill, N.Y., 2002.
15. **Bland D.R.** Theory of linear viscoelasticity, Oxford Univ. Press, 1960.
16. **Barbeau E.J.** Polynomials, Springer, N.Y., 1989.

Alexey Kuznetsov, University of Ballarat, School of Information Technology and Mathematical Sciences. University of Ballarat, Mt. Helen Campus, Victoria, Australia. E-mail: alexeykuznetsov@students.ballarat.edu.au.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

К.Р. Айдемиров
Дагестанский государственный технический университет, г. Махачкала, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматривается метод множителей Лагранжа в задачах синтеза оптимальной балочной конструкции. Данный подход может быть применен и развит при расчете и проектировании конструкций типа пластин, коробчатых и призматических систем и т.д.

Ключевые слова: множители Лагранжа, задача оптимизации, балочные конструкции

LAGRANGIAN MULTIPLIER METHOD FOR SYNTHESIS OF OPTIMAL BEAM STRUCTURE

K.R. Aydemirov
Dagestan State Technical University, Makhachkala, RUSSIA

ABSTRACT: Lagrangian multiplier method for synthesis of optimal beam structure is under consideration in the distinctive paper. Besides, it can be applied and developed for structural analysis and design of plates, box-type systems, prismatic systems and others.

Keywords: Lagrangian multiplier, optimization, beam structures

При проектировании конструкций необходимо обеспечить два основных противоречивых требовании – обеспечить надежность и прочность конструкции, и наибольшую экономию материала. Для этого имеет значение знание законов изменения массы (объёма) в зависимости от основных параметров конструкции. Такого типа задачи относятся к классу задач нелинейного программирования, которые содержат целевую функцию, соответствующую выбранному критерию оптимальности и систему ограничений, описывающие условия функционирования конструкций.

$$f = l \cdot U(x) \qquad (1)$$

$f(U;X)$ - функция объема, $U(x)$ - функция изменения площади поперечного сечения конструкции.

Система ограничений включает следующие условия: требования по прочности, устойчивости, гибкости, деформативности; ограничения по наибольшей первой частоте, ограничение на максимальную амплитуду колебании или, то же самое, на динамический прогиб стержня; габаритные ограничения для искомых параметров конструкции; ограничения на применяемый сортамент проката, марки стали, соединения элементов, ограничения, зависящие от условий изготовления, монтажа или эксплуатации конструкции.

Из этих ограничений при действии на конструкцию статической и динамической нагрузки, в качестве основных, учитываются следующие условия:

– по прочности

$$\sigma_j[U(x)] \le [\sigma]^{\pm} \qquad (2)$$

– по жесткости (по статическим прогибам)

$$\upsilon_j[U(x)] \le [\upsilon] \qquad (3)$$

– по динамической жесткости (по динамическим прогибам)

$$\upsilon_j^*[U(x)] \le [\upsilon_g] \qquad (4)$$

– по Эйлеровой устойчивости

$$\sigma_j^*[U(x)] \le [\sigma]_{кр} \qquad (5)$$

– по соблюдениям габаритов поперечного сечения конструкции

$$\begin{aligned} q_{1k}[U(k)] \le X(i) \le d_{1k}[U(k)] \\ q_{2k}[U(k)] \le B(i) \le d_{2k}[U(k)] \end{aligned} \qquad (6)$$

где $j = 1, n$ - число участков балки по ее длине на которые она разбивается при аппроксимации функции $U(x), k = 1, m$ – число параметров проектирования; $[\sigma]^{\pm}$ - допускаемое напряжение соответственно на растяжение и сжатие; $[\upsilon]$- величина допускаемого перемещения (прогиба); $[\upsilon_g]$ - допускаемый динамический прогиб; $[\sigma]_{кр}$ - критическое напряжение потери устойчивости; q_{ik} и d_{ik} - нижние и верхние границы размеров поперечного сечения. Помимо (2-5), следует принять дополнительные ограничения, в соответствии с физическим смыслом задачи, так как переменные параметры (размеры поперечного сечения) не могут быть отрицательными: $X(i) > 0; \quad B(i) > 0.$

Помимо классических методов анализа [3-4], [5-7], из методов математического программирования в решении оптимизационных задач может удачно применяться вариационный метод Лагранжа и его модификации, которые приводят задачу к решению системы уравнений типа Эйлера. В случае сведения условной экстремальной задачи синтеза оптимальной конструкции к безусловной, для решения возможно использовать методы сопряженных градиентов, Ньютона, методы прямого поиска Хука-Дживса, Нелдера-Мида и т.д. [4-7]. Условия оптимизации при динамических воздействиях могут быть приняты либо по наибольшей первой частоте колебаний, либо по максимальной амплитуде вынужденных колебаний [3,4].

Апробацию предлагаемой в работе методики решения оптимизационной задачи, проводится на консольных балочных конструкциях квадратного, прямоугольного, треугольного и круглого поперечного сечений при статических и динамических воздействиях. Такого типа конструкции являются элементами несущих частей разного типа сооружений, а также конструкций строительных и дорожных машин (рис. 1,2).Материал считается линейно-упругим. В качестве нагрузки принята сосредоточенная сила, приложенная на конце консоли. В общей постановке, сделанной выше (условия 1-6), где на первом этапе рассматривается задача с активными и близкими к активным ограничениями, на следующих этапах расчета учитываются ограничения второстепенного значения, так как концепция синтеза конструкции после первого этапа, чаще всего, остается незавершенной. Аппроксимирующая функция U(x) предлагается такой(см.рис.1,а), что

$$\lim_{i \to \infty} \psi(i) = U(x), \text{ причем}$$

$$\psi(i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i, \quad (n = 1,2,.....,n) \qquad (7)$$

Принимая на первом этапе синтеза за активное ограничение -ограничение по жесткости (3), вычисление интеграла Мора для каждого i - того участка получена в виде функции, включающей нагрузку, жесткостные характеристики материала и некоторый полином, зависящий только от числа участков, на которые разбивается конструкция при аппроксимации

$$\Phi(i) = 3 \cdot i^2 - 3 \cdot i + 1 \qquad (8)$$

где i - номер участка, по длине которого поперечное сечение постоянно.

Учитывая (7), (8), функция цели (1) и ограничения (3) примут вид:

$$f(x) = \frac{l}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i \Rightarrow \min; \qquad (9)$$

$$\frac{Pl^3}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{C_e}{E_i \cdot b_i \cdot X_i^3} \cdot \Phi(i) \le [\upsilon], \qquad (10)$$

где E_i - модуль упругости материала каждого участка, P - действующая на конце консоли сосредоточенная сила, C_e - коэффициент зависящий от формы поперечного сечения (см. рис. 1,б) ($C_1 = C_2 = 12$ для квадратного и прямоугольного сечения, $C_3 = 9/2$ - для треугольника, и $C_4 = 4$ для круга); b_i , X_i - ширина и высота поперечного сечения.
Если в (10) обозначить

$$d_{n,e} = \frac{3n^3 \cdot E \cdot [\upsilon]}{C_e \cdot P \cdot l^3}, \quad (n = 1,2,...,\infty; \;\; e = 1,2,3,4), \qquad (11)$$

то это ограничение примет вид

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi(i)}{b_i \cdot X^3{}_i} - \alpha_n, e = 0 \qquad (12)$$

Вспомогательная функция метода неопределенных множителей Лагранжа формируется в следующем виде:

$$Л = f(x) + \lambda_k \cdot g \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (13)$$

или

$$Л = \frac{l}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i + \lambda_k \cdot \left[\sum b_i^{-1} \cdot X_i^{-1} \cdot \Phi(i) - \alpha_n, e\right]\right\} \qquad (14)$$

где f(x) - вычисляется по (9), g (x_k)- является функцией вида (12).
Если функция цели (9) достигает экстремума при ограничениях (12), то метод Лагранжа приводит к уравнениям типа Эйлера:

$$\partial Л \Big/ \partial X_k = Л_{xk} = 0; \quad (k = i, \quad i+1, ..., m) \qquad (15)$$

и для квадратного и прямоугольного поперечного сечений они примут вид:

$$Л_{xk}^{(e=1)} = 1 - 2\lambda X_i^{-6} \Phi(i) = 0 \qquad (16)$$

$$Л_{xk}^{(e=2)} = 1 - 3\lambda X_i^{-6} \Phi(i) = 0 \qquad (17)$$

откуда:

$$X_i^{(e=1)} = \sqrt{2\lambda \Phi(i)}; \quad X_i^{(e=2)} = \sqrt{3\lambda \Phi(i)} \qquad (18)$$

Подставив соответствующие $X_i^{(e)}$ из (18) в условие (12), с учетом (11) и обозначения

$$\alpha_0 = \frac{E^l[\upsilon]}{Pl^3},$$

получим

$$\lambda_{(e=1)} = 4n^{-9/2} \cdot \alpha_0^{-3/2} \cdot \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Phi(i)}\right]^3} \qquad (19)$$

$$\lambda_{(e=2)} = \frac{\sqrt[3]{256}}{3n^4 \sqrt[3]{b^4 \alpha_0^4}} \left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{\Phi(i)}\right]^{4/3} \qquad (20)$$

Формулы (18), после подстановки в них выражений для λ по (19, 20) примут вид:

$$X_i^{(e=1)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{\Phi(i)} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sum_{i=1}^{n} [\Phi(i)^{1/3}]}{\alpha_0 n^3}} \qquad (21)$$

$$X_i^{(e=2)} = \frac{\sqrt[3]{4}}{n \sqrt[3]{b \alpha_0}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{\Phi(i)}\right]^{1/3} \sqrt[4]{\Phi(i)} \qquad (22)$$

Последовательно вычислив значения λ и X_i для различного числа участков (n) аппроксимирующей функции, находим соответствующие значения целевой функции, (объема) по формуле (9). Критерием остановки процесса является выполнение условия

Таблица

	e=1 (сечение квадратное)				e=2 (сечение прямоугольное)		
n λ, X_i	n=1	n=2	n=3	n λ, X_i	n=1	n=2	n=3
λ	$\frac{4}{\sqrt{\alpha_0^3}}$	$\frac{0.8788}{\sqrt{\alpha_0^3}}$	$\frac{0.376}{\sqrt{\alpha_0^3}}$	λ			
X_1	$\frac{1.4314}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	$\frac{1.0986}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	$\frac{0.9356}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	X_1	$\frac{1.5874}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$	$\frac{1.095}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$	$\frac{1.881}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$
X_2	-	$\frac{1.52}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	$\frac{1.32}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	X_2	-	$\frac{1.7813}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$	$\frac{1.443}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$
X_3	-	-	$\frac{1.5577}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$	X_3	-	-	$\frac{1.852}{\sqrt[3]{b\alpha_0}}$

$$f(U^k) - f\left(U^{k-1}\right) < \varepsilon \qquad (23)$$

где ε - наперёд заданное малое число,

Вычисленные по предложенной методике параметры оптимизации, и множители Лагранжа при различном числе участков ступенчато-переменного сечения, на которые разбивается балка при аппроксимации, представлены в таблице.

График изменения некоторого приведенного объема f^* от n показан на рис,2, где

$$f^* = f\sqrt{\alpha_0 / l}\ .$$

Как видно, эта кривая асимптотически стремится к точному и самому наименьшему значению f^*=1,61, при $n \to \infty$, [2].

Предложенная методика позволяет найти не только одно единственное экстремальное значение функции цели, с подсчетом соответствующего этому значению определенного числа ступеней балки, а дает возможность проследить за всем ходом вычисления локальных экстремумов в пространстве R, которые могут являться глобальными в пространстве R^n (т.е. для каждого конкретно выбранного числа участков ступеней балки с постоянным поперечным сечением). Поэтому, предложенный алгоритм может быть с успехом принят при проектировании оптимального варианта ступенчатой конструкции с определенным наперёд заданный числом участков и проектировщик сможет получить оптимальный вариант конструкции при любом числе участков (n) ступенчато - переменного сечения.

В практических расчетах оказывается достаточным ограничиться числом участков n=3 или 4, так как такие конструкции легче изготавливаются чем переменного сечения и довольно близки к оптимальным (см. рис.3, а, б). Экономия в расходе материала при оптимальной трехступенчатой консольной балке по сравнению с балкой постоянного сечения составляет 16,5%, а при четырех ступенчатой - 17,3%. При сравнении этих вариантов оптимальных конструкций с точным расчетом проигрыш в расходе материала составляет всего 1,7-2,3%. На основе проведенных численных исследований двух типов балок сделан некоторый анализ оптимальной балки. Пусть эти балки, в оптимальном варианте, имеют одинаковый минимальный объём

$$f_{1,\min} = f_{2,\min}$$

или

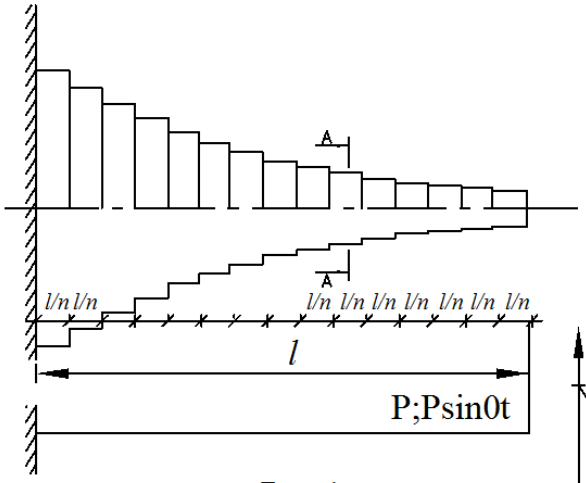


Рис.1,а

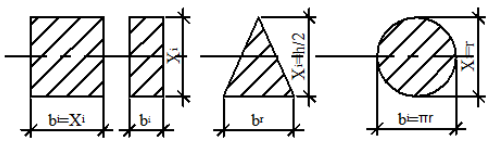


Рис.1,б

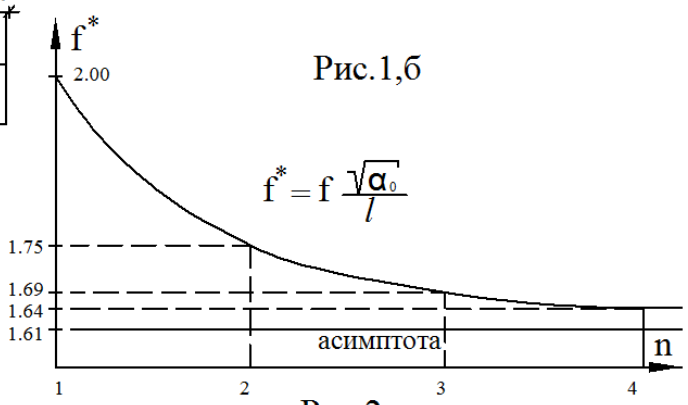


Рис.2

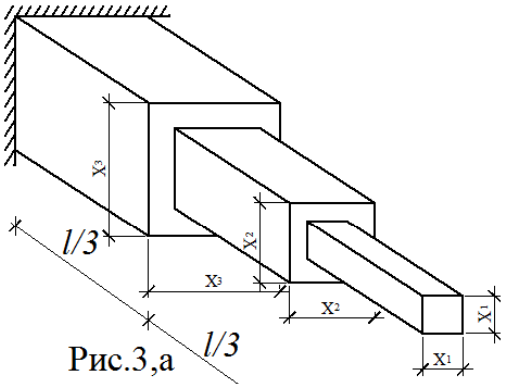


Рис.3,а

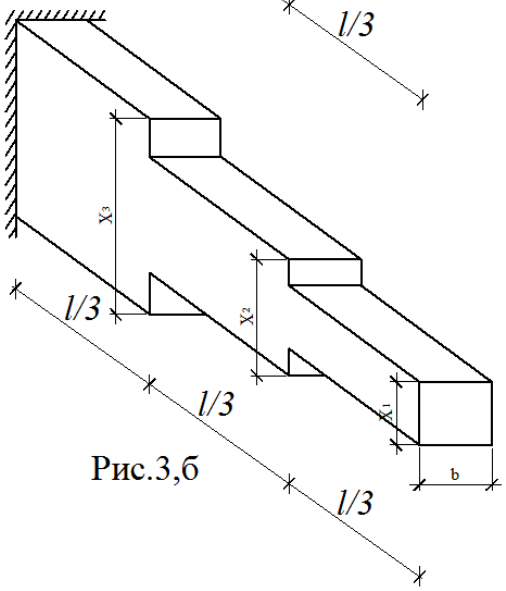


Рис.3,б

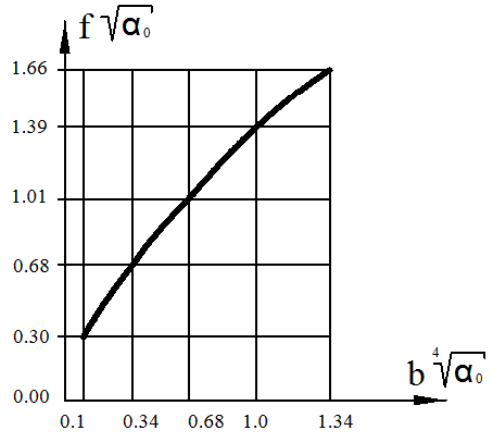


Рис.4

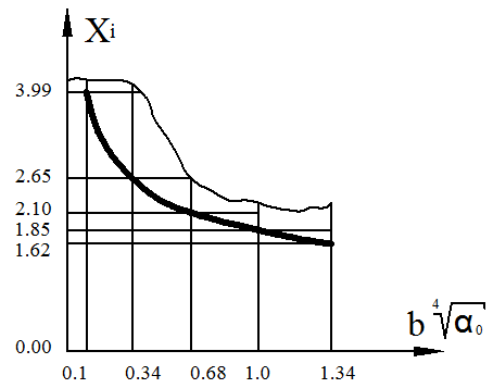


Рис.5

$$\frac{1.663}{\sqrt{\alpha_0}} = \frac{1.39l\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{\alpha_0}} \qquad (24)$$

откуда находим ширину сечения для второй балки

$$b = \frac{1.34}{\sqrt[4]{\alpha_0}} \qquad (25)$$

Построим графики изменения ширины " b " от объёма " f " и высоты сечения X_i (см. рис.4,5).

Изучив график на рис.4 следует отметить, что экономичным по расходу материала является балка с шириной поперечного сечения

$$b = \frac{0.1}{\sqrt[4]{\alpha_0}}$$

и объёмом

$$f = \frac{0.3}{\sqrt{\alpha_0}},$$

однако при этом, что видно из другого графика (рис.5), высота сечения увеличивается. Если такая высота является допустимой по конструктивным требованиям и отсутствуют другие ограничения, то при

$$f_{\min} = \frac{0.3}{\sqrt{\alpha_0}}, \quad b = \frac{0.1}{\sqrt[4]{\alpha_0}} \text{ и } X_3=3.99$$

– представляется оптимальным решением.

Если полученный вариант балки не проходит по конструктивным, технологическим и другим ограничениям, то в зависимости от этих ограничений, используя графики на рис.4 и 5, можно подобрать другой вариант, может быть более материалоемкий, но оптимальный, с другими управляющими параметрами. Обобщив результаты исследований, следует сказать, что эти два графика (рис.4 и 5) определяют область оптимальных решений рассмотренной конструкции при определенных ограничениях, принятых за основные (критические). Тем самым, инженер - проектировщик имеет некоторый произвол в этой области и при определяющих ограничениях возникающих в процессе синтеза конструкций, во втором и далее этапам, корректирует решение внутри границы области оптимальных решений. Такой метод оптимизации конструкций напоминает метод поэтапной (или неполной) оптимизации [1], где ограничения на рациональную конструкцию формируются после первого этапа. Тем самым, показана методика определения границ области оптимальных решений, внутри которой проектировщик сможет сузить область и выбрать оптимальный вариант с учетом еще дополнительных ограничений.

Полученные числовые результаты могут быть использованы в расчетах и проектировании подобного типа оптимальных конструкций на статическое и динамическое воздействие. Предложенная методика может быть применена и развита при расчете и проектировании конструкций типа пластин, коробчатых и призматических систем и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Геммерлинг А.В.** О методах оптимизации конструкций. Строительная механика и расчёт сооружений – 1971 г. №2 – с. 32-37
2. **Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А.** Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. издат. Ленинградского Университета, 3, 1980. 208 с.
3. **Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А.** К оптимальному проектированию балок при динамических нагрузках. Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. - №4 – с. 12-14.

4. **Рейтман М.И, Шапиро Г.С.** Методы оптимального проектирования деформируемых тел.М.: Наука, 1976. 266 с.
5. **Сергеев Н.Д., Багатырев А.И.** Проблемы оптимального проектирования конструкций. Л.: 1971. 134 с.
6. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. пер. с англ. М.: Мир 1975. 534 с.
7. **Хог Э., Арора Я.** Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции. пер. с англ. М.: Мир 1980. 479 с.

К.Р. Айдемиров, кандидат технических наук, доцент, Дагестанский государственный технический университет. Россия, г Махачкала, просп. Имама Шамиля, 70, E-mail: dstu@dstu.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 5(1&2) 70-75 (2009)

СТРУКТУРА РЕЦИРКУЛЯЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ И МАССОПЕРЕНОС ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ГИДРОТЕХНИЧЕСКОМ ОТСТОЙНИКЕ

В.К. Ахметов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: На основе численного решения полной системы уравнений Навье–Стокса исследована задача о движении потока вязкой жидкости в камере гидротехнического отстойника. В рамках конвективно-диффузионной модели изучен процесс переноса и осаждения мелких малоинерционных частиц. Проведено сравнение полученных расчетных данных с результатами экспериментов.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, рециркуляционные течения, конвективно-диффузионная модель, осаждение частиц

STRUCTURE OF A RECIRCULATING FLOW AND MASS TRANSFER OF RIGID PARTICLES IN HYDROTECHICAL SETTLE CONSTRUCTION

Vadim K. Akhmetov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: On the basis of numerical solution of the complete Navier–Stokes equations the problem of motion of a viscous flow in hydrotechnical settle construction is investigated. The mass transfer and the deposition processes for fine low-inertia particles are studied following convection-diffusion model. The comparison of obtained calculated dates with experimental results is presented.

Keywords: Navier–Stokes equations, recirculating flow, convection-diffusion model, deposition of particles

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гидротехническом строительстве одной из важнейших задач является удаление донных и взвешенных наносов из потоков воды, поступающих в энергетические, ирригационные и водохозяйственные водоводы. Удаление донных наносов может быть осуществлено за счет соответствующей конструкции водозабора без строительства специальных сооружений. Для осаждения взвешенных наносов требуется возведение дорогостоящих отстойников, в которых частицы оседают на дно под действием силы тяжести. Знания гидродинамики потока необходимы для создания дополнительных благоприятных условий, способствующих наиболее быстрому и эффективному осаждению наносов. Физическое моделирование течений в устройствах такого типа представляет собой достаточно трудоемкую задачу. Поэтому математическое моделирование течений в отстойнике с учетом осаждения частиц является актуальной задачей.

Одна из простейших конструкций, применяемая для этой цели, изображена на рис. 1 и имеет следующий принцип работы. Из подводящего канала вода попадает в камеру отстойника, минуя порог, представляющий собой внезапное углубление высотой h. В камере отстойника формируется развитая рециркуляционная зона. Придонное течение в камере транспортирует осевшие частицы наносов к входному порогу, в нижней части которого располагается промывная щель. Через нее наносы сбрасываются в нижний бьеф сооружения.

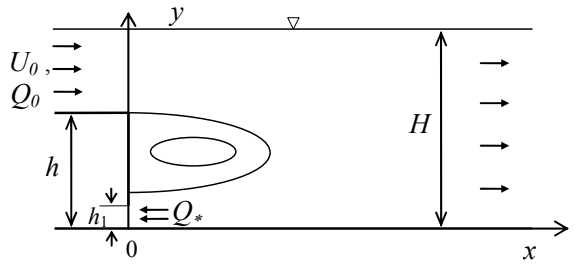


Рис. 1. Схема течения

В качестве математической модели течения в камере отстойника рассмотрим задачу о движении потока вязкой несжимаемой жидкости через порог высотой h, в нижней части которого имеется сток с заданным расходом Q_*. Введем декартовую систему координат Oxy с центром в основании порога. Система уравнений Навье–Стокса, описывающая ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока ψ и завихренность Ω, может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(V_x\Omega)+\frac{\partial}{\partial y}(V_y\Omega)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\Omega, \quad (2)$$

$$V_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \Omega=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (3)$$

Здесь V_x, V_y – осевая и поперечная компоненты скорости соответственно, отнесенные к характерному значению осевой скорости U_0 на входе в отстойник, $\mathrm{Re}=U_0 h/\nu$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость жидкости.

Предполагается, что граница свободной поверхности является прямой $y=y_k=\mathrm{const}$, параллельной оси x. Течение рассматривается в прямоугольной области G ($0\le x\le x_k$, $0\le y\le y_k$). Величина $y_k=H/h$ характеризует глубину потока в камере отстойника (y_k^{-1} – высота порога), а $y_1=h_1/h$ – размер промывного отверстия.

Граничные условия для системы (1)–(3) ставятся следующим образом. На входе в камеру отстойника при $x=0$, $1\le y\le y_k$ задается равномерный осевой поток с расходом Q_0 и скоростью U_0. При $x=0$, $0\le y\le y_1$ имеем сток с относительным расходом $Q_1=Q_*/Q_0$ и параболическим распределением скорости. На твердых поверхностях при $0\le x\le x_k$, $y=0$ и $x=0$, $y_1\le y\le 1$ задаются условия прилипания. На поверхности жидкости $0\le x\le x_k$, $y=y_k$ ставятся условия равенства нулю касательных напряжений, а в выходном сечении $x=x_k$, $0\le y\le y_k$ – мягкие граничные условия, заключающиеся в требовании равенства нулю производных от ψ и Ω по x. Совокупность граничных условий может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
&\psi=\psi_0(y), \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad 1\le y\le y_k,\\
&\psi=\psi_1(y), \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad 0\le y\le y_1,\\
&\psi=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \quad x=0, \quad y_1\le y\le 1, \quad (4)\\
&\psi=\psi_1(0)=\mathrm{const}, \ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \ y=0, \ 0\le x\le x_k,\\
&\psi=\psi_0(y_k)=\mathrm{const}, \ \Omega=0, \ y=y_k, \ 0\le x\le x_k,\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x}=0, \quad x=x_k, \quad 0\le y\le y_k,\\
&\psi_0(y)=y-1,\\
&\psi_1(y)=\frac{3}{2y_1}Q_1\left[4\left(\frac{y^2}{2y_1}-\frac{y^3}{3y_1^2}\right)-\frac{2}{3}y_1\right].
\end{aligned}$$

Для численного решения краевой задачи (1)–(3) с граничными условиями (4) использовался конечно-разностный метод, изложенный в [1, 2].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ

Расчеты течения в камере отстойника, определяемые краевой задачей (1)–(3), проводились при значениях $\mathrm{Re} = 100$; 150; 200; 250; $y_1 = 0{,}1$, $y_k = 1{,}7$; 1,8; 1,9; 2; 2,1. Основное внимание уделялось изучению образования зоны возвратного потока за порогом и исследованию зависимости длины этой зоны от высоты порога и интенсивности стока в промывное отверстие. По результатам вычислений строились картины линий тока и профили скорости в различных сечениях потока. В расчетах использовалась сетка 81×257 с длиной расчетной области $x_k = 20$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 0{,}1 \div 0{,}3$.

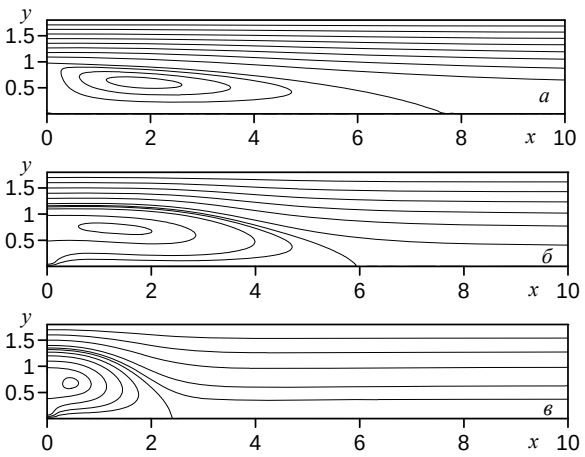


Рис. 2. Линии тока при $\mathrm{Re} = 150$; $y_k = 1{,}8$; $Q_1 = 0$; 0,2; 0,4 (*а–в*)

Рассмотрим наиболее важные свойства исследованных течений на примере расчетных данных, полученных при $\mathrm{Re} = 150$, $y_k = 1{,}8$. При отсутствии стока приходим к задаче о «чистом» обтекании порога (ступеньки). В этом случае непосредственно за порогом образуется так называемая застойная зона, внутри которой линии тока замкнуты и жидкость совершает циркуляционное течение (рис. 2, *а*). Наличие стока жидкости в основании порога $(Q_1 = 0{,}2)$ приводит к тому, что у дна камеры отстойника появляется область противотока, которая отжимает застойную зону вверх (рис. 2, *б*). В непосредственной близости от промывного отверстия характер линий тока напоминает течение, соответствующее решению классической задачи об истечении жидкости из резервуара. С увеличением расхода жидкости в промывное отверстие $(Q_1 = 0{,}4)$ длина зоны возвратного течения уменьшается (рис. 2, *в*).

Экспериментальные исследования течений в камере отстойника, схема которого изображена на рис. 1, проводились сотрудниками кафедры использования водной энергии МГСУ. Модель отстойника была выполнена из оргстекла в виде лотка со входным порогом. Общая длина лотка составляла 5050 мм, длина подводящего канала – 1200 мм, длина камеры отстойника – 2800 мм. Вода в головную часть отстойника подавалась насосом с расходом жидкости $Q_0 = 3 \div 15$ л/с, число Рейнольдса составляло $\mathrm{Re} \sim 10^4 - 10^5$. По данным измерений строились картины линий тока и определялась длина зоны возвратного течения.

Результаты экспериментов можно сравнить с полученными численными решениями на основе понятия об эффективных параметрах течения. Введем для этого в соответствии с гипотезой Прандтля величину длины пути смешения ℓ, которая связана с турбулентной вязкостью ν_t следующим образом: $\ell^2 = \nu_t (\partial V_x / \partial y)^2$. Эффективная вязкость в потоке ν_{eff} определяется суммой $\nu_{\mathrm{eff}} = \nu + \nu_t$, причем $\nu_t >> \nu$. Взяв известную величину $\ell \approx 0{,}11$ для течений такого типа и оценив величину $\partial V_x / \partial y$ из экспериментальных данных, получим, что эффективное число Рейнольдса составляет $\mathrm{Re}_{\mathrm{eff}} = U_0 h / \nu \approx \approx 140 - 150$.

На рис. 3 показано сравнение длины L зоны возвратного течения, рассчитанной путем решения краевой задачи (1)–(9) с экспериментальными данными, полученными на вышеуказанной гидравлической модели. Точками отмечены данные экспериментов для этого же диапазона изменения высоты

порога. Видно, что имеется достаточно хорошее соответствие теории с экспериментом. В целом за счет выбора соответствующего эффективного числа Рейнольдса удается правильно описывать крупномасштабные вихревые структуры (такие, как рециркуляционные зоны).

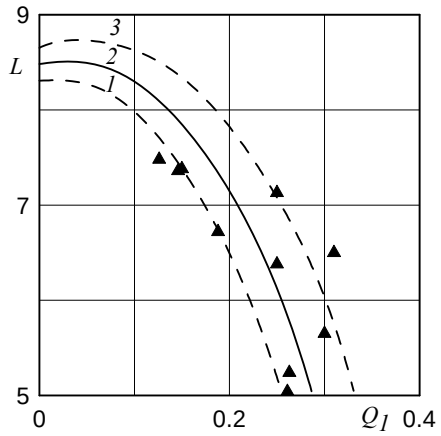


Рис. 3. Сравнение расчетной длины рециркуляционной зоны при Re=145, $y_k = 1{,}65;\ 1{,}7;\ 1{,}75$ (кривые *1–3*) с экспериментом

3. ПОСТАНОВКАЗАДАЧИ ОБ ОСАЖДЕНИИ ЧАСТИЦ В ОТСТОЙНИКЕ

Уравнения движения частиц под действием силы тяжести и силы вязкого сопротивления (стоксова сила) в цилиндрической системе координат и безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{dV_{xs}}{dt} = \frac{1}{2\,\mathrm{St}}(V_x - V_{xs}) \ , \qquad (5)$$

$$\frac{dV_{ys}}{dt} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{1}{2\,\mathrm{St}}(V_y - V_{ys}) \ , \qquad (6)$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0^2}{g\,h}, \qquad \mathrm{St} = \frac{\rho_s r_s^2 U_0}{9\nu\rho\, h} \ ,$$

представляющие собой числа Фруда и Стокса соответственно, а индекс s относится к частицам. При условии $\mathrm{St} << 1$, что имеет место в большинстве случаев течений в отстойниках, из (5) следует, что продольная скорость частиц совпадает со скоростью основного потока ($V_{xs} = V_x$).

Скорость движения частицы V_{ys} в поперечном направлении будем определять из уравнения (6), которое при условии стационарности потока ($\partial / \partial t = 0$) примет вид:

$$V_{ys}\frac{\partial V_{ys}}{\partial r} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}} + \frac{1}{2\,\mathrm{St}}(V_y - V_{ys}) \ . \qquad (7)$$

Рассмотрим процесс переноса частиц для рассчитанных течений в п. 2. Уравнение сохранения массы частиц записывается в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_x\, c) + \frac{\partial}{\partial y}(V_{ys}\, c) = \frac{1}{\mathrm{Re\,Sc}}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \qquad (8)$$

в котором c – концентрация частиц, $\mathrm{Sc} = \nu / D$ – число Шмидта, D – коэффициент диффузии. Конвективно–диффузионное уравнение вида (15) применялось для моделирования течений смесей с потерей массы частиц осаждением на стенках, например в [3, 4]. Распределение V_{ys} в (8) определялось из решения уравнения (7).

Предполагая, что примесь из частиц вводится в основной поток в начальном сечении $x = 0$ при $y_{s1} \le y \le y_{s2}$ ($y_{s1} > 1$, $y_{s2} < y_k$), запишем граничные условия для уравнения (8) в виде:

$$\begin{aligned} &x = 0: \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad 0 \le y \le y_{s1}, \quad y_{s2} \le y \le y_k; \\ &\qquad\qquad c = 1, \quad y_{s1} \le y \le y_{s2} \\ &x = x_k: \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad 0 \le y \le y_k \ , \\ &y = 0, \quad y = y_k: \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad 0 \le x \le x_k \ . \end{aligned} \qquad (9)$$

Краевая задача (8), (9) решалась методом установления по разностной схеме, применяемой для уравнения переноса завихренности (1).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИЙ

Численное решение задачи о распределении концентрации частиц для рассчитанных выше течений проводилось в диапазоне параметров $\mathrm{Sc} = 1-5$, $\mathrm{St} = 10^{-4} - 10^{-5}$.

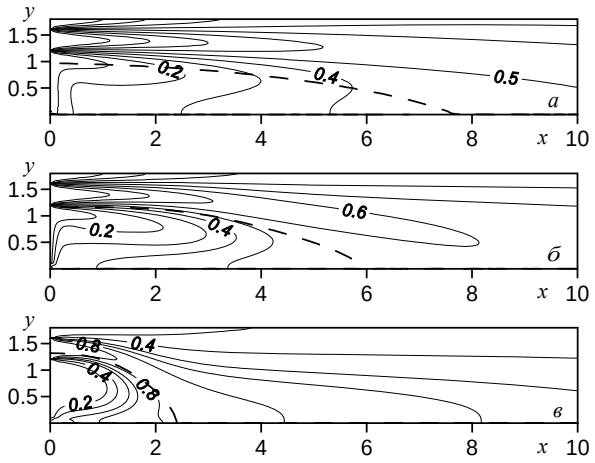


Рис. 4. Линии постоянных значений концентрации при $\mathrm{Re} = 150$; $y_k = 1{,}8$; $\mathrm{Fr} = 0{,}01$; $\mathrm{St} = 5 \cdot 10^{-5}$; $Q_1 = 0;\ 0{,}2;\ 0{,}4$ (*а-в*)

Наиболее характерные результаты расчетов представлены на рис. 4 в виде линий равной концентрации. Штриховой линией на этих рисунках изображен контур зоны возвратного течения. Внутри нее линии равной концентрации имеют зигзагообразный вид, причем в придонной области (рис. 4, *а*) обратное течение способствует переносу частиц в сторону начального створа и наличие промывного отверстия в головной части отстойника позволяет эффективно удалять из потока взвешенные наносы. Увеличение расхода Q_1 в промывное отверстие (рис. 4, *б*, *в*) приводит к более интенсивному осаждению частиц; линии равной концентрации сильнее отклоняются ко дну камеры отстойника; значительно повышается концентрация частиц в области возвратного течения.

На рис. 5 показано сравнение в распределениях поперечной скорости V_y основного потока и скорости V_{ys} осаждения частиц. Различие в характере распределения заметно только на небольшом расстоянии $x = 0{,}234$ (кривые *1*, *6*) от входного сечения. Далее вниз по потоку профиль V_y отличается от профиля V_{ys} практически на постоянную величину, соответствующую безразмерной скорости осаждения частиц в покоящейся жидкости $V_{ys}^* = -2\,\mathrm{St}/\mathrm{Fr}$.

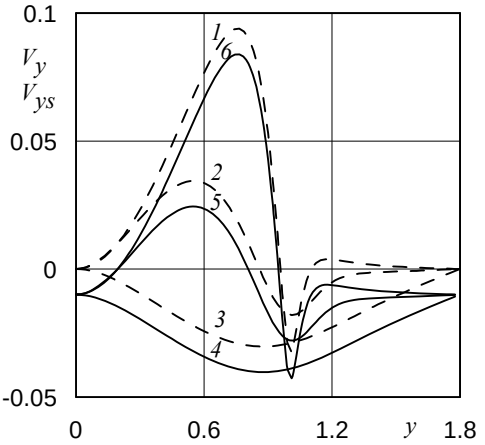


Рис. 5. Распределение радиальной скорости V_y (кривые *1–3*) и скорости осаждения V_{ys} (кривые *4–6*) при $\mathrm{Re} = 150$, $Q_1 = 0$, $y_k = 1{,}8$, $z = 0{,}234;\ 0{,}938;\ 5$

Характер отложения частиц на дно отстойника иллюстрируется распределениями концентрации c и потока концентрации $V_{ys}c$ при $y = 0$, представленный на рис. 6. По этим зависимостям можно определить расстояние, на котором происходит максимальное осаждение частиц. С увеличением расхода Q_1 в промывное отверстие местоположение максимума в распределении c и $V_{ys}c$ становится более выраженным и смещается вверх по потоку к входному сечению.

Для более наглядного представления процесса осаждения частиц в камере отстойника введем следующие интегральные характеристики: расходы частиц Q_{out} через выходное сечение $x = x_k$, Q_b – на дно отстойника при

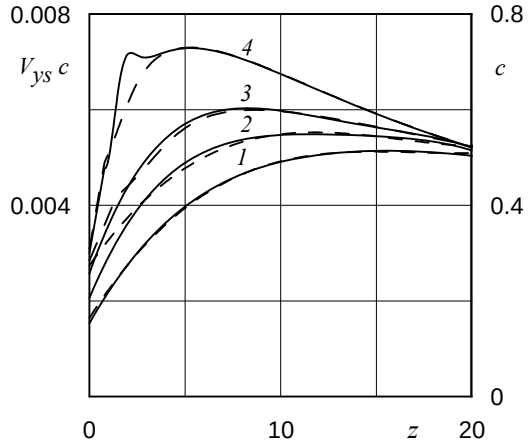


Рис. 6. Распределение концентрации c (штриховые линии) и потока концентрации $V_{ys}c$ (сплошные линии) при $y=0$, $\mathrm{Re}=150$, $y_k=1{,}8$, $Q_1=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$ (кривые *1–4*)

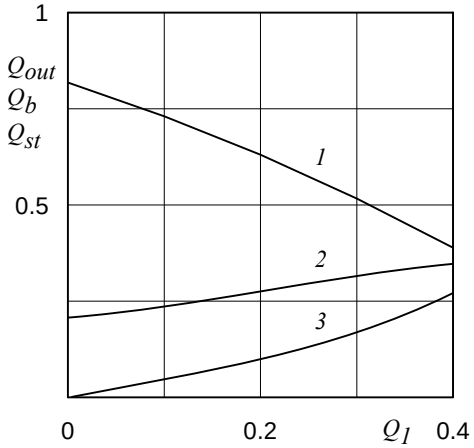


Рис. 7. Зависимости расходов частиц Q_{out}, Q_b, Q_{st} (кривые *1–3*) от величины стока Q_1 при $\mathrm{Re}=150$, $y_k=1{,}8$, $\mathrm{Fr}=0{,}01$, $\mathrm{St}=5\cdot10^{-5}$

$y=0$, Q_{st} – в промывное отверстие при $x=0$, $0\le y\le y_1$:

$$Q_{out}=\int_0^{y_k}(V_x\,c)\big|_{x=x_k}dy,\quad Q_b=-\int_0^{x_k}(V_{ys}\,c)\big|_{y=0}dx,$$

$$Q_{st}=-\int_0^{y_1}(V_x\,c)\big|_{x=0}dy.$$

Общий расход $Q_{out}+Q_b+Q_{st}$, отнесенный к расходу Q_{in} частиц в начальном сечении

$$Q_{in}=\int_{y_{s_1}}^{y_{s_2}}(V_x\,c)\big|_{x=0}dy$$

в соответствии с законом сохранения массы должен быть равен единице. Это свойство использовалось для контроля точности вычислений.

Зависимости Q_{out}, Q_b, Q_{st}, отнесенные к Q_{in}, от величины расхода Q_1 показаны при $\mathrm{Re}=150$, $y_k=1{,}8$ на рис. 7. На них также видно, что увеличение расхода жидкости в промывное отверстие приводит к более интенсивному отложению частиц на дно камеры отстойника, в то время как расход частиц Q_{st} непосредственно в промывное отверстие увеличивается незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Взаимодействие струи с кольцевым закрученным потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 2. С. 39–46.
2. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Численное исследование рециркуляционных зон в вихревой камере // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 3. С. 39–45.
3. **Tsai R., Chang Y.P., Lin T.Y.** Combined effects of thermophoresis and electrophoresis on particle deposition onto a wafer // J. Aerosol Sci. 1998. V. 29. № 7. P. 811–825.
4. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Распыление порошка закрученным потоком с зоной рециркуляции // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 6. С. 3–15.

Ахметов Вадим Каюмович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26, E-mail: ipm@mgsu.ru

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЧАСТЬ 1: ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья открывает серию работ авторов, посвященную рассмотрению вопросов использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для определения собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики. Область применения ДКМКЭ составляют объекты, в которых имеется постоянство физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (называемому основным направлением) при произвольно меняющихся внешних нагрузках и любом характере закреплений. ДКМКЭ являются дискретно-континуальным в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием техники метода конечных элементов (в итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов). Изложение ведется для двумерной задачи теории упругости.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, краевая задача, собственное значение, собственная функция, двумерная теория упругости.

APPLICATIONS OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEMS IN STRUCTURAL MECHANICS PART 1: TWO-DIMENSIONAL ELASTIC THEORY

Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov, Oleg A. Kozirev
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to use of discrete-continual finite element method for solving of eigenvalue problems of two-dimensional elastic theory. Operational and variational formulations are presented. The discrete-continual design model for structures with constant physical and geometrical parameters in one direction is offered on the basis of so-called discrete-continual finite elements. Element coordinate system and approximation of nodal unknowns are under consideration. Special generalized block-structured stiffness matrix of discrete-continual finite element are assembled. Resultant discrete-continual operational formulation is given. Effective computing algorithms for eigenvalues and eigenvectors are presented as well. All methods and algorithms considered in the distinctive paper have been realized in software engineering.

Key words: of discrete-continual finite element method, boundary problem, eigenvalue problem, two-dimensional elastic theory

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматриваются вопросы использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Область применения ДКМКЭ составляют объекты, в которых имеется постоянст-

во физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (называемому основным направлением) при произвольно меняющихся внешних нагрузках и любом характере закреплений. Примерами таких объектов выступают балки, балки-стенки, тонкостенные стержни, полосы, ленточные фундаменты, плиты, пластины, оболочки, высотные и протяженные здания, трубопроводы, плотины, рельсы, резервуары и др. Вообще, конструкции с постоянными или кусочно-постоянными физико-геометрическими характеристиками по одному из направлений составляют большинство в зданиях и сооружениях (особенно типовые конструкции в сборных сооружениях). В рамках ДКМКЭ понижается мерность задачи, этот метод сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1-3] были предложены методы получения точных аналитических решений таких систем, практически свободные от всех вычислительных недостатков.

ДКМКЭ являются дискретно-континуальным в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием техники метода конечных элементов (в итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов).

Очевидно, что при численном решении сложных задач строительной механики предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств проблемы может оказать значительную помощь. Роль ДКМКЭ, помимо того факта, что он позволяет получить решение в аналитической форме со всеми вытекающими отсюда очевидными преимуществами, состоит еще и в том, что сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности его точности.

Изложение ведется на примере двумерной задачи теории упругости.

1. КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

1.1. Некоторые предварительные обозначения и некоторые определяющие соотношения. Введем следующую систему обозначений: Ω – область, описываемая рассматриваемой конструкцией (например, балкой-стенкой (рис. 1.1)); $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω; $\overline{x} = [\, x_1 \;\; x_2 \,]^T$ – вектор координат точки; $\overline{u} = [\, u_1 \;\; u_2 \,]^T$ – вектор составляющих перемещений; $\overline{n} = [\, n_1 \;\; n_2 \,]^T$ – вектор составляющих нормали к границе.

Компоненты тензора напряжений ε_{ij} определяются формулами:

$$\varepsilon_{ii} = \partial_i u_i; \quad \varepsilon_{ij} = 0.5 \cdot (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i = 1,2; \;\; j = 1,2, \;\; i \neq j. \quad (1.1)$$

Формулы для компонент тензора напряжений σ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}, \;\; i = 1,2; \;\; j = 1,2. \quad (1.2)$$

Здесь λ и μ – соответствующие коэффициенты Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера.

1.2. Континуальная операторная постановка задачи. Пусть физико-геометрические характеристики конструкции по переменной x_2 (основное направление) постоянны. Тогда, в соответствии с [1-3] единое уравнение операторной постановки задачи определения собственных значений и собственных функций имеет вид:

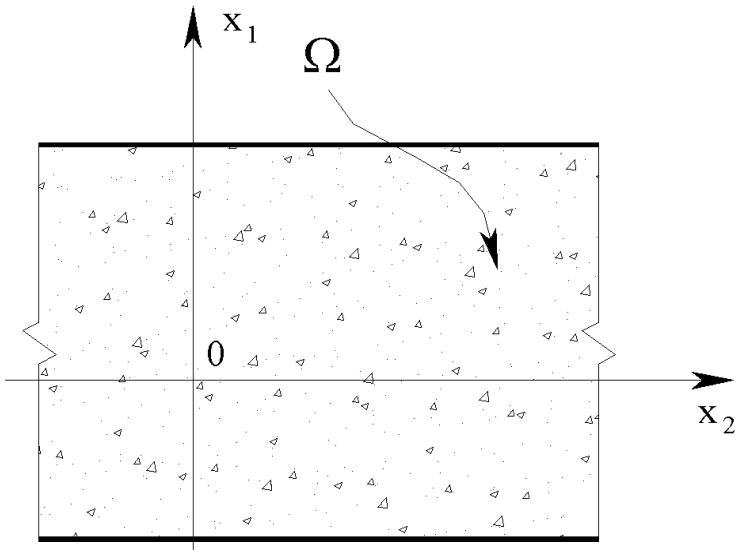


Рис. 1.1. Пример рассматриваемой двумерной конструкции.

$$-\mathcal{L}_{vv}\partial_2^2\overline{u}+\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\partial_2\overline{u}+\mathcal{L}_{uu}\overline{u}=s\,\overline{u}\,, \qquad (1.3)$$

где
$$\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}=\mathcal{L}_{uv}-\mathcal{L}_{uv}^{*};\quad \mathcal{L}_{uv}^{*}=-\mathcal{L}_{uv}; \qquad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{vv}=\begin{bmatrix}\overline{\mu} & 0\\ 0 & \overline{\lambda}+2\overline{\mu}\end{bmatrix}; \qquad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_{uv}=\begin{bmatrix}0 & \partial_1^{*}\overline{\lambda}\\ \partial_1^{*}\overline{\mu} & 0\end{bmatrix}; \qquad (1.6)$$

$$\mathcal{L}_{uu}=\partial_1^{*}\begin{bmatrix}\overline{\lambda}+2\overline{\mu} & 0\\ 0 & \overline{\mu}\end{bmatrix}\partial_1; \qquad (1.7)$$

$$\overline{\lambda}=\theta\lambda;\ \ \overline{\mu}=\theta\mu;\ \partial_i^{*}=-\partial_i,\ \ i=1,2; \qquad (1.8)$$

$$\theta=\theta(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & (x_1,x_2)\in\Omega\\ 0, & (x_1,x_2)\notin\Omega;\end{cases}\quad \delta_{\Gamma}=\frac{\partial\theta}{\partial n}; \qquad (1.9)$$

$$\overline{u}=[\,u_1\ \ u_2\,]^{T}; \qquad (1.10)$$

$\theta=\theta(x_1,x_2)$ – характеристическая функция области Ω; $\delta_{\Gamma}=\delta_{\Gamma}(x_1,x_2)$ – дельта-функция границы $\Gamma=\partial\Omega$; $\overline{u}=\overline{u}(x_1,x_2)$ – искомая собственная вектор-функция; s – искомое собственное значение.

Вводя обозначение

$$\overline{v}=[\,v_1\ \ v_2\,]^{T}=[\,\partial_2u_1\ \ \partial_2u_2\,]^{T}=\partial_2\overline{u}=\overline{u}', \qquad (1.11)$$

переписываем (1.3) в виде

$$-\mathcal{L}_{vv}\overline{v}'+\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\overline{v}+\mathcal{L}_{uu}\overline{u}=s\,\overline{u}\,, \qquad (1.12)$$

где
$$\overline{v}'=\partial_2\overline{v}\,. \qquad (1.13)$$

Объединяя (1.11) и (1.12), получим (ниже E – тождественный оператор):

$$\begin{cases}\overline{u}'=\overline{v}\\ -\mathcal{L}_{vv}\overline{v}'+\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\overline{v}+\mathcal{L}_{uu}\overline{u}=s\,\overline{u}\end{cases} \qquad (1.14)$$

или

$$\begin{cases}\overline{u}'=\overline{v}\\ \overline{v}'=\mathcal{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\overline{v}+\mathcal{L}_{vv}^{-1}(\mathcal{L}_{uu}-s\,E)\overline{u}.\end{cases} \qquad (1.15)$$

Система (1.15) в матричном виде представима следующим образом:

$$\overline{U}'=\widetilde{\mathcal{L}}_{s}\overline{U}\,, \qquad (1.16)$$

где
$$\widetilde{\mathcal{L}}_{s}=\begin{bmatrix}0 & E\\ \mathcal{L}_{vv}^{-1}(\mathcal{L}_{uu}-s\,E) & \mathcal{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\end{bmatrix}; \qquad (1.17)$$

$$\overline{U}=\overline{U}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\overline{u}(x_1,x_2)\\ \overline{v}(x_1,x_2)\end{bmatrix}; \qquad (1.18)$$

$$\overline{U}'=\partial_2\overline{U}\,; \qquad (1.19)$$

Рассмотрим, например, двухточечную краевую задачу. Пусть граничные условия задаются в сечениях $x_2=0$ и $x_2=l$, где l – длина конструкции. В случае шарнирных закре-

плений (по осям x_1 и x_2) сечениях $x_2 = 0$ и $x_2 = l$ (равенства нулю соответствующих компонентов перемещений) граничные условия представимы в виде

$$B_0 \overline{U}(x_1,0) + B_l \overline{U}(x_1,l) = 0, \qquad (1.20)$$

где B_0 и B_l – матрицы граничных условий, в данном случае

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.21)$$

Итак, задача формируется следующим образом: определить такую отличную от тождественного нуля вектор-функцию $\overline{U}(x_1, x_2)$ и такое значение s, при котором справедливы уравнение (1.16) и граничные условия (1.20).

1.3. Учет упругоподатливых опор (основание типа Винклера по двум направлениям). При решении практических задач нередко имеют место случаи, когда на области Ω, ее границе $\Gamma = \partial\Omega$ или их частях заданы упругоподатливые опоры, непрерывные по основному направлению.

Вектор $\overline{R}$ реактивных усилий, возникающих в опоре, имеет вид:

$$\overline{R} = [\, R_1 \quad R_2 \,]^T = C\,\overline{u}, \qquad (1.22)$$

где $C = diag\{c_1, c_2\}$; $\overline{u} = [\, u_1 \quad u_2 \,]^T$; (1.23)

C – матрица упругих характеристик опоры; $\overline{u}$ – вектор перемещений опоры; c_i – коэффициент отпора опоры по направлению оси Ox_i.

Наличие упругоподатливых опор вносит корректировку в операторную постановку задачи: оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_s$ в (1.16) определяется следующей формулой:

$$\widetilde{\mathscr{L}}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathscr{L}_{vv}^{-1}(\mathscr{L}_{uu} + C - s\,E) & \mathscr{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathscr{L}}_{uv} \end{bmatrix}. \qquad (1.24)$$

2. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель конструкции. Дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ). Для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи исходная область Ω окаймляется расширенной ω. Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: в поперечном направлении конструкции (вдоль оси Ox_1) производится сеточная аппроксимация, а в продольном (основном) (вдоль оси Ox_2) – решается континуальная задача (рис. 2.1).

Область ω разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) ω_i (рис. 2.2).

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i, \qquad (2.1)$$

где $\omega = \{(x_1, x_2):\ x_1 \in [0, h];\ x_2 \in [0, l]\}$; (2.2)

$$\omega_i = \{(x_1, x_2):\ x_1 \in [x_1^i, x_1^{i+1}];\ x_2 \in [0, l]\}; \qquad (2.3)$$

$$x_1^{i+1} = x_1^i + h_i,\ i = 1, 2, ..., N-1; \qquad (2.4)$$

$$h_i = \begin{cases} x_1^{i+1} - x_1^i, & i < N \\ 0, & i = N \end{cases},\ i = 1, 2, ..., N, \qquad (2.5)$$

где l, h – соответственно поперечный размер сетки элементов и длина конструкции в продольном направлении; N – количество узлов в поперечном направлении; (x_1^i, x_2), $i = 1, 2, ..., N$ – координаты узлов сетки элементов; h_i – шаги сетки (размеры элементов в поперечном направлении).

Определяем характеристическую функцию элемента и сеточные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

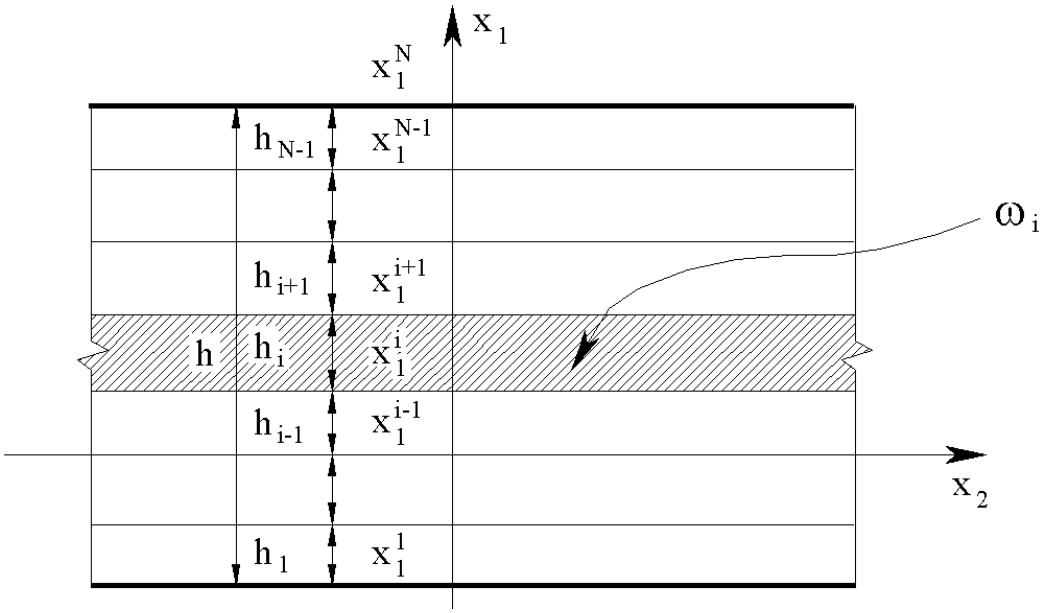


Рис 2.1. Схема дискретизации конструкции.

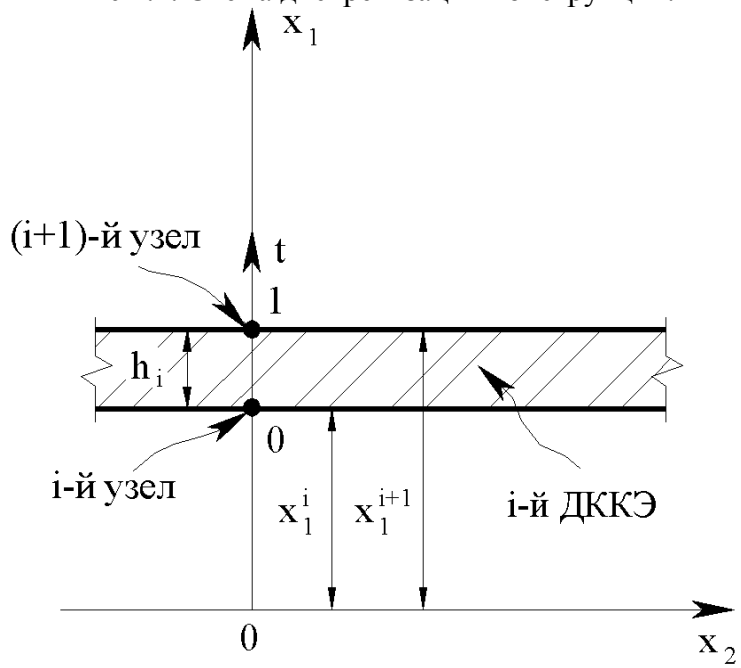


Рис. 2.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_i \bigcap \Omega \\ 0, & x \notin \omega_i \bigcap \Omega \end{cases}; \qquad (2.6)$$

$$\overline{\lambda}_i = \theta_i \lambda; \quad \overline{\mu}_i = \theta_i \mu. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим какой-либо произвольный i-й элемент модели (рис. 2.2). Замена переменных играет большую роль при численном решении краевых задач сеточными методами, так как в этом случае осуществляется локальная замена переменных внутри элемента. Переходим из исходной системы координат в элементные (рис. 2.2): $(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)$. Здесь t – локальная координата, введенная по направлению оси Ox_1 и связанная с ДККЭ:

$$t = (x_1 - x_1^i)/h_i; \quad t \in [0,1]. \qquad (2.8)$$

2.2. Аппроксимация неизвестных функций. В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений u_1, u_2 и их производные v_1 и v_2 по переменной x_2, т.е. для i-го узла это $u_1^i, u_2^i, v_1^i, v_2^i$.

В простейшем случае поля u_1, u_2 и v_1 и v_2 по сечению рассматриваемого ДККЭ полагаются линейными. Следовательно, можем записать

$$u_j = u_j(x_2) = u_j^i + t\Delta u_j^i, \quad j = 1,2; \quad (2.6)$$

$$v_j = v_j(x_2) = v_j^i + t\Delta v_j^i, \quad j = 1,2. \quad (2.7)$$

Здесь можно провести прямую аналогию с функциями формы, которые используются в стандартном МКЭ при решении задач, связанных с растяжением (сжатием) стержней. Выполнив схожую процедуру построения формул аппроксимации, имеем:

$$u_j = \alpha_{1,j}^{(i)} + \alpha_{2,j}^{(i)} t, \;\; v_j = \beta_{1,j}^{(i)} + \beta_{2,j}^{(i)} t, \quad j = 1,2, \;\; (x_1, x_2) \in \omega_i \quad (2.8)$$

или иначе в матрично-векторной форме

$$u_j = \bar{t}^T \bar{\alpha}_j^{(i)}, \;\; v_j = \bar{t}^T \bar{\beta}_j^{(i)}, \quad j = 1,2, \;\; (x_1, x_2) \in \omega_i, \quad (2.9)$$

где $\bar{\alpha}_j^{(i)} = [\alpha_{1,j}^{(i)} \;\; \alpha_{2,j}^{(i)}]^T$; $\bar{\beta}_j^{(i)} = [\beta_{1,j}^{(i)} \;\; \beta_{2,j}^{(i)}]^T$; (2.10)

$$\bar{t} = [1 \;\; t]^T. \quad (2.11)$$

Итак, очевидно, что имеют место следующие соотношения:

$$\bar{u}_j^{(i)} = C\bar{\alpha}_j^{(i)}, \;\; \bar{v}_j^{(i)} = C\bar{\beta}_j^{(i)}, \;\; j = 1,2, \quad (2.12)$$

где $\bar{u}_j^{(i)} = \begin{bmatrix} u_j^i \\ u_j^{i+1} \end{bmatrix}$; $\bar{v}_j^{(i)} = \begin{bmatrix} v_j^i \\ v_j^{i+1} \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2.13)

Обращая матрицу C получим:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Следовательно, определяем

$$u_j = \bar{t}^T C^{-1} \bar{u}_j^{(i)}, \;\; v_j = \bar{t}^T C^{-1} \bar{v}_j^{(i)}, \quad j = 1,2, \;\; (x_1, x_2) \in \omega_i \quad (2.15)$$

или иначе

$$u_j = N(t)\bar{u}_j^{(i)}, \;\; v_j = N(t)\bar{v}_j^{(i)}, \quad j = 1,2, \;\; (x_1, x_2) \in \omega_i, \quad (2.16)$$

где $N = N(t) = \bar{t}^T C^{-1} = [\, N_1 \;\; N_2 \,]$ (2.17)

– матрица функций формы («поперечных») по сечению ДККЭ с элементами

$$N_1(t) = 1 - t; \quad N_2(t) = 1. \quad (2.18)$$

2.3.Аппроксимация частных производных первого порядка от неизвестных функций на ДККЭ. Выражения для частных производных первого порядка от неизвестных функций по переменным x_1 и x_2 записываются следующим образом (ниже $(x_1, x_2) \in \omega_i$):

$$\partial_1 u_j(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t)\, \bar{u}_j^{(i)}(x_2), \quad j = 1,2; \quad (2.19)$$

$$\partial_1 v_j(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t)\, \bar{v}_j^{(i)}(x_2), \quad j = 1,2; \quad (2.20)$$

$$\partial_2 u_j(x_1, x_2) = v_j(x_1, x_2) = N(t)\, \bar{u}_j^{(i)}(x_2), \quad j = 1,2; \quad (2.21)$$

где $N'(t) = \frac{d}{dt} N(t) = [\, N_1' \;\; N_2' \,]$. (2.22)

Производные от матрицы функций формы (2.17) находятся дифференцированием ее элементов (2.18), т.е.

$$N_1'(t) = -1; \quad N_2'(t) = 0. \quad (2.23)$$

Очевидно, что соответствующие узловые функции определяются по формулам, являющимися частными случаями (2.19)-(2.20):

$$[\partial_1 u_j]^i = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{i-1}} N'(1)\,\bar{u}_j^{(i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i} N'(0)\,\bar{u}_j^{(i)}(x_2)\right], \\ i = 2,3,...,N-1; \tag{2.24}$$

$$[\partial_1 u_j]^1 = \frac{1}{h_1} N'(0)\,\bar{u}_j^{(1)}(x_2); \tag{2.25}$$

$$[\partial_1 u_j]^N = \frac{1}{h_{N-1}} N'(1)\,\bar{u}_j^{(N-1)}(x_2); \tag{2.26}$$

$$[\partial_1 v_j]^i = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{i-1}} N'(1)\,\bar{v}_j^{(i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i} N'(0)\,\bar{v}u_j^{(i)}(x_2)\right], \\ i = 2,3,...,N-1; \tag{2.27}$$

$$[\partial_1 v_j]^1 = \frac{1}{h_1} N'(0)\,\bar{v}_j^{(1)}(x_2); \tag{2.28}$$

$$[\partial_1 v_j]^N = \frac{1}{h_{N-1}} N'(1)\,\bar{v}_j^{(N-1)}(x_2). \tag{2.29}$$

2.4. Определение деформаций и напряжений на ДККЭ. В соответствии с (1.1)-(1.2) после определения (2.19)-(2.21) имеем:

– формулы для определения компонент тензора деформаций:

$$\varepsilon_{11}(x_1,x_2) = \partial_1 u_1(x_1,x_2); \tag{2.20}$$

$$\varepsilon_{22}(x_1,x_2) = \partial_2 u_2(x_1,x_2) = v_2(x_1,x_2); \tag{2.31}$$

$$\varepsilon_{12}(x_1,x_2) = \varepsilon_{21}(x_1,x_2) = \\ = 0.5\cdot(\partial_1 u_2(x_1,x_2) + \partial_2 u_1(x_1,x_2)) = \\ = 0.5\cdot(\partial_1 u_2(x_1,x_2) + v_1(x_1,x_2)); \tag{2.32}$$

– формула для определения объемной деформации:

$$\varepsilon(x_1,x_2) = \varepsilon_{11}(x_1,x_2) + \varepsilon_{22}(x_1,x_2) = \\ = \partial_1 u_1(x_1,x_2) + v_2(x_1,x_2); \tag{2.33}$$

– формулы для определения компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{11} = \\ = (\lambda+2\mu)\partial_1 u_1(x_1,x_2) + 2\mu v_2(x_1,x_2); \tag{2.34}$$

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{22} = \\ = 2\mu\partial_1 u_1(x_1,x_2) + (\lambda+2\mu)v_2(x_1,x_2); \tag{2.35}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} = \\ = \mu(\partial_1 u_2(x_1,x_2) + v_1(x_1,x_2)). \tag{2.36}$$

Согласно (2.24)-(2.29) деформации и напряжения в узлах находятся по формулам:

$$[\varepsilon_{11}]^i = [\partial_1 u_1]^i; \quad [\varepsilon_{22}]^i = v_2^i; \tag{2.37}$$

$$[\varepsilon_{12}]^i = [\varepsilon_{21}]^i = 0.5\cdot([\partial_1 u_2]^i + v_1^i); \tag{2.38}$$

$$[\sigma_{11}]^i = (\lambda+2\mu)[\partial_1 u_1]^i + 2\mu v_2^i; \tag{2.39}$$

$$[\sigma_{22}]^i = 2\mu[\partial_1 u_1]^i + (\lambda+2\mu)v_2^i; \tag{2.40}$$

$$[\sigma_{12}]^i = [\sigma_{21}]^i = \mu([\partial_1 u_2]^i + v_1^i). \tag{2.41}$$

2.5. Аппроксимация некоторых вспомогательных операторов. Рассмотрим аппроксимацию следующих операторов на i-м дискретно-континуальном конечном элементе:

$$\bar{a}, \quad \partial_1^* \bar{a}\partial_1, \quad \partial_1^* \bar{a}, \quad \bar{a}\partial_1, \quad \text{где} \quad \bar{a} = \theta\, a; \tag{2.42}$$

a – некоторая функция-коэффициент.

При выводе основных формул аппроксимации следует соответственно рассмотреть выражения

$$(aw,w), \quad (\partial_1^* \bar{a}\partial_1 w, w), \quad (\partial_1^* \bar{a} w, z), \\ (\bar{a}\partial_1 z, w), \tag{2.43}$$

где w и z – некоторые функции, линейные по переменной x_1, т.е. по аналогии с (2.6) представимые в виде

$$w = w_i + t\Delta w_i; \quad z = z_i + t\Delta z_i, \tag{2.44}$$

где $$\Delta w_i = w_{i+1} - w_i; \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i; \tag{2.45}$$

w_i, z_i и w_{i+1}, z_{i+1} – значения функций w и z в узлах i и $i+1$ элемента с координатами соответственно $x_1 = x_1^i$ и $x_1 = x_1^{i+1}$.

1) Оператор $\bar{a}$.

$$(\overline{a}w,w)=\int\limits_{\omega_i} awwdx_1=\int\limits_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} awwdx_1\approx a_i\int\limits_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} w^2dx_1\,, \tag{2.46}$$

где
$$a_i=\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} adx_1\,, \tag{2.47}$$

откуда, пользуясь (2.46), после замены переменных и интегрирования получим:

$$(aw,w)= =a_ih_i\left[\frac{1}{3}w_i^2+\frac{1}{6}w_iw_{i+1}+\frac{1}{6}w_{i+1}w_i+\frac{1}{3}w_{i+1}^2\right] \tag{2.48}$$

или

$$(\overline{a}w,w)=a_ih_i\left(K_0^{(0,0)}\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix}\right), \tag{2.49}$$

где
$$K_0^{(0,0)}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

По аналогии получаем и остальные выражения.

2) Оператор $(\partial_1^*\overline{a}\partial_1w,w)$.

$$(\partial_1^*\overline{a}\partial_1w,w)=\frac{a_i}{h_i}\left(K_0^{(1,1)}\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix}\right), \tag{2.51}$$

где
$$K_0^{(1,1)}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}. \tag{2.52}$$

3) Оператор $(\partial_1^*\overline{a}w,w)$.

$$(\partial_1^*\overline{a}w,z)=a_i\left(K_0^{(0,1)}\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}z_i\\z_{i+1}\end{bmatrix}\right), \tag{2.53}$$

где
$$K_0^{(0,1)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}. \tag{2.54}$$

4) Оператор $(\overline{a}\partial_1w,z)$.

$$(\overline{a}\partial_1w,z)=a_i\left(K_0^{(1,0)}\begin{bmatrix}w_i\\w_{i+1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}z_i\\z_{i+1}\end{bmatrix}\right), \tag{2.55}$$

где
$$K_0^{(1,0)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Итак, резюмируя (2.48)-(2.56), записываем следующие окончательные формулы аппроксимации операторов:

$$\overline{a}\varphi=a_ih_iK_0^{(0,0)}\overline{\varphi}\,;\quad \partial_1^*\overline{a}\partial_1\varphi=\frac{a_i}{h_i}K_0^{(1,1)}\overline{\varphi}\,; \tag{2.57}$$

$$\partial_1^*\overline{a}\varphi=a_iK_0^{(0,1)}\overline{\varphi}\,;\quad \overline{a}\partial_1\varphi=a_iK_0^{(1,0)}\overline{\varphi}\,, \tag{2.58}$$

где $K_0^{(0,0)}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$; $K_0^{(1,1)}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$; (2.59)

$$K_0^{(0,1)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix};\quad K_0^{(1,0)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}; \tag{2.60}$$

φ – некоторая функция, линейная по переменной x_1;

$$\varphi=\varphi_i+t\Delta\varphi_i;\quad \Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i; \tag{2.61}$$

φ_i и φ_{i+1} – значения функции φ в узлах i и $i+1$ элемента с координатами соответственно $x_1=x_1^i$ и $x_1=x_1^{i+1}$; a – некоторая функция-коэффициент, $\overline{a}=\theta\,a$.

2.6. Формирование некоторых вспомогательных глобальных матриц. Руководствуясь структурой операторов (1.4)-(1.7) и полученными выше формулами (2.59)-(2.60), формируем следующие поэлементные матрицы:

$$A_{2,1,i}=\mu_ih_iK_0^{(0,0)};\quad A_{2,2,i}=(\lambda_i+2\mu_i)h_iK_0^{(0,0)}; \tag{2.62}$$

$$A_{1,1,i}=\lambda_iK_0^{(0,1)};\quad A_{1,2,i}=\mu_iK_0^{(0,1)}; \tag{2.63}$$

$$A_{1,3,i}=\mu_iK_0^{(1,0)};\quad A_{1,4,i}=\lambda_iK_0^{(1,0)}; \tag{2.64}$$

$$A_{0,1,i}=(\lambda_i+2\mu_i)\frac{1}{h_i}K_0^{(1,1)};\quad A_{0,2,i}=\mu_i\frac{1}{h_i}K_0^{(1,1)}; \tag{2.65}$$

$$A_{E,i}=h_iK_0^{(0,0)}. \tag{2.66}$$

На основании матриц (2.62)-(2.66) в соответствии со стандартной техникой метода конечных элементов (метод конечных вкладов, суммирование с накоплением [6-7]) можно сформировать соответствующие глобальные матрицы $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{0,1}$, $A_{0,2}$ и $A_{E,i}$.

Так, например, если A_i – какая-либо поэлементная матрица 2-го порядка,

$$A_i = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

то соответствующая глобальная матрица $2N$-го порядка имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & & & & & \\ * & ** & * & & & & & & \\ & * & ** & * & & & & & \\ & & * & ** & * & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & ** & * & & \\ & & & & & * & ** & * & \\ & & & & & & * & * & \end{bmatrix},$$

где символ «*» обозначает некоторый элемент матрицы A_i, символ «**» обозначает суммирование соответствующих элементов матрицы A_i.

2.7. Формирование основных глобальных матриц. Согласно приведенным выше построениям имеет место следующее соответствие между континуальными операторами и матрицами:

$$\mathscr{L}_{vv} \Rightarrow K_{vv}; \quad \widetilde{\mathscr{L}}_{uv} \Rightarrow \widetilde{K}_{uv}; \quad \mathscr{L}_{uu} \Rightarrow K_{uu}, \tag{2.67}$$

где $K_{vv} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}$; $K_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,1} \\ A_{1,2} & 0 \end{bmatrix}$; (2.68)

$$K_{vu} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,3} \\ A_{1,4} & 0 \end{bmatrix}; \quad K_{uu} = \begin{bmatrix} A_{0,1} & 0 \\ 0 & A_{0,2} \end{bmatrix}; \tag{2.69}$$

$$K_E = \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & A_E \end{bmatrix}; \tag{2.70}$$

$$\widetilde{K}_{uv} = K_{uv} - K_{vu}. \tag{2.71}$$

2.8. Задание граничных условий. Рассмотрим простейший вариант двухточечной краевой задачи. Пусть $x^b_{2,1} = 0$ и $x^b_{2,2} = l$ – координаты граничных поперечных сечений конструкции. Граничные условия записываются в виде:

$$B_{0,n}\overline{U}_n(0) + B_{l,n}\overline{U}_n(l) = 0, \tag{2.72}$$

где $B_{0,n}$ и $B_{l,n}$ – матрицы граничных условий;

$$\overline{U}_n = \overline{U}_n(x_2) = \begin{bmatrix} \overline{u}_n \\ \overline{v}_n \end{bmatrix}; \tag{2.73}$$

$$\overline{u}_n = \overline{u}_n(x_2) = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1,n} \\ \overline{u}_{2,n} \end{bmatrix}; \tag{2.74}$$

$$\overline{u}_{1,n} = \overline{u}_{1,n}(x_2) = [\, u_1^1 \;\; u_1^2 \;\; \ldots \;\; u_1^N \,]^T; \tag{2.75}$$

$$\overline{u}_{2,n} = \overline{u}_{2,n}(x_2) = [\, u_2^1 \;\; u_2^2 \;\; \ldots \;\; u_2^N \,]^T; \tag{2.76}$$

$$\overline{v}_n = \overline{v}_n(x_2) = \begin{bmatrix} \overline{v}_{1,n} \\ \overline{v}_{2,n} \end{bmatrix}; \tag{2.77}$$

$$\overline{v}_{1,n} = \overline{v}_{1,n}(x_2) = [\, v_1^1 \;\; v_1^2 \;\; \ldots \;\; v_1^N \,]^T; \tag{2.78}$$

$$\overline{v}_{2,n} = \overline{v}_{2,n}(x_2) = [\, v_2^1 \;\; v_2^2 \;\; \ldots \;\; v_2^N \,]^T; \tag{2.79}$$

u_1^i, u_2^i и v_1^i, v_2^i – значения функций u_1, u_2 и v_1, v_2 в i-м узле дискретно-континуального конечного элемента.

Рассмотрим ниже задание некоторых стандартных типов краевых условий по форме (2.72) в произвольной граничной точке с координатой $x^b_{2,k}$. Строго говоря, здесь возможны два основных варианта граничной точки: 1) $x^b_{2,k} = x^b_{2,1} = 0$ – крайняя левая граничная точка; 2) $x^b_{2,k} = x^b_{2,2} = l_2$ – крайняя правая граничная точка.

Шарнирное закрепление. Имеем пару континуальных граничных условий:

$$u_1(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad u_2(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad x_1 \in [0, h]. \tag{2.80}$$

Пусть вначале имеем случай $x_{2,k}^b = x_{2,1}^b = 0$. На дискретно-континуальном уровне условиям (2.80) отвечают условия вида

$$u_1^i(+0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.81}$$
$$u_2^i(+0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{2.82}$$

Для случая $x_{2,k}^b = x_{2,2}^b = l$, очевидно, соответственно имеем:

$$u_1^i(l-0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.83}$$
$$u_2^i(l-0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{2.84}$$

Записав граничные условия в виде (2.81)-(2.82) или (2.83)-(2.84) перейдем теперь к вопросу их представления в форме (2.72). Алгоритм формирования матриц $B_{0,n}$ и $B_{l,n}$ представлен в таблицах 2.1 и 2.2 соответственно.

Свободный край. Имеем континуальные граничные условия:

$$\sigma_{12}(x_1, x_{,k}^b) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad x_1 \in [0, h] \tag{2.85}$$

или с учетом (2.39)-(2.41)

$$2\mu[\partial_1 u_1](x_1, x_{2,k}^b) + (\lambda + 2\mu) v_2(x_1, x_{2,k}^b) = 0,$$
$$\mu([\partial_1 u_2](x_1, x_{2,k}^b) + v_1(x_1, x_{2,k}^b)) = 0, \quad x_1 \in [0, h]. \tag{2.86}$$

Соответствующие дискретно-континуальные граничные условия записываются следующим образом:

$$2\mu[\partial_1 u_1]^i(x_{2,k}^b) + (\lambda + 2\mu) v_2^i(x_{2,k}^b) = 0,$$
$$\mu([\partial_1 u_2]^i(x_{2,k}^b) + v_1^i(x_{2,k}^b)) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{2.87}$$

или

– вариант 1 граничной точки ($x_{2,k}^b = x_{2,1}^b = 0$)

$$2\mu[\partial_1 u_1]^i(+0) + (\lambda + 2\mu) v_2^i(+0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.88}$$
$$\mu([\partial_1 u_2]^i(+0) + v_1^i(+0)) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.89}$$

– вариант 2 граничной точки ($x_{2,k}^b = x_{2,2}^b = l$)

$$2\mu[\partial_1 u_1]^i(l-0) + (\lambda + 2\mu) v_2^i(l-0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.90}$$
$$\mu([\partial_1 u_2]^i(l-0) + v_1^i(l-0)) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \tag{2.91}$$

Алгоритм формирования соответствующих матриц $B_{0,n}$ и $B_{l,n}$ представлен в таблицах 2.3 и 2.4 соответственно.

2.9. Дискретно-континуальная операторная постановка задачи. Согласно формулам предыдущего пункта можем переписать постановку (1.16)-(1.19) следующим образом:

$$\overline{U}_n' = \widetilde{K}_s \overline{U}_n, \tag{2.92}$$

где $$\widetilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{vv}^{-1}(K_{uu} - s\,K_E) & K_{vv}^{-1}\widetilde{K}_{uv} \end{bmatrix}; \tag{2.93}$$

$$\overline{U}_n' = \partial_2 \overline{U}_n; \tag{2.94}$$

В свою очередь, граничные условия (1.20) переходят в (2.72).

При наличии упругоподатливых опор матрица (2.93) принимает вид:

$$\widetilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{vv}^{-1}(K_{uu} + C_G - s\,K_E) & K_{vv}^{-1}\widetilde{K}_{uv} \end{bmatrix}, \tag{2.95}$$

где $$C_G = diag\{c_{1,1}, c_{1,2}, ..., c_{1,i}, ..., c_{1,N}, c_{2,1}, c_{2,2}, ..., c_{2,i}, ..., c_{2,N}\} \tag{2.69}$$

– матрица характеристик упругоподатливых опор; заметим, что если в i-м узле упругоподатливая опора отсутствует, то $c_{1,i} = c_{2,i} = 0$.

Таблица 2.1. Алгоритм заполнения матрицы $B_{0,n}$ при задании шарнирно-неподвидной опоры в граничной точке (вариант граничной точки 1).

п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1.	$(i,i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$u_1^i(+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2.	$(N+i,N+i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$u_2^i(+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечание: Все элементы матрицы $B_{0,n}$ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 2.2. Алгоритм заполнения матрицы $B_{l,n}$ при задании шарнирно-неподвидной опоры в граничной точке (вариант граничной точки 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1.	$(2N+i,i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$u_1^i(l-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2.	$(3N+i,N+i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$u_2^i(l-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечание: Все элементы матрицы $B_{l,n}$ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 2.3. Алгоритм заполнения матрицы $B_{0,n}$ при задании шарнирно-неподвидной опоры в граничной точке (вариант граничной точки 1).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	(1,1)	$2\mu\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(2.88), $i=1$
2	(1,2)	$2\mu\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
3	$(1,3N+1)$	$\lambda+2\mu$	
4	$(i,i-1)$	$\mu\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(2.88), $i=2,3,...,N-1$
5	(i,i)	$\mu\left[\frac{1}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{1}{h_i}N_1'(0)\right]$	
6	$(i,i+1)$	$\mu\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
7	$(i,3N+i)$	$\lambda+2\mu$	

1	2	3	4
8	$(N, N-1)$	$2\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_1'(1)$	(2.88), $i=N$
9	(N, N)	$2\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_2'(1)$	
10	$(N, 4N)$	$\lambda+2\mu$	
11	$(N+1, N+1)$	$\mu\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(2.89), $i=1$
12	$(N+1, N+2)$	$\mu\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
13	$(N+1, 2N+1)$	μ	
14	$(N+i, N+i-1)$	$\frac{1}{2}\mu\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(2.89), $i=2,3,...,N-1$
15	$(N+i, N+i)$	$\frac{1}{2}\mu\left[\frac{1}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{1}{h_i}N_1'(0)\right]$	
16	$(N+i, N+i+1)$	$\frac{1}{2}\mu\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
17	$(N+i, 2N+i)$	μ	
18	$(2N, 2N-1)$	$\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_1'(1)$	(2.89), $i=N$
19	$(2N, 2N)$	$\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_2'(1)$	
20	$(2N, 3N)$	μ	

Примечание: Все элементы матрицы $B_{0,n}$ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 2.4. Алгоритм заполнения матрицы $B_{l,n}$ при задании шарнирно-неподвидной опоры в граничной точке (вариант граничной точки 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(2N+1, 1)$	$2\mu\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(2.90), $i=1$
2	$(2N+1, 2)$	$2\mu\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
3	$(2N+1, 3N+1)$	$\lambda+2\mu$	

1	2	3	4
4	$(2N+i, i-1)$	$\mu\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(2.90), $i=2,3,...,N-1$
5	$(2N+i, i)$	$\mu\left[\frac{1}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{1}{h_i}N_1'(0)\right]$	
6	$(2N+i, i+1)$	$\mu\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
7	$(2N+i, 3N+i)$	$\lambda+2\mu$	
8	$(3N, N-1)$	$2\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_1'(1)$	(2.90), $i=N$
9	$(3N, N)$	$2\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_2'(1)$	
10	$(3N, 4N)$	$\lambda+2\mu$	
11	$(3N+1, N+1)$	$\mu\frac{1}{h_1}N_1'(0)$	(2.91), $i=1$
12	$(3N+1, N+2)$	$\mu\frac{1}{h_1}N_2'(0)$	
13	$(3N+1, 2N+1)$	μ	
14	$(3N+i, N+i-1)$	$\frac{1}{2}\mu\frac{1}{h_{i-1}}N_1'(1)$	(2.91), $i=2,3,...,N-1$
15	$(3N+i, N+i)$	$\frac{1}{2}\mu\left[\frac{1}{h_{i-1}}N_2'(1)+\frac{1}{h_i}N_1'(0)\right]$	
16	$(3N+i, N+i+1)$	$\frac{1}{2}\mu\frac{1}{h_i}N_2'(0)$	
17	$(3N+i, 2N+i)$	μ	
18	$(4N, 2N-1)$	$\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_1'(1)$	(2.91), $i=N$
19	$(4N, 2N)$	$\mu\frac{1}{h_{N-1}}N_2'(1)$	
20	$(4N, 3N)$	μ	

Примечание: Все элементы матрицы $B_{l,n}$ не указанные в таблице равны нулю.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Общее решение задачи (2.92), (2.72) имеет вид:

$$\overline{U}_n(x_2) = (\varepsilon_s(x_2) - \varepsilon_s(x_2 - l))\overline{C}_s, \qquad (3.1)$$

где $\varepsilon_s(x_2)$ – фундаментальная матрица-функция системы (2.92), имеющая вид

$$\varepsilon_s(x_2) = T_s \varepsilon_{s,0}(x_2) T_s^{-1}; \qquad (3.2)$$

T_s – матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы $\widetilde{K}_s$; $\varepsilon_{s,0}$ – диагональная матрица, определяемая формулой

$$\widetilde{\varepsilon}_{s,0}(x_2) = diag\{\chi(x_2, \lambda_{s,1}) \exp(\lambda_{s,1} x_2), \ ..., \ \chi(x_2, \lambda_{s,N}) \exp(\lambda_{s,N} x_2)\}; \qquad (3.3)$$

$\lambda_{s,p}$, $p = 1, 2, ..., N$ – собственные значения матрицы $\widetilde{K}_s$;

$$\chi(x_2, \lambda_{s,p}) = \begin{cases} \theta(x_2), & \mathrm{Re}(\lambda_{s,p}) \le 0 \\ -\theta(-x_2), & \mathrm{Re}(\lambda_{s,p}) > 0; \end{cases} \qquad (3.4)$$

$$\theta(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 > 0 \\ 0, & x_2 < 0; \end{cases} \qquad (3.5)$$

$\overline{C}_s$ – вектор постоянных коэффициентов, определяемых из граничных условий (2.72). Поясним процесс нахождения $\overline{C}_s$.

Понимая условия (2.52) в виде

$$B_{0,n} \overline{U}_n(+0) + B_{l,n} \overline{U}_n(l-0) = 0, \qquad (3.6)$$

и подставляя (3.1) в (3.6), получим:

$$B_{0,n}[(\varepsilon_s(+0) - \varepsilon_s(-l))\overline{C}_s] + \\ + B_{l,n}[(\varepsilon_s(l) - \varepsilon_s(-0))\overline{C}_s] = 0$$

или

$$B_{\Gamma,s} \overline{C}_s = 0, \qquad (3.7)$$

где

$$B_{\Gamma,s} = B_{0,n}\varepsilon_s(+0) - B_{l,n}\varepsilon_s(-0) - \\ - B_{0,n}\varepsilon_s(-l) + B_{l,n}\varepsilon_s(l). \qquad (3.8)$$

Как известно, ненулевой вектор $\overline{C}_s$, удовлетворяющий (3.7), существует тогда и только тогда, когда

$$\det(B_{\Gamma,s}) = 0. \qquad (3.8)$$

4. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Итак, методика определения собственных значений и собственных функций рассматриваемой краевой задачи состоит в следующем:

1) Задаются (с некоторым постоянным или переменным шагом) $s_1, s_2, s_3, ..., s_k, ...$ (причем, очевидно, $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_k < ...$)

2) Последовательно вычисляются [10-11] $d_1, d_2, d_3, ..., d_k, ...$, где

$$d_k = \det(B_{\Gamma,s_k}), \quad k = 1, 2, 3, ... \qquad (4.1)$$

В интервалах $[s_k, s_{k+1}]$ на концах которых величина определителя меняет знак, т.е.

$$d_k \cdot d_{k+1} < 0, \qquad (4.2)$$

находится собственное значение краевой задачи.

Если величина

$$\tau_k = s_{k+1} - s_k, \qquad (4.3)$$

такая, что

$$\tau_k < \Delta,$$

где Δ – заданная точность определения, то собственное значение на интервале $[s_k, s_{k+1}]$ может быть найдено по формуле

$$\widetilde{s}_k = \frac{1}{2}(s_k + s_{k+1}). \qquad (4.4)$$

В противном случае, т.е. когда $d_k \cdot d_{k+1} < 0$ и $\tau_k > \Delta$, то для нахождения искомого собственного значения на интервале $[s_k, s_{k+1}]$ можно применить, например, метод половинного деления [9].

Заметим, что важно выбирать величины τ_k таким образом, чтобы на каждом интервале $[s_k, s_{k+1}]$ находилось не более одного собственного значения.
Разумеется, в случае

$$d_k \cdot d_{k+1} = 0, \qquad (4.5)$$

можно сделать очевидный вывод, что собственное значение краевой задачи совпадает с числом s_k и/или s_{k+1}. Так, если $d_k = 0$, то $\widetilde{s}_k = s_k$, а если $d_{k+1} = 0$, то $\widetilde{s}_k = s_{k+1}$.
Следует отметить, что описанный алгоритм [4-5] обладает серьезным недостатком. Дело в том, что при решении задач большой размерности порядок матрицы $B_{\Gamma,s}$ может быть значительным, а ее определитель быть величиной весьма небольшой. Это, в свою очередь, может привести к трудностям при численной реализации. В этой связи можно предложить альтернативный подход, заключающийся в следующем:
1) Задаются (с некоторым постоянным или переменным шагом) $s_1, s_2, s_3, ..., s_k, ...$ (причем, очевидно, $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_k < ...$);
2) Вычисляются собственные значения матриц $B_{\Gamma,s_k}, k = 1, 2, 3, ...$, т.е. $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, ..., \lambda_{4N,k}$.
3) Если среди собственных значений $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, ..., \lambda_{6N,k}$ имеются нулевые, то s_k – искомое собственное значение с кратностью, равной числу нулевых собственных значений матрицы B_{Γ,s_k}. Заметим, что поиск нулевых собственных значений на практике ведется с некоторой точностью Δ. Иными словами, если $|\lambda| \le \Delta$, то λ полагается нулевым.

Замечание. Исследования проводились в рамках НИР «Построение и анализ корректных аналитических методов и алгоритмов расчета конструкций регулярной структуры», выполняемой по Плану НИР Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) на 2007-2009 гг. и в рамках НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» /проект 6414/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Об одном дискретно-континуальном подходе к определению собственных значений и собственных функций краевых задач расчета элементов конструкций. Том 1. // Вестник отделения архитектуры и строительных наук. – Москва-Орел: РААСН, АСИ ОрелГТУ, 2009, с. 126-136.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Дискретно-континуальные подходы для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 4, Issue 2, 2008.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. –511 с.

7. **Секулович М.** Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
8. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
10. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
11. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.

Золотов Александр Борисович, Почетный член РААСН, Почетный профессор МГСУ, профессор, доктор технических наук.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Козырев Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: o.kozirev@gmail.com

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЧАСТЬ 2: ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛИТЫ

А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена вопросам использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для определения собственных значений и собственных функций краевых задач изгиба плит. Область применения в данном случае составляют плиты, в которых имеется постоянство физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (называемому основным направлением) при произвольно меняющихся внешних нагрузках и любом характере закреплений. ДКМКЭ являются дискретно-континуальным в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по другому производится дискретизация с использованием техники метода конечных элементов (в итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов).

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, краевая задача, собственное значение, собственная функция, изгиб плит.

APPLICATIONS OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEMS IN STRUCTURAL MECHANICS PART 2: PLATE ANALYSIS

Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov, Oleg A. Kozirev
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to use of discrete-continual finite element method for solving of eigenvalue problems of plate analysis. Operational and variational formulations are presented. The discrete-continual design model for structures with constant physical and geometrical parameters in one direction is offered on the basis of so-called discrete-continual finite elements. Element coordinate system and approximation of nodal unknowns are under consideration. Special generalized block-structured stiffness matrix of discrete-continual finite element are assembled. Resultant discrete-continual operational formulation is given. Effective computing algorithms for eigenvalues and eigenvectors are presented as well. All methods and algorithms considered in the distinctive paper have been realized in software engineering.

Key words: of discrete-continual finite element method, boundary problem, eigenvalue problem, plate analysis

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья продолжает серию работ [4-5], посвященных вопросам использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Изложение ведется на примере задачи об изгибе плиты в рамках классической теории тонких плит [1-3,13]. Анализ и расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) плит, подверженных изгибу, традиционно считает-

ся значительно сложнее анализа и решения плоских задач теории упругости и, тем более, краевых задач для оператора Лапласа, рассмотренных, в частности, в [4-5].

Область применения ДКМКЭ в данном случае составляют плиты, у которых имеется постоянство физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (называемому основным направлением) при произвольно меняющихся внешних нагрузках и любом характере закреплений. Предлагаемый метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием техники метода конечных элементов (МКЭ). В итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов. Таким образом, построение алгоритмов решения осуществляется за счет разумного сочетания численных и аналитических подходов. Аналитичность получаемых при этом решений существенно способствует улучшению качества исследования рассматриваемых плит. Найденная с помощью ДКМКЭ картина НДС развивает интуицию расчетчика и понимание работы плит, характера влияния на них разного рода локальных и глобальных факторов. ДКМКЭ особенно эффективен в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами, используемыми при расчетах плит (в том числе и методом конечных полос). Преимуществами ДКМКЭ также являются понижение размерности при численном решении (двумерная задача, по сути, сводится к одномерной) и отсутствие каких-либо ограничений на длину плит по основному направлению (объем вычислительной работы в рамках ДКМКЭ не зависит от этого параметра, в отличии, например, от стандартного МКЭ или метода конечных полос).

1. КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

1.1. Некоторые предварительные обозначения и некоторые определяющие соотношения. Введем следующую систему обозначений: Ω – область, описываемая рассматриваемой плитой; $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω; x_1, x_2 – используемые координаты; u_1, u_2 – составляющие перемещений по осям Ox_1, Ox_2 (рис. 1.1); w – прогиб плиты; $\overline{n} = [\, n_1 \;\; n_2 \,]^T$ – вектор составляющих внутренней нормали к границе; $\nabla^4 = \partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4$ – бигармонический оператор; h – толщина плиты; ν – коэффициент Пуассона материала плиты; $\partial_k = \partial / \partial x_k$, $k = 1, 2$; $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость плиты; q – плотность нагрузки.

1.2. Традиционная и операторная постановки задачи об изгибе плиты. Традиционная постановка краевой задачи расчета плиты включает описание исходной области Ω, занимаемой плитой, условий на границе области $\Gamma = \partial\Omega$ и условий внутри области, которые в простейшем случае описываются уравнением Софи Жермен – Лагранжа [13]

$$D\nabla^4 w(x) = sw(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (1.1)$$

где s – искомое собственное значение.

Соответствующая операторная формулировка краевой задачи, включающая все три части традиционной постановки в согласованном с вычислительной точки зрения виде, в частности, для естественных краевых условий и при наличии упругого основания (c – жесткость основания) имеет вид:

$$\partial_1^2(\theta M_1) + 2\partial_1\partial_2(\theta M_{12}) + \partial_2^2(\theta M_2) = -sw, \quad (x_1, x_2) \in \omega, \tag{1.2}$$

где

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2); \quad M_2 = D(\nu\chi_1 + \chi_2); \quad M_{12} = 0.5 \cdot D(1-\nu)\chi_{12}; \tag{1.3}$$

$$\chi_1 = -\partial_1^2 w; \quad \chi_2 = -\partial_2^2 w; \quad \chi_{12} = -2\partial_1\partial_2 w \tag{1.4}$$

– соответственно изгибающие и крутящий моменты, изменения кривизны и кручения; ω – расширенная область, окаймляющая Ω; θ – характеристическая функция области Ω; δ_Γ – дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$,

$$\theta = \theta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega; \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(x_1, x_2) = \partial\theta / \partial\overline{n}\,. \tag{1.6}$$

Сформулируем операторную постановку задачи в перемещениях. Подставляя (1.4) в (1.3) и далее полученное в (1.1), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} &-\partial_1^2[\theta D(\partial_1^2 w + \nu\partial_2^2 w)] - \\ &-\partial_1\partial_2[\theta D(1-\nu)\partial_1\partial_2 w] - \\ &-\partial_2^2[\theta D(\nu\partial_1^2 w + \partial_2^2 w)] = -sw, \quad (x_1, x_2) \in \omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Оператор краевой задачи (1.7) в соответствии с аналогией МКЭ можно назвать континуальным оператором жесткости конструкции. Постановка (1.7) на практике является основной, так как необходимость удовлетворения кинематическим граничным условиям, как правило, учитывается в процессе решения задачи на дискретном уровне.

1.3. Континуальная операторная постановка задачи с выделением основного направления. Выделим одно направление, соответствующее переменной x_2, вдоль которого физико-геометрические характеристики плиты остаются неизменными, называемое в дальнейшем основным или «продольным». Выполняя преобразования, можем перейти от постановки (1.7) к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с операторными коэффициентами, которое без учета «поперечных» краевых условий записывается следующим образом:

$$-\mathcal{L}_4\partial_2^4 w + \mathcal{L}_2\partial_2^2 w + \mathcal{L}_0 w = -sw, \quad (x_1, x_2) \in \omega, \tag{1.8}$$

где

$$\mathcal{L}_4 = \theta D; \tag{1.9}$$

$$\mathcal{L}_2 = -[\partial_1^2\theta D\nu + 2\partial_1\theta D(1-\nu)\partial_1 + \theta D\nu\partial_1^2]; \tag{1.10}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_1^2\theta D\partial_1^2\,. \tag{1.11}$$

Отметим, что приведенные операторные коэффициенты включают в себя только краевые условия вдоль основного направления. Постановка (1.8)-(1.11) является исходной с точки зрения разработанных авторами методов. С позиции дальнейшего аналитического решения сформулированную таким образом задачу необходимо свести либо к первому порядку.

Введя обозначения

$$y_1 = y_1(x_1, x_2) = w(x_1, x_2); \tag{1.12}$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2) = \partial_2 y_1(x_1, x_2) = y_1'(x_1, x_2) = \partial_2 w(x_1, x_2) = w'(x_1, x_2); \tag{1.13}$$

$$y_3 = y_3(x_1, x_2) = \partial_2 y_2(x_1, x_2) = y_2'(x_1, x_2) = \partial_2^2 w(x_1, x_2) = w''(x_1, x_2); \tag{1.14}$$

$$y_4 = y_4(x_1, x_2) = \partial_2 y_3(x_1, x_2) = y_3'(x_1, x_2) = \partial_2^3 w(x_1, x_2) = w'''(x_1, x_2). \tag{1.15}$$

и, рассматривая их наряду с (1.8), будем иметь:

$$\overline{Y}' = \widetilde{\mathcal{L}}_s\overline{Y}\,, \tag{1.16}$$

где $\overline{Y}(x_2) = \begin{bmatrix} y_1(x_2) \\ y_2(x_2) \\ y_3(x_2) \\ y_4(x_2) \end{bmatrix}$; $\overline{Y}'(x_2) = \partial_2\overline{Y}(x_2)$; (1.17)

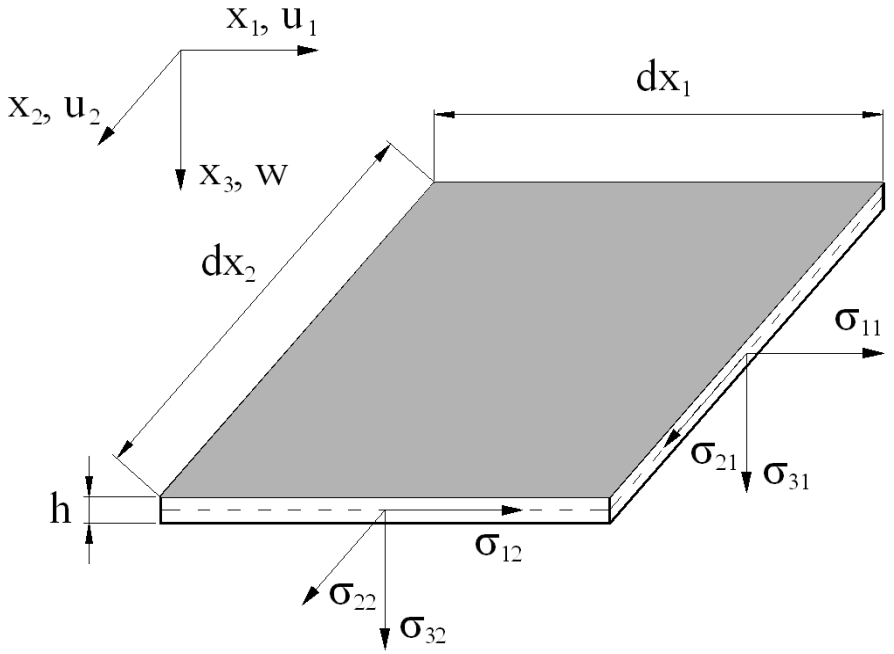


Рис. 1.1. Дифференциально малый элемент плиты и напряжения в сечениях.

$$\widetilde{\mathscr{L}}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathscr{L}_4^{-1}(\mathscr{L}_0 + sE) & 0 & \mathscr{L}_4^{-1}\mathscr{L}_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим, например, двухточечную краевую задачу. Пусть граничные условия задаются в сечениях $x_2 = 0$ и $x_2 = l$, где l – длина конструкции. В случае шарнирных закреплений (по осям Ox_1 и Ox_2) сечениях $x_2 = 0$ и $x_2 = l$ граничные условия представимы в виде

$$B_0 \overline{Y}(x_1, 0) + B_l \overline{Y}(x_1, l) = 0, \quad (1.19)$$

где B_0 и B_l – матрицы граничных условий, в данном случае

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Итак, задача формируется следующим образом: определить такую отличную от тождественного нуля вектор-функцию $\overline{Y}(x_1, x_2)$ и такое значение s, при котором справедливы уравнение (1.16) и граничные условия (1.19).

1.4. Учет упругоподатливых опор (основание типа Винклера). При решении практических задач нередко имеют место случаи, когда на области Ω, ее границе $\Gamma = \partial\Omega$ или их частях заданы упругоподатливые опоры, непрерывные по основному направлению. Реактивное усилие R, возникающее в опоре, определяется по следующей формуле:

$$R = cw, \quad (1.21)$$

где c – упругая характеристика опоры (коэффициент отпора опоры по направлению оси Ox_3).

Наличие упругоподатливых опор вносит корректировку в операторную постановку задачи: оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_s$ в (1.16) определяется формулой:

$$\widetilde{\mathscr{L}}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathscr{L}_4^{-1}(\mathscr{L}_0 + c + sE) & 0 & \mathscr{L}_4^{-1}\mathscr{L}_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

2. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель конструкции. Дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ). Для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи исходная область Ω окаймляется расширенной ω. Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: в поперечном направлении конструкции (вдоль оси Ox_1) производится сеточная аппроксимация, а в продольном (основном) (вдоль оси Ox_2) – решается континуальная задача (рис. 2.1).

Область ω разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) ω_i (рис. 2.2):

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N-1} \omega_i \; ; \quad (2.1)$$

где
$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3): \; x_1 \in [0, l_1]; \; x_2 \in [0, l_2]; \; x_3 \in [0, h]\}; \quad (2.2)$$

где l_1, l_2 – размеры принятой сетки элементов, аппроксимирующих плиту соответственно по направлениям осей Ox_1 и Ox_2; (x_1^i, x_2), $i = 1, 2, ..., N$ – координаты узлов сетки в «поперечном» направлении, h_i – шаги сетки;

$$\omega_i = \{(x_1, x_2, x_3): \; x_1 \in [x_1^i, x_1^{i+1}]; \; x_2 \in [0, l_2]; \; x_3 \in [0, h]\}; \quad (2.3)$$

$$x_1^{i+1} = x_1^i + h_i, \;\; i = 1, 2, ..., N-1; \quad (2.4)$$

$$h_i = \begin{cases} x_1^{i+1} - x_1^i, & i < N \\ 0, & i = N \end{cases}, \;\; i = 1, 2, ..., N. \quad (2.5)$$

Определяем характеристическую функцию элемента:

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_i \bigcap \Omega \\ 0, & x \notin \omega_i \bigcap \Omega \end{cases}; \quad (2.6)$$

$$\overline{\lambda}_i = \theta_i \lambda; \quad \overline{\mu}_i = \theta_i \mu. \quad (2.7)$$

Рассмотрим произвольный i-й элемент модели (рис. 2.2). Замена переменных играет большую роль при численном решении краевых задач сеточными методами, так как в этом случае осуществляется локальная замена переменных внутри элемента. Переходим из исходной системы координат в элементные (рис. 2.2): $(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)$. Здесь t – локальная координата, введенная по направлению оси Ox_1 и связанная с ДККЭ:

$$t = (x_1 - x_1^i)/h_i; \;\; t \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

2.2. Аппроксимация неизвестных функций. Введем в рассмотрение функции

$$z_j(x_1, x_2) = \partial_1 y_j(x_1, x_2), \;\; j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.9)$$

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются функции y_1, y_2, y_3, y_4 и z_1, z_2, z_3, z_4, т.е. для i-го узла это y_1^i, y_2^i, y_3^i, y_4^i и z_1^i, z_2^i, z_3^i, z_4^i. Соответственно вектор неизвестных имеет вид:

$$\overline{Y}_n^i = \overline{Y}_n^i(x_2) = [\, y_1^i \;\; z_1^i \;\; y_2^i \;\; z_2^i \;\; y_3^i \;\; z_3^i \;\; y_4^i \;\; z_4^i \,]^T \quad (2.10)$$

или

$$\overline{Y}_n^i = \overline{Y}_n^i(x_2) = [\, (\overline{y}_{n,1}^i)^T \;\; (\overline{y}_{n,2}^i)^T \;\; (\overline{y}_{n,3}^i)^T \;\; (\overline{y}_{n,4}^i)^T \,]^T, \quad (2.11)$$

где

$$\overline{y}_{n,j}^i = \overline{Y}_n^i(x_2) = [\, y_j^i \;\; z_j^i \,]^T, \;\; j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.12)$$

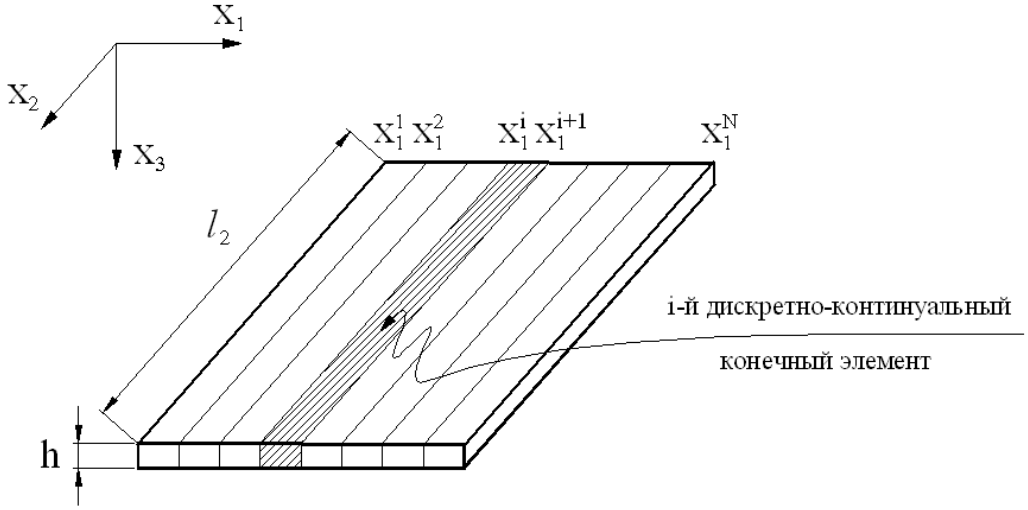


Рис. 2.1. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель плиты.

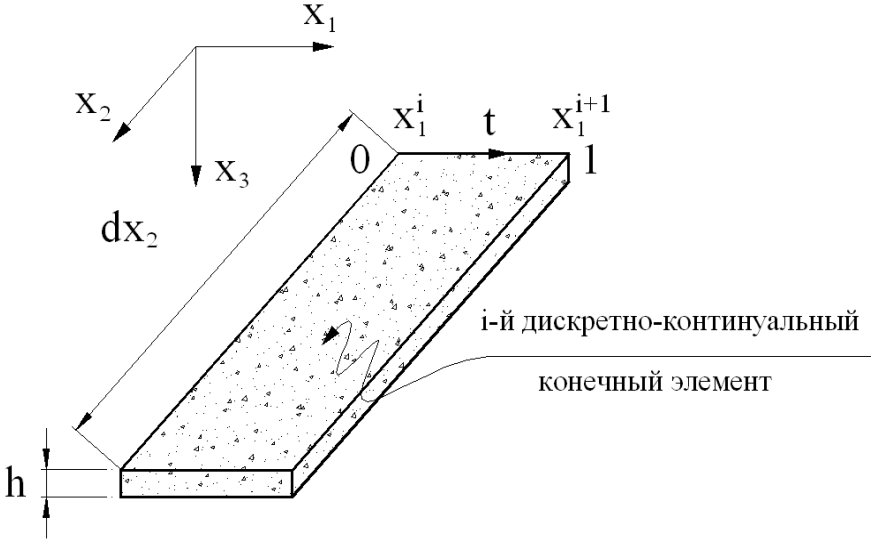


Рис. 2.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

Вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\overline{Y}^i = \overline{Y}^i(x_2) = [\,(\overline{y}_1^i)^T \quad (\overline{y}_2^i)^T \quad (\overline{y}_3^i)^T \quad (\overline{y}_4^i)^T\,]^T, \tag{2.13}$$

где

$$\overline{y}_j^i = \overline{y}_j^i(x_2) = [\,(\overline{y}_{j,n}^i)^T \quad (\overline{y}_{j,n}^{i+1})^T\,]^T, \quad j = 1,2,3,4\,. \tag{2.14}$$

Будем полагать, что поля y_1, y_2, y_3, y_4 по «поперечному» сечению рассматриваемого ДККЭ аппроксимируются кубическими полиномами [6-7,12]. Здесь можно провести прямую аналогию с функциями формы, которые используются в стандартном МКЭ при решении задач, связанных с поперечным изгибом балок. Выполнив схожую процедуру построения формул аппроксимации, имеем:

$$\begin{aligned} y_j &= y_j(x_1,x_2) = y_j(t,x_2) = \\ &= \alpha_{1,i}^j + \alpha_{2,i}^j t + \alpha_{3,i}^j t^2 + \alpha_{4,i}^j t^3, \\ &\qquad j = 1,2,3,4, \quad (x_1,x_2) \in \omega_i; \end{aligned} \tag{2.15}$$

или иначе в матрично-векторной форме

$$y_j = \bar{t}^T \overline{\alpha}_i^{(j)}; \quad j = 1,2,3,4\,, \quad (x_1,x_2) \in \omega_i\,, \tag{2.16}$$

где

$$\overline{\alpha}_i^{(j)} = [\alpha_{1,i}^j \;\; \alpha_{2,i}^j \;\; \alpha_{3,i}^j \;\; \alpha_{4,i}^j]^T; \qquad (2.17)$$

$$\bar{t} = [1 \;\; t \;\; t^2 \;\; t^3]^T. \qquad (2.18)$$

Выражения для функций z_1, z_2, z_3, z_4 естественным образом получаются из формул (2.15)-(2.16) путем их дифференцирования:

$$\begin{aligned} z_j(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} y_j(x_1,x_2) = \\ &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial t} y_j(t,x_2) = \\ &= \frac{1}{h_i}[\alpha_{2,i}^j + 2\alpha_{3,i}^j t + 3\alpha_{4,i}^j t^2], \\ & j = 1,2,3,4, \;\; (x_1,x_2) \in \omega_i. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Итак, очевидно, что имеют место следующие соотношения:

$$\overline{y}_j^i = C_i \overline{\alpha}_i^{(j)}, \quad j = 1,2,3,4, \qquad (2.20)$$

где

$$C_i = \widetilde{C}_i C; \qquad (2.21)$$

$$\widetilde{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/h_i \end{bmatrix}; \qquad (2.22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (2.23)$$

Обращая матрицу C_i получим:

$$C_i^{-1} = C^{-1}\widetilde{C}_i^{-1}; \qquad (2.24)$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (2.25)$$

$$\widetilde{C}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_i \end{bmatrix}. \qquad (2.26)$$

Следовательно, определяем

$$y_j = \bar{t}^T C_i^{-1} \overline{y}_j^i, \quad j = 1,2,3,4, \; (x_1,x_2) \in \omega_i \qquad (2.27)$$

или иначе

$$y_j(x_1,x_2) = N_i(t)\overline{y}_j^i(x_2), \; j = 1,2,3,4, \; (x_1,x_2) \in \omega_i, \qquad (2.28)$$

где

$$N_i = N_i(t) = \bar{t}^T C_i^{-1} = [\, N_{i,1} \;\; N_{i,2} \;\; N_{i,3} \;\; N_{i,4} \,] \qquad (2.29)$$

– матрица функций формы («поперечных») по сечению ДККЭ с элементами

$$N_{i,1}(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3; \qquad (2.30)$$

$$N_{i,2}(t) = h_i(t - 2t^2 + t^3); \qquad (2.31)$$

$$N_{i,3}(t) = 3t^2 - 2t^3; \qquad (2.32)$$

$$N_{i,4}(t) = h_i(-t^2 + t^3). \qquad (2.33)$$

Матрица (2.29), в свою очередь, после переобозначений представима в виде:

$$N_i(t) = \bar{t}^T N_i^0, \quad \text{где} \quad N_i^0 = C_i^{-1}. \qquad (2.34)$$

2.3. Аппроксимация частных производных от искомых функций на ДККЭ. Выражения для частных производных от неизвестных функций по переменным x_1 и x_2 записываются следующим образом (ниже $(x_1,x_2) \in \omega_i$):

– частные производные первого порядка:

$$\partial_1 y_j(x_1,x_2) = z_j(x_1,x_2) = \frac{1}{h_i} N_i'(t)\overline{y}_j^i(x_2), \; j = 1,2,3,4; \qquad (2.35)$$

$$\partial_2 y_j(x_1,x_2) = N_i(t)\partial_2 \overline{y}_j^i(x_2) = N_i(t)\overline{y}_{j+1}^i(x_2), \; j = 1,2,3; \qquad (2.36)$$

– частные производные второго порядка:

$$\partial_1^2 y_j(x_1,x_2)=\frac{1}{h_i^2}N_i''(t)\bar{y}_j^i(x_2),\quad j=1,2,3,4; \tag{2.37}$$

$$\partial_1\partial_2 y_j(x_1,x_2)=\partial_2 z_j(x_1,x_2)=z_{j+1}(x_1,x_2)= =\frac{1}{h_i}N_i'(t)\partial_2\bar{y}_j^i(x_2)=\frac{1}{h_i}N_i'(t)\bar{y}_{j+1}^i(x_2), \quad j=1,2,3; \tag{2.38}$$

$$\partial_2^2 y_j(x_1,x_2)=N_i(t)\partial_2^2\bar{y}_j^i(x_2)=N_i(t)\bar{y}_{j+2}^i(x_2), \quad j=1,2. \tag{2.39}$$

– частные производные третьего порядка:

$$\partial_1^3 y_j(x_1,x_2)=\frac{1}{h_i^3}N_i'''(t)\bar{y}_j^i(x_2),\quad j=1,2,3,4; \tag{2.40}$$

$$\partial_1^2\partial_2 y_j(x_1,x_2)=\partial_1\partial_2 z_j(x_1,x_2)= =\partial_1 z_{j+1}(x_1,x_2)= =\frac{1}{h_i^2}N_i''(t)\partial_2\bar{y}_j^i(x_2)=\frac{1}{h_i^2}N_i''(t)\bar{y}_{j+1}^i(x_2), \quad j=1,2,3; \tag{2.41}$$

$$\partial_1\partial_2^2 y_j(x_1,x_2)=\partial_2^2 z_j(x_1,x_2)= =z_{j+2}(x_1,x_2)= =\frac{1}{h_i}N_i'(t)\partial_2^2\bar{y}_j^i(x_2)=\frac{1}{h_i}N_i'(t)\bar{y}_{j+2}^i(x_2), \quad j=1,2; \tag{2.42}$$

$$\partial_2^3 y_j(x_1,x_2)=N_i(t)\partial_2^3\bar{y}_j^i(x_2)=N_i(t)\bar{y}_{j+3}^i(x_2), \quad j=1. \tag{2.43}$$

где

$$N_i'(t)=\frac{d}{dt}N_i(t)=[\,N_{i,1}'\quad N_{i,2}'\quad N_{i,3}'\quad N_{i,4}'\,]; \tag{2.44}$$

$$N_i''(t)=\frac{d^2}{dt^2}N_i(t)=[\,N_{i,1}''\quad N_{i,2}''\quad N_{i,3}''\quad N_{i,4}''\,]; \tag{2.45}$$

$$N_i'''(t)=\frac{d^3}{dt^3}N_i(t)=[\,N_{i,1}'''\quad N_{i,2}'''\quad N_{i,3}'''\quad N_{i,4}'''\,]. \tag{2.46}$$

Производные от матрицы функций формы (2.29) находятся дифференцированием ее элементов (2.30), т.е.

$$N_{i,1}'(t)=6t(t-1); \tag{2.47}$$

$$N_{i,2}'(t)=h_i(1-4t+3t^2); \tag{2.48}$$

$$N_{i,3}'(t)=6t(1-t); \tag{2.49}$$

$$N_{i,4}'(t)=h_i t(3t-2); \tag{2.50}$$

$$N_{i,1}''(t)=6(2t-1); \tag{2.51}$$

$$N_{i,2}''(t)=2h_i(3t-2); \tag{2.52}$$

$$N_{i,3}''(t)=6(1-2t); \tag{2.53}$$

$$N_{i,4}''(t)=2h_i(3t-1); \tag{2.54}$$

$$N_{i,1}'''(t)=12; \tag{2.55}$$

$$N_{i,2}'''(t)=6h_i; \tag{2.56}$$

$$N_{i,3}'''(t)=-12; \tag{2.57}$$

$$N_{i,4}'''(t)=6h_i. \tag{2.58}$$

Очевидно, что соответствующие узловые функции определяются по формулам, являющимся частными случаями (2.35)-(2.43):
– частные производные первого порядка:

$$[\partial_1 y_j]^i=z_j^i(x_2),\quad i=1,2,...,N,\quad j=1,2,3,4; \tag{2.59}$$

$$[\partial_2 y_j]^i=y_{j+1}^i(x_2),\quad i=1,2,...,N,\quad j=1,2,3; \tag{2.60}$$

– частные производные второго порядка:

$$[\partial_1^2 y_j]^i= =\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{i-1}^2}N_{i-1}''(1)\bar{y}_j^{i-1}(x_2)+\frac{1}{h_i^2}N_i''(0)\bar{y}_j^i(x_2)\right], \quad i=2,...,N-1;\quad j=1,2,3,4; \tag{2.61}$$

$$[\partial_1^2 y_j]^1=\frac{1}{h_1^2}N_1''(0)\bar{y}_j^1(x_2); \tag{2.62}$$

$$[\partial_1^2 y_j]^N=\frac{1}{h_{N-1}^2}N_{N-1}''(1)\bar{y}_j^{N-1}(x_2),\ j=1,2,3,4; \tag{2.63}$$

$$[\partial_1\partial_2 y_j]^i = z^i_{j+1}, \quad i=1,2,...,N, \quad j=1,2,3; \tag{2.64}$$

$$[\partial_2^2 y_j]^i = y^i_{j+2}, \quad i=1,2,...,N, \quad j=1,2; \tag{2.65}$$

– частные производные третьего порядка:

$$[\partial_1^3 y_j]^i = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^3_{i-1}} N'''_{i-1}(1)\bar{y}_j^{i-1}(x_2) + \frac{1}{h_i^3} N'''_i(0)\bar{y}_j^i(x_2)\right], \\ i=2,...,N-1; \quad j=1,2,3,4; \tag{2.66}$$

$$[\partial_1^3 y_j]^1 = \frac{1}{h_1^3} N'''_1(0)\bar{y}_j^1(x_2); \tag{2.67}$$

$$[\partial_1^3 y_j]^N = \frac{1}{h^3_{N-1}} N'''_{N-1}(1)\bar{y}_j^{N-1}(x_2), \ j=1,2,3,4; \tag{2.68}$$

$$[\partial_1^2\partial_2 y_j]^i = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^2_{i-1}} N''_{i-1}(1)\bar{y}_{j+1}^{i-1}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N''_i(0)\bar{y}_{j+1}^i(x_2)\right], \\ i=2,...,N-1; \quad j=1,2,3; \tag{2.69}$$

$$[\partial_1^2\partial_2 y_j]^1 = \frac{1}{h_1^3} N''_1(0)\bar{y}_{j+1}^1(x_2); \tag{2.70}$$

$$[\partial_1^2\partial_2 y_j]^N = \frac{1}{h^3_{N-1}} N''_{N-1}(1)\bar{y}_{j+1}^{N-1}(x_2), \ j=1,2,3; \tag{2.71}$$

$$[\partial_1\partial_2^2 y_j]^i = z^i_{j+2}, \quad i=1,2,...,N, \quad j=1,2; \tag{2.72}$$

$$[\partial_2^3 y_j]^i = y^i_{j+3}, \quad i=1,2,...,N, \quad j=1. \tag{2.73}$$

2.4. Аппроксимация изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил на ДККЭ. Выражения для изгибающих моментов на элементе после определения (2.35)-(2.43) на основе известных соотношений имеют вид:

$$M_1(x_1,x_2) = -D[\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + \nu\partial_2^2 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + \nu y_3(x_1,x_2)]; \tag{2.74}$$

$$M_2(x_1,x_2) = -D[\nu\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + \partial_2^2 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[\nu\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + y_3(x_1,x_2)]. \tag{2.75}$$

Поперечные силы, в свою очередь, вычисляются по формулам:

$$Q_1(x_1,x_2) = -D[\partial_1^3 y_1(x_1,x_2) + \partial_1\partial_2^2 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[\partial_1^3 y_1(x_1,x_2) + z_3(x_1,x_2)]; \tag{2.76}$$

$$Q_2(x_1,x_2) = -D[\partial_2\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + \partial_2^3 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[\partial_1^2 y_2(x_1,x_2) + y_4(x_1,x_2)]. \tag{2.77}$$

Крутящий момент определяется выражением

$$H(x_1,x_2) = M_{12}(x_1,x_2) = M_{21}(x_1,x_2) = \\ = -D(1-\nu)\partial_1\partial_2 y_1(x_1,x_2) = \\ = -D(1-\nu)\partial_1 y_2(x_1,x_2). \tag{2.78}$$

Приведенные поперечные силы, часто используемые при задании граничных условий, имеют вид:

$$V_1(x_1,x_2) = \\ = -D[\partial_1^3 y_1(x_1,x_2) + (2-\nu)\partial_1\partial_2^2 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[\partial_1^3 y_1(x_1,x_2) + (2-\nu) z_3(x_1,x_2)]; \tag{2.79}$$

$$V_2(x_1,x_2) = \\ = -D[(2-\nu)\partial_2\partial_1^2 y_1(x_1,x_2) + \partial_2^3 y_1(x_1,x_2)] = \\ = -D[(2-\nu)\partial_1^2 y_2(x_1,x_2) + y_4(x_1,x_2)]. \tag{2.80}$$

Согласно (2.74)-(2.78) внутренние усилия в узлах находятся по формулам:

$$M_{1,i} = -D([\partial_1^2 y_1]^i + \nu y_3^i); \tag{2.81}$$

$$M_{2,i} = -D(\nu[\partial_1^2 y_1]^i + y_3^i); \tag{2.82}$$

$$Q_{1,i} = -D([\partial_1^3 y_1]^i + z_3^i); \tag{2.83}$$

$$\mathrm{Q}_{2,i} = -D([\partial_1^2\partial_2 y_1]^i + y_4^i); \tag{2.84}$$

$$H_{\mathrm{i}} = M_{12,i} = M_{21,i} = -D(1-\nu) z_2^i. \tag{2.85}$$

2.5. Построение матриц жесткости ДККЭ. В соответствии с [1-3] имеет место следующее соответствие между континуальными операторами, представленными выше, и их

дискретно-континуальными аналогами на произвольном ДККЭ:

$$\mathscr{L}_4 = \theta D \quad \Rightarrow \quad K_4^i = \theta_i D_i h_i \, (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t}\bar{t}^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.86}$$

$$\mathscr{L}_2 = -[\partial_1^2 \theta D \nu + 2\partial_1 \theta D (1-\nu)\partial_1 + \theta D \nu \partial_1^2] \Rightarrow \quad K_2^i = K_{2,1}^i + K_{2,2}^i + K_{2,3}^i ; \tag{2.87}$$

$$\mathscr{L}_0 = -\partial_1^2 \theta D \partial_1^2 + \theta c \quad \Rightarrow \quad K_0^i = K_{0,1}^i + K_{0,2}^i , \tag{2.88}$$

где $$K_{2,1}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{h_i} (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t}'' \bar{t}^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.89}$$

$$K_{2,3}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{h_i} (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t} (\bar{t}'')^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.90}$$

$$K_{2,2}^i = 2\frac{\theta_i D_i (1-\nu_i)}{h_i} (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t}' (\bar{t}')^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.91}$$

$$\bar{t}' = \frac{\partial}{\partial t}\bar{t} ; \quad \bar{t}'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{t} ; \tag{2.92}$$

$$K_{0,1}^i = \frac{\theta_i D_i}{h_i^3} (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t}'' (\bar{t}'')^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.93}$$

$$K_{0,2}^i = c_i h_i (N_i^0)^* \left[\int_0^1 \bar{t}\bar{t}^T dt \right] N_i^0 ; \tag{2.94}$$

D_i и ν_i – значения цилиндрической жесткости на ДККЭ; c_i – значение коэффициента, характеризующего жесткость основания для заданного ДККЭ.

Таким образом, задача построения матриц K_0^i, K_2^i и K_4^i, по сути, сводится к вычислению интегралов

$$\int_0^1 \bar{t}\bar{t}^T dt ; \quad \int_0^1 \bar{t}(\bar{t}'')^T dt ; \quad \int_0^1 \bar{t}''\bar{t}^T dt ; \quad \int_0^1 \bar{t}'(\bar{t}')^T dt ,$$

то есть

$$\int_0^1 \bar{t}\bar{t}^T dt = \frac{1}{420}\begin{bmatrix} 420 & 210 & 140 & 105 \\ 210 & 140 & 105 & 84 \\ 140 & 105 & 84 & 70 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \end{bmatrix};$$

$$\int_0^1 \bar{t}(\bar{t}'')^T dt = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 & 90 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 20 & 45 \\ 0 & 0 & 15 & 36 \end{bmatrix};$$

$$\int_0^1 \bar{t}''\bar{t}^T dt = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 30 & 20 & 15 \\ 90 & 60 & 45 & 36 \end{bmatrix};$$

$$\int_0^1 \bar{t}'(\bar{t}')^T dt = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 30 & 30 \\ 0 & 30 & 40 & 45 \\ 0 & 30 & 45 & 54 \end{bmatrix};$$

$$\int_0^1 \bar{t}''(\bar{t}'')^T dt = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Используя последние формулы, получим:

$$K_4^i = \frac{\theta_i D_i h_i}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22h_i & 54 & -13h_i \\ 22h_i & 4h_i^2 & 13h_i & -3h_i^2 \\ 54 & 13h_i & 156 & -22h_i \\ -13h_i & -3h_i^2 & -22h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}; \tag{2.95}$$

$$K_{2,1}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{30h_i}\begin{bmatrix} -36 & -3h_i & 36 & -3h_i \\ -33h_i & -4h_i^2 & 3h_i & h_i^2 \\ 36 & 3h_i & -36 & 3h_i \\ -3h_i & h_i^2 & 33h_i & -4h_i^2 \end{bmatrix}; \tag{2.96}$$

$$K_{2,2}^i = \frac{\theta_i D_i (1-\nu_i)}{15h_i}\begin{bmatrix} 36 & 3h_i & -36 & 3h_i \\ 3h_i & 4h_i^2 & -3h_i & -h_i^2 \\ -36 & -3h_i & 36 & -3h_i \\ 3h_i & -h_i^2 & -3h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}; \tag{2.97}$$

$$K_{2,3}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{30h_i}\begin{bmatrix} -36 & -33h_i & 36 & -3h_i \\ -3h_i & -4h_i^2 & 3h_i & h_i^2 \\ 36 & 3h_i & -36 & 33h_i \\ -3h_i & h_i^2 & 3h_i & -4h_i^2 \end{bmatrix}; \quad (2.98)$$

$$K_{0,1}^i = 2\frac{\theta_i D_i}{h_i^3}\begin{bmatrix} 6 & 3h_i & -6 & 3h_i \\ 3h_i & 2h_i^2 & -3h_i & h_i^2 \\ -6 & -3h_i & 6 & -3h_i \\ 3h_i & h_i^2 & -3h_i & 2h_i^2 \end{bmatrix}; \quad (2.99)$$

$$K_{0,2}^i = \frac{\theta_i c_i h_i}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22h_i & 54 & -13h_i \\ 22h_i & 4h_i^2 & 13h_i & -3h_i^2 \\ 54 & 13h_i & 156 & -22h_i \\ -13h_i & -3h_i^2 & -22h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Формулы (2.95)-(2.100) удобно представить в мультипликативном виде (верхний индекс T обозначает операцию транспонирования матрицы):

$$K_4^i = \frac{\theta_i D_i h_i}{420} H_i A_4 H_i; \quad (2.101)$$

$$K_{2,1}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{30h_i} H_i A_{2,1} H_i; \quad (2.102)$$

$$K_{2,3}^i = -\frac{\theta_i D_i \nu_i}{30h_i} H_i A_{2,3} H_i; \quad (2.103)$$

$$K_{2,2}^i = \frac{\theta_i D_i (1-\nu_i)}{15h_i} H_i A_{2,3} H_i; \quad (2.104)$$

$$K_{0,1}^i = 2\frac{\theta_i D_i}{h_i^3} H_i A_{0,1} H_i; \quad (2.105)$$

$$K_{0,2}^i = \frac{\theta_i c_i h_i}{420} H_i A_{0,2} H_i; \quad (2.106)$$

где

$$A_4 = A_{0,2} = \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}; \quad (2.107)$$

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} -36 & -3 & 36 & -3 \\ -33 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 3 \\ -3 & 1 & 33 & -4 \end{bmatrix}; \quad (2.108)$$

$$A_{2,3} = A_{2,1}^T = \begin{bmatrix} -36 & -33 & 36 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 33 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad (2.109)$$

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad (2.110)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_i \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

2.6. Формирование глобальных матриц и их соответствие континуальным операторам. Формирование глобальных матриц K_4, K_2 и K_0 $2N$-мерного порядка для системы ДККЭ для всей конструкции осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости (метод «конечных вкладов» – суммирование с накоплением [6-7,12]). Континуальные операторы, представленные ранее, и матрицы сопоставлены так:

$$\mathcal{L}_4 \Rightarrow K_4; \ \mathcal{L}_2 \Rightarrow K_2; \ \mathcal{L}_0 \Rightarrow K_0; \quad (2.112)$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_s \Rightarrow \widetilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ K_4^{-1}K_0 & 0 & K_4^{-1}K_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

2.7. Задание граничных условий. Статические граничные условия для рассматриваемой конструкции учитываются в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи должны быть приняты во внимание кинематические граничные условия.

Пусть $x_{2,k}^b$, $k = 1, 2, ..., n_k$ – координаты граничных поперечных сечений конструкции

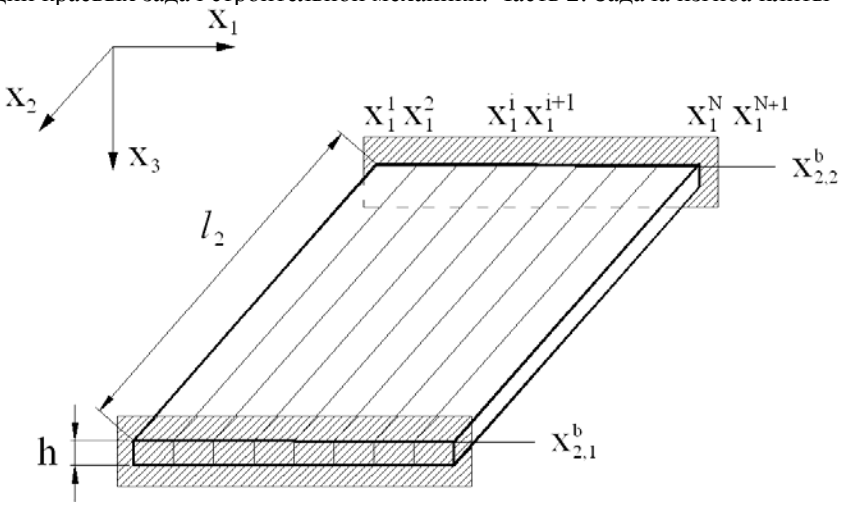


Рис. 2.3. Пример расположения координат граничных поперечных сечений.

(рис. 2.3). Граничные условия в них записываются в виде:

$$B_k^- \overline{Y}_n(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \overline{Y}_n(x_{2,k}^b + 0) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+, \quad k = 2, 3, ..., n_k - 1; \tag{2.114}$$

$$B_1^- \overline{Y}_n(x_{2,1}^b - 0) + B_{n_k}^+ \overline{Y}_n(x_{2,n_k}^b + 0) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^-, \tag{2.115}$$

где B_k^-, B_k^+ – матрицы граничных условий, квадратные $8N$-го порядка; $\overline{g}_k^-, \overline{g}_k^+$, $k = 2, 3, ..., n_k - 1$; $\overline{g}_1^+, \overline{g}_{n_k}^-$ – заданные $8N$-мерные векторы правых частей граничных условий;

$$\overline{Y}_n = \overline{Y}_n(x_2) = [\,(\overline{y}_{n,1})^T \;\; (\overline{y}_{n,2})^T \;\; (\overline{y}_{n,3})^T \;\; (\overline{y}_{n,4})^T\,]^T, \tag{2.116}$$

где

$$\overline{y}_{n,j} = \overline{y}_{n,j}(x_2) = [\,(\overline{y}_{n,j}^1)^T \;\; (\overline{y}_{n,j}^2)^T \;\; ... \;\; (\overline{y}_{n,j}^N)^T\,]^T, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.117}$$

– глобальные вектор-функции узловых неизвестных.

2.8. Задание некоторых стандартных типов граничных условий поперечных по отношению к основному направлению. Рассмотрим задание некоторых стандартных типов граничных условий поперечных по отношению к основному направлению в форме (2.114)-(2.115) в произвольной граничной точке с координатой $x_{2,k}^b$. Строго говоря, здесь возможны три основных варианта граничной точки: 1) $0 < x_{2,k}^b < l_2$ – промежуточная граничная точка; 2) $x_{2,k}^b = x_{2,1}^b = 0$ – крайняя левая граничная точка; 3) $x_{2,k}^b = x_{2,n_k}^b = l_2$ – крайняя правая граничная точка.

Жесткая заделка. Имеем пару континуальных граничных условий:

$$y_1(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \;\; y_2(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad x_1 \in [\,0, l_1\,]. \tag{2.118}$$

Пусть вначале имеем случай $0 < x_{2,k}^b < l_2$. На дискретно-континуальном уровне условиям (2.118) отвечают условия вида

$$y_1^i(x_{2,k}^b - 0) = y_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \;\; i = 1, 2, ..., N; \tag{2.119}$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b - 0) = z_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \;\; i = 1, 2, ..., N; \tag{2.120}$$

$$y_2^i(x_{2,k}^b - 0) = y_2^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \;\; i = 1, 2, ..., N; \tag{2.121}$$

$$z_2^i(x_{2,k}^b - 0) = z_2^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \;\; i = 1, 2, ..., N. \tag{2.122}$$

Заметим, что условия (2.119) и (2.120) соответствуют первому условию из (2.118), а условия (2.121) и (2.122) – второму из (2.118).

Здесь на данном примере полезно пояснить связь между континуальными и дискретно-континуальными условиями. Первые задаются по «поперечному» (по отношению к переменной x_2) сечению плиты непрерывно ($x_1 \in [\,0, l_1\,]$), тогда как вторые дискретно в конечном наборе точек ((x_1^i, x_2), $i = 1, 2, ..., N$). В этой связи, например, для выполнения первого условия (2.118) мало потребовать равенства (2.119), которое означает лишь равенство нулю соответствующей функции в узлах. Для тождественного непрерывного равенства функции нулю по всему сечению, очевидно, следует дополнительно положить ее первую производную по x_1 также нулевой в этих же самых узлах. В дальнейшем будем пользоваться этим правилом и при формулировке других граничных условий.

Для случая $x_{2,k}^b = x_{2,1}^b = 0$ часть условий естественным образом исчезает и вместо (2.88)-(2.119)-(2.122) получаем:

$$y_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.123)$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.124)$$

$$y_2^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.125)$$

$$z_2^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N, \qquad (2.126)$$

тогда как при $x_{2,k}^b = x_{2,n_k}^b = l_2$ будем иметь:

$$y_1^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.127)$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.128)$$

$$y_2^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.129)$$

$$z_2^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \qquad (2.130)$$

Записав граничные условия в виде (2.119)-(2.130), перейдем теперь к вопросу их представления в форме (2.114)-(2.115). Алгоритм формирования матриц B_k^- и B_k^+ представлен в таблицах 2.1 и 2.2 соответственно. Векторы $\overline{g}_k^-, \overline{g}_k^+$, $k = 2, 3, ..., n_k - 1$, $\overline{g}_1^+$ и $\overline{g}_{n_k}^-$ задаются нулевыми, т.е.

$$\overline{g}_k^- = 0, \quad \overline{g}_k^+ = 0, \quad k = 2, 3, ..., n_k - 1; \quad \overline{g}_1^+ = 0; \quad \overline{g}_{n_k}^- = 0. \qquad (2.131)$$

Шарнирное закрепление. Имеем континуальные граничные условия:

$$y_1(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad y_3(x_1, x_{2,k}^b) = 0, \quad x_1 \in [\,0, l_1\,]. \qquad (2.132)$$

Соответствующие дискретно-континуальные граничные условия записываются следующим образом:

– вариант 1 граничной точки ($0 < x_{2,k}^b < l_2$)

$$y_1^i(x_{2,k}^b - 0) = y_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.133)$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b - 0) = z_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.134)$$

$$y_3^i(x_{2,k}^b - 0) = y_3^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.135)$$

$$z_3^i(x_{2,k}^b - 0) = z_3^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.136)$$

– вариант 2 граничной точки ($x_{2,k}^b = x_{2,1}^b = 0$)

$$y_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.137)$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.138)$$

$$y_3^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.139)$$

$$z_3^i(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.140)$$

– вариант 3 граничной точки ($x_{2,k}^b = x_{2,n_k}^b = l_2$)

$$y_1^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.141)$$

$$z_1^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.142)$$

$$y_3^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N; \qquad (2.143)$$

$$z_3^i(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \qquad (2.144)$$

Граничные условия (2.133)-(2.144) можем переписать в форме (2.114)-(2.115). Алго-

Таблица 2.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_1^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2	$(N+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_1^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
3	$(2N+i, 2N+2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_2^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
4	$(3N+i, 2N+2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_2^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечания: 1. При варианте 3 граничной точки матрица B_k^+ задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^+, не указанные в таблице, равны нулю.

Таблица 2.2. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(4N+i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_1^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2	$(5N+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_1^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
3	$(6N+i, 2N+2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_2^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
4	$(7N+i, 2N+2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_2^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечания: 1. При варианте 2 граничной точки матрица B_k^- задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^-, не указанные в таблице, равны нулю.

Таблица 2.3. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_1^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2	$(N+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_1^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
3	$(2N+i, 4N+2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_3^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
4	$(3N+i, 4N+2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_3^i(x_{2,k}^b+0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечания: 1. При варианте 3 граничной точки матрица B_k^+ задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^+, не указанные в таблице, равны нулю.

Таблица 2.4. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(4N+i, 2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_1^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
2	$(5N+i, 2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_1^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
3	$(6N+i, 4N+2i-1),\ \ i=1,2,...,N$	1	$y_3^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$
4	$(7N+i, 4N+2i),\ \ i=1,2,...,N$	1	$z_3^i(x_{2,k}^b-0)=0,\ \ i=1,2,...,N$

Примечания: 1. При варианте 2 граничной точки матрица B_k^- задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^-, не указанные в таблице, равны нулю.

ритм формирования матриц B_k^- и B_k^+ представлен в таблицах 2.3 и 2.4.

Векторы $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+,\ k=2,3,...,n_k-1$, $\bar{g}_1^+$ и $\bar{g}_{n_k}^-$ задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (2.131).

Свободный край. Имеем континуальные граничные условия:

$$M_2(x_1, x_{2,k}^b)=0,\quad V_2(x_1, x_{2,k}^b)=0,\qquad x_1\in[0, l_1] \quad (2.145)$$

или с учетом (2.74)-(2.80)

$$-D[\nu\partial_1^2 y_1(x_1, x_{2,k}^b)+y_3(x_1, x_{2,k}^b)]=0,\qquad x_1\in[0, l_1]. \quad (2.146)$$

$$-D[\partial_1^2 y_2(x_1, x_{2,k}^b)+(2-\nu)y_3(x_1, x_{2,k}^b)]=0,\qquad x_1\in[0, l_1]. \quad (2.147)$$

Соответствующие дискретно-континуальные граничные условия записываются следующим образом:

– вариант 1 граничной точки ($0<x_{2,k}^b<l_2$)

$$-D(\nu[\partial_1^2 y_1]^i(x_{2,k}^b-0)+y_3^i(x_{2,k}^b-0))= =-D[\nu[\partial_1^2 y_1]^i(x_{2,k}^b+0)+y_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.148)$$

$$-D(\nu[\partial_1^3 y_1]^i(x_{2,k}^b-0)+z_3^i(x_{2,k}^b-0))= =-D[\nu[\partial_1^3 y_1]^i(x_{2,k}^b+0)+z_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.149)$$

$$-D([\partial_1^2 y_2]^i(x_{2,k}^b-0)+y_3^i(x_{2,k}^b-0))= =-D[(2-\nu)[\partial_1^2 y_2]^i(x_{2,k}^b+0)+y_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.150)$$

$$-D([\partial_1^3 y_2]^i(x_{2,k}^b-0)+z_3^i(x_{2,k}^b-0))= =-D[(2-\nu)[\partial_1^3 y_2]^i(x_{2,k}^b+0)+z_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0;\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.151)$$

– вариант 2 граничной точки ($x_{2,k}^b=x_{2,1}^b=0$)

$$-D[\nu[\partial_1^2 y_1]^i(x_{2,k}^b+0)+y_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.152)$$

$$-D[\nu[\partial_1^3 y_1]^i(x_{2,k}^b+0)+z_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.153)$$

$$-D[(2-\nu)[\partial_1^2 y_2]^i(x_{2,k}^b+0)+y_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N; \quad (2.154)$$

$$-D[(2-\nu)[\partial_1^3 y_2]^i(x_{2,k}^b+0)+z_3^i(x_{2,k}^b+0)]=0,\qquad i=1,2,...,N. \quad (2.155)$$

– вариант 3 граничной точки ($x_{2,k}^b=x_{2,n_k}^b=l_2$)

Таблица 2.5. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(1,1)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,1}(0)$	(2.148), $i=1$
2	$(1,2)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,2}(0)$	
3	$(1,3)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,3}(0)$	
4	$(1,4)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,4}(0)$	
5	$(1,4N+1)$	$-D$	
6	$(i,2i-3),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,1}(1)$	(2.148), $i=2,3,...,N-1$
7	$(i,2i-2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,2}(1)$	
8	$(i,2i-1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,1}(0)\right)$	
9	$(i,2i),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,2}(0)\right)$	
10	$(i,2i+1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
11	$(i,2i+2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
12	$(i,4N+2i-1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-D$	
13	$(N,2N-3)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,1}(1)$	(2.148), $i=N$
14	$(N,2N-2)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,2}(1)$	
15	$(N,2N-1)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,3}(1)$	
16	$(N,2N)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,4}(1)$	
17	$(N,6N-1)$	$-D$	

1	2	3	4
18	$(N+1,1)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,1}(0)$	(2.149), $i=1$
19	$(N+1,2)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,2}(0)$	
20	$(N+1,3)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,3}(0)$	
21	$(N+1,4)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,4}(0)$	
22	$(N+1,4N+2)$	$-D$	
23	$(N+i,2i-3),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,1}(1)$	(2.149), $i=2,3,...,N-1$
24	$(N+i,2i-2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,2}(1)$	
25	$(N+i,2i-1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,1}(0)\right)$	
26	$(N+i,2i),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,2}(0)\right)$	
27	$(N+i,2i+1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
28	$(N+i,2i+2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
29	$(N+i,4N+2i-1),$ $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
30	$(2N,2N-3)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,1}(1)$	(2.149), $i=N$
31	$(2N,2N-2)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,2}(1)$	
32	$(2N,2N-1)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,3}(1)$	
33	$(2N,2N)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,4}(1)$	
34	$(2N,6N)$	$-D$	

1	2	3	4
35	$(2N+1, 2N+1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,1}(0)$	(2.150), $i=1$
36	$(2N+2, 2N+2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,2}(0)$	
37	$(2N+1, 2N+3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,3}(0)$	
38	$(2N+1, 2N+4)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,4}(0)$	
39	$(2N+1, 6N+1)$	$-D$	
40	$(2N+i, 2N+2i-3)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,1}(1)$	(2.150), $i=2,3,...,N-1$
41	$(2N+i, 2N+2i-2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,2}(1)$	
42	$(2N+i, 2N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,1}(0)\right)$	
43	$(2N+i, 2N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,2}(0)\right)$	
44	$(2N+i, 2N+2i+1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
45	$(2N+i, 2N+2i+2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
46	$(2N+i, 6N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
47	$(3N, 2N-3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,1}(1)$	(2.150), $i=N$
48	$(3N, 2N-2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,2}(1)$	
49	$(3N, 2N-1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,3}(1)$	
50	$(3N, 2N)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,4}(1)$	
51	$(3N, 8N-1)$	$-D$	

1	2	3	4
52	$(3N+1, 2N+1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,1}(0)$	(2.151), $i=1$
53	$(3N+1, 2N+2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,2}(0)$	
54	$(3N+1, 2N+3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,3}(0)$	
55	$(3N+1, 2N+4)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,4}(0)$	
56	$(3N+1, 6N+2)$	$-D$	
57	$(3N+i, 2N+2i-3)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,1}(1)$	(2.151), $i=2,3,...,N-1$
58	$(3N+i, 2N+2i-2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,2}(1)$	
59	$(3N+i, 2N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,1}(0)\right)$	
60	$(3N+i, 2N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,2}(0)\right)$	
61	$(3N+i, 2N+2i+1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
62	$(3N+i, 2N+2i+2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
63	$(3N+i, 6N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
64	$(4N, 6N-3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,1}(1)$	(2.151), $i=N$
65	$(4N, 6N-2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,2}(1)$	
66	$(4N, 6N-1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,3}(1)$	
67	$(4N, 6N)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,4}(1)$	
68	$(4N, 8N)$	$-D$	

Примечание: 1. При варианте 3 граничной точки матрица B_k^+ задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 2.6. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(4N+1,1)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,1}(0)$	(2.148), $i=1$
2	$(4N+1,2)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,2}(0)$	
3	$(4N+1,3)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,3}(0)$	
4	$(4N+1,4)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^2}N''_{1,4}(0)$	
5	$(4N+1,4N+1)$	$-D$	
6	$(4N+i,2i-3),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,1}(1)$	(2.148), $i=2,3,...,N-1$
7	$(4N+i,2i-2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,2}(1)$	
8	$(4N+i,2i-1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,1}(0)\right)$	
9	$(4N+i,2i),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,2}(0)\right)$	
10	$(4N+i,2i+1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
11	$(4N+i,2i+2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
12	$(4N+i,4N+2i-1),$ $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
13	$(5N,2N-3)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,1}(1)$	(2.148), $i=N$
14	$(5N,2N-2)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,2}(1)$	
15	$(5N,2N-1)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,3}(1)$	
16	$(5N,2N)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,4}(1)$	
17	$(5N,6N-1)$	$-D$	

1	2	3	4
18	$(5N+1,1)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,1}(0)$	(2.149), $i=1$
19	$(5N+1,2)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,2}(0)$	
20	$(5N+1,3)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,3}(0)$	
21	$(5N+1,4)$	$-D\nu\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,4}(0)$	
22	$(5N+1,4N+2)$	$-D$	
23	$(5N+i,2i-3),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,1}(1)$	(2.149), $i=2,3,...,N-1$
24	$(5N+i,2i-2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,2}(1)$	
25	$(5N+i,2i-1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,1}(0)\right)$	
26	$(5N+i,2i),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,2}(0)\right)$	
27	$(5N+i,2i+1),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
28	$(5N+i,2i+2),\ \ i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D\nu\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
29	$(5N+i,4N+2i-1),$ $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
30	$(6N,2N-3)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,1}(1)$	(2.149), $i=N$
31	$(6N,2N-2)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,2}(1)$	
32	$(6N,2N-1)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,3}(1)$	
33	$(6N,2N)$	$-D\nu\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,4}(1)$	
34	$(6N,6N)$	$-D$	

1	2	3	4
35	$(6N+1, 2N+1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,1}(0)$	(2.150), $i=1$
36	$(6N+2, 2N+2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,2}(0)$	
37	$(6N+1, 2N+3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,3}(0)$	
38	$(2N+1, 2N+4)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^2}N''_{1,4}(0)$	
39	$(6N+1, 6N+1)$	$-D$	
40	$(6N+i, 2N+2i-3)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,1}(1)$	(2.150), $i=2,3,...,N-1$
41	$(6N+i, 2N+2i-2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,2}(1)$	
42	$(6N+i, 2N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,1}(0)\right)$	
43	$(6N+i, 2N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}N''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^2}N''_{i,2}(0)\right)$	
44	$(6N+i, 2N+2i+1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
45	$(6N+i, 2N+2i+2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^2}N''_{i,3}(0)$	
46	$(6N+i, 6N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
47	$(7N, 2N-3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,1}(1)$	(2.150), $i=N$
48	$(7N, 2N-2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,2}(1)$	
49	$(7N, 2N-1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,3}(1)$	
50	$(7N, 2N)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^2}N''_{N-1,4}(1)$	
51	$(7N, 8N-1)$	$-D$	

1	2	3	4
52	$(7N+1, 2N+1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,1}(0)$	(2.151), $i=1$
53	$(7N+1, 2N+2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,2}(0)$	
54	$(7N+1, 2N+3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,3}(0)$	
55	$(7N+1, 2N+4)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_1^3}N'''_{1,4}(0)$	
56	$(7N+1, 6N+2)$	$-D$	
57	$(7N+i, 2N+2i-3)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,1}(1)$	(2.151), $i=2,3,...,N-1$
58	$(7N+i, 2N+2i-2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,2}(1)$	
59	$(7N+i, 2N+2i-1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,3}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,1}(0)\right)$	
60	$(7N+i, 2N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\left(\frac{1}{h_{i-1}^3}N'''_{i-1,4}(1)+\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,2}(0)\right)$	
61	$(7N+i, 2N+2i+1)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
62	$(7N+i, 2N+2i+2)$, $i=2,3,...,N-1$	$-\frac{1}{2}D(2-\nu)\frac{1}{h_i^3}N'''_{i,3}(0)$	
63	$(7N+i, 6N+2i)$, $i=2,3,...,N-1$	$-D$	
64	$(8N, 6N-3)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,1}(1)$	(2.151), $i=N$
65	$(8N, 6N-2)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,2}(1)$	
66	$(8N, 6N-1)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,3}(1)$	
67	$(8N, 6N)$	$-D(2-\nu)\frac{1}{h_{N-1}^3}N'''_{N-1,4}(1)$	
68	$(8N, 8N)$	$-D$	

Примечания: 1. При варианте 2 граничной точки матрица B_k^- задается нулевой. 2. Все элементы матриц B_k^-, не указанные в таблице, равны нулю.

$$-D[\nu[\partial_1^2 y_1]^i(x_{2,k}^b-0)+y_3^i(x_{2,k}^b-0)]=0,\quad i=1,2,...,N; \tag{2.156}$$

$$-D[\nu[\partial_1^3 y_1]^i(x_{2,k}^b-0)+z_3^i(x_{2,k}^b-0)]=0,\quad i=1,2,...,N; \tag{2.157}$$

$$-D[(2-\nu)[\partial_1^2 y_2]^i(x_{2,k}^b-0)+y_3^i(x_{2,k}^b-0)]=0,\quad i=1,2,...,N; \tag{2.158}$$

$$-D[(2-\nu)[\partial_1^3 y_2]^i(x_{2,k}^b-0)+z_3^i(x_{2,k}^b-0)]=0,\quad i=1,2,...,N. \tag{2.159}$$

После записи граничных условий в виде (2.148)-(2.159) переписываем их в форме (2.114)-(2.115). Алгоритм формирования матриц B_k^- и B_k^+, учитывающих приведенные ранее соотношения, представлен в таблицах 2.5 и 2.6.

Векторы $\overline{g}_k^-, \overline{g}_k^+$, $k=2,3,...,n_k-1$, $\overline{g}_1^+$ и $\overline{g}_{n_k}^-$ задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (2.131). Далее для компактности приводимых формул и простоты изложения рассмотрим случай $D_i=D;\ \nu_i=\nu,\ i=1,2,...,N$.

2.9. Формирование разрешающей многоточечной краевой задачи. Согласно (2.81)-(2.82), континуальной постановке соответствует дискретно-континуальная в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\overline{Y}_n' = \widetilde{K}_s \overline{Y}_n, \tag{2.160}$$

где

$$\widetilde{K}_s=\begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & E\\ K_4^{-1}(K_0+s\,K_E) & 0 & K_4^{-1}K_2 & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.161}$$

$$\overline{Y}_s'(x_2)=\partial_2\overline{Y}_s(x_2); \tag{2.162}$$

K_E – матрица, формируемая по алгоритму построения матрицы K_0, причем на этапе ее формирования для всех дискретно-континуальных конечных элементов задается $D_i=0$ и $c_i=0$.

Учитывая (2.160) и граничные условия (2.114)-(2.115) переходим в рамках ДКМКЭ многоточечной краевой задаче (с параметром s) для системы $8N$ уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{Y}_n' = \widetilde{K}_s\overline{Y}_n \\ B_k^-\overline{Y}_n(x_{2,k}^b-0)+B_k^+\overline{Y}_n(x_{2,k}^b+0)=\overline{g}_k^-+\overline{g}_k^+, \\ \qquad\qquad k=2,3,...,n_k-1 \\ B_1^-\overline{Y}_n(x_{2,1}^b-0)+B_{n_k}^+\overline{Y}_n(x_{2,n_k}^b+0)=\overline{g}_1^++\overline{g}_{n_k}^- \end{array}\right\} \tag{2.163}$$

Этот этап производится по разработанной методике, которая подробно описана в [1-3].

2.10. Учет граничных условий вдоль основного направления. Задание некоторых стандартных типов граничных условий вдоль основного направления. Рассмотрев ранее алгоритм задания граничных условий, поперечных по отношению к основному направлению, опишем теперь вопросы учета граничных условий вдоль основного направления с позиций указания корректировок, которые вносятся в постановку (2.160). Описания будем вести на примеры простейших типовых случаев: жесткая заделка, шарнирное закрепление и свободный край. Пусть для определенности граничные условия вдоль основного направления задаются по «продольным» сечениям плиты $x_1=x_1^1$ и $x_1=x_1^N$, показанным на рис. 2.4. Условимся для большей компактности дальнейшего изложения описывать задание граничных условий только в сечении $x_1=x_1^1$, для сечения $x_1=x_1^N$ задание осуществляется аналогично.

Свободный край. Имеем континуальные граничные условия для $x_1=x_1^1$:

$$M_1(x_1^1,x_2)=0,\ \ Q_1(x_1^1,x_2)=0,\quad x_2\in[\,0,l_2\,]. \tag{2.164}$$

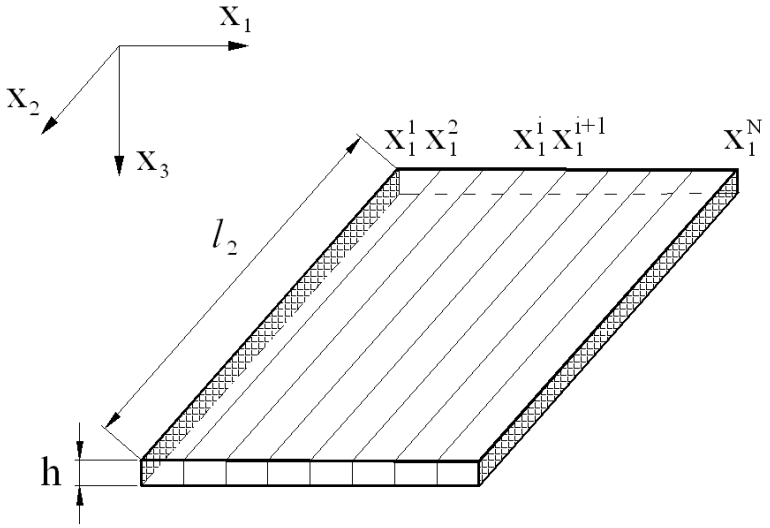


Рис. 2.4. Задание граничных условий вдоль основного направления.

Данный тип граничных условий вдоль основного направления является простейшим с точки зрения учета, а именно, никаких модификаций в постановку (2.163) вносить не требуется, такие граничные условия вдоль основного направления будут учтены автоматически.

Шарнирное закрепление. Континуальные граничные условия для сечения $x_1 = x_1^1$, очевидно, записываются в виде:

$$y_1(x_1^1, x_2) = 0, \quad \partial_1^2 y_1(x_1^1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [\,0, l_2\,]. \qquad (2.165)$$

Второе из условий (2.165) будет выполнено автоматически и не требует учета в (2.163). Что касается первого условия в (2.165), то здесь следует использовать вместо (2.163) следующую постановку:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{Y}_n' = \chi \widetilde{K}_s \overline{Y}_n \\ B_k^- \overline{Y}_n(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \overline{Y}_n(x_{2,k}^b + 0) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+, \\ \qquad\qquad k = 2, 3, ..., n_k - 1 \\ B_1^- \overline{Y}_n(x_{2,1}^b - 0) + B_{n_k}^+ \overline{Y}_n(x_{2,n_k}^b + 0) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^- \end{array}\right\} \qquad (2.166)$$

где χ – матрица $8N$-го порядка, элементы которой определяются по формуле

$$\chi_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,1}, \; i, j = 1, 2, ..., 4N. \qquad (2.127)$$

Кроме того, из соображений совместности неизвестных, при задании граничных условий в сечения поперечных по отношению к основному направлению следует положить перемещение узла 1 и его производную по переменной x_2 равными нулю, т.е. (ниже $y_2^1(x_2)$)

$$y_1^1(x_{2,k}^b) = 0, \; k = 1, 2, ..., n_k; \quad y_2^1(x_{2,k}^b) = 0, \; k = 1, 2, ..., n_k. \qquad (2.168)$$

Жесткая заделка. Для сечения $x_1 = x_1^1$ имеем пару континуальных граничных условий:

$$y_1^1(x_{2,k}^b) = 0, \quad z_1^1(x_{2,k}^b) = 0, \quad x_2 \in [\,0, l_2\,]. \qquad (2.169)$$

Здесь, как и в случае шарнирного закрепления, постановку (2.163) следует модифицировать, представив в виде (2.166), при этом элементы матрицы χ необходимо вычислять по формуле

$$\chi_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,1} - \delta_{i,2}, \; i, j = 1, 2, ..., 4N. \qquad (2.170)$$

Замечание. Исследования проводились в рамках НИР «Построение и анализ коррект-

ных аналитических методов и алгоритмов расчета конструкций регулярной структуры», выполняемой по Плану НИР Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) на 2007-2009 гг. и в рамках НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» /проект 6414/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Об одном дискретно-континуальном подходе к определению собственных значений и собственных функций краевых задач расчета элементов конструкций. Том 1. // Вестник отделения архитектуры и строительных наук. – Москва-Орел: РААСН, АСИ ОрелГТУ, 2009, с. 126-136.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Дискретно-континуальные подходы для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 4, Issue 2, 2008.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. –511 с.
7. **Секулович М.** Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
8. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
10. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
11. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
12. **Трушин С.И.** Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 256 с.
13. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.

Золотов Александр Борисович, Почетный член РААСН, Почетный профессор МГСУ, профессор, доктор технических наук.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Козырев Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: o.kozirev@gmail.com

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЧАСТЬ 3: ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Козырев
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена вопросам использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций (в рамках трехмерной теории упругости). Область применения ДКМКЭ составляют объекты, в которых имеется постоянство физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (называемому основным направлением) при произвольно меняющихся внешних нагрузках и любом характере закреплений. ДКМКЭ являются дискретно-континуальным в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием техники метода конечных элементов (в итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов).

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, краевая задача, собственное значение, собственная функция, трехмерная теория упругости.

APPLICATIONS OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEMS IN STRUCTURAL MECHANICS PART 3: THREE-DIMENSIONAL ELASTIC THEORY

Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov, Oleg A. Kozirev
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to use of discrete-continual finite element method for solving of eigenvalue problems of three-dimensional elastic theory. Operational formulation of the problem is presented. The discrete-continual design model for structures with constant physical and geometrical parameters in one direction is offered on the basis of so-called discrete-continual finite elements. Element coordinate system and approximation of nodal unknowns are under consideration. Special generalized block-structured stiffness matrix of discrete-continual finite element are assembled. Resultant discrete-continual operational formulation is given. Effective computing algorithms for eigenvalues and eigenvectors are presented as well. All methods and algorithms considered in the distinctive paper have been realized in software engineering.

Key words: of discrete-continual finite element method, boundary problem, eigenvalue problem, three-dimensional elastic theory

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья продолжает серию работ, посвященных использованию дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций [4-5]. В данном случае изложение ведется для трехмерной теории упругости [6].

1. КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

1.1. Некоторые предварительные обозначения и некоторые определяющие соотношения. Введем следующую систему обозначений: Ω – область, описываемая рассматриваемой конструкцией (см., например, рис. 1.1); $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω; $\bar{x} = [\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \,]^T$ – вектор координат точки; $\bar{u} = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,]^T$ – вектор составляющих перемещений; $\bar{n} = [\, n_1 \;\; n_2 \;\; n_3 \,]^T$ – вектор составляющих нормали к поверхности; $\bar{F} = [\, F_1 \;\; F_2 \;\; F_3 \,]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области; $\bar{f} = [\, f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \,]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области.
Компоненты тензора напряжений ε_{ij} определяются формулами:

$$\varepsilon_{ii} = \partial_i u_i; \quad \varepsilon_{ij} = 0.5 \cdot (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i = 1,2,3; \;\; j = 1,2,3, \;\; i \neq j. \qquad (1.1)$$

Формулы для компонент тензора напряжений σ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}, \;\; i = 1,2,3; \;\; j = 1,2,3, \qquad (1.2)$$

где

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \qquad (1.3)$$

λ и μ – соответствующие коэффициенты Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера.

1.2. Континуальная операторная постановка задачи с выделением основного направления. Пусть физико-геометрические характеристики конструкции по переменной x_3 (основное направление) постоянны. Тогда, в соответствии с [1-3] единое уравнение операторной постановки задачи определения собственных значений и собственных функций имеет вид:

$$-\mathcal{L}_{vv}\partial_3^2\bar{u} + \widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\partial_3\bar{u} + \mathcal{L}_{uu}\bar{u} = s\,\bar{u}, \qquad (1.3)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{uv} = \mathcal{L}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}^*; \quad \mathcal{L}_{uv}^* = -\mathcal{L}_{uv}; \qquad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \end{bmatrix}; \qquad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^*\bar{\lambda} \\ 0 & 0 & \partial_2^*\bar{\lambda} \\ \partial_1^*\bar{\mu} & \partial_2^*\bar{\mu} & 0 \end{bmatrix}; \qquad (1.6)$$

$$\mathcal{L}_{uu} = \sum_{j=1}^{2} \partial_j^*\bar{\mu}\partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\mu}\partial_1 & \partial_2^*\bar{\mu}\partial_1 & 0 \\ \partial_1^*\bar{\mu}\partial_2 & \partial_2^*\bar{\mu}\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\lambda}\partial_1 & \partial_1^*\bar{\lambda}\partial_2 & 0 \\ \partial_2^*\bar{\lambda}\partial_1 & \partial_2^*\bar{\lambda}\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (1.7)$$

$$\bar{\lambda} = \theta\lambda; \quad \bar{\mu} = \theta\mu; \qquad (1.8)$$

$$\partial_i^* = -\partial_i, \quad i = 1,2,3; \qquad (1.9)$$

$$\theta = \theta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin \Omega; \end{cases} \qquad (1.10)$$

$$\delta_\Gamma = \frac{\partial\theta}{\partial n}; \qquad (1.11)$$

$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$ – характеристическая функция области Ω; $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ – дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$; $\bar{u} = \bar{u}(x_1, x_2, x_3)$ – искомая собственная вектор-функция; s – искомое собственное значение.
Вводя обозначение

$$\bar{v} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,]^T = [\, \partial_3 u_1 \;\; \partial_3 u_2 \;\; \partial_3 u_3 \,]^T = \partial_3\bar{u} = \bar{u}', \qquad (1.12)$$

переписываем (1.3) в виде

$$-\mathcal{L}_{vv}\bar{v}' + \widetilde{\mathcal{L}}_{uv}\bar{v} + \mathcal{L}_{uu}\bar{u} = s\,\bar{u}, \qquad (1.13)$$

где

$$\bar{v}' = \partial_3\bar{v}. \qquad (1.14)$$

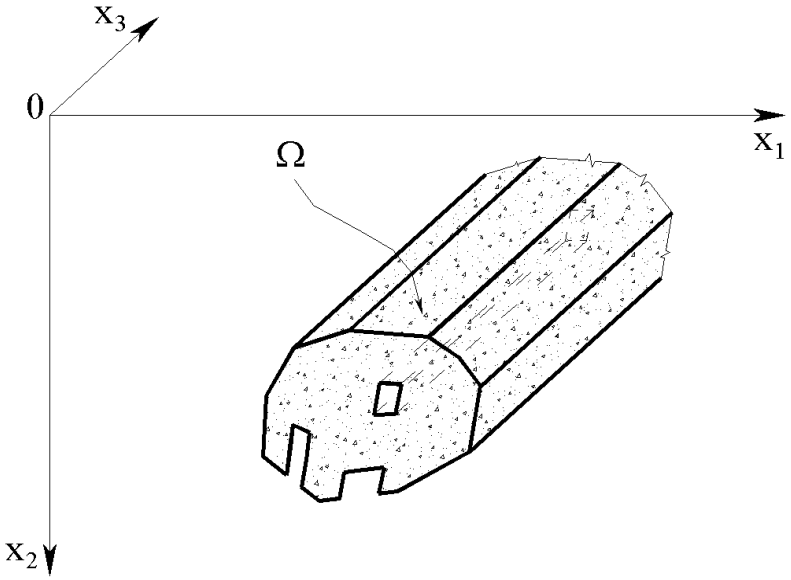


Рис. 1.1. Пример рассматриваемой трехмерной конструкции.

Объединяя (1.12) и (1.13), получим (ниже E – тождественный оператор):

$$\begin{cases} \overline{u}' = \overline{v} \\ -\mathscr{L}_{vv}\overline{v}' + \widetilde{\mathscr{L}}_{uv}\overline{v} + \mathscr{L}_{uu}\overline{u} = s\,\overline{u} \end{cases} \qquad (1.15)$$

или

$$\begin{cases} \overline{u}' = \overline{v} \\ \overline{v}' = \mathscr{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathscr{L}}_{uv}\overline{v} + \mathscr{L}_{vv}^{-1}(\mathscr{L}_{uu} - s\,E)\overline{u}, \end{cases} \qquad (1.16)$$

Система (1.16) в матричном виде представима следующим образом:

$$\overline{U}' = \widetilde{\mathscr{L}}_s\overline{U}\,, \qquad (1.17)$$

где $$\widetilde{\mathscr{L}}_s = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathscr{L}_{vv}^{-1}(\mathscr{L}_{uu} - s\,E) & \mathscr{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathscr{L}}_{uv} \end{bmatrix}; \qquad (1.18)$$

$$\overline{U} = \overline{U}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \overline{u}(x_1, x_2, x_3) \\ \overline{v}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}; \qquad (1.19)$$

$$\overline{U}' = \partial_3\overline{U}\,; \qquad (1.20)$$

Рассмотрим, например, двухточечную краевую задачу. Пусть граничные условия задаются в сечениях $x_2 = 0$ и $x_2 = l$, где l – длина конструкции. В случае простых закреплений по осям x_1 и x_2 (равенства нулю соответствующих компонентов перемещений) граничные условия представимы в виде

$$B_0\overline{U}(x_1,0) + B_l\overline{U}(x_1,l) = 0\,, \qquad (1.21)$$

где B_0 и B_l – матрицы граничных условий, в данном случае

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.22)$$

Итак, задача формируется следующим образом: определить такую отличную от тождественного нуля вектор-функцию $\overline{U}(x_1, x_2, x_3)$ и такое значение s, при котором справедливы уравнение (1.17) и граничные условия (1.21).

1.3. Учет упругоподатливых опор (основание типа Винклера по двум направлениям). При решении практических задач нередко имеют место случаи, когда на области Ω, ее границе $\Gamma = \partial\Omega$ или их частях заданы упругоподатливые опоры, непрерывные по основному направлению.

Вектор $\overline{R}$ реактивных усилий, возникающих в опоре, имеет вид:

$$\overline{R} = [\, R_1 \quad R_2 \quad R_3 \,]^T = C\,\overline{u}\,, \qquad (1.23)$$

где

$$C = diag\{c_1, c_2, c_3\}\,; \qquad (1.24)$$

$$\overline{u} = [\, u_1 \quad u_2 \quad u_3 \,]^T; \qquad (1.25)$$

C – матрица упругих характеристик опоры; $\overline{u}$ – вектор перемещений опоры; c_i – коэффициент отпора опоры по направлению оси Ox_i.

Наличие упругоподатливых опор вносит корректировку в операторную постановку задачи: оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_s$ в (1.17) определяется следующей формулой:

$$\widetilde{\mathscr{L}}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathscr{L}_{vv}^{-1}(\mathscr{L}_{uu} + C - s\,E) & \mathscr{L}_{vv}^{-1}\widetilde{\mathscr{L}}_{uv} \end{bmatrix}. \qquad (1.26)$$

2. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель конструкции. Дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ). Для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи исходная область Ω окаймляется расширенной ω. Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: в поперечном направлении конструкции (вдоль осей Ox_1 и Ox_2) производится сеточная аппроксимация, а в продольном (основном) (вдоль оси Ox_3) – решается континуальная задача (рис. 2.1).

Область ω разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) ω_i (рис. 2.2).

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N_1}\bigcup_{j=1}^{N_2} \omega_{ij}\,; \qquad (2.1)$$

$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3):\ (x_1, x_2) \in S_\omega;\ \ x_3 \in [0, l]\}, \qquad (2.2)$$

$$\omega_{ij} = \{(x_1, x_2, x_3):\ (x_1, x_2) \in S_\omega^{ij};\ \ x_3 \in [\,0,\ l\,]\}; \qquad (2.3)$$

S_ω, S_ω^{ij} – области, описанные соответственно сеткой и *ij*-м ДККЭ в поперечном направлении конструкции; l – длина последней в продольном (основном) направлении; N_1, N_2 – принятое количество узлов по направлению осей Ox_1 и Ox_2; $(x_1^{ij}, x_2^{ij}, x_3)$, h_1^{ij}, h_2^{ij}, $i = 1,...,N_1$; $j = 1,...,N_2$ – соответственно координаты узлов и шаги сетки; $N = N_1 \cdot N_2$;

$$x_1^{i+1\,j} = x_1^{ij} + h_1^{ij},\ \ x_2^{i+1\,j} = x_2^{ij},\quad i = 1,...,N_1 - 1;\ \ j = 1,...,N_2 - 1; \qquad (2.4)$$

$$x_1^{ij+1} = x_1^{ij},\ \ x_2^{ij+1} = x_2^{ij} + h_2^{ij},\quad i = 1,...,N_1 - 1;\ \ j = 1,...,N_2 - 1; \qquad (2.5)$$

$$h_1^{ij} = \begin{cases} x_1^{i+1\,j} - x_1^{ij},\ i < N_1 \\ 0,\ i = N_1 \end{cases},\ \ j = 1,...,N_2; \qquad (2.6)$$

$$h_2^{ij} = \begin{cases} x_2^{ij+1} - x_2^{ij},\ j < N_2 \\ 0,\ j = N_2 \end{cases},\ \ i = 1,...,N_1. \qquad (2.7)$$

Определяем характеристическую функцию элемента и сеточные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_{ij} \bigcap \Omega \\ 0, & x \notin \omega_{ij} \bigcap \Omega; \end{cases} \qquad (2.8)$$

$$\overline{\lambda}_{ij} = \theta_{ij}\lambda; \quad \overline{\mu}_{ij} = \theta_{ij}\mu\,. \qquad (2.9)$$

Рассмотрим какой-либо произвольный *ij*-й элемент модели (рис. 2.2). Переходим из исходной системы координат в элементные (рис. 2.3): $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (i, t_1, t_2, x_3)$. Введем в произвольном поперечном сечении данного элемента локальную систему координат Ot_1 и Ot_2 (рис. 2.3), при этом $t_1 \in [0,1]$; $t_2 \in [0,1]$. Внутри каждого ДККЭ произведем локальную перенумерацию узлов, в частности, для *ij*-го элемента: $i, j \Rightarrow 1,1$; $i+1, j \Rightarrow 2,1$; $i, j+1 \Rightarrow 1,2$; $i+1, j+1 \Rightarrow 2,2$. Заметим, что далее запятая в обозначении номера узла сетки будет опускаться, например 1 1 вместо 1,1.

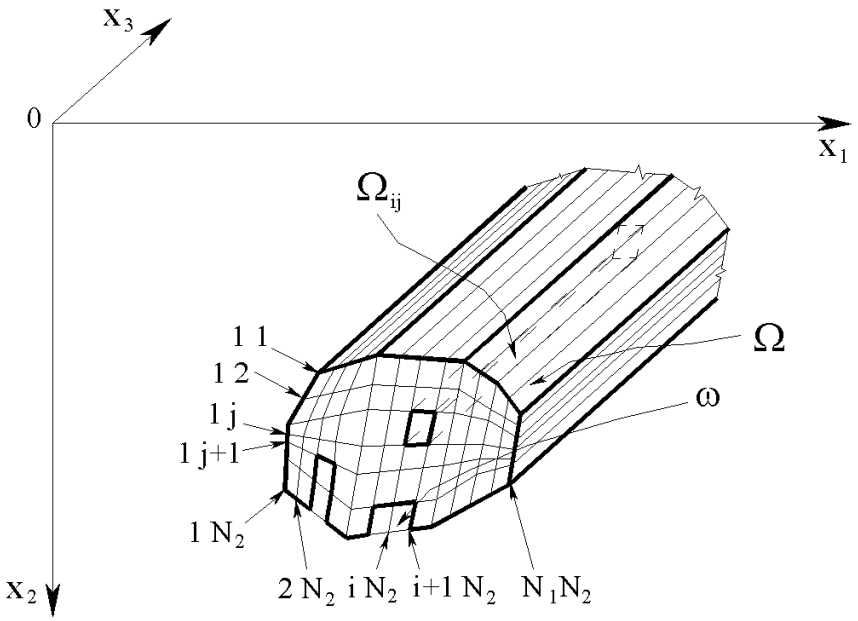


Рис. 2.1. Схема дискретизации конструкции.

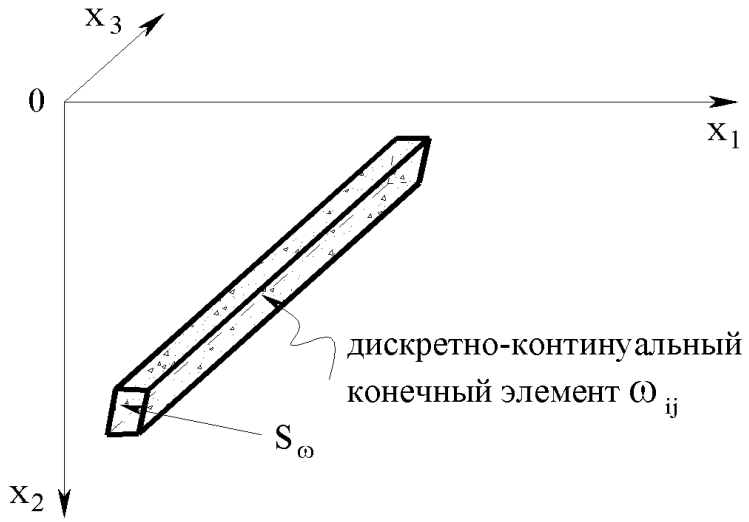


Рис. 2.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

Для заданного поперечного сечения конструкции векторы координат произвольной точки ДККЭ в элементной и исходной системах имеют вид:

$$\bar{t} = [\, t_1 \quad t_2 \,]^T; \qquad \bar{x} = [\, x_1 \quad x_2 \,]^T. \qquad (2.10)$$

Формула преобразования координат записывается следующим образом:

$$\bar{x} = \bar{x}_n^{11} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (2.11)$$

где $\Delta_1 \bar{x} = \bar{x}_n^{21} - \bar{x}_n^{11}$; $\Delta_2 \bar{x} = \bar{x}_n^{12} - \bar{x}_n^{11}$;

$$\Delta_{12} \bar{x} = \bar{x}_n^{22} - \bar{x}_n^{21} - \Delta_2 \bar{x}. \quad (2.12)$$

Здесь $\bar{x}_n^{ij}$, $\bar{t}_n^{pq}$ – векторы координат узла элемента в исходной и элементной системах координат соответственно, $i = 1, 2, ..., N_1$; $j = 1, 2, ..., N_2$; $p = 1, 2$; $q = 1, 2$.

В результате замены переменных, вычисление производных по переменным x_1 и x_2 производится согласно формулам дифференцирования сложной функции

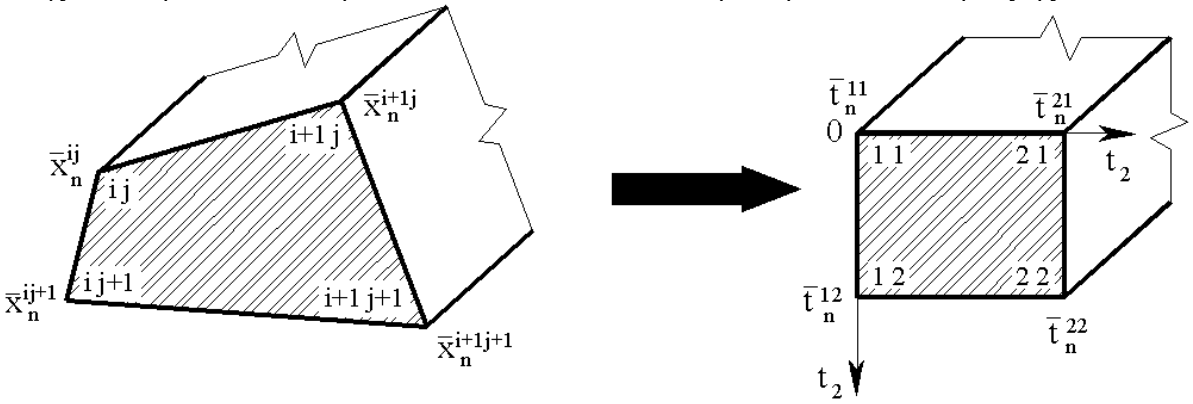


Рис. 2.3. Переход к локальной системе координат на ДККЭ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2. \qquad (2.13)$$

Величины $\partial t_k / \partial x_s$ из (2.13) образуют якобиан системы. Матрица Якоби:

$$\frac{D\bar{x}}{D\bar{t}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial t_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial t_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial t_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial t_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \alpha, \qquad (2.14)$$

где

$$\alpha_{ks} = \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \qquad (2.15)$$

а формула дифференцирования функции φ по переменным x_1, x_2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \alpha_{ks}, \quad s = 1, 2. \qquad (2.16)$$

Элементы матрицы функционального определителя $\beta = D\bar{x} / D\bar{t}$ находятся как

$$\beta_{ks} = \frac{\partial x_k}{\partial t_s} = \Delta_s x_k^{ij} + t_{3-s} \Delta_{12} x_k^{ij}, \qquad (2.17)$$
$$k = 1, 2; \quad s = 1, 2.$$

Матрицы функциональных определителей $D\bar{x} / D\bar{t}$ и $D\bar{t} / D\bar{x}$ связаны формулой

$$\frac{D(\bar{t})}{D(\bar{x})} = \left[\frac{D(\bar{x})}{D(\bar{t})} \right]^{-1} \quad \text{или} \quad \alpha = \beta^{-1}, \qquad (2.18)$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{bmatrix}, \qquad (2.19)$$

где

$$J = \det[\beta] = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}. \qquad (2.20)$$

2.2. Аппроксимация неизвестных функций. В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений u_1, u_2, u_3 и их производные v_1, v_2, v_3 по переменной x_3, т.е. для pq-го узлах это $u_1^{pq}, u_2^{pq}, u_3^{pq}$, $v_1^{pq}, v_2^{pq}, v_3^{pq}$, и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{pq} = \bar{U}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{pq} \\ \bar{v}_n^{pq} \end{bmatrix}, \qquad (2.21)$$

где $\bar{u}_n^{pq} = \bar{u}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{pq} \\ u_2^{pq} \\ u_3^{pq} \end{bmatrix}$; $\bar{v}_n^{pq} = \bar{v}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{pq} \\ v_2^{pq} \\ v_3^{pq} \end{bmatrix}$, (2.22)

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\bar{U}^{ij} = \bar{U}^{ij}(x_3) = [\,(\bar{U}_n^{11})^T \quad (\bar{U}_n^{21})^T \quad (\bar{U}_n^{12})^T \quad (\bar{U}_n^{22})^T\,]^T. \qquad (2.23)$$

В простейшем случае поля $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ по сечению ДККЭ аппроксимируются полиномами первого порядка, зависящими от двух аргументов (билинейная аппроксимация):

$$\overline{u} = \overline{u}_n^{11} + t_1\Delta_1\overline{u} + t_2\Delta_2\overline{u} + t_1t_2\Delta_{12}\overline{u}\,; \quad (2.24)$$

$$\overline{v} = \overline{v}_n^{11} + t_1\Delta_1\overline{v} + t_2\Delta_2\overline{v} + t_1t_2\Delta_{12}\overline{v}\,, \quad (2.25)$$

где

$$\Delta_1\overline{u} = \overline{u}_n^{21} - \overline{u}_n^{11}; \quad \Delta_2\overline{u} = \overline{u}_n^{12} - \overline{u}_n^{11};$$
$$\Delta_{12}\overline{u} = \overline{u}_n^{22} - \overline{u}_n^{21} - \Delta_2\overline{u}\,; \quad (2.26)$$
$$\Delta_1\overline{v} = \overline{v}_n^{21} - \overline{v}_n^{11}; \quad \Delta_2\overline{v} = \overline{v}_n^{12} - \overline{v}_n^{11};$$
$$\Delta_{12}\overline{v} = \overline{v}_n^{22} - \overline{v}_n^{21} - \Delta_2\overline{v}\,. \quad (2.27)$$

Соответствующие выражения для деформаций и напряжений определяются на основе формул (1.1), (1.2) и соотношений (2.24)-(2.27).

2.3. Построение матриц жесткости ДККЭ. Формирование матрицы жесткости ДККЭ K^{ij}, имеющей 24-й порядок, производится методом базисных вариаций по следующей формуле:

$$(K^{ij})_{st} = \widetilde{\Phi}_{ij}(\overline{e}_s + \overline{e}_t) - \widetilde{\Phi}_{ij}(\overline{e}_s) - \widetilde{\Phi}_{ij}(\overline{e}_t) + \widetilde{\Phi}_{ij}(\overline{e}_0),$$
$$s = 1,2,...,24;\ t = 1,2,...,24, \quad (2.28)$$

где $\widetilde{\Phi}(\overline{u})$ – квадратичная часть функционала энергии на элементе,

$$\widetilde{\Phi}(\overline{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dx\,, \quad (2.29)$$

то есть

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(\overline{U}^{ij}) = 0.5\cdot(K^{ij}\overline{U}^{ij}, \overline{U}^{ij})\,; \quad (2.30)$$

где $\overline{e}_j, \overline{e}_0$ – 24-х мерные векторы, элементы которых определяются по формуле

$$(e_j)_k = \delta_{j,k};\ \ (e_0)_k = 0,\ \ k = 1,2,...,24\,. \quad (2.31)$$

Структура матрицы жесткости K^{ij} ДККЭ следующая:

$$K^{ij} = \begin{bmatrix}
K_{uu}^{11} & K_{uv}^{11} & K_{uu}^{12} & K_{uv}^{12} & K_{uu}^{13} & K_{uv}^{13} & K_{uu}^{14} & K_{uv}^{14} \\
K_{vu}^{11} & K_{vv}^{11} & K_{vu}^{12} & K_{vv}^{12} & K_{vu}^{13} & K_{vv}^{13} & K_{vu}^{14} & K_{vv}^{14} \\
K_{uu}^{21} & K_{uv}^{21} & K_{uu}^{22} & K_{uv}^{22} & K_{uu}^{23} & K_{uv}^{23} & K_{uu}^{24} & K_{uv}^{24} \\
K_{vu}^{21} & K_{vv}^{21} & K_{vu}^{22} & K_{vv}^{22} & K_{vu}^{23} & K_{vv}^{23} & K_{vu}^{24} & K_{vv}^{24} \\
K_{uu}^{31} & K_{uv}^{31} & K_{uu}^{32} & K_{uv}^{32} & K_{uu}^{33} & K_{uv}^{33} & K_{uu}^{34} & K_{uv}^{34} \\
K_{vu}^{31} & K_{vv}^{31} & K_{vu}^{32} & K_{vv}^{32} & K_{vu}^{33} & K_{vv}^{33} & K_{vu}^{34} & K_{vv}^{34} \\
K_{uu}^{41} & K_{uv}^{41} & K_{uu}^{42} & K_{uv}^{42} & K_{uu}^{43} & K_{uv}^{43} & K_{uu}^{44} & K_{uv}^{44} \\
K_{vu}^{41} & K_{vv}^{41} & K_{vu}^{42} & K_{vv}^{42} & K_{vu}^{43} & K_{vv}^{43} & K_{vu}^{44} & K_{vv}^{44}
\end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Здесь $K_{uu}^{lm}, K_{uv}^{lm}, K_{vu}^{lm}, K_{vv}^{lm},\ \ l,m = 1,2,3,4$ – матрицы 3-го порядка.

На основании матрицы жесткости ДККЭ (2.32) формируются дополнительные поэлементные матрицы $K_{uu}^{ij}, K_{uv}^{ij}, K_{vu}^{ij}$ и K_{vv}^{ij} 12-го порядка:

$$K_{uu}^{ij} = \begin{bmatrix}
K_{uu}^{11} & K_{uu}^{12} & K_{uu}^{13} & K_{uu}^{14} \\
K_{uu}^{21} & K_{uu}^{22} & K_{uu}^{23} & K_{uu}^{24} \\
K_{uu}^{31} & K_{uu}^{32} & K_{uu}^{33} & K_{uu}^{34} \\
K_{uu}^{41} & K_{uu}^{42} & K_{uu}^{43} & K_{uu}^{44}
\end{bmatrix}; \quad (2.33)$$

$$K_{uv}^{ij} = \begin{bmatrix}
K_{uv}^{11} & K_{uv}^{12} & K_{uv}^{13} & K_{uv}^{14} \\
K_{uv}^{21} & K_{uv}^{22} & K_{uv}^{23} & K_{uv}^{24} \\
K_{uv}^{31} & K_{uv}^{32} & K_{uv}^{33} & K_{uv}^{34} \\
K_{uv}^{41} & K_{uv}^{42} & K_{uv}^{43} & K_{uv}^{44}
\end{bmatrix}; \quad (2.34)$$

$$K_{vu}^{ij} = \begin{bmatrix}
K_{vu}^{11} & K_{vu}^{12} & K_{vu}^{13} & K_{vu}^{14} \\
K_{vu}^{21} & K_{vu}^{22} & K_{vu}^{23} & K_{vu}^{24} \\
K_{vu}^{31} & K_{vu}^{32} & K_{vu}^{33} & K_{vu}^{34} \\
K_{vu}^{41} & K_{vu}^{42} & K_{vu}^{43} & K_{vu}^{44}
\end{bmatrix}; \quad (2.35)$$

$$K_{vv}^{ij} = \begin{bmatrix}
K_{vv}^{11} & K_{vv}^{12} & K_{vv}^{13} & K_{vv}^{14} \\
K_{vv}^{21} & K_{vv}^{22} & K_{vv}^{23} & K_{vv}^{24} \\
K_{vv}^{31} & K_{vv}^{32} & K_{vv}^{33} & K_{vv}^{34} \\
K_{vv}^{41} & K_{vv}^{42} & K_{vv}^{43} & K_{vv}^{44}
\end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

2.4. Формирование глобальных матриц и их соответствие континуальным операторам. Составление соответствующих глобальных матриц K_{uu}, K_{uv}, K_{vu} и K_{vv} $3N$-мерного порядка системы ДККЭ для всей

конструкции осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости (метод «конечных вкладов» – суммирование с накоплением [7-8]).

Имеется сопоставление операторов (1.4)-(1.7) и матриц:

$$\mathscr{L}_{uu} \Rightarrow K_{uu};\ \ \mathscr{L}_{uv} \Rightarrow K_{uv};\ \ \mathscr{L}_{vu} \Rightarrow K_{vu};\ \ \mathscr{L}_{vv} \Rightarrow K_{vv}. \quad (2.37)$$

2.5. Задание граничных условий. Граничные условия (1.21) на дискретно-континуальном уровне переходят в следующие:

$$B_{0,n}\overline{U}_n(0) + B_{l,n}\overline{U}_n(l) = 0, \quad (2.38)$$

где $B_{0,n}$ и $B_{l,n}$ – матрицы граничных условий, в данном случае

$$B_{0,n} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B_{l,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

E – единичная матрица N-го порядка;

$$\overline{U}_n = \overline{U}_n(x_3) = [\,(\overline{u}_n)^T \ \ (\overline{v}_n)^T\,]^T; \quad (2.40)$$

$$\overline{u}_n = \overline{u}_n(x_3) = [\,(\overline{u}_n^{11})^T \ \ (\overline{u}_n^{12})^T \ \ \ldots \ \ (\overline{u}_n^{N_1N_2})^T\,]^T; \quad (2.41)$$

$$\overline{v}_n = \overline{v}_n(x_3) = [\,(\overline{v}_n^{11})^T \ \ (\overline{v}_n^{12})^T \ \ \ldots \ \ (\overline{v}_n^{N_1N_2})^T\,]^T. \quad (2.42)$$

2.6. Дискретно-континуальная постановка задачи. Согласно приведенным ранее формулам можем переписать постановку (1.17)-(1.20) следующим образом:

$$\overline{U}_n' = \widetilde{K}_s\overline{U}_n, \quad (2.43)$$

где $$\widetilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{vv}^{-1}(K_{uu} - s\,K_E) & K_{vv}^{-1}\widetilde{K}_{uv} \end{bmatrix}; \quad (2.44)$$

$$\overline{U}_n' = \partial_2\overline{U}_n; \quad (2.45)$$

K_E – матрица K_{vv}, построенная при условии, что всюду $\overline{\lambda}_{ij} = 1;\ \ \overline{\mu}_{ij} = 1$;

$$\widetilde{K}_{uv} = K_{uv} - K_{vu}. \quad (2.46)$$

При наличии упругоподатливых опор матрица (2.44) принимает вид:

$$\widetilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{vv}^{-1}(K_{uu} + C_G - s\,K_E) & K_{vv}^{-1}\widetilde{K}_{uv} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

где $$C_G = \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ & C_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{N_1N_2} \end{bmatrix}; \quad (2.48)$$

$$C_{ij} = diag\{c_{1,ij}, c_{2,ij}, c_{3,ij}\}; \quad (2.49)$$

C_{ij} – матрица характеристик упругоподатливых опор; заметим, что если в ij-м узле упругоподатливая опора отсутствует, то $c_{1,ij} = c_{2,ij} = c_{3,ij} = 0$.

Граничные условия (1.21) переходят в (2.38). Краевая задача (2.43), (2.38) (с параметром s) решается по разработанной методике, которая подробно описана в [4].

Замечание. Исследования проводились в рамках НИР «Построение и анализ корректных аналитических методов и алгоритмов расчета конструкций регулярной структуры», выполняемой по Плану НИР Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) на 2007-2009 гг. и в рамках НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» /проект 6414/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Об одном дискретно-континуальном подходе к определению собственных значений и собственных функций краевых задач расчета элементов конструкций. Том 1. // Вестник отделения архитектуры и строительных наук. – Москва-Орел: РААСН, АСИ ОрелГТУ, 2009, с. 126-136.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Дискретно-континуальные подходы для определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 4, Issue 2, 2008.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. –511 с.
7. **Секулович М.** Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
8. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
10. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
11. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
12. **Трушин С.И.** Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 256 с.
13. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
14. **Сидоров В.Н.** Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Редакционно-издательский центр Генерального штаба Вооруженных Сил Российской Федерации, 2002. – 352 с.

Золотов Александр Борисович, Почетный член РААСН, Почетный профессор МГСУ, профессор, доктор технических наук.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Козырев Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: o.kozirev@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М.Л. Мозгалева, А.Б. Золотов
Московский государственный строительный университет, Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию разработанного алгоритма прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования по базису Хаара. В первой и во второй частях статьи приводятся алгоритмы одномерного и двумерного преобразования, соответственно. В третьей части представлен пример подхода к получению локального решения краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара.

Ключевые слова: дискретный базис Хаара, алгоритм прямого и обратного преобразования Хаара, локальное решение краевой задачи.

APPLICATION OF DISCERE HAAR BASIS FOR LOCAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS

Marina L. Mozgaleva, Alexander B. Zolotov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to application of discrete Haar basis for local solution of boundary problems. Discrete Haar transformations are one of the most effective numerical methods of the wavelet-analysis. Corresponding algorithms are simple and economic. Besides, there is a possibility of the separate solving of local and global problems.

Key words: wavelet analysis, Haar basis, boundary problems, structural mechanics

ВВЕДЕНИЕ

Дискретные преобразования Хаара являются одним из наиболее эффективных численных методов вейвлет-анализа. Связанные с базисом Хаара вычисления, необходимые для решения различных задач, в частности краевых задач математической физики и строительной механики, обладают простыми и экономичными алгоритмами. При этом появляется возможность раздельного решения локальных и глобальных задач.

1. ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Принятые обозначения

ϕ_j^p - j-ая функция Хаара на p-ом уровне,

$$1 \le j \le N_p; \quad 0 \le p \le M_p,$$

где M_p - количество уровней: $n = 2^{M_p}$ - размерность дискретного пространства

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M_p-(p+1)} , & 0 \le p < M_p \\ 1 , & p = M_p \end{cases}$$

- количество функций Хаара на p-м уровне. В дальнейшем будем обозначать $hp = 2^{p+1}$ - количество ненулевых значений функции Хаара на p-м уровне (шаг ϕ_j^p).

$$norma_p = \begin{cases} (\sqrt{2})^{p+1} , & 0 \le p < M_p \\ \sqrt{2^{M_p}} = \sqrt{n} , & p = M_p \end{cases}$$

- норма функция Хаара на р-м уровне.

Значения функции Хаара в i-ой точке дискретного пространства

$\underline{0 \le p < M_p}$

$$\phi_j^p(i) = \frac{1}{norma_p}\begin{cases} 1\ ,\ hp\cdot(j-1) \le i < hp\cdot(j-\frac{1}{2}) \\ -1\ ,\ hp\cdot(j-\frac{1}{2}) \le i < hp\cdot j \\ 0,\ j < hp\cdot(j-1) \vee j \ge hp\cdot j \end{cases},$$

$\underline{p = M_p}$

$$\phi_1^{M_p}(i) = \frac{1}{norma_{M_p}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$1 \le i \le n$

v_j^p - коэффициенты разложения дискретной функции f(i)по функциям Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^{M_p}\sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \cdot \phi_j^p$$

Алгоритм вычисления коэффициентов разложения v_j^p (прямой оператор - анализ)

Введем вспомогательные величины u_j^p

$$\left.\begin{array}{l} u_j^o = f(j)\ ,\ \ j = 1\ ,\ \ldots\ ,n \\ norma_0 = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$ - нулевой шаг

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v_j^p = \dfrac{u_{2j-1}^p - u_{2j}^p}{norma_p} \\ u_j^{p+1} = u_{2j-1}^p + u_{2j}^p \end{array}\right\},\ j = 1,\ldots,N_p \\ norma_{p+1} = norma_p \cdot \sqrt{2} \end{array}\right\},$$

$p = 0,\ldots,\ M_p - 1$

$$\left.\begin{array}{l} norma_{M_p} = \sqrt{n} \\ v_1^{M_p} = \dfrac{u_1^{M_p}}{norma_{M_p}} \end{array}\right\},\quad p = M_p$$

Алгоритм вычисления значений дискретной функции, имеющей разложение по функциям Хаара (обратный оператор - синтез)

Введем вспомогательные величины u_j^p

нулевой шаг

$$\left.\begin{array}{l} norma_{M_p} = \sqrt{n} \\ norma_{M_p-1} = \sqrt{n} \\ u_1^{M_p} = \dfrac{v_1^{M_p}}{norma_{M_p}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{p = M_p - 1,\ldots,0} \\ \underline{i = 1,\ldots,N_p} \\ \left.\begin{array}{l} j = \left[\dfrac{i+1}{2}\right] - \text{целая часть} \\ z = (-1)^{i+1} \\ u_i^p = z\cdot\dfrac{v_j^p}{norma_p} + u_j^{p+1} \end{array}\right\} \\ norma_{p-1} = norma_p / \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$f(i) = u_i^o\ ,\ \ 1 \le i \le n$

2. ДВУМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Принятые обозначения

$\psi^p_{s_1 s_2 j1, j2}$ - функция Хаара на р-ом уровне:

$$1 \le j_k \le N_p,\ k = 1,2;\ 0 \le p \le M_p$$

где M_p – количество уровней; $n = 2^{M_p}$ – размерность дискретного пространства

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M_p-(p+1)}, & 0 \le p < M_p, \\ 1, & p = M_p \end{cases}$$

$N_p \times N_p$ - количество функций Хаара на р-ом уровне.

В дальнейшем будем обозначать $hp = 2^{p+1}$, $hp \times hp$ - количество ненулевых значений функции Хаара на р-м уровне (hp - шаг по каждому направлению функции Хаара).

Значения индексов s_1, s_2 определяют три базовые функции:

$\psi^{p}_{1,0,j_1,j_2}$

1	-1
1	-1

$s_1 = 1 \quad s_2 = 0$

$\psi^{p}_{0,1,j_1,j_2}$

1	1
-1	-1

$s_1 = 0 \quad s_2 = 1$

$\psi^{p}_{1,1,j_1,j_2}$

1	-1
-1	1

$s_1 = 1 \quad s_2 = 1$

$$\left\|\psi^{p}_{sj}\right\| = \begin{cases} hp = 2^{p+1}, & 0 \le p < M_p \\ n = 2^{M_p}, & p = M_p \end{cases} \text{—норма}$$

функции Хаара на р-м уровне.

<u>Значения функции Хаара в точке i=(i1,i2) дискретного пространства:</u> iq=1, …,n , q=1,2

$\underline{0 \le p < M_p}$

$$\psi^{p}_{s_1 s_2 j_1 j_2}(i_1,i_2) =$$

$$= \frac{1}{\left\|\psi^{p}_{sj}\right\|} \begin{cases} (-1)^{k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2}, \text{ если} \\ \bigcap_{q=1}^{2} \begin{pmatrix} hp \cdot (j_q - 1 + \frac{k_q}{2}) < i_q \wedge \\ \wedge\, i_q < hp \cdot (j_q - \frac{1}{2} + \frac{k_q}{2}) \end{pmatrix} \\ 0, \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$\underline{p = M_p}$

$$\psi^{M_p}_{0,0,1,1}(i_1,i_2) = \frac{1}{\left\|\psi^{M_p}_{01}\right\|} = \frac{1}{n}$$

$v^{p}_{s_1 s_2 j_1 j_2}$ <u>- коэффициенты разложения дискретной функции f(i)по функциям Хаара:</u>

$$f(i) =$$

$$= \sum_{p=0}^{M_p} \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v^{p}_{1,0,j_1,j_2} \psi^{p}_{1,0,j_1,j_2} + v^{p}_{0,1,j_1,j_2} \psi^{p}_{0,1,j_1,j_2} + v^{p}_{1,1,j_1,j_2} \psi^{p}_{1,1,j_1,j_2})$$

Алгоритм вычисления коэффициентов разложения $v^{p}_{s_1 s_2 j_1,j_2}$

(прямой оператор - анализ)

Введем вспомогательные величины $u^{p}_{j_1,j_2}$

$u^{o}_{j_1,j_2} = f(j_1,j_2)$, $j_q = 1,\ldots,n$, $q = 1,2$ - нулевой шаг

$$z1 = (-1)^{s_1}, \quad z2 = (-1)^{s_2};$$

$$v^{p}_{s_1,s_2,j_1,j_2} =$$

$$= \frac{1}{\left\|\psi^{p}_{sj}\right\|} (u^{p}_{2j_1-1,\,2j_2-1} + z1 \cdot u^{p}_{2j_1,\,2j_2-1} + z2 \cdot u^{p}_{2j_1-1,\,2j_2} + z1 \cdot z2 \cdot u^{p}_{2j_1,\,2j_2})$$

$$u^{p+1}_{j_1,j_2} = (u^{p}_{2j_1-1,\,2j_2-1} + u^{p}_{2j_1,\,2j_2-1} + u^{p}_{2j_1-1,\,2j_2} + u^{p}_{2j_1,\,2j_2})$$

$$1 \le j_q \le N_p,\ q=1,2; \quad 0 \le p < M_p$$

$$v^{M_p}_{0,0,1,1} = \frac{u^{M_p}_{1,1}}{\left\|\psi^{M_p}_{01}\right\|}, \qquad p = M_p$$

Алгоритм вычисления значений дискретной функции, имеющей разложение по функциям Хаара (обратный оператор - синтез)

Введем вспомогательные величины $u^{p}_{j_1,j_2}$

$$u^{M_p}_{1,1} = \frac{v^{M_p}_{0,0,1,1}}{\left\|\psi^{M_p}_{01}\right\|} \text{ - нулевой шаг}$$

$$p = M_p - 1, \ldots, 0; \quad q = 1, 2$$

$$1 \le i_q \le N_p$$

$$j_q = \left[\frac{i_q + 1}{2}\right] - \text{целая часть}$$

$$z_q = (-1)^{i_q+1}$$

$$u^{p}_{i_1,i_2} = \frac{1}{\left\|\psi^{p}_{sj}\right\|}(z_1 \cdot v^{p}_{1,0,j_1,j_2} + z_2 \cdot v^{p}_{0,1,j_1,j_2} + z_1 \cdot z_2 \cdot v^{p}_{1,1,j_1,j_2}) + u^{p+1}_{j_1,j_2}$$

$$f(i_1,i_2) = u^{o}_{i_1,i_2}, \quad 1 \le i_q \le n, \quad q = 1, 2$$

3. ПРИМЕР ПОДХОДА К ПОЛУЧЕНИЮ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Дискретная краевая задача в единичном базисе

Вариационная постановка. Определить стационарную точку функционала энергии

$$\Phi_u(\bar{u}) = \frac{1}{2}(L_u\bar{u},u) - (\bar{f}_u,\bar{u}) \qquad (3.1)$$

Операторная постановка. Стационарная точка соответствует решению операторного уравнения

$$L_u\bar{u} = \bar{f}_u \qquad (3.2)$$

Краевая задача в дискретном базисе Хаара

Обозначим Q – матрица базисных векторов Хаара, расположенных по строкам: $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1,N}$; $\bar{q}^i = [q_{i1},\ q_{i2},\ \ldots,\ q_{iN}]^T$ - i-й вектор базиса. Тогда вектор $\bar{u} = [u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N]^T$ из единичного базиса в базисе Хаара может иметь следующее представление

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{N}(\bar{q}^i,\bar{u})\bar{q}^i = \sum_{i=0}^{N} v_i\,\bar{q}^i = Q^*\bar{v} \qquad (3.3)$$

при этом $\bar{v} = Q\bar{u}$, $v_i = (\bar{q}^i,\bar{u})$

Подставляя (3.3) в (3.1), переходим к вариационной формулировке исходной задачи в базисе Хаара:

$$\begin{aligned}\Phi_u(\bar{u}) &= \frac{1}{2}(L_uQ^*\bar{v},Q^*\bar{v}) - (\bar{f}_u,Q^*\bar{v}) = \\ &= \frac{1}{2}(QL_uQ^*\bar{v},\bar{v}) - (Q\bar{f}_u,\bar{v}) = \\ &= \frac{1}{2}(L_v\bar{v},\bar{v}) - (\bar{f}_v,\bar{v}) = \Phi_v(\bar{v})\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Соответствующая операторная формулировка:

$$L_v\bar{v} = \bar{f}_v \qquad (3.5)$$

Локализация решения

Проблема локализации решения в выбранной зоне фактически переходит в проблему т.н. «осреднения» решения вне этой зоны. В разложении (3.3) по базису Хаара присутствуют одновременно компоненты, соответст-

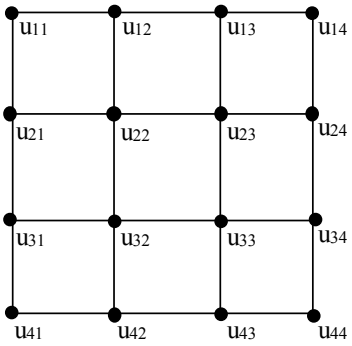
вующие сеточным областям всех уровней. Обозначим v_j^p - компонента разложения, соответствующая j-му узлу сеточной области p-го уровня. При этом $0 \le p \le m$, где $p=0$ – исходная мелкая сетка. Тогда операция осреднения может быть определена следующим образом:

$$v_j^p = \beta v_i^{p+1} \quad , \quad j \in J(i) \qquad (3.6)$$

Здесь J(i) – номера сеточных элементов уровня p, попадающих в i-й сеточный элемент уровня $(p+1)$. β – некоторый коэффициент, оптимизирующий операцию осреднения.

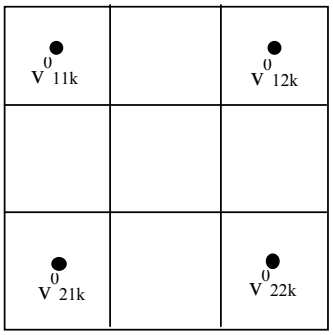
Пример осреднения для двумерного базиса Хаара

Рассмотрим сеточное разбиение двух уровней m=2. Исходная сеточная область при $N=2^m=4$ – количество узлов по каждому направлению:

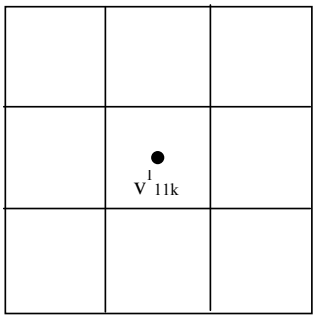


Сеточные области в базисе Хаара:

0-й уровень



1-й уровень



Здесь индексом k обозначается тип базисной функции: k=1,2,3 .

Для нулевого уровня

$$v_{ij1}^0 =$$
$$= [(u_{2i-1,2j-1} - u_{2i-1,2j}) + (u_{2i,2j-1} - u_{2i,2j})]/2 =$$
$$= -h \cdot D_1 u(2i-1,\ 2j-1)$$

$$v_{ij2}^0 =$$
$$= [(u_{2i-1,2j-1} - u_{2i,2j-1}) + (u_{2i-1,2j} - u_{2i,2j})]/2 =$$
$$= -h \cdot D_2 u(2i-1,\ 2j-1)$$

$$v_{ij3}^0 =$$
$$= [u_{2i-1,2j-1} - u_{2i-1,2j} - u_{2i,2j-1} + u_{2i,2j}]/2 =$$
$$= 2h^2 \cdot D_1 D_2 u(2i-1,\ 2j-1)$$
$$i, j = 1, 2$$

D_k – оператор численного дифференцирования по k-му направлению в вариационно-разностной постановке

Для первого уровня

Обозначим

$$u_{ij}^s = (u_{2i-1,2j-1} + u_{2i-1,2j} + u_{2i,2j-1} + u_{2i,2j})/4$$
$$i, j = 1, 2$$

$$v_{111}^1 = (u_{11}^s - u_{12}^s) + (u_{21}^s - u_{22}^s) =$$
$$= -4h \cdot D_1 u^s(1, 1)$$

$$v^1_{112} = (u^s_{11} - u^s_{21}) + (u^s_{12} - u^s_{22}) =$$
$$= -4h \cdot D_2 u^s(1, 1)$$
$$v^1_{113} = (u^s_{11} - u^s_{12} - u^s_{21} + u^s_{22}) =$$
$$= 4h^2 \cdot D_1 D_2 u^s(1, 1)$$

Значение коэффициента β выбираем из условия постоянства разностных производных на элементе сетки 1-го уровня т.е.:

$$v^0_{ij1} = v^1_{111} / 4 ,$$
$$v^0_{ij2} = v^1_{112} / 4 ,$$
$$v^0_{ij3} = v^1_{113} / 8$$
$$\text{i , j} = 1, 2$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев Д.Н.** Одномерное вейвлет-преобразование по базису Хаара. // Сб. научных трудов МГСУ №4: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2001, с. 6 – 12.
2. **Астафьева Н.М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения//УФН. 1996. Т.166 №11. С.1145 – 1170
3. **Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л., Ширинский В.И.** Двумерное вейвлет-преобразование по базису Хаара. // Сб. научных трудов МГСУ №4: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2001, с. 109 – 114.
4. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков// УМН. 1998. Т.53, вып. 6(324). С. 54 – 128.
5. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Сб. научных трудов МГСУ №4: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. - М. 2001, с. 248 – 258.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Золотов Александр Борисович, Почетный член РААСН, Почетный профессор Московского государственного строительного университета, доктор технических наук, профессор.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 5(1&2) 133-151 (2009)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ДЕСТРУКЦИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б.Е. Победря
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Широкое внедрение в практике строительства новых материалов, в том числе наноматериалов требует развития новых теоретических и экспериментальных исследований в области прочностного анализа и теории надёжности. Настоящая статья посвящена рассмотрению вопросов моделирования эволюционной деструкции композиционных материалов.

Ключевые слова: эволюционная деструкция, композиционные материалы, моделирование

SIMULATION OF EVOLUTIONARY DESTRUCTION OF COMPOSITE MATERIALS

Boris E. Pobedrya
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Wide introduction of building of new materials including nanomaterials requires new theoretical and experimental researches in structural analysis and reliability theory. The distinctive paper is devoted to simulation of evolutionary destruction of composite materials.

Keywords: evolutionary destruction, composite materials, to simulation

Широкое внедрение в практике строительства новых материалов, в том числе наноматериалов [1] требует развития новых теоретических и экспериментальных исследований в области прочностного анализа и теории надёжности.

Классический подход к проблеме разрушения материалов в механике деформируемого твёрдого тела и, в частности, в строительной механике заключается в следующем. Сначала тем или иным способом с необходимой точностью определяется напряжённо-деформированное состояние в теле с выбранной моделью, заданными входными данными и геометрией. После этого применяется тот или иной критерий прочности.

Однако такой подход имеет существенные недостатки. Рассмотрим, например, стержень из какого-нибудь упругого строительного материала, армированного тонкими однонаправленными волокнами из другого упругого материала. При растяжении такого стержня упругие волокна будут поочерёдно рваться, и его эффективный модуль будет уменьшаться. Следовательно, он зависит от некоторого параметра, характеризующего деструкцию материала. Факт зависимости определяющих соотношений от параметров такого рода будем называть эволюционной деструкцией. Определяющие соотношения, инвариантные относительно времени, называются склерономными. В противном случае они будут реономными [2].

1. Если определяющие соотношения рассматриваемой модели являются склерономными, то, как правило, предполагается, что состояние некоторой макрочастицы в момент времени t будет прочным, если некоторые универсальные скалярные функции тензоров напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}$, температуры T, и возможно набора ещё некоторых параметров λ, характеризующих эволюционную деструкцию, меньше некоторых материальных констант $C_m > 0$:

$$f_m\left(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{\varepsilon},T,\lambda\right)\le C_m\ ,m=1,2,..,M \qquad (1.1)$$

Если одна из этих функций достигает значения C_m, то наступает разрушение вида, соответствующего номеру функции m.

Все "классические" критерии прочности и многие их обобщения являются частными случаями критерия (1.1), [3,4]. Исходя из определяющих соотношений, в критерии (1.1) может быть исключён один из тензорных аргументов $\underset{\sim}{\sigma}$ или $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Однако, для многократных нагружений тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, например, не может являться непосредственной характеристикой, описывающей разрушение, так как одно и то же напряженное состояние после некоторого числа циклов приведёт к разрушению.

Для реономных определяющих соотношений существует другой тип критериев разрушения, которые называются критериями длительной прочности [3,4,5]. Предполагается, что существует положительная возрастающая во времени функция $\omega(t)$, называемая повреждением, повреждаемостью или дефектом, приращение которой пропорционально некоторой универсальной функции напряжения $\sigma(t)$ (обычно это или одна компонента тензора напряжений, например, растяжение σ_{11}, или некоторая величина, связанная с инвариантами тензора напряжений и называемая эквивалентным напряжением σ_e). Разрушение наступает, как только величина $\omega(t)$ достигает своего максимального для данного материала и температуры значения ω_{des}. Время разрушения t^* для данного закона нагружения $\sigma(t)$, $0\le\tau\le t^*$, определяется, например, уравнением

$$\int_0^{t^*}\frac{d\tau}{t^*\left(\sigma(\tau)\right)}\ =\ 1 \qquad (1.2)$$

которое называется принципом линейного суммирования повреждений [6].

В качестве эквивалентного напряжения применяются выражения [7]:

$$\sigma_e=\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sqrt{3}\ \sigma_u\right) \qquad (1.3)$$

или [8]:

$$\sigma_e=\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sqrt{3}\ \sigma_u\right)a^{\,1-2\eta} \qquad (1.4)$$

где

$$\eta=\frac{3\sigma}{\sigma_1+\sqrt{3}\ \sigma_u} \qquad (1.5)$$

Здесь постоянная $0<a<1$ определяется из эксперимента, σ_1 - наибольшее главное растягивающее напряжение, σ - гидростатическое давление, а σ_u - интенсивность тензора напряжений.

Для параметра повреждений ω записывается кинетическое уравнение вида [9]

$$\frac{d\,\omega}{d\,t}=\varphi\left(\omega,\sigma_e\right) \qquad (1.6)$$

Вид функции $\varphi\left(\omega,\sigma_e\right)$ в ряде случаев конкретизируется, например, [3]

$$\varphi\left(\omega,\sigma_e\right)=F\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right) \qquad (1.7)$$

где $\sigma_e=\sigma_{\max}$ - максимальное растягивающее напряжение. В случай степенной зависимости

$$\varphi\left(\omega,\sigma_e\right)=F\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right)\ =\ A\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right)^n \qquad (1.8)$$

где A и n - постоянные, определяемые из эксперимента, уравнение (1.6) легко интегрируется при начальном условии $\omega = 0$ при $t = 0$:

$$-\frac{\left(1-\omega\right)^{n+1}}{n+1} = A\int_0^t \sigma_{\max}(\tau)\, d\,\tau - \frac{1}{n+1} \tag{1.9}$$

В частности, для растяжения стержня сечения $\sum_0$ постоянной нагрузкой P имеем:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\sum_0} \equiv \sigma_0 = const \tag{1.10}$$

Тогда из (1.9) следует

$$\left(1-\omega\right)^{n+1} - 1 = -A\left(n+1\right)\sigma_0^{\,n}\, t \tag{1.11}$$

Принимая, что в момент разрушения t^* параметр $\omega = 1$, получаем из (1.9):

$$t^* = \frac{1}{\left(n+1\right) A\, \sigma_0^{\,n}} \tag{1.12}$$

Положим:

$$\Omega \equiv \left(1+\omega\right)^{n+1} + 1 \tag{1.13}$$

Тогда из (1.9) имеем

$$\frac{d\,\Omega}{d\,t} = -A\left(n+1\right)\sigma_{\max}^{n} \tag{1.14}$$

или, учитывая (1.12),:

$$\frac{d\,\Omega}{d\,t} = -\frac{1}{t^*\left(t\right)} \tag{1.15}$$

Из (1.15) получаем с учётом, что $\Omega = 0$ в начальный момент и $\Omega = 1$ при разрушении:

$$\int_0^t \frac{d\,\tau}{t^*\left(\tau\right)} = \Omega \tag{1.16}$$

или (1.2).

Таким образом, кинетическое уравнение (1.6) при степенной зависимости (1.8) эквивалентно принципу линейного суммирования повреждений (1.2) [9].

2. Накопление повреждений для различных материалов и различных их условий эксплуатации происходит очень различно. Случаются и хрупкие разрушения при ползучести. Классическим примером внезапного разрушения могут служить усталостные разрушения, возникающие при действии переменных (циклических) нагрузок. В металлических сплавах с неравновесной структурой с течением времени происходят медленные изменения механических свойств, зависящие от температуры. В волокнистых композитах [10] под нагрузкой рвутся некоторые волокна, в результате чего со временем композит становится недееспособным. В этих случаях часто используются термодинамические критерии прочности [11]. Материалы, испытывающие облучение ядерными частицами, изменяют с увеличением дозы облучения механические свойства вследствие нарушений структуры из-за выбивания атомов и образования дефектов. (Хорошо известно “охрупчивание” материалов атомных реакторов).

Внешняя среда может также сильно влиять на прочностные характеристики материала из-за явлений диффузии, химических процессов, коррозии. Сюда же относится эрозия материалов при кавитации и т.д.

Феноменологически названные процессы можно интерпретировать как некие процессы повреждения, накопление дефектов, микропор, трещин. Гипотетически можно предположить, что иногда могут происходить и процессы “залечивания” дефектов.

Для описания всех этих процессов желательно абстрагироваться от конкретного явления и смоделировать “повреждаемость” так, чтобы охватить как можно больше явлений, различных по своей физической природе.

Если в качестве строительных материалов используются нанокомпозиты, приходится рассматривать двухуровневый континуум, простейшим примером которого является континуум Коссера [12].

Предположим, что существует макрообъект $\chi\left(t, \vec{x}\right)$, называемого повреждением, который в системе координат $\vec{x}$ в момент t задаётся некоторыми числами (компонентами) $\chi_1, \chi_2, \chi_3, ..., \chi_n$ и обладает следующими свойствами:

a. χ является функцией состояния макрочастицы, т.е., однозначно определяется процессом нагружения (тензором напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, тензорами моментных напряжений различного порядка $\underset{\sim}{\mu}(\tau)$, температурой $T(\tau)$ и так далее). Функционал χ

$$\chi \underset{\tau=0}{\overset{t}{\left\{ \underset{\sim}{\sigma}(\tau), \underset{\sim}{\mu}(\tau), T(\tau), ... \right\}}} \quad (2.1)$$

предполагается вполне непрерывным на некотором классе достаточно гладких функций нагружения вплоть до состояний, как угодно близких к разрушению.

b. χ характеризует накопление повреждений и состояние, непосредственно предшествующее разрушению макрочастицы. Существуют некоторые неотрицательные меры, называемые мерами повреждений

$$M_m(\chi)=f_m(\chi_1,\chi_2,...,\chi_n,T) \quad m=1,2,...,m' \le n \quad (2.2)$$

которые являются функциями компонент χ и T, инвариантными относительно группы преобразований симметрии Γ, и существуют соответствующие положительные константы материала C_m $(m=1,2,...,m')$ такие, что если для любого m

$$M_m(\chi) < C_m \quad (2.3)$$

то состояние макрочастицы прочно; если же для какого-нибудь $m = k$

$$M_k(\chi) = C_k \quad (2.4)$$

а для остальных $M_m < C_m$), то происходит разрушение типа “к”.

c. χ является нулевым на интервале $0 \le \tau \le t$, т.е., все компоненты $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$ и меры $M_m(\chi)$, $m=1,2,3,....,m'$ равны нулю, если на этом интервале равны нулю параметры нагружения $\underset{\sim}{\sigma}(\tau)$, $\underset{\sim}{\mu}(\tau)$, ...

Повреждение χ в момент t как функционал трёхмерных тензоров $\underset{\sim}{\sigma}(\tau)$, $\underset{\sim}{\mu}(\tau)$, ... (2.1) может быть только трёхмерным тензором или совокупностью тензоров некоторых порядков. В последнем случае и меры повреждения $M_m(\chi)$ определяются по совокупности компонент этих тензоров. В качестве простейшего варианта теории накоплений повреждений макрочастицы может быть выбран случай, когда тензор χ является симметричным тензором второго ранга [13], хотя и не исключаются случаи, когда χ задаётся комбинацией нескольких скаляров.

Будем считать, что существует некий гипотетический объект “повреждаемость” χ, который может быть совокупностью тензоров различного ранга, и который является оператором процесса нагружения.

$$\underset{\sim}{\chi} = \Phi(\underset{\sim}{\sigma}, \kappa, T, \vec{x}, ...) \quad (2.5)$$

При этом разрушение определяется условиями, накладываемыми на меры повреждаемости (2.3), (2.4), а сами меры $M_m(\underset{\sim}{\chi})$ (2.2) образуются из совместных инвариантов тензоров, составляющих повреждаемость $\underset{\sim}{\chi}$.

В соотношениях (2.5) в качестве аргумента введён радиус вектор $\vec{x}$, чтобы подчеркнуть,

что оператор (2.5) зависит явно от координат материальных точек, т. е. материал является неоднородным, причём его материальные функции могут быть разрывными.
В силу существования операторных определяющих соотношений модели, мы можем в качестве аргументов оператора (2.5) вместо тензора напряжения $\underset{\sim}{\sigma}$ и моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$ выбрать тензор деформации $\underset{\sim}{\varepsilon}$ и его градиенты различного порядка $\underset{\sim}{\kappa}$:

$$\underset{\sim}{\chi} = \overset{\cup}{\chi}(\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\kappa},T,\vec{x},...) \qquad (2.6)$$

Часто механические свойства материала сильно изменяются в процессе развития повреждаемости. Поэтому определяющие соотношения должны быть записаны так, чтобы в них учитывалась повреждаемость (2.5) или (2.6).
Для неизотермических процессов эти определяющие соотношения должны зависеть и от температуры. Итак, мы получаем двойную связанность соотношений: механические свойства материала зависят от процессов повреждаемости и температуры, а повреждаемость и температура зависят от НДС, т. е. от процессов нагружения и деформирования. В связи с этим необходимо проанализировать термодинамику сплошной среды.

3. Запишем операторные определяющие соотношения с учётом повреждаемости (2.5), (2.6) в виде

$$\sigma_{ij} = \overset{\cup}{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\kappa},\underset{\sim}{\chi},T,\vec{x}) \qquad (3.1)$$

$$\mu_{ij} = \overset{\cup}{K}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\kappa},\underset{\sim}{\chi},T,\vec{x}) \qquad (3.2)$$

где аргумент $\vec{x}$ напоминает о том, что рассматриваются неоднородные материалы (композиты).
Добавим к (3.1) и (3.2) определяющие соотношения, связывающие вектор теплового потока $\vec{q}$ и градиент температуры, в виде закона теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\underset{\sim}{\Lambda}\cdot grad\,T, \quad q_i = -\Lambda_{ij}T_{,j} \qquad (3.3)$$

где положительно определённый симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{\Lambda}$ называется тензором теплопроводности.
Из двух основных законов термодинамики [14]

$$dE = \delta Q - \delta A^{(i)} \qquad (3.4)$$

$$T\,dS = \delta Q + W^*\,dt \qquad (3.5)$$

где E - внутренняя энергия, S - энтропия, Q - приток тепла, $A^{(i)}$ - работа внутренних сил, W - функция рассеивания, получаем, как следствие, уравнение

$$d\Psi + S\,dT + W^*\,dt = -\delta A^{(i)} \qquad (3.6)$$

где Ψ - свободная энергия Гельмгольца

$$\Psi = E - TS \qquad (3.7)$$

Работу внутренних сил можно записать в виде

$$-\delta A^{(i)} = \int_V (\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij} + \mu_{ij}\,d\kappa_{ij})\,dV \qquad (3.8)$$

а приток тепла

$$\delta Q = dt\left[\int_V \rho\,q\,dV - \int_\Sigma \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\Sigma\right] \qquad (3.9)$$

Вводя плотности термодинамических функций ψ, e, s, w^*

$$\Psi = \int_V \rho\psi\,dv,\ E = \int_V \rho e\,dv,\ S = \int_V \rho s\,dv,\ W^* = \int_V w^*\,dv \qquad (3.10)$$

запишем уравнение (3.6) в виде

$$\rho d\psi + \rho s dT + w^* = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} + \mu_{ij}\, d\kappa_{ij} \quad (3.11)$$

Уравнение (3.5) при использовании введённых обозначений (3.9), (3.10) и закона Фурье (3.3) можно записать в виде

$$\rho\, T\, \frac{d\, s}{d\, t} \;=\; \rho\, q \;-\; div\, \vec{q} + w^* \qquad (3.12)$$

Воспользуемся гипотезой Дюгамеля-Неймана [14] и запишем определяющие соотношения (3.1), (3.2) в виде

$$\sigma_{ij} = \overset{\cup}{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.13)$$

$$\mu_{ij} = \overset{\cup}{K}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.14)$$

где

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^T \equiv \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha}\vartheta\ , \quad \underset{\sim}{\kappa}^T \equiv \underset{\sim}{\kappa} - \underset{\sim}{\beta}\vartheta \qquad (3.15)$$

Здесь $\underset{\sim}{\alpha}$ - тензор теплового расширения, а $\underset{\sim}{\beta}$ назовём тензором теплового искривления, ϑ - перепад температуры, т. е. разность между текущей температурой T и некоторым начальным её значением T_o. ($\vartheta = T - T_o$)

Отметим, что до недавнего времени экспериментально находить определяющии соотношения вида (3.13), (3.14) было невозможно. В работах [15, 16] был предложен находить их аналитически благодаря введению так называемого параметра структуры композита.

Термодинамические функции состояния s, ψ в уравнениях (3.11), (3.12) зависят от температуры T и некоторых термодинамических параметров состояния $\underset{\sim}{v}_i$, $i = 1,2,...,n$ которые не всегда можно указать в явном виде. Обобщим теперь “основную” гипотезу [14] , которая будет заключаться в том, что параметры состояния $\underset{\sim}{v}_i$ являются операторами вида (3.13), (3.14)

$$\underset{\sim}{v}_i = \overset{\cup}{\underset{\sim}{v}}_i(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.16)$$

Забудем на время об аргументе $\underset{\sim}{\chi}$ в (3.16) и полную вариацию $\delta\, \underset{\sim}{\mu}_i$ представим в виде суммы двух независимых вариаций: изохронной вариации $\underset{\sim}{v}^{\varepsilon}\, d\, \underset{\sim}{\varepsilon}^T + \underset{\sim}{v}^{\kappa}\, d\, \underset{\sim}{\kappa}^T$, когда при фиксированном t варьируется вид функций $\underset{\sim}{\varepsilon}^T(\tau)$, $\underset{\sim}{\kappa}^T(\tau)$ $(0 \le \tau \le t)$ и вариации $\underset{\sim}{v}_i^t\, dt$, обусловленной варьированием независимого аргумента t

$$\delta \underset{\sim}{v}_i = \underset{\sim}{v}_i^{\varepsilon} \cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^T + \underset{\sim}{v}_i^{\kappa} \cdot d\underset{\sim}{\kappa}^T + \underset{\sim}{v}_i^t dt \qquad (3.17)$$

Если $\underset{\sim}{v}_i$ является тензором второго ранга, то под величиной $\underset{\sim}{v}_i^{\varepsilon}$, например, понимается функциональная производная $\frac{\partial\, \underset{\sim}{v}_i}{\partial\, \underset{\sim}{\varepsilon}^T}$, т.е., тензор четвёртого ранга, а под величиной $\underset{\sim}{v}_i^T$ - частная производная оператора $\underset{\sim}{v}_i$ по времени (тензор второго ранга).

Аналогично поступим и с операторами $\overset{\cup}{\underset{\sim}{\chi}}$ (2.6) , описывающими повреждаемость. Прежде всего, согласно принимаемой гипотезе Дюгамеля-Неймана имеем вместо (2.6)

$$\underset{\sim}{\chi} = \overset{\cup}{\underset{\sim}{\chi}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \vec{x}) \qquad (3.18)$$

Будем считать, что $\underset{\sim}{\chi}$ является тензором второго ранга. Тогда согласно “основной” гипотезе можно записать полную вариацию оператора повреждаемости (3.18) в виде

$$\delta \underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon} d\underset{\sim}{\varepsilon}^{T} + \underset{\sim}{\kappa} d\underset{\sim}{\kappa}^{T} + \underset{\sim}{\chi}^{t} dt \qquad (3.19)$$

Теперь вспомним об аргументе $\underset{\sim}{\chi}$ в выражениях (3.16) и будем рассматривать их наличие в (3.16), как сложную операторную функцию от аргументов, указанных в (3.18). Подставим полученные представления (3.17) и (3.18) в уравнение (3.11)

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial T}dT + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\varepsilon}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^{T} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\kappa}\cdot d\underset{\sim}{\kappa}^{T} +$$
$$+ \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{t} dt + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^{T} +$$
$$+ \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{T} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\,\underset{\sim}{\chi}^{t} dt + \rho s dT +$$
$$+ W^{*} dt = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} + \mu_{ij}\, d\kappa_{ij} \equiv$$
$$\equiv \overset{\cup}{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x})\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon} + \overset{\cup}{\underset{\sim}{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x})\cdot d\underset{\sim}{\chi} \qquad (3.20)$$

Приравнивая в (3.20) выражения при независимых вариациях $dT, d\underset{\sim}{\varepsilon}, d\underset{\sim}{\kappa}, dt$, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} - \frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\kappa}\cdot\underset{\sim}{\beta} -$$
$$- \frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\kappa}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\kappa}\cdot\underset{\sim}{\beta} = -s \qquad (3.21)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\varepsilon} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon} = \overset{\cup}{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.22)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\kappa} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon} = \overset{\cup}{\underset{\sim}{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.23)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{t} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \underset{\sim}{v}_i}\underset{\sim}{v}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{t} = -\omega^{*} \qquad (3.24)$$

Предположим, что все термодинамические функции состояния ψ, s, e имеют аддитивную составляющую, зависящую только от температуры, например,

$$\psi\ (T, \underset{\sim}{v}_i) = \psi_0(T) + \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{v}_i \cdot \underset{\sim}{v}_i \qquad (3.25)$$

Тогда можно ввести две теплоёмкости вещества: c_p, c_v, причём, как следует из (3.4) и (3.7),

$$c_v = \frac{\partial e}{\partial T} = -T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} = T\frac{\partial s}{\partial T} \qquad (3.26)$$

$$c_p = \frac{\partial e_0}{\partial T} = -T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} = T\frac{\partial s_0}{\partial T} \qquad (3.27)$$

Поэтому

$$-\frac{\partial\psi_0}{\partial T} = \int_{T_0}^{T}\frac{c_p}{T}\,dT \qquad (3.28)$$

По закону Дюлонга - Пти у твёрдых веществ для температуры выше некоторой, называемой температурой Дебая, $c_p = const.$ В этом случае

$$c_p \ln\frac{T}{T_0} = c_p \ln\left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right) \qquad (3.29)$$

Если ϑ мало по сравнению с T_0, то

$$c_p \ln\frac{T}{T_0} \approx c_p \frac{\vartheta}{T_0} \qquad (3.30)$$

Сравнивая (3.21), (3.22), и (3.23) а также считая теплоёмкость вещества заданной, получаем, что функция энтропии s полностью определена законом связи между напряжениями и моментными напряжениями с одной стороны и деформациями и искривлениями с другой:

$$\rho s = \rho c_p \ln\frac{T}{T_0} + \underset{\sim}{\alpha}\cdot\overset{\cup}{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) +$$
$$+ \underset{\sim}{\beta}\cdot\overset{\cup}{\underset{\sim}{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}, \underset{\sim}{\kappa}^{T}, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}) \qquad (3.31)$$

Поэтому уравнение притока тепла (3.12) примет вид:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = div(\underset{\sim}{\Lambda} \cdot grad T) - \\ - T\frac{d}{dt}\left[\underset{\sim}{\alpha} \cdot \overset{\cup}{\underset{\sim}{F}}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}\right) + \underset{\sim}{\beta} \cdot \overset{\cup}{\underset{\sim}{K}}\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\kappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \vec{x}\right)\right] + \\ + pq + \omega^* \tag{3.32}$$

Вид функции рассеивания ω^* должен конкретизироваться в зависимости от выбора определяющих соотношений в соответствии с выражением (3.24).

4. Определяющие соотношения (3.1), (3.2) являются довольно общими. Для применения развиваемой теории на практике нужно рассмотреть более конкретные случаи. Выберём сначала наипростейший вариант: Будем рассматривать неполярную среду с линейными определяющими соотношениями.

Пусть нам заданы выражения напряжений через деформации и повреждаемость в виде

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau \tag{4.1}$$

Соотношения (4.1) являются частным случаем соотношений (3.1). При этом для тензора повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}(t)$ запишем, как частный случай соотношений (2.6) выражение

$$\chi_{ij} = \int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau \tag{4.2}$$

Для сокращения записи воспользуемся символическим операторным обозначением [14] и запишем соотношения (4.1) в виде

$$\sigma_{ij} = \overset{\cup}{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} + \overset{\cup}{V}_{ijkl}\chi_{kl} \tag{4.1}'$$

а соотношение (4.2) в виде

$$\chi_{ij} = \overset{\cup}{X}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.2}'$$

Из (4.1)′ и (4.2)′ имеем

$$\sigma_{ij} = \overset{\cup}{S}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.3}$$

$$\overset{\cup}{S}_{ijkl} = \overset{\cup}{\Gamma}_{ijkl} + \overset{\cup}{V}_{ijmn}\chi_{mnkl} \tag{4.4}$$

т.е., мы получили соотношения, формально совпадающие с соотношением классической теории термовязкоупругости [5]. Заметим, что традиционно в соотношениях (4.2) [3] тензор повреждаемости связывают с напряжением:

$$\chi_{ij} = \int_0^t Y_{ijkl}(t,\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau \equiv \overset{\cup}{Y}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.5}$$

Однако, подставив (4.3) в (4.1)′, получим

$$\sigma_{ij} = \overset{\cup}{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} + \overset{\cup}{V}_{ijmn}\overset{\cup}{Y}_{mnkl}\sigma_{kl} \tag{4.6}$$

Введём единичный тензор четвёртого ранга $\underset{\sim}{\Delta}$ [17]

$$\Delta_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{4.7}$$

тогда (4.6) можно записать в виде

$$\left(\Delta_{ijkl} - \overset{\cup}{V}_{ijmn}\overset{\cup}{Y}_{mnkl}\right)\sigma_{kl} = \overset{\cup}{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.8}$$

Пусть тензор-оператор $\overset{\cup}{W}_{ijkl}$ является обратным, по отношению к оператору, заключённому в левой части (4.8) в круглые скобки, т.е.

$$\left(\Delta_{ijkl} - \overset{\cup}{V}_{ijmn}\overset{\cup}{Y}_{mnkl}\right)\overset{\cup}{W}_{klpq} = \Delta_{ijpq} \tag{4.9}$$

Тогда соотношения (4.8), а значит и (4.6) можно, как и прежде записать в виде (4.3),

только теперь оператор $\overset{\smile}{S}_{ijkl}$ имеет вид не (4.4) а

$$\overset{\smile}{S}_{ijkl} = \overset{\smile}{W}_{ijmn}\,\overset{\smile}{\Gamma}_{mnkl} \qquad (4.10)$$

Таким образом доказана эквивалентность записей (4.2) и (4.5).

Разумеется, мы будем считать определяющие соотношения (4.3) обратимыми, т.е., их можно разрешить относительно деформаций:

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \overset{\smile}{Q}_{ijkl}\,\sigma_{kl} \qquad (4.11)$$

где

$$\overset{\smile}{S}_{ijmn}\,\overset{\smile}{Q}_{mnkl} = \Delta_{ijkl} \qquad (4.12)$$

Определяющим соотношениям (4.11) соответствуют две исходные формы записи

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \overset{\smile}{K}_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \overset{\smile}{A}_{ijkl}\,\chi_{kl} \qquad (4.13)$$

Одна форма в виде (4.5), а другая в виде $(4.2)'$. В первом случае

$$\overset{\smile}{Q}_{ijkl} = \overset{\smile}{K}_{ijkl} + \overset{\smile}{A}_{ijmn}\,\overset{\smile}{V}_{mnkl} \qquad (4.14)$$

а во втором

$$\overset{\smile}{Q}_{ijkl} = \overset{\smile}{B}_{ijmn}\,\overset{\smile}{K}_{mnkl} \qquad (4.15)$$

где тензор-оператор $\overset{\smile}{B}_{ijkl}$ является обратным к тензору оператору

$(\Delta_{ijkl} - \overset{\smile}{A}_{ijmn}\,\overset{\smile}{X}_{mnkl})$, т.е.

$$\overset{\smile}{B}_{ijkl}\,(\Delta_{klmn} - \overset{\smile}{A}_{klpq}\,\overset{\smile}{X}_{pqmn}) = \Delta_{ijmn} \qquad (4.16)$$

Таким образом, и в случае (4.13) обе формы записи $(4.2)'$ и (4.5) эквивалентны.

Для изотропного случая соотношения (4.13) могут быть записаны в виде

$$e_{ij} = \overset{\smile}{K}\,s_{ij} + \overset{\smile}{A}\,\overline{\chi}_{ij} \qquad (4.17)$$

$$\theta^{T} = \overset{\smile}{K}_1\,\sigma + \frac{1}{9}\,\overset{\smile}{A}_1\,\overset{0}{\chi} \qquad (4.18)$$

где

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \theta^{T}\sigma_{ij} + e_{ij}\,,\ \sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + s_{ij}\,,$$
$$\chi_{ij} = \frac{1}{3}\overset{0}{\chi}\delta_{ij} + \overline{\chi}_{ij}$$
$$\theta^{T} = \varepsilon_{ii} - 3\alpha\vartheta\,,\ \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,,$$
$$\overset{0}{\chi} = \chi_{kk}$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{\smile}{K}_{ijkl} &= \frac{\overset{\smile}{K}_1 - 3\overset{\smile}{K}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{K}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\\ \overset{\smile}{A}_{ijkl} &= \frac{\overset{\smile}{A}_1 - 3\overset{\smile}{A}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{A}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

Соотношение (4.5) в этом случае примет вид

$$\overline{\chi}_{ij} = \overset{\smile}{Y}\,s_{ij} \qquad (4.20)$$

$$\overset{0}{\chi} = \overset{\smile}{Y}_1\,\sigma \qquad (4.21)$$

где аналогично (4.19):

$$\overset{\smile}{Y}_{ijkl} = \frac{\overset{\smile}{Y}_1 - 3\overset{\smile}{Y}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{Y}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (4.22)$$

Поэтому соотношения (4.11) могут быть записаны в виде

$$e_{ij} = \overset{\smile}{Q}\,s_{ij} \qquad (4.23)$$

$$\theta^{T} = \overset{\smile}{Q}_1\,\sigma \qquad (4.24)$$

Так что для этого случая имеем

$$\breve{Q} = \breve{K} + \breve{A}\,\breve{Y} \qquad (4.25)$$

$$\breve{Q}_1 = \breve{K}_1 + \frac{1}{9}\,\breve{A}_1\,\breve{Y}_1 \qquad (4.26)$$

Опишем теперь, каким образом можно отыскать экспериментально ядро $Q\,(t)$, соответствующее оператору $\breve{Q}$ в (4.23). Для простоты будем считать ядро Q разностного типа $Q(t-\tau)$, а форму записи (4.23) - соответствующей форме Больцмана-Вольтерры, т.е. в виде интеграла Стильтьеса:

$$e_{ij}(t) = \int_0^t Q(t-\tau)\, d\, s_{ij}(\tau) \qquad (4.27)$$

При этом из (4.25) следует

$$Q(t) = K(t) + \int_0^t A(t-\tau)\, d\, Y(\tau) \qquad (4.28)$$

Мысленно проведём эксперимент на ползучесть образца без концентратора. Прикладывая к такому образцу мгновенно напряжения

$$s_{\alpha\beta}=s^0_{\alpha\beta}h(t),\ s_{ij}=0\,(i\neq\alpha, j\neq\beta) \qquad (4.29)$$

где $s^0_{\alpha\beta}$ - некоторая постоянная, а $h(\tau)$ - единичная функция Хевисайда, найдём из (4.20)

$$\chi_{\alpha\beta}=\breve{Y}s_{\alpha\beta}=\int_0^t Y(t-\tau)ds_{\alpha\beta}(\tau)=s^0_{\alpha\beta}Y(t) \qquad (4.30)$$

Инварианты тензора $\bar{\chi}_{ij}$ совпадают с его единственной компонентой $\bar{\chi}_{\alpha\beta}$, а значит из всех мер повреждаемости (2.2) будет единственная функция $s_{\alpha\beta}Y(t)$. Из условия разрушения (2.4) эта функция станет в момент разрушения t^* константой

$$s^0_{\alpha\beta}\,Y(t^*) = C = const$$

Предположим теперь, что из серии экспериментов с различными постоянными значениями $s^0_{\alpha\beta}$ мы знаем зависимость времени разрушения t^* от нагружения $s^0_{\alpha\beta}$. Поэтому мы можем построить обратную функцию

$$s^0_{\alpha\beta} = S^*(t^*) \qquad (4.32)$$

Тогда из (4.31) мы находим ядро $Y(t)$:

$$Y(t) = \frac{C}{S^*(t)} \qquad (4.33)$$

с точностью до постоянного множителя. (Аналогично из эксперимента на всестороннее растяжение можно найти ядро $Y_1(t)$).

Далее можно поступить следующим образом. При малых уровнях напряжений, когда о деструкции не может идти речи, мы находим ядро ползучести $K(t)$, а при больших уровнях напряжений, используя соотношения (4.27), находим функцию ползучести $Q\,(t)$. После этого ядро $A\,(t)$ находится из решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$\int_0^t Y(t-\tau)\, d\, A(\tau) = Q(t) - K(t) \qquad (4.34)$$

Точно также поступаем и в случае объёмной ползучести, т.е. решаем интегральное уравнение

$$\int_0^t Y_1(t-\tau)\, d\, A_1(\tau) = Q_1(t) - K_1(t) \qquad (4.35)$$

5. Рассмотрим теперь случай линейной неполярной анизотропной среды. Проведём более подробные рассуждения для случая трансверсальной изотропии. В этом случае все выкладки вплоть до формулы (4.16) остаются справедливыми.

Для трансверсально изотропной среды каждый симметричный тензор второго ранга удобно представить в виде, обобщающим разбиение тензора на шаровую и девиаторную составляющие [17], например

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\tilde{\theta}\gamma_{ij}+\overset{0}{\varepsilon}l_i l_j+p_{ij}+2q_{ij} \qquad (5.1)$$

$$\sigma_{ij}=\tilde{\sigma}\gamma_{ij}+\overset{0}{\sigma}l_i l_j+P_{ij}+2Q_{ij} \qquad (5.2)$$

$$\chi_{ij}=\tilde{\chi}\gamma_{ij}+\overset{0}{\chi}l_i l_j+\phi_{ij}+2\Psi_{ij} \qquad (5.3)$$

Каждый из тензоров (5.1)-(5.3) имеет по пяти независимых инвариантов, но мы будем рассматривать квазилинейные (и даже линейные соотношения), и поэтому примем во внимание только по четыре инварианта для каждого тензора: два “линейных” и два “квадратичных”

$$\tilde{\theta},\overset{0}{\varepsilon},p,q;\tilde{\sigma},\overset{0}{\sigma},P,Q;\tilde{\chi},\overset{0}{\chi},\phi,\Psi \qquad (5.4)$$

Определяющие соотношения (4.13) в этом случае могут быть записаны в виде

$$p_{ij}=\breve{K}P_{ij}+\breve{A}\phi_{ij}\ ;\ q_{ij}=\breve{L}Q_{ij}+\breve{B}\psi_{ij} \qquad (5.5)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\theta}^{T}&=\breve{K}_1\tilde{\sigma}+\breve{K}_2\overset{0}{\sigma}+\breve{A}_1\tilde{\chi}+\breve{A}_2\overset{0}{\chi}\\ \overset{0}{\varepsilon}^{T}&=\breve{K}_2\tilde{\sigma}+\breve{K}_3\overset{0}{\sigma}+\breve{A}_2\tilde{\chi}+\breve{A}_3\overset{0}{\chi}\end{aligned}\right\}$$

Соотношения (4.5) примут вид

$$\phi_{ij}=\breve{Y}P_{ij}\ ;\ \psi_{ij}=\breve{Z}Q_{ij} \qquad (5.7)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\chi}&=\breve{Y}_1\tilde{\sigma}+\breve{Y}_2\overset{0}{\sigma}\\ \overset{0}{\chi}&=\breve{Y}_4\tilde{\sigma}+\breve{Y}_3\overset{0}{\sigma}\end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Точно так же, как и в предыдущем пункте, можно показать эквивалентность записей (5.7) и записи

$$\phi_{ij}=\breve{X}p_{ij}\ ,\ \psi_{ij}=\breve{U}q_{ij} \qquad (5.9)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\chi}&=\breve{X}_1\tilde{\theta}+\breve{X}_2\overset{0}{\varepsilon}\\ \overset{0}{\chi}&=\breve{X}_4\tilde{\theta}+\breve{X}_3\overset{0}{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

В любом случае, приняты за основу соотношения (5.7), (5.8) или (5.9), (5.10). Можно соотношения (5.50), (5.60) переписать в виде

$$p_{ij}=\breve{Q}P_{ij}\ ;\ q_{ij}=\breve{R}Q_{ij} \qquad (5.11)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\theta}^{T}&=\breve{Q}_1\tilde{\sigma}+\breve{Q}_2\overset{0}{\sigma}\\ \overset{0}{\varepsilon}&=\breve{Q}_4\tilde{\sigma}+\breve{Q}_3\overset{0}{\sigma}\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Зная тензор повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}$ (5.3) и его инварианты (5.4), составляем меры повреждаемости $M_1,.....,M_\varphi$ как функции этих инвариантов. Примем упрощающее предположение, что меры повреждаемости зависят только от тех инвариантов, которые соответствуют представлению определяющих соотношений в виде (5.11), (5.12). Тогда критерии разрушения можно записать:

$$\left.\begin{aligned}&M_1(\phi)\le C_1\\ &M_2(\Psi)\le C_2\\ &M_3(\tilde{\chi},\overset{0}{\chi})\le C_3\\ &M_4(\tilde{\chi},\overset{0}{\chi})\le C_4\end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

или проще

$$\left.\begin{aligned}&\phi\le C_1\ ,\ \Psi\le C_2\\ &a\tilde{\chi}+b\overset{0}{\chi}\le C_3\\ &b\chi+d\overset{0}{\chi}\le C_4\end{aligned}\right\} \qquad (5.13)'$$

Предположим теперь, что осуществляется эксперимент на растяжение цилиндрического образца в направление x_1. В этом случае при ползучести

$$\sigma_{ij}=\sigma^{0}_{11}\,\delta_{i1}\delta_{j1}\,h(t) \qquad (5.14)$$

Тогда, считая, что и в этом пункте все операторные соотношения описываются разностными ядрами в форме интегралов Стильтье-

са, для малых уровней напряжений найдём из эксперимента на ползучесть ядра $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K(t)$ используя соотношения (5.5), (5.6). При больших уровнях напряжений найдём ядра $Q_1(t), Q_2(t), Q(t)$; используя соотношения (5.11), (5.12).

Если мы растянем цилиндрический образец в направление x_3

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{33}\ \delta_{i3}\ \delta_{j3}\ h(t) \qquad (5.15)$$

то найдём описанным образом ядра ползучести, $K_2(t), K_3(t)$ а также $Q_2(t), Q_3(t)$. Найденные двумя способами ядра $K_2(t), Q_2(t)$ можно будет сравнить.

Из эксперимента на ползучесть при кручении образца

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1})\ h(t) \quad (5.16)$$

находятся ядра ползучести $L(t)$, $R(t)$. Кроме того, из серии экспериментов такого напряжённого состояния можно найти зависимость скручивающего напряжения σ^0_{13} от времени разрушения

$$\sigma^0_{13} = S^*_{13}(t^*) \qquad (5.17)$$

Зная функцию (5.17) мы сможем, аналогично тому, как это описано в предыдущем пункте, найти ядро $Z(t)$ из соотношения (5.8). В самом деле, компонента тензора напряжений σ_{13} входит только в один инвариант ($Q = \sqrt{\sigma^2_{13} + \sigma^2_{23}}$), а поэтому и мера повреждаемости определяется только этим инвариантом (Ψ), как следует из второго соотношения (5.7). Поэтому, зная ядро $Z(t)$ (5.13)

$$Z(t) = \frac{C_2}{S^*_{13}(t)} \qquad (5.18)$$

мы можем найти ядро $B(t)$ оператора $\breve{B}$, входящего в соотношения (5.5), решая интегральное уравнение, аналогичное (4.34)

$$\int_0^t Z(t-\tau)\, d\,B(\tau) \ = \ R(t) \ - \ L(t) \quad (5.19)$$

Сложнее обстоит дело с определением ядер $A(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)$.

Разумеется, и при проведении экспериментов типа (5.14), (5.15) мы также можем найти зависимости растягивающих напряжений σ^0_{11}, σ^0_{33} от соответствующих времён разрушения

$$\sigma^0_{11} = S^*_{11}(t^*)\ ,\ \sigma^0_{33} = S^*_{33}(t^*) \qquad (5.20)$$

Мы можем также провести эксперимент на ползучесть при кручении:

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1})h(t) \qquad (5.21)$$

и из него определить не только уже найденные раньше ядра ползучести $K(t), Q(t)$, но и установить зависимость сдвигового напряжения σ^0_{12} от времени разрушения t^*

$$\sigma^0_{12} = S^*_{12}(t^*) \qquad (5.22)$$

Однако каждая из компонент тензора $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ входит в инварианты $P, \tilde{\sigma}, \sigma^0$ и тем самым фигурирует в критериях прочности (5.13)′. Так, что для нахождения ядер $A(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ необходимо использовать комбинацию мер повреждаемости (5.13)′.

Пользуясь произволом масштаба компонент χ_{ij} и мер повреждаемости (5.13), (5.13)′, последние можно нормировать [12]. Эта нормировка заключается в том, что мы можем одну из компонент тензора повреждаемости $\tilde{\chi}$, входящую в критерий (5.13)′, сде-

лать равной единице. Например, если некоторый тензор $\underset{\sim}{\chi}^{(s)}$ соответствует чистому сдвигу

$$\chi_{12}^{(s)} = \delta_{i1}\,\delta_{j2} \qquad (5.23)$$

то одну из компонент этого тензора можно сделать равной единице, а остальные будут нулевыми и можно положить

$$M_s(\underset{\sim}{\chi}^{(s)}) = C_s = const \qquad (5.24)$$

Можно выбрать другой тензор $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$, соответствующий простому растяжению в направлении x_1. Тогда компоненту $\chi_{11}^{(r)}$ можно положить равной единице. Но у такого тензора компонента $\chi_{22}^{(r)}$ может отличаться от нуля, положим её равной $\lambda < 1$:

$$\chi_{11}^{(r)} = 1 \quad , \quad \chi_{22}^{(r)} = \lambda < 1 \qquad (5.25)$$

Остальные компоненты тензора $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$ равны нулю. Для тензора $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$ можно записать меру повреждаемости и условие прочности в виде

$$M_r(\underset{\sim}{\chi}^{(r)}) = C_r = const \qquad (5.26)$$

После нахождения таких констант критерии прочности становятся нормированными

$$M_s(\underset{\sim}{\chi}) \le M_s(\underset{\sim}{\chi}^{(s)}),\ M_r(\underset{\sim}{\chi}) \le M_r(\underset{\sim}{\chi}^{(r)}) \qquad (5.27)$$

Из (5.13)′ видно, что без ограничения общности критерии прочности могут быть записаны в виде

$$\phi \le C_1, \Psi \le C_2, \left|\overset{\sim}{\underset{\sim}{\chi}}\right| \le C_3, \left|\overset{0}{\underset{\sim}{\chi}}\right| \le C_4 \qquad (5.28)$$

Нормировка этих критериев позволяет положить в них

$$\chi_{11}=1, \chi_{12}=1, \chi_{13}=1, \chi_{33}=1, \chi_{22}=\lambda \qquad (5.29)$$

Пусть нам известны эксперименты, устанавливающие зависимость напряжений от времени разрушения (5.17), (5.20), (5.22). Рассмотрим ещё раз каждый из них. В случае напряжённого состояния, описываемого (5.16), получаем единственную, отличную от нуля, компоненту тензора $\underset{\sim}{\chi}$:

$$\chi_{13}=2\psi_{13}=2\overset{\cup}{Z}Q_{13}=\overset{\cup}{Z}\sigma_{13} \qquad (5.30)$$

Эта компонента входит только в инвариант Ψ. Поэтому согласно (5.28) и (5.29), имеем из (5.30)

$$Z(t) = \frac{1}{S^*_{13}(t)} \qquad (5.31)$$

Рассмотрим теперь напряжённое состояние (5.21). В этом случае мы также имеем единственную компоненту тензора χ_{ij}, отличную от нуля:

$$\chi_{12}=\phi_{12}=\overset{\cup}{Y}P_{12}=\overset{\cup}{Y}\sigma_{12} \qquad (5.32)$$

Эта компонента также входит в единственный инвариант тензора повреждаемости Φ. Поэтому согласно (5.28), (5.29), имеем из (5.32):

$$Y(t)=\frac{1}{S^*_{12}(t)} \qquad (5.33)$$

Для напряжённого состояния (5.14) отличными от нуля компонентами тензора повреждаемости являются:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_{11} &= \phi_{11} + \tilde{\chi} = \breve{Y} P_{11} + \breve{Y}_1 \overset{Б}{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\breve{Y} + \breve{Y}_1\right)\sigma_{11} \\
\chi_{22} &= \phi_{22} + \tilde{\chi} = \breve{Y} P_{22} + \breve{Y}_1 \tilde{\sigma} = \frac{1}{2}\left(-\breve{Y} + \breve{Y}_1\right)\sigma_{11} \\
\chi_{33} &= \overset{0}{\chi} = \breve{Y}_4 \tilde{\sigma} = \frac{1}{2}\breve{Y}_4 \sigma_{11}
\end{aligned}\right\} \quad (5.34)$$

Эти компоненты входят в инварианты

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\chi_{11} - \chi_{22}\right|, \quad \tilde{\chi} = \frac{1}{2}(\chi_{11} + \chi_{22}), \quad \overset{0}{\chi} = \chi_{33} \quad (5.35)$$

Используя первый из инвариантов (5.35) и (5.28), (5.29), получим из (5.34):

$$Y(t) = \frac{1-\lambda}{S_{11}^*(t)} \quad (5.36)$$

Для второго из инвариантов (5.35) имеем:

$$Y_1(t) = \frac{1+\lambda}{S_{11}^*(t)} \quad (5.37)$$

и, наконец, для последнего:

$$Y_4(t) = \frac{2}{S_{11}^*(t)} \quad (5.38)$$

Для напряжённого состояния, соответствующего простому растяжению в направлении оси x_3, имеем отличными от нуля компоненты тензора $\underset{\sim}{\chi}$:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_{11} &= \tilde{\chi} = \breve{Y}_2 \overset{0}{\sigma} = \breve{Y}_2 \sigma_{33} \\
\chi_{22} &= \tilde{\chi} = \breve{Y}_2 \overset{0}{\sigma} = \breve{Y}_2 \sigma_{33} \\
\chi_{33} &= \overset{0}{\chi} = \breve{Y}_3 \overset{0}{\sigma} = \breve{Y}_3 \sigma_{33}
\end{aligned}\right\} \quad (5.39)$$

Эти компоненты входят в инварианты:

$$\tilde{\chi} = \frac{\chi_{11} + \chi_{22}}{2}, \quad \overset{0}{\chi} = \chi_{33} \quad (5.40)$$

поэтому имеем из (5.29):

$$Y_3(t) = \frac{1}{S_{33}^*(t)}, \quad \breve{Y}_2(t) = \frac{1+\lambda}{2S_{33}^*(t)} \quad (5.41)$$

Итак, формулами (5.33), (5.36)-(5.38),(5.40),(5.41) определены все ядра, являющиеся материальными функциями операторов (5.7), (5.8), а значит, определены все ядра, описывающие операторные соотношения (5.11).

Заметим, что для ядра ползучести $Y(t)$ имеется два определения: (5.33) и (5.36). Следовательно, согласно рассматриваемой теории, экспериментально определяемые функции $S^*_{11}(t)$, $S^*_{12}(t)$ - подобны:

$$S^*_{11}(t) = (1-\lambda) S^*_{12}(t) \quad (5.42)$$

При этом постоянная λ вполне определена из сопоставления $S^*_{11}(t)$, $S^*_{12}(t)$. Если эксперимент не подтверждает подобия (5.42), то мера $\phi \le C_1$ применительно к случаю простого растяжения не зависит от χ_{22} (или может быть заменена на более общую).

6. Полярная среда, т.е. среда, в которой учитываются моментные напряжения, будет введена нами далее различными способами. Однако формально мы будем считать моментные напряжения тензором второго ранга $\underset{\sim}{\mu}$, для которого справедливы определяющие соотношения операторного вида (3.1, 3.2).

Для конкретизации этих определяющих соотношений мы можем использовать соотношения типа (4.1). Например,

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = &\int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau + \\
&+ \int_0^t \gamma_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau + \\
&+ \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau + \\
&+ \int_0^t \nu_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau
\end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\mu_{ij}=\int_0^t \Gamma'_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau+ \\ +\int_0^t \gamma'_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau+ \\ +\int_0^t V'_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau+ \\ +\int_0^t v'_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau \qquad (6.2)$$

При этом для тензоров повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}, \underset{\sim}{\chi}'$ (2.6) в соответствии с выбранным частным случаем (4.2), запишем

$$\chi_{ij}=\int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau+\int_0^t x_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau \qquad (6.3)$$

$$\chi'_{ij}=\int_0^t X'_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau+\int_0^t \chi'_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau \qquad (6.4)$$

Как и в пункте 4 мы будем использовать сокращённые (операторные) обозначения для записи соотношений типа (6.1)-(6.4):

$$\sigma_{ij}=\breve{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl}+\breve{\gamma}_{ijkl}\kappa^T_{kl}+\breve{V}_{ijkl}\chi_{kl}+\breve{v}_{ijkl}\chi'_{kl} \qquad (6.1)'$$

$$\mu_{ij}=\Gamma'_{ijkl}\chi^T_{kl}+\gamma'_{ijkl}\varepsilon^T_{kl}+V'_{ijkl}\chi'_{kl}+v'_{ijkl}\chi_{kl} \qquad (6.2)'$$

$$\chi_{ij}=\breve{X}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl}+\breve{x}_{ijkl}\breve{\kappa}^T_{kl} \qquad (6.3)'$$

$$\chi_{ij}=\breve{X}'_{ijkl}\kappa^T_{kl}+\breve{x}'_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \qquad (6.4)'$$

Как и в случае пункта 4, мы можем записать $(6.1)'-(6.4)'$ в виде

$$\sigma_{ij}=\breve{S}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl}+\breve{s}_{ijkl}\kappa^T_{kl} \qquad (6.5)$$

$$\mu_{ij}=\breve{S}'_{ijkl}\kappa^T_{kl}+\breve{s}'_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \qquad (6.6)$$

где

$$\breve{S}_{ijkl}=\breve{\Gamma}_{ijkl}+\breve{V}_{ijmn}\breve{X}_{mnkl} \qquad (6.7)$$

$$\breve{S}'_{ijkl}=\breve{\Gamma}'_{ijkl}+\breve{V}'_{ijmn}\breve{X}'_{mnkl} \qquad (6.8)$$

$$\breve{s}_{ijkl}=\breve{\gamma}_{ijkl}+\breve{v}_{ijmn}\breve{x}_{mnkl} \qquad (6.9)$$

$$\breve{s}'_{ijkl}=\breve{\gamma}'_{ijkl}+\breve{v}'_{ijmn}\breve{x}'_{mnkl} \qquad (6.10)$$

Определяющие соотношения (6.5), (6.6) будем считать обратными:

$$\varepsilon^T_{ij}=\breve{Q}_{ijkl}\sigma_{kl}+\breve{q}_{ijkl}\mu_{kl} \qquad (6.11)$$

$$\chi^T_{ij}=Q'_{ijkl}\mu_{kl}+q'_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad (6.12)$$

где в случае, если рассматриваются разностные ядра (т.е. умножение операторов коммутативно)

$$\breve{Q}_{ijkl}=\breve{R}_{ijmn}\breve{S}'_{mnkl},\ \breve{Q}'_{ijkl}=\breve{R}_{ijmn}\breve{S}_{mnkl},$$
$$\breve{q}_{ijkl}=-\breve{R}_{ijmn}\breve{s}_{mnkl},\ \breve{q}'_{ijkl}=-\breve{R}_{ijmn}\breve{s}'_{mnkl} \qquad (6.13)$$

а оператор $\breve{R}_{ijkl}$ является обратным к оператору $\breve{S}_{ijmn}\breve{S}'_{mnkl}-\breve{s}_{ijmn}\breve{s}'_{mnkl}$, т.е.

$$\breve{R}_{ijmn}(\breve{S}_{mnpq}\breve{S}'_{pqkl}-\breve{s}_{mnpq}\breve{s}'_{pqkl})=\Delta_{ijkl} \qquad (6.14)$$

Будем считать, что операторы $\breve{Q}_{ijkl}, \breve{Q}'_{ijkl}, \breve{q}_{ijkl}, \breve{q}'_{ijkl}$ в соответствии с (4.14) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\breve{Q}_{ijkl}&=\breve{K}_{ijkl}+\breve{A}_{ijmn}\breve{Y}_{mnkl}\\ \breve{Q}'_{ijkl}&=\breve{K}'_{ijkl}+\breve{A}'_{ijmn}\breve{Y}'_{mnkl}\\ \breve{q}_{ijkl}&=\breve{k}_{ijkl}+\breve{a}_{ijmn}\breve{y}_{mnkl}\\ \breve{q}'_{ijkl}&=\breve{k}'_{ijkl}+\breve{a}'_{ijmn}\breve{y}'_{mnkl}\end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

при этом справедливы определяющие соотношения вида (4.13)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^T_{ij}&=\breve{K}_{ijkl}\sigma_{kl}+\breve{k}_{ijkl}\mu_{kl}+\breve{A}_{ijkl}\chi_{kl}+\breve{a}_{ijkl}\chi'_{kl}\\ \kappa^T_{ij}&=\breve{K}'_{ijkl}\mu_{kl}+\breve{k}'_{ijkl}\sigma_{kl}+\breve{A}'_{ijkl}\chi'_{kl}+\breve{a}'_{ijkl}\chi_{kl}\end{aligned}\right\}(6.16)$$

а тензоры повреждаемости χ_{ij}, χ'_{ij} связаны с тензорами напряжений и моментных напряжений соотношениями

$$\chi_{ij}=\breve{Y}_{ijkl}\sigma_{kl}+\breve{y}_{ijkl}\mu_{kl}\ ,$$
$$\chi'_{ij}=Y'_{ijkl}\mu_{kl}+\breve{y}'_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (6.17)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать трансверсально изотропную среду. Введём разложения, аналогичные (5.1)-(5.3) для тензоров μ_{ij}, χ_{ij}, χ'_{ij}

$$\mu_{ij}=\tilde{\mu}\gamma_{ij}+\overset{0}{\mu}l_i l_j+M_{ij}+2N_{ij}\ ,$$
$$\kappa_{ij}=\tilde{\kappa}\gamma_{ij}+\overset{0}{\kappa}l_i l_j+u_{ij}+2v_{ij} \quad (6.18)$$
$$\chi'_{ij}=\tilde{\chi}\gamma_{ij}+\tilde{\chi}'\,l_i l_j+\phi_{ij}+2\Psi_{ij} \quad (6.19)$$

и соответствующие инварианты $\tilde{\mu}$, $\overset{0}{\mu}$, M, N; $\tilde{\kappa}$, $\overset{0}{\kappa}$, u, v; $\tilde{\chi}'$, $\overset{0}{\chi}{}'$, ϕ', Ψ'. Тогда определяющие соотношения (6.10) для этого случая можно записать в виде

$$p_{ij}=\breve{K}P_{ij}+\breve{k}M_{ij}+\breve{A}\phi_{ij}+\breve{a}\phi'_{ij} \quad (6.21)$$
$$u_{ij}=\breve{K}'M_{ij}+\breve{k}'P_{ij}+\breve{A}'\phi'_{ij}+\breve{a}'\phi_{ij} \quad (6.22)$$
$$q_{ij}=\breve{L}Q_{ij}+\breve{l}N_{ij}+\breve{B}\Psi_{ij}+\breve{b}\Psi'_{ij} \quad (6.23)$$
$$v_{ij}=\breve{L}'N_{ij}+\breve{l}'Q_{ij}+\breve{B}'\Psi'_{ij}+\breve{b}'\Psi_{ij} \quad (6.24)$$

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{\theta}^T&=\breve{K}_1\tilde{\sigma}+\breve{K}_2\overset{0}{\sigma}+\breve{k}_1\tilde{\mu}+\breve{k}_2\overset{0}{\mu}+\\ &\quad+\breve{A}_1\tilde{\chi}+\breve{A}_2\overset{0}{\chi}+\breve{a}_1\tilde{\chi}'+\breve{a}_2\overset{0}{\chi}{}'\\ \tilde{\varepsilon}^T&=\breve{K}_2\tilde{\sigma}+\breve{K}_3\overset{0}{\sigma}+\breve{k}_2\tilde{\mu}+\breve{k}_3\overset{0}{\mu}+\\ &\quad+\breve{A}_2\tilde{\chi}+\breve{A}_3\overset{0}{\chi}+\breve{a}_2\tilde{\chi}'+\breve{a}_3\overset{0}{\chi}{}'\end{aligned}\right. \quad (6.25)$$

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{\kappa}&=\breve{K}'_1\tilde{\mu}+\breve{K}'_2\overset{0}{\mu}+\breve{k}'_1\tilde{\sigma}+\breve{k}'_2\overset{0}{\sigma}+\\ &\quad+\breve{A}'_1\tilde{\chi}'+\breve{A}'_2\overset{0}{\chi}{}'+\breve{a}'_1\tilde{\chi}+\breve{a}'_2\overset{0}{\chi}\\ \overset{0}{\kappa}&=\breve{K}'_2\mu+\breve{K}'_3\overset{0}{\mu}+\breve{k}'_2\tilde{\sigma}+\breve{k}'_3\overset{0}{\sigma}+\\ &\quad+\breve{A}'_2\tilde{\chi}'+\breve{A}'_3\overset{0}{\chi}{}'+\breve{a}'_2\tilde{\chi}+\breve{a}'_3\overset{0}{\chi}\end{aligned}\right. \quad (6.26)$$

Тензоры повреждаемости χ_{ij}, χ'_{ij} выражаются через тензоры напряжений и моментных напряжений следующим образом

$$\phi_{ij}=\breve{Y}P_{ij}+\breve{y}M_{ij},\ \Psi_{ij}=\breve{Z}Q_{ij}+\breve{z}N_{ij} \quad (6.27)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\chi}&=\breve{Y}_1\tilde{\sigma}+\breve{Y}_2\overset{0}{\sigma}+\breve{y}_1\tilde{\mu}+\breve{y}_2\overset{0}{\mu}\\ \overset{0}{\chi}&=\breve{Y}_4\tilde{\sigma}+\breve{Y}_3\overset{0}{\sigma}+\breve{y}_4\tilde{\mu}+\breve{y}_3\overset{0}{\mu}\end{aligned}\right\} \quad (6.28)$$

$$\phi'_{ij}=\breve{Y}'M_{ij}+\breve{y}'P_{ij};\ \Psi'_{ij}=\breve{Z}'N_{ij}+\breve{z}'Q_{ij} \quad (6.29)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\chi}'&=\breve{Y}'_1\tilde{\mu}+\breve{Y}'_2\overset{0}{\mu}+\breve{y}'_1\tilde{\sigma}+\breve{y}'_2\overset{0}{\sigma}\\ \overset{0}{\chi}{}'&=\breve{Y}'_4\tilde{\mu}+\breve{Y}'_3\overset{0}{\mu}+\breve{y}'_4\tilde{\sigma}+\breve{y}'_3\overset{0}{\sigma}\end{aligned}\right\} \quad (6.30)$$

Зададим меры повреждаемости (2.2) $M_m(\chi, \chi')$ как функции инвариантов, тензоров повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}, \underset{\sim}{\chi}'$. Следуя [12] образуем суммарный тензор повреждаемости

$$\chi''_{ij}=\chi_{ij}+\chi'_{ij} \quad (6.31)$$

Образуем его инварианты

$$\tilde{\chi}'',\ \overset{0}{\chi}{}'',\ \phi'',\ \Psi'' \quad (6.32)$$

и выберем критерий прочности в виде

$$M_m(\tilde{\chi}'',\overset{0}{\chi}{}'',\phi'',\Psi'')\le C_m \quad (6.33)$$

Как частный случай, рассмотрим (6.33) в виде, аналогичном критерию (5.28):

$$\phi^{//} \le C_1 , \Psi^{//} \le C_2 , \tilde{\chi} \le C_3 , \overset{0}{\chi} \le C_4 \quad (6.34)$$

Определяющие соотношения (6.21)-(6.26) с учётом соотношений (6.27)-(6.30), написанных как обобщение соотношений (5.9), (5.10), запишем в виде

$$p_{ij} = \breve{Q} P_{ij} + \breve{q} M_{ij} ; \; q_{ij} = \breve{R} Q_{ij} + \breve{r} N_{ij} \quad (6.35)$$

$$u_{ij} = \breve{Q}^{/} M_{ij} + \breve{q}^{/} P_{ij} ; \; v_{ij} = \breve{R}^{/} N_{ij} + \breve{r}^{/} Q_{ij} \quad (6.36)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\theta}^T &= \breve{Q}_1 \tilde{\sigma} + \breve{Q}_2 \overset{0}{\sigma} + \breve{q}_1 \tilde{\mu} + \breve{q}_2 \overset{0}{\mu} \\ \overset{0}{\varepsilon}^T &= \breve{Q}_4 \tilde{\sigma} + \breve{Q}_3 \overset{0}{\sigma} + \breve{q}_4 \tilde{\mu} + \breve{q}_3 \overset{0}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad (6.37)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\kappa}^T &= \breve{Q}^{/}_1 \tilde{\mu} + \breve{Q}^{/}_2 \overset{0}{\mu} + \breve{q}^{/}_1 \tilde{\sigma} + \breve{q}^{/}_2 \overset{0}{\sigma} \\ \overset{0}{\kappa}^T &= \breve{Q}^{/}_4 \tilde{\mu} + \breve{Q}^{/}_3 \overset{0}{\mu} + \breve{q}^{/}_4 \tilde{\sigma} + \breve{q}^{/}_3 \overset{0}{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad (6.38)$$

Чтобы найти экспериментально ядра ползучести, соответствующие операторным определяющим соотношениям (6.21)-(6.26), (6.35)-(6.38), необходимо реализовать процессы ползучести при неоднородном напряжённом состоянии, например, вида [12]

$$\sigma_{ij} = \beta \bar{\sigma}_{ij}(\vec{x}) h(t) ; \; \mu_{ij} = \beta \bar{\mu}_{ij}(\vec{x}) h(t) \quad (6.39)$$

где σ_{ij} ; μ_{ij} кие-нибудь известные функции координат $\vec{x}$ точки тела; t - параметр характеризующий интенсивность нагрузки.

Разумеется, описанные в предыдущем пункте эксперименты, в которых не учитывается влияние моментных напряжений, остаются в силе. Другими словами, все ядра ползучести, обозначаемые большими нештрихованными латинскими буквами, считаем известными.

Положим для простоты, что перекрёстные эффекты в определении тензоров повреждаемости, отсутствуют. Другими словами, пусть отсутствуют операторы $\breve{y}_{ijkl}$ и $\breve{y}^{/}_{ijkl}$ в (6.17), а значит, отсутствуют в выражениях (6.27)-(6.30) все операторы, обозначаемые нами малыми латинскими буквами: $y, y_1, ..., y_n, z$; $y^{/}, y^{/}_1, ..., y^{/}_4, z^{/}$.

Рассмотрим для примера процесс (6.3*), в котором отличные от нуля будут только компоненты с индексами (13):

$$\sigma_{13} = \beta \bar{\sigma}_{13}(\vec{x}) h(t); \mu_{13} = \beta \bar{\mu}_{13}(\vec{x}) h(t) \quad (6.40)$$

Используем (6.27), (6.29) и (5.31). Тогда очевидно

$$\chi_{13} = \bar{\sigma}_{13} \frac{\beta}{S^*_{13}(t)} \quad , \quad \chi^{/}_{13} = \bar{\mu}_{13} \beta z^{/}(t) \quad (6.41)$$

И мы имеем из (6.34)

$$\chi^{//}_{13} \equiv \chi_{13} + \chi^{/}_{13} \; ; \quad \Psi^{//} = \chi^{//}_{13} = C_2 \quad (6.42)$$

В эксперименте (6.40) мы установим некоторую точку $\vec{x}_{(1)}$, в которой впервые будет происходить разрушение. Тогда для каждого числового значения параметра нагружения $\beta = \beta_{13}$ будет определено время разрушения t^*, т. е. будет найдена функция

$$\beta_{13} = f_{13}(t^*) \quad (6.43)$$

Внося это значение в (6.41) и принимая во внимание нормировку (5.29):

$$\chi^{//}_{11} = 1, \chi^{//}_{12} = 1, \chi^{//}_{13} = 1, \chi^{//}_{33} = 1, \chi^{//}_{22} = \lambda^{/} \quad (6.44)$$

получим из (6.42) искомое ядро

$$z^{/}(t) = \frac{1}{\bar{\mu}_{13} f_{13}(t)} - \frac{\bar{\sigma}_{13}}{\bar{\mu}_{13}} \frac{1}{S^*_{13}(t)} \quad (6.45)$$

Рассмотрим теперь напряжённое состояние

$$\sigma_{12} = \beta \bar{\sigma}_{12}(\vec{x}) h(t) \; , \; \mu_{12} = \beta \bar{\mu}_{12}(\vec{x}) h(t) \quad (6.46)$$

В этом случае мы имеем из (6.27), (6.29):

$$\chi_{12}=\bar{\sigma}_{12}\frac{\beta}{S^*_{12}(t)}\ ,\quad \chi'_{12}=\bar{\mu}_{12}\beta Y'(t) \qquad (6.47)$$

откуда после применения критерии прочности, находим

$$Y'(t)=\frac{1}{\bar{\mu}_{12}f_{12}(t)}-\frac{\bar{\sigma}_{12}}{\bar{\mu}_{12}}\frac{1}{S^*_{12}(t)} \qquad (6.48)$$

Рассмотрим теперь растяжение в направление оси x_1 :

$$\sigma_{11}=\beta\bar{\sigma}_{11}(\vec{x})h(t)\ ,\quad \mu_{11}=\beta\bar{\mu}_{11}(\vec{x})h(t) \qquad (6.49)$$

Тогда получаем в соответствии с (5.34), (5.36) и (5.37)

$$\left.\begin{aligned}
&\chi_{11}=\bar{\sigma}_{11}\frac{\beta}{S^*_{11}(t)},\chi'_{11}=\frac{\beta}{2}\bar{\mu}_{11}\left[Y'(t)+Y'_1(t)\right]\\
&\chi_{22}=\bar{\sigma}_{11}\beta\frac{\lambda}{S^*_{11}(t)},\chi'_{22}=\frac{\beta}{2}\bar{\mu}_{11}\left[-Y'(t)+Y'_1(t)\right]\\
&\chi_{33}=\bar{\sigma}_{11}\beta\frac{1}{S^*_{11}(t)},\chi'_{33}=\frac{\beta}{2}\bar{\mu}_{11}Y'_4(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (6.50)$$

Образуем инварианты тензора $\underset{\sim}{\chi}{}''$, по аналогии с (5.35)

$$\phi''=\frac{k}{2}\left|\chi_{11}-\chi_{22}+\chi'_{11}-\chi'_{22}\right|=$$
$$=\left|\frac{(1-\lambda)\beta\bar{\sigma}_{11}}{S^*_{11}(t)}+\beta\bar{\mu}_{11}Y'(t)\right| \qquad (6.51)$$

$$\tilde{\chi}''=\frac{1}{2}\left(\chi_{11}+\chi_{22}+\chi'_{11}+\chi'_{22}\right)=$$
$$=\frac{(1+\lambda)\beta}{S^*_{11}(t)}\bar{\sigma}_{11}+\beta\bar{\mu}_{11}Y'_1(t) \qquad (6.52)$$

$$\overset{0}{\chi}=\chi_{33}+\chi'_{33}=\frac{\beta\bar{\sigma}_{11}}{S^*_{11}(t)}+\frac{\beta}{2}\bar{\mu}_{11}Y'_4(t) \qquad (6.53)$$

учитывая значение β при разрушении образца

$$\beta_{11}=f_{11}(t^*) \qquad (6.54)$$

получим из (6.51)-(6.53), принимая во внимание условия нормировки

$$Y'(t)=\frac{(1-\lambda')}{\bar{\mu}_{11}}\frac{1}{f_{11}(t)}-\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\mu}_{11}}\frac{(1-\lambda)}{S^*_{11}(t)} \qquad (6.55)$$

$$Y'_1(t)=\frac{1+\lambda'}{\bar{\mu}_{11}}\frac{1}{f_{11}(t)}-\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\mu}_{11}}\frac{(1+\lambda)}{S^*_{11}(t)} \qquad (6.56)$$

$$Y'_4(t)=\frac{2}{\bar{\mu}_{11}}\frac{1}{f_{11}(t)}-\frac{2\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\mu}_{11}}\frac{1}{S^*_{11}(t)} \qquad (6.57)$$

Для напряжённого состояния, соответствующего простому растяжению в направлении оси x_3 , имеем по аналогии с (5.39)-(5.41)

$$Y'_3(t)=\frac{1}{\bar{\mu}_{33}f_{33}(t)}-\frac{\bar{\sigma}_{33}}{\bar{\mu}_{33}}\frac{1}{S^*_{33}(t)} \qquad (6.58)$$

$$Y'_2(t)=\frac{1+\lambda'}{2\bar{\mu}_{33}}\frac{1}{f_{33}(t)}-\frac{\bar{\sigma}_{33}}{2\bar{\mu}_{33}}\frac{1+\lambda}{S^*_{33}(t)} \qquad (6.59)$$

И в этом случае для ядра ползучести $Y'(t)$ имеется два определения: (6.48) и (6.55), откуда следует соотношение, связывающее экспериментальные функции $f_{11}(t)$, $f_{22}(t)$:

$$\frac{1-\lambda'}{\bar{\mu}_{11}}\frac{1}{f_{11}(t)}=\frac{1}{\bar{\mu}_{12}f_{12}(t)}+\varphi\frac{1}{S^*_{12}(t)} \qquad (6.60)$$

где

$$\varphi=\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\mu}_{11}}-\frac{\bar{\sigma}_{12}}{\bar{\mu}_{12}} \qquad (6.61)$$

При $\varphi=0$ функции $f_{11}(t), f_{22}(t)$ будут пропорциональными

$$f_{11}(t) = (1-\lambda')\frac{\bar{\mu}_{12}}{\bar{\mu}_{11}} \qquad (6.62)$$

Заметим, что величина λ' вполне определена сопоставлением экспериментов (6.54) и $\beta_{12} = f_{12}(t^*)$.

Таким образом, указан путь для нахождения всех необходимых ядер ползучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Победря Б.Е.** Проблемы механики нанокомпозитов. Труды международной конференции «Неклассические задачи механики». Том 1. Кутаиси.2007. С. 68-71.
2. **Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. **Качанов Л.М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
4. **Кишкин Б.П.** Конструкционная прочность материалов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 184 с.
5. **Ильюшин А.А., Победря Б.Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. **Robinson E.L.** Effect of temperature variation on the long rupture strength of steels. //Tr. ASME. 1952. V.74. № 5. P. 27-31.
7. **Сдобырев В.П.** Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряжённом состоянии. // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. 1959. №6. С. 66-73.
8. **Трунин И.И.** Критерий прочности в условиях ползучести. // Прикладная механика. 1965. №7. С. 27-36.
9. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука,1979. 744 с.
10. **Победря Б.Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
11. **Победря Б.Е.** О термодинамических критериях прочности в механике композитов. Проблемы механики твёрдого деформируемого тела. Сб. статей к 75-летию Е.И.Шемякина. М.: Физматлит. 2005, №3, с. 545-568.
12. **Cosserat E.&F.** Theorie des corpes deformables. Paris: Herman et Files. 1909.
13. **Ильюшин А.А.** Об одной теории длительной прочности. // Изв. АН СССР.МТТ. 1967. № 3. С. 15-22.
14. **Победря Б.Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 365 с.
15. **Победря Б.Е., Омаров С.Е.** Определяющие соотношения моментной теории упругости. Вестн. МГУ. Серия Математика и механика. 2007, №3, с.56-58.
16. **Победря Б.Е., Омаров С.Е.** Определение материальных функций линейной моментной теории вязкоупругости. Вестн. МГУ. Серия Математика и механика. 2007, №5, с.36-41.
17. **Победря Б.Е.** Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ. 1986. 264 с.

Победря Борис Ефимович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики композитов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, E-mail: pobedria@mech.math.msu.su, pobedria@rector.msu.ru, pobedria@member.ams.org.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 5(1&2) 152-160 (2009)

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ И МАСС КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

О.Л. Рудых, В.А. Быркanов
Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье, используя программный комплекс (ПК) Maple, получены матрицы жёсткости и масс одномерных конечных элементов (КЭ) высоких порядков (квадратичного, кубического и четвёртого порядка). Используя полученные матрицы, выполнено определение частот собственных продольных колебаний, используя ПК Maple. Результаты расчётов показали, что точные значения частот собственных продольных колебаний находятся для КЭ высоких порядков при меньшем числе КЭ.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрицы жёсткости, матрицы масс, программные комплексы, продольные колебания, конечные элементы высоких порядков, определение частот собственных колебаний.

APPLYING OF THE STIFFNESS MATRIX AND MASS MATRIX OF FINITE ELEMENTS OF HIGH ORDER FOR DETERMINATION OF THE FREQUENCIES OF NATURAL LONGITUDINAL OSCILLATIONS

Oleg L. Rudykh, Vladimir A. Byrkanov
Far Eastern State Transport University, Khabarovsk, Russia

ABSTRACT: In this work, using programmed complex (PC) Maple, stiffness matrix and mass matrix of a linear finite elements (FE) of high order (square-law, cubic and the fourth order) are received. Using obtained matrixes, the determination of the frequencies of natural longitudinal oscillations using PC Maple was done. The results of calculation have shown that proper values of the frequencies of natural longitudinal oscillations are found for FE high order under smaller number of FE.

Keywords: finite element method, stiffness matrix, mass matrix, programmed complexes, longitudinal fluctuations, finite elements of high order, determination of the frequencies of natural longitudinal oscillations.

Цель методов суперэлементов (МСЭ) и редуцированных элементов (МРЭ) [1, 2] состоит в уменьшении порядка системы алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ). Понимание механизма этих методов даёт ключ систематическому улучшению их точности. При этом для повышения эффективности методов конденсации и редуцирования неизвестных при решении задач динамики сооружений методами МСЭ и МРЭ следует более глубоко изучить исходные матрицы жёсткости (МЖ) и масс (ММ) конечных элементов (КЭ) используемые при реализации МКЭ [3].

Рассмотрим стержень, испытывающий продольные колебания (рис. 1). Для этого стержня найдем частоту собственных продольных колебаний МКЭ.

Для данной задачи есть точные значения собственных частот, полученные из точного решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих продольные колебания. Их можно определить по формуле [4]:

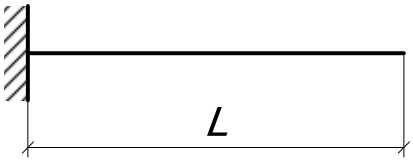


Рис. 1. Схема стержня испытывающего продольные колебания

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{EA}{m}} \qquad (1)$$

где n – номер частоты собственных колебаний; L – длина стержня; EA – жёсткость стержня при растяжении-сжатии; m - погонная масса стержня.

Частоты собственных колебаний в стержне представим в виде

$$\omega_n = \frac{k_n}{L}\sqrt{\frac{EA}{m}}, \qquad (2)$$

где k_n – коэффициент, получаемый при приближенном определении n – частоты собственных колебаний.

Система линейных алгебраических уравнений МКЭ в динамике сооружений (для упрощения без учёта сил демпфирования) имеет вид:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{p\}, \qquad (3)$$

где $[M]$ - ММ системы; $[K]$ – МЖ системы; $\{q\}$ – вектор неизвестных; $\{p\}$ – вектор нагрузки.

Проблема собственных значений для системы уравнений (3) находится из уравнений

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \qquad (4)$$

где ω - частоты собственных колебаний, определяемые порядком ММ.

Для системы, представленной на рис. 1, МЖ для линейного стержневого КЭ работающего на растяжение-сжатие имеет вид

$$K_i = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где ℓ - длина КЭ.

В динамике сооружений для приближенного определения частот собственных колебаний часто применяют способ приведенной массы и метод переноса масс [5]. В МКЭ эти два подхода реализуются в ММ линейного стержневого КЭ, как методы распределённых масс и сосредоточенных масс [5], и соответственно имеют вид

$$M_i = \frac{m\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

$$M_i = \frac{m\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где m – распределённая погонная масса стержня.

В табл. 1 приведены результаты расчетов МКЭ методом сосредоточенных масс и методом распределённых масс. Как видно, при вычислениях собственных частот низкого порядка МКЭ способ сосредоточенных масс дает погрешность в меньшую сторону, а способ распределённых масс – в большую, при чем погрешности эти почти равны, отличаются лишь знаком. Для получения более точного решения нами в работе [6] предложена комбинированная ММ

$$M_i = \alpha\frac{m\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\frac{m\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где α - весовой коэффициент.

Если принять $\alpha = 0{,}5$, то комбинированная ММ КЭ имеет вид

Таблица 1

Сопоставление величин частот собственных колебаний при продольных колебаниях

Схема дискретизации	Число КЭ	Значение коэффициента k_n в формуле 2 (точное значение)	Значение коэффициента k_n в формуле 2 (способ сосредоточенных масс)	Погрешность, %	Значение коэффициента k_n в формуле 2 (способ приведенных масс)	Погрешность, %	Значение коэффициента k_n в формуле 2 (комбинированный способ)	Погрешность, %
	1	$k_1 = 1{,}57$	$k_1 = \sqrt{2}$	-10,0	$k_1 = \sqrt{3}$	10,0	$k_1 = 1{,}57$	-0,18
	2	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}71$	$k_1 = 1{,}531$ $k_2 = 3{,}696$	-2,6 -21,6	$k_1 = 1{,}611$ $k_2 = 5{,}629$	+2,6 +19,5	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}37$	-0,08 -7,3
	3	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}71$ $k_3 = 7{,}85$	$k_1 = 1{,}553$ $k_2 = 4{,}243$ $k_3 = 5{,}796$	-1,1 -10 -26,2	$k_1 = 1{,}589$ $k_2 = 5{,}196$ $k_3 = 9{,}427$	+1,1 +10,3 +20,0	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}65$ $k_3 = 6{,}98$	-0,016 -1,375 -11,1
	4	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}71$ $k_3 = 7{,}85$ $k_4 = 11{,}0$	$k_1 = 1{,}561$ $k_2 = 4{,}445$ $k_3 = 6{,}652$ $k_4 = 7{,}846$	-0,6 -5,7 -15,3 -28,6	$k_1 = 1{,}581$ $k_2 = 4{,}987$ $k_3 = 9{,}059$ $k_4 = 13{,}1$	+0,6 +5,8 +15,3 +19,1	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}69$ $k_3 = 7{,}58$ $k_4 = 9{,}52$	-0,005 -0,42 -3,46 -13,42
	5	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}71$ $k_3 = 7{,}85$ $k_4 = 11{,}0$ $k_5 = 14.14$	$k_1 = 1{,}564$ $k_2 = 4{,}54$ $k_3 = 7{,}071$ $k_4 = 8{,}91$ $k_5 = 9{,}877$	-0,4 -3,7 -10 -19 -30	$k_1 = 1{,}577$ $k_2 = 4{,}889$ $k_3 = 8{,}66$ $k_4 = 12{,}986$ $k_5 = 16{,}703$	+0,4 +3,7 +10,3 +18,1 +18,1	$k_1 = 1{,}57$ $k_2 = 4{,}704$ $k_3 = 7{,}746$ $k_4 = 10{,}39$ $k_5 = 12{,}02$	-0,002 -0,17 -1,38 -5,5 -14,95

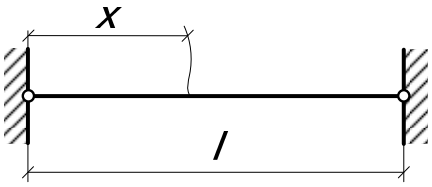


Рис. 2. Схема конечного элемента

Таблица 2

Влияние числа и типа КЭ на точность определения частоты продольных колебаний и на увеличение машинного времени

Число КЭ	Машинное время (способ приведенных масс), мс	Погрешность при определении ω_1 способом приведенных масс, %	Машинное время (комбинированный метод), мс	Погрешность при определении ω_1 комбинированным методом, %
1	0,093	10	0,102	0,18
2	0,218	2,6	0,24	0,08
3	0,281	1,1	0,309	0,016
4	0,562	0,6	0,618	0,005
5	0,639	0,4	0,703	0,002
6	1,029	0,3	1,132	0,001
10	4,051	0,1	4,456	0,0003

$$M_i = \frac{m\ell}{6}\begin{bmatrix} 2,5 & 0,5 \\ 0,5 & 2,5 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

В табл. 2 приведено влияние числа КЭ на точность приближенного решения при определении первой частоты продольных колебаний и затраты машинного времени для примера, представленного на рис. 1, при использовании Maple 9.

Из анализа табл. 2 видно, что погрешность в определении первой частоты собственных продольных колебаний в стержне при использовании комбинированной ММ КЭ (формула 9) уменьшается почти в сотню раз по отношению к обычно используемым ММ в приближенных методах определения первой частоты собственных колебаний. При этом решение оказывается достаточно близким к точному решению (погрешность при одном КЭ 0,18%), а машинное время решения задачи о собственных значениях не увеличивается по сравнению с обычно используемыми приближенными методами.

Рассмотрим получение МЖ и ММ для одномерных КЭ высоких порядков с помощью ПК Maple испытывающей только продольные деформации.

Выбираем полиномиальную функцию, которая должна отвечать следующим требованиям:

а) обеспечивать условия непрерывности перемещений в узлах, вдоль границ между элементами и в пределах элементов;
б) быть линейно-независимой функцией;
в) обладать необходимой полнотой, т.е. быть достаточное число раз дифференцируемой;
г) иметь столько членов, какова степень свободы КЭ.

Примем интерполяционный полином (линейный, квадратный, кубический и т.д.) в виде:

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1}, \qquad (10)$$

где z – перемещение внутри КЭ; α_i – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий КЭ. Выражение (10) в матричной форме имеет вид:

$$z_n = \left[\widetilde{\mathrm{A}}\right]\cdot\{\alpha\}, \qquad (11)$$

где z_n – перемещение в n-ой точке внутри КЭ; $\{\alpha\}^m = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n]$ – вектор неизвестных коэффициентов; $\left[\widetilde{\mathrm{A}}\right] = \left[1\ x\ \ldots\ x^n\right]$ – интерполяционная матрица (коэффициенты ее являются функциями координат элемента).

Для определения элементов вектора $\{\alpha\}$ выражение (11) запишем для узловых и промежуточных точек прямолинейного КЭ (рис. 2):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{n} & \cdots & \left(\frac{l}{n}\right)^n \\ 1 & \frac{2l}{n} & \cdots & \left(\frac{2l}{n}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & l & \cdots & l^n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}, \qquad (12)$$

или в матричной форме:

$$\{z\} = \left[\mathrm{A}\right]\cdot\{\alpha\}. \qquad (13)$$

Из выражения (13) вектор $\{\alpha\}$ равен:

$$\{\alpha\} = \left[\mathrm{A}\right]^{-1}\cdot\{z\}. \qquad (14)$$

Аппроксимирующие матрицы [N] и [B] найдем по формулам:

$$[N] = \left[\widetilde{\mathrm{A}}\right]\cdot\left[\mathrm{A}\right]^{-1}; \qquad (15)$$

$$[B] = \frac{\partial\left[\widetilde{\mathrm{A}}\right]}{\partial x}\cdot\left[\mathrm{A}\right]^{-1}. \qquad (16)$$

МЖ и ММ КЭ можно найти интегрированием:

$$[K] = \int_0^l [B]^{\mathrm{T}}\cdot EA\cdot[B]\cdot dx; \qquad (17)$$

$$[M] = \int_0^l [N]^{\mathrm{T}}\cdot \rho A\cdot[N]\cdot dx. \qquad (18)$$

Используя формулы (10) – (18), получаем в Maple 9 МЖ и ММ КЭ для различных аппроксимирующих функций (линейная, квадратичная, кубическая, четвёртой степени) матрицы функций формы [N] и её производных [B] (табл. 3) и МЖ и ММ (табл. 4).

Используя полученные матрицы, были проведены расчеты собственных частот колебаний стержня при разных типах и количестве КЭ. Результаты расчета сопоставлены с точным решением.

Результаты решения задачи с матрицами, полученными с помощью линейных интерполяционных функций, рассмотрены в работе автора [4].

В табл. 5 приведены результаты решения задачи с матрицами, полученными с помощью интерполяционных функций разного порядка. Также приведено затраченное на вычисления процессорное время при точности расчета 10^{-10}, на одноядерном процессоре Pentium IV 2.4 ГГц с памятью 1 Гб.

Обращаясь к табл. 5, можно увидеть, что для достижения точности в 0,026% необходимо 20 линейных КЭ или 2 квадратичных (один кубический элемент дает еще большую точность), при этом затрачивается в 44 раза меньше машинного времени (кубический в 80).

При незначительном увеличении затрат машинного времени точность увеличивается в сотни раз. Таким образом, при сопоставимой точности КЭ с разными интерполяционными функциями (например, линейная и квадратичная аппроксимации) по времени уже выигрывает более сложная интерполяция (квадратичная против линейной).

Заключение:

1. В статье получены ММ и МЖ одномерных КЭ высоких порядков с использованием ПК Maple 9.

Таблица 3

Матрицы [N] и [B] для линейного и высоких порядков одномерных КЭ

Тип КЭ	Аппроксимирующая функция	Матрица функций формы [N]	матрица [B]
Линейный	$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$	$\left[1\text{-}\frac{x}{l} \quad \frac{x}{l}\right]$	$\left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right]$
Квадратичный	$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$	$\left[1-\frac{3x}{l}+\frac{2x^2}{l^2} \quad \frac{4x}{l}+\frac{4x^2}{l^2} \quad -\frac{x}{l}+\frac{2x^2}{l^2}\right]$	$\left[-\frac{3}{l}+\frac{4x}{l^2} \quad \frac{4}{l}+\frac{8x}{l^2} \quad -\frac{1}{l}+\frac{4x}{l^2}\right]$
Кубический	$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$	$\left[1-\frac{11x}{2l}+\frac{9x^2}{l^2}-\frac{9x^3}{2l^3} \quad \frac{9x}{l}-\frac{45x^2}{2l^2}+\frac{27x^3}{2l^3}\cdots \quad \cdots-\frac{9x}{2l}+\frac{18x^2}{l^2}-\frac{27x^3}{2l^3} \quad \frac{x}{l}-\frac{9x^2}{2l^2}+\frac{9x^3}{2l^3}\right]$	$\left[-\frac{11}{2l}+\frac{18x}{l^2}-\frac{27x^2}{2l^3} \quad \frac{9}{l}-\frac{45x}{l^2}+\frac{81x^2}{2l^3}\cdots \quad \cdots-\frac{9}{2l}+\frac{36x}{l^2}-\frac{81x^2}{2l^3} \quad \frac{1}{l}-\frac{9x}{l^2}+\frac{27x^2}{2l^3}\right]$
4-й степени	$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4$	$\left[1-\frac{25x}{3l}+\frac{70x^2}{3l^2}-\frac{80x^3}{3l^3}+\frac{32x^4}{3l^4}\cdots \quad \cdots\frac{16x}{l}-\frac{208x^2}{3l^2}+\frac{96x^3}{l^3}-\frac{128x^4}{3l^4}\cdots \quad \cdots-\frac{12x}{l}+\frac{76x^2}{l^2}-\frac{128x^3}{l^3}+\frac{64x^4}{l^4}\cdots \quad \cdots\frac{16x}{3l}-\frac{112x^2}{3l^2}+\frac{224x^3}{3l^3}-\frac{128x^4}{3l^4}\cdots \quad \cdots-\frac{x}{l}+\frac{22x^2}{3l^2}-\frac{16x^3}{l^3}+\frac{32x^4}{3l^4}\right]$	$\left[-\frac{25}{3l}+\frac{140x}{3l^2}-\frac{80x^2}{l^3}+\frac{128x^3}{3l^4}\cdots \quad \cdots\frac{16}{l}-\frac{416x}{3l^2}+\frac{288x^2}{l^3}-\frac{512x^3}{3l^4}\cdots \quad \cdots-\frac{12}{l}+\frac{152x}{l^2}-\frac{384x^2}{l^3}+\frac{192x^3}{l^4}\cdots \quad \cdots\frac{16}{3l}-\frac{224x}{3l^2}+\frac{224x^2}{l^3}-\frac{512x^3}{3l^4}\cdots \quad \cdots-\frac{1}{l}+\frac{44x}{3l^2}-\frac{48x^2}{l^3}+\frac{128x^3}{3l^4}\right]$

Таблица 4

Матрицы масс [M] и жесткости [K] для одномерных КЭ высоких порядков

Тип КЭ	Матрица масс КЭ, [M]	Матрица жесткости КЭ, [K]
Линейный	$\frac{\rho A l}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Квадратичный	$\frac{\rho A l}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{6l}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$
Кубический	$\frac{\rho A l}{1680}\begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{40l}\begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix}$
4-й степени	$\frac{\rho A l}{5670}\begin{bmatrix} 292 & 296 & -174 & 56 & -29 \\ 296 & 1792 & -384 & 256 & 56 \\ -174 & -384 & 1872 & -384 & -174 \\ 56 & 256 & -384 & 1792 & 296 \\ -29 & 56 & -174 & 296 & 292 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{945l}\begin{bmatrix} 4925 & -6848 & 3048 & -1472 & 347 \\ -6848 & 16640 & -14208 & 5888 & -1472 \\ 3048 & -14208 & 22320 & -14208 & 3048 \\ -1472 & 5888 & -14208 & 16640 & -6848 \\ 347 & -1472 & 3048 & -6848 & 4925 \end{bmatrix}$

Таблица 5

Сопоставление величин частот собственных колебаний при продольных колебаниях

Кол-во элементов	Порядок интерполяционных функций, конечных элементов							
	линейная		квадратичная		кубическая		4-я степень	
	Погрешность, %	Время, мс	Погрешность, %	Время, мс	Погрешность, %	Время, мс	Погрешность, %	Время, мс
1	10		0,375	0,09	0,0068	0,17	$0{,}68\times10^{-6}$	0,36
2	2,6 19,5	0,12	0,026 1,65	0,31	0,00011 0,0697	0,36	$2{,}54\times10^{-7}$	0,72
3	1,146 10,23 20,02	0,17	0,005 0,375 2,33	0,55	0,00001 0,0068 0,125	0,33	$<10^{-10}$ $0{,}68\times10^{-6}$ $3{,}6\times10^{-3}$	2,1
4	0,64 5,83 15,35 19,14	0,22	0,0016 0,125 0,862 2,68	0,64	$1{,}78\times10^{-6}$ 0,00126 0,0248 0,0163	1,1	$-6{,}36\times10^{-8}$ $7{,}0\times10^{-6}$ $3{,}9\times10^{-4}$ $5{,}0\times10^{-3}$	2,83
5	0,412 3,73 10,27 18,11 18,15	0,26	0,00067 0,052 0,375 1,297 2,85	0,78	$0{,}44\times10^{-6}$ $0{,}34\times10^{-3}$ $6{,}8\times10^{-3}$ 0,047 0,19	1,9		
10	0,103	1,08						
20	0,026	13,7						

2. Выполнено сопоставление между различными типами КЭ высоких порядков для определения частот собственных продольных колебаний.
3. КЭ высоких порядков обеспечивают сходимость к точному решению при гораздо меньшем числе КЭ и меньших затратах машинного времени.
4. Полученные результаты могут быть использованы при определении собственных частот в строительных конструкциях и в волноводах для акустической радиолокации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А.** Метод суперэлементов в расчётах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.
2. **Вороненок Е.Я., Палий О.М., Социнский С.В.** Метод редуцированных элементов для расчёта конструкций. – Л.: Судостроение, 1990. – 224 с.
3. **Rudykh O.L.** Improvements in the super elements method for solution dynamic problems in construction on the basis of synthesis with method of reduced elements // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2007. – vol. 3. – issue 2. – pp. 39–44.
4. **Бойцов Г.В., Палий О.М., Постнов В.А., Чувиковский В.С.** Справочник по строительной механике корабля: В трёх томах. Т. 3. Динамика и устойчивость корпусных конструкций. – Л.: Судостроение, 1982. – 320 с.
5. **Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.** Строительная механика. Динамика и ус-

тойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

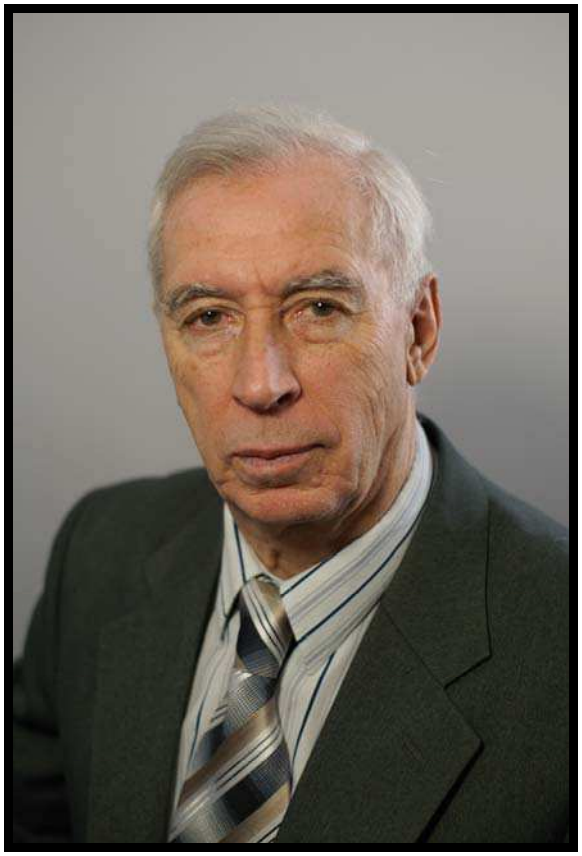
6. **Рудых О.Л., Бырканов В.А.** Уточнение матрицы масс стержневого конечного элемента испытывающего продольные колебания. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2008. – vol. 4. – issue 2. – pp. 102–103.

Рудых Олег Львович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительное производство», директор Управления подготовки научных кадров Дальневосточного государственного университета путей сообщения; Российская Федерация, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47;
E-mail: aspir@festu.khv.ru;

Бырканов Владимир Александрович, Дальневосточного государственного университета путей сообщения; Российская Федерация, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47.

ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА БОРИСОВИЧА ЗОЛОТОВА

IN MEMORY OF ALEXANDER BORISOVICH ZOLOTOV



12 сентября 2008 года ушел из жизни выдающийся российский ученый, Почетный академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Почетный работник высшего образования России, Почетный профессор Московского государственного строительного университета, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета Александр Борисович Золотов, создатель крупнейшей российской Научной школы «Численное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства». Эта школа не только далеко продвинула новую бурно развивающуюся ветвь современной вычислительной теории сооружений и математической физики, но и внесла неоценимый вклад в укрепление мощности и в развитие народного хозяйства нашей страны.

Александр Борисович Золотов родился 7 января 1937 года в городе Москве в семье служащих. Свое образование он начал в средней общеобразовательной школе №114 города Москвы. После ее окончания он, увлекаясь математикой, поступил в Московский институт инженеров транспорта на строительный факультет, который окончил в 1959 году. В 1959-1960 годах он работал дорожным мастером во Всесоюзном тресте по реконструкции железнодорожных путей (Рекпуть), а в 1960 году перешел на должность инженера в Государственный проектно-изыскательский

институт «Гипропромтрансстрой» Министерства транспортного строительства СССР. Но тяга к математическим наукам и их приложениям оказалась сильнее, и в 1962 году А.Б. Золотов поступил в очную аспирантуру Центрального научно-исследовательского института строительных конструкций им. В.А. Кучеренко (ЦНИИСК) и одновременно на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ им. М.В. Ломоносова). С присущим ему упорством и настойчивостью он погрузился в науку, успешно окончив факультет в 1967 году.

В 1970 году А.Б. Золотов защитил кандидатскую диссертацию «Численное решение второй пространственной задачи теории упругости» по специальности 022 – «Сопротивление материалов и строительная механика», получившую высочайшую оценку видного ученого в области строительной механики и механики деформируемого твердого тела, члена-корреспондента Академии строительства и архитектуры СССР Алексея Руфовича Ржаницына, охарактеризовавшего работу как докторскую. Характерна разносторонность интересов Александра Борисовича в те годы. Работая в вычислительном центре ЦНИИСК в должностях младшего научного сотрудника, главного инженера, старшего научного сотрудника, заведующего лабораторией, помимо ведения исследований в области развития и приложения математических методов решения строительных задач, он решил и ряд интересных проблем в естественных науках.

В 1973 году А.Б. Золотов был приглашен в Московский инженерно-строительный институт им. В.В. Куйбышева (МИСИ) на должность доцента кафедры прикладной математики по категории «ведущий специалист с производства», в 1976 году ему было присвоено ученое звание доцента. В течение 10 лет он занимал пост заведующего вычислительным центром (ВЦ) МИСИ, являясь одновременно организатором и руководителем научного отдела ВЦ, занимавшегося созданием математического обеспечения и развитием средств вычислительной техники для решения научно-технических строительных задач и автоматизации строительного проектирования.

В отделе велись разработки методов и осуществлялись численные исследования для различных задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Заказчиками выступали как подразделения МИСИ, так и внешние организации. А.Б. Золотовым и его сотрудниками выполнен ряд крупных научных работ и решены сотни практически важных задач, связанных с расчетами многомерных конструкций, зданий и сооружений, в том числе с реализацией подходов, основанных на новых физических постановках, учитывающих реальные особенности и свойства современных конструкционных материалов. Вынужденно неполный перечень перечисляемых здесь рассчитанных объектов включает завод КамАЗ в Набережных Челнах; комплекс зданий на Калининском проспекте в городе Москве; реакторы АЭС; сложные оболочечные покрытия промышленных и гражданских зданий; стыки, применяемые в крупнопанельных зданиях различной этажности; стыки колонн каркаса многоэтажных зданий; трехмерные коробчатые конструкции; опоры; датчики давления; объекты железнодорожного хозяйства; плотины (в том числе с учетом фазовых переходов, связанных с промерзанием); фундаменты; корпуса высокого давления (в том числе на силовые воздействия по деформационной теории пластичности); оболочки и пластины (по техническим теориям, учитывающим сдвиговые характеристики и нелинейно упругую работу материала); конструкции из несжимаемых материалов; железобетонные плиты (в том числе по теории Н.И. Карпенко); неоднородные полупространства со сферическими полостями; подземные здания обогатительных фабрик (расчет термонапряженного состояния); температурные поля ГЭС; неоднородные полуплоскости из различных материалов и тоннели (с учетом

внутреннего трения в материале); ортотропные пластины из асбоцемента (в частности, по модели Г.А. Гениева); облегченные панели-оболочки КЖС (с учетом их совместной работы с ребрами и деформаций сдвига по толщине); многослойные замкнутые оболочки с легким заполнителем; стеновые панели с дверными проемами; двухконсольные панели под ригели; башмаки под колонны; объекты метрополитена и т.д.

В 1989 году А.Б. Золотов защитил докторскую диссертацию на тему «Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области» по специальности 05.23.17 – «Строительная механика», в 1992 году ему было присвоено ученое звание профессора. С 1991 по 2008 год Александр Борисович работал в должности профессора кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета (МГСУ). В 2007 году ему было присуждено Почетное звание «Почетный профессор Московского государственного строительного университета».

Александр Борисович обладал блестящим талантом руководителя, умевшего увлечь своим примером талантливую молодежь. Помимо активной научной деятельности он всегда очень большое внимание уделял проблемам преподавания. Он многие годы читал лекции по дисциплинам «прикладная математика», «численные методы», «информатика», «строительная информатика» в МГСУ, был основоположником курсов «вычислительная механика», «алгоритмические языки и программирование», «математические модели расчета сооружений» для студентов, аспирантов и сотрудников. Читавшиеся им курсы лекций широко известны научной общественности и преподавателям высших учебных заведений, которые проходили повышение квалификации в МГСУ. Александр Борисович принимал активное участие в разработке методической документации по специальности 230401 (073000) «Прикладная математика» и направлению подготовки 150300 (553300) «Прикладная механика», которые являлись уникальными для высших учебных заведений строительного профиля России. Он осуществлял руководство курсовыми и дипломными работами как студентов МГСУ, так и других высших учебных заведений (в частности, Московского государственного института электроники и математики, Днепропетровского национального университета (механико-математический факультет), МГУ им. М.В. Ломоносова и др.). В 1997 году он был награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования России», в 2001 году – отмечен Дипломом Международной ассоциации строительных высших учебных заведений (АСВ).

А.Б. Золотов был основателем и бессменным руководителем научных коллективов, успешно работающих и в настоящее время. Он возглавлял функционирующую в МГСУ крупную научную школу «Численное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства», объединяющую ученых, широко известных как в России, так и за рубежом. Основное направление деятельности школы состоит в разработке математических моделей и численных методов решения строительных задач. Под руководством А.Б. Золотова и при его непосредственном участии защищены шесть докторских и более двадцати кандидатских диссертаций. Он организовал и курировал действующий при школе кружок студенческого научного общества, из которого вышли многие специалисты, ученые и преподаватели, в том числе, один из заведующих кафедрой информатики и прикладной математики МГСУ.

А.Б. Золотов долгие годы был членом диссертационного совета Д 212.138.12 по защите кандидатских и докторских диссертаций по специальностям «Строительная механика» (05.23.17), «Механика деформируемого твердого тела» (01.02.04) и «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (05.13.18) в МГСУ.

А.Б. Золотов – известный ученый-специалист в области строительной механики, механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и численных методов. В течение всей своей продолжительной научно-педагогической деятельности он являлся основным консультантом и признанным экспертом по численным методам во всех организациях, в которых работал. Чуждый карьеризма, он получил признание только благодаря своему незаурядному таланту, научной интуиции, огромным разносторонним знаниям и исключительной работоспособности. Александр Борисович разработал и развил метод стандартной (расширенной) области для постановки и аппроксимации краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений; методы решения трехмерных задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела с использованием экономичных разностных подходов; ленточные алгоритмы формирования и решения краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений; многосеточные (полуитерационные) методы, методы агрегирования, многоуровневые методы для расчета строительных конструкций, зданий и сооружений; единый алгоритм решения краевых задач на основе метода базисных вариаций; метод фрагментации для расчета строительных конструкций; метод локализации для расчета строительных конструкций; метод локального анализа строительных конструкций, использующий вейвлет-анализ; методы дискретных граничных уравнений для расчета строительных конструкций; спектральный метод граничных элементов для расчета строительных конструкций; методы оптимизации конструкций; численно-аналитические методы расчета строительных конструкций, зданий и сооружений; методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики; корректный дискретно-аналитический метод расчета строительных объектов регулярной структуры; предложил операторные и безусловные вариационные постановки краевых задач расчета строительных конструкций.

Лично А.Б. Золотовым и под его непосредственным руководством разработаны универсальные программные комплексы для расчета двумерных и трехмерных строительных конструкций, а также решения широкого класса краевых задач на основе единых алгоритмов и программ. Проведенные работы отмечены Почетной грамотой Министерства высшего и среднего специального образования СССР за лучшую научную работу и золотой медалью «За достигнутые успехи в развитии народного хозяйства СССР» ВДНХ СССР (за разработки в области САПР – технологические линии проектирования строительных конструкций).

Александр Борисович − автор и соавтор 4 монографий, 7 учебных пособий, более 260 научных и учебно-методических публикаций. Результаты выполненных им исследований многократно докладывались на различных всесоюзных, всероссийских и международных конференциях, симпозиумах, конгрессах, семинарах. На протяжении всей жизни он вел активное международное сотрудничество с коллегами из университетов, исследовательских и проектных организаций Германии, Франции, Польши, Словакии, США, Украины и других стран, выступал за рубежом с лекциями и научными докладами.

А.Б. Золотов входил в редакционные коллегии и советы многих российских периодических печатных изданий, а с 2003 года занимал пост заместителя главного редактора международного журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.

А.Б. Золотов стоял у истоков создания в Российской академии архитектуры и строительных наук Научного Совета «Программные средства в строительстве и архитектуре», членом которого в самом первом составе он стал в 2005 году. В 2007 году он был удостоен Диплома Российской академии архитектуры и строительных наук за монографию

«Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики», еще один диплом, уже посмертно, был присужден Александру Борисовичу в 2009 году за другую монографию − «Математические методы в строительной механике». В 2008 году он был избран Почетным членом Российской академии архитектуры и строительных наук.

Можно сказать, что от школьной скамьи до самых последних недель жизни он непрерывно жил в области высоких интересов науки, ими горел. Александр Борисович был прекрасным семьянином, отдавшим лучшие чувства щедрой души и горячего сердца своей дружной и преданной семье. Большим счастьем была для него встреча с Верой Александровной, с которой они прожили в любви и согласии более 50 лет. Двери их гостеприимного дома всегда были распахнуты для учеников, коллег и друзей.

Нельзя не отметить и невероятную увлеченность Александра Борисовича спортом. Он добивался высоких результатов в самых разных видах: бег, конькобежный спорт, альпинизм, плаванье, гребля на байдарках, велоспорт, беговые лыжи. Вплоть до самого последнего времени он прокладывал многокилометровые лыжные трассы в Подмосковье, а задаваемый при этом темп их прохождения мог быть поддержан далеко не всеми его более молодыми попутчиками.

Александр Борисович ушел из жизни. Но все им созданное навеки остается в написанных им книгах и научных статьях, в переданных знаниях, в памяти и сердцах друзей, учеников и последователей, а также будущих научных работников.

Коллеги, ученики

О НАУЧНО-ТВОРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АЛЕКСАНДРА БОРИСОВИЧА ЗОЛОТОВА

В.Н. Сидоров, П.А. Акимов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию научно-творческой деятельности Почетного академика Российской академии архитектуры и строительных наук, Почетного работника высшего образования России, Почетного профессора Московского государственного строительного университета, профессора, доктора технических наук, профессора кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета Александр Борисович Золотова

Ключевые слова: Александр Борисович Золотов

ABOUT SCIENTIFIC AND CREATIVE ACTIVITY OF ALEXANDER BORISOVICH ZOLOTOV

Vladimir N. Sidorov, Pavel A. Akimov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to description of scientific and creative activity of Emeritus Academician of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Emeritus worker of higher education in Russia, Emeritus professor of Moscow State University of Civil Engineering, Professor, Doctor of Engineering Science, Professor of Department of Applied Mathematics and Information Technology of Moscow State University of Civil Engineering Alexander Borisovich Zolotov.

Keywords: Alexander Borisovich Zolotov



1. ПОСЛУЖНОЙ СПИСОК

Александр Борисович Золотов родился 7 января 1937 года в городе Москве. В 1959 году окончил Строительный факультет Московского института инженеров транспорта (МИИТ), получив специальность инженера-строителя. После окончания ВУЗа работал мастером во Всесоюзном тресте по реконструкции железнодорожных путей (Рекпуть), затем проектировщиком в отделе «Инженерные конструкции» Государственного проектно-изыскательского института «Гипропромтрансстрой» Министерства транспортного строительства СССР. В 1962 году поступил в очную аспирантуру Центрального научно-исследовательского института строительных конструкций им. В.А. Кучеренко (ЦНИИСК) и одновременно на механико-математический факультет Московского го-

сударственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ), который окончил в 1967 году. Работал в вычислительном центре ЦНИИСК в должностях младшего научного сотрудника, главного инженера, старшего научного сотрудника, заведующего лабораторией. В 1973 году был приглашен в Московский инженерно-строительный институт им. В.В. Куйбышева (МИСИ) на должность доцента кафедры информатики и прикладной математики по категории «ведущий специалист с производства». В течение 10 лет занимал пост заведующего вычислительного центра МИСИ (ВЦ МИСИ), являясь одновременно организатором и руководителем научного отдела ВЦ МИСИ, занимавшегося научно-техническим и математическим обеспечением средствами вычислительной техники решения строительных задач и автоматизации строительного проектирования. В отделе велись разработки методов и численные исследования для различных задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Заказчиками выступали подразделения МИСИ и внешние организации.

В 1970 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Численное решение второй пространственной задачи теории упругости» по специальности 022 – «Сопротивление материалов и строительная механика». В 1989 году защитил докторскую диссертацию на тему «Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области» по специальности 05.23.17 – «Строительная механика». В 1976 году ему было присвоено ученое звание доцента, а в 1992 году – профессора.

Являлся членом диссертационного совета по защите кандидатских и докторских диссертаций по специальностям 05.23.17 – «Строительная механика», 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела» и 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». С 2005 года являлся членом Научного Совета Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) «Программные средства в строительстве и архитектуре». В 2007 году был избран Почетным профессором МГСУ, а в 2008 – Почетным членом РААСН.

Был награжден: в 1984 году – Почетной грамотой Минвуза СССР за лучшую научную работу, его заслуги отмечены золотой медалью «За достигнутые успехи в развитии народного хозяйства СССР» ВДНХ СССР (за разработки в области САПР – технологические линии проектирования строительных конструкций); в 1997 году – нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования России»; в 2001 году – Дипломом Международной ассоциации строительных высших учебных заведений, в 2007 и 2009 годах – Дипломами РААСН.

Александр Борисович ушел из жизни 12 сентября 2008 года.

2. НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Профессор А.Б. Золотов – известный ученый и специалист в области счисленных, аналитических и численно-аналитических методов расчета строительных конструкций, зданий и сооружений с использованием вычислительной техники, а также опытный организатор вузовской науки, принимал самое активное участие в подготовке и воспитании научных кадров.

А.Б. Золотов на протяжении всей профессиональной деятельности был руководителем научных коллективов, успешно работающих и в настоящее время. Он основал крупную научную школу МИСИ – МГСУ «Численное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства», объединяющую ученых, широко известных, как в России, так и за рубежом. Основное направление деятельности школы состоит в разработке математических моделей и численных методов решения строительных задач. Под руководством А.Б. Золотова и при его непосредственном участии защищены

шесть докторских и более двадцати кандидатских диссертаций. Он организовал и курировал действующий при школе кружок СНО.

Сфера научной деятельности А.Б. Золотова была достаточно обширна. Вынуждено краткое отражение отдельных ее направлений представлено ниже.

Метод расширенной (стандартной) области для постановки и аппроксимации краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

Ученики: Андреев В.И. [1], Акимов П.А. [2], Алексеев Д.Н. [3], Бельский В.Г. [4], Белый М.В. [5], Блохина Н.С., Булгаков В.Е. [6], Кайтуков Т.Б. [7], Ларионов А.В. [8], Лейтес Е.С. [9], Лопатинская Е.Л. [10], Медведько В.Н. [11], Медведько Д.В. [12], Мозгалева М.Л. [13], Мсхалая Ж.И. [14], Садов О.В. [15], Сидоров В.Н. [16], Харитонов В.А. [17], Ширинская И.В. [18] и др.

Сущность метода расширенной (стандартной) области заключается в выработке единой, не зависящей от геометрических и физических характеристик, операторной записи исходной краевой задачи и ее дискретного аналога, а затем и в построении эффективных численных алгоритмов.

Основная идея на этапе постановки проста и состоит в объединении всех частей исходной постановки в одном уравнении с соответствующими весовыми характеристиками. Для этого используются характеристическая функция рассматриваемой области Ω и ее производные, сосредоточенные на границе.

Пусть L – дифференциальный самосопряженный оператор для эллиптической системы 2-го порядка из M уравнений в пространстве N-мерных функций, причем

$$L = D^* A D; \quad D = \nabla \otimes E_M; \quad \nabla = [\,\partial_1 \ \ldots \ \partial_N\,]^{\mathrm{T}} = grad, \quad (1)$$

где E_M – единичная матрица M-го порядка; $\otimes$ – знак, обозначающий операцию прямого произведения матриц.

Обозначим: θ – характеристическая функция области Ω; $\delta_\Gamma = \delta(p)$ – дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$; $\nu = [\nu_1 \ \ldots \ \nu_N]^T$ – вектор внутренней нормали к границе области Ω; $\nu_E = \nu \otimes E_M$; * – знак, обозначающий операцию сопряжения; l – оператор естественных краевых условий, $l = -\nu_E^* AD$; $l^* = -D^* A \nu_E$; $\mathscr{L}_0 = D^* \theta A D$. Показано, что имеют место следующие основные операторные соотношения метода расширенной области

$$\mathscr{L}_0 u = \theta L u + \delta_\Gamma l u; \quad L\theta u = \mathscr{L}_0 u - l^*(\delta_\Gamma u); \quad L\theta u = \theta L u + \delta_\Gamma l u - l^*(\delta_\Gamma u). \quad (2)$$

Непосредственно из формул (2) выводятся операторы краевых задач с согласованными весовыми характеристиками краевых условий. Формулируемые при этом операторные постановки краевых задач могут рассматриваться на любой окаймляющей области, что особенно важно для численной реализации. В этом смысле удобно применять метод расширенной (стандартной) области, сводящийся к рассмотрению соответствующих задач на единой упрощенной, т.е. стандартной области, например прямоугольнике или круге. Это облегчает построение универсальных алгоритмов решения и дает возможность повысить эффективность их численной реализации (за счет применения векторных алгоритмов для операций с массивами). Аппроксимация стандартной области состоит, например, в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной таким образом, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям конструкции, т.е. исходной области (рис. 1).

Разработка и программная реализация методов решения трехмерных задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела с использованием экономичных разностных подходов

Ученики: Лейтес Е.С. [19].

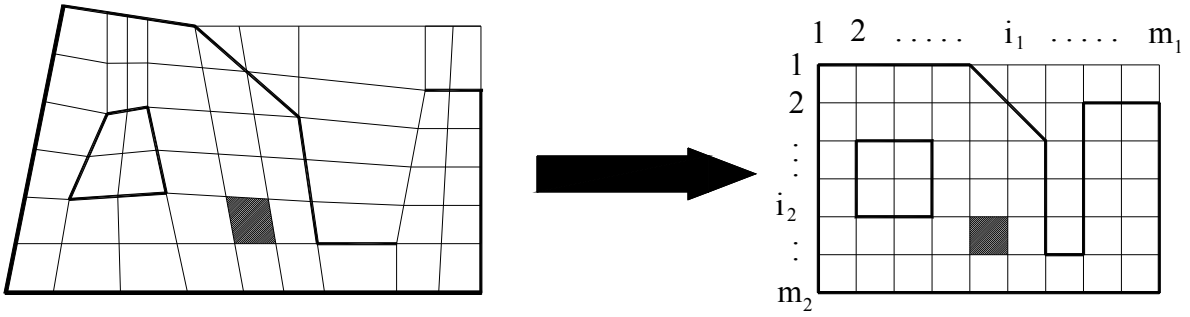


Рис. 1. Пример выбора аппроксимирующей сетки.

Для решения операторных уравнений можно использовать шаговые методы. Это либо итерационные процессы, либо разностные схемы (по времени) для решения нестационарных задач. Их общая структура в основном может быть представлена формулой

$$u^{k+1} = u^k - \tau B^{-1}(Lu^k - F^k), \qquad (3)$$

где k – номер шага; τ – итерационный параметр либо шаг по времени; B – некий вспомогательный оператор, улучшающий сходимость итерационного процесса либо обеспечивающий устойчивость разностной схемы; L – дискретный оператор задачи; $(Lu^k - F^k)$ – невязка решения.

В общем случае оператор B принято называть эквивалентным. Он должен удовлетворять двум трудно совместимым требованиям. Первое – быть легкообратимым, т.е. чтобы для произвольного вектора v легко (минимум арифметических действий) решалась задача $Bw = v$. Второе – быть близким к исходному оператору L, т.е. чтобы спектр оператора $B^{-1}L$ был близок к единице ($m(Bu,u) \le (Lu,u) \le M(u,u)$ при $M/m \Rightarrow 1$). Это обеспечивает малое количество операций для достижения сходимости. В целом понятие экономичности итерационного процесса определяется общими затратами времени ЭВМ, которое в основном пропорционально произведению числа итераций на количество арифметических действий для одной итерации. Последнее, в свою очередь, зависит также от скорости вычисления невязки $v = Lu^k - F^k$ и поправки $w = B^{-1}v$. В этом случае непосредственная реализация операторных алгоритмов, приводящая в методе стандартной области к векторным операциям, позволяет во много раз ускорить процесс счета на ЭВМ. В качестве итерационных методов решения уравнений могут использоваться метод факторизованного оператора, попеременно-треугольный метод, многосеточные методы и т.д. Например, для метода факторизованного оператора процесс строится по формулам (α – итерационный параметр).

$$B = \begin{Bmatrix} B^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B^M \end{Bmatrix}; \quad \text{где} \quad B^s = \prod_{p=1}^{N} B_p^s;$$

$$B_p^s = E + \alpha D_p^* a_{pp}^{ss} D_p. \qquad (4)$$

Для обращения оператора B необходимо последовательное решение задач

$$B_p^s g_p^s = g_{p-1}^s, \qquad g_0^s = v^s, \qquad w = g_N^s, \qquad (5)$$

осуществляемое широко известным методом одномерной прогонки.

Ленточные алгоритмы формирования и решения краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

Ученики: Сидоров В.Н. [16,20].

При решении линейной стационарной задачи после перехода к дискретным операторным уравнениям получаем систему линейных

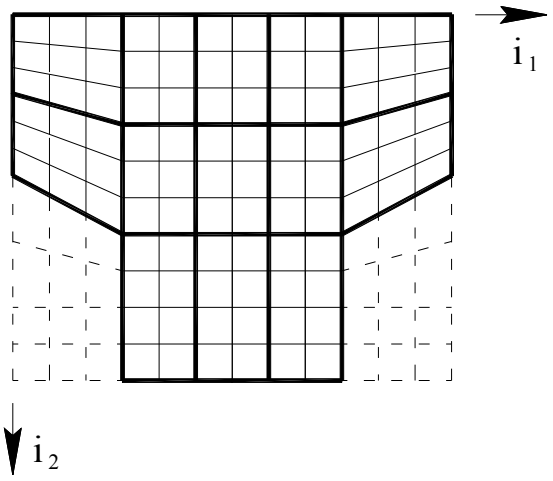


Рис. 2. Двухсеточная аппроксимация.

уравнений, которая в случае небольшой размерности решается стандартными методами типа Гаусса. Благодаря использованию расширенной области и регулярной сетки матрица системы имеет чисто ленточную структуру с небольшим количеством ненулевых диагоналей, соответствующих точечному шаблону дискретного оператора. Поэтому, сформировав массивы (вектора) значений этих диагоналей, полностью определим исходную матрицу. Алгоритмы ленточного представления операторов обеспечивают быстрое формирование дискретной системы с помощью векторных операций. Для решения многих нелинейных задач небольшой размерности (например, двумерных) эффективным является сочетание обоих данного подхода с тем, что описан в предыдущем пункте, когда в качестве оператора B используется матрица Ньютона.

Многосеточные (полуитерационные) методы и методы агрегирования для расчета строительных конструкций, зданий и сооружений. Методы агрегирования. Многоуровневые методы.

Ученики: Белый М.В. [5,21-22], Булгаков В.Е. [6,21-22], Садов О.В. [15].

Многосеточные методы. Перечисленные в предыдущих пунктах итерационные процессы, как правило, хорошо сходятся на высокочастотных составляющих решения, соответствующих локальному поведению функций, и не очень хорошо на низкочастотных составляющих, отражающих глобальное поведение функций. Это приводит, например, к невыполнению условий равновесия по сечениям и в целом к недостижению заданной точности. В то же время низкочастотные составляющие достаточно хорошо аппроксимируются на более крупной сетке, нежели исходная. Это приводит к мысли о возможности использования для определения низкочастотных составляющих вспомогательной крупной сетки, на которой число неизвестных настолько меньше, что общее время решения задачи почти не увеличивается. Методы, в которых используется последовательность нескольких сеток, называются многосеточными. Изложим идею таких методов на простейшем случае – с использованием двух сеток.

Пусть имеется некоторая конструкция, для расчета которой задана исходная сетка, достаточная для аппроксимации. Определим на этой сетке более крупную, объединяющую по несколько ячеек исходной (рис. 2).

Для решения задачи $Lu = F$ на исходной сетке применим общую схему с эквивалентным оператором B. Для его построения воспользуемся крупной сеткой, на которой исходная задача примет вид

$$L_0 u_0 = F_0, \quad \text{где} \quad L_0 = Q^* L Q; \quad F_0 = Q^* F, \quad (6)$$

Q – оператор интерполяции с крупной сетки на мелкую; Q^* – оператор сужения с мелкой сетки на крупную, сопряженный Q.

Далее пусть D – легкообратимый оператор (например, диагональный, треугольный, факторизованный и т.д.). Представим L в виде $L = D + G$.

Оператор B определим как оператор задачи

$$\begin{cases} Bv = Dv + GQv_0 = F \\ L_0 v_0 = F_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Для ее решения сначала определяется v_0 из второго уравнения (задача малой размерности на крупной сетке), а затем вычисляется v из первого уравнения:

$$v = D^{-1}(F + GQv_0). \qquad (8)$$

Хорошая сходимость подобных процессов обосновывается во многих литературных источниках и подтверждается широкой вычислительной практикой. При составлении близкой задачи на крупной сетке не обязательно пользоваться операторами интерполяции и сужения в строгом смысле. Так, например, сузить исходную задачу на крупную сетку можно суммированием коэффициентов в операторных уравнениях по ячейкам мелкой сетки. В рамках метода стандартной области это обеспечивает самый простой алгоритм сужения.

Методы агрегирования. В основе методов агрегирования лежит идея рационального выделения из базисных конечных элементов мелкой сетки более крупных элементов-агрегатов. При этом в зависимости от структуры агрегата, характера внешних и внутренних связей, особенностей геометрии и физических свойств материала объединение базисных элементов может осуществляться по одноступенчатой или многоступенчатой схеме.

Многоуровневые методы. Многоуровневые методы, по сути, представляют собой комбинирование перечисленных выше подходов.

Единый алгоритм решения краевых задач на основе метода базисных вариаций.

Ученики: Акимов П.А. [23-25], Белый М.В. [5], Блохина Н.С., Булгаков В.Е. [6], Ларионов А.В. [8], Медведько В.Н., Медведько Д.В. [12], Мозгалева М.Л. [13], Мсхалая Ж.И. [14], Садов О.В. [15], Сидоров В.Н. [25-26], Трушин С.И. [27], Харитонов В.А. [17], Ширинская И.В. [18] и др.

Рассмотрим, например, алгоритм решения нелинейных задач теории упругости на основе метода базисных вариаций.

Вариационная постановка задачи теории упругости имеет вид:

$$\Phi(\bar{u}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon})dx - \iint_{\Omega}(\bar{F},\bar{u})dx \;\rightarrow\; \min, \qquad (9)$$

где $\Phi(u)$ – функционал энергии; $\bar{u}$ – вектор-функция перемещений; $\bar{F}$ – вектор-функция правых частей (нагрузка); $\bar{\sigma} = [\,\sigma_{11}\;\; \sigma_{22}\;\; \sigma_{12}\,]^T$ – вектор-функция напряжений; $\bar{\varepsilon} = [\,\varepsilon_{11}\;\; \varepsilon_{22}\;\; \varepsilon_{12}\,]^T$ – вектор-функция деформаций; Ω – область определения задачи; N – мерность задачи.

Область Ω разбивается на конечные элементы. В соответствии с сеточным разбиением функционал энергии на Ω можно представить в виде суммы функционалов энергии на конечных элементах:

$$\Phi(\bar{u}) = \sum_i \Phi_i(\bar{u}). \qquad (10)$$

На каждом *i*-ом элементе восполняем неизвестную вектор функцию $\bar{u}$ и координаты $\bar{x}$, в частности, линейно в каждом направлении, вводя при этом локальные координаты t_s – локальные координаты: $0 \le t_s \le 1$, $s = 1,...,N$. Такое восполнение определяет вектор-функцию $\bar{u}$ ее значениями в узлах сетки. Следовательно, решение задачи теории упругости сводится к определению

вектора узловых значений $u_k(i)$. Обозначим глобальный вектор узловых значений $\overline{U}_{gl}$. Для его определения предлагается *итерационный процесс*:

$$\overline{U}_{gl}^{(k+1)} = \overline{U}_{gl}^{(k)} - A_k^{-1}\overline{F}^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, ...; \quad \overline{U}_{gl}^{0} \equiv 0, \tag{11}$$

где A_k – матрица, коэффициенты которой A_{ij}^k определяются как

$$\begin{aligned} A_{ij}^k = &[\Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)} + \alpha_1\overline{e}_i + \alpha_2\overline{e}_j) - \\ &-\Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)} + \alpha_1\overline{e}_i) - \Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)} + \alpha_2\overline{e}_j) + \\ &+\Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)})]/(\alpha_1\alpha_2); \end{aligned} \tag{12}$$

$\overline{F}^{(k)}$ – вектор невязки, элементы которого $F_i^{(k)}$ вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} F_i^{(k)} = &[\Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)} + 0.5\alpha_1\overline{e}_i) - \\ &- \Phi(\overline{U}_{gl}^{(k)} - 0.5\alpha_1\overline{e}_i)]/\alpha_1; \end{aligned} \tag{13}$$

$\overline{e}_i$ – единичный вектор: $\overline{e}_i(j) = \delta_{i,j}$; $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; α_1>0 и α_2>0 выбираются в виде некоторой доли от величины очередного приближения; i, j – индексы сплошной нумерации; $\overline{U}_{gl}^{(k)}$ – приближение к $\overline{U}_{gl}$ на *k*-й итерации.

Критерий окончания итерационного процесса ($\varepsilon_{\max}$ задается):

$$\left\|\overline{F}^{(k)}\right\| / \left\|\overline{F}^{(0)}\right\| < \varepsilon = \varepsilon_{\max}. \tag{14}$$

Методы, связанные с локализацией и фрагментацией, для расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

Ученики: Алексеев Д.Н. [3], Медведько Д.В. [12], Мозгалева М.Л. [25], Садов О.В. [15].

Методы фрагментации. Обеспечение прочности, надежности, экономичности сооружений в условиях появления новых материалов, совершенствования конструктивных решений при проектировании новых сооружений и реконструкции старых приводит к необходимости численного расчета как сооружения в целом, так и получения решения повышенной точности лишь в небольшом (самом важном или отличающимся от типового проекта) фрагменте конструкции. Методы получения повышенной точности во фрагменте конструкции или, говоря иначе, методы фрагментации можно рассматривать как некоторое расширение многосеточных методов. Дело в том, что при применении многосеточных алгоритмов на практике часто бывает достаточно получать решение высокой точности (т.е. на сетке с самым мелким шагом) лишь в относительно небольшом, самом важном фрагменте конструкции. Это дает возможность при решении задачи на последовательности сеток попытаться существенно не увеличивать ее размерность при переходе от сетки к сетке, что позволит решать достаточно сложные задачи на персональных компьютерах малой мощности. Так, например, разработан один из возможных подходов к получению локальных решений высокого порядка точности во фрагменте конструкции для эллиптических задач второго порядка. Данный подход существенно отличается от стандартного, основанного на сгущении сетки, тем, что позволяет использовать только регулярную сетку, что существенно упрощает алгоритмы формирования и решения. Идея метода основывается на известном принципе Сен-Венана и поведении производной от фундаментальной функции. Предложен следующий критерий вырезания: к зоне гарантированной точности как бы пририсовывается график производной от фундаментальной функции на мелкой сетке, далее эта кривая приближается ломаной по узлам крупной сетки. Там, где ломаная начинает удовлетворительно описывать график производной от фундаментальной функции можно устанавливать границу зоны вырезания (рис. 3). В качестве численной оценки предлагается оценка, связанная с локальным перераспределением нагрузки по

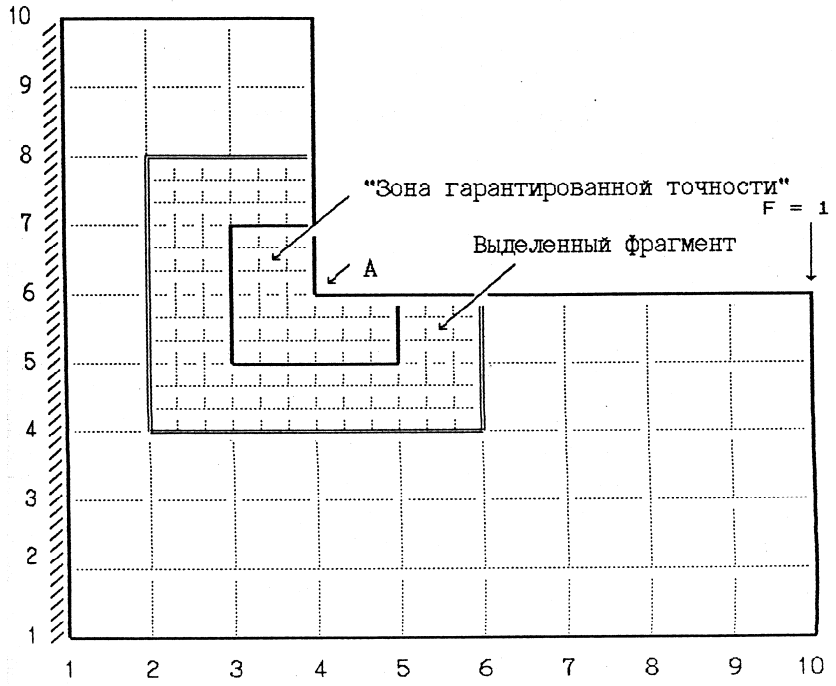


Рис. 3. Схема аппроксимации в методе фрагментации.

границы зоны вырезания и сопоставлением результатов расчетов в зоне гарантированной точности для нескольких вариантов распределения нагрузки, например, нагрузка заданная в узлах крупной сетки и линейно интерполированная на мелкую сетку.

Методы локализации. При расчете строительных конструкций, зданий и сооружений наиболее опасным с позиции прочности является напряженное состояние в небольшом количестве зон, как правило, заранее известных. Локальный расчет при правильном выборе метода и алгоритма приводит к резкому уменьшению количества неизвестных и вычислительной работы. Идея локальной сетки состоит в том, что она повторяет оптимальную аппроксимацию дискретной фундаментальной функции сеткой с минимальным количеством узлов. По сути, дискретная фундаментальная функция с позиции обобщенных функций является регуляризацией континуальной. Показано, что обе функции совпадают при удалении от нулевой точки, что позволяет делать аналитические оценки асимптотического поведения дискретных функций. В качестве основного численного приема построения дискретной фундаментальной функции предложено решение задачи Дирихле в достаточно широкой области и доопределение ее аппроксимацией континуальной функции в удаленных точках. Поскольку качественное поведение фундаментальной функции для операторов Лапласа и теории упругости совпадает, то все оценки и выбор шага локальной сетки достаточно вести на основе аппроксимации первой. Построен математический аппарат, использующий множители Лагранжа (реакции связей на спрямление функции) и дискретную фундаментальную функцию для аналитического и численного исследования влияния укрупненной сетки на поведение решения. Для решения задачи с использованием локально-сгущающихся сеток применяются метод базисных вариаций и метод расширенной (стандартной) области.

Отметим также приложение многоуровневого вейвлет-анализа для численного исследования локального напряженно-деформированного состояния строительных конструкций. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценивать влияние различных

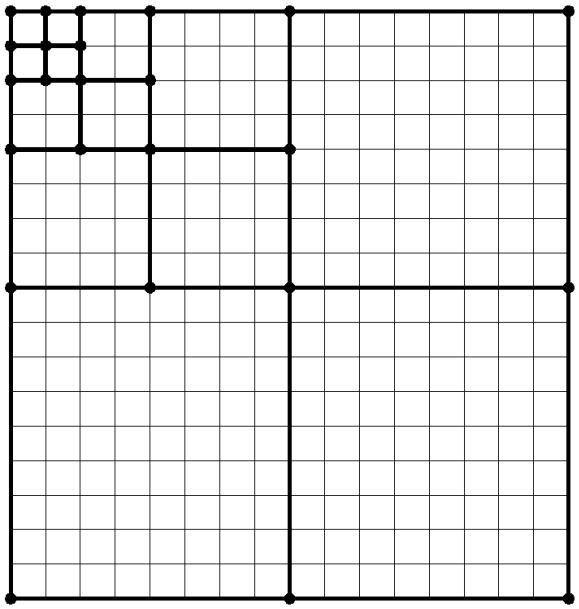


Рис. 4. Схема аппроксимации в методе локализации.

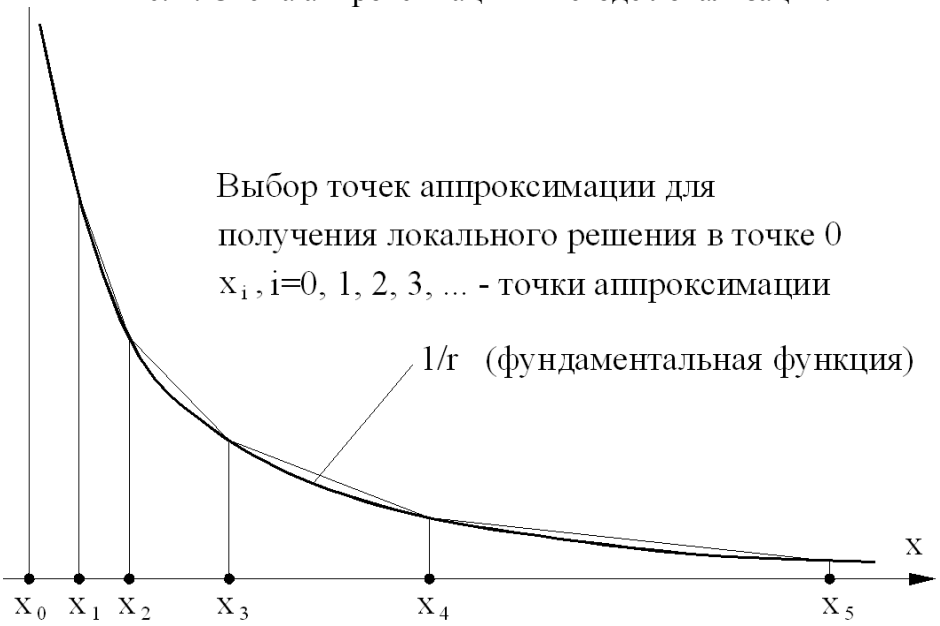


Рис. 5. К выбору аппроксимирующей сетки в методе локализации.

(с точки зрения локализации) факторов. Оказывается возможным построить не только более качественную расчетную модель, но и внести некоторые конструктивные изменения.

Метод дискретных граничных уравнений для расчета строительных конструкций.
Ученики: Кайтуков Т.Б. [7], Мозгалева М.Л. [13], Ширинская И.В. [18].
Метод дискретных граничных уравнений (ДГУ) сочетает положительные стороны метода конечных элементов (МКЭ) и метода граничных элементов (МГЭ). Решение краевой задачи строится в рамках конечноэлементной аппроксимации. Так же как в МГЭ задача сводится к системе уравнений относительно неизвестных, сосредоточенных на границе области, причем это сведение является точным и не требует аппроксимации сингулярных операторов, т.к. все операции производятся на дискретном алгебраическом уровне. Основное преимущество ДГУ по

сравнению с методом граничных интегральных уравнений заключается в отсутствии математических трудностей, связанных с расчетом целого ряда конструкций, имеющих внутренние углы и ступеньки. Разработанные методы ориентированы на использование компьютеров средней мощности и представляются существенно более эффективными, чем стандартные подходы.

Спектральный метод граничных элементов для расчета строительных конструкций.

Ученики: Мозгалева М.Л. [24,28], Мсхалая Ж.И. [14].

Спектральный метод граничных элементов (СМГЭ) основан на спектральном представлении ядер интегральных операторов в виде суммы простых функций. СМГЭ достаточно удобен, так как при его использовании соответствующие сингулярные ядра, во всяком случае в явном виде, отсутствуют, т.е. происходит естественная регуляризация за счет конечного числа членов ряда. Метод имеет простую программную реализацию и не требует большого объема памяти компьютера. Эти достоинства позволяют, например, формально реализовать метод, приводящий к самосопряженным граничным уравнениям, что дает ряд выигрышей при численной реализации (симметричная система дискретных уравнений, возможность уменьшить ширину ленты системы и т.д.). СМГЭ был предложен А.И. Цейтлиным и Л.Г. Петросяном для уравнения Лапласа при расчете конструкций, работа которых описывается такой математической моделью.

Целью проведенных А.Б. Золотовым и его учениками исследований было распространение этого метода на решение задач теории упругости, а также исследование его эффективности, т.е. анализ вопросов сходимости и точности. Выявлено, что СМГЭ имеет ряд недостатков. Во-первых, некорректность суммирование ряда Фурье. Во-вторых, собственные функции дифференциального оператора в явном виде неизвестны, в то время как фундаментальные функции для большинства операторов с постоянными коэффициентами известны. Этот недостаток ограничивает область применения СМГЭ. В-третьих, при приближении разрывной функции рядом Фурье в точках, близких к разрыву, наблюдается явление Гиббса, т.е. неустранимая с увеличением количества членов ряда погрешность величиной 18%. Если учесть, что рассматриваемые в интегральных уравнениях функции имеют скачок на границе, а краевые условия понимаются как след, то возникают существенные препятствия для численного решения и его анализа. Разработан ряд методов устранения указанных погрешностей и ускорения сходимости рядов Фурье, приводящей к существенной экономии вычислительной работы. Поскольку явный вид для собственных функций задачи теории упругости отсутствует, предложено использование обратного оператора теории упругости на стандартной области на основе собственных функций, соответствующих оператору Лапласа. Отметим, что собственные функции здесь являются тригонометрическими.

Методы оптимизации конструкций.

Ученики: Бельский В.Г. [4].

Теория оптимизации форм деформируемых тел представляет собой актуальное направление в проектировании оптимальных конструкций, важное в теоретическом и прикладном отношениях. Данное направление получило развитие в том, что относится к общей математической теории, анализу чувствительности форм и решению конкретных задач оптимизации форм в механике деформируемых тел. Успехи в развитии рассматриваемого научного направления были обеспечены прежде всего достижениями в теории вариационных задач с неизвестными границами, теории вариационных неравенств, методов решения вариационных задач с односторонними связями, методов конечных элементов, аппарата обобщенных функций. Рассмотрены математические постановки задач оптималь-

ного проектирования конструкций, применяемые конечноэлементные аппроксимации и численные алгоритмы оптимизации, представлены примеры решения модельных тестовых и практически важных задач расчета конструкций.

Численно-аналитические методы расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

Ученики: Акимов П.А. [2,23-25], Лейтес Е.С. [19], Медведько В.Н.

Достигнутый в начале 21 века уровень мощности ЭВМ и имеющийся в арсенале инструментарий аналитических математических средств, в сочетании с разнообразием математических моделей, позволяет ставить на повестку дня задачи разработки и исследования так называемых численно-аналитических или полуаналитических методов, сочетающих качественные свойства замкнутых решений с общностью численных методов. Прежде такие подходы существовали, главным образом, на идейном уровне, так как многие из разработок в данном направлении либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия, по крайней мере, одного из перечисленных факторов, либо, в той или иной мере, не учитывалась вычислительная специфика и необходимость последующей компьютерной реализации. Полуаналитические методы позволяют получать решения в аналитической форме, способствующей улучшению качества исследования объектов. Найденная с их помощью картина НДС развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов. Эти подходы особенно эффективны в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Областью применения разработанной группы полуаналитических методов являются конструкции и сооружения, в которых имеется постоянство физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений (балки, балки-стенки, тонкостенные стрежни, полосы, длинные фундаменты, плиты, пластины, оболочки, высотные и протяженные сооружения, трубопроводы, плотины, рельсы, резервуары и т.д.). Соответствующие методы названы дискретно-континуальными по той причине, что по выделяемому направлению постоянства характеристик (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного рода.

Дискретно-континуальный метод конечных элементов. В дискретно-континуальном методе конечных элементов (ДКМКЭ) реализована идея, что решение задачи расчета конструкции или сооружения с постоянными физико-геометрическими характеристиками по одному из направлений в рамках метода конечных элементов (МКЭ) может быть получено в аналитической форме вдоль данного направления. Преимуществами ДКМКЭ также являются: понижение размерности при численном решении, отсутствие практических ограничений на длину объектов по основному направлению и эффективность в зонах краевого эффекта. После формулировки операторных и вариационных постановок краевых задач с привлечением метода расширенной области на этапе численной реализации ДКМКЭ рассматриваемая конструкция разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) (рис. 6).

Дискретно-континуальный метод граничных элементов. В основе дискретно-континуального метода граничных элементов (ДКМГЭ) лежат граничные псевдодифференциальные уравнения. Соответствующие псевдодифференциальные операторы аппроксимируются дискретно с привлечением анализа Фурье или вейвлет-анализа. Преимущества ДКМГЭ перед другими методами численного моделирования – двукратное по-

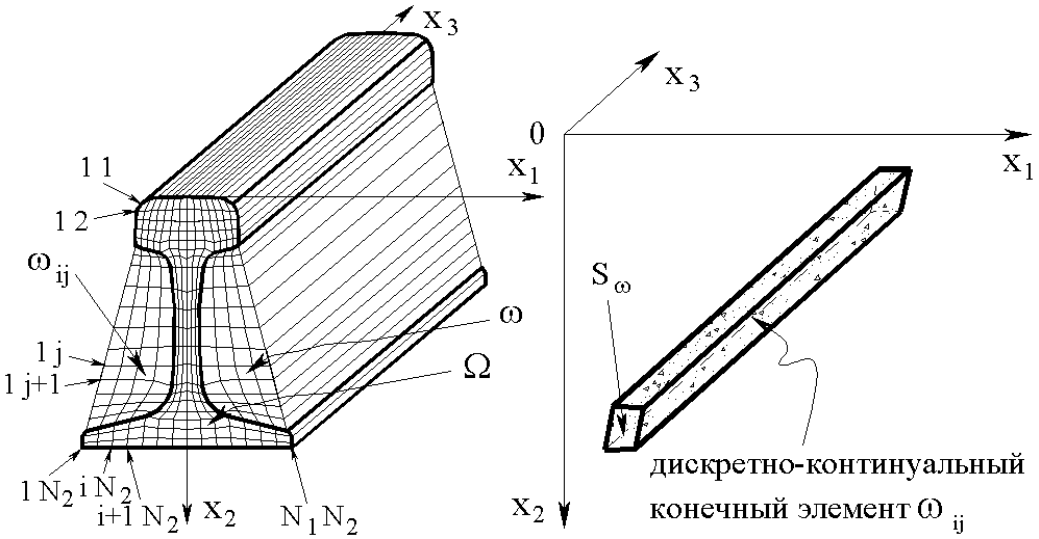


Рис. 6. Пример схемы дискретизации конструкции в рамках ДКМКЭ.

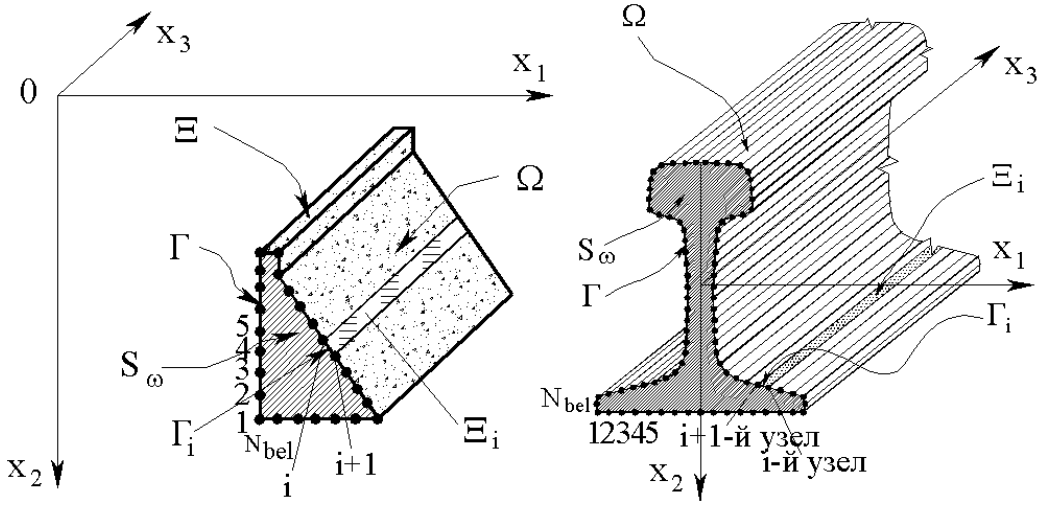


Рис. 7. Примеры дискретно-континуальных моделей границ в ДКМГЭ.

нижение размерности задачи (дискретизируется не вся расчетная область, а только граница ее поперечного сечения, т.е. решается, по сути, одномерная задача и задается лишь шаг по контуру), возможность проведения детального анализа отдельных зон, упрощенный этап подготовки данных, алгоритмическая простота и высокая степень универсальности. Разработаны два варианта ДКМГЭ – непрямой и прямой, непрямой, как и в стандартном методе граничных элементов, применяется несколько шире прямого. На стадии численной реализации граница объекта аппроксимируется ансамблем дискретно-континуальных граничных элементов (рис. 7).

Дискретно-континуальный вариационно-разностный метод. Дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ) позволяет сочетать простоту и наглядность конечно-разностных методов с преимуществами вариационной постановки (меньший порядок производных и автоматическое удовлетворение решения основным (естественным) граничным условиям) с одной стороны и очевидные достоинства аналитического решения с другой. Использование ДКВРМ позволяет сравнительно просто получить дискретную операторную формулировку

задачи по направлениям сеточной аппроксимации, внешне повторяющую ее исходную постановку. В рамках ДКВРМ сооружение разбивается на дискретно-континуальные сеточные элементы (аналогично ДКМКЭ).

Методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений сводятся в своем промежуточном итоге к решению многоточечных краевых задач (МКЗ) строительной механики. Под МКЗ понимается задача с «внутренними» граничными условиями, т.е. совокупность обычных краевых задач, рассматриваемых на областях, имеющих общие границы. Совместно с П.А. Акимовым разработаны устойчивые аналитические «решатели промышленного типа», учитывающие специфику строительных задач и являющиеся корректной альтернативой методу начальных параметров. Традиционная постановка МКЗ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\bar{y}^{(1)} - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1}(x_k^b, x_{\mathrm{k+1}}^{\mathrm{b}}); \qquad (15)$$

$$B_k^- \ \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, ..., n_k - 1; \qquad (16)$$

$$B_1^+ \ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \ \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \qquad (17)$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x) = [\, y_1(x) \quad y_2(x) \quad ... \quad y_{\mathrm{n}}(x) \,]^T$ – искомая n-мерная вектор-функция; $\bar{f} = \bar{f}(x) = [\, f_1(x) \quad f_2(x) \quad ... \quad f_n(\mathrm{x}) \,]^T$ – заданная n-мерная вектор-функция правых частей; $x_k^b, \ k = 1, ..., n_k$ – координаты граничных точек; A – матрица постоянных коэффициентов, квадратная n-го порядка; B_k^-, B_k^+ и $\bar{g}_k^-$, $\bar{g}_k^+$ – матрицы граничных условий n-го порядка и n-мерные векторы правых частей граничных условий.

В ходе проведенных всесторонних исследований выявлены следующие качественные особенности матрицы A:

1. Матрица А является «жесткой», т.е. отношение ее максимального собственного числа к минимальному (по модулю) является большим числом:

$$|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \geq M, \quad \text{где} \quad M - \text{большое число}, \qquad (18)$$

   при этом «жесткость» асимптотически возрастает;
2. Действительные части собственных чисел имеют разные знаки;
3. В спектральном разложении матрицы А присутствуют жордановы клетки и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
4. Указанные жордановы клетки имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции;
5. При решении практических задач расчета строительных конструкций и сооружений система (15) насчитывает большое число уравнений (несколько тысяч).

Слова «точное аналитическое решение» означают, что решение ищется не в рядах, а на основе построения аналитических функций от матрицы. Что касается рядов, то всегда возникают вопросы их реальной сходимости, и это, как правило, не дает гарантии успешного решения в наиболее важных случаях.

Построение точного аналитического решения в традиционной форме (например, в рамках метода начальных параметров) приводит к практически нереализуемым вычислениям. В первую очередь это возникает из-за наличия в спектральном разложении экспоненциальных функций с положительными аргументами (такая функция в прикладной математике называется «вычислительной катастрофой» и не реализуется на ЭВМ). Другая проблема связана с наличием присоединенных векторов и жордановых клеток (имеется в виду неединичного порядка) в жорда-

новом разложении матрицы A, которое имеет вид:

$$A = T J T^{-1}, \quad \text{где} \quad J = \{J_1, J_2, ..., J_u\}; \quad \dim J_p = m_p; \qquad (19)$$

T – невырожденная матрица, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A; J – матрица Жордана; J_p – жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_p; u – общее количество различных собственных значений.

В настоящее время существуют мощные алгоритмы вычисления собственных значений, но, не существует ни одного численно устойчивого метода вычисления жорданового разложения в общем случае, реализация же «чисто теоретических» подходов приводит к накоплению недопустимых погрешностей.

Для демонстрации специфики задачи (19) можно представить в виде:

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c||c} T_{11} & T_{12} & \\ & & T_2 \end{array}\right]}_{T_1} \times \left[\begin{array}{cc|} J_{11} & \\ & J_{12} \\ \hline & \multicolumn{1}{c|}{J_2} \end{array}\right] \times \left\{ \left[\begin{array}{c} \widetilde{T}_{11} \\ \hline \widetilde{T}_{12} \\ \hline\hline \widetilde{T}_2 \end{array}\right] T_2, \right. \qquad (20)$$

где T_{11}, $\widetilde{T}_{11}$ – соответственно матрицы, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A с неотрицательными действительными частями; T_{12}, $\widetilde{T}_{12}$ – тоже ненулевым собственным значениям матрицы A с отрицательными действительными частями; T_2, $\widetilde{T}_2$ – соответственно матрицы, содержащие «правые» и «левые» собственные и присоединенные векторы, соответствующие нулевым собственным значениям матрицы A; J_{11}, J_{12} – диагональные матрицы Жордана, отвечающие соответственно ненулевым собственным значениям с неотрицательными и отрицательными действительными частями; J_2 – квазидиагональная матрица Жордана, отвечающая нулевым собственным значениям; матрицы $\widetilde{T}_{11}$ и $\widetilde{T}_{12}$ определяются из решения левой проблемы собственных значений.

Разработанная методика частичного жорданового разложения состоит в рассмотрении матрицы коэффициентов A как оператора и введении трех подпространств. Первое подпространство отвечает собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями, второе – собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями, третье − собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям.

Вычисление проекторов на первые два подпространства осуществляется за счет определения правых и левых собственных векторов матрицы коэффициентов, которое производится по устойчивому алгоритму. Иными словами одновременно решается левая и правая проблемы собственных значений, что является очень существенным приемом для получения конечного результата. Проектор на подпространство собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям, после специальных сортировок собственных значений и собственных векторов может быть определен формулой:

$$P_1 = T_1 (\widetilde{T}_1 T_1)^{-1} \widetilde{T}_1. \qquad (21)$$

Третье подпространство является дополнительным к двум первым и не нуждается в специальном построении проектора. Он находится как разность тождественного оператора с первым проектором, которому он ортогонален:

$$P_2 = E - P_1. \qquad (22)$$

Таким образом, частичное жорданово разложением имеет вид:

$$A = A_1 + A_2, \quad \text{где} \quad A_1 = T_1 J_1 \widetilde{T}_1, \quad A_2 = A - A_1. \tag{23}$$

Разработанный метод точного аналитического решения задачи (15)-(17) основан на использовании фундаментальной матрицы-функции, которая строится в некотором специальном виде, исключающем экспоненциальные функции с положительными аргументами. На подпространстве, отвечающем собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям, выполняется прямое построение решения:

$$\varepsilon(x) = T_1 \widetilde{\varepsilon}_0(x) \widetilde{T}_1 + \chi(x,0)[P_2 + \sum_{k=1}^{m_{\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_2^k], \tag{24}$$

где $\chi(x,\lambda_p) = \begin{cases} \chi(x), & \mathrm{Re}(\lambda_p) \le 0 \\ -\chi(-x), & \mathrm{Re}(\lambda_p) > 0; \end{cases}$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0; \end{cases} \tag{25}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_0(x) = diag\{\chi(x,\lambda_1)\exp(\lambda_1 x), \ldots, \chi(x,\lambda_l)\exp(\lambda_l x)\};$$

$$m_{\max} = \max_{l \le i \le u} m_i; \tag{26}$$

Отметим, что сумма в правой части (24) содержит не более четырех членов и соответствует полиномиальной («балочной») части решения.

Общее решение задачи на произвольном интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) имеет вид:

$$\overline{Y}_k(x) = (\varepsilon(x - x_k^b) - \varepsilon(x - x_{k+1}^b))\overline{C}_k + \varepsilon * \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \tag{27}$$

где $\overline{C}_k$ – вектор искомых постоянных коэффициентов n-го порядка;

$$E_k(x) = \varepsilon(x - x_k^b) - \varepsilon(x - x_{k+1}^b); \quad \overline{S}_k(x) = \varepsilon * \bar{f}_k, \tag{28}$$

$$\bar{f}_k(x) \equiv f(x)\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b);$$

$$\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \tag{29}$$

Коэффициенты в (27) находятся из граничных условий (16)-(17).

Также разработан метод точного аналитического решения МКЗ для систем ОДУ второго порядка, который в ряде случаев предпочтительно использовать, например, при расчетах плит (рис. 8).

В заключении отметим, что А.Б. Золотовым совместно с П.А. Акимовым впервые были построены явные точные аналитические решения многоточечных краевых задач расчета строительных конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Это основа «промышленного» решателя, реализуемого в программных комплексах.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Вычислительная деятельность А.Б. Золотова последовательно проходила в ВЦ ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, ВЦ МИСИ им. В.В. Куйбышева, которое он возглавлял, на кафедре информатики и прикладной математики МИСИ-МГСУ, где она продолжается и в настоящее время. В течение всей своей продолжительной научно-педагогической деятельности он являлся и является основным консультантом и признанным экспертом по численным методам в указанных организациях. Им и его сотрудниками выполнен ряд крупных научных работ и решены сотни практически важных задач, связанных с расчетами многомерных конструкций, зданий и сооружений, а также с реализацией подходов, основанных на новых физических постановках, учитывающих реальные особенности и свойства современных конструкционных материалов. Вынуждено неполный перечень перечисляемых здесь рассчитанных объектов включает завод КамАЗ в Набережных челнах; комплекс

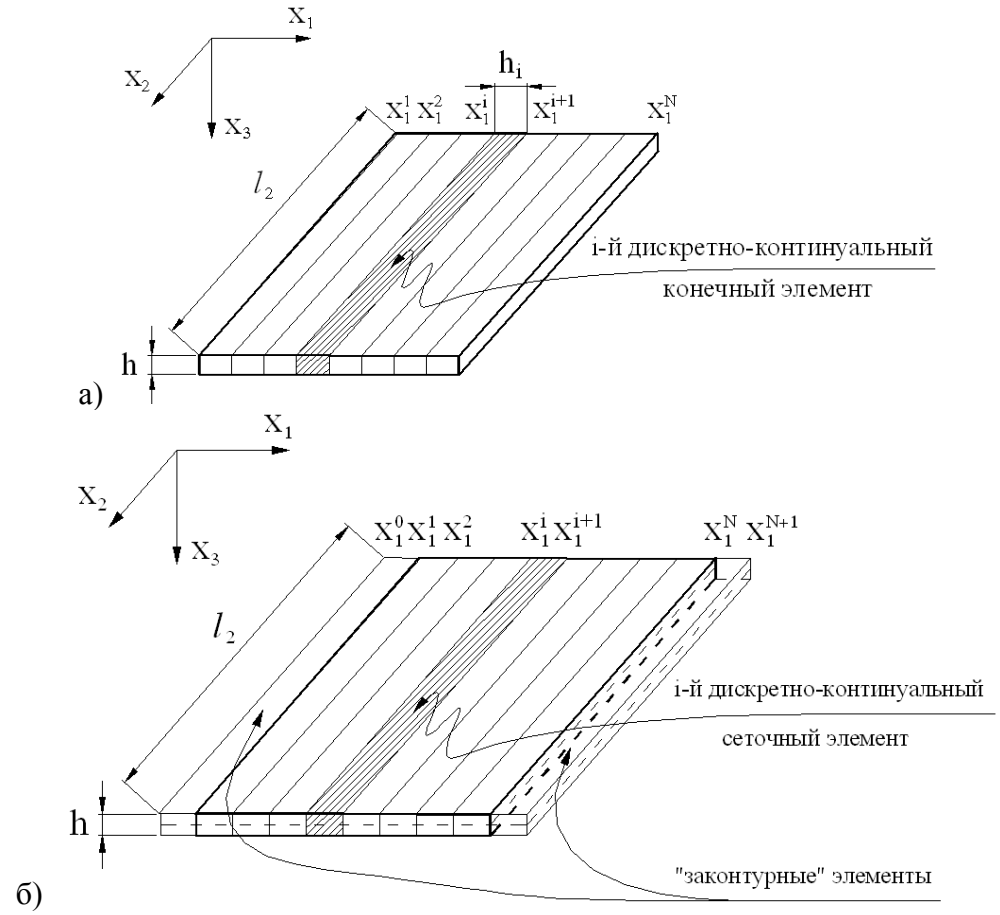


Рис. 8. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель плиты: а) – в рамках ДКМКЭ; б) – в рамках ДКРМ.

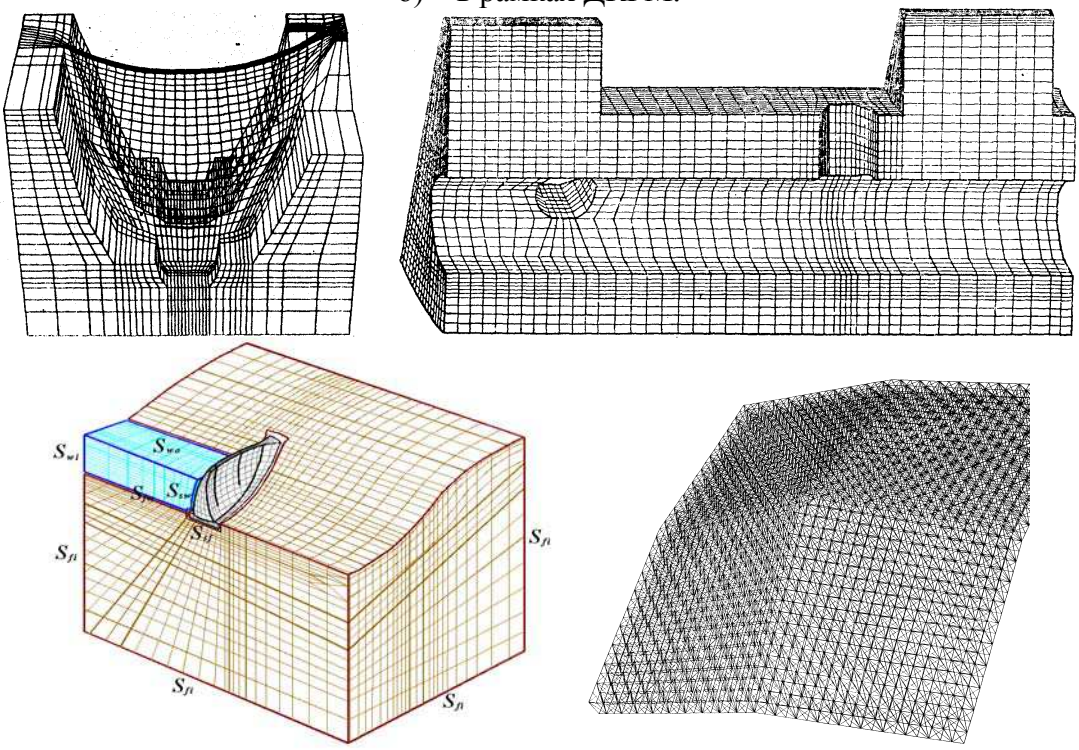


Рис. 9. Примеры решенных задач.

зданий на Калининском проспекте в г. Москве; реакторы АЭС; сложные оболочечные покрытия промышленных и гражданских зданий; стыки, применяемые в крупнопанельных зданиях различной этажности; стыки колонн каркаса многоэтажных зданий; трехмерные коробчатые конструкции; опоры; датчики давления; объекты железнодорожного хозяйства; плотины (в том числе с учетом фазовых переходов, связанных с промерзанием); фундаменты; корпуса высокого давления (в том числе на силовые воздействия по деформационной теории пластичности); оболочки и пластины (по техническим теориям, учитывающим сдвиговые характеристики и нелинейно упругую работу материала); конструкции из несжимаемых материалов; железобетонные плиты (в том числе по теории Н.И. Карпенко); неоднородные полупространства со сферическими полостями; подземные здания обогатительных фабрик (расчет термонапряженного состояния); температурные поля ГЭС; неоднородные полуплоскости из различных материалов и тоннели с внутренним трением; ортотропные пластины из асбоцемента (в частности, по модели Г.А. Гениева); облегченные панели-оболочки КЖС (с учетом совместной работы с ребрами и деформаций сдвига по толщине); многослойные замкнутые оболочки с легким заполнителем; стеновые панели с дверными проемами; двухконсольные панели под ригели; башмаки под колонны; объекты метрополитена и т.д. (см., например, рис. 9).

4. МЕЖДУНАРОДНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ И ПУБЛИКАЦИИ

Александр Борисович – автор и соавтор 5 монографий, 7 учебных пособий, более 270 научных и учебно-методических публикаций. Это, в частности, монографии «Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области» (МГСУ, 1992 год), «Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики» (АСВ, 2004 год; в 2007 году удостоена Диплома РААСН), «Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы» (АСВ, 2006 год), «Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций)» (АСВ, 2008 год; в 2009 году удостоена Диплома РААСН). Ряд печатных работ автора получили широкую международную известность и заслуженное признание.

А.Б. Золотов вел активное международное сотрудничество с коллегами из университетов, исследовательских и проектных организаций Германии, Польши, Словакии, США, Украины и других стран, выступает за рубежом с лекциями и научными докладами. А.Б. Золотов входил в редакционные коллегии и советы многих российских периодических печатных изданий, а с 2003 года занимал пост заместителя главного редактора международного журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Стаж работы в МИСИ-МГСУ составил у А.Б. Золотова более 30 лет. Он является основоположником курсов и учебных планов по ряду учебных дисциплин («информатика», «численные методы», «вычислительная механика», «алгоритмические языки и программирование», «математические модели расчета сооружений» и др.), преподаваемым студентам, аспирантам и сотрудникам МГСУ. А.Б. Золотов принимал участие в разработке методической документации по двум новым, уникальным для ВУЗов строительного профиля, специальностям: 073000 (230400) «Прикладная математика» и 553300 (150300) «Прикладная механика». Читаемые А.Б. Золотовым курсы лекций широко известны научной общественности и преподавателям высших учебных заведений, которые проходили повышение квалификации в МГСУ.

А.Б. Золотов также осуществлял руководство курсовыми и дипломными работами как для студентов МГСУ, так и иных ВУЗов, в частности, МГУ им. М.В. Ломоносова, Московского государственного института электроники и математики, Днепропетровского национального университета и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев В.И.** Упругое и упругопластическое равновесие толстостенных цилиндрических и сферических непрерывно неоднородных тел. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 01.02.03. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1984. – 346 с.
2. **Акимов П.А.** Дискретно-континуальные методы расчета строительных конструкций. Дис. на соиск. уч.степ. д-ра техн.наук: 05.23.17. МГСУ. М., 2005. – 460 с.
3. **Алексеев Д.Н.** Численные методы исследования локального напряженно-деформируемого состояния конструкций и вейвлет-анализ.: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.13.18. МГСУ. М.: 2002. – 172 с.
4. **Бельский В.Г.** Оптимизация формы области в задаче теории упругости. Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1983. – 215 с.
5. **Белый М.В.** Численные методы статического и динамического расчета конструкций на основе многоуровневых подходов. Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МГСУ. М., 1994. – 345 с.
6. **Булгаков В.Е.** Многосеточные методы и агрегирование в расчете конструкций. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1992. – 294 с.
7. **Кайтуков Т.Б.** Методы дискретных граничных уравнений для решения задач расчета сооружений: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.13.18. МГСУ. М.: 2002. – 143 с.
8. **Ларионов А.В.** Алгоритмы численного решения нелинейных задач строительной меха-ники и нестационарной термоупругости на основе метода стандартной области.: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1991. – 187 с.
9. **Золотов А.Б., Лейтес Е.С.** Об одном подходе к решению систем дифференциальных уравнений при расчете строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, 1976, №3.
10. **Лопатинская Е.Л.** Напряженно-деформированное состояние упругих осесимметрично нагруженных анизотропных неоднородных в меридиональном направлении сферических оболочек: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 – МГСУ. М.: 1995. – 121 с.
11. **Золотов А.Б., Медведько В.Н.** Получение на ЭВМ аналитического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. // Численные методы и алгоритмы. Труды ЦНИИСК. Вып. 20, М., 1971.
12. **Медведько Д.В.** Алгоритмы построения оптимальных сеток для локального расчета конст-рукций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17, МИСИ им. В.В. Куйбышева, М.: 1992. – 212 с.
13. **Мозгалева М.Л.** Решение задачи теории упругости при различных коэффициентах Пуас-сона.: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.04. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1981. – 117 с.
14. **Мсхалая Ж.И.** Применение спектрального метода граничных интегральных уравнений для расчета элементов строительных конструкций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1989. – 149 с.
15. **Садов О.В.** Расчет конструкций многосеточным методом Федоренко-Бахвалова

с ис-пользованием фрагментации: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук:: 05.23.17, МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1992. – 167 с.
16. **Сидоров В.Н.** Дискретные постановки и алгоритмы решения краевых задач строительной механики в произвольных областях на регулярных сетках. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1992.
17. **Харитонов В.А.** Решение граничных задач строительной механики, включающих одно-сторонние связи. Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1983. – 158 с.
18. **Ширинская И.В.** Численное исследование дискретных граничных уравнений краевых задач расчета конструкций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17, М., 1995. – 120 с.
19. **Золотов А.Б., Лейтес Е.С.** Исследование сходимости итерационного процесса решения трехмерной краевой задачи варианта деформированной теории пластичности бетона. // Численные методы и алгоритмы. Вып. 46, М., 1975.
20. **Золотов А.Б., Сидоров В.Н.** Постановка и численное решение краевых задач строительной механики с использованием алгебры типа свертки. // «Строительная механика и расчет сооружений», №3, 1991.
21. **Булгаков В.Е., Золотов А.Б., Белый М.В.** Полуитерационный метод решения пространст-венных краевых задач расчета сооружений. // Строительная механика и расчет сооружений, 1985, №6, с. 38-40.
22. **Белый М.В., Булгаков В.Е., Золотов А.Б.** Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1987, том 27, №6, с. 875-888.
23. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
24. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
25. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
26. **Золотов А.Б., Сидоров В.Н.** Алгоритмизация решения краевых задач строительной механики на ЭВМ. // «Строительная механика и расчет сооружений», №5, 1979.
27. **Трушин С.И.** Решение задач устойчивости гибких упругопластических оболочек с уче-том деформаций поперечного сдвига. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МГСУ. М.: 1999. – 275 с.
28. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
29. **Золотов А.Б., Андреев В.И., Сидоров В.Н., Акимов П.А.** Характерные математические особенности и корректные методы аналитического решения в задачах расчета элементов конструкций, зданий и сооружений с постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений. // Труды общего собрания Российской академии архитектуры и строительных наук. Жилище XXI века как основа формирования среды жизнедеятельности». Направление перспективного развития. – М.: АСВ, 2007.
30. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н.** Корректный аналитико-численный метод расчета общественных зданий регулярной структуры. // Фундаментальные и приоритетные прикладные исследования РААСН по научному обеспече-

нию развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2007 году: в 2 т.: сб. на-уч. тр. РААСН / БГТУ им. В.Г. Шухова; под ред. В.А. Ильичева и др. – Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2008. – Т. 2 – 377 с.

31. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Об одном дискретно-континуальном подходе к определению собственных значений и собственных функций краевых задач расчета элементов конструкций. Том 1. // Вестник отделения архитектуры и строительных наук. – Москва-Орел: РААСН, АСИ ОрелГТУ, 2009, с. 126-136.

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com