International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 4, Issue 1 ***2008***

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Pavel A. Akimov, Professor
Department of Applied Mathematics and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Radii P. Fedorenko, Professor
Institute of Applied Mathematics
Russian Academy of Sciences
4, Miusskaya Pl., Moscow, Russia

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analise Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Alexander B. Zolotov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Information Technology
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
Isdatelstvo ASV
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Igor A. Aleynikov, Professor,
Department of Theoretical and Applied Mechanics, Russian State Open Technical University for Railway Transportation
22/2, Ul. Chasovaya, Moscow, 125993, Russia

Sergey M. Aleynikov, Professor,
Dept. of Appl. Math., Voronezh State Architecture and Civil Engineering University, Bld. 84, Ul. 20-Letya Oktyabrya, Voronezh, 394006, Russia

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Department of Mechanical Engineering
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
1, Kurchatova Pl.
123182, Moscow, Russia

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and Cybernetics
Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakonov, Professor
Dept. of Comp. Math. and Cybernetics
Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosa
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Tecnologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Nickolay N. Leontiev, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkechoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatikn und Festigkeitslehre
Techiache Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Andrey B. Pavlov, Professor
The Director of the Institute
Melnikov Central Research & Design Institute of Steel Building Structures TSNIIPSK
49, Ul. Arkhitektora Vlasova, Moscow,
117997, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Valery A. Postnov, Professor
St. Petersburg State Mar. Tech. Univ.
3, Ul. Lozmanskaya,
190009 St. Petersburg, Russia

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart, Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State Univ. of Civil Engineering, Yaroslavskoe shosse
26, 129337 Moscow, Russia

Bernhard A. Scfhrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti. Via Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for Technical Education, New Delhi, India

W. Szczesniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmes University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ
INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Московский государственный строительный университет (Издательство АСВ) и Издательство Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк).

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основной критерий отбора статей для публикации в журнале − их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ − 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2]

[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed**.

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addiction all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

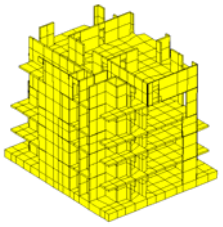


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or technical editor professor Pavel A. Akimov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well**. Label CD or diskette with** author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

- **Editor-in-Chief**
  Professor Vladimir N. Sidorov
  Department of Applied Mathematics and Information Technology
  Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
  e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Technical Editor**
  Professor Pavel A. Akimov
  Department of Applied Mathematics and Information Technology
  Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
  e-mail: pavel.akimov@gmail.com

REFERENCES

1. Fish, J. and Belsky, V. (1995a). "Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case". Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1-16.
2. Fish, J. and Belsky, V. (1995b). "Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 2: multidimensions". Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 17-38.

[1]) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, pavel.akimov@gmail.com.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров[1], П.А. Акимов[2]

[1]Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210х297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Бумажный экземпляр статьи должен быть распечатан на лазерном принтере. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov[1], Pavel A. Akimov[2]

[1]Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
[2]Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.). При публикации статьи на русском языке

далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использование шрифта Times New Roman, 12 пт.; списко литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательно нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. Тоже самое касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Очень желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в текстовом процессоре Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \qquad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков –** JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

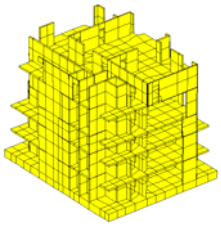


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Владимира Ни-

колаевича (см. параграф Контактные сведения) или техническому редактору журнала, профессору Акимову Павлу Алексеевичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору или техническому редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

- **Главный редактор**
  Профессор, доктор технических наук
  Сидоров Владимир Николаевич
  Московский государственный строительный университет,
  кафедра информатики и прикладной математики,
  129337, Россия, г. Москва,
  Ярославское шоссе, дом 26.
  e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

- **Технический редактор**
  Профессор, доктор технических наук
  Акимов Павел Алексеевич
  Московский государственный строительный университет,
  кафедра информатики и прикладной математики,
  129337, Россия, г. Москва,
  Ярославское шоссе, дом 26.
  e-mail: pavel.akimov@gmail.com

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fish, J. and Belsky, V. (1995a). “Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case”. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 1-16.
2. Fish, J. and Belsky, V. (1995b). “Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 2: multidimensions”. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 126, 17-38.

---

[1]) Сидоров Владимир Николаевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Акимов Павел Алексеевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.

[1]) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

[2]) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 4, Issue 1 ***2008***

TABLE OF CONTENTS

The Analysis of a Prismatic Beam Made of Physical Nonlinear Material Under Concentrated and Distributed Continuous Moving Load 13
Ashkan, Safar, Khoda Bandeh Lou

Математическое моделирование закрученных течений в комбинированных высотных сооружениях. 27
В.К. Ахметов

Оператор жесткости и безусловная вариационная постановка задачи изгиба плиты 32
А.Б. Золотов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов, М.В. Воробьев

Граничные интегральные уравнения с применением ассоциированных координат 42
А.Б. Золотов, М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, Д.В. Михайлов

Мониторинг динамических параметров несущих конструкций покрытия крытого конькобежного центра (ККЦ) в Крылатском (к проблеме аварии несущего элемента покрытия) 49
Г.Э. Шаблинский, Д.А. Зубков

Натурные динамические исследования общественных зданий с натяжными вантовыми покрытиями, возведенными в сейсмически активных районах 56
Г.Э. Шаблинский, Д.А. Зубков

Изгиб полосы средней толщины при наличии усилий в срединной плоскости 65
А.Н. Леонтьев, А.М. Вагиалла Хасан

О внецентренном сжатии тонкостенных стержней, составленных из начально искривленных пластинчатых элементов 71
А.В. Ильяшенко

Исследование напряженно-деформированного состояния в кольцевых сферических оболочках за пределом упругости 75
А.Я. Астахова

Моделирование равнопрочного цилиндра на основе итерационного подхода 79
В.И. Андреев, И.А. Потехин

Применение эквивалентности воздействий к плоской задаче механики деформируемого твердого тела 85
Э.К. Агаханов, М.К. Агаханов

О физическом смысле влияния повышенных скоростей нагружения на деформативные свойства бетона 87
К.А. Цветков

Исследование напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи в зависимости от его геометрического исполнения 92
Ю.И. Фомичев, В.М. Завьялов

Сравнительный анализ расчета резинового виброизолятора методом конечного элемента и вариационно-разностным методом 97
Д.К. Сизов

THE ANALYSIS OF A PRISMATIC BEAM MADE OF PHYSICAL NONLINEAR MATERIAL UNDER CONCENTRATED AND DISTRIBUTED CONTINUOUS MOVING LOADS

Ashkan, Safar, Khoda Bandeh Lou
Islamic Azad University, Iran, Urmia Branch

Abstract: It is assumed that a beam made of material has a physical nonlinear behavior. This beam is analyzed under the moving concentrated and distributed continuous loads. The vibration equations of motion are derived from the Hamilton's Principle and Euler-Lagrange Equation. In this study, the amplitude of vibration, circular frequency, bending moment, stress and deflection of the beam has been calculated. At the state of concentrated moving load. The obtained analytic solution has been exemplified. The results of this study indicate that when the material of the beam is considered physically nonlinear, there is no critical velocity and the resonance phenomenon doesn't happen.

INTRODUCTION

The study of dynamical effect of moving loads at highway and railroad bridges has a history of more than one and a half century. The collapse of Jester Bridge in England in 1847 encouraged both the theoretical and experimental studies. The Catastrophe caused tremendous human losses and created a lot of excitement in civil engineering (see Bussinesk, 1883; Cox, 1850; O-More, 1868; Stokes, 1849; Vinkler, 1868; Willis, 1849; as cited in Glushkov 1974 & Krolov, 1905, as cited in Kesiliev, 1969).

Presently, there are many structures made from materials which are not subject to the Hook's law. Therefore, there is a great tendency to study stress and strain in elements of structures made of physical nonlinear material under various static and dynamic loads. In the linear theory, the property of material is not taken into consideration; However, all of relevant parameters are taken into consideration in the theory of nonlinear. Thus, the physical nonlinear theory at small deformations demonstrates an exact calculation method for the analysis of stress, strain, and other internal forces in structural elements.

In order to represent all the possible states of the material by one mathematical law, the following algebraic function may be introduced:

$$\sigma = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \ldots \qquad (1)$$

This expression is not different from the general relationship between σ and ε.

$$\sigma = f(\varepsilon) \qquad (2)$$

Manzhaalovsky (as cited in Glushkov, 1974) employed Empeher's method and proposed the following two-term formulas of the parabolic type on the basis of the tests carried out by. Stolyarov and Skramtayev (as cited in Glushkov, 1974).

$$\sigma_1 = \alpha_1 \varepsilon - \beta_1 \varepsilon^2 (\textit{for compression}) \qquad (3)$$

$$\sigma_2 = \alpha_2 \varepsilon - \beta_2 \varepsilon^2 (\textit{for tension}) \qquad (4)$$

Where α_1, α_2, β_1 and β_2 are empire elasticity. Trinomial formulas of the parabolic type were suggested for cast iron by Hodgkinson (1822, as cited in Glushkov, 1974) and Cox (1850 as cited in Glushkov, 1974).Type (as cited in Glushkov, 1974), proposed the use of a similar relationship for metal wire:

$$\varepsilon = \alpha\sigma + b\sigma^2 + c\sigma^3 \qquad (5)$$

In addition to exponential and power laws, hyperbolic relationships were suggested for

brittle materials. Accordingly, Cox introduced the following function for cast iron:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\alpha - b\sigma} \tag{6}$$

Grubler, schlechtwg, and Deither (as cited in Glushkov, 1974), who developed a theory for bars and discs made of brittle materials, employed the following hyperbolic laws:

$$\sigma = \frac{\sigma}{A + B\varepsilon} \tag{7}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{1 - \alpha\sigma + \beta\sigma\sqrt{\sigma}} \tag{8}$$

Finally, the relationship between stress and strain, in the case of physical nonlinear, is presented by Kauderer (1961).
As the formula proposed by Kauderer is comprehensive and expresses the relationship between the stress and strain in three dimensional state, we preferred to use the formula for the analysis of the physical nonlinear stress and strain.

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{K(\sigma_0)}{3K}\sigma_0 + \frac{l(t_0^2)}{2G}(\sigma_{i,j} - \sigma_0 \partial_{i,j}) \qquad i, j = 1,2,3 \tag{9}$$

Where $\partial_{i,j}$ is Croneker symbols, and σ_0 is average stress:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{10}$$

K and G at small deformation are respectively volume contraction and shear elastic module. The relationship among K, E, and G is indicated through the following formula:

$$E = \frac{9KG}{5K + G} \tag{11}$$

K (σ_0) is average stress function and $l(t_0^2)$ is shear stress function; it can be indicated through the following expression:

$$K(\sigma_0) = 1 + K_1\sigma_0 + K_2\sigma_0^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} K_n\sigma_0^n$$
$$l(t_0^2) = 1 + l_2 t_0^2 + l_4 t_0^4 + \ldots \sum_{n=0}^{\infty} l_{2n} t_0^{2n} \tag{12}$$

Researches have demonstrated that K (σ_0) in physical nonlinear material on an average relative deformation is close to the straight line (i.e., K (σ_0)=1). Also, the two first sentences of the shear stress function are enough.

$$l(t_0^2) = 1 + l_2 t_0^2 \tag{13}$$

In the above expression, l_2 is the physical nonlinear coefficient
As the formula (9) indicates, stress components of σ_z, σ_y, and σ_{xy} are created. The simplification of the formula suggests that the stress components are too small in comparison with the σ_z. These new components of the stress have less impact on the frequency of vibration and on the other parameters during the vibration of the beam. As a result, the following formula is obtained from the formula (9) at a two dimensional surface:

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_z - \frac{2}{27} l_2 \frac{E^3}{G}\varepsilon_z^3\right) \tag{14}$$

The purpose of this paper was the analysis of a beam made of physical nonlinear material under the moving concentrated and distributed continuous loads, which was discussed through examples analytically.

THEORY

To study the effect of moving load on the prismatic beam, first, we are discussing moving concentrated load. Thus, it is assumed that the load P moves along the beam (fig.1).

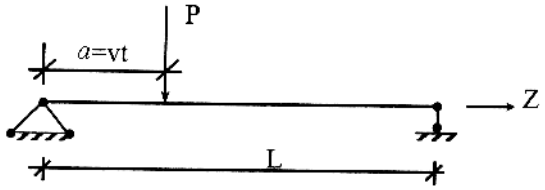


Fig.1. Schematic view of a prismatic beam Under moving load

To consider the effect of external moving load, it is assumed an equivalent distributed load which depends on z and t as follows:

$$q(z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2P}{L}\sin\frac{k\pi a}{L}\sin\frac{k\pi z}{L} \qquad (15)$$

Where,

$$p(z)=\sin\frac{k\pi z}{L},\ (k=1,2,3...)$$

is the head vibration mode of the beam.
Therefore, the potential and kinetic energy of the system will be as follows:

$$\Pi=$$
$$=\int_0^L\left[\frac{1}{2}J_0E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2-\frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}J_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^4\right]\cdot dz \qquad (16)$$

$$Ki=\frac{1}{2}\rho F\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dz \qquad (17)$$

Also, the work of the external moving load will be as follows:

$$A=\int_0^L q(z,t)\cdot w(z,t)dz$$
$$A=\frac{2P}{L}\int_0^L\sum\sin\frac{k\pi a}{L}\sin\frac{k\pi z}{L}w(z,t)dz \qquad (18)$$

The Hamilton's Principle for this beam will be expressed as below:

$$H=\int_{t_1}^{t_2}(\Pi-A-Ki)dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left[\frac{1}{2}-J_0E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2-\frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}J_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^4-\right.$$
$$\left.-\frac{2P}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi a}{L}\cdot\sin\frac{k\pi a}{L}w(z,t)-\frac{1}{2}\rho F\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dz,dt \qquad (19)$$

Where:

$$J_0=\iint y^2dxdy,\ J_1=\iint y^4dxdy$$

Considering:

$$\zeta=\frac{\pi z}{L},\ \tau=\omega_0 t.$$

which ζ, τ varies respectly from 0 to π and 0 to 2π.
Where ω_0 is circular frequency vibration of the system in linear case and expressing in Hamilton principle (19), the following formulas are obtained:

$$H=\frac{L}{\pi\omega_0}\int\int\left\{\frac{1}{2}J_0E\frac{\pi^4}{L^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\right)^2-\right.$$
$$-\frac{1}{54}\frac{E^4}{G^3}J_1\frac{\pi^8}{L^8}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\right)^4-\frac{2P}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\zeta_0\Bigg\} \qquad (20)$$
$$\left.\sin k\zeta,w(\zeta,\tau)-\frac{1}{2}\rho F\omega_0^2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\zeta d\tau\right\}$$

We assumed that the deformation of the beam would be found from the following expression:

$$w(\zeta,\tau)=p(\zeta)\cdot q(\tau) \tag{21}$$

Where, $p(\zeta)$ and $q(\tau)$ are coordinate and generalized functions respectively.
By substitution of expression (21) in expression (20), we obtain the following expressions:

$$\begin{aligned} H=&\frac{L}{\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}J_0E\frac{\pi^4}{L^4}[p''(\zeta)]^2\cdot q^2-\right.\\ &-\frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}J_1\frac{\pi^8}{L^8}p''^4\cdot q^4-\\ &-\frac{2P}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi vt}{L}\sin k\zeta\cdot p(\varsigma)q(\tau)-\\ &\left.-\frac{1}{2}\rho F\omega_0^2\cdot p^2(\zeta)q^2\right\}\cdot d\zeta\cdot d\tau \end{aligned} \tag{22}$$

The following expression is derived from the calculations indicated above in (22):

$$\begin{aligned} H=&\frac{L}{\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\left\{aq^2+bq^4-c\omega_0^2q'^2-d'q\right\}d\tau=\\ =&\frac{L}{\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}Nd\tau \end{aligned} \tag{23}$$

Where:

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}J_0E\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^{\pi}p''^2d\zeta\\ b&=-\frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}J_1\frac{\pi^8}{L^8}\int_0^{\pi}p''^4d\zeta\\ c&=\frac{1}{2}\rho F\int_0^{\pi}p^2(\zeta)d\zeta\\ d&=\frac{\pi P}{L}\sin\frac{k\pi vt}{L} \end{aligned} \tag{24}$$

For Integral (23), Euler formula gives:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial N}{\partial q}\right)-\frac{\partial N}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-2c\omega_0^2q'\right)=-2c\omega_0^2q'' \tag{25}$$

$$\frac{\partial N}{\partial q}=2aq+4bq^3-d'$$

$$-2c\omega_0^2q''-2aq-4bq^3+d'=0$$

$$-2c\omega_0^2q''-2aq\left(1+2\frac{b}{a}q^2\right)=d'=\frac{\pi P}{L}\sin\frac{k\pi vt}{L} \tag{26}$$

By substitution

$$\theta=\frac{k\pi v}{L},\ t=\frac{\tau}{\omega_0}$$

into equation (26) we'll have:

$$\omega_0^2q''+\frac{a}{c}q\left(1+2\frac{b}{a}q^2\right)=d\sin\eta\tau \tag{27}$$

Where:

$$\eta=\frac{\theta}{\omega_0},d=\frac{\pi P}{2cL}$$

By substitution of

$$X=\frac{\omega_0^2}{d}q$$

into equation (27), we'll have:

$$X''+X(1+eX^2)=\sin\eta\tau \tag{28}$$

Where:

$$e=2\frac{b}{a}\frac{d^2}{\omega_0^2} \tag{29}$$

To solve Duffing Equation (28), we follow the following procedure:

$$X = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} X_n \sin \eta\tau = X_1 \sin \eta\tau + \\ + X_3 \sin 3\eta\tau + X_5 \sin 5\eta\tau + \ldots \tag{30}$$

If we substitute the expression (30) in to 28, and compare the similar coefficients of sin $n\eta\tau$, we will get a lot of cubic nonlinear algebraic equations. To our knowledge, there is no exact solution for these equations. Thus, we employed an approximated method. For this purpose, we applied three constraints equation (30) and we assumed that $X_n >> X_{n+1}$: therefore, in this case, we will have the following system of nonlinear equations:

$$\begin{aligned}
&(1-\eta^2)X_1 + \\
&+e\left(\frac{3}{4}X_1^3 + \frac{3}{2}X_1X_3X_5 + \frac{3}{4}X_1^2X_3 + \right. \\
&\left. + \frac{3}{2}X_1X_3^2 + \frac{3}{4}X_3^2X_5 + \frac{3}{2}X_1X_5^2\right) = 1 \\
&(1-9\eta^2)X_3 + \\
&+e\left(\frac{1}{11}X_1^3 + \frac{3}{4}X_3^3 + \frac{3}{2}X_1X_3X_5 + \right. \\
&\left. + \frac{3}{2}X_1^2X_3 + \frac{3}{2}X_3X_5^2 + \frac{3}{4}X_1^2X_5\right) = 0 \\
&(1-25\eta^2)X_5 + \\
&+e\left(\frac{3}{4}X_5^3 + \frac{3}{4}X_1^2X_3 + \frac{3}{4}X_1X_3^2 + \right. \\
&\left. + \frac{3}{2}X_3^2X_5 + \frac{3}{2}X_1^2X_5\right) = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

By solving of equations (31) by the method of Zeidel, we will have:

$$\begin{aligned}
(1-\eta^2)X_1 + \frac{3}{4}eX_1^3 &= 1 \\
X_3 &= \frac{ex_1^3}{4(9\eta^2-1)} \\
X_5 &= \frac{3ex_1X_3(X_1+X_3)}{4(25\eta^2-1)}
\end{aligned} \tag{32}$$

When the load is out of the beam, Exp. (27) will be as below in which the system will have free vibration.

$$\frac{dq^2}{d\tau^2} + \frac{a}{\omega^2 c}q\left(1 + 2\frac{b}{a}q^2\right) = 0 \tag{33}$$

Finally, by solving equation (33), we found the period of vibration:

$$T = 4 \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\frac{a}{c}\left(1 + \frac{b}{a}Q^2\right)}} \cdot k(\bar{\theta}) \tag{34}$$

Consequently, the circular frequency is as follows:

$$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{c}\left(1 + \frac{b}{a}Q^2\right)} \cdot \frac{1}{K(\bar{\theta})} \tag{35}$$

Where:

$$K(\bar{\theta}) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\bar{\theta} + \right. \\ \left. + \frac{9}{64}\sin^4\bar{\theta} + \frac{25}{256}\sin^6\bar{\theta} + \ldots\right]$$

ω is the circular frequency of vibration, Q is amplitude of vibration, and $k(\bar{\theta})$ is a second order elliptic integral. As the above formula indicates,

$$\frac{b}{a}Q^2$$

has a minus sign, which decreases the ω in comparison with ω_0 (as it was indicated in 35). Based on the equations expressed above, the explanation of the analysis of deflection, bending stress, and bending moment are as follows.

DEFLECTION

Deflection is obtained from the equation (21).

$$W(z,t)=\frac{d}{\omega^2}\sin\frac{\pi z}{l}\sum_{n=1,3,5}X_n\sin\frac{n\pi a}{l}$$

$$\sum_{n=1,3,5}X_n\sin\frac{n\pi a}{l}=X_1\sin\frac{\pi a}{l}+ \quad (36)$$

$$+X_3\sin\frac{3\pi a}{l}+X_5\sin\frac{5\pi a}{l}$$

$$a=Vt,\ and\ \frac{d}{\omega^2}=\frac{Pl^3}{EJ_0\pi^3\int[p''(\zeta)]^2d\zeta}$$

As it will be indicated in the tables below, the Coefficients X_3 and X_5 are too small and neglected.

$$W(z,t)=\frac{d}{\omega^2}X_1\sin\frac{\pi z}{l}\sin\frac{\pi a}{l} \quad (37)$$

BENDING STRESS

Bending Stress is Calculated by using Eq. (14) and

$$\varepsilon_z=y\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

which is called KIRHOF principle.

$$\sigma_z=E\left[y\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{2}{27}l_2\frac{E^3}{G^3}\left(y\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^3\right] \quad (38)$$

BENDING MOMENT

Bending Moment in every section of the beam is designed by the following equations:

$$M=\int\int\sigma_z y dxdy=$$

$$=E\int\int\left[y\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{2}{27}l_2\frac{E^3}{G^3}\left(y\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)dxdy\right] \quad (39)$$

$$M=Ej_0\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left[1-\frac{2}{27}l_2\frac{E^3}{G^3}\cdot\frac{J_1}{J_0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\right]$$

The expression

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

equals the following expression:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=-\frac{d}{\omega_0^2}\cdot\frac{\pi}{l^2}\sin\frac{\pi z}{l}\sin\frac{\pi a}{l}$$

Now the Obtained analytic solutions are being applied to the following example. It has been assumed that the material of the beam is copper (fig.2).

J_0=1,236×10^4

J_1=58,44×10^4 cm^6

G=0,46×10^4 kg/cm^2

E=1,241×10^6 kg/cm^2

l_2=0,18×10^6, L=2 m, P=20 kN

Then vibration amplitudes are determined and are shown in Table 1.

Based on Table (1) the diagram of resonance is indicated in Figure 3.

Deflection, Stress, and Bending moment in the section of the beam are calculated by using formulas (36), (37), and (38) for $\eta^2=1\ and\ z=a,$ which are indicated in Tables 2 and 3.

Bending stress in the middle section of the beam is indicated in Fig.4.

The Critical velocity is for given example is obtained 135,95 m/s Dynamical Coefficients according to velocity is obtained and have written in Table 4.

Dynamic Coefficients at linear State are derived by the Formula given by Krolov (1905).

$$\mu=\frac{1}{1-\beta^2}\left[1-\left(\beta\sin\frac{\pi a}{\beta l}\sin\frac{\pi a}{l}\right)\right]$$

Where:

$$a=vt,\quad \beta=\frac{\theta}{\omega},\quad \theta=\frac{\pi v}{l}$$

Table 1. Dimensionless vibration amplitudes

η^2	X^1			X_3	X_5
	X_1^1	X_2^1	X_3^1		
0,0	-70,83	69,83	1,00	-23,94	-32,49
0,889	-27,04	13,52	-	0,1902	$-1{,}31\times10^{-3}$
1	-17,03	-	-	0,041	$-1{,}01\times10^{4}$
2	1,00	-	-	$3{,}69\cdot10^{-6}$	$-1{,}63\times10^{11}$

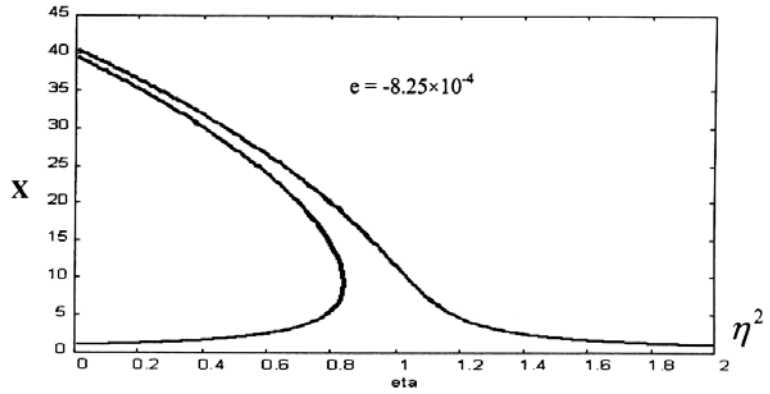


Fig. 3. Resonance Curve

Table 2. Calculation of deflection and bending moment at the point of load

a	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$3\frac{l}{8}$	$\frac{l}{2}$	$5\frac{l}{8}$	$3\frac{l}{4}$	$7\frac{l}{8}$
$W\,(cm)$	-0,054	-0,1856	-0,3468	-0,3712	-0,316	-0,1856	-0,054
$M\,(K.N.m)$	2,057	6,842	11,922	14,05	11,922	6,842	2,057

Table 3. Stress in the middle section of the beam

$Y\,(cm)$	6,61	7,9676	8,9816	10
$\sigma_z\,(mpa)$	1150	1320	1422	1500,0

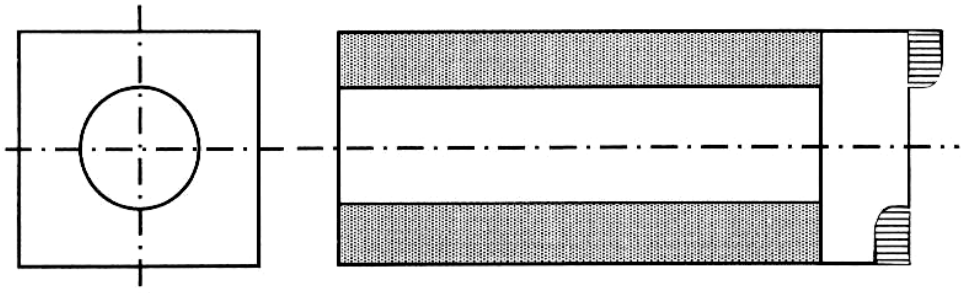


Fig. 4. The diagram of stress in the middle section of the beam

Table 4. Dynamical Coefficients

$V\,(m/s)$	0	25	50	75	100	124,57	135,95
$\eta^2 = \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2$	0	0,0338	0,1353	0,3036	0,541	0,83895	1
X	1	1,036	1,158	1,438	2,193	9,27	11,73

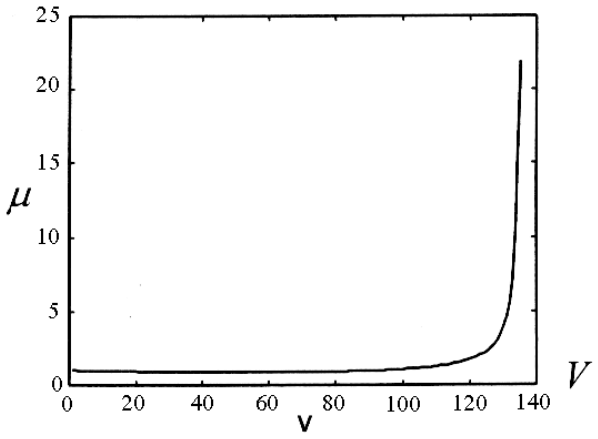


Fig. 5. Dynamical coefficient – velocity

Table 5. A comparison of deflection, stress, and bending moment at linear and nonlinear state

State	W (cm)	σ (mpa)	M (kNm)
Nonlinear	0,025	7,73	9,5
Linear	0,034	10,29	12,48

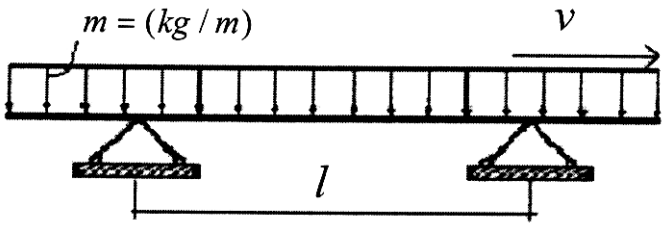


Fig.6. Schematic view of a prismatic beam Under moving load

The Dynamical Coefficient when the load is in the middle of the Span,

$$a = \frac{l}{2}$$

is estimated and showed at Fig.5.
As shown at the Fig.5, when

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 1$$

the critical V equals to 135,95 m/s and resonance happens at linear state. Whenever, at nonlinear state, X has definite value, equals 11,73 Table 4.
Based on v=50 m/s, (v=180 km/h), deflection, bending moment, and bending stress in the middle of the span are found by the obtained formulas for nonlinear state, and for linear state they are found by formulas which are given by Kerolov (1905 as cited in Kesiliev, 1969):

$$y = \frac{p\delta}{1-\beta^2}\left(\sin\frac{\pi a}{l} - \beta\sin\frac{1}{\beta}\frac{\pi a}{l}\right)$$

$$M = \frac{2pl}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi a}{l}}{(1-\beta^2)}\left(\sin\frac{\pi a}{l} - \beta\sin\frac{\pi a}{\beta l}\right)$$

The numerical resultants have written at Table 5.
To consider the effect of moving distributed continuous load it is assumed that the moving distributed continuous load moves along the prismatic beam as it is shown in Fig.6.
The potential and kinetic energy of this system can be written as follows.

$$\prod\int_0^l\left[\frac{1}{2}El_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2 - \frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}I_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^4\right]\cdot dz \quad (40)$$

and

$$ki = \frac{1}{2}\rho F\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dz + \frac{1}{2}m\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dz \quad (41)$$

Where E, G, I_2, ρ, m, and F denote modulus of elasticity, modules of elasticity in shear, nonlinearity coefficient, density, mass, of load per unit length and cross sectional area, respectively. The principl4e of Hamilton for this beam is as follow:

$$H = \int_{t_1}^{t_2}(\Pi - -ki)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}EI_0\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2 - \frac{1}{54}l_2\frac{E^4}{G^3}I_1\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\rho F\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]dtdz \quad (42)$$

by considering,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial z}$$

and Euler equation:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial k}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) = 0 \quad (43)$$

where

$$u = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, k = \frac{\partial w}{\partial t}, i = \frac{\partial w}{\partial z}$$

by considering Eq.(43) and Eq.(42) and further simplification the differential motion equation can be written as:

$$\frac{\pi^4}{I^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\zeta^4}+\frac{\pi^2 m v^2}{I^2 EI_0}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=$$
$$=\frac{2}{9}I_2\frac{E^3}{G^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8}{I^8}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\left[2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\zeta^3}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\zeta^4}\right] \quad (44)$$

Where

$$\zeta=\frac{\pi z}{l},\ \tau=\omega t.$$

As solving of the Equation (44) is difficult the consecutive approximated method is used. Furtheremore, to make the solving procedure easier, it is assumed at linear state.

$$w_0=Q_0\sin k\zeta\cdot\cos\tau \quad (45)$$

where Q_0 , Is amplitude of vibration of beam at linear state.
If Eq.(45) is substituted at right side of Eq.(44) and is simplified, the following equation is derived:

$$\frac{\pi^4}{l^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\zeta^4}+\frac{\pi^2 m v^2}{l^2 EI_0}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}+\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=$$
$$=\frac{1}{72}l_2\frac{E^3}{G^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8 k^8}{l^8}Q_0^3(3\sin k\zeta\cdot\cos\tau+$$
$$+\sin k\zeta\cdot\cos 3\tau-$$
$$-9\sin 3k\zeta\cdot\cos\tau-3\sin 3k\zeta\cdot\cos 3\tau) \quad (46)$$

Private solving of Eq.(11) is defined as follow:

$$w(\zeta,\tau)=a_1\sin k\zeta\cdot\cos\tau+a_2\sin k\zeta\cdot\cos 3\tau+$$
$$+a_3\sin 3k\zeta\cdot\cos\tau+a_4\sin 3k\zeta\cdot\cos 3\tau \quad (47)$$

Where a_1, a_2, a_3, a_4 are constant coefficients, by substitution Eq. (47) in to Eq.(46) and comparing the same coefficients $\sin k\zeta\cos\tau$, a_1, a_2, a_3, a_4 and ω are obtained, which are as follows:

$$\frac{\pi^4 k^4}{l^4}a_1+\frac{\pi^2 k^2 m v^2}{l^2 EI_0}a_1-\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}=$$
$$=\frac{1}{24}l_2\frac{E^3}{C^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8 k^8}{l^8}Q_0^3 \quad (48)$$

$$\frac{\pi^4 k^4}{l^4}a_2+\frac{\pi^2 k^2 m v^2}{l^2 EI_0}a_2-9\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}a_2=$$
$$=\frac{1}{72}l_2\frac{E^3}{C^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8 k^8}{l^8}Q_0^3 \quad (49)$$

$$81\frac{\pi^4 k^4}{l^4}a_3-9\frac{\pi^2 k^2 m v^2}{l^2 EI_0}a_3-\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}a_3=$$
$$=-\frac{1}{8}l_2\frac{E^3}{C^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8 k^8}{l^8}Q_0^3 \quad (50)$$

$$81\frac{\pi^4 k^4}{l^4}a_3-9\frac{\pi^2 k^2 m v^2}{l^2 EI_0}a_4-9\frac{\omega^2(\rho F+m)}{EI_0}a_4=$$
$$=-\frac{1}{24}l_2\frac{E^3}{C^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^8 k^8}{l^8}Q_0^3 \quad (51)$$

Thus circular frequency of system ω is obtained:

$$\omega^2=\frac{EI_0}{(\rho F+m)}\cdot\frac{\pi^2 k^2}{I^2}\left(\frac{\pi^2 k^2}{I^2}-\frac{m v^2}{EI_0}\right)\times \quad (52)$$
$$\times\left(1-\frac{1}{24}I_2\frac{E^4}{G^3}I_1\frac{\pi^6 k^6}{I^4}Q_0^2\frac{1}{\pi^2 k^2 EI_0-m v^2 I^2}\right)$$

The critical velocity is derived by considering the criteria ω=0,0

$$v_{cr}=\frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{EI_0}{m}\left(1-\frac{1}{24}l_2\frac{E^3}{G^3}\frac{I}{I_0}\frac{\pi^4 k^4}{l^4}Q_0^2\right)} \quad (53)$$

If l_2=0,0 the critical volacity is obtained at linear state,

$$V_{cr} = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{EI_0}{m}}$$

If at Eq. (52), m=0,0 that is the load is out of beam:

$$\omega = \frac{\pi^2 k^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{\rho F}\left(1-\frac{1}{24}l_2\frac{E^3}{G^3}\frac{I_1}{I_0}\frac{\pi^4 k^4}{l^4}Q_0^2\right)} \quad (54)$$

ω is the circular frequency at free vibration at physical nonlinear. It is seen from Eq.(52) the circular frequency of system depends on nonlinearity of material and the velocity of load.
To understand the analysis obtained here an example is presented in this section. For the assumed beam shown in Fig.(1) the parameters used in studied are as what follows:
E=2,1·10^5×*MPa*
G=0,87×10^5 *MPa*
l_2=0,085×10^6
q=mg=20 *kN/m* (unit weight of load)
P=ρfg=0,66 *kN/m* (unit weight of beam)
I_0=1,51·10^{-3} m^4
I_1=1,3·10^{-4} m^6
L=12 *m*
Circular frequency is obtained from Eq.(52) and plotted in Fig.8.
The critical velocity is obtained from equation (53): V_{cr}=103,044 m/sec. The dynamic coefficient (Yd/Ys) at the middle point of beam is drived from Eq.(52) and plotted in Fig.9.
Diagram of motion at interval of a period is showed as below. (for v=30 m/se, 50 m/se) Fig.10.

CONCLUSIONS

To conclude, a beam can be used for modeling of a bridge. Therefore, the results of this study are applicable for the designing of bridges under external loads. The created forces of the bridge depend on the velocity of the load.
In case of concentrated moving load with the increase of the speed, theoretically, resonance might happen as it is similar when the material behaves linearly. But if the material is assumed physically nonlinear, the process of resonance doesn't happen; that is when η^2=1, X has definite value. (Fig.3). Accordingly, the internal forces in elements of the bridge, will have definite values too.
To summarize, when the behavior of material is assumed to be physically nonlinear:
1. A method of analysis was obtained to analyze beams under moving loads.
2. Accordingly, the internal forces caused by external loads are reduced to 10-15 percent in comparison with the linear state. Thus, the obtained results are economical.
3. For the estimation of the amplitudes of free vibration motion, a precise formula has been obtained and the amplitudes of the system in forced vibration motion is obtained from infinite cubic nonlinear equations.
4. As it was indicated, the more the parameter, e, which depends on many other parameters, decreases, the amplitudes of vibration increase.
5. As the obtained results indicate, when the material of the beam is physically non-linear, the circular frequency decrease.
6. Based on the speed of the loads, dynamical coefficients are found. In case of distributed continuous moving loads. The following results are obtained:
1. The circular frequency and the dynamic coefficient are estimated according to different values of velocity (Fig. 8&9).
2. The amplitude of vibration at the middle of the beam during the vibration period is calculated at v=30 *m/s* and v=50 *m/s*. Thus, as fig.10 indicates the more the speed of the moving load, the more the amplitude of the vibration.
3. The internal forces for the beam can be calculated, as the estimation of the bending moment in the middle of the span indicates (Fig.11).

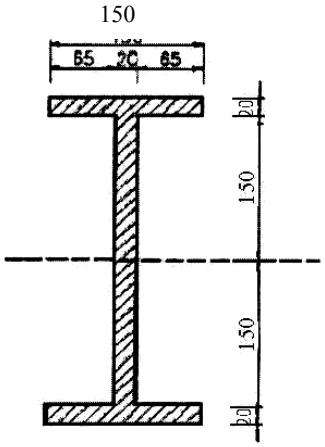


Fig. 7. Section of beam

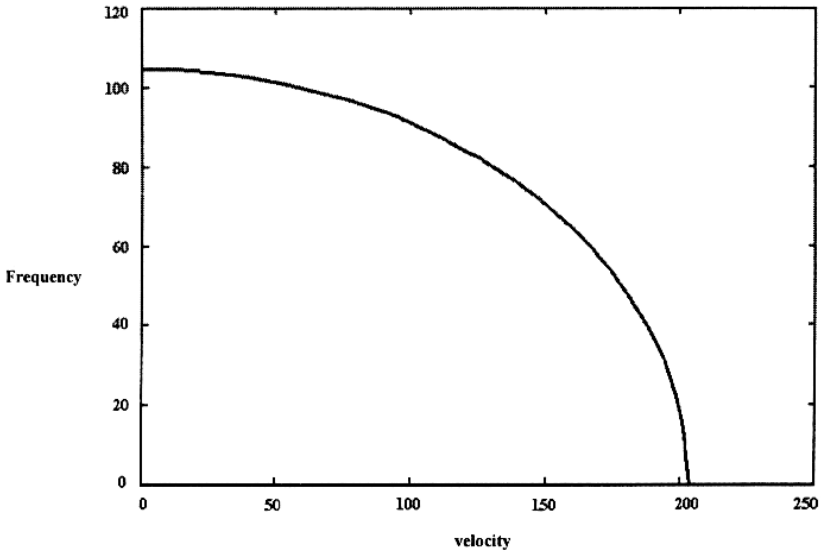


Fig.8. Frequency – Velocity Curve

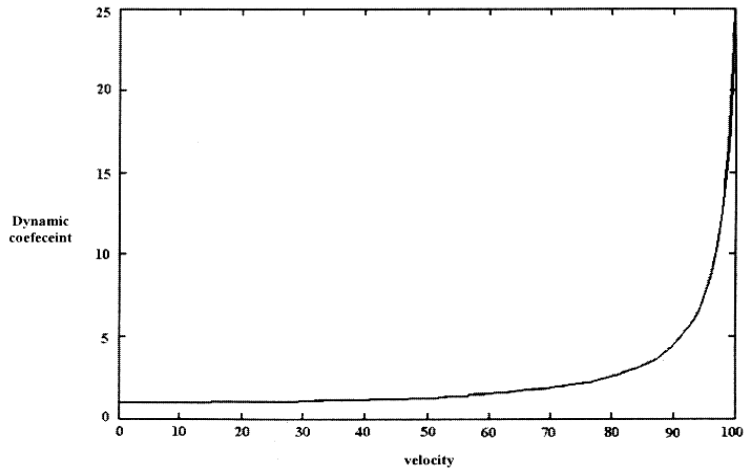


Fig.9. Dynamic Coefficient – Velocity Curve

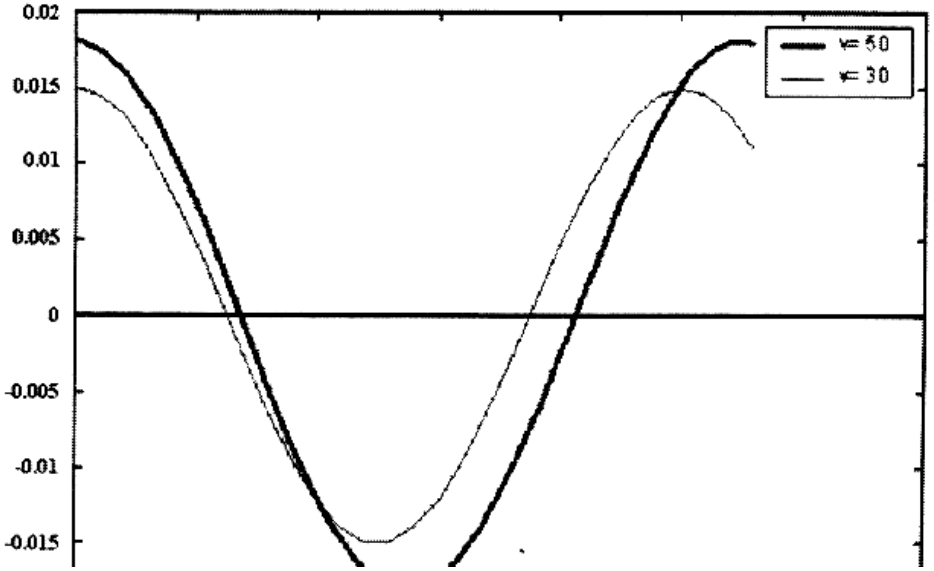


Fig.10. Amplitude of Vibration at the middle of beam during vibration period

The bending moment at the middle point ($a=L/2$)

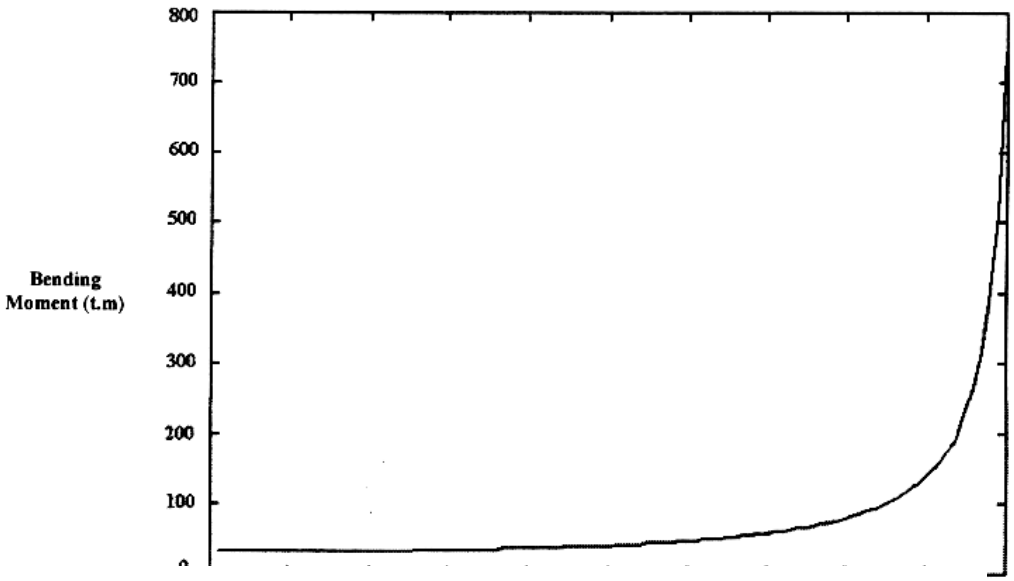


Fig.11. Bending moment – Velocity Curve

REFERENCE

[1]. **Kauderer, H.**, "Nonlinear mechanic". Moscow, Russia:Foreign Publish Literature, (1961).

[2]. **Babakov, I.M.**, "Theory of vibration". Moscow, Russia: Govermment Publisher, (1968).

[3]. **Glushkov, G.**, "Engineering method for analyzing strength and rigidity". Moscow, Russia: Scientific and Technical literature, (1974).

[4]. **Kesiliev,V.A.** "Structural mechanic". Moscow,Russia:Scientific and Technical literature, (1969).

[5]. **Panovko, Y.Q. & Qubanova, Y.Y.**, "Vibration and stability in elastic systems". Moscow, Russia: Physics-Mathematics Literature, (1987).

NOTATION

A=external work of the moving load
α=the distance of the concentrated load from the support
E=module of elasticity
F=an area of the section
G=sheer elastic module
H=Hamilton Principle
J_0=moment of inertia
$J_1 = \int\int x^4 dxdy$
K=volume contraction
$K(\sigma_0)$=average stress function
Ki=kinetic energy
L=the span of the beam
$l(t_0^2)$=sheer stress function
l_2=nonlinear coefficient
$p(\zeta)$=coordinate function
P=concentrated load
$p(z)$=the head vibration made of the beam
$q(\tau)$=generalized function
$q(z,t)$=equation distributed load
$w(z,t)$=deformation of the beam
X=dimensionless amplitude (dynamic coefficient)
Z= a distance of any point from the support
σ=stress
σ_0=average stress
σ_X, σ_Y, σ_Z=original stress
ε=strain
ε_{ij}=three – dimensional strain
ρ=density
π=potential energy
ω_0=circular frequency
θ=circular frequency of load
V=velocity

Ashkan, Safar, Khoda Bandeh Lou
Doctor of Philosophy of Technical Sciences
Faculty of Engineering, Civil Engineering Department,
Islamic Azad University,
Iran, Urmia Branch
Email: ashkan72@ rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В КОМБИНИРОВАННЫХ ВЫСОТНЫХ СООРУЖЕНИЯХ

В.К. Ахметов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: Одним из актуальных направлений строительства является разработка экологически чистой технологии сжигания природного топлива в современных ТЭЦ. Комбинированные высотные сооружения (КВС), которые служат для этой цели, объединяют дымовую трубу и мокрую градирню. В работе рассматриваются вопросы математического моделирования закрученных течений в комбинированных высотных сооружениях.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE SWIRLING FLOWS IN THE COMBINED HIGH-RISE BUILDINGS

Vadim K. Akhmetov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Working out of ecologically pure technology of burning of natural fuel in modern thermal power stations is one of actual aims in contemporary construction. The combined high-rise buildings which serve for this purpose, unite a chimney and wet cooling tower. Problems of mathematical modelling of the swirling flows in the combined high-rise buildings are under consideration in the distinctive paper.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Одним из актуальных направлений строительства является разработка экологически чистой технологии сжигания природного топлива в современных ТЭЦ. Комбинированные высотные сооружения (КВС), которые служат для этой цели, объединяют дымовую трубу и мокрую градирню. Схема такого устройства приведена на рис. 1, а принцип работы состоит в следующем. Дымовой газ, предварительно очищенный в установке сероудаления, подается в нижней части вытяжной башни в поток воздуха, разогретого в теплообменнике. При движении по вытяжной трубе поток дыма смешивается с теплым воздухом и за счет естественной тяги удаляется в атмосферу.

Проектируемые КВС должны удовлетворять ряду требований. Температура выводимых газов не должна опускаться ниже определенного предела, при котором происходит конденсация, приводящая к коррозии трубы. Скорость выхода газов должна быть более 4 м/с во избежании задувания ветра в трубу. Концентрация веществ, выбрасываемых в атмосферу, должна быть в пределах допустимых норм.

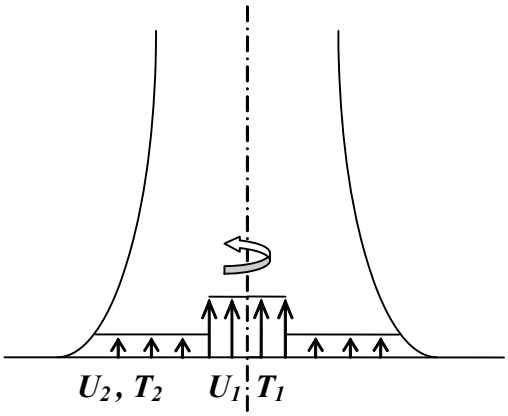


Рис. 1. Схема течения

Одно из перспективных направлений повышения эффективности работы КВС связано с использованием предварительной закрутки потока дымовых газов на входе в вытяжную трубу. Закрутка потока позволяет значительно интенсифицировать процессы тепломассообмена, способствовать улучшению смешения нагретых газов, снижать концентрацию вредных примесей на выходе из трубы, препятствовать образованию отрыва потока у стенок трубы.

Общая постановка задачи о смешении двух неизотермических турбулентных потоков основана на использовании полных уравнений Рейнольдса. Она достаточна сложна и ее решение трудоемко. Упрощенная модель базируется на параболизованных уравнениях Навье–Стокса. В работе [1] предложен эффективный метод решения уравнений пограничного слоя, в котором исходная система сводится к обыкновенным дифференциальных уравнениям, записанным на линиях тока. Для изучения процесса смешения двух незакрученных турбулентных потоков этот метод успешно применялся в [2]. В данной работе проводится обобщение и развитие этого метода применительно к исследованию закрученных течений.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ.

Рассмотрим задачу о смешении нагретых газов в вытяжной трубе КВС, боковая поверхность которой в цилиндрической системе координат r, φ, z задается уравнением $R(z)$. Закрученный поток дымового газа поступает в центральную часть $(0 \le r \le R_1)$ входного сечения $(z = 0)$ этой трубы. Внешний незакрученный поток теплого воздуха подается коаксиально $(R_1 \le r \le R_0 = R(0))$. Установившееся турбулентное закрученное течение смеси нагретых газов описывается уравнениями сохранения массы смеси, импульса, энергии и массы примесей. Каждое уравнение из системы законов сохранения в приближении пограничного слоя может быть записано в виде

$$\frac{\partial (r\rho UA)}{\partial z} + \frac{\partial (r\rho VA)}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial r} - \varepsilon_A \omega r, \quad (1)$$

где $A = \{1, U, H, E, W\}$,

$Q = \{0, r\tau, rq, r\mu\gamma_\alpha, \mu r \partial W / \partial r\}$,

$\varepsilon_A = 1$, $\omega = \dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g z$ при $A = U$,

$\varepsilon_A = 1$, $\omega = -\dfrac{\rho V W^2}{r} - \mu\left(\dfrac{\partial W}{\partial r} - \dfrac{W}{r}\right)^2$ при $A = H$,

$\varepsilon_A = 1$, $\omega = \dfrac{\rho V W}{r} + \mu\dfrac{W}{r}$ при $A = W$,

$\varepsilon_A = 0$ при $A = 1, E$.

Здесь приняты обозначения: U, V, W – осевая, радиальная и азимутальная составляющая скорости соответственно, μ – динамическая вязкость, g – ускорение силы тяжести, T – температура, c_p –удельная теплоемкость, h –энтальпия, H – полная энтальпия, q – тепловой поток, E – концентрация примеси, γ_α – массовый поток примеси, σ, σ_α – числа Прандтля, τ – сила трения.

Применим метод поверхностей равных расходов [1]. В цилиндрической системе координат r, φ, z определим гладкие линии

$$r = \delta_n(z), \quad n = 0, 1, 2, ..., N,$$

каждая из которых представляет линию тока и удовлетворяет уравнению

$$U\frac{\partial \delta_n}{\partial z} = V \quad \text{при} \quad r = \delta_n(z). \quad (2)$$

Сетка линий $\delta_n(z)$ заранее неизвестна и строится вместе с решением. Очевидно, что

$\delta_0 = 0$ – ось симметрии, а $\delta_N = R(z)$ – стенка канала. Газодинамические функции вычисляются на промежуточных линиях

$$r = \delta_{n+1/2}(z) = \frac{1}{2}(\delta_n + \delta_{n+1}),$$
$$n = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

Рассматривая в качестве неизвестных функции

$$f_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\delta_{n+1}^2 - \delta_n^2),\ n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

и интегрируя уравнение (1) по r от $r = \delta_n$ до $r = \delta_{n+1}$ с учетом (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на каждой линии $r = \delta_{n+1/2}(z)$

$$U\dot{U} = \frac{1}{\rho f}R_u - (1-\frac{1}{\gamma})\pi_T \frac{1}{\rho}\dot{p} - \pi_g,$$
$$U\dot{T} = \frac{1}{\rho f}R_T - (1-\frac{1}{\gamma})U\frac{1}{\rho}\dot{p} + \frac{1}{\rho}\frac{\pi_w^2}{\pi_T}G_T,$$
$$U\dot{E} = \frac{1}{\rho f}R_E, \qquad (3)$$
$$U\dot{W} = \frac{1}{\rho f}R_w + \frac{1}{\rho}G_w,$$
$$\frac{\dot{f}}{f} = -\frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{U}}{U}.$$

Здесь точка означает дифференцирование по z. Система уравнений (3) записана в безразмерном виде. Для этого U, T, ρ, E, p, W отнесены соответственно к максимальным значениям U_1, T_1, ρ_1, E_1, p_1, W_1 внутренней струи на входе $z = 0$ в канал, а f – к R_0^2. Три безразмерных параметра системы (3) $\pi_g = R_0 g / U_1^2$, $\pi_w = W_1 / U_1$, $\pi_T = c_p T_1 / U_1^2$ представляют собой число Фруда, параметр закрутки и аналог числа Маха M: $\pi_T = 1/(M^2(\gamma-1))$.

В рассматриваемом приближении давление определяется уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\pi_w^2}{\pi_T}\rho\frac{W^2}{r},$$

которое после интегрирования может быть записано в виде

$$p(z,r) = p^w(z,r) + p_0(z),$$
$$p^w(z,r) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\pi_w^2}{\pi_T}\int_0^r \rho\frac{W^2}{r}dr.$$

Для нахождения $p(z,r)$ вычисляется $p^w(z,r)$ по формуле средних, рассчитывается $\dot{p}^w(z,r)$ по рекуррентным соотношениям

$$\dot{p}_1^w = \alpha_{1/2} f_{1/2},$$
$$\dot{p}_{n+1}^w = \dot{p}_n^w + \alpha_{n+1/2} f_{n+1/2},\quad n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$\dot{p}_{n+1/2}^w = 0.5(\dot{p}_n^w + \dot{p}_{n+1}^w),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$
$$\alpha_{n+1/2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\pi_w^2}{\pi_T}\frac{\rho f}{r^2}\left(2W\dot{W} - W^2\frac{\dot{U}}{U}\right)\Bigg|_{\delta_{n+1/2}}$$

и определяется $p_0(z)$ интегрированием уравнения

$$\dot{p}_0\sum_{n=0}^{N-1} g_{n+1/2} + \sum_{n=0}^{N-1}\dot{p}^w g_{n+1/2} =$$
$$= R\dot{R} -$$
$$-\sum_{n=0}^{N-1}\left(\pi_g\frac{f_{n+1/2}}{U^2} + \frac{R_T}{\rho UT} + \frac{f_{n+1/2}}{\rho UT}\pi_w^2\frac{G_T}{\pi_T} - \frac{R_u}{\rho U^2}\right) \qquad (4)$$
$$g_{n+1/2} = -\frac{f_{n+1/2}}{\gamma(p^w + p_0)} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\pi_T f_{n+1/2}\frac{1}{\rho U^2}.$$

Плотность ρ на каждой линии вычисляется по формуле

$$\rho(z,\delta_{n+1/2}) = \frac{p(z,\delta_{n+1/2})}{T(z,\delta_{n+1/2})}. \qquad (5)$$

В уравнения (4), (5) входят диссипативные члены

$$R_u = [r\mu\frac{\partial U}{\partial r}], \quad R_w = [r\mu\frac{\partial W}{\partial r}],$$

$$R_E = \frac{1}{\sigma_\alpha}[r\mu\frac{\partial E}{\partial r}],$$

$$R_T = \frac{1}{\sigma}[r\mu\frac{\partial T}{\partial r}] + \frac{1}{\pi_T}\left([r\mu U\frac{\partial U}{\partial r}] - U[r\mu\frac{\partial U}{\partial r}]\right), \qquad (6)$$

$$G_T = \mu\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r}\right)^2 + \frac{\rho V W^2}{r},$$

$$G_w = -\frac{\rho V W}{r} - \mu\frac{W}{r^2},$$

где величина в скобках означает $[Q] = Q_{n+1} - Q_n$. Таким образом, задача сводится к интегрированию $5N+1$ уравнений системы (3), (4) с учетом выражений (5), (6).

Граничные условия на оси течения для неизвестных $A = \{U, W, T, E\}$ системы (3) следуют из условий симметрии. В пристенной части течения по мере движения газа развивается пограничный слой. В данном исследовании считалось, пограничный слой является тонким и зона равномерного течения простирается до стенки, поэтому принималось

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 0 \quad (\delta = 0; R(z)).$$

Система уравнений (3)–(6) замыкается заданием модели турбулентности. Принимается алгебраическая модель на основе представления о величине длины пути смешения l_i Прандтля, которая для закрученных течений связана с турбулентной вязкостью ν_{ti} следующим образом:

$$l_i^2 = \nu_{ti}\left\{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2 + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\varphi}{r}\right)\right]^2\right\}^{-1/2}, \qquad (7)$$

где индекс i принимает значения z для осевого направления и φ для азимутального. Безразмерные значения эмпирических констант задавались равными: $l_z / R_0 = 0.068$; $l_\varphi / R_0 = 0.034$. Данные значения получены в экспериментах [3] для закрученных течений типа газовых завес. Проведенные в [4, 5] исследования показали, что при использовании этих значений l_z и l_φ имеется хорошее соответствие численных результатов с экспериментальными данными.

3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ.

Расчеты проводились при следующих распределениях в начальном сечении $z = 0$:

$$\begin{aligned} &U(r) = U_1 = 1,\ W(r) = W_1(r), \\ &\quad T(r) = T_1 = 1,\ E(r) = E_1 = 1,\ 0 \le r \le r_1, \\ &U(r) = U_2, \quad W(r) = W_2, \\ &\quad T(r) = T_2, \quad E(r) = E_2, \quad r_1 < r \le 1, \end{aligned} \qquad (8)$$

где $r_1 = R_1 / R_0$. Область решения определялась длиной $z_0 = 2.2\,R_0$, боковая поверхность принималась либо цилиндрической $R_0 = 1$, либо задавалась уравнением $R(z) = 1 - 0.15\,z$. В качестве начального профиля азимутальной скорости для внутреннего потока в (8) принималось распределение типа свободного вихря [5].

Типичные значения параметров комбинированных высотных сооружений составляют: диаметр основания 90 м, высота 100 м, расход дымовых газов во внутреннем потоке 300 м^3/с при температуре газов 120ºС, расход воздуха для внешнего потока 5000 м^3/с при температуре газов 70ºС. В соответствии с

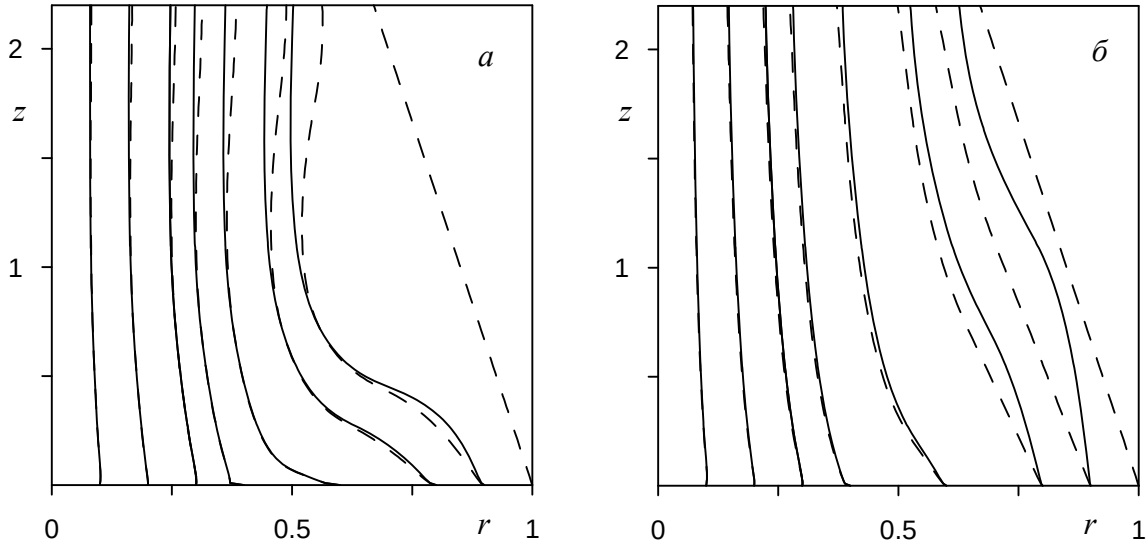


Рис. 2. Линии тока при $\pi_w = 1$, $r_1 = 0.33$, $T_2 = 0.8$, $E_2 = 1$, $W_2 = 0$, $U_2 = 0.2$ (*а*), 0.4 (*б*); $R(z) = 1$ – сплошные линии, $R(z) = 1 - 0.15z$ – штриховые линии

этим значения безразмерных величин в расчетах задавались равными $\sigma = 0.72$, $\pi_g = 6.45$, $\pi_T = 5754$.

Примеры расчетов течений внутри вытяжной трубы представлены на рис. 2. Линии тока достаточно быстро сходятся к центру по мере увеличения расстояния z. Эту информацию можно использовать для профилирования стенок вытяжной трубы с целью сокращения габаритов возводимого сооружения, уменьшения расходов на материалы и повышения устойчивости конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00778).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шкадов В.Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Ин-т механики МГУ. Научн. тр. № 25. 1973. 160 с.
2. **Шкадов В.Я., Шкадова В.П.** Гидродинамика экологически чистых систем удаления дымовых газов. М.: Ин-т механики МГУ. Отчет № 4349. 1994. 49 с.
3. **Кутателадзе С.С., Волчков Э.П., Терехов В.И.** Аэродинамика и тепломассообмен в ограниченных вихревых потоках. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1987. 283 с.
4. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Взаимодействие струи с кольцевым закрученным потоком // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 39-46.
5. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Численное исследование рециркуляционных зон в вихревой камере // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 3. С. 39-45.

Ахметов Вадим Каюмович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

ОПЕРАТОР ЖЕСТКОСТИ И БЕЗУСЛОВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛИТЫ

А.Б. Золотов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов, М.В. Воробьев
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В статье формулируется оператор жесткости смешанной краевой задачи. Предлагаемая формулировка включает в себя постановку задачи как внутри области, так и на ее границе. Показывается, что такой оператор является самосопряженным и ему соответствует безусловная вариационная постановка.

STIFFNESS OPERATOR AND UNCONDITIONAL VARIATIONAL FORMULATION OF THE PROBLEM OF PLATE BENDING

Alexander B. Zolotov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov, Pavel A. Akimov, Mikhail V. Vorobjev
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Stiffness operator of the mixed boundary problem is formulated in the distinctive paper. The presenting formulation includes statement of a problem inside domain and on domain boundary. It is shown, that this operator is self-conjugated with corresponding unconditional formulation.

В статье формулируется оператор жесткости смешанной краевой задачи. Предлагаемая формулировка включает в себя постановку задачи как внутри области, так и на ее границе. Показывается, что такой оператор является самосопряженным и ему соответствует безусловная вариационная постановка.
Операторная формулировка задачи для естественных краевых условий имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \theta M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta M_{22}}{\partial y^2} = $$
$$= -\theta q + \delta_\Gamma Q + \frac{\partial}{\partial x}\delta_\Gamma M_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta_\Gamma M_y, \qquad (1)$$
$$(x, y) \in \omega$$

или
$$Lw = F, \qquad (2)$$

где изгибающие и крутящий моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} определяются формулами

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}),$$
$$M_{22} = D(\nu\chi_{11} + \chi_{22}), \qquad (3)$$
$$M_{12} = \frac{1}{2}D(1-\nu)\chi_{12}$$

входящие в это представление компоненты тензора кривизны χ_{11}, χ_{22}, χ_{12} определяются как

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad (4)$$
$$\chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; h – толщина; ν – коэффициент Пуассона; w

– прогиб плиты; c – жесткость основания; q – плотность нагрузки; Q, M_x, M_y – поперечная сила и крутящие моменты на границе плиты.

ИСХОДНЫЙ ОПЕРАТОР В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Задачу (1) можно представить в виде

$$-L_2^*\theta\overline{M} = F, \qquad (5)$$

где $L_2^* = \begin{bmatrix}\partial_1^2 & \partial_2^2 & 2\partial_2^*\partial_1^*\end{bmatrix}$ и $\overline{M} = \begin{bmatrix}M_{11} & M_{22} & M_{12}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$$\partial_k^* = -\partial_k\ , \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k},\ k = 1, 2$$

Из формул (3) следует представление для вектора моментов $\overline{M}$:

$$\overline{M} = C\overline{\chi}\ , \qquad (6)$$

где

$$C = D\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \text{ и } \overline{\chi} = \begin{bmatrix}\chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{12}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

В свою очередь из формул (4) вытекает представление для вектора кривизны $\overline{\chi}$:

$$\overline{\chi} = \begin{bmatrix}-\partial_1^2 w\\ -\partial_2^2 w\\ -2\partial_2\partial_1 w\end{bmatrix} \qquad (7)$$

или

$$\overline{\chi} = -L_2 w, \qquad (8)$$

где

$$L_2 = \begin{bmatrix}\partial_1^2\\ \partial_2^2\\ 2\partial_2\partial_1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, оператор L задачи (2) (исходная формулировка (1)) может быть представлен в следующем мультипликативном виде

$$L = L_2^* C L_2\,. \qquad (9)$$

Рассмотрим операторы L_2 и L_2^*. Их можно представить как произведения дифференциальных операторов первого порядка

$$L_2 = L_1\nabla \quad \text{и} \quad L_2^* = \nabla^* L_1^*, \qquad (10)$$

где

$$\nabla = \begin{bmatrix}\partial_1\\ \partial_2\end{bmatrix} = \mathrm{grad}\,, \quad \nabla^* = \begin{bmatrix}\partial_1^* & \partial_2^*\end{bmatrix} = \mathrm{div}\,.$$

$$L_1 = \begin{bmatrix}\partial_1 & 0\\ 0 & \partial_2\\ \partial_2 & \partial_1\end{bmatrix}, \quad L_1^* = \begin{bmatrix}\partial_1^* & 0 & \partial_2^*\\ 0 & \partial_2^* & \partial_1^*\end{bmatrix},$$

Рассмотрим действие оператора L на функции, имеющие скачок при пересечении границы области, т.е. $w = \theta w$ ($\theta = \theta(x)$ – характеристическая функция области определения краевой задачи)

$$L\theta w = L_2^* C L_2 \theta w = \nabla^* L_1^* C L_1 \nabla\theta w\,.$$

Предварительно определим геометрические величины: вектор нормали и вектор касательной в точках границы области:

$\overline{\nu}$ – вектор внутренней нормали: $|\,\overline{\nu}\,| = 1$,

$\overline{\tau}$ – вектор касательной: $|\,\overline{\tau}\,| = 1$.

Как видно из рисунка 1 между координатами нормали и касательной имеется зависимость $\tau_1 = \nu_2$ и $-\tau_2 = \nu_1$, или в матрично-векторном виде:

$$\overline{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nu_2\\ -\nu_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\overline{\nu}\,,$$

соответственно, $\overline{\nu} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\overline{\tau}\,.$

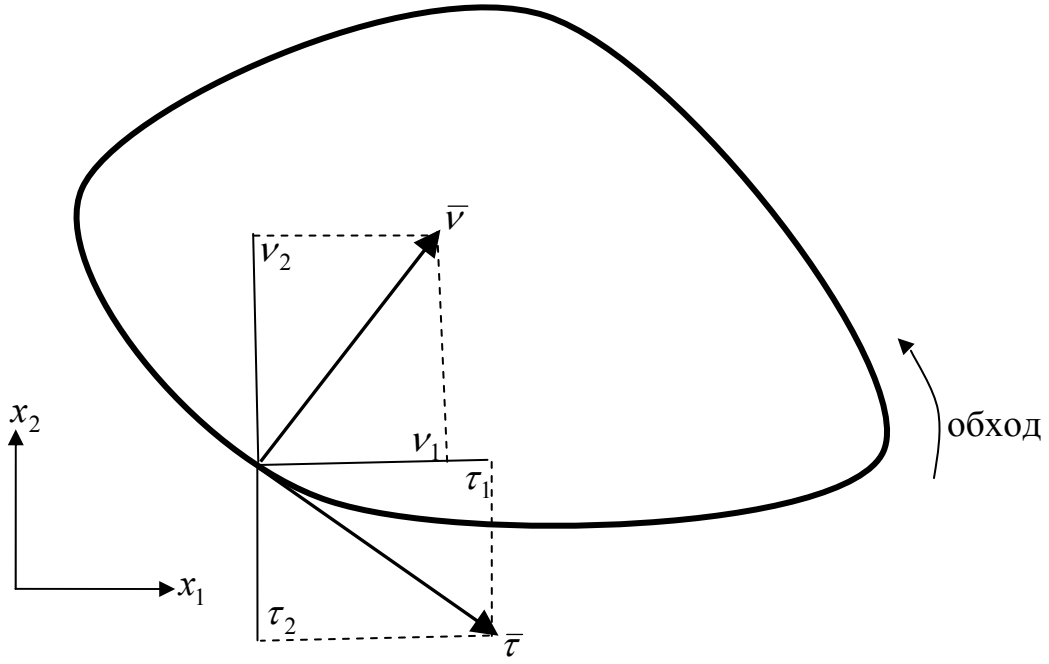


Рис. 1.

В последующих выкладках при дифференцировании характеристической функции воспользуемся соотношением

$$\partial_k \theta = \nu_k \delta_\Gamma, \tag{11}$$

где δ_Γ – дельта-функция, сосредоточенная на границе области. Можно сразу отметить, что

$$\nabla\theta = \delta_\Gamma \bar{\nu} \quad \text{и} \quad \nabla^*\theta = -\delta_\Gamma \bar{\nu}^{\mathrm{T}} = -\delta_\Gamma \bar{\nu}^*. \tag{12}$$

Кроме того, введем обозначение

$$\Gamma_\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Gamma_\nu^* = \Gamma_\nu^T = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & \nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Тогда

$$L_1\theta = \delta_\Gamma \Gamma_\nu \quad \text{и} \quad L_1^*\theta = -\delta_\Gamma \Gamma_\nu^*.$$

Рассмотрим действие дифференциального оператора L_2 на произведение характеристической функции области θ и произвольной функции w:

$$\begin{aligned} L_2\theta w = L_1\nabla\theta w &= L_1(\underbrace{(\nabla\theta)}_{\delta_\Gamma\bar{\nu}} w + \theta(\nabla w)) \\ &= L_1(\delta_\Gamma \bar{\nu} w + \theta(\nabla w)) = \\ &= L_1(\delta_\Gamma \bar{\nu} w) + (L_1\theta)(\nabla w) + \theta(\underbrace{L_1\nabla}_{L_2} w) \\ &= L_1(\delta_\Gamma \bar{\nu} w) + \delta_\Gamma \Gamma_\nu \nabla w + \theta L_2 w. \end{aligned}$$

Подставляем полученное выражение в исходный оператор:

$$\begin{aligned} L_2^* C L_2 \theta w &= L_2^* \theta C L_2 w + L_2^* C \delta_\Gamma \Gamma_\nu \nabla w \\ &+ L_2^* C L_1(\delta_\Gamma \bar{\nu} w) = \\ &= L_2^* \theta C L_2 w + L_2^* C(\delta_\Gamma \Gamma_\nu \nabla + L_1 \bar{\nu} \delta_\Gamma) w \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение для сопряженного дифференциального оператора $L_2^*\theta\bar{\psi}$, где

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{bmatrix}$$

– произвольная, имеющая вторую производную, вектор-функция:

$$L_2^*\theta\overline{\psi} = \nabla^* L_1^*\theta\overline{\psi} = \nabla^*((L_1^*\theta)\overline{\psi} + \theta(L_1^*\overline{\psi}))$$
$$= \nabla^*(-\delta_\Gamma\Gamma_\nu^*\overline{\psi} + \theta L_1^*\overline{\psi}) =$$
$$= -\nabla^*\delta_\Gamma\Gamma_\nu^*\overline{\psi} + (\nabla^*\theta)L_1^*\overline{\psi} + \theta\nabla^* L_1^*\overline{\psi}$$
$$= \theta L_2^*\overline{\psi} - \delta_\Gamma\overline{\nu}^* L_1^*\overline{\psi} - \nabla^*\delta_\Gamma\Gamma_\nu^*\overline{\psi}$$
$$= \theta L_2^*\overline{\psi} - (\delta_\Gamma\overline{\nu}^* L_1^* + \nabla^*\Gamma_\nu^*\delta_\Gamma)\overline{\psi}$$

Заменим $\overline{\psi}$ на $CL_2 w$ и подставим в полученное ранее промежуточное выражение исходного оператора

$$L\theta w = \theta L w - (\delta_\Gamma\overline{\nu}^* L_1^* + \nabla^*\Gamma_\nu^*\delta_\Gamma)CL_2 w +$$
$$L_2^* C(\delta_\Gamma\Gamma_\nu\nabla + L_1\overline{\nu}\delta_\Gamma)w$$

Обозначим

$$\ell = -(\delta_\Gamma\overline{\nu}^* L_1^* + \nabla^*\Gamma_\nu^*\delta_\Gamma)CL_2, \qquad (14)$$

тогда

$$\ell^* = -L_2^* C(\delta_\Gamma\Gamma_\nu\nabla + L_1\overline{\nu}\delta_\Gamma). \qquad (15)$$

Таким образом, приходим к следующему виду оператора задачи, определенному на всем пространстве

$$L\theta w = \theta L w + \ell w - \ell^* w. \qquad (16)$$

Преимущество предлагаемой постановки (7) состоит в явной записи операторов, которые необходимы для дальнейших исследований. Кроме того, такая постановка правильно отражает весовые характеристики, соответствующие как операторам внутри области, так и операторам на границе, и может рассматриваться на любой окаймляющей области.

ИСХОДНЫЙ ОПЕРАТОР В ГРАНИЧНЫХ КООРДИНАТАХ

При представлении исходной задачи с использованием граничных координат (так называемые «ассоциированные координаты») примем, что положительное направление нормали к границе внутреннее и положительное направление основной граничной координаты против часовой стрелки. Кроме того, оси координат x_1 и x_2 направлены, соответственно, вправо и вверх. (См. рис. 1.) Отметим, что положительное направление нормали внутрь вытекает из вариационных постановок. Граничные координаты ортогональны и образуются из линии вдоль границы и нормали к ней.

Запишем формулы вычисления производных в точках границы по нормали и касательной:

$$\begin{aligned}\partial_\nu &= \nu_1\partial_1 + \nu_2\partial_2 \\ \partial_\tau &= \tau_1\partial_1 + \tau_2\partial_2\end{aligned} \qquad (17)$$

или в векторно-матричной форме

$$\nabla_\Gamma = \begin{bmatrix}\partial_\nu \\ \partial_\tau\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2 \\ \tau_1 & \tau_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{bmatrix}$$
$$= Q_\Gamma\nabla, \qquad (18)$$

где Q_Γ – матрица перехода от декартовых координат к граничным, т.е.:

$$Q_\Gamma = \begin{bmatrix}\overline{\nu}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\tau}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{\nu} & \overline{\tau}\end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Сопряженный оператор градиента в граничных координатах имеет вид

$$\nabla_\Gamma^* = (Q_\Gamma\nabla)^* = \nabla^* Q_\Gamma^* = \nabla^* Q_\Gamma, \qquad (20)$$

т.к. $Q_\Gamma^* = Q_\Gamma$.

Заметим, что

$$Q_\Gamma{}^2 = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда следует

$$Q_\Gamma^{-1} = Q_\Gamma$$

Тогда справедлива зависимость

$$\nabla = Q_\Gamma \nabla_\Gamma = \begin{bmatrix} \nu_1\partial_\nu + \nu_2\partial_\tau \\ \nu_2\partial_\nu - \nu_1\partial_\tau \end{bmatrix} = \overline{\nu}\partial_\nu + \overline{\tau}\partial_\tau . \quad (21)$$

Следовательно,

$$\nabla^* = \partial_\nu^* \overline{\nu}^{\mathrm{T}} + \partial_\tau^* \overline{\tau}^{\mathrm{T}} . \quad (22)$$

Кроме того

$$\nabla^* = (Q_\Gamma \nabla_\Gamma)^* = \nabla_\Gamma^* Q_\Gamma^* = \nabla_\Gamma^* Q_\Gamma .$$

Далее, определим полученную в предыдущем пункте основную формулировку краевой задачи применительно к граничным координатам. Точнее, переопределению подлежат граничные дифференциальные операторы ℓ и ℓ^*. Для этого предварительно представим в граничных координатах операторы L_1 и L_1^*:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \nu_1\partial_\nu + \tau_1\partial_\tau & 0 \\ 0 & \nu_2\partial_\nu + \tau_2\partial_\tau \\ \nu_2\partial_\nu + \tau_2\partial_\tau & \nu_1\partial_\nu + \tau_1\partial_\tau \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \partial_\nu + \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} \partial_\tau = \Gamma_\nu \partial_\nu + \Gamma_\tau \partial_\tau , \quad (23)$$

где

$$\Gamma_\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_2 & 0 \\ 0 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}.$$

(Заметим, что матрица Γ_ν уже была определена в предыдущем пункте)

Отсюда получим представление для сопряженного оператора L_1^*:

$$L_1^* = (\Gamma_\nu \partial_\nu)^* + (\Gamma_\tau \partial_\tau)^* = \partial_\nu^* \Gamma_\nu^* + \partial_\tau^* \Gamma_\tau^* \quad (24)$$

где

$$\Gamma_\nu^* = \Gamma_\nu^T = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & \nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_\tau^* = \Gamma_\tau^T = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ 0 & \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_2 & 0 & -\nu_1 \\ 0 & -\nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}.$$

Подставим полученные выражения в ℓ и ℓ^*:

$$\ell = -(\delta_\Gamma \overline{\nu}^* L_1^* + \nabla^* \Gamma_\nu^* \delta_\Gamma) C L_2$$
$$= -\delta_\Gamma \overline{\nu}^* L_1^* C L_2 - \partial_\nu^* \overline{\nu}^* \Gamma_\nu^* \delta_\Gamma C L_2 - \partial_\tau^* \overline{\tau}^* \Gamma_\nu^* \delta_\Gamma C L_2$$
$$-\ell^* = L_2^* C (\delta_\Gamma \Gamma_\nu \nabla + L_1 \overline{\nu} \delta_\Gamma) =$$
$$L_2^* C L_1 \overline{\nu} \delta_\Gamma + L_2^* C \delta_\Gamma \Gamma_\nu \overline{\nu} \partial_\nu + L_2^* C \delta_\Gamma \Gamma_\nu \overline{\tau} \partial_\tau$$

Обозначим

$$\Gamma_{\nu\nu} = \Gamma_\nu \overline{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \\ 2\nu_1\nu_2 \end{bmatrix},$$
$$\Gamma_{\nu\nu}^* = \begin{bmatrix} \nu_1^2 & \nu_2^2 & 2\nu_1\nu_2 \end{bmatrix},$$
$$\Gamma_{\tau\nu} = \Gamma_\tau \overline{\nu} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1\nu_1 \\ \tau_2\nu_2 \\ \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1 \end{bmatrix} = \Gamma_{\nu\tau},$$
$$\Gamma_{\tau\nu}^* = \begin{bmatrix} \tau_1\nu_1 & \tau_2\nu_2 & \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1 \end{bmatrix} = \Gamma_{\nu\tau}^* .$$

Кроме того, заметим, что ∂_τ и ∂_τ^* перестановочны с δ_Γ. Тогда

$$\ell - \ell^* = \\ = -\delta_\Gamma(\overline{\nu}^* L_1^* + \partial_\tau^* \Gamma_{\tau\nu}^*) C L_2 \\ - \partial_\nu^* \delta_\Gamma \Gamma_{\nu\nu}^* C L_2 + \\ + L_2^* C(L_1 \overline{\nu} + \Gamma_{\nu\tau}\partial_\tau)\delta_\Gamma \\ + L_2^* C \Gamma_{\nu\nu} \delta_\Gamma \partial_\nu .$$

Введем следующие обозначения для физико-геометрических понятий и соответствующих им дифференциальных операторов.

$$\blacktriangleright\ \overline{M} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = L_M w =$$

– вектор внутренних моментов,
где L_M – оператор вычисления внутренних моментов:

$$L_M = -CL_2 = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1^2 \\ \partial_2^2 \\ 2\partial_1\partial_2 \end{bmatrix} \\ = -D \begin{bmatrix} \partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2 \end{bmatrix}.$$

$$\blacktriangleright\ M_\nu = L_{M\nu} w$$

– изгибающий момент (по нормали),
где $L_{M\nu}$ – оператор вычисления моментов по нормали:

$$L_{M\nu} = \Gamma_{\nu\nu}^* L_M = -D \begin{bmatrix} \nu_1^2 & \nu_2^2 & 2\nu_1\nu_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2 \end{bmatrix}.$$

$$\blacktriangleright\ M_\tau = L_{M\tau} w$$

– крутящий момент (по касательной),
где $L_{M\tau}$ – оператор вычисления моментов по касательной:

$$L_{M\tau} = \Gamma_{\tau\nu}^* L_M = -D \begin{bmatrix} \tau_1\nu_1 & \tau_2\nu_2 & \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright\ \overline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = L_Q w$$

– вектор внутренних поперечных сил,
где L_Q – оператор вычисления внутренних поперечных сил:

$$L_Q = -L_1^* L_M = -D \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2 \end{bmatrix} = \\ = -D \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1^2 + \nu\partial_1\partial_2^2 + (1-\nu)\partial_1\partial_2^2 \\ \nu\partial_2\partial_1^2 + \partial_2\partial_2^2 + (1-\nu)\partial_1^2\partial_2 \end{bmatrix} = \\ - D \begin{bmatrix} \partial_1(\partial_1^2 + \partial_2^2) \\ \partial_2(\partial_1^2 + \partial_2^2) \end{bmatrix} = - D \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} \nabla^2 .$$

Следовательно,

$$L_Q = -D\nabla\nabla^2 .$$

$$\blacktriangleright\ Q_\nu = L_{Q\nu} w$$

– граничная поперечная сила,
где $L_{Q\nu}$ – оператор вычисления поперечной силы на границе:

$$L_{Q\nu} = \overline{\nu}^* L_Q = -D\overline{\nu}^* \nabla\nabla^2 = -D\partial_\nu \nabla^2 = D\partial_\nu^* \nabla^2 .$$

$$\blacktriangleright\ V = -Q_\nu + \partial_\tau^* M_\tau = L_V w$$

– так называемая обобщенная поперечная сила,
где L_V – оператор вычисления обобщенных поперечных сил на границе:

$$L_V = -L_{Q\nu} + \partial_\tau^* L_{M\tau}$$

➤ $\varphi_\nu = \partial_\nu w$

– угол поворота по нормали.

Используя представленные выше обозначения, получаем следующее операторное соотношение

$$L\theta w = \theta L w + \delta_\Gamma V + \partial_\nu^* \delta_\Gamma M_\nu - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \varphi_\nu - L_V^* \delta_\Gamma w \qquad (25)$$

Такая запись операторной постановки включает в явном виде непосредственно физические величины, которые определяют краевые условия.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Определим характеристические функции краевых условий:

$$\kappa_1(x) = \begin{cases} 1, & w - \text{задано} \\ 0, & w - \text{не задано} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\tilde{\kappa}_1(x) = 1 - \kappa_1(x) = \begin{cases} 0, & V - \text{не задано} \\ 1, & \text{V - задано} \end{cases}, \qquad (26)$$

$$\kappa_2(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_\nu - \text{задано} \\ 0, & \varphi_\nu - \text{не задано} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\tilde{\kappa}_2(x) = 1 - \kappa_2(x) = \begin{cases} 0, & M_\nu - \text{не задано} \\ 1, & \text{M}_\nu \text{ - задано} \end{cases}. \qquad (27)$$

Таким образом, характеристические функции $\kappa_1(x)$ и $\tilde{\kappa}_1(x)$ в стандартных случаях ортогональны. Это связано с физическими фактами, т.е. на границе задан либо прогиб, либо обобщенная поперечная сила. Аналогично, функции $\kappa_2(x)$ и $\tilde{\kappa}_2(x)$ также ортогональны, поскольку с физической точки зрения может быть задан либо угол поворота, либо изгибающий момент.

Если величина «$\circ$» задана, будем обозначать её «$\breve{\circ}$». Например, при $\kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 1$ – первая краевая задача, т.е. $w\big|_\Gamma = \breve{w}\big|_\Gamma$ и $\varphi_\nu\big|_\Gamma = \breve{\varphi}_\nu\big|_\Gamma$, а при $\kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 0$ – вторая краевая задача, т.е. $V\big|_\Gamma = \breve{V}\big|_\Gamma$ и $M_\nu\big|_\Gamma = \breve{M}_\nu\big|_\Gamma$. В остальных случаях имеет место смешанная краевая задача.

Введем следующий полезный для дальнейшего изложения оператор

$$L_0 = \theta L + \ell \qquad (28)$$

Этот оператор можно определить формулой

$$L_0 = L_2^* \theta C L_2, \qquad (29)$$

откуда следует, что он самосопряженный. Тогда основное операторное соотношение (16) можно записать в виде

$$L\theta w = L_0 w - \ell^* w \qquad (30)$$

Обозначим нагрузку внутри области F_0, т.е.

$$\theta L w = F_0.$$

Представим основное операторное соотношение (25) следующим образом

$$L\theta w = F_0 + \delta_\Gamma(\kappa_1 + \tilde{\kappa}_1)V + \partial_\nu^* \delta_\Gamma(\kappa_2 + \tilde{\kappa}_2)M_\nu - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma(\tilde{\kappa}_2 + \kappa_2)\varphi_\nu - L_V^* \delta_\Gamma(\tilde{\kappa}_1 + \kappa_1)w,$$

здесь используется соотношение $\kappa_1 + \tilde{\kappa}_1 = 1$ и $\kappa_2 + \tilde{\kappa}_2 = 1$.

С учетом краевых условий разобьем на группы заданные и неизвестные величины

$$L\theta w = \delta_\Gamma \kappa_1 V + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 M_\nu - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_2 \varphi_\nu - L_V^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_1 w +$$

$$+ F_0 + \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 \breve{V} + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 \breve{M}_\nu - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \kappa_2 \breve{\varphi}_\nu - L_V^* \delta_\Gamma \kappa_1 \breve{w} \qquad (31)$$

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Введем следующие обозначения

$$\ell_\Gamma w = \delta_\Gamma \kappa_1 V + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 M_\nu$$

– граничный оператор, соответствующий заданным внешним нагрузкам,

$$\widetilde{\ell}_\Gamma w = L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 \varphi_\nu + L_V^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 w$$

– граничный оператор, соответствующий заданным перемещениям (кинематические условия),

$$f_\Gamma = \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 \breve{V} + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 \breve{M}_\nu$$

– правая часть, соответствующая заданным нагрузкам,

$$g_\Gamma = L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \kappa_2 \breve{\varphi}_\nu + L_V^* \delta_\Gamma \kappa_1 \breve{w}$$

– правая часть, соответствующая заданным перемещениям (кинематическим условиям),

$$F = F_0 + f_\Gamma - g_\Gamma$$

– объединенная правая часть.
Тогда получим

$$L\theta w = \ell_\Gamma w - \widetilde{\ell}_\Gamma w + F, \qquad (32)$$

или, учитывая (30),

$$L_0 w - \ell^* w - \ell_\Gamma w + \widetilde{\ell}_\Gamma w = F. \qquad (33)$$

Рассмотрим выражение $\ell^* w - \widetilde{\ell}_\Gamma w$:

$$\ell^* w - \widetilde{\ell}_\Gamma w = L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \varphi_\nu + L_V^* \delta_\Gamma w - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 \varphi_\nu - L_V^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 w.$$

Т.к. $\widetilde{\kappa}_1 = 1 - \kappa_1$ и $\widetilde{\kappa}_2 = 1 - \kappa_2$, то получим, что

$$\ell^* w - \widetilde{\ell}_\Gamma w = L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \kappa_2 \varphi_\nu + L_V^* \delta_\Gamma \kappa_1 w$$

или

$$\ell^* w - \widetilde{\ell}_\Gamma w = \ell_\Gamma^* w.$$

Тогда окончательно уравнение (32) примет вид

$$\widetilde{L} w = F, \qquad (34)$$

где

$$\widetilde{L} = L_0 - \ell_\Gamma - \ell_\Gamma^*.$$

Очевидно, что полученная формулировка краевой задачи имеет самосопряженный оператор. Отметим, что такая постановка представляет собой единое уравнение, включающее в себя все условия, определяющие краевую задачу как внутри области, так и на ее границе. При этом его можно рассматривать на любой окаймляющей области. Такой Оператор можно назвать оператором жесткости.
Самосопряженному оператору (34) соответствует вариационная постановка в виде квадратичного функционала. Такой функционал имеет вид

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int (\widetilde{L} w, w) dx - \int (F, w) dx$$

или

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int (L_0 w, w) dx - \int (\ell_\Gamma w, w) dx - \int (F_0, w) dx - \int (f_\Gamma, w) dx + \int (g_\Gamma, w) dx.$$

Поскольку

$$\int (\ell_\Gamma w, w) dx = \int_\Gamma \kappa_1 (L_V w, w) d\Gamma + \int_\Gamma \kappa_2 (L_{M\nu} w, \partial_\nu w) d\Gamma,$$

$$\int (f_\Gamma, w) dx = \int_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 (\breve{V}, w) d\Gamma + \int_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 (\breve{M}_\nu, \partial_\nu w) d\Gamma,$$

$$\int (g_\Gamma, w) dx = \int_\Gamma \kappa_1 (\breve{w}, L_V w) d\Gamma + \int_\Gamma \kappa_2 (\breve{\varphi}_\nu, L_{M\nu} w) d\Gamma,$$

$$\int (L_0 w, w) dx = \int_\Omega (C L_2 w, L_2 w) dx,$$

$$\int (F_0, w)dx = \int_\Omega (F_0, w)dx,$$

квадратичный функционал в развернутом виде можно представить как

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega (CL_2 w, L_2 w)dx - \int_\Gamma \kappa_1 (L_V w, w)d\Gamma - \int_\Gamma \kappa_2 (L_{M\nu} w, \partial_\nu w)d\Gamma - \int_\Omega (F_0, w)dx - \int_\Gamma \tilde{\kappa}_1 (\breve{V}, w)d\Gamma - \int_\Gamma \tilde{\kappa}_2 (\breve{M}_\nu, \partial_\nu w)d\Gamma + \int_\Gamma \kappa_1 (\breve{w}, L_V w)d\Gamma + \int_\Gamma \kappa_2 (\breve{\varphi}_\nu, L_{M\nu} w)d\Gamma \quad (35)$$

Отметим, что такой функционал при некоторых кинематических условиях ($\kappa_1 = 1$ или $\kappa_2 = 1$) может не быть положительно определенным. Поэтому решение вариационной задачи является не минимум, а стационарная точка функционала (35) (функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению (34)).

Особенно можно отметить, что представленный функционал является безусловным, т.е. пространство функций, на котором он определен, не имеет ограничений, кроме наличия второй производной.

Такой функционал можно назвать обобщенным функционалом Лагранжа. Отметим, что если рассматривать его на множестве функций, удовлетворяющих кинематическим ограничениям, то получим обычный функционал Лагранжа.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследования проводились в рамках НИР «Построение и анализ корректных аналитических методов и алгоритмов расчета конструкций регулярной структуры», выполняемой по Плану НИР Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) на 2007-2009 гг. и НИР «Разработка и исследование универсальных корректных методов точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений», являющейся победителем конкурса грантов РААСН 2007 г. для молодых ученых и специалистов, включенной в план НИР РААСН на 2008 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
2. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. – М.: Добросвет, 2007. – 408 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
6. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Издательство АСВ, 2005. – 736 с.

Золотов Александр Борисович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: alexander.zolotov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Воробьев Михаил Валерьевич, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ АССОЦИИРОВАННЫХ КООРДИНАТ

А.Б. Золотов, М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, Д.В. Михайлов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматривается смешанная краевая задача изгиба плиты на основе использования общей операторной постановки с использованием граничной координатной системы и обобщенных функций.

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS WITH THE USE OF ASSOCIATED COORDINATES

Alexander B. Zolotov, Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov, Taymuraz B. Kaytukov, Dmitry V. Mihaylov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: The mixed boundary problem of plate bending with the use of general operational formulation, boundary co-ordinate system and distributions is considered in the distinctive paper.

Рассматривается смешанная краевая задача изгиба плиты на основе использования общей операторной постановки с использованием граничной координатной системы и обобщенных функций

Операторная формулировка задачи для естественных краевых условий имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \theta M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta M_{22}}{\partial y^2} = $$

$$= -\theta q + \delta_\Gamma Q + \frac{\partial}{\partial x}\delta_\Gamma M_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta_\Gamma M_y, \quad (x, y) \in \omega \qquad (1)$$

или

$$Lw = F, \qquad (2)$$

где изгибающие и крутящий моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} определяются формулами

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}),$$

$$M_{22} = D(\nu\chi_{11} + \chi_{22}), \quad M_{12} = \frac{1}{2}D(1-\nu)\chi_{12}$$

входящие в это представление компоненты тензора кривизны χ_{11}, χ_{22}, χ_{12} определяются как

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; h – толщина; ν – коэффициент Пуассона; w – прогиб плиты; c – жесткость основания; q – плотность нагрузки; Q, M_x, M_y – поперечная сила и крутящие моменты на границе плиты.

Согласно [2]оператор L задачи (2) (исходная формулировка (1)) может быть представлен в следующем мультипликативном виде

$$L = L_2^* C L_2. \qquad (3)$$

где

$$L_2 = \begin{bmatrix} \partial_1^2 \\ \partial_2^2 \\ 2\partial_2\partial_1 \end{bmatrix}, \quad L_2^* = \begin{bmatrix} \partial_1^2 & \partial_2^2 & 2\partial_2^*\partial_1^* \end{bmatrix},$$

$$C = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

$$\partial_k^* = -\partial_k \ , \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \ k = 1, 2$$

В свою очередь операторы L_2 и L_2^* можно представить как произведения дифференциальных операторов первого порядка

$$L_2 = L_1\nabla \quad \text{и} \quad L_2^* = \nabla^* L_1^*,$$

где $\nabla = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} = \text{grad}$, $\nabla^* = \begin{bmatrix} \partial_1^* & \partial_2^* \end{bmatrix} = \text{div}$.

$$L_1 = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad L_1^* = \begin{bmatrix} \partial_1^* & 0 & \partial_2^* \\ 0 & \partial_2^* & \partial_1^* \end{bmatrix},$$

При представлении исходной задачи с использованием граничных координат (так называемые «ассоциированные координаты» [7]) примем, что положительное направление нормали к границе внутреннее и положительное направление основной граничной координаты против часовой стрелки. Кроме того, оси координат x_1 и x_2 направлены, соответственно, вправо и вверх. (См. рис. 1.) Отметим, что положительное направление нормали внутрь вытекает из вариационных постановок. Граничные координаты ортогональны и образуются из линии вдоль границы и нормали к ней.

Запишем формулы вычисления производных в точках границы по нормали и касательной:

$$\partial_\nu = \nu_1\partial_1 + \nu_2\partial_2$$
$$\partial_\tau = \tau_1\partial_1 + \tau_2\partial_2$$

или в векторно-матричной форме

$$\nabla_\Gamma = \begin{bmatrix} \partial_\nu \\ \partial_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} = Q_\Gamma\nabla,$$

где Q_Γ – матрица перехода от декартовых координат к граничным, т.е.:

$$Q_\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\nu}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\tau}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\nu} & \bar{\tau} \end{bmatrix}.$$

Сопряженный оператор градиента в граничных координатах имеет вид

$$\nabla_\Gamma^* = (Q_\Gamma\nabla)^* = \nabla^* Q_\Gamma^* = \nabla^* Q_\Gamma, \ \text{т.к.} \quad Q_\Gamma^* = Q_\Gamma.$$

Поскольку

$$Q_\Gamma{}^2 = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $Q_\Gamma^{-1} = Q_\Gamma$

Ниже представим операторы мультипликативного разложения оператора задачи L (формула (2)) в граничных координатах.

$$\nabla = Q_\Gamma\nabla_\Gamma = \begin{bmatrix} \nu_1\partial_\nu + \nu_2\partial_\tau \\ \nu_2\partial_\nu - \nu_1\partial_\tau \end{bmatrix} = \bar{\nu}\partial_\nu + \bar{\tau}\partial_\tau,$$
$$\nabla^* = \partial_\nu^*\bar{\nu}^{\mathrm{T}} + \partial_\tau^*\bar{\tau}^{\mathrm{T}}.$$

Кроме того

$$\nabla^* = (Q_\Gamma\nabla_\Gamma)^* = \nabla_\Gamma^* Q_\Gamma^* = \nabla_\Gamma^* Q_\Gamma.$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \nu_1\partial_\nu + \tau_1\partial_\tau & 0 \\ 0 & \nu_2\partial_\nu + \tau_2\partial_\tau \\ \nu_2\partial_\nu + \tau_2\partial_\tau & \nu_1\partial_\nu + \tau_1\partial_\tau \end{bmatrix} = \Gamma_\nu\partial_\nu + \Gamma_\tau\partial_\tau,$$

где

$$\Gamma_\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix}; \ \Gamma_\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_2 & 0 \\ 0 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}.$$

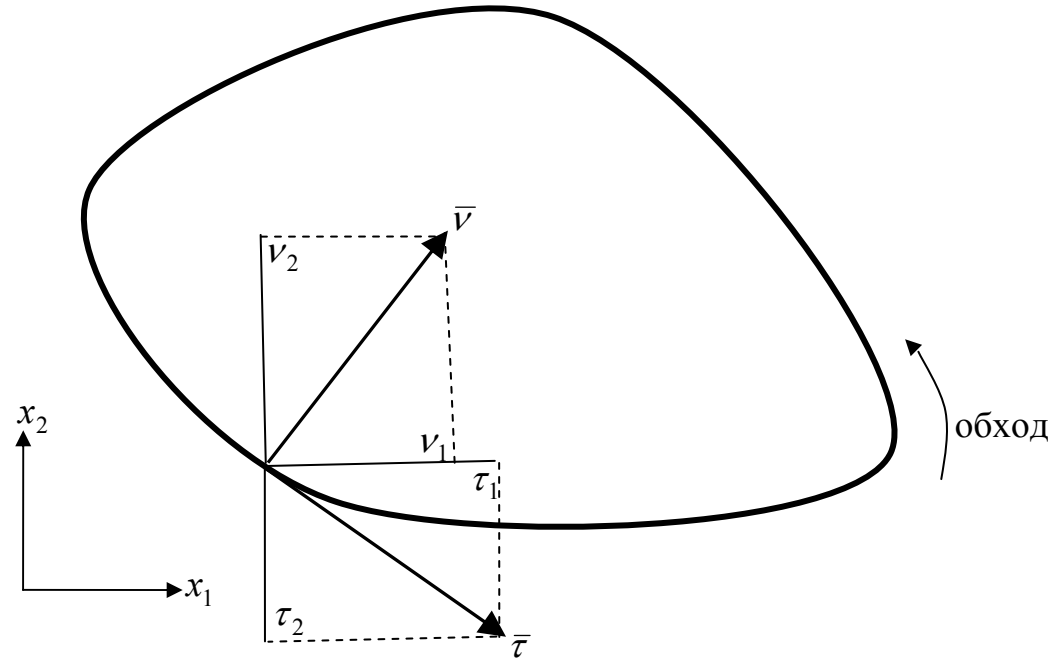


Рис. 1.

$$L_1^* = (\Gamma_\nu \partial_\nu)^* + (\Gamma_\tau \partial_\tau)^* = \partial_\nu^* \Gamma_\nu^* + \partial_\tau^* \Gamma_\tau^*$$

где

$$\Gamma_\nu^* = \Gamma_\nu^T = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & \nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\Gamma_\tau^* = \Gamma_\tau^T = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ 0 & \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_2 & 0 & -\nu_1 \\ 0 & -\nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$\Gamma_{\nu\nu} = \Gamma_\nu \bar{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \\ 2\nu_1\nu_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\nu\nu}^* = \begin{bmatrix} \nu_1^2 & \nu_2^2 & 2\nu_1\nu_2 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{\tau\nu} = \Gamma_\tau \bar{\nu} = \begin{bmatrix} \tau_1\nu_1 \\ \tau_2\nu_2 \\ \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1 \end{bmatrix} = \Gamma_{\nu\tau},$$

$$\Gamma_{\tau\nu}^* = \begin{bmatrix} \tau_1\nu_1 & \tau_2\nu_2 & \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1 \end{bmatrix} = \Gamma_{\nu\tau}^*.$$

В [2] было получено операторное выражение для смешанной краевой задачи

$$L\theta w = \delta_\Gamma \kappa_1 V + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 M_\nu - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_2 \varphi_\nu - L_V^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_1 w + F, \qquad (4)$$

при этом

➤ $\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = L_M w =$

– вектор внутренних моментов,

где L_M – оператор вычисления внутренних моментов:

$$L_M = -CL_2 = -D \begin{bmatrix} \partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2 \end{bmatrix};$$

➤ $M_\nu = L_{M\nu} w$

– изгибающий момент (по нормали),

где $L_{M\nu}$ – оператор вычисления моментов по нормали:

$$L_{M\nu} = \Gamma^*_{\nu\nu} L_M = -D\begin{bmatrix}\nu_1^2 & \nu_2^2 & 2\nu_1\nu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2\end{bmatrix};$$

➤ $M_\tau = L_{M\tau} w$

– крутящий момент (по касательной),
где $L_{M\tau}$ – оператор вычисления моментов по касательной:

$$L_{M\tau} = \Gamma^*_{\tau\nu} L_M = -D\begin{bmatrix}\tau_1\nu_1 & \tau_2\nu_2 & \tau_1\nu_2 + \tau_2\nu_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1^2 + \nu\partial_2^2 \\ \nu\partial_1^2 + \partial_2^2 \\ (1-\nu)\partial_1\partial_2\end{bmatrix};$$

➤ $\overline{Q} = \begin{bmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{bmatrix} = L_Q w$

– вектор внутренних поперечных сил,
где L_Q – оператор вычисления внутренних поперечных сил:

$$L_Q = -L_1^* L_M = -D\begin{bmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{bmatrix}\nabla^2 = -D\nabla\nabla^2;$$

➤ $Q_\nu = L_{Q\nu} w$

– граничная поперечная сила,
где $L_{Q\nu}$ – оператор вычисления поперечной силы на границе:

$$L_{Q\nu} = \overline{\nu}^* L_Q = -D\,\overline{\nu}^*\nabla\nabla^2 = -D\partial_\nu\nabla^2 = D\partial_\nu^*\nabla^2;$$

➤ $V = -Q_\nu + \partial_\tau^* M_\tau = L_V w$

– так называемая обобщенная поперечная сила,
где L_V – оператор вычисления обобщенных поперечных сил на границе:

$$L_V = -L_{Q\nu} + \partial_\tau^* L_{M\tau};$$

➤ $\varphi_\nu = \partial_\nu w$

– угол поворота по нормали;

➤ κ_1 и κ_2 – характеристические функции краевых условий:

$$\kappa_1(x) = \begin{cases}1, & w - \text{задано} \\ 0, & w - \text{не задано}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\widetilde{\kappa}_1(x) = 1 - \kappa_1(x) = \begin{cases}0, & V - \text{не задано} \\ 1, & \text{V - задано}\end{cases},$$

$$\kappa_2(x) = \begin{cases}1, & \varphi_\nu - \text{задано} \\ 0, & \varphi_\nu - \text{не задано}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\widetilde{\kappa}_2(x) = 1 - \kappa_2(x) = \begin{cases}0, & M_\nu - \text{не задано} \\ 1, & \text{M}_\nu \text{ - задано}\end{cases}.$$

Характеристические функции $\kappa_1(x)$ и $\widetilde{\kappa}_1(x)$ в стандартных случаях ортогональны. Это связано с физическими фактами, т.е. на границе задан либо прогиб, либо обобщенная поперечная сила. Аналогично, функции $\kappa_2(x)$ и $\widetilde{\kappa}_2(x)$ также ортогональны, поскольку с физической точки зрения может быть задан либо угол поворота, либо изгибающий момент.
Введем общее обозначение для неизвестных 1-ой и 2-ой краевых задач:

$$\begin{aligned} u_1 &= \widetilde{\kappa}_1 w + \kappa_1 V \\ u_2 &= \widetilde{\kappa}_2 \varphi_\nu + \kappa_2 M_\nu \end{aligned} \qquad (5)$$

Поскольку

$$\kappa_s \cdot \kappa_s = \widetilde{\kappa}_s \cdot \widetilde{\kappa}_s = 1, \quad \kappa_s \cdot \widetilde{\kappa}_s = 0, \quad s = 1, 2$$

справедливы будут следующие равенства

$$\widetilde{\kappa}_1 u_1 = \widetilde{\kappa}_1 w, \quad \kappa_1 u_1 = \kappa_1 V,$$
$$\widetilde{\kappa}_2 u_2 = \widetilde{\kappa}_2 \varphi_\nu, \quad \kappa_2 u_2 = \kappa_2 M_\nu.$$

Делаем соответствующие замены в операторном выражении (4)

$$L\theta w = \delta_\Gamma \kappa_1 u_1 + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 u_2 - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_2 u_2 - L_V^* \delta_\Gamma \widetilde{\kappa}_1 u_1 + F \qquad (6)$$

или $$L\theta w = L_\Gamma \bar{u} + F\,, \qquad (7)$$

где $$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$L_\Gamma \bar{u} = \delta_\Gamma \kappa_1 u_1 + \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 u_2 - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_2 u_2 - L_V^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_1 u_1 =$$

$$= \underbrace{(\delta_\Gamma \kappa_1 - L_V^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_1)}_{L_{\Gamma 1}} u_1 + \underbrace{(\partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_2)}_{L_{\Gamma 2}} u_2$$

$$= L_{\Gamma 1} u_1 + L_{\Gamma 2} u_2\,,$$

т.е. $L_\Gamma = \begin{bmatrix} L_{\Gamma 1} & L_{\Gamma 2} \end{bmatrix}$ и

$$L_\Gamma \bar{u} = \begin{bmatrix} L_{\Gamma 1} & L_{\Gamma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $L_{\Gamma 1} = \delta_\Gamma \kappa_1 - L_V^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_1$,

$$L_{\Gamma 2} = \partial_\nu^* \delta_\Gamma \kappa_2 - L_{M\nu}^* \delta_\Gamma \tilde{\kappa}_2\,.$$

Пусть ε – фундаментальная функция оператора L:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2\,, \qquad (9)$$

где $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Тогда

$$\theta w = w = \varepsilon * (L_\Gamma \bar{u} + F)\,. \qquad (10)$$

Исходя из этого равенства, можно получить следующие зависимости, определенные на границе

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 w &= \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * F \\ \kappa_1 V &= \kappa_1 L_V \varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \kappa_1 L_V \varepsilon * F \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 \varphi_\nu &= \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu \varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu \varepsilon * F \\ \kappa_2 M_\nu &= \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * F \end{aligned}\right\}$$

Складываем объединенные фигурными скобками равенства и, используя определение общих неизвестных, получаем систему граничных уравнений относительно u_1 и u_2:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V)\varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \\ &\quad + (\tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V)\varepsilon * F \\ u_2 &= (\tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu})\varepsilon * L_\Gamma \bar{u} + \\ &\quad + (\tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu})\varepsilon * F \end{aligned} \qquad (11)$$

Векторная запись для (11):

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V \\ \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * \left[\kappa_1 - L_V^* \tilde{\kappa}_1, \quad \partial_\nu^* \kappa_2 - L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2\right] \delta_\Gamma \bar{u} + \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V \\ \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * F \qquad (12)$$

или $$\bar{u} = \tilde{L}_\Gamma \delta_\Gamma \bar{u} + \tilde{\tilde{F}}\,, \qquad (13)$$

где

$$\tilde{L}_\Gamma = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V \\ \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * \left[\kappa_1 - L_V^* \tilde{\kappa}_1, \quad \partial_\nu^* \kappa_2 - L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2\right]$$

$$\tilde{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 + \kappa_1 L_V \\ \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu + \kappa_2 L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * F\,.$$

Распишем подробнее оператор $\tilde{L}_\Gamma$:

$$\tilde{L}_\Gamma = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{12} \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11} &= \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * \kappa_1 - \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * L_V^* \tilde{\kappa}_1 + \\ &\quad + \kappa_1 L_V \varepsilon * \kappa_1 - \kappa_1 L_V \varepsilon * L_V^* \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{L}_{12} &= \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * \partial_\nu^* \kappa_2 - \tilde{\kappa}_1 \varepsilon * L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2 + \\ &\quad + \kappa_1 L_V \varepsilon * \partial_\nu^* \kappa_2 - \kappa_1 L_V \varepsilon * L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{L}_{21} &= \tilde{\kappa}_2 \varepsilon * \kappa_1 - \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu \varepsilon * L_V^* \tilde{\kappa}_1 + \\ &\quad + \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * \kappa_1 - \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * L_V^* \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{L}_{22} &= \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu \varepsilon * \partial_\nu^* \kappa_2 - \tilde{\kappa}_2 \partial_\nu \varepsilon * L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2 + \\ &\quad + \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * \partial_\nu^* \kappa_2 - \kappa_2 L_{M\nu} \varepsilon * L_{M\nu}^* \tilde{\kappa}_2 \end{aligned}$$

Выпишем для примера системы граничных уравнений для 1-ой и 2-ой краевых задач.

Первая краевая задача.
В этом случае

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 1,\ \widetilde{\kappa}_1 = \widetilde{\kappa}_2 = 0,\ u_1 = V,\ u_2 = M_\nu.$$

При таких значениях

$$L_{\Gamma 1} = \delta_\Gamma,\quad L_{\Gamma 2} = \partial_\nu^* \delta_\Gamma,\quad L_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma.$$

Подставляем в (11)

$$V = L_V \varepsilon * \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} V \\ M_\nu \end{bmatrix} + L_V \varepsilon * F$$

$$M_\nu = L_{M\nu} \varepsilon * \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} V \\ M_\nu \end{bmatrix} + L_{M\nu} \varepsilon * F$$

или в векторном виде

$$\begin{bmatrix} V \\ M_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_V \\ L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} V \\ M_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_V \\ L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * F.$$

Здесь

$$\widetilde{L}_\Gamma = \begin{bmatrix} L_V \\ L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma.$$

Обозначим

$$A_1 = \begin{bmatrix} L_V \\ L_{M\nu} \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} 1 & \partial_\nu^* \end{bmatrix}$$

Вторая краевая задача.
В этом случае

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0,\ \widetilde{\kappa}_1 = \widetilde{\kappa}_2 = 1,\ u_1 = w,\ u_2 = \varphi_\nu.$$

При таких значениях

$$L_{\Gamma 1} = -L_V^* \delta_\Gamma,\quad L_{\Gamma 2} = -L_{M\nu}^* \delta_\Gamma,$$
$$L_\Gamma = -\begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma.$$

Подставляем в (11)

$$w = -\varepsilon * \begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} w \\ \varphi_\nu \end{bmatrix} + \varepsilon * F$$

$$\varphi_\nu = -\partial_\nu \varepsilon * \begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} w \\ \varphi_\nu \end{bmatrix} + \partial_\nu \varepsilon * F$$

или в векторном виде

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi_\nu \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ \partial_\nu \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma \begin{bmatrix} w \\ \varphi_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \partial_\nu \end{bmatrix} \varepsilon * F$$

Здесь

$$\widetilde{L}_\Gamma = -\begin{bmatrix} 1 \\ \partial_\nu \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix} \delta_\Gamma.$$

Обозначим

$$A_2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ \partial_\nu \end{bmatrix} \varepsilon * \begin{bmatrix} L_V^* & L_{M\nu}^* \end{bmatrix}.$$

Таким образом, между граничными операторами 1-ой и 2-ой граничных задач имеет место соотношение

$$A_1 = -A_2^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследования проводились в рамках НИР «Построение и анализ корректных аналитических методов и алгоритмов расчета конструкций регулярной структуры», выполняемой по Плану НИР Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) на 2007-2009 гг. и НИР «Разработка и исследование универсальных корректных методов точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений», являющейся победителем конкурса грантов РААСН 2007 г. для молодых ученых и специалистов, включенной в план НИР РААСН на 2008 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
2. **Воробьев М.В., Золотов А.Б., Михайлов Д.В., Мозгалева М.Л.** Операторная и вариационная постановка смешанной краевой задачи об изгибе плиты. – статья в настоящем сборнике
3. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. – М.: Добросвет, 2007. – 408 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
7. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Издательство АСВ, 2005. – 736 с.

Золотов Александр Борисович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: alexander.zolotov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, дрцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Кайтуков Таймураз Батразович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: ktb.user@gmail.com

Михайлов Дмитрий Васильевич, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

МОНИТОРИНГ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОКРЫТИЯ КРЫТОГО КОНЬКОБЕЖНОГО ЦЕНТРА (ККЦ) В КРЫЛАТСКОМ (К ПРОБЛЕМЕ АВАРИИ НЕСУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПОКРЫТИЯ)

Г.Э. Шаблинский, Д.А. Зубков
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются вопросы мониторинга динамических параметров несущих конструкций покрытия крытого конькобежного центра в Крылатском. Динамический мониторинг строительных конструкций является необходимым условием для интегральной оценки состояния сооружения, определения остаточного ресурса его работы.

MONITORING OF DYNAMIC PARAMETERS OF STRUCTURAL MEMBERS OF A ROOFING OF THE COVERED SKATING CENTER IN KRYLATSKY (TO A PROBLEM OF FAILURE OF A STRUCTURAL MEMBER OF A ROOFING)

G.E.Shablinsky, D.A.Zubkov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Several questions of monitoring of dynamic parameters of structural members of a roofing of the covered skating centre in Krylatsky are considered in the distinctive paper. Dynamic monitoring of structure is necessary for integrated estimation of stress and strain state of structure and definition of expected service.

ЦЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Динамические характеристики зданий (частоты и формы собственных колебаний, логарифмические декременты колебаний) являются важными идентификационными параметрами, даже относительно небольшие изменения, которых указывают на возможность существенных отклонений в структуре конструкции (изменение характера связей, свойств материала и грунтового основания). Поэтому динамический мониторинг строительных конструкций является необходимым условием для интегральной оценки состояния сооружения, определения остаточного ресурса его работы.

Крытый конькобежный центр структурно представляет собой в плане половину круга радиусом 117,3м, где пространство над ледовым полем и трибунами (27 тыс. $м^2$) перекрывается фермами пролётами чуть более 50м с промежуточной опорой в виде опорной кольцевой балки, подвешенной 19-ю вантами к пилону высотой около 50м. Пилон подкреплён двумя растянутыми элементами – оттяжками, которые разнесены на 25 метров друг от друга. Сжатый пилон, к которому сходятся 19 вант, опирается на железобетонную опору – тумбу. Эта опора воспринимает вертикальную нагрузку от пилона и горизонтальные усилия от оттяжек и вант, поддерживающих фермы, а также опорные реакции радиальных ферм. У оттяжек, имеющих перелом в уровне верха главной опоры – тумбы, вертикальные растянутые элементы заанкерены в массивный железобетонный фундамент.



Рис.1. Общий вид Крытого Конькобежного Центра.

Это уникальное сооружение только в сентябре 2004 года введено в эксплуатацию, и длительный мониторинг его состояния предполагал всестороннее обследование его строительных конструкций и периодические измерения динамических нагрузок. К сожалению, такой мониторинг не был реализован, и 22 ноября 2007 года произошло разрушение втулки одной из двух цепных оттяжек, что привело к деформации всего покрытия и угрозе его полного разрушения.

Настоящий цикл измерений, был выполнен 10 марта 2005 года и характеризовался зимними условиями эксплуатации при значительном уровне снеговой нагрузки на кровле здания.

Измерения колебаний проводились на опорной кольцевой балке. Колебания этой балки являются ключевыми для понимания динамической работы всей конструкции, т.к. она с одной стороны отражает колебания пилона и вант поддерживающих её, а с другой стороны – колебания опирающихся на неё ферм перекрытия. Три виброметра СМ – 3 были установлены на опорную балку рядом с одним из узлов крепления вант и ферм перекрытия для измерения вертикальных колебаний и 2-х взаимно перпендикулярных горизонтальных колебаний (тангенциальных и радиальных). В качестве возбудителей колебаний служила ветровая нагрузка и работа технологического оборудования ККЦ. Образец записи скоростей колебаний и соответствующие им спектральные плотности приведены на рис. 2. При визуальном анализе записей колебаний можно заметить, что все они имеют сложный характер существенно различный по каждому направлению. Вертикальные колебания имеют заметно более низкочастотный характер при существенно больших значениях амплитуд по сравнению с горизонтальными колебаниями. Рассмотрим теперь спектральные плотности этих записей. В вертикальном направлении отмечено 5 пиков в диапазоне 0 – 10 Гц. Самый низкочастотный и относительно высокий пик зафиксирован на частоте 0,7 Гц. Далее следует самый высокий пик на частоте 1,1

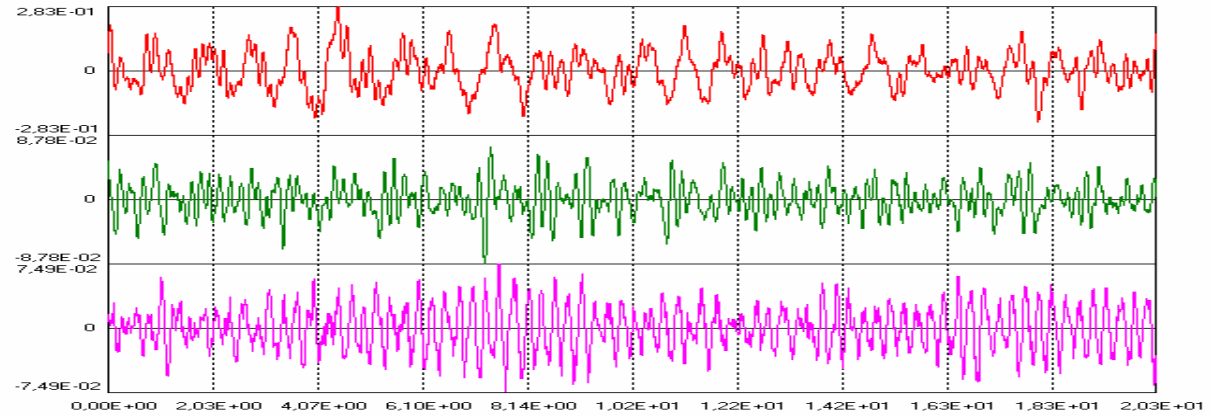
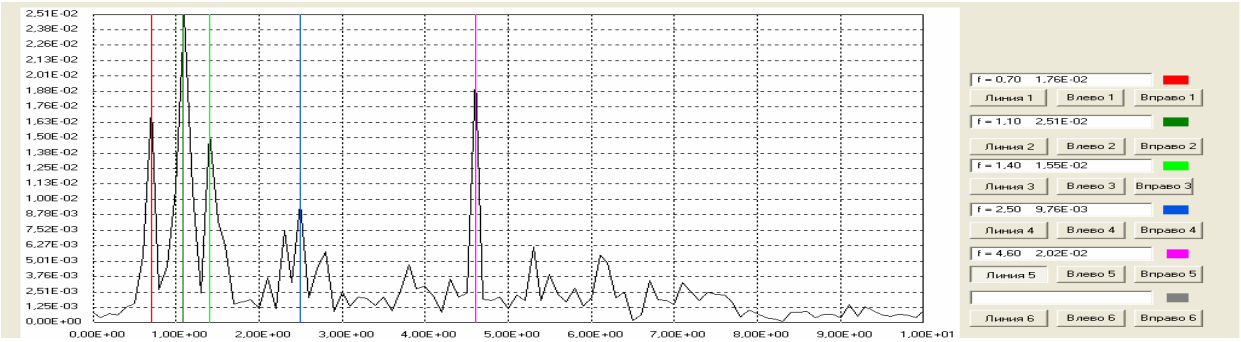
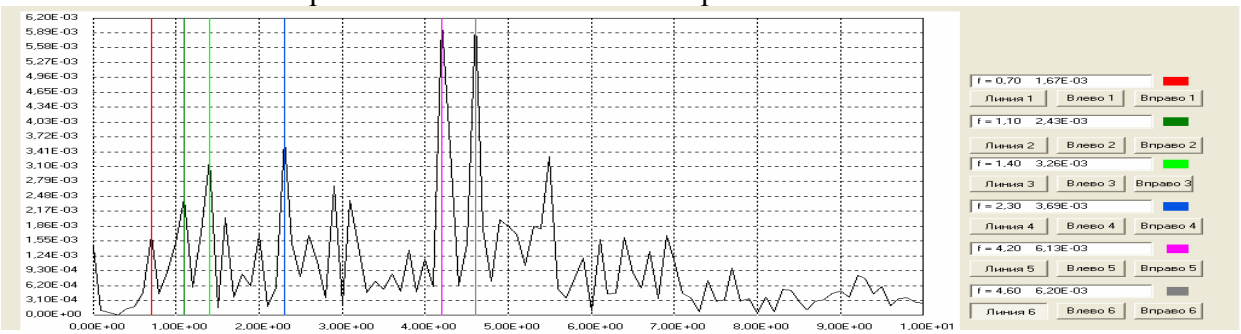


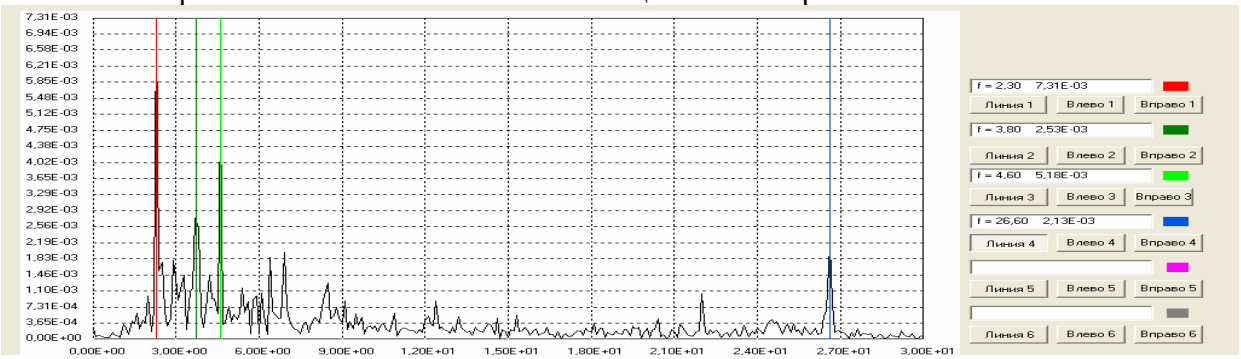
Рис.2-а. Образец записи колебаний на опорном кольце конструкции ККЦ; сверху вниз: вертикальные, тангенциальные и радиальные колебания (запись сделана 10.03.2005), мм/с.



Спектральная плотность записи вертикальных колебаний.



Спектральная плотность записи тангенциальных горизонтальных колебаний.



Спектральная плотность записи радиальных горизонтальных колебаний.

Рис. 2-б. Образец фрагмента записи и соответствующие спектральные плотности колебаний на опорном кольце ККЦ.

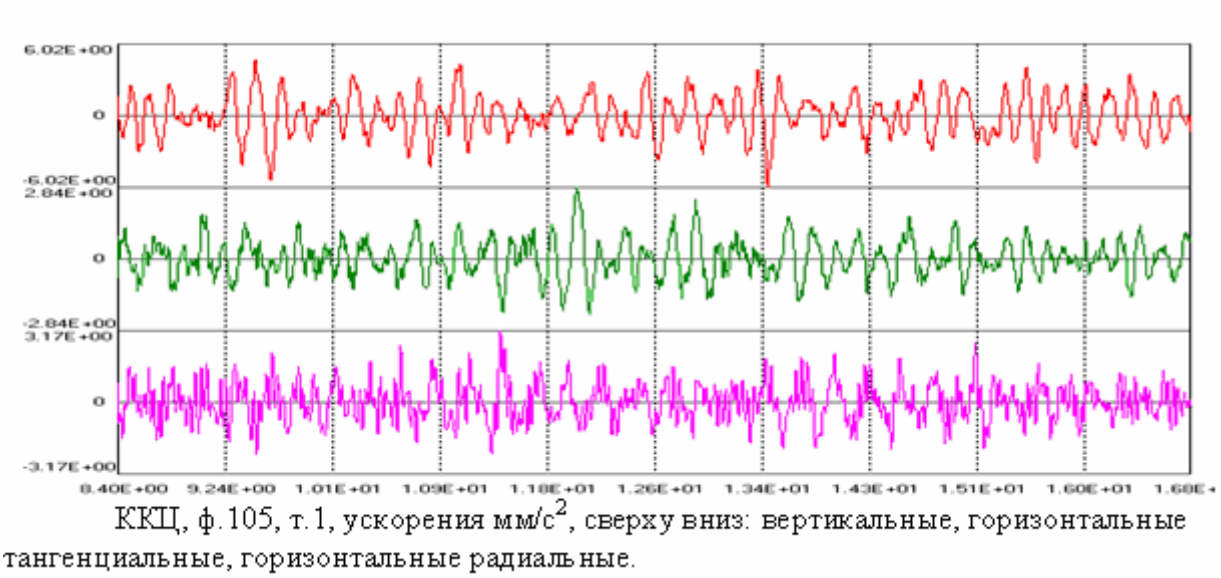


Рис. 3. Фрагменты записи ускорение (мм/с^2) вблизи узловой точки на опорном кольце ККЦ (запись сделана 10.03.2005).

Гц и ещё три заметных пика на частотах 1,4; 2,5 и 4,6 Гц. В горизонтальном тангенциальном направлении первые три относительно невысоких пика соответствуют частотам первых 3-х пиков в вертикальном направлении (0,7 Гц; 1,1 Гц и 1,4 Гц).

Два самых высоких и, примерно, равновеликих пика соответствуют частотам 4,2 и 4,6 Гц. В горизонтальном радиальном направлении самый высокий пик зафиксирован на низшей частоте 2,3 Гц. Затем можно отметить ещё два относительно высоких пика на частотах 4,6 Гц и 26,6 Гц.

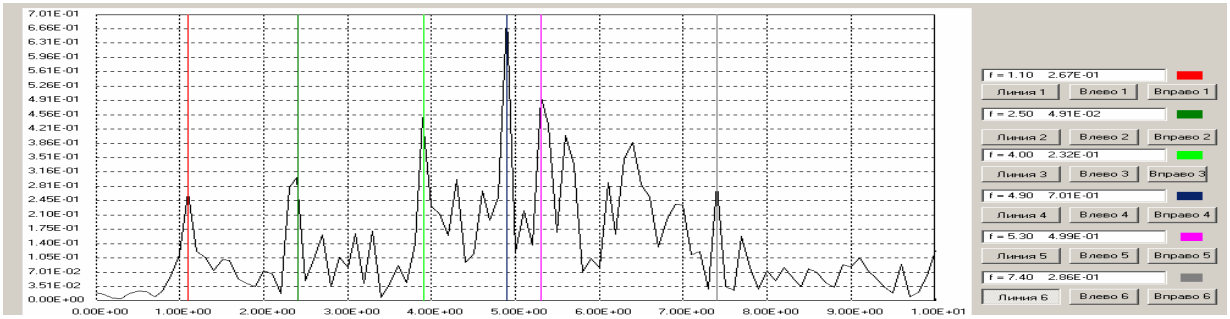
Учитывая специфику точки измерения колебаний, можно предположить, что в полученных спектрах проявились собственные колебания пилона, ферм перекрытия и опорного кольца этого сложного инженерного сооружения. Для более глубокого анализа характера колебаний покрытия конькобежного центра представляет интерес представить эти колебания в ускорениях и смещениях, произведя соответственно дифференцирование и интегрирование функции скоростей колебаний.

На рис.3 приведены фрагменты записи ускорений, из которых видно, что в вертикальном направлении амплитуды ускорений, достигающие 6 мм/с^2, примерно вдвое превышают амплитуды ускорений в горизонтальных направлениях. Существенно изменились спектральные плотности (рис.4). Преобладающие пики здесь получены на 4,9 Гц в вертикальном направлении; 5,4 Гц в горизонтальном тангенциальном направлении и 3,9 Гц в горизонтальном радиальном направлении.

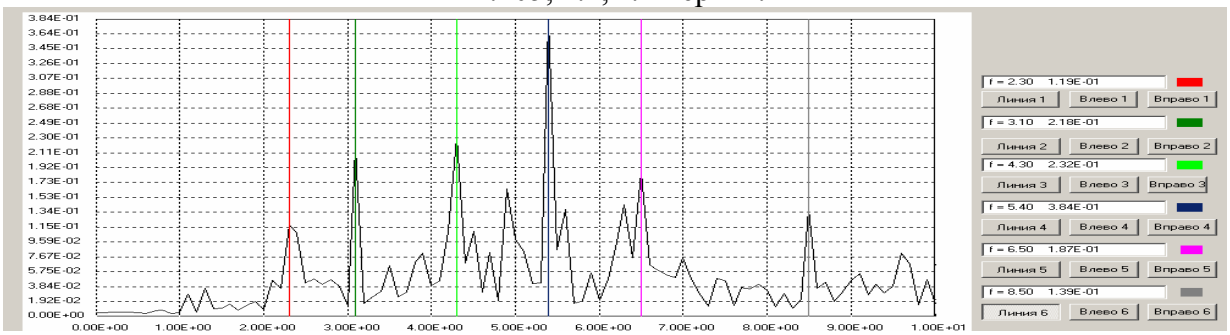
На рис.5 и рис.6 приведены фрагменты записи смещений и соответствующие им спектральные плотности. Как видим, максимальные амплитуды смещений (рис.5) имеют место в вертикальном направлении, превышая горизонтальные смещения в 3 – 6 раз. При этом амплитуды вертикальных смещений могут превышать 20 мкм.

Спектральные плотности записей смещений представлены на рис.6. На них выделяются низкочастотные колебания. Так на спектре вертикальных колебаний имеет место только один преобладающий пик на частоте 1,1 Гц.

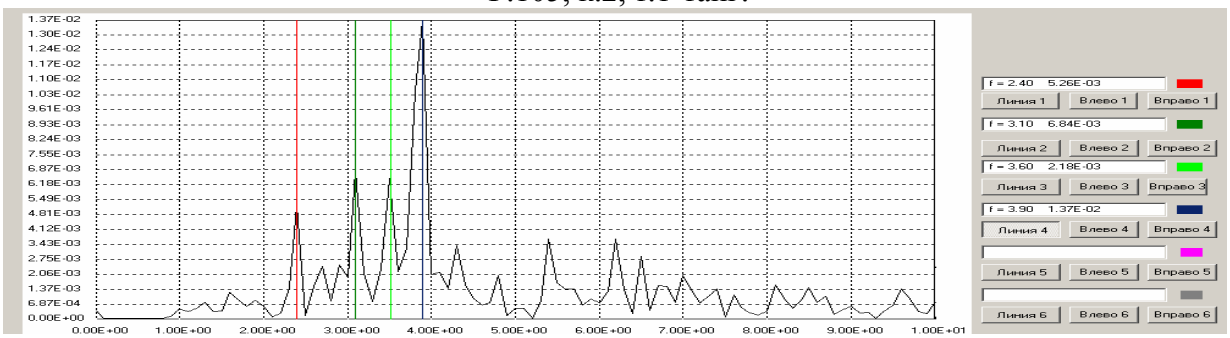
На спектре горизонтальных тангенциальных колебаний имеем ряд высоких пиков на частотах 1,1 Гц; 1,4 Гц; 2,3Гц; 3,1 Гц. На спектре горизонтальных радиальных колебаний получен один преобладающий пик на частоте 3,9 Гц.



Ф.105, к.1, т.1-вертик.



Ф.105, к.2, т.1-танг.

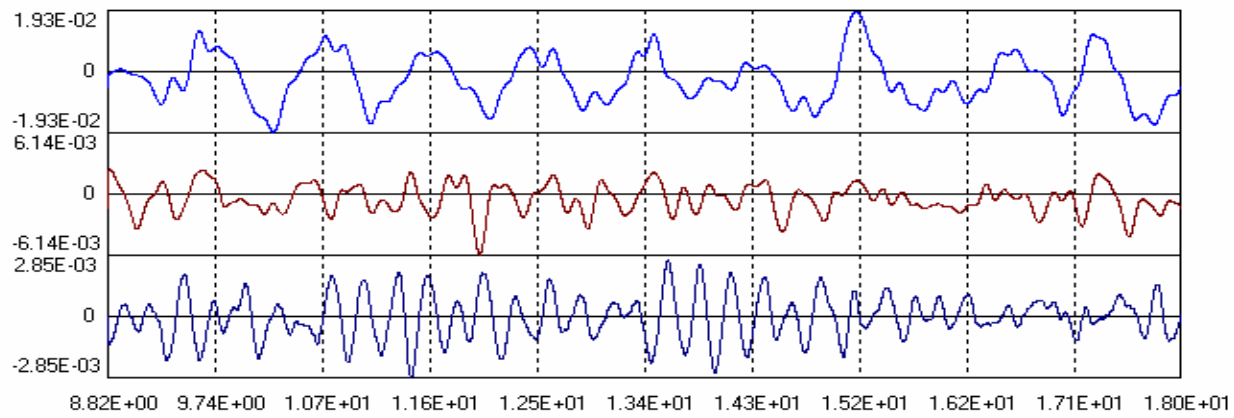


Ф.105, к.3, т.1-рад.

Рис.4. Спектральные плотности записи ускорений в узловой точке на опорном кольце Крытого Конькобежного Центра (ККЦ). Запись сделана 10 марта 2005 года.

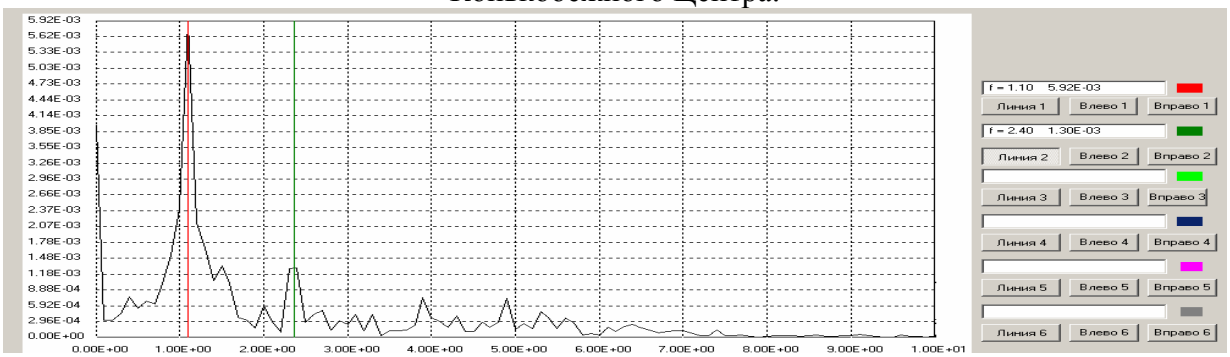
Анализируя спектры ускорений и смещений, можно отметить следующие особенности. На обоих спектрах в вертикальных колебаниях присутствует пик на частоте 1,1 Гц. При этом на спектре смещений он является доминирующим. Доминирующей частотой на спектре вертикальных ускорений является частота 4,9 Гц, а в радиальном направлении в спектрах ускорений и смещений доминирует частота 3,9 Гц.

Естественно, этим частотам соответствуют разные значения ускорений, а значит и нагрузок передаваемых через ванты на пилон и далее на цепные оттяжки. Но проведенное исследование показывает, что оттяжки испытывали дополнительно к статическим нагрузкам многоцикловые и разночастотные динамические нагрузки. За период эксплуатации ККЦ количество динамических циклов нагружения составило от 10^7 до 50^7. При этом особенно влиятельными на усталостный характер разрушения втулки цепной оттяжки могли быть частоты в диапазоне 4 – 5 Гц в радиальном и вертикальном направлениях. Именно в этом диапазоне частот и в этих направлениях зафиксированы максимальные ускорения колебаний, а значит и дополнительные динамические нагрузки на оттяжки конструкции покрытия ККЦ.

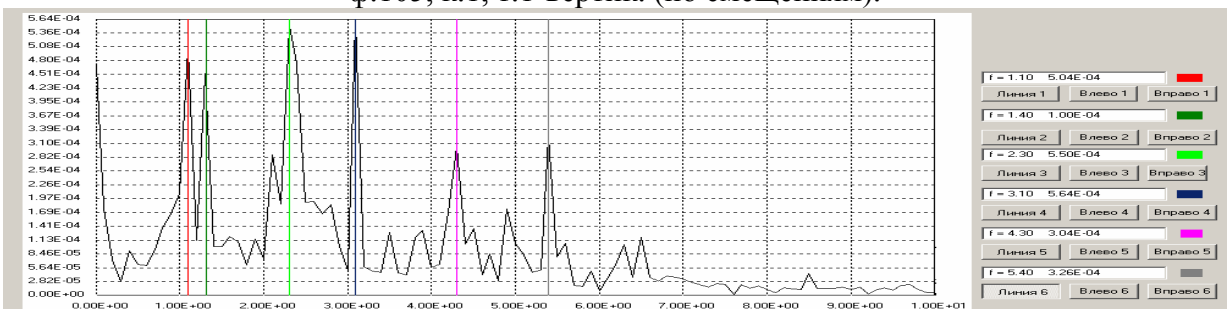


Ф.105, т.1, фрагмент записи смещений в мм; сверху вниз: вертикальные, горизонтальные тангенциальные, горизонтальные радиальные.

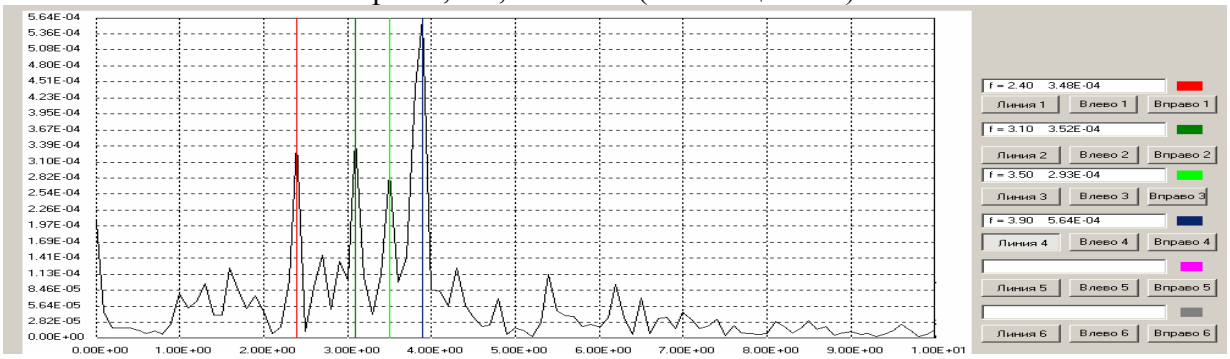
Рис.5. Фрагмент записи смещений (мм) вблизи узловой точки на опорном кольце Крытого Конькобежного Центра.



ф.105, к.1, т.1-вертик. (по смещениям).



ф.105, к.2, т.1-танг. (по смещениям).



ф.105, к.3, т.1-рад. (по смещениям).

Рис. 6. Спектральные плотности записей смещений вблизи узловой точки на опорном кольце Крытого Конькобежного Центра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Костин И.Х., Шаблинский Г.Э., Затеев В.Б., Мальцева Л.Б.** «Натурные динамические исследования строительных конструкций реакторного отделения Крымской АЭС», Строительная механика и расчет сооружений, 1991, №2.
2. **Исайкин А.С., Шаблинский Г.Э.** «Ретроспективная оценка сейсмостойкости особо ответственных сооружений на основе их натурных динамических исследований», в журнале «Промышленное и гражданское строительство», 1997, №8.
3. **Костин И.Х., Шаблинский Г.Э., Затеев В.Б., Грошев М.Е., Безгодов И.М., Павлов В.В.** «Вибрационные исследования плотины Саяно-Шушинской ГЭС», сб. трудов «Международной конференции по сейсмостойкому строительству» Берлин, 15-17 июня, 1994. (англ.).
4. **Исайкин А.С., Шаблинский Г.Э., Зубков Д.А.** «Совершенствование методики оценки состояния зданий и сооружений, сб. трудов «Современные методы инженерных изысканий в строительстве» МГСУ, Москва, 2003г.
5. **Зубков Д.А., Голованов Р.О.** «Мониторинг состояния каркасного здания на основе изменения его динамических параметров», в журнале «Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений», ВНИИНТПИ, Москва, №4, 2003г.
6. **Шаблинский Г.Э., Лавров И.М., Зубков Д.А., Голованов Р.О., Малофеев А.А.** «Колебания защитной оболочки реакторного отделения с ВВЭР – 1000», в журнале «Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений», ВНИИНТПИ, Москва, №4, 2004г.

Шаблинский Георгий Эдуарович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

НАТУРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ ЗДАНИЙ С НАТЯЖНЫМИ ВАНТОВЫМИ ПОКРЫТИЯМИ, ВОЗВЕДЕННЫХ В СЕЙСМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ РАЙОНАХ

Г.Э. Шаблинский, Д.А. Зубков
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье приведены методика и результаты натурных динамических исследований двух конструктивно близких объектов, возведенных в районах с 8-ми балльной расчетной сейсмичностью. Это здание «Питьевой галереи» в г. Ессентуки и здание «Центрального рынка» в г. Ангарске. Динамические исследования их были проведены в связи с экспертными исследованиями аварии конструктивно близкого к ним здания «Басманного рынка» в г. Москве.

IN-PLACE DYNAMIC TESTS OF PUBLIC BUILDINGS WITH TENSION STEEL CABLE ROOFS IN SEISMIC-ACTIVE REGIONS

G.E.Shablinsky, D.A.Zubkov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Method and results of in-place dynamic tests of two structurally similar objects in regions design seismicity of 8 are under consideration in the distinctive paper. These objects are building of "Drinking Gallery" in Essentuki town and building of "Central Market" in Angarsk town. Dynamic tests have been done in connection with expert researches dealing with failure of structurally similar building of "Basmanny Market" in Moscow.

Достоверность результатов расчетов сейсмостойкости зданий и сооружений во многом зависит от адекватности их расчетных схем реальной работе конструкций. Современные программы расчетов для ЭВМ позволяют учитывать практически любые конструктивные особенности строительных объектов. Проблема, однако, заключается в том, что далеко не все конструктивные элементы того или иного здания или сооружения имеют четко выраженные параметры для введения их в расчет. Это относится часто к характеру соединений элементов конструкций, наличию различного рода не несущих перегородок, недостаточно обоснованных динамических свойств грунтового основания и др. Результаты расчетов при этом могут оказаться недостаточно обоснованными. В таких случаях для особо ответственных и конструктивно сложных объектов целесообразно проводить ретроспективную проверку их сейсмостойкости (динамической прочности) на основе натурных динамических исследований. В этих случаях динамическая расчетная схема объекта может быть скорректирована по результатам определения его динамических характеристик в натурных условиях. В перспективе накопление и систематизация результатов натурных динамических исследований зданий и сооружений позволит использовать для них в расчетах более обоснованные расчетные схемы.

В настоящей работе приведены методика и результаты натурных динамических исследований двух конструктивно близких объектов, возведенных в районах с 8-ми балльной расчетной сейсмичностью. Это здание «Питьевой галереи» в г. Ессентуки и здание

«Центрального рынка» в г. Ангарске. **Динамические исследования их были проведены в связи с экспертными исследованиями аварии конструктивно близкого к ним здания «Басманного рынка» в г. Москве.**

В работе подлежали измерению частоты и амплитуды колебаний исследуемых объектов. Для этого в качестве измерительных приборов использовались виброметры маятникового типа СМ-3, модернизированные установкой внутри их корпуса многопозиционных усилителей с независимыми источниками питания. В качестве регистратора использовался персональный компьютер типа ноутбук в комплекте с многоканальным аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Регистрировались в основном фоновые колебания объектов. Это колебания, вызываемые общим вибрационным фоном вблизи объектов, создаваемым движением различного транспорта, работой какого-либо оборудования и ветровыми нагрузками. Кроме того, регистрировались колебания объектов от специально создаваемых импульсных воздействий с целью возбуждения в них свободных колебаний. В каждом эксперименте регистрация колебаний производилась одновременно в нескольких точках объекта. Измерения колебаний проводились по трем направлениям: горизонтальному радиальному, горизонтальному тангенциальному, вертикальному.

В качестве первого объекта было принято здание «Питьевой галереи» (ПГ) в г. Ессентуки. Это здание имеет в плане форму круга с диаметром в осях 59,5 м. Общая высота здания от нижней отметки фундамента до верха покрытия 12,4 м (от нулевой отметки поверхности грунта до верха покрытия 9,5 м). Конструктивной особенностью здания является вантовое покрытие. Несущими конструкциями здания являются 24 распределенных по длине окружности железобетонных колонны, на которых покоится внешнее железобетонное опорное кольцо сечением 0,7×0,7 м. Несущими конструкциями покрытия являются 48 парных вант из арматурной стали диаметром 36 мм. С одного конца ванты закреплены на внешнем опорном кольце, а с другого – на стальном внутреннем кольце диаметром 14,8 м. Сверху по вантам уложены сборные железобетонные плиты, которые и составляют основную нагрузку на них. В каждой точке измерения проводились в горизонтальном радиальном, горизонтальном тангенциальном и вертикальном направлениях. Четыре точки размещены на внешнем опорном кольце, внутреннем кольце и на грунте рядом со зданием. Кроме того, две точки расположены в средней части вант и одна в средней части пролета внешнего кольца между колоннами. Конструктивная схема здания приведена на рис.1.

В качестве второго объекта было принято здание «Центрального рынка» (ЦР) в г. Ангарске. Конструктивно это здание похоже на здание ПГ в г. Ессентуки, но отличается общими размерами, рядом конструктивных особенностей отдельных элементов. Внешний диаметр здания в осях составляет 46,5 м; высота колонн – 12,0 м; диаметр внутреннего кольца – 8,0 м. Как и в первом случае, внешнее опорное кольцо железобетонное; внутреннее – стальное. В отличие от здания ПГ в качестве вант здесь использовались стальные канаты, которые в процессе монтажа подвергались предварительной вытяжке для уменьшения их деформаций при эксплуатации здания. Несущими конструкциями здесь являются 24 распределенные по длине окружности железобетонные колонны, на которых покоится внешнее опорное железобетонное кольцо сечением 1,3 × 0,8 м, связанное с внутренним кольцом 72-мя вантами. Приборы размещались в 8-ми точках на внешнем опорном кольце, в 8-ми точках на внутреннем кольце и в одной точке на грунте. В каждой точке измерялись горизонтальные радиальные, горизонтальные тангенциальные и вертикальные колебания. Конструктивная схема здания приведена на рис. 2.

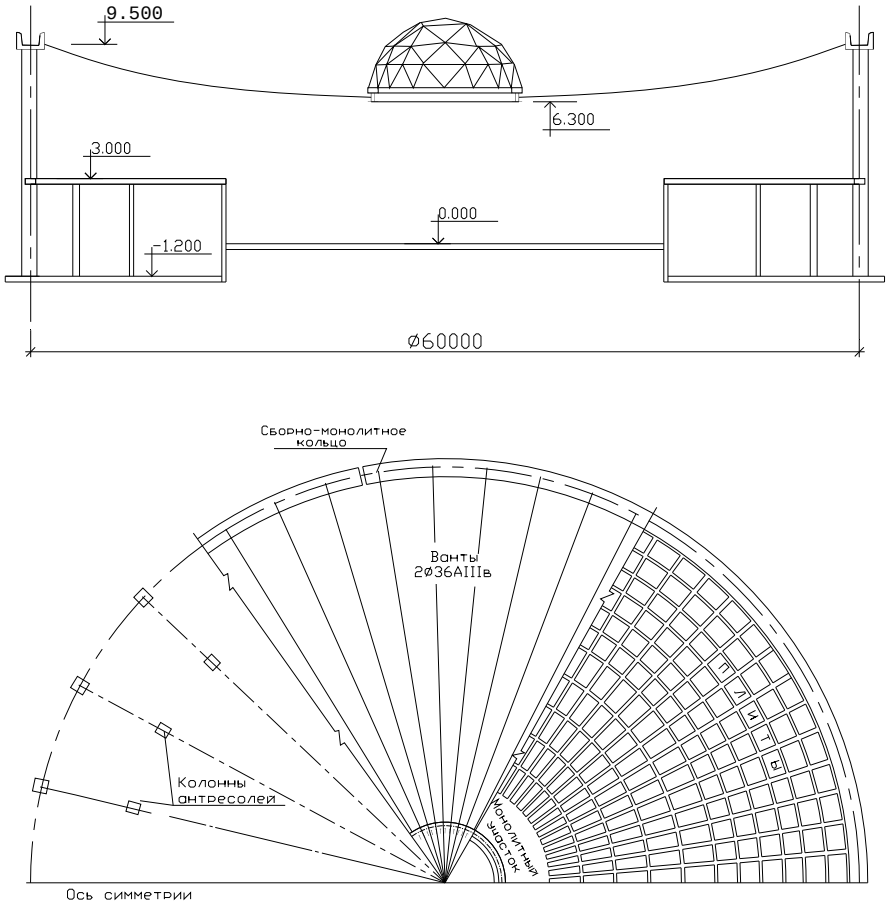


Рис.1. Конструктивная схема здания «Питьевой галереи» в г. Ессентуки.

Для определения динамических характеристик зданий, виброизмерительные приборы на нем размещались по определенной схеме. Точки размещения приборов приведены на рис.3. Точки 5, 7, 9, 11 размещались рядом со зданием на грунте. Точка 2 размещалась на внешнем кольце посредине между колоннами 19 и 20. Точки 4 и 15 размещались посредине длины ванта между внешним и внутренним кольцами. При обработке записей выделялись собственные колебания здания. Для анализа форм колебаний велись синхронные записи одновременно в ряде точек. На рис. 4 приведены фрагменты записи смещений в двух точках здания «Питьевой галереи» в точке 1 на внешнем опорном кольце и в точке 3 на внутреннем кольце (горизонтальные радиальные колебания на одной оси). Как видим, обе точки имеют синфазные колебания. При этом амплитуды смещений точки 3 несколько превышают амплитуды точки 1.

На рис.5. представлены спектральные плотности, построенные для этих двух точек. Для радиальных колебаний точки 1 имеем один преобладающий пик на частоте 3,6 Гц. Для радиальных колебаний в точке 3 имеем один преобладающий пик на частоте 3,6 Гц и относительно невысокий пик на частоте 1,8 Гц.

На рис.6 приведен фрагмент записи смещений здания «Центрального рынка» в г. Ангарске для точек 1 и 3. Записи сделаны при импульсных воздействиях на внутреннее кольцо.

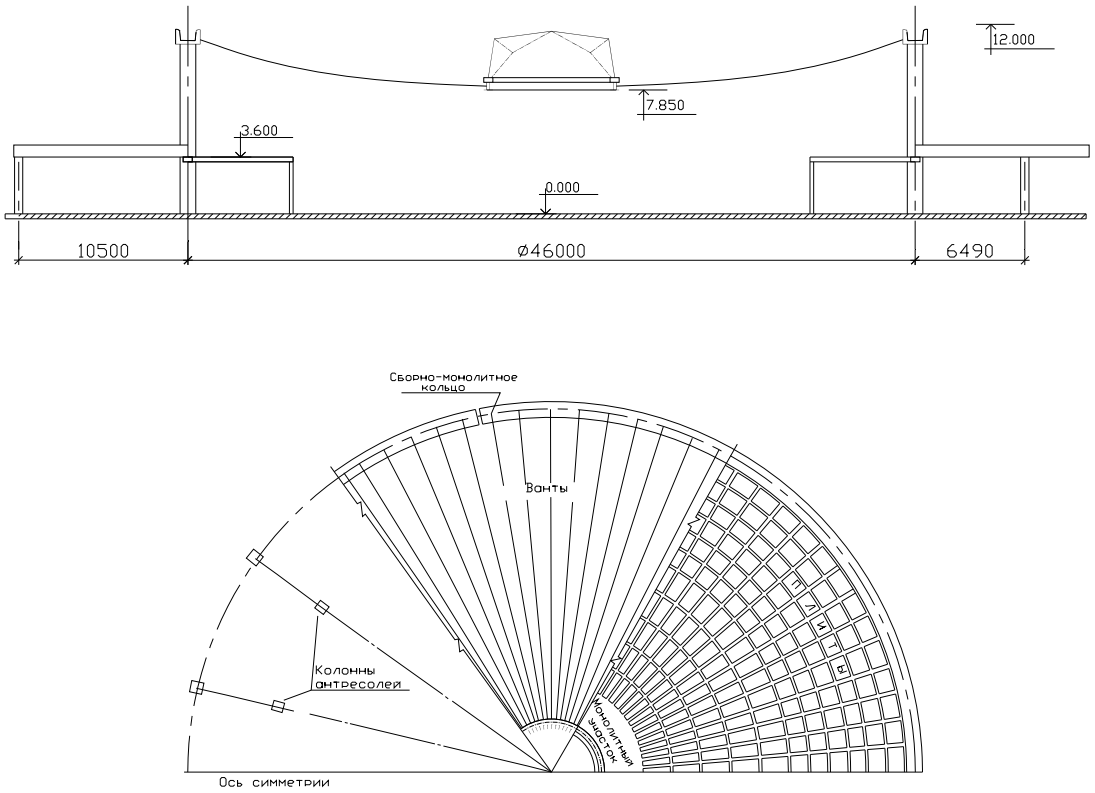


Рис.2. Конструктивная схема здания центрального рынка в г. Ангарске.

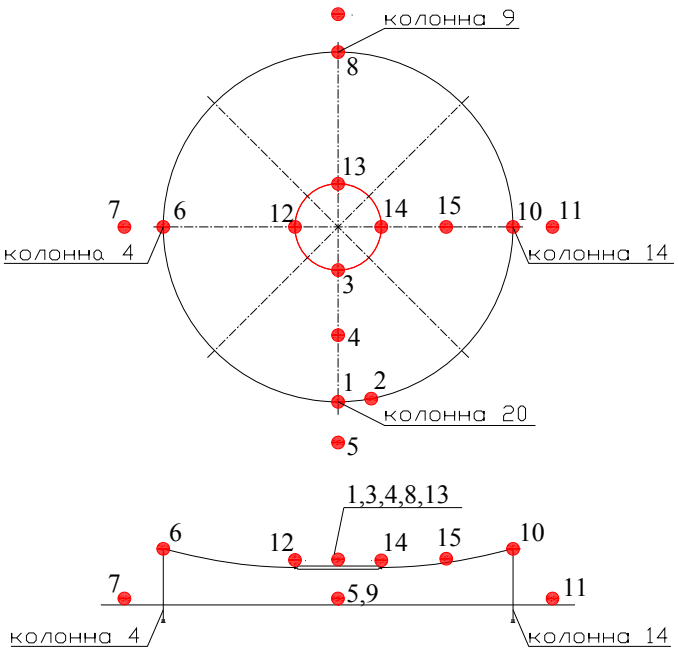


Рис. 3. Расположение измерительных точек.

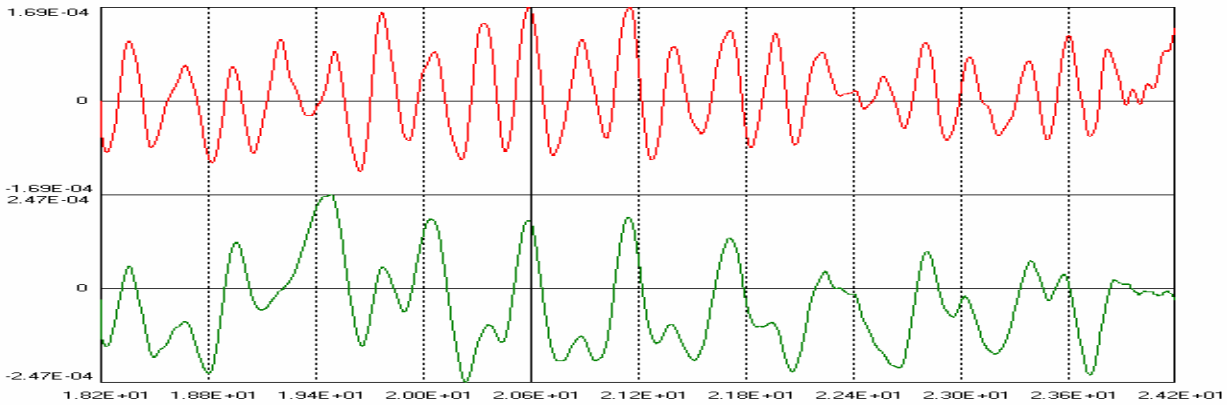
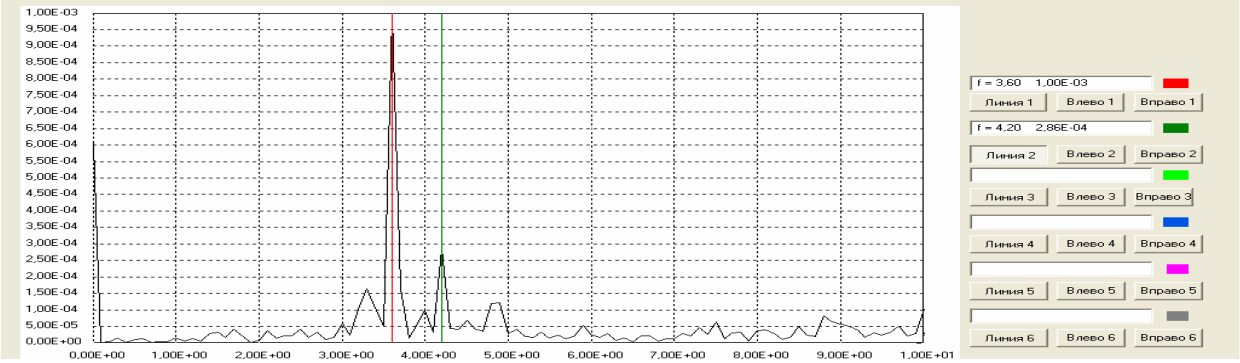
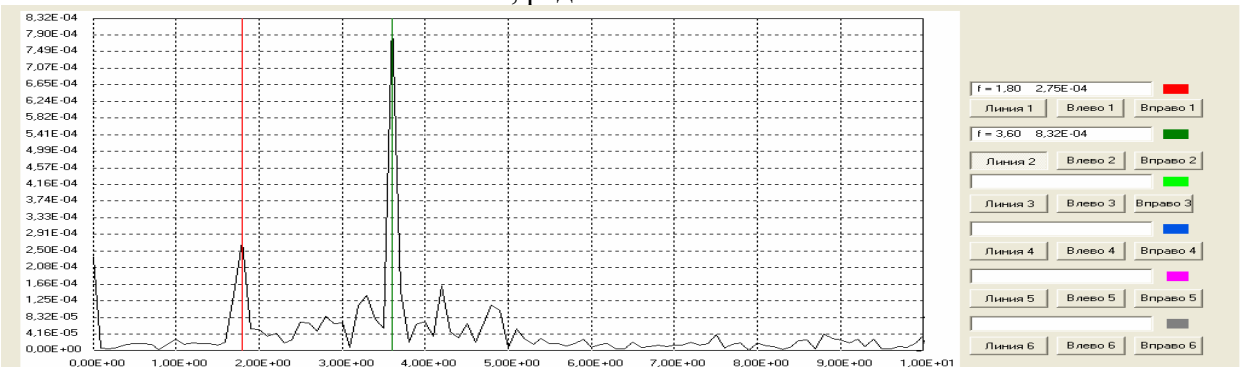


Рис.4. Фрагменты записи смещений (мм) фоновых колебаний: точка 1 на наружном кольце в радиальном направлении, точка 3 на внутреннем кольце в радиальном направлении.

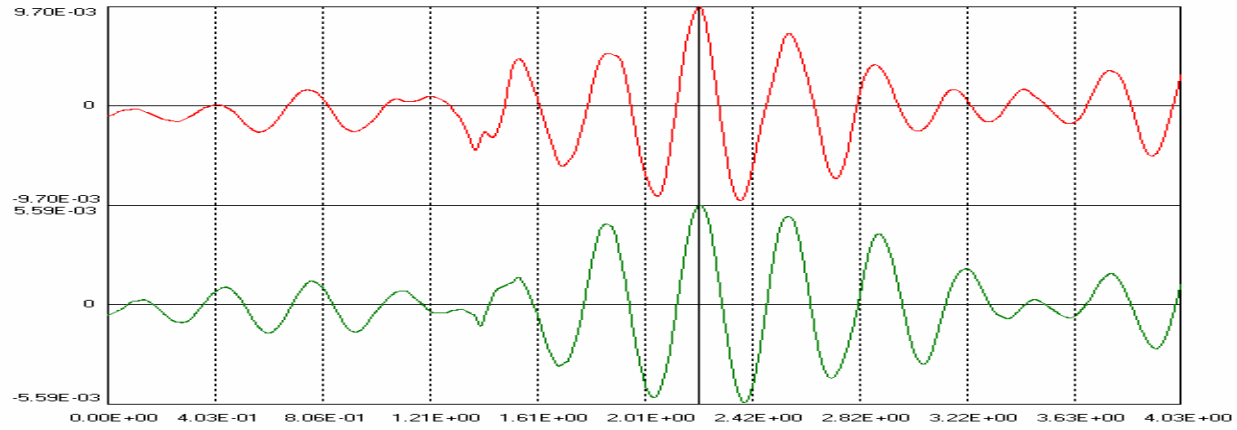


Точка 1, радиальные колебания.



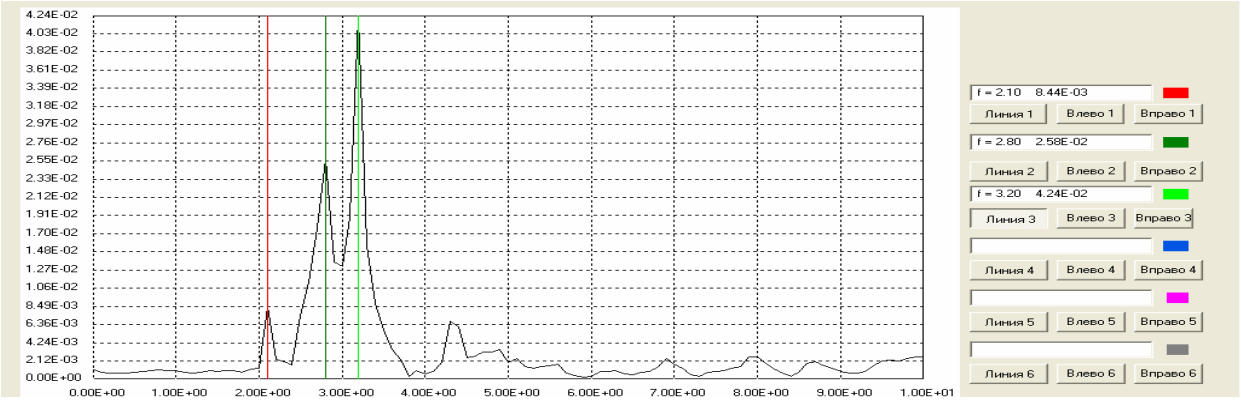
Точка 3, радиальные колебания

Рис.5. Спектральные плотности записей фоновых колебаний на внешнем и внутреннем опорных кольцах здания «Питьевой галереи» в г. Ессентуки.

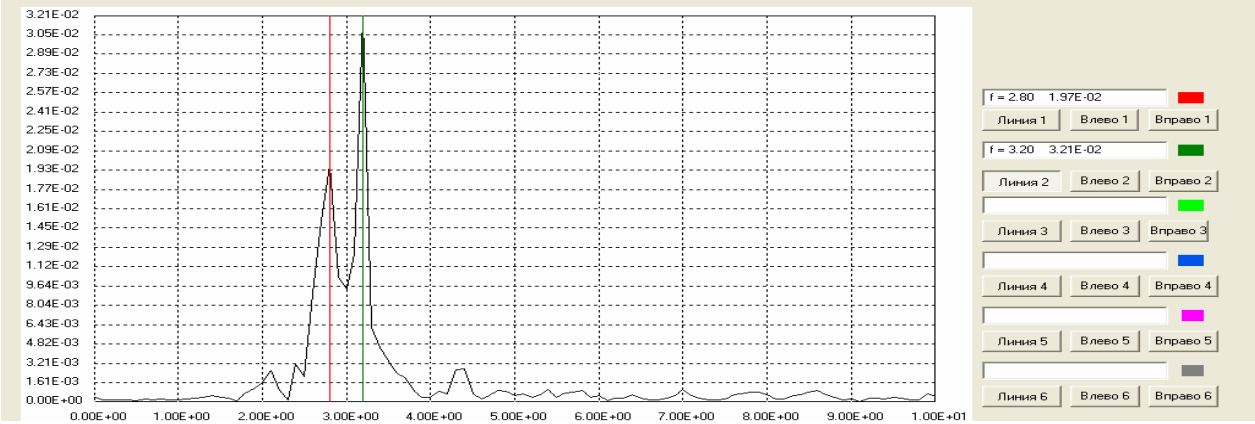


Ангарск, сверху вниз: т.1 – рад., т.3 – рад., смещения в мм.

Рис. 6. Фрагмент записи смещений (мм): точка 1 на наружном кольце в радиальном направлении, точка 3 на внутреннем кольце в радиальном направлении.



Ангарск, точка 1 – радиальные колебания.



Ангарск, точка 3 – радиальные колебания

Рис.7. Спектральные плотности записей колебаний в точках 1 и 3, от импульсных воздействий.

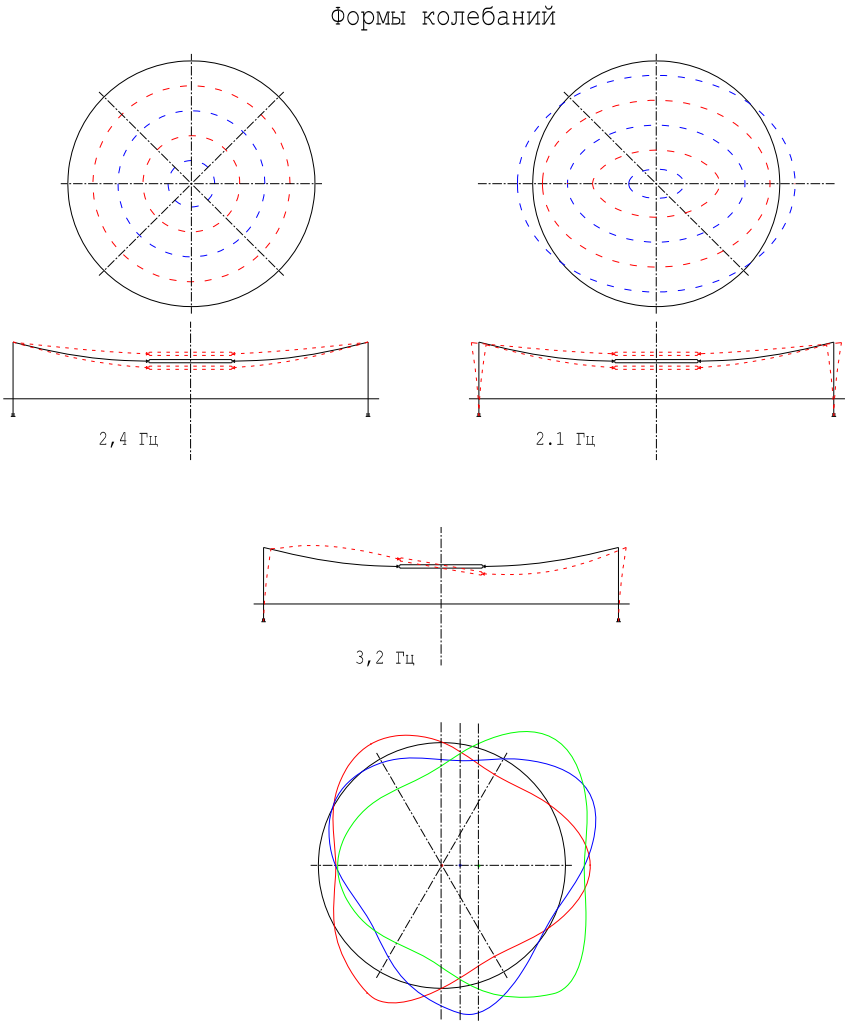


Рис.8. Формы и соответствующие частоты колебаний.

Визуальный анализ записи смещений на рис.6 показывает, что амплитуды смещений точки 1 примерно в 1,7 раза превышают амплитуды смещений точки 5, и при этом имеем практически синфазные колебания этих точек. Спектральные плотности, построенные по этим записям, приведены на рис.7. Для точки 1 получены графики с тремя разновеликими пиками на частотах 2,1Гц; 2,8Гц; 3,2Гц. Для точки 3 получены фактически два высоких пика на частотах 2,8 Гц и 3,2Гц. Преобладающий пик на обеих точках на частоте 3,2 Гц.

Построенные по результатам обработки записей колебаний обоих объектов формы колебаний приведены на рис. 8.

Для здания «Питьевой галереи» в Ессентуках:

Частота 1,7 Гц – вертикальные колебания вантового покрытия. Упругие деформации стержней вант на осевое растяжение – сжатие при слабых вертикальных и горизонтальных изгибных деформациях внешнего опорного кольца.

Частота 2,7 Гц – предположительно изгибные деформации внешнего опорного кольца с двумя волнами в окружном направлении.

Частота 3,6 Гц – общие колебания внешнего опорного кольца как жесткого тела на упругих опорах – колоннах. Вблизи этой частоты зафиксированы также крутильные колебания внешнего кольца и его изгибные деформа-

Частоты собственных колебаний зданий Таблица 1

№ п/п	Наименование здания	Частоты собственных вертикальных колебаний вантового покрытия (Гц)	Частоты собственных колебаний зданий на уровне верха внешнего опорного кольца	
			Радиальные колебания (Гц)	Тангенциальные Колебания (Гц)
1	2	3	4	5
1	Здание «Питьевой галереи» в г. Ессентуки	1,7; 3,6	3,6; 4,7	4,6 – 4,9
2	Здание «Центрального рынка» в г. Ангарске	2,4; 3,2	2,1; 3,2	2,1; 3,2

ции. Возможно им соответствуют пики на частотах 4,2Гц и 4,8 Гц.

Для здания «Центрального рынка» в Ангарске:

Частота 2,1 Гц – изгибные колебания внешнего опорного кольца с 2-мя волнами в окружном направлении.

Частота 2,4 Гц – вертикальные колебания вантового покрытия (упругие деформации тросов - вант на осевое растяжение сжатие).

Частота 3,2 Гц – общие колебания внешнего опорного кольца на колоннах вместе с покрытием в горизонтальной плоскости плюс одновременно вертикальные колебания покрытия. При этом внешнее опорное кольцо совершает также изгибные колебания с 3-мя волнами в окружном направлении.

Сводные результаты определения частот собственных колебаний обоих зданий на основе анализа большого количества записей их микроколебаний в ряде характерных точек представлены в таблице 1.

Как видим, низшая частота вертикальных колебаний вантового покрытия здания «Питьевой галереи» существенно меньше, что определяется его большим диаметром. Собственные частоты других конструктивных элементов оказались существенно меньшими для здания «Центрального рынка» в г. Ангарске.

Заключение

Успешно апробирована методика натурных исследований динамических характеристик конструктивно сложных пространственных сооружений на основе записей их микроколебаний вызванных различного рода динамическими воздействиями

Определены частоты и соответствующие им формы собственных колебаний двух конструктивно близких специальных зданий возведенных в сейсмически активных районах на основе записей их микроколебаний.

Полученные результаты натурных динамических исследований были использованы для построения уточненных расчетных схем этих зданий с целью экстраполяции их на здание Басманного рынка в процессе экспертизы причин его разрушения.

Полученные частотные спектры обоих зданий указывают на возможность резонансных явлений в них при землетрясениях. Сложный характер их реакции на динамические воздействия и разрушение подобного здания в Москве при очень слабых микросейсмических воздействиях техногенного происхождения требуют ретроспективной проверки их сейсмостойкости на основе современных норм и возможностей вычислительной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Костин И.Х., Шаблинский Г.Э., Затеев В.Б., Мальцева Л.Б.** «Натурные динамические исследования строительных конструкций реакторного отделения Крымской АЭС», Строительная механика и расчет сооружений, 1991, №2.
2. **Шаблинский Г. Э., Исайкин А.С., Зубков Д. А.** «Мониторинг динамических характеристик зданий и сооружений для оценки стабильности состояния их конструкций», Сборник материалов международной конференции-выставки «Уникальные и специальные технологии в строительстве», Москва, 12-13 апреля 2005 года
3. **Шаблинский Г. Э., Исайкин А.С., Зубков Д. А., Старчевский А.В.** «Экспериментальные исследования динамических характеристик строительных конструкций АЭС в натурных условиях», в журнале «Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений», №6, 2005 год.
4. **Shablinsky G., Zoubkov D., Isaikin A.** «Frequency Response Analysis of Novovoronezhskaya NPP main Building», 18 th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT 18) August 7-12, 2005, Beijing, China.

Шаблинский Георгий Эдуарович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

ИЗГИБ ПОЛОСЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ УСИЛИЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Леонтьев А.Н., Вагиалла Хасан А.М.
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: Широко распространенным элементом строительных конструкций являются прямоугольные плиты с различными закреплениями контура, а также расположенные на упругом основании. В ряде случаев при расчете плит, и особенно плит, лежащих на упругом основании, необходимо кроме поперечной нагрузки учитывать усилия, приложенные в срединной плоскости. Появление этих усилий может быть вызвано сезонными и суточными колебаниями температуры, предварительным натяжением арматуры, давлением ограждающих стен на фундаментную плиту. В настоящей статье рассматриваются вопросы изгиба полосы средней толщины при наличии усилий в срединной плоскости.

BEND OF THE STRIP OF AVERAGE THICKNESS AT PRESENCE OF EFFORTS IN THE MIDDLE PLANE

Andrey N. Leontiev, Vagialla Khasan A.M.
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Rectangular plates with various fastenings a contour (including plates on elastic foundation) are widespread element of structures. It is necessary to consider the efforts enclosed in a middle plane except for cross-section loading in some cases. Initiations of these efforts can be caused by seasonal and daily fluctuations of temperature, a preliminary tension of reinforcement, pressure of enclosure walls on foundation plate. Problem of bending of strip of average thickness at presence of efforts in the middle plane is considered in the distinctive paper.

Широко распространенным элементом строительных конструкций являются прямоугольные плиты с различными закреплениями контура, а также расположенные на упругом основании. В ряде случаев при расчете плит, и особенно плит, лежащих на упругом основании, необходимо кроме поперечной нагрузки учитывать усилия, приложенные в срединной плоскости. Появление этих усилий может быть вызвано сезонными и суточными колебаниями температуры, предварительным натяжением арматуры, давлением ограждающих стен на фундаментную плиту.

Напряженное и деформированное состояние плиты средней толщины при ее изгибе от поперечной нагрузки $p(x,y)$ описывается, в соответствии с предложениями Б.Ф.Власова [1], уравнениями:

$$\nabla^2\nabla^2 t(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}\ ,$$

$$\nabla^2\varphi(x,y) - \frac{12}{h^2}\varphi(x,y) = 0\ . \qquad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость плиты, h – ее толщина. Прогибы $w(x,y)$ и углы поворота плиты $t_x(x,y)$, $t_y(x,y)$ связаны с искомыми функциями $t(x,y)$, $\varphi(x,y)$ выражениями:

$$w = t - \frac{D}{Gh}\nabla^2 t\ , \qquad t_x = \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{D(1-\nu)}{2Gh}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ ,$$

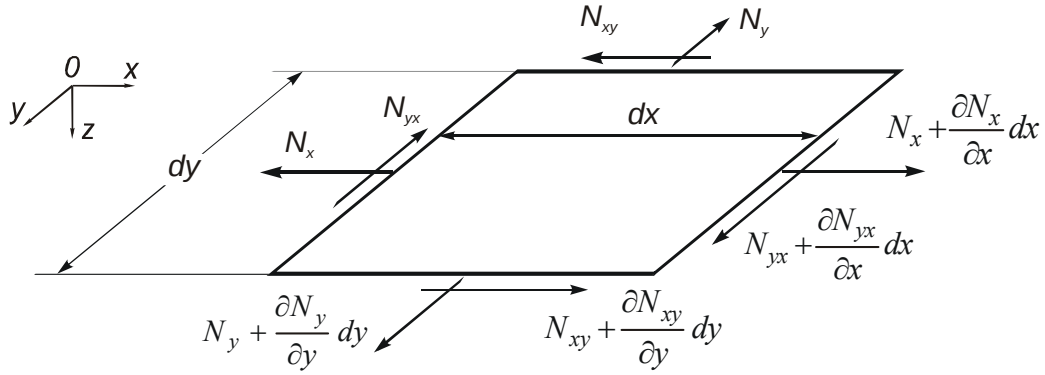


Рис. 1.

$$t_y = \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{D(1-\nu)}{2Gh}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (2)$$

где G – модуль упругости второго рода, ν – коэффициент Пуассона.

При этом справедливы зависимости:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y}, \quad \varphi = \frac{\partial t_y}{\partial x} - \frac{\partial t_x}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$M_x = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \frac{D(1-\nu)^2}{2Gh}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right),$$

$$M_y = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{D(1-\nu)^2}{2Gh}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right), \qquad (4)$$

$$M_{xy} = -D\frac{1-\nu}{2}\cdot\left[2\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{D(1-\nu)}{2Gh}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)\right], \qquad (5)$$

$$Q_x = -D\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

$$Q_y = -D\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 t + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \qquad (6)$$

При наличии в срединной плоскости плиты усилий N_x, N_y, N_{xy}=N_{yx} (рис.1) второе из уравнений (1) остается неизменным, а в первом должны быть учтены проекции этих сил на ось Oz, возникающие за счет изгиба плиты. Заметим, что усилия срединной плоскости связаны между собой уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \qquad (7)$$

Спроецируем силы N_x, N_y, N_{xy}=N_{yx} и их приращения на вертикальную ось. Тогда первое из уравнений (1), с учетом выражений (2) и (3), можно записать в виде:

$$\nabla^2\nabla^2 t - \frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{N_y}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - 2\frac{N_{xy}}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{p}{D}. \qquad (8)$$

Заметим, что уравнение (8) совпадает по виду с аналогичным уравнением для тонкой пластинки [2] с заменой в последнем функции $w(x,y)$ на функцию $t(x,y)$.

Если рассматриваемая плита расположена на упругом основании, то действующая на нее поперечная нагрузка будет состоять из заданных сил $p(x,y)$ и реакций упругого основания $q_0(x,y)$.

Примем в качестве упругого основания модель с двумя коэффици-ентами постели k_0 и t_0 [3], для которой связь между нагрузкой на основание $q_0(x,y)$ и его осадкой $w(x,y)$ выражается формулой:

$$q_0(x,y) = k_0 w(x,y) - 2t_0\nabla^2 w(x,y). \qquad (9)$$

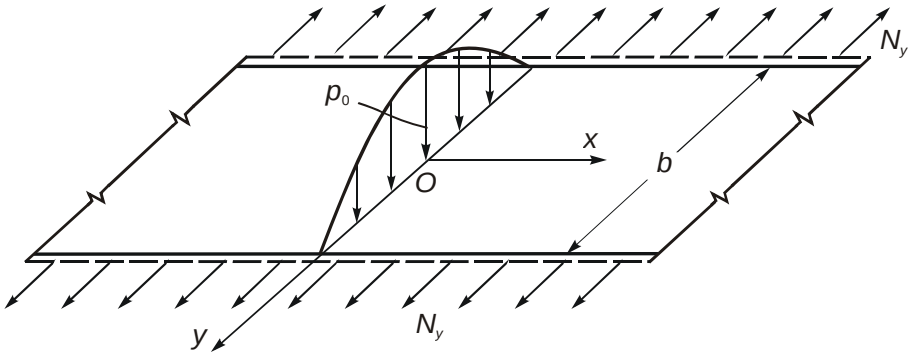


Рис. 2.

Подставляя выражение (9) со знаком минус в правую часть уравнения (8) и учитывая зависимость (2), получим систему разрешающих уравнений для плиты средней толщины, расположенной на упругом основании с двумя коэффициентами постели и подверженной действию сил в срединной плоскости:

$$\left(1+\frac{2t_0}{Gh}\right)\nabla^2\nabla^2 t-2\left(\frac{t_0}{D}+\frac{k_0}{2Gh}\right)\nabla^2 t+\frac{k_0}{D}t-$$
$$-\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\frac{N_y}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}-2\frac{N_{xy}}{D}\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}=\frac{p}{D}$$
$$\nabla^2\varphi-\frac{2Gh}{D(1-\mu)}\varphi=0. \quad (10)$$

Рассмотрим задачу об изгибе бесконечной полосы средней толщины, расположенной на двухпараметрическом упругом основании и находящейся под действием продольных сжимающих сил N_y, равномерно распределенных по продольным краям.

Будем считать, что продольные края полосы шарнирно оперты, а поперечная нагрузка $q(y)$ приложена в начальном сечении $x = 0$ и задана выражением: $p(y)=p_0\cos\beta y$, где $\beta=\pi/b$ (рис.2).

При этом искомые функции могут быть представлены в виде:

$$t(x,y)=V(x)\cos\beta y,$$
$$\varphi(x,y)=F(x)\sin\beta y. \quad (11)$$

Подстановка выражений (11) в уравнения (10) позволяет получить следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $V(x)$ и $F(x)$:

$$V^{IV}-2\rho^2V^{II}+s^4V=0, \quad (12)$$
$$F^{II}-(\beta^2+\frac{12}{h^2})F=0\ , \quad (13)$$

где $\rho^2=\frac{\pi^2}{b^2}\left[1+\frac{1}{a_1\pi^2}\left(\overline{t_0}+\frac{\overline{k_0}}{12(1-\mu)}\frac{h^2}{b^2}\right)\right]$,

$$s^4=$$
$$=\frac{\pi^4}{b^4}\left[1+\frac{2\overline{t_0}}{a_1\pi^2}+\frac{\overline{k_0}}{a_1\pi^4}\left(1+\frac{\pi^2}{6(1-\mu)}\frac{h^2}{b^2}\right)+\frac{\overline{N}_y}{a_1\pi^2}\right],$$
$$a_1=1+\frac{\overline{t_0}}{3(1-\mu)}\frac{h^2}{b^2},\quad \overline{k_0}=\frac{k_0b^4}{D},$$
$$\overline{t_0}=\frac{t_0b^2}{D},\quad \overline{N}_y=\frac{N_yb^2}{D}\ .$$

Вид решения уравнения (12) зависит от соотношения коэффициентов ρ и s. Анализ формул (14) показывает, что в случае растягивающих сил $(N_y>0)$ $s>\rho$. В случае сжимающих сил ($N_y<0$) при малой жесткости основания (например, при $\overline{k_0}$=5) и даже при относительно малых величинах сил N_y (например, при $\overline{N}_y=-0.5$) будем иметь $s<\rho$. С увеличением $\overline{k_0}$ это

соотношение остается справедливым уже при бóльших сжимающих силах (например, при $\overline{k_0} = 50$ и $\overline{N}_y = -5$). Заметим, что величина второго коэффициента постели $\overline{t_0}$ оказывает малое влияние на соотношение ρ и s в сторону увеличения ρ.

При $s > \rho$, учитывая бесконечную протяженность плиты, решение уравнения (12) можно представить в виде:

$$V(x) = C_1 e^{-\alpha x} \sin \gamma x + C_2 e^{-\alpha x} \cos \gamma x, \quad (15)$$

где $\alpha = \sqrt{(s^2 + \rho^2)/2}$, $\gamma = \sqrt{(s^2 - \rho^2)/2}$.

При $s < \rho$ решение уравнения (12) запишется в виде:

$$V(x) = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\rho^2 + \sqrt{\rho^4 - s^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - s^4}}.$$

Решение уравнения (13), с учетом бесконечности полосы, имеет вид:

$$F(x) = D_1 e^{-gx}, \qquad \text{где} \qquad g = \frac{1}{h}\sqrt{12 + \pi^2 \frac{h^2}{b^2}}.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, D_1 в началь-ном сечении формулируются следующие граничные условия:

при $x = 0$ $t_x = M_{xy} = 0$, $Q_x = -\frac{p_0}{2}\cos \beta y$. (17)

С учетом формул (2), (5), (6) и выражений (11) эти условия прини-мают вид:

$$V^I - \frac{h^2}{12}\beta F = 0,$$
$$-\beta V^I + \frac{h^2}{24}\left(F^{II} + \beta^2 F\right) = 0, \quad (18)$$
$$V^{III} - \beta^2 V^I - \frac{1-\mu}{2}\beta F = \frac{p_0}{2D}.$$

Раскрывая эти условия для решения (15) (случай $s > \rho$), получим:

$$\gamma C_1 - \alpha C_2 - \frac{h^2}{12}\beta D_1 = 0,$$
$$\gamma\beta C_1 + \alpha\beta C_2 + \frac{h^2}{24}\left(g^2 + \beta^2\right)D_1 = 0,$$
$$\gamma\left(3\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2\right)C_1 +$$
$$+ \alpha\left(3\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2\right)C_2 - \frac{1-\mu}{2}\beta D_1 = \frac{p_0}{2D},$$

откуда:

$$C_1 = \frac{p_0}{4D\gamma s^2}, \quad C_2 = \frac{p_0}{4D\alpha s^2}, \quad D_1 = 0.$$

Раскрывая условия (18) для решения (16) (случай $s < \rho$), получим:

$$-\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 - \frac{h^2}{12}\beta D_1 = 0,$$
$$\lambda_1\beta C_1 + \lambda_2\beta C_2 + \frac{h^2}{24}\left(g^2 + \beta^2\right)D_1 = 0,$$
$$-\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \beta^2\right)C_1 -$$
$$-\lambda_2\left(\lambda_2^2 - \beta^2\right)C_2 - \frac{1-\mu}{2}\beta D_1 = \frac{p_0}{2D},$$

откуда:

$$C_1 = -\frac{p_0}{2\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)D},$$
$$C_2 = \frac{p_0}{2\lambda_2\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)D}, \quad D_1 = 0.$$

После определения постоянных C_1, C_2 и D_1 все кинематические и статические

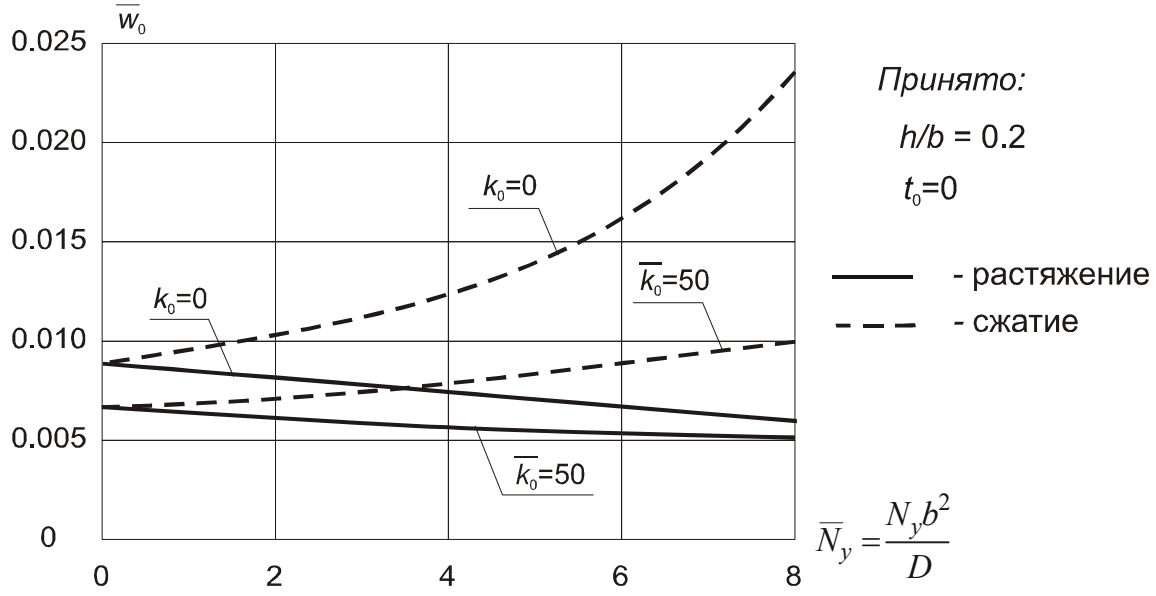


Рис. 3.

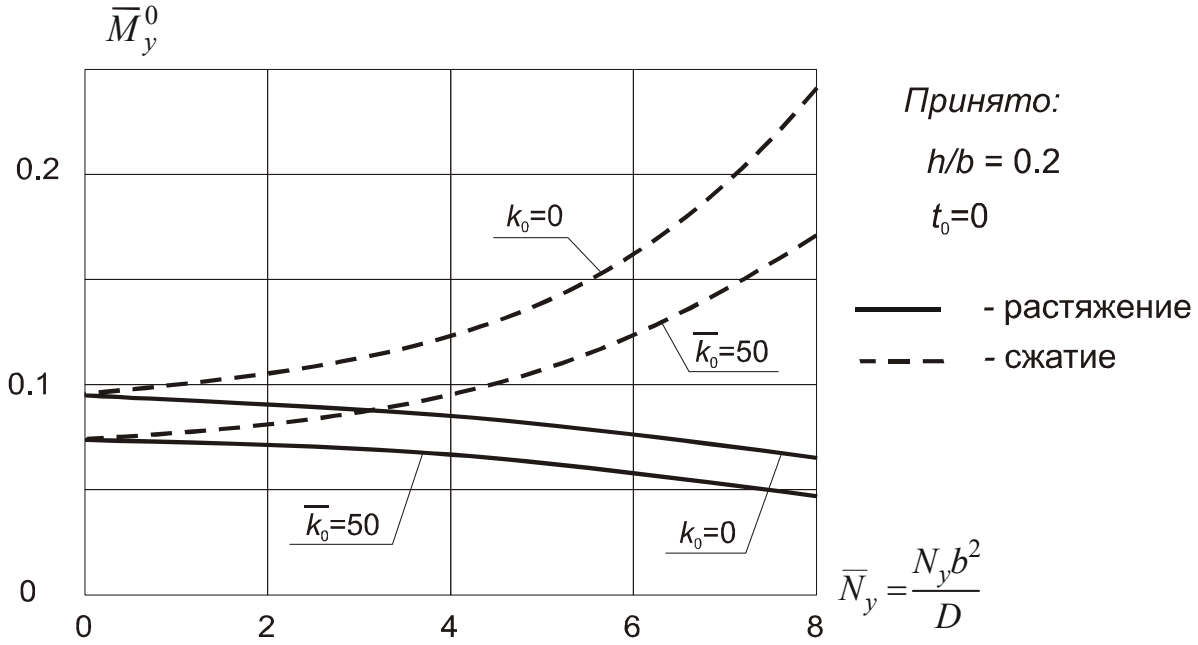


Рис. 4.

величины, относящиеся к плите, определяются по формулам (2), (4) − (6).

На рис.3 приведены графики, представляющие зависимость безразмерного прогиба $\overline{w}_0 = w(0,0)D / p_0 b^3$ в середине начального сечения плиты от величины безразмерных продольных сил $\overline{N}_y = N_y b^2 / D$.

На рис.4 показаны зависимости безразмерных изгибающих моментов $\overline{M}_y^0$, возникающих в середине начального сечения, от безразмерных продольных сил $\overline{N}_y$ при двух значениях $\overline{k}_0$ и h/b = 0.2,

$\nu = 0.2$, $t_0 = 0$. Пунктирные кривые относятся здесь к случаю сжатия плиты ($\overline{N}_y < 0$), сплошные линии – к случаю растяжения ($\overline{N}_y > 0$).

Можно видеть, что увеличение продольных усилий N_y приводит к существенному изменению значений прогиба и изгибающих моментов: увеличению при сжатии и уменьшению при растяжении. При этом в процентном отношении прогибы изменяются более интенсивно, чем изгибающие моменты. Следует отметить также, что влияние продольных усилий на прогибы плиты средней толщины оказывается несколько бóльшим, чем на прогибы тонкой плиты и бóльшим при сжатии, чем при растяжении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Власов Б.Ф.** Уравнения изгиба плит средней толщины // Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жесткости элементов строительных конструкций. М., МИСИ, 1989. – С. 107–116.
2. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М., Наука, 1966. – 635 с.
3. **Власов В.З., Леонтьев Н.Н.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. – 490 с.
4. **Габбасов Р.Ф., Филатов В.В.** Расчет сжато-изогнутых пластин при неполном контакте с упругим основанием. – В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жесткости элементов строительных конструкций. М., МГСУ, 1999. – С. 50–53.

Леонтьев Андрей Николаевич, кандидат технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: an_leontiev@mail.ru

О ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ НАЧАЛЬНО ИСКРИВЛЁННЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.В. Ильяшенко
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье описан алгоритм расчёта сжатого начально искривлённого стержня прямоугольного профиля, находящегося под действием внецентренной нагрузки.

ABOUT ECCENTRIC COMPRESSION OF THIN-WALLED BARS COMPOSED OF INITIALLY CURVED FINNED ELEMENTS

Alla V. Iljashenko
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: The algorithm of analysis of initially curved thin-walled bar with rectangular profile under eccentric load is considered in the distinctive paper.

Суть методики расчёта центрально сжатых неидеальных стержней прямоугольного профиля в критическом и закритическом состояниях изложена в работах [1]-[4], где в качестве расчётного метода использован принцип возможных перемещений. В указанных публикациях приведены аппроксимирующие функции начальных и приобретённых прогибов пластинчатых элементов профиля, а также формулы для определения виртуальных работ (δT^*_{kj}) всех внешних и внутренних усилий на возможных перемещениях для пластинок с двумя упруго защемлёнными ненагруженными гранями. Из набора четырёх таких пластин-стенок можно составить стержень прямоугольного профиля. Короткие нагруженные грани пластинок опёрты шарнирно (см. рис.1).

В данной работе покажем алгоритм расчёта сжатого начально искривлённого стержня прямоугольного профиля, находящегося под действием внецентренной нагрузки. Для этого рассмотрим участок в середине по длине профиля (поскольку здесь появляются наибольшие по величине эксцентриситеты e_x , e_y приложения нагрузки, превышающие опорные за счёт искривления оси стержня), но с поперечным сечением, равным самому ослабленному местной потерей устойчивости (участок с наибольшими по амплитуде стрелками начальных погибей пластинок стержня). При этом полагается, что в пределах отрезка стержня длиной l (где l - длина образовавшейся в результате выпучивания пластинок профиля продольной полуволны) рёбра остаются прямолинейными.

В момент местной потери устойчивости стержня, имеющего предварительную погибь, наиболее слабая пластинка выпучивается, остальные деформируются за счёт влияния моментов вдоль линий контакта пластинчатых элементов стержня. Возникающие в начальный момент выпучивания дополнительные прогибы точек срединных поверхностей хотя не равны нулю, но практически настолько малы, что можно пренеб-

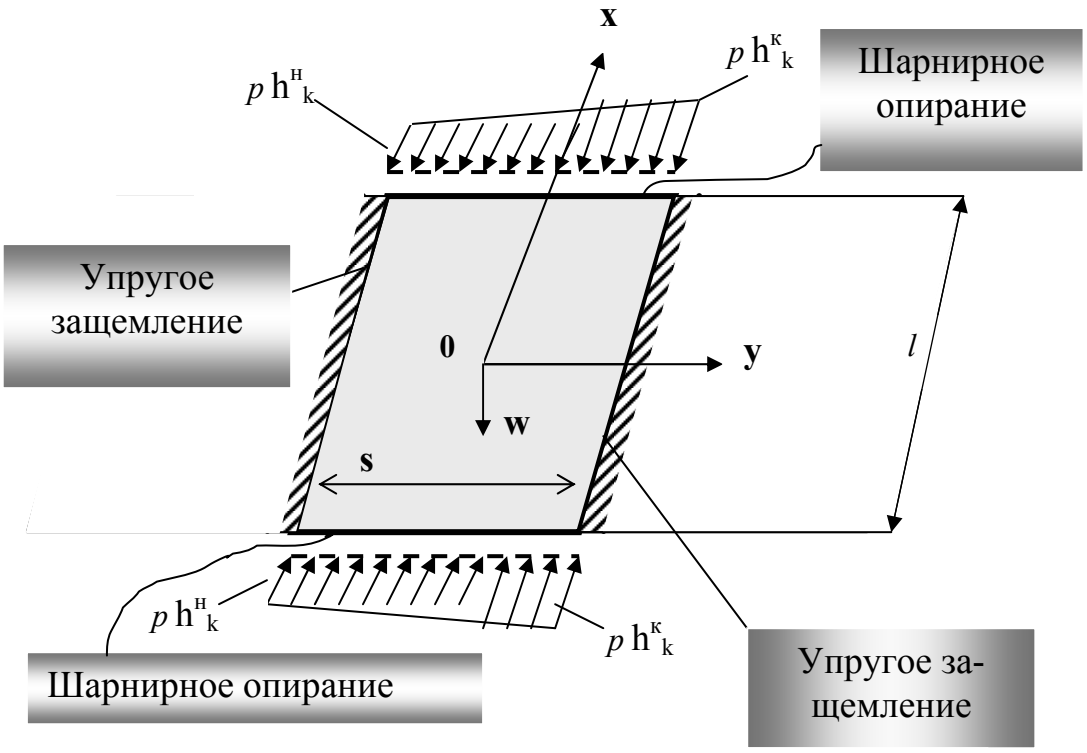


Рис. 1
Напряжённое состояние внецентренно сжатой пластинки-стенки.

речь квадратами, кубами и смешанными произведениями стрелок составляющих приобретённых прогибов.

С учётом указанных обстоятельств длина полуволны l и величина критической силы местной устойчивости $p^{м}_{кр}$ определяются с помощью системы разрешающих уравнений [3]. При этом вводится простой закон распределения напряжений σ_{kx} до момента местной потери устойчивости (см. рис.1):

$$\sigma_{kx} = -\frac{p}{2}(h^{н}_{k} + h^{к}_{k}) - \frac{py}{s}(h^{к}_{k} - h^{н}_{k}), \quad (1)$$

где p – среднее сжимающее напряжение в сечении стержня, определяемое выражением

$$p = \frac{P}{F_{сеч}}. \quad (2)$$

Здесь P – внецентренно сжимающая сила; $F_{сеч}$ – площадь поперечного сечения стержня; $h^{н}_{k}$, $h^{к}_{k}$ – безразмерные коэффициенты, определяемые отношением напряжений соответственно на начальной и конечной гранях k-ого пластинчатого элемента профиля (по формулам сопротивления материалов для внецентренно сжатого стержня с недеформируемым профилем) к среднему сжимающему напряжению p; s – ширина пластинки.

Учитывая, что в начальный момент местной потери устойчивости составляющие виртуальных работ δT^{*}_{kj}, содержащие постоянные интегрирования A_{k2}, A_{k3}, A_{k4}, A_{k5}, весьма малы, принимаем последние равными нулю. Тогда, исходя из формул для напряжений σ_{kx} [4], последние в докритическом диапазоне определяются зависимостью

$$\sigma_{kx} = -A_{k1} - A_{k6}\, y. \qquad (3)$$

Сравнивая выражения (1) с (3) , получаем для k – ой пластинки –стенки :

$$A_{k1} = \frac{p}{2}\left(h^{н}_{k} + h^{к}_{k} \right);$$

$$A_{k6} = \frac{p}{s}\left(h^{к}_{k} - h^{н}_{k} \right). \qquad (4)$$

Полагается, что выражение (4) справедливо и для начального момента локальной потери устойчивости. В результате несложных преобразований получим формулы для определения сумм работ всех внутренних и внешних усилий во внецентренно сжатой начально деформированной пластинке-стенке на бесконечно малых возможных перемещениях. Для сокращения выкладок введём следующие обозначения:

$$\delta T^{**}_{kj} = \delta T^{*}_{kj} - K_{kj}, \qquad (5)$$

где δT^{*}_{kj} (j=1,2,3) – виртуальная работа внутренних и внешних усилий k-ой пластинки на возможном перемещении $(\delta W)_j$ в момент местной потери устойчивости при центральном сжатии стержня;

K_{kj} - сумма всех членов, содержащих параметр p в δT^{*}_{kj} [3].

Тогда виртуальные работы δT^{*e}_{kj} в начально искривлённой пластинке-стенке профиля, испытывающего внецентренное сжатие, представляются следующими выражениями :

$$\delta T^{*e}_{k1} = \delta T^{**}_{k1} + p\, t_k\, s\, (\pi^2 h_k f_{k1} \frac{1}{8l} + 2\pi h_k f_{k2} \frac{1}{3l} + 4h'_k f_{k3} \frac{1}{l}); \qquad (6)$$

$$\delta T^{*e}_{k2} = \delta T^{**}_{k2} + p\, t_k\, s\, (2\pi h_k f_{k1} \frac{1}{3l} + 3\pi^2 h_k f_{k2} \frac{1}{8l} + 3\pi h'_k f_{k3} \frac{1}{16l}); \qquad (7)$$

$$\delta T^{*e}_{k3} = \delta T^{**}_{k3} + p\, t_k\, s\, (4h'_k f_{k1} \frac{1}{l} + 3\pi h'_k f_{k2} \frac{1}{16l} + \pi^2 h_k f_{k3} \frac{1}{8l}); \qquad (8)$$

где s и t_k – соответственно ширина и толщина k – ой пластинки ;

f_{kj} (j = 1,2,3) – стрелки приобретённого прогиба пластинки стержня ;

$$h'_k = \left(h^{к}_{k} - h^{н}_{k} \right); \quad h_k = \left(h^{к}_{k} + h^{н}_{k} \right).$$

Таким образом, получаем систему вариационных уравнений, описывающих критическое состояние внецентренно нагруженного несовершенного тонкостенного стержня коробчатого профиля, составленного из пластинок-стенок. Для этого в одноимённой системе уравнений, записанной для случая центрального сжатия [3], изменим δT_{kj} на δT^{*e}_{kj} :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \left(\frac{\partial f_{kj}}{\partial f_{ai}} \right) \delta T^{*e}_{kj} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (9)$$

Выразив с помощью граничных условий стрелки составляющих приобретённых прогибов для всех пластинок профиля через соответствующие параметры основной пластинки (функция дополнительных прогибов которой содержит наибольшее число членов), т.е. через f_{a1}, f_{a2} ,…, f_{an} , и определив значение частных производных типа $\left(\frac{\partial f_{kj}}{\partial f_{ai}} \right)$, получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных f_{a1} , f_{a2} ,…, f_{an} . В соответствии с числом стрелок f_{ai} главный определитель этой системы раскрывается соответственно в кубическое (i =1,2, 3) уравнение относительно параметра p . Варьируя величину l, также входящую в полученное уравнение, находим из последнего наименьшее значение параметра нагрузки $p^{м}_{кр}$, а значит, и соответствующую

ему величину продольной полуволны l . Критическая сила локальной потери устойчивости вычисляется по формуле : $P_{кр}^{м} = p_{кр}^{м} F_{сеч}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильяшенко А.В., Ефимов И.Б.** Экспериментальное исследование тонкостенных стержней с искривлёнными пластинчатыми элементами.// Организация и производство строительных работ: Центр. Бюро н.-т. информации Минпромстроя, г. Москва, 1983. С.3-38.
2. **Ильяшенко А.В.** О расчёте сжатых гибких пластинок с упруго защемлёнными продольными ненагруженными гранями, имеющих начальную погибь.// Строительные конструкции и материалы: Тр. НИИпромстроя, г. Уфа, 1983. С. 86-98.
1. **Ильяшенко А.В.** Задача о закритическом состоянии сжатых тонкостенных стержней коробчатого профиля, имеющих начальную погибь.// Строительные конструкции и материалы: Тр. НИИпромстроя, г. Уфа, 1983. С. 99-108.
2. **Ильяшенко А.В., Ефимов И.Б.** Напряжённо-деформированное состояние после местной потери устойчивости сжатых тонкостенных стержней с учётом начальной погиби.// Строительные конструкции и материалы. Защита от коррозии: Тр. НИИпромстроя, г.Уфа, 1981. С. 110-119.

Ильяшенко Алла Викторовна, кандидат технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В КОЛЬЦЕВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А.Я. Астахова
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются тонкие изотропные оболочки вращения постоянной толщины при действии кольцевых и распределенных нагрузок. Длинные и короткие кольцевые оболочки на кромках могут иметь различные условия опирания, например, жесткое защемление, шарнирное опирание или свободный край.

ANALYSIS OF STRAIN-STRESS DISTRIBUTION OF ANNULAR SPHERICAL SHELLS COMPRESSION BEYOND ELASTIC LIMIT

A.Y. Astakhova
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Isotropic thin shells of revolution with constant thickness under annular and distributed loads are considered in the distinctive paper. Long and short annular shells can have various support conditions (for instance fixed-end condition or hinged bearing).

В работе рассматриваются тонкие изотропные оболочки вращения постоянной толщины при действии кольцевых и распределенных нагрузок. Длинные и короткие кольцевые оболочки на кромках могут иметь различные условия опирания, например, жесткое защемление, шарнирное опирание или свободный край.

Вывод основной системы дифференциальных уравнений основан на линейной теории оболочек с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и физических соотношениях теории малых упруго-пластических деформаций [1]. Полагается, что срединная поверхность оболочки является поверхностью вращения относительно оси z без особых точек за исключением граничных, где особенность допускается. Обозначим: θ - азимутальный угол в горизонтальной плоскости, s - длину дуги вдоль образующей, ζ - расстояние по нормали к срединной поверхности оболочки. Используя метод упругих решений, внутренние усилия N представим в виде разности линейно-упругих решений N^0 и некоторых поправок, учитывающих физическую нелинейность материала Δ [2,3]:

$$N = N^0 - \Delta .$$

Разложение всех функций напряженно-деформированного состояния и нагрузки в ряд Фурье по окружной координате θ и преобразование полной системы дифференциальных уравнений в частных производных приводит к разрешающей системе. Получим восемь обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно следующих неизвестных функций: N_r, N_z - радиальное и осевое усилия, S -

обобщенное тангенциальное усилие, M_s - меридиональный изгибающий момент, u_r, u_z - радиальное и осевое перемещения, ζ_s - угол поворота сечения. Правая часть системы содержит компоненты нагрузки и функции, учитывающие физическую нелинейность материала (имеются ввиду коэффициенты ряда Фурье неизвестных функций и нагрузки).

Исследуем напряженно-деформированное состояние в кольцевых сферических оболочках при действии трех равномерно распределенных кольцевых нагрузок, приложенных по дуге образующей s с шагом 0,25s. Рассмотрим оболочки с углом полураствора $\alpha = 60^0, 90^0, 160^0$ и углом отхода от оси вращения вверху на $\delta = 5^0$.Материал считается несжимаемым, коэффициент Пуассона принимается равным 0,5 в упругой и упруго-пластических областях. Диаграмма растяжения стали аппроксимирована ломаной линией с модулем упрочнения $\lambda = 0,95$, интенсивность деформаций соответствующая началу текучести принимается $\varepsilon_s = 10^{-3}$.

Для оболочки с отношением радиуса к толщине R/h = 100 при жестком защемлении по верхней и нижней кромкам оболочки области распространения пластических деформаций показаны на рис.1. В коротких оболочках $\alpha = 60^0$ и оболочках средней длины $\alpha = 90^0$ при нагрузке $P/Eh = 0,143 \cdot 10^{-3}$ они распространяются на длине 0,006s на внешней и внутренней поверхностях. В длинных сферических оболочках $\alpha=160^0$ при той же величине нагрузки область пластических деформаций, охватывающая всю толщину оболочки, распространяется на длине 0,24s от нижней опоры и на длине 0,06s между 1-ой кольцевой нагрузкой и верхней опорой. Увеличение нагрузки в 2 раза существенно влияет на распространение пластических деформаций как по толщине оболочки, так и вдоль образующей. В оболочках $\alpha = 60^0$ и $\alpha = 90^0$ пластические деформации по толщине образуются на длине 0,14s между 1-ой кольцевой нагрузкой и верхней опорой, общая область их распространения составляет соответственно 0,44s и 0,3s. В остальной части образующей для $\alpha = 60^0$ пластические деформации находятся вблизи внешней и внутренней поверхностей оболочки, при $\alpha = 90^0$ охватывают всю толщину на длине 0,12s и 0,04s. Для случая $\alpha = 160^0$ область пластических деформаций распространяется вдоль образующей от верхней и нижней опоры на 0,32s.

Меридиональные изгибающие моменты в коротких оболочках и оболочках средней длины принимают наибольшие значения вблизи приложения кольцевых нагрузок, в длинных оболочках наибольшие значения возникают в области жесткого защемления и превышают значения в других точках примерно в 2-3 раза [4].

Составляющие горизонтальных перемещений точек срединной поверхности примерно на порядок больше вертикальных составляющих. Они принимают наибольшие значения вблизи нижней опоры. На рис. 2 представлен график изменения составляющей горизонтального перемещения u_r/h в сферических кольцевых оболочках при разных значениях угла полураствора α для нагрузок $P/Eh = 0,143 \cdot 10^{-3}$ и $P/Eh = 0,286 \cdot 10^{-3}$. Рассматривается точка отстоящая от нижней опоры на расстоянии 0,08s. По графику можно определить, какая величина перемещения, меньшая толщины оболочки, возникнет в этой точке в оболочке с заданным значением α и нагрузки.

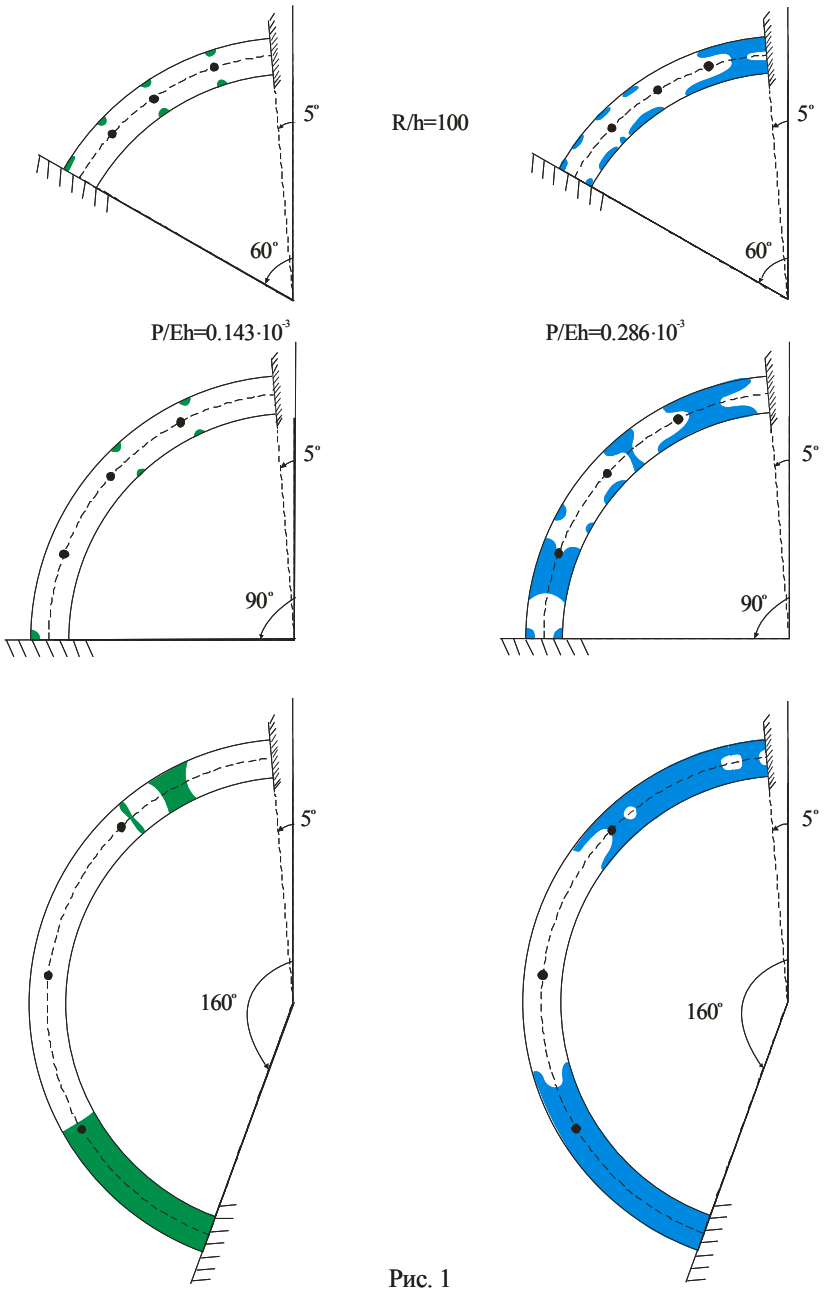

R/h=100
P/Eh=0.143·10-3
P/Eh=0.286·10-3
5°
60°
90°
160°

Рис. 1

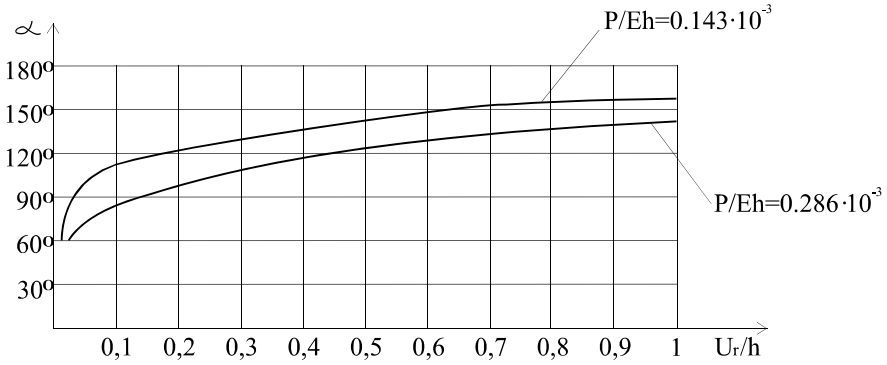

α
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Ur/h
P/Eh=0.143·10-3
P/Eh=0.286·10-3

Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цурков И.С**. К вопросу об интегрировании уравнений теории неупругих тонких оболочек. Сб. трудов МИСИ им. В.В.Куйбышева,№47,М., 1965.
2. **Григоренко Я.М., Василенко Ф.Т.** Несимметричная деформация изотропных и анизотропных оболочек вращения при действии сосредоточенных нагрузок, Механика твердого тела,вып.3,1968.
3. **Астахова А.Я.** Расчет упругопластических оболочек вращения при действии сосредоточенных нагрузок, Механика твердого тела,№4, М.,1985.
4. **Астахова А.Я., Леонтьев А.Н.** Исследование развития пластических деформаций в кольцевых сферических оболочках. Сб. научных трудов МГСУ, Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жесткости элементов строительных конструкций, М.,2001.

Астахова А.Я., кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНОГО ЦИЛИНДРА НА ОСНОВЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПОДХОДА

В.И. Андреев[1], И.А. Потехин[2]
[1] Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия
[2] Костромская государственная сельскохозяйственная академия, г. Кострома, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматривается задача о моделировании равнопрочного цилиндра на основе итерационного подхода.

ITERATIVE APPROACH TO THE MODELLING OF CYLINDER OF UNIFORM STRENGTH

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНОГО ЦИЛИНДРА НА ОСНОВЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПОДХОДА

В.И. Андреев[1], И.А. Потехин[2]
[1] Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
[2] Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia

Abstract: Problem of modelling of cylinder of uniform strength with the use of iterative approach is considered in the distinctive paper.

1. ВВЕДЕНИЕ.

В работе [1] рассмотрен метод решения обратных задач теории упругости непрерывно неоднородных тел для толстостенного цилиндра. Суть обратной задачи состоит в отыскании зависимости модуля упругости материала вдоль радиуса (функции неоднородности $E(r)$), такой, что напряженное состояние цилиндра при определенной нагрузке будет заданным. В работах [1-3] получены решения обратных задач для различных теорий прочности. Несмотря на то, что в подобных конструкциях во всех точках выполняется условие постоянства эквивалентного напряжения, соответствующего той или иной теории прочности, такие конструкции не являются равнопрочными. Такие конструкции можно назвать «равнонапряженными». Для того чтобы конструкция была равнопрочной, необходимо, чтобы не только эквивалентное напряжение, но и прочность материала при заданной зависимости $E(r)$ во всех точках была постоянной. Однако при изменении модуля упругости прочность материала, как правило, также изменяется. При этом, как правило, соблюдается тенденция больше – больше, меньше – меньше. Очевидно, что для создания конструкций близких к равнопрочным необходимы материалы, у которых степень изменения прочности меньше, чем соответствующее изменение модуля упругости. Одним из способов согласования жесткостных и прочностных свойств материала для построения модели равнопрочного цилиндра может быть итерационный метод, суть которого излагается в данной работе.

2. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД.

В качестве материала, на примере которого рассматривается итерационный метод построения модели равнопрочного цилиндра, выбран полимербетон, отличающийся возможностью за счет изменения степени наполнения кварцевой мукой достаточно широкой модификации жесткости при относительно слабом изменении прочностных свойств. В таблице 1 приведены данные по

Таблица 1

Влияние степени наполнения кварцевой мукой на предел прочности при сжатии и модуль упругости полимерных композиций.

Степень наполнения кварцевой мукой	Предел прочности при сжатии, МПа	Модуль упругости, 10^4 МПа	Увеличение модуля упругости, %
-	142	3,1	100
50	146	4,5	145
100	160	7,1	230
200	148	10,5	340
300	132	13,7	442
400	115	16,7	539

прочности и жесткости полимербетона на основе связующего ФАМ в зависимости от степени наполнения кварцевой мукой [4].

Видно, что с увеличением наполнения при постоянном увеличении модуля упругости прочность сначала незначительно возрастает, а потом падает.

Суть итерационного метода заключается в следующем. На первом этапе определяется зависимость $E^{(1)}(r)$, при которой эквивалентное напряжение $\sigma_0^{(1)}$, соответствующее любой теории прочности, будет постоянным по всему объему цилиндра. Если прочность материала R постоянна, то из условия прочности $\sigma_0 \le \gamma_c R$ можно определить, например, допустимые нагрузки. Поскольку, как отмечено выше, прочность реального материала при данной зависимости $E^{(1)}(r)$ не является постоянной, а представляет собой некоторую функцию $R^{(1)}(r)$, то на втором этапе разыскивается такая зависимость $E^{(2)}(r)$, при которой должно выполняться условие $\sigma_0^{(2)}(r) = R^{(1)}(r)$. Процесс продолжается до тех пор, пока построенная по табличным данным зависимость $R^{(i)}(r)$ не будет с требуемой точностью совпадать с функцией $\sigma_0^{(i+1)}(r)$.

Ниже приводится пример решения задачи для первой теории прочности при условиях плоского напряженного состояния при следующих исходных данных:

$$\nu = 0.2\,,\ \frac{b}{a} = 2\,,\ p_b = 2p_a\,,\ k = 1-\nu\,.$$

Пусть на первом этапе эквивалентное напряжение постоянно и равно $\sigma_0^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = -142 МПа$, тогда зависимость $E^{(1)}(r)$ согласно [1] будет иметь вид:

$$E^{(1)}(r) = E_0 \left(\frac{r}{a} \cdot \frac{\frac{A^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}}(1-k) - ka}{\frac{A^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}}(1-k) - kr} \right)^{\frac{1}{1-k}},$$

где

$$k = 0.8,\ \frac{A^{(1)}}{\sigma_0^{(1)}} = -0.667,\ E_0 = 3.1 \cdot 10^4\ МПа.$$

Определяем точки, в которых $E^{(1)}(r)$ принимает табличные значения:

$r_1 = 1.0$, что соответствует значению

$$E^{(1)}(r_1) = 3.1 \cdot 10^4\ \ МПа$$

$r_2 = 2.011$, что соответствует значению

$$E^{(1)}(r_2) = 4.5 \cdot 10^4\ \ МПа.$$

Ниже на рис. 1 и 2 представлены графики для функций $E^{(1)}(r)$ и $\sigma_0^{(1)}(r)$.

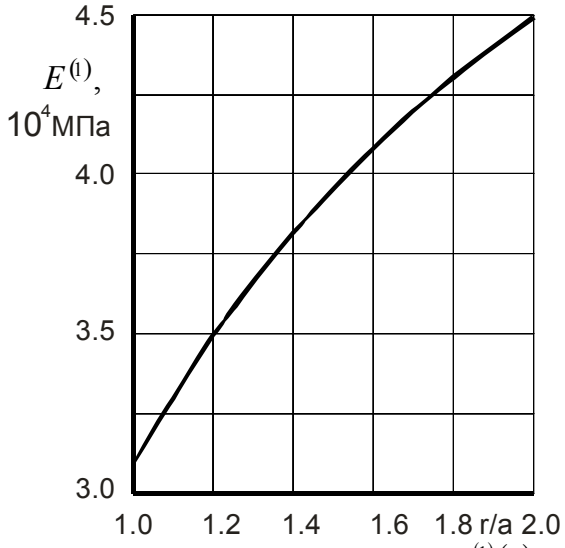


Рис. 1. Значения функции $E^{(1)}(r)$.

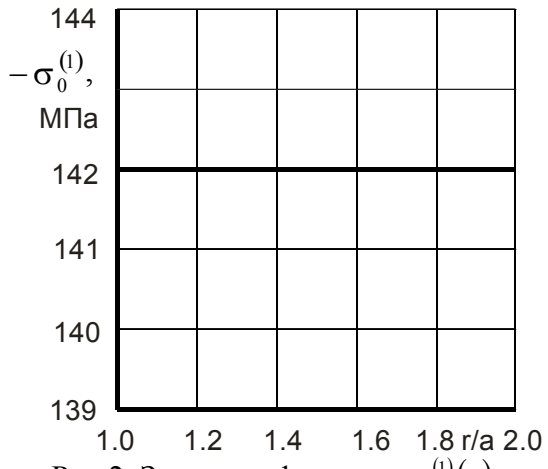


Рис.2. Значения функции $\sigma_0^{(1)}(r)$

На втором этапе задаемся функцией $\sigma_0^{(2)}(r)$, для которой в точках r_1 и r_2 значения эквивалентного напряжения будут равны соответствующим табличным данным.

В качестве аппроксимирующей функции для эквивалентного напряжения принята следующая зависимость:

$$\sigma_0^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) = \sigma^{(2)} \cdot r^{\gamma_2},$$

где $\sigma^{(2)} = -142\ \ МПа$, $\gamma_2 = 0.04$.

Эту функцию подставляем в уравнение равновесия:

$$\left(\sigma_r^{(2)}\right)' + (\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)})/r = 0,$$

интегрируя которое получим выражение для $\sigma_r^{(2)}(r)$:

$$\sigma_r^{(2)}(r) = \left(\frac{\sigma^{(2)}}{\gamma_2 + 1}\right) \cdot r^{\gamma_2} + \frac{A^{(2)}}{r},$$

где

$$A^{(2)} = \frac{p_b^{(2)} b a^{\gamma_2+1} - p_a^{(2)} a b^{\gamma_2+1}}{b^{\gamma_2+1} - a^{\gamma_2+1}},$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{\left(p_a^{(2)} a - p_b^{(2)} b\right) \cdot (\gamma_2 + 1)}{b^{\gamma_2+1} - a^{\gamma_2+1}}.$$

Из последнего выражения с учетом $p_a = 0.5 p_b$ находим величину давления $p_b^{(2)}$:

$$p_b^{(2)} = \frac{\sigma^{(2)}\left(b^{\gamma_2+1} - a^{\gamma_2+1}\right)}{(\gamma_2 + 1)(0.5a - b)} = 96.135\ МПа,$$

а $p_a^{(2)} = 0.5 p_b^{(2)} = 48.067\ МПа$.

Подставляя значения давлений $p_b^{(2)}$ и $p_a^{(2)}$ в $A^{(2)}$, находим численное значение этой константы.

После подстановки выражения $\sigma_r^{(2)}(r)$ в разрешающее уравнение для функции $E^{(2)}(r)$

$$\left(\sigma_r^{(2)}\right)'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{\left(E^{(2)}\right)'}{E^{(2)}}\right)\cdot\left(\sigma_r^{(2)}\right)' - \frac{k}{r}\cdot\frac{\left(E^{(2)}\right)'}{E^{(2)}}\cdot\sigma_r^{(2)} = 0$$

и интегрирования данного уравнения, получаем зависимость модуля упругости от радиуса:

$$E^{(2)}(r) = E_0\cdot\left(\left(\frac{r}{a}\right)\cdot\vartheta^{\frac{\gamma_2-k\cdot(\gamma_2+1)}{\gamma_2+k}}\right)^{\frac{1}{1-k}},$$

где

$$\vartheta = \frac{\sigma^{(2)}\cdot(\gamma_2+k)\cdot r^{\gamma_2+1} - A^{(2)}\cdot(1-k)\cdot(\gamma_2+1)}{\sigma^{(2)}\cdot(\gamma_2+k)\cdot a^{\gamma_2+1} - A^{(2)}\cdot(1-k)\cdot(\gamma_2+1)};$$

$$E_0 = 3.1\cdot10^4\ МПа.$$

Значения величин эквивалентного напряжения и модуля упругости в точках r_1 и r_2 представлены в таблице:

Таблица 2

r	$\sigma_0^{(2)}$, МПа	$E^{(2)}$, 10^4 МПа
1.000	-142	3.100
2.011	-146	4.647

Поскольку значение функции $E^{(2)}(r)$ в точке r_2 отличается от табличного значения, определим положение точки, в которой $E^{(2)}(r)$ принимает табличное значение: $r_2 = 1.872$, что соответствует значению $E^{(2)}(r_2) = 4.5\cdot10^4\ МПа$.

Ниже на рис. 3 и 4 представлены графики для функций $E^{(2)}(r)$ и $\sigma_0^{(2)}(r)$.

На третьем этапе задаемся функцией, $\sigma_0^{(3)}(r)$, аналогичной функции $\sigma_0^{(2)}(r)$ для которой в точках r_1 и r_2 значения эквивалентного напряжения будут равны соответствующим табличным данным и повторяем по аналогии все действия предыдущего этапа.

Всего для отыскания требуемых зависимостей потребовалось пять этапов.

На пятом этапе в качестве аппроксимирующей функции для эквивалентного напряжения принята зависимость:

$\sigma_0^{(5)}(r) = \sigma^{(5)}\cdot r^{\gamma_5}$, где $\sigma^{(5)} = -142\ МПа$,

$\gamma_5 = 0.045$.

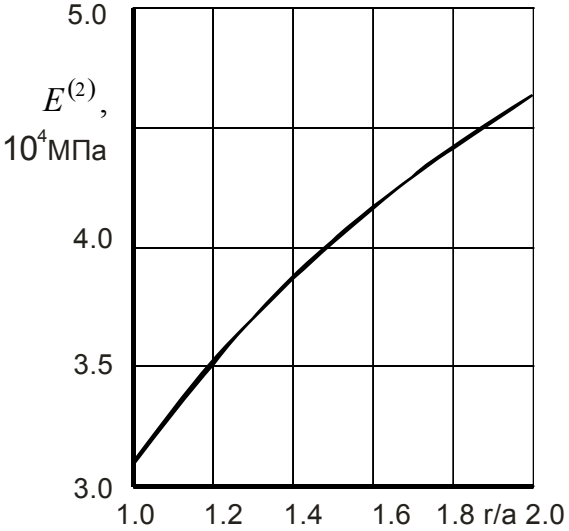


Рис. 3. Значения функции $E^{(2)}(r)$.

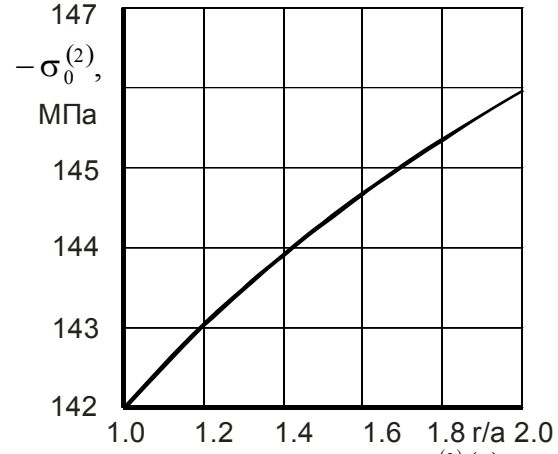


Рис. 4. Значения функции $\sigma_0^{(2)}(r)$.

Выражение для $\sigma_r^{(5)}(r)$ будет иметь вид:

$$\sigma_r^{(5)}(r) = \left(\frac{\sigma^{(5)}}{\gamma_5+1}\right)\cdot r^{\gamma_5} + \frac{A^{(5)}}{r},$$

где

$$A^{(5)} = \frac{p_b^{(5)} \cdot b \cdot a^{\gamma_5+1} - p_a^{(5)} \cdot a \cdot b^{\gamma_5+1}}{b^{\gamma_5+1} - a^{\gamma_5+1}},$$

$$\sigma^{(5)} = \frac{\left(p_a^{(5)} \cdot a - p_b^{(5)} \cdot b\right) \cdot \left(\gamma_5 + 1\right)}{b^{\gamma_5+1} - a^{\gamma_5+1}}.$$

Величины давлений $p_b^{(5)}$ и $p_a^{(5)}$ равны:

$$p_b^{(5)} = 96.325 \ МПа, \ p_a^{(5)} = 48.162 \ МПа.$$

Зависимость модуля упругости от радиуса на последнем этапе итерационного процесса будет иметь вид:

$$E^{(5)}(r) = E_0 \cdot \left(\left(\frac{r}{a}\right) \cdot \vartheta^{\frac{\gamma_5 - k \cdot (\gamma_5+1)}{\gamma_5 + k}} \right)^{\frac{1}{1-k}},$$

где $\vartheta = \dfrac{\sigma^{(5)} \cdot (\gamma_5 + k) \cdot r^{\gamma_5+1} - A^{(5)} \cdot (1-k) \cdot (\gamma_5+1)}{\sigma^{(5)} \cdot (\gamma_5 + k) \cdot a^{\gamma_5+1} - A^{(5)} \cdot (1-k) \cdot (\gamma_5+1)}$;

$$E_0 = 3.1 \cdot 10^4 \ МПа.$$

Значения величин эквивалентного напряжения и модуля упругости в точках r_1 и r_2 для $\sigma_0^{(5)}(r)$ и $E^{(5)}(r)$ представлены в таблице:

Таблица 3

r	$\sigma_0^{(5)}$, МПа	$E^{(5)}$, 10^4 МПа
1.000	-142	3.1
1.858	-146	4.5

На рис. 5 и 6 представлены графики для функций $E^{(5)}(r)$ и $\sigma_0^{(5)}(r)$. Последняя зависимость практически совпадает с зависимостью прочности бетона на сжатие, соответствующей определенной в работе функции $E^{(5)}(r)$.

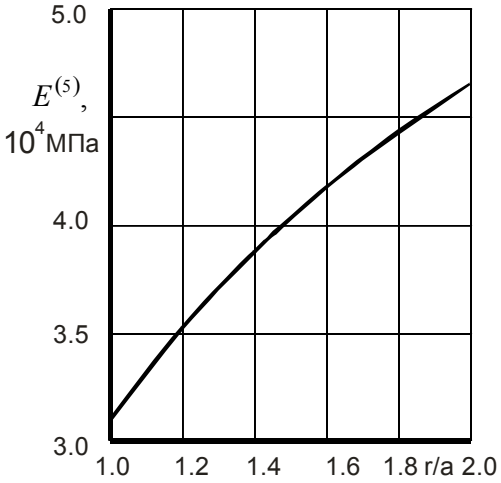


Рис. 5. Значения функции $E^{(5)}(r)$.

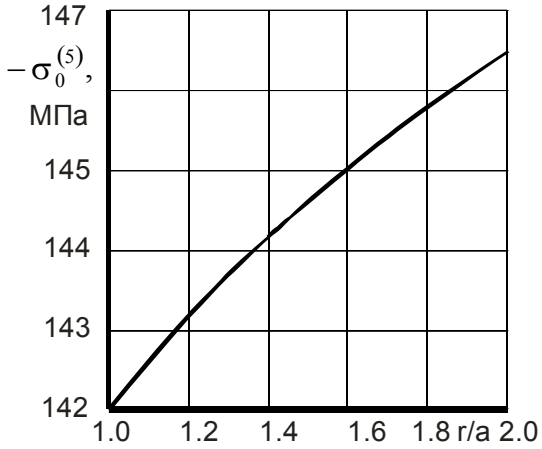


Рис. 6. Значения функции $\sigma_0^{(5)}(r)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате разработки метода построения модели равнопрочного цилиндра можно провести некоторый анализ эффективности такой модели путем сравнения ее с однородным цилиндром. В последнем случае в соответствии с первой теорией прочности наибольшим по абсолютной величине будет напряжение σ_θ, определяемое формулой

$$\sigma_\theta(r) = -\frac{(p_b - p_a)a^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

Эти напряжения достигают максимума вблизи внутренней поверхности цилиндра (*r=a)* и

при исходных данных $p_b = 2p_a$, $b = 2a$ равны $|\sigma_\theta| = 1{,}833 p_b$. Приравнивая полученную величину к пределу прочности при сжатии, равном $142 МПа$, получим максимальное значение давления p_b равным $77{,}45 МПа$. Как было показано выше, после пятого этапа итерационного процесса это давление равно $p_b^{(5)} = 96.325 МПа$. Таким образом, коэффициент эффективности работы равнопрочного цилиндра по сравнению с однородным цилиндром равен 1.24.

Однако следует отметить, что данный результат получен для **модели** неоднородного цилиндра с **непрерывным** изменением вдоль радиуса деформационных и прочностных свойств. Попытка создания таких цилиндров на основе полимерной смолы, наполненной диабазовой мукой, описана в [5]. Создание же реальной бетонной конструкции вряд ли возможно. Тем не менее, для практического конструирования оптимальных конструкций, основанных на использовании неоднородных материалов, можно предложить создание слоистых цилиндров, состоящих из 3 – 5 слоев с осредненными по толщине свойствами. Методика послойного бетонирования вдоль радиуса, в частности приведена в [6]. Экономический эффект в данном случае будет, естественно, несколько меньше, чем при непрерывном изменении механических свойств

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев В.И.** Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: Издательство АСВ, 2002. – 288 с.
2. **Андреев В.И., Потехин И.А.** О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел. – РААСН, Вестник отделения стр. наук, 2007, с. 48-52.
3. **Андреев В.И., Потехин И.А.** Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе второй и четвертой теорий прочности. – Труды XVI Российско-польско-словацкого семинара «Теоретические основы строительства», Жилина, Словакия, 2007, с. 29-34
4. **Патуроев В.В.** Полимербетоны - М.: Стройиздат, 1987. – 286 с.
5. **Андреев В.И., Турусов Р..А., Язьев Б.М.** Оптимизация деформационных свойств цилиндра из дисперсно наполненного полимера, VI Всес. конф. по управл. в мех. системах. Тез. докл. Львов, 1988.
6. **Дятловицкий Л.И., Лемберг Э.Д.** Плоская задача с центральной симметрией для наращиваемого тела с переменным модулем упругости. - Прикл. механика, 1968, т.IV, № 8, с. 74-84.

Андреев Владимир Игоревич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: asv@mgsu.ru

Потехин Иван Александрович, ассистент Костромской государственной сельскохозяйственной академии. 156530, Костромская область, Костромской район, п. Караваево, e-mail: avto@nw.ksaa.edu

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВОЗДЕЙСТВИЙ К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Э.К. Агаханов, М.К. Агаханов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматривается применение эквивалентности воздействий к плоской задаче механики деформируемого твердого тела.

USE OF EQUIVALENCE OF EFFECTS IN PLANE PROBLEM OF SOLID MECHANICS

A.K. Agakhanov, M.K. Agakhanov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Use of equivalence of effects in plane problem of solid mechanics is considered in the distinctive paper.

Пусть упругое тело находится под действием объемных сил $F_x(t)$, $F_y(t)$. В случае плоской деформации, при постановке задачи в перемещениях, имеем:
два уравнения равновесия

$$[\lambda(t)+\mu(t)]\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+ \\ +\mu(t)\nabla^2 U^{(F)}(t)+F_x(t)=0, \quad (1)$$

$$[\lambda(t)+\mu(t)]\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+ \\ +\mu(t)\nabla^2 V^{(F)}(t)+F_y(t)=0,$$

два граничных условия

$$\left\{\lambda(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+2\mu(t)\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}\right\}l+ \\ +\mu(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial x}\right]m=0, \quad (2)$$

$$\mu(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial x}\right]l+ \\ +\left\{\lambda(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+2\mu(t)\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right\}m=0.$$

Если тело находится под действием поверхностных сил $P_x(t)$, $P_y(t)$ и шарового тензора вынужденных деформаций $\xi(t)$, то соотношения (1) и (2) имеют вид:

$$[\lambda(t)+\mu(t)]\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U^{(P,\xi)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(P,\xi)}(t)}{\partial y}\right]+ \\ +\mu(t)\nabla^2 U^{(P,\varsigma)}(t)- \\ -[3\lambda(t)+2\mu(t)]\frac{\partial \xi(t)}{\partial x}=0, \quad (3)$$

$$[\lambda(t)+\mu(t)]\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial U^{(P,\xi)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(P,\xi)}(t)}{\partial y}\right]+$$
$$+\mu(t)\nabla^2 V^{(P,\xi)}(t)-$$
$$-[3\lambda(t)+2\mu(t)]\frac{\partial\xi(t)}{\partial y}=0,$$
$$\left\{\lambda(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+2\mu(t)\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}\right\}l+$$
$$+\mu(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial x}\right]m=$$
$$=P_x(t)+[3\lambda(t)+2\mu(t)]\xi(t)l, \quad (4)$$
$$\mu(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial x}\right]l+$$
$$+\left\{\lambda(t)\left[\frac{\partial U^{(F)}(t)}{\partial x}+\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right]+\right.$$
$$\left.+2\mu(t)\frac{\partial V^{(F)}(t)}{\partial y}\right\}m=$$
$$=P_y(t)+[3\lambda(t)+2\mu(t)]\xi(t)m.$$

Условия тождественного равенства перемещений $U^{(F)}(t)\equiv U^{(P,\xi)}(t)$ и $V^{(F)}(t)\equiv V^{(P,\xi)}(t)$, следующие:

$$\frac{\partial\xi(t)}{\partial x}=-\frac{1-2\nu(t)}{E(t)}F_x(t),$$
$$\frac{\partial\xi(t)}{\partial y}=-\frac{1-2\nu(t)}{E(t)}F_y(t),$$
$$P_x(t)=-\frac{E(t)\xi(t)}{1-2\nu(t)}l \text{ или } \frac{\partial P(t)}{\partial x}=F_x(t), \quad (5)$$
$$P_y(t)=-\frac{E(t)\xi(t)}{1-2\nu(t)}m \text{ или } \frac{\partial P(t)}{\partial y}=F_y(t).$$

Чтобы получить условия тождественного равенства перемещений для случая плоского напряженного состояния необходимо в соотношения (5) вместо $E(t)$, $\nu(t)$ и $\alpha(t)$ подставить их значения из равенств [1]

$$E(t)=\frac{1+2\nu_1(t)}{[1+\nu_1(t)]^2}E_1(t), \quad \nu(t)=\frac{\nu_1(t)}{1+\nu_1(t)},$$
$$\alpha(t)=\frac{1+\nu_1(t)}{1+2\nu_1(t)}\alpha_1(t),$$

затем $E_1(t)$, $\nu_1(t)$ и $\alpha_1(t)$ заменить на $E(t)$, $\nu(t)$ и $\alpha(t)$.

Тогда для случая плоского напряженного состояния имеем

$$\frac{\partial\xi(t)}{\partial x}=-\frac{1-\nu(t)}{E(t)}F_x(t),$$
$$\frac{\partial\xi(t)}{\partial y}=-\frac{1-\nu(t)}{E(t)}F_y(t), \quad \frac{\partial P(t)}{\partial x}=F_x(t),$$
$$\frac{\partial P(t)}{\partial y}=F_y(t). \quad (6)$$

Напряжения в обоих случаях связаны соотношениями [2]

$$\sigma_x^{(F)}(t)=\sigma_x^{(P)}(t)+\sigma_x^{(\xi)}(t)-P(t),$$
$$\sigma_y^{(F)}(t)=\sigma_y^{(P)}(t)+\sigma_y^{(\xi)}(t)-P(t), \quad (7)$$
$$\tau_{xy}^{(F)}(t)=\tau_{xy}^{(P)}(t)+\tau_{xy}^{(\xi)}(t).$$

Из (5) и (6) следует, что в случае плоской деформации известная аналогия С. П. Тимошенко для «несжимаемого» материала не применима, а в случае плоского напряженного состояния она применима без каких либо ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А.А..** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности, Под ред. Г. С. Варданяна, М., Изд. АСВ, 1995, 568 стр.
2. **Агаханов Э.К.** Развитие метода эквивалентности воздействий в механике деформируемого твердого тела, Дис….докт. тех. наук, М., 2001, 214 стр.

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЫШЕННЫХ СКОРОСТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ НА ДЕФОРМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БЕТОНА

К.А. Цветков
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются результаты экспериментальных исследований автора, позволяющих выявить некоторые закономерности влияния повышенных скоростей нагружения на деформативные свойства бетона: модуль деформаций, величину предельных деформаций, коэффициент поперечных деформаций, значения объемных деформаций при одноосном и двухосном сжатии

ABOUT PHYSICAL MEANING OF INFLUENCE OF THE RAISED SPEEDS OF LOADING ON DEFORMATION CHARACTERISTICS OF CONCRETE

K.A. Tsvetkov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Results of experimental researches of the author, allowing revealing influence of the raised speeds of loading on deformation characteristics of concrete (modulus of deformation, value of limit deformation, Poisson ratio, values of volume deformations at uniaxial and biaxial compression) are considered in the distinctive paper.

В настоящее время достоверно известно, что свойства бетона зависят от длительности приложения нагрузки. Причем эта закономерность прослеживается как при уменьшении скорости нагружения по сравнению со стандартной принятой по ГОСТ 24452-80, так и при ее увеличении.

В Лаборатории экспериментальной механики бетона кафедры «Сопротивления материалов» ГОУ ВПО МГСУ автором совместно с инж. И.М.Безгодовым были проведены экспериментальные исследования, позволяющие выявить некоторые закономерности влияния повышенных скоростей нагружения на деформативные свойства бетона: модуль деформаций, величину предельных деформаций, коэффициент поперечных деформаций, значения объемных деформаций при одноосном и двухосном сжатии.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Испытывались призмы сечением 7x7x28см из бетона с призменной прочностью R_b=20,5МПа и начальным модулем деформаций E=28 800МПа.

Динамические испытания на одноосное и двухосное сжатие проводились при следующих характеристиках динамического воздействия:

– скорость роста напряжений:

$$\overset{*}{\sigma}_1 = 470 - const \text{, МПа/с;}$$

– скорость роста продольных деформаций:

$$\overset{*}{\varepsilon}_1 = 50668t \text{, е.о.д.}*10^{-5}\text{/с;}$$

– время разрушения:

$$\tau \approx 0{,}08 \text{ с.}$$

Создание двухосного напряженного состояния осуществлялось по траектории сложного нагружения. На первом этапе в результате действия по двум граням призмы боковой статической нагрузки в образце создавалось сжимающее напряжение σ_2 на некотором уровне от призменной прочности R_b (σ_2=0,2R_b, 0,4R_b или 0,6R_b). На втором этапе, поддерживая постоянной величину бокового обжатия, образец доводился до разрушения воздействием вертикальной сжимающей статической или однократной динамической нагрузки, создающей напряжения σ_1.

Боковое обжатие создавалось навешиваемыми на образец установками мембранного типа, которые обеспечивали гидростатический способ передачи нагрузки.

В ходе эксперимента синхронно фиксировались усилия, продольные и поперечные деформации. При динамическом воздействии регистрация этих величин осуществлялась с дискретностью измерений 40мкс.

При регистрации усилий и деформаций использовались датчик силы, внутренние тензодатчики, а также ЭВМ, современные электронные средства и специальное программное обеспечение.

На каждый уровень напряжения σ_2 было испытано от 2 до 5 образцов при статике и столько же при динамике, при этом коэффициент вариации для прочности и продольных деформаций не превышал 7%.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ НАГРУЖЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ С ПОЗИЦИИ РЕАЛИЗАЦИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БЕТОНА

На рис.1 представлены диаграммы «σ_1-ε_1», полученные при статическом и динамическом нагружении для одноосного сжатия и второго этапа нагружения в условиях двухосного сжатия.

Основной особенностью динамической диаграммы по сравнению со статической является увеличение продолжительности начального прямолинейного участка, что свидетельствует о расширении диапазона квазиупругой работы бетона.

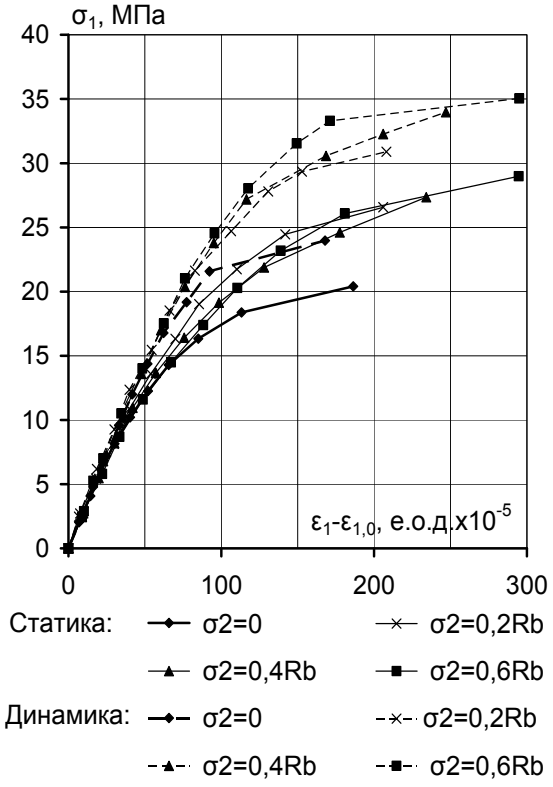


Рис.1 Сравнение диаграмм "σ_1-ε_1" при статическом и динамическом нагружении.

Кроме того, наблюдается в целом спрямление динамической диаграммы. Ее кривизна соответствует кривизне статической диаграммы только на участке близком к разрушению.

Такое изменение вида диаграммы свидетельствует об изменении по мере увеличения скорости нагружения соотношения между компонентами полной деформации: упругой, пластической и псевдопластической. Очевидно, что происходит не только так называемая задержка развития пластических де-

формаций, как это отмечается в ряде литературных источников [1,3], но и в целом возрастает доля упругих деформаций в ущерб развитию пластических (с учетом того, что предельная величина деформаций не зависит от скорости нагружения).

Как видно из сопоставления диаграмм, влияние скорости нагружения на модуль продольных деформаций зависит от уровня нагружения σ_1 / R (R- прочность бетона для данной скорости роста напряжений и уровня напряжения σ_2). Начальный модуль продольных деформаций E_0 не зависит от скорости роста напряжений. Затем после достижения определенного уровня напряжений σ_1=0,2R-0,5R, различие в величинах E начинает возрастать и соотношение E_{bd}/E_b может достигнуть 1,5 и более. Что примечательно, на этапе нагружения близком к разрушению ($\sigma_1 > 0{,}8R_b$) динамический E стремится сравняться со статическим.

Границы этапов деформирования с различной чувствительностью модуля деформаций к скорости нагружения можно с достаточной точностью провести по параметрическим точкам процесса деформирования – нижней и верхней границам микротрещинообразования: на участках с $\sigma_1 \le R^0_{crc}$ и $\sigma_1 \ge R^v_{crc}$ модуль деформаций можно принять не зависящим от скорости нагружения, а на участке $R^0_{crc} < \sigma_1 < R^v_{crc}$ рассматривать как функцию скорости роста напряжений.

Как известно, участок кривой при $\sigma_1 < R^0_{crc}$ отражает процесс деформирования без раскрытия трещин. В составе полной деформации в направлении наибольшего сжимающего напряжения преобладают упругие деформации $\varepsilon_{1упр}$, к которым с увеличением уровня напряжений добавляются пластические деформации первого вида (деформации быстронатекающей ползучести) $\varepsilon_{1плI}$.

На участке $R^0_{crc} < \sigma_1 < R^v_{crc}$ происходит развитие микротрещин. При этом доля упругих деформаций уменьшается, а к пластическим деформациям первого вида добавляются пластические деформации второго вида $\varepsilon_{1плII}$, которые являются следствием развивающегося процесса микротрещинообразования.

При достижении уровня R^v_{crc} происходит объединение всех трещин в поверхность разрушения. При этом в процессе разрушения преобладают подвижки по образовавшимся поверхностям. Деформации завершающего этапа разрушения принято называть псевдопластическими $\varepsilon_{1пс\text{-}пл}$. Развитие псевдопластических деформаций представляет собой самоускоренный процесс развития внутренних разрушений, когда накопляющийся объем микроразрушений приобретает новое качество.

Можно предположить, что, прежде всего, соотношение упругой, пластической и псевдопластической деформаций в составе полной деформации бетона определяет чувствительность модуля продольных деформаций к изменению скорости нагружения.

Упругие деформации практически не зависят от скорости роста напряжений, что находит экспериментальное подтверждение в том, что большинство исследователей фиксировали повышение начального модуля деформаций при динамике по сравнению со статическим воздействием не более чем на 10%, а в наших экспериментах, как отмечалось выше, динамический модуль продольных деформаций был равен статическому. Подтверждение этому находим также, например, в том, что модуль упругости малоуглеродистой стали, материала с ярко выраженными упругими свойствами, практически не зависит от скорости нагружения.

Развитие псевдопластических деформаций так же мало зависит от скорости роста напряжений, так как они уже не связаны с сопротивляемостью структуры материала, с его упруго-пластическими свойствами.

В этой связи представляется закономерным, что наиболее существенное повышение дифференциального модуля деформаций с увеличением скорости нагружения отмечается при $R^0_{crc} < \sigma_1 < R^v_{crc}$, т.е. на участке с наи-

большей долей пластических деформаций первого и второго вида.
Отмеченная зависимость E от скорости нагружения и σ_1 / R характерна как для одноосного, так и двухосного сжатия.

АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Если сравнивать значения статического и динамического дифференциальных коэффициентов поперечных деформаций при одноосном сжатии, соответствующие одному и тому же значению напряжения σ_1, то наблюдаем следующее. До некоторых значений напряжения σ_1 (примерно $0{,}5R_b$), коэффициенты поперечных деформаций при статике и динамике совпадают. При дальнейшем повышении напряжения σ_1 коэффициент поперечных деформаций при статике увеличивается более существенно, чем при динамике. Так, при напряжениях, соответствующих статической прочности бетона, $\frac{\nu}{\nu_d}$ составляет 1,57 (рис.2).
Принимая во внимание, что скорость нагружения влияет также и на развитие продольных деформаций, нельзя только из факта уменьшения значений динамического коэффициента поперечных деформаций по сравнению со статическим делать вывод о том, что при динамическом нагружении происходит так называемая задержка в развитии поперечных деформаций, что отмечается в некоторых работах [3]. Для этого необходимо сравнить величины поперечных деформаций, соответствующие одному и тому же уровню продольных деформаций. По результатам такого сравнения применительно к результатам наших экспериментов можно говорить о том, что развитие поперечных деформаций при динамике происходит, также как и при статике, адекватно развитию продольных деформаций (рис 3).

Если ν и ν_d сравнивать на этапах нагружения, соответсвующих одинаковому σ_1 / R (величина напряжения, отнесенная к прочности для данной скорости нагружения), то в этом случае они оказываются практически одинаковыми (рис.2.).
Иными словами, соотношение поперечных и продольных деформаций, соответствующее схожим этапам деформирования и в том числе разрушению, не зависит от скорости нагружения.
В целом, качественно повторяя картину деформирования при статике, процесс развития поперечных деформаций при динамическом нагружении характеризуется меньшей анизотропией. Это видно из сравнения коэффициентов поперечных деформаций $\nu_{2\text{-}1}$ и $\nu_{3\text{-}1}$, диаграмм "$\sigma_1 - \varepsilon_{2(3)}$" и величин предельных поперечных деформаций.

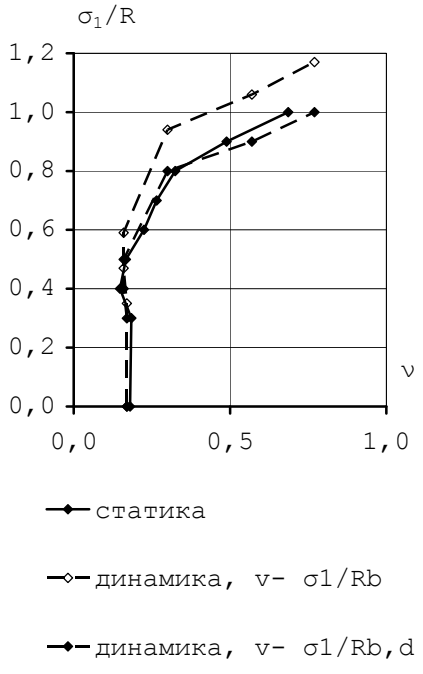


Рис.2 Сравнение дифференциальных коэффициентов поперечных деформаций при статическом и динамическом нагружении (одноосное сжатие).

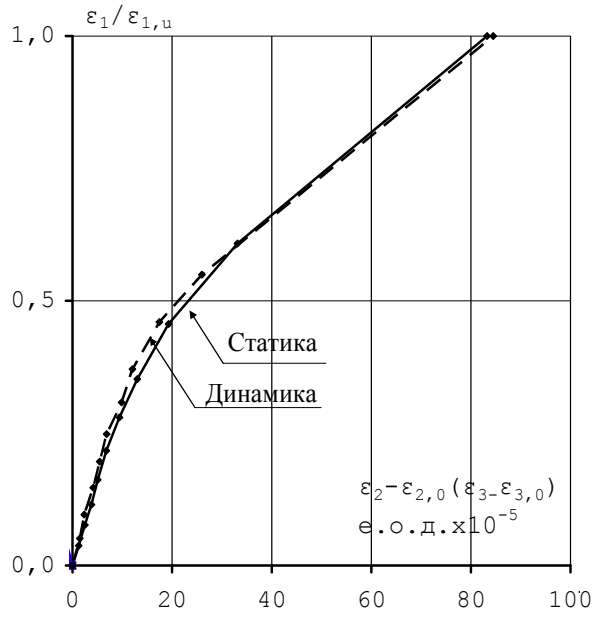


Рис. 3 Сравнение значений поперечных деформаций при статике и динамике, соответствующих одинаковому уровню продольных деформаций.

Уменьшение различий между значениями ε_2 и ε_3 соответствует представлениям о том, что при высоких скоростях не реализуется в полной мере перераспределение усилий в процессе нагружения, благодаря которому при статике поперечные деформации более интенсивно развиваются в свободном направлении. При силовом воздействии с высокой скоростью, процесс деформирования протекает с меньшей полнотой учета существующего поля напряжений, чем при статическом нагружении, и происходит выравнивание значений поперечных деформаций.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ОБЪЕМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ БЕТОНА КАК ХАРАКТЕРИСТИКИ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПОВЫШЕНИЯ СКОРОСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Полученные нами результаты подтверждают данные большинства исследователей [1,2] о том, что предельные продольные деформации не зависят от скорости нагружения. Это обстоятельство позволяет судить о том, что предельная деформация является в некотором роде численным выражением того объема микроразрушений, который приводит к потере прочности бетона. И представляется достаточно закономерным, что критический объем микроразрушений не зависит от способа, в результате которого он был создан (в том числе и от скорости нагружения).

Интересен также и анализ влияния скорости роста напряжений на величину объемных деформаций. Объемные деформации, вычисленные с учетом всей кривой деформирования, определенные для близких этапов нагружения (при одинаковом напряжении σ_1, отнесенном к прочности бетона для данного вида напряженного состояния, уровня напряжения σ_2 и скорости роста напряжений) не зависят от скорости нагружения. В тоже время при одинаковом значении напряжений σ_1 объемная деформация при динамике меньше, чем при статике.

Это обстоятельство в очередной раз подтверждает, что на образование одинакового объема микроразрушений при динамическом нагружении требуется прикладывать большие напряжения, чем при статике, в то время как объем этих микроразрушений, соответствующих одинаковым этапам деформирования и разрушению, не зависит от скорости нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баженов Ю.М.** Бетон при динамическом нагружении.-М.:Стройиздат,1971.-271с.
2. **Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.,Забегаев А.В.** Расчет конструкций на динамические специальные нагрузки.- М.: «Высшая школа»,1992.-319с.
3. **Рыков Г.В., Обледов В.П., Майоров Е.Ю., Абрамкина В.Т.** Экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетонов при интенсивных динамических нагрузках//Строительная механика и расчет сооружений.-1989.№5.-С.54-59.

Цветков К.А., кандидат технических наук, кафедра сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИБКОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИСПОЛНЕНИЯ

Ю.И. Фомичев[1], В.М. Завьялов[2]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
[2]Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются вопросы исследования напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи в зависимости от его геометрического исполнения.

ANALYSIS OF STRAIN-STRESS DISTRIBUTION OF FLEXIBLE WHEEL OF WAVE TRANSMISSION DEPENDING ON ITS GEOMETRICAL CONSTRUCTION

Y.I. Fomichev[1], V.M. Zavjalov[2]

[1] Moscow Moscow State Technical University n.a. N.E. Bauman, Moscow, Russia
[2] Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: Problems of analysis of strain-stress distribution of flexible wheel of wave transmission depending on its geometrical construction are considered in the distinctive paper.

Волновые зубчатые передачи известны в практике машиностроения сравнительно давно, около 50 лет. Для передач с передаточным отношением 100..300 они выгодно отличаются от других типов передач меньшими габаритными размерами, простотой конструкции и компоновки в механизм, сравнительно высоким КПД, высокой кинематической точностью и хорошими, с точки зрения нагрузки на металлоконструкции, динамическими характеристиками. Эти передачи удачно используются в механизмах поворотов экскаваторов, башенных кранов, различных изделий оборонной промышленности. Особое значение приобретает этот тип передач в связи с ускоренным созданием в нашей стране гибких автоматизированных систем и робототехнических комплексов, хорошо вписываясь в их передаточные отношения и рабочие скорости исполнительных механизмов. Кроме того, волновая передача - это практически единственная передача, способная передавать движение через герметичную стенку, что делает эту передачу незаменимой при работе в агрессивных средах.

Небольшое количество составляющих деталей в волновых редукторах делает эти редуктора надежными в эксплуатации. В то же время долговечность и надежность волновых редукторов в значительной мере зависит от одной из деталей этих редукторов - гибкого колеса. Можно сказать, что работоспособность волновых передач определяется надежностью и долговечностью именно гибких колес. Поэтому неудивительно, что вопросам прочности и долговечности гибких колес посвящено много трудов [1 - 8]. При этом практически каждый исследователь предлагает свою методику расчета. Эти работы в значительной мере опираются на экспериментальные исследования. Что хотя и дает

возможность разрабатывать работоспособные передачи, но ограничивает возможности оптимизировать параметры гибких колес с точки зрения их прочности в зависимости от конструктивных параметров - высоты гибкого колеса, толщины его стенки, эксцентриситета генератора волн и других геометрических параметров. Предлагаемая работа - это начало цикла исследовательских работ по оптимизации геометрических параметров гибких колес с точки зрения напряженного состояния этих колес. При этом надо учесть, что напряженное состояние гибких колес зависит как от деформации этих колес генератором волн, так и от передаваемого через эти колеса момента.

В данной работе рассматривается напряженное состояние гибкого колеса только в результате деформации этого колеса генератором волн в зависимости от его геометрических параметров.

По своей конструкции гибкое колесо волновой передачи является составной оболочкой вращения. Сосредоточенное воздействие двух кулачков генератора волн приводит к локальной неосесимметричной диаметральной нагрузке на осесимметричное колесо в зоне зубчатого венца.

Исследованию деформативности колеса волновой передачи в форме защемленного по одному торцу цилиндра при точечной сосредоточенной диаметральной нагрузке на свободном торце посвящена работа [9]. Однако в этой работе не учитывались многие конструктивные особенности колеса, такие как зубья, утолщения колеса в зоне венца, скругления у границ венца при переходе к основной толщине, некоторую протяженность по меридиану и по окружности силового воздействия вследствие конечных размеров кулачков генератора волн.

Описанные особенности конструкции и нагрузки могут без затруднений быть учтены в численном методе расчета составных многослойных оболочечных конструкций при неосесимметричных нагрузках [10]. Общее описание подхода следующее.

Разработаны метод и комплекс программ прочностного расчетного анализа сложных современных оболочечных конструкций новой техники в условиях воздействия переменных вдоль меридионального и окружного направлений температурно-силовых нагрузок. Метод анализа заключается в расчете напряженно-деформированного конструкции под действием поверхностно-двумерных нагрузок.

Комплекс состоит из программы SHELLF95 и программы FOURIER.

Метод и программа SHELLF95 предназначены для расчета составных многослойных тонкостенных упругих осесимметричных конструктивно или/и физически ортотропных оболочечных конструкций. Слои оболочечной конструкции могут состоять из различных композиционных ортотропных или однородных изотропных материалов, набора продольных и поперечных подкрепляющих элементов, шпангоутов. В расчетную схему составной оболочечной конструкции включены: цилиндр, конус, сфера, тор, оживальная оболочка, кольцевая пластина, круглая пластина, оболочка вращения произвольной формы как наиболее используемые в прикладной науке и технике. Реализованные возможности метода и программы позволяют передать в расчетной схеме произвольное число и тип слоев в каждой оболочке конструкции, включать в расчетную схему одновременно различные конфигурации типов оболочек вращения.

На торцах оболочечной конструкции в качестве граничных условий могут быть заданы неосесимметричные усилия и моменты или соответствующие перемещения и углы поворотов.

Осесимметричное нагружение является частным случаем рассматриваемого неосесимметричного нагружения и охватывается принятой схемой исследования. В этом случае сильно уменьшаются временные затраты на подготовку исходных данных и ресурсы ПЭВМ.

Решение осуществляется методом конечных элементов в сочетании с методом Фурье. Применяется конечный элемент в виде короткого кольцевого усеченного конуса, наиболее полно учитывающий специфику конструкций, состоящих из оболочек вращения с резко меняющимися жесткостями и нагрузками. Концепция оболочки переменной толщины позволила отказаться от предварительного расчета геометрических характеристик шпангоутов как колец и значительно ускорить этап подготовки исходных данных. Жесткостные характеристики оболочек, шпангоутов и подкрепляющих элементов рассчитываются в программе автоматически.
Программа FOURIER предназначена для разложения неосесимметричных нагрузок в ряды Фурье. Программа позволяет визуализировать на экране монитора ПЭВМ графическую информацию по профилям неосесимметричных нагрузок. Программа также выдает в файлы на диске ПЭВМ результаты, которые используются программой прочностного анализа в качестве исходных данных.
Широкий набор включенных в рассмотрение типов оболочек, произвольность нагрузок, большие возможности программ по отношению к числам конечных элементов и гармоник, гибкая система ввода-вывода позволяют рассчитывать большой ряд практических оболочечных конструкций при реальных условиях нагружения.
Программный комплекс реализован на языке FORTRAN на персональных компьютерах IBM PC/AT и функционирует в среде WINDOWS / MS DOS [11].
Описанный программный комплекс применен к исследованию напряженно-деформированного состояния гибкого колеса гипотетической волновой передачи, имеющей геометрические характеристики, близкие к реальным для данного типоразмера.
В качестве объекта исследования выбрано гибкое колесо, имеющее габаритные размеры: диаметр D_2 = 400 мм, длина по оси вращения L = 280 мм, основная толщина h = 4 мм. Радиус начальной окружности зубчатой передачи R_2 = 200 мм. Внутренний радиус наружного жесткого колеса R_1 = 201 мм. Передаточное число i = 201 . Модуль зуба зубчатого венца m = 1 (мм). В этом случае зубчатый венец гибкого колеса имеет $z = D_2 / m$ = 400 зубьев, причем основной шаг p_b = 3,14 мм и ширина зуба по основной окружности $S = p_b / 2$ = 1,57 мм. Геометрические характеристики профиля зуба выбраны по справочнику [12] и имеют следующие величины: $h_a = m$ = 1 мм - высота головки зуба, h_f = 1,25 m = 1,25 мм - глубина впадины, $h_з = h_f + h_a$ = 2,25 мм - высота зуба, ρ_f = 0,38 m = 0,38 мм - радиус закругления у корня зуба. Ширина венца взята b_w = 20 m = 20 мм. Увеличение толщины гибкого цилиндра в зоне венца $h_y = 0{,}1375 \cdot m$ = 0,55 мм.
По длине гибкого колеса нагрузка прикладывается только на зону венца равномерно по длине венца. Протяженность по дуге окружности двух зон приложения нагрузки, происходящих от контакта гибкого колеса с генератором волн и жестким колесом, составляет по 135 мм или по 40°. Внутри зон контакта функция изменяемости давления описывается законом $\cos(9/2 \cdot \alpha_2)$, где α_2 - окружная координата, $-180^\circ \le \alpha_2 \le +180^\circ$.
Рассматривалось 3 варианта расчета.
Вариант 1 - В1. Гибкое колесо имеет форму цилиндра. Радиус срединной поверхности оболочки равен 196,2 мм.
Вариант 2 - В2. Гибкое колесо является составной конструкцией, состоящей из внешней четверти тора с меридиональным радиусом кривизны 50 мм, без излома переходящего в цилиндр с радиусом 196,2 мм.
Вариант 3 - В3. Гибкое колесо является составной конструкцией, состоящей из внешней четверти тора с меридиональным радиусом кривизны 100 мм, без излома переходящего в цилиндр с радиусом 196,2 мм.

Таблица

Варианты расчетов и результаты

Вариант	Характеристика варианта	P_z, МПа	w^{max}, мм	σ_{22}^{max}, МПа	σ_{22}^{min}, МПа
В1	Цилиндр D = 400 мм	4,4960	1,0	365,0	56,7
В2	Тор R = 50 мм + цилиндр D = 400 мм	0,3564	1,0	73,3	- 27,6
В3	Тор R = 100 мм + цилиндр D = 400 мм	0,2314	1,0	63,1	-32,2

Основная геометрическая форма гибкого колеса является однослойной оболочкой. Зона венца представлялась пятислойной оболочкой. Первый слой передает утолщение основной оболочки и имеет толщину 4,55 мм. Слои со второго по пятый описывают окружной профиль 400 зубьев и имеют следующие характеристики высоты (h, мм) и ширины (b, мм): $h_2 = 0{,}15$, $b_2 = 2{,}36$; $h_3 = 0{,}1$, $b_3 = 2{,}08$; $h_4 = 1{,}0$, $b_4 = 1{,}8$; $h_5 = 1{,}0$, $b_5 = 1{,}2$. Слои 1, 2, 3 являются оболочечными, слои 4 и 5 являются набором продольных подкрепляющих элементов. Таким образом, в зоне венца оболочечная конструкция является конструктивно-ортотропной.

Оболочечная конструкция выполнена из стали с механическими характеристиками: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Во всех трех вариантах ставились граничные условия: начальный торец, удаленный от зоны зубчатого венца - шарнирное опирание; конечный торец, находящийся вблизи венца и зоны приложения нагрузки - свободный край.

Рассматриваемая задача являлась двумерной с локальным приложением поверхностной нагрузки в меридиональном и окружном направлениях. Окружной профиль нагрузки на оболочечную конструкцию в расчете разлагался в ряд Фурье по 19 гармоникам с номерами 0…18.

Под действием заданной нагрузки происходит деформация оболочечной конструкции, причем преимущественно в радиальном направлении. Максимальный прогиб получается в центре окружных эпюр нагрузки при $\alpha_2 = 0^o, \pm 180^o$. Разность радиусов жесткого и гибкого колес составляет $w = R_1 - R_2 = 1$ мм , поэтому во всех трех вариантах максимальный неосесимметричный прогиб середины зоны венца нормировался на указанную величину, а задаваемая величина меридионального компонента давления P_z подбиралась из условия обеспечения заданного перемещения. Результаты расчетов приведены в таблице.

Во всех трех вариантах максимальное окружное напряжение σ_{22} развивалось в конце венца на внешней поверхности 3-го оболочечного слоя. Данное сечение имеет координату 270,5 мм вдоль оси вращения. Амплитудные значения максимального напряжения $\sigma_{22}^{\max}(270{,}5\,;\,0°)$, $\sigma_{22}^{\max}(270{,}5\,;\,\pm 180°)$ и минимального напряжения $\sigma_{22}^{\min}(270{,}5\,;\,\pm 90°)$ приведены в таблице.

Анализ результатов расчета этих 3-х вариантов геометрического исполнения гибкого колеса показывает, что наиболее деформативным является колесо 3-го варианта. При нормированной величине прогиба под нагрузкой к нему необходимо приложить меньшую нагрузку и амплитудные значения максимального окружного напряжения также получаются меньшими.

Анализ результатов проведенных исследований и сравнение этих результатов с экспериментальными исследованиями напряженного состояния гибких колес показывают:

- использованный в работе метод дает хорошее качественное совпадение распределения напряжений по длине гибкого колеса с подобными данными, полученными экспериментальным путем;

- предложенный метод открывает широкие возможности для уточнения расчетов напряженного состояния гибких колес и оптимизации геометрических размеров колес с точки зрения уровня напряжений в них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волновые зубчатые передачи / Под. Ред. **Д.П. Волкова**, **А.Ф. Крайнова**. - Киев, 1976. - 222 с.
2. **Завьялов В.М., Рубцов И.В.** Напряженное состояние гибкого колеса волновой зубчатой передачи // Динамика и прочность тяжелых машин. - Днепропетровск, 1985. - С. 100 - 103.
3. **Завьялов В.М., Рубцов И.В.** Экспериментальное исследование напряжений в гибких колесах волновой зубчатой передачи // Динамика и прочность тяжелых машин. - Днепропетровск, 1984. - С. 92 - 94.
4. **Иванов М.Н.** Волновые зубчатые передачи. - М., 1981.
5. **Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М.** Контактные задачи теории оболочек и стержней. - М.: Машиностроение, 1978. - 248 с.
6. **Рубцов И.В., Завьялов В.М., Рубцов И.О.** Ресурс волновых зубчатых передач. Выбор материалов и методов упрочняющих обработок гибких колес // Прикладные задачи механики. Сб. тр. / Под ред. И.Г. Филиппова. - М.: МГСУ, 2003. - С. 108 - 111.
7. **Волков Д.П. и др.** Метод определения напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи в зависимости от скорости вращения генератора волн // Динамика и прочность тяжелых машин. Сб. тр. - Днепропетровск, 1984.
8. **Абрамов В.Н.** Экспериментальные исследования напряженного состояния гибкого колеса горизонтально расположенной волновой зубчатой передачи . Сб. тр.№ 178. - М.: МИСИ, 1980.
9. **Гелюх П.А., Завьялов В.М., Степанов Р.Н.** Напряжения в гибком колесе фрикционной волновой передачи // Прикладные задачи механики. Выпуск 2. Сборник научных трудов / М.: МГСУ, 2005. - С. 45 - 48.
10. **Грибанов В.Ф., Крохин И.А., Паничкин Н.Г., Санников В.М., Фомичев Ю.И.** Прочность, устойчивость и колебания термонапряженных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с.
11. **Фомичев Ю.И.** Программный комплекс прочностного анализа осесимметричных оболочечных конструкций при неосесимметричном нагружении // Научные труды II Международного семинара «Современные проблемы прочности имени В.А. Лихачева». – Новгород: НовГУ им. Ярослава Мудрого, 1998. – Том 2. – С. 82 – 86.
12. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / **Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.** – М.: Машиностроение, 1976. – 702 с.

Фомичев Ю.И., доктор технических наук, профессор кафедры «Специальное машиностроение – 1», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Завьялов В.М., кандидат технических наук, профессор кафедры теоретической механики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЁТА РЕЗИНОВОГО ВИБРОИЗОЛЯТОРА МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА И ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Д.К. Сизов
Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация: Статья представляет описание процесса статического расчёта резинового виброизолятора, применяемого для виброзащиты объектов от вибрации. Тема виброзащиты объектов строительства становится всё более значимой при строительстве в технических зонах линий метрополитена. Расчёт виброизолятора произведён двумя методами: методом конечного элемента и вариационно-разностным методом. В качестве модели виброизолятора принято трёхмерное тело, имеющее форму параллелепипеда. Граничные условия задаются исходя из условий реальной работы виброизолятора в конструкциях здания. На верхней грани виброизолятора задаётся постоянное вертикальное перемещение, на нижней—перемещение равно нулю. В качестве результатов расчёта рассматриваются поля перемещений. Для создания программы, реализующей вариационно-разностный метод, используется язык программирования фортран. Основное внимание в статье уделено описанию самих процедур реализации как вариационно-разностного метода, так и метода конечного элемента.

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF CALCULATION RUBBER SHAKE-ABSORBER THE METHOD OF FINAL ELEMENT AND VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD

D.K. Sizov
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: The article represents the description of process of static calculation rubber shake-absorber, used for vibroprotection objects from vibration. The theme vibroprotect objects of construction becomes more and more significant at construction in technical zones of lines of underground. Calculation shake-absorber is made by two methods: a method of a final element and variational-difference method. As model shake-absorber the three-dimensional body having the form of a parallelepiped is accepted. Boundary conditions are set proceeding from conditions of real work shake-absorber in designs of a building. On the top side shake-absorber vertical moving is set constant, on bottom - moving is equal to zero. As results of calculation fields of movings. For creation of the program realizing variational-difference method, the programming language a Fortran is used. The basic attention in article is given to the description of procedures of realization as variational-difference a method, and a method of a final element.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современном строительстве всё более остро встаёт проблема строительства зданий в непосредственной близости от линий метрополитена неглубокого заложения. В данных условиях вопросы виброзащиты зданий от техногенного воздействия начинают играть существенную роль. Одним из методов защиты зданий от вибрации метрополитена является применение высоконагруженных резинометаллических виброизоляторов. В простейшем случае резинометаллический виброизолятор представляет собой слой резины, привулканизированный к двум металлическим пластинам. Ряд авторов [3],[4] предлагают свои методики расчёта резиноме-

таллических виброизоляторов. Основное направление данных разработок заключается в уменьшении размерности рассматриваемой задачи—то есть рассмотрение вместо пространственной, трёхмерной задачи некоторой упрощённой задачи пониженной размерности. В частности в работе [3], резиновый виброизолятор рассматривается как стержень с переменной формой поперечного сечения, зависящей от деформации. Работ, направленных на определение компонент трёхмерного напряжённо-деформированного состояния резинового виброизолятора на сегодняшний день достаточно мало.

В данной статье производится сравнение результатов расчёта резинометаллического виброизолятора с использование метода конечного элемента, а также вариационно-разностного метода. Одним из самых существенных недостатков вариационно-разностного метода является необходимость практически полного изменения текста программы при изменении области решения вариационной задачи, либо при изменении функционала, описывающего компоненты напряжённо-деформированного состояния. Современное развитие средств компьютерной алгебры позволяет, в некоторой мере, свести к минимуму трудоёмкость составления текста программы при изменении параметров задачи, решаемой вариационно-разностным методом.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

В данной статье для реализации вариационно-разностного метода использовалась одна из программ компьютерной алгебры, позволяющая не только получать аналитические выражения, но и непосредственно генерировать программный код, используемый затем для составления программы на языке фортран.

В связи с тем, что резину, как конструкционный материал, в наибольшем числе случае описывают с использованием некоторых упругих потенциалов, например—потенциалов Муни-Ривлина, Нео-Гука, Дунаева, и др., либо в простейшем случае функционалов Лагранжа в геометрически линейной/нелинейной постановке. Таким образом, при решении задач, связанных с расчётом резиновых изделий чаще всего применяют именно вариационную постановку задачи.

Решение вариационной задачи можно производить несколькими методами: методом Ритца, методом Бубнова-Галёркина, конечного элемента и.т.д. Одним из методов поиска минимума функционала является вариационно-разностный метод. Общий алгоритм применения вариационно-разностного метода состоит в рассмотрении искомых значений функции в узлах некоторой дискретизирующей область сетки. Составляется дискретный аналог функционала, а затем находятся производные дискретного аналога по каждому дискретному значению функции. Таким образом, приходим к системе разностных уравнений, решение которой можно производить любым известным методом. В данной статье решение системы производится методом Зейделя. Структура уравнений вариационно-разностного метода зависит от исходного выражения функционала, конечно-разностной аппроксимации входящих в него производных, а также от аппроксимации самого функционала в виде конечной суммы.

На рис.1. показано рассчитываемое трёхмерное тело резинового виброизолятора с нанесённой на нём пространственной трёхмерной сеткой. Для повышения точности решения задачи выбирается разные шаги изменения координат по всем осям.

В данной статье рассматривается резиновое тело в форме параллелепипеда, размеры параллелепипеда 0,45x0,43x0,04 м. Граничные условия следующие: нижняя

грань неподвижна—исключены как вертикальные, так и горизонтальные перемещения., точки верхней грани виброизолятора не могут перемещаться в горизонтальной плоскости—в направлении осей X,Y, перемещение вдоль оси Z является заданной величиной и составляет окончательно 5,57 мм. основной задачей является определение всех компонент НДС, при решении задачи использован функционал Лагранжа линейной теории упругости.

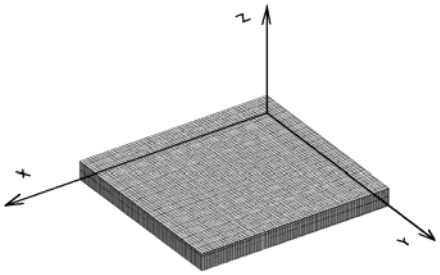


Рис.1. Разбиение трёхмерного тела пространственной сеткой.

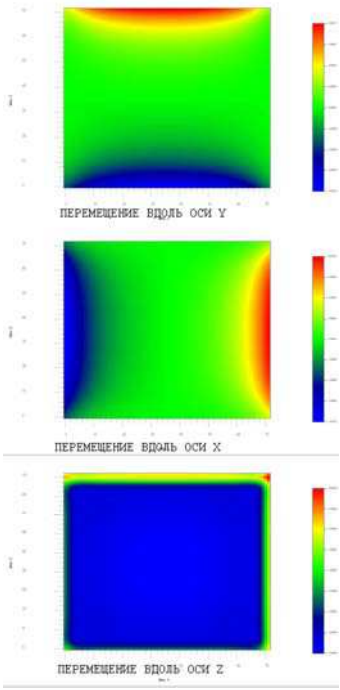


Рис.2. Перемещения в срединной плоскости виброизолятора

В качестве формулы, аппроксимирующей функционал на области используется формула прямоугольников.

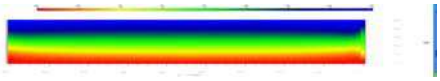
В качестве результатов применения вариационно-разностного метода на рис. 2 приводятся перемещения срединной поверхности виброизолятора в виде изополей. На рис. 3. приводятся результаты перемещений резинового виброизолятора в плоскости, проходящей через центр виброизолятора.



А) перемещение вдоль оси X



Б) перемещение вдоль оси Y



В) перемещение вдоль оси Z

Рис.3. Перемещения в вертикальной плоскости резинового виброизолятора.

Найденных значений компонент вектора перемещений достаточно для определения всех остальных компонент НДС в трёхмерном теле.

3. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ РЕЗИНОВОГО ВИБРОИЗОЛЯТОРА В СОВРЕМЕННЫХ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ, РЕАЛИЗУЮЩИХ МЕТОД КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Одним из наиболее часто используемых методов определения компонент трёхмерного напряжённо-деформированного состояния является использование современных программных комплексов, реализующих метод конечного элемента. Рас-

чёт конструкций с использованием метода конечного элемента в стандартных программных комплексах сводится к ряду операций: геометрического твердотельного моделирования детали, задания необходимых свойств материала, назначения свойств и атрибутов элементам геометрической модели и, последующего разбиения виброизолятора на сетку конечных элементов.

В качестве результатов расчёта (МКЭ) приводятся изополя перемещений.

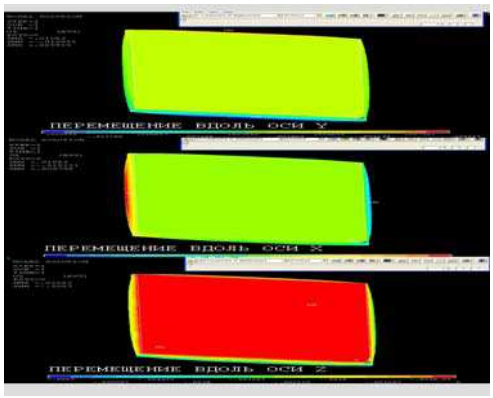


Рис.4. Результаты расчёта виброизолятора методом конечного элемента.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТА ВИБРОИЗОЛЯТОРА

Как видно из представленных изополей перемещений решение, полученное с использованием метода конечного элемента и вариационно-разностным методом дают практически идентичные поля перемещений. Использование при написании программ систем символьной математики позволяет в ряде случаев значительно сократить время разработки программ и свести общую трудоёмкость получения решения вариационно-разностным методом к таковой при использовании метода конечного элемента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Басов К.А.** ANSYS Справочник пользователя, ДКМ Пресс, М., 2005 г.
2. **Басов К.А.** ANSYS в примерах и задачах, Компьютер Пресс, М., 2002 г.
3. **Дашевский М.А., Миронов Е.М., Моторин В.В.** Виброзащита зданий. Теория и реализация. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений (ССБС), 2002 г., №5, с. 37-46.
4. **Коловский М.З.** Нелинейная теория виброзащитных систем, Наука, М., 1966 г.
5. **Мальков В.М.** Механика многослойных эластомерных конструкций. Издательство С.-Петербургского университета, 1998 г.

Сизов Дмитрий Константинович, Московский Государственный Строительный Университет, аспирант кафедры строительной механики, 114115, Россия, Москва, ул. Жуков пр-д, 21-14, e-mail: dima677@mail.ru

Sizov Dmitry Konstantinovich, the Moscow State Building University, faculty of building mechanics, post-graduate student, 114115, Russia, Moscow, street. Bugs, 21-14, e-mail: dima677@mail.ru