



Publishing House ASV



begell
house, inc.
publishers



Scientific coordination is carried out
by the Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences (RAACS)

Volume 13 • Issue 4 • 2017

ISSN 2587-9618 (Continues ISSN 1524-5845)

International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering

**Международный журнал по расчету
гражданских и строительных конструкций**

<http://raasn.ru/public.php>

<http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE>

DOI: 10.22337/2587-9618

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Urban Planning Institute
of Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Moscow Institute of Architecture (State Academy);
Perm National Research Polytechnic University;
Kielce University of Technology (Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing House;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center “STADYO”;
Tomsk State University of Architecture and Building;
Russian University of Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center “STADYO”;
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Perm National Research Polytechnic University;
Tomsk State University of Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.,
SemanticPro;
Boston, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute, Polish Academy of
Sciences; Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analyse Numerique; NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

PUBLISHER

ООО «Издательство АСВ»
(ASV Publishing House)
19/1,12, Yaroslavskoe Shosse, 120338, Moscow, Russia
Tel. +7(925)084-74-24; E-mail: iasv@iasv.ru

INDEXED IN:

CrossRef
Google Scholar
Russian Science Citation Index
ISSN 2587-9618 (Continues ISSN 1524-5845)

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Robert M. Aloyan,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Mojtaba Aslami, Ph.D,
Fasa University;
Daneshjou blvd, Fasa,
Fars Province, Iran

Mukhtaritdin M. Batdalov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Dagestan State University
of National Economy;
5, Ul. D. Ataeva, Makhachkala,
Dagestan, 367008, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Yuri M. Bazhenov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Alexander T. Bekker,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Far Eastern Federal University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
8, Sukhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak,
Professor, Ph.D.,
University of Žilina;
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir G. Gagarin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Alexander S. Gorodetsky,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
LIRA SAPR Ltd.;
7a Kiyanovsky Side Street
(Pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vladimir T. Erofeev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey V. Fedosov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Sergiy Yu. Fialko,
Professor, Dr.Sc.,
Cracow University of
Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Vyatcheslav A. Ilyichev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Podzemproekt Ltd.;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego Kielce, 25 – 314,
Poland

Sergey Yu. Kalashnikov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Volgograd State Technical
University;
28, Lenin avenue, Volgograd,
400005, Russia

Semen S. Kapriellov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutsckaya St., Moscow,
109428, Russia

Nikolay I. Karpenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov,
Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Perm National Research
Polytechnic University;
29 Komsomolsky pros., Perm,
Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Southwest State University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
94, 50 let Oktyabrya, Kursk,
305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey B. Krylov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutuskaya St., Moscow,
109428, Russia

Sergey V. Kuznetsov,
Professor, Dr.Sc.,
Ishlinsky Institute for Problems
in Mechanics of the Russian
Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo,
Moscow, 119526, Russia

Vladimir V. Lalin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint-Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya Sq., Tomsk,
634003, Russia

Rashid A. Mangushev,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan,
420043, Republic of Tatarstan,
Russia

Vladimir L. Mondrus,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Valery I. Morozov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Anatoly V. Perelmuter,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect,
Petrozavodsk, 185910,
Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
7, Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi,
Professor, Dr.Sc.,
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Vladimir P. Selyaev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Eun Chul Shin,
Professor, Ph.D.,
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh,
Professor, Ph.D.,
University of Roorkee;
Roorkee, India, 247667

Waclaw Szcześniak,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka,
Professor, Dr.Sc.,
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki,
Professor, Dr.Sc.,
Wroclaw University
of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University
of Technology;
Pl. Politechniki 1, 00-661
Warsaw, Poland

Segrey I. Zhavoronok, Ph.D.,
Institute of Applied Mechanics of
Russian Academy of Sciences;
Moscow Aviation Institute
(National Research University);
7, Leningradsky Prt.,
Moscow, 125040, Russia

Askar Zhussupbekov,
Professor, Dr.Sc.,
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D.,
Deputy Executive Scientific
Secretary of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

EDITORIAL TEAM

Alexander V. Kuzmin,
Full Member of RAACS,
President of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
Research Center of Construction;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of
the Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences; Scientific Research
Center “STADYO”; Tomsk State
University of Architecture and
Building; Russian University of
Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of
RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center
“STADYO”; Russian University
of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship
of Peoples; Perm National
Research Polytechnic University;
Tomsk State University of
Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya
Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi,
Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov,
Professor, Dr.Sc.,
SemanticPro;
Boston, USA

Charles El Nouty,
Professor, Dr.Sc.,
LAGA Paris-13 Sorbonne Paris
Cite; 99 avenue J.B. Clément,
93430 Villetaneuse, France

Darya Filatova,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego, Kielce, 25-314, Poland

Vladimir Ya. Gecha,
Professor, Dr.Sc.,
Research and Production
Enterprise All-Russia
Scientific-Research Institute
of Electromechanics with Plant
Named after A.G. Iosiphyan;
30, Volnaya Street, Moscow,
105187, Russia

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D,
Deputy Executive Scientific
Secretary of the Russian
Academy of Architecture
and Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Amirlan A. Kusainov,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazakh-American University,
9, Toraihyrov Str., Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing
House;
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337
Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii,
Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in
Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600,
Radom, Poland

Gregory P. Panasenکو,
Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023,
St.Etienne, France

Leonid A. Rozin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Marina V. Shitikova,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT); Russian
University of Friendship of
Peoples; Moscow Institute of
Architecture (State Academy);
Perm National Research
Polytechnic University;
Kielce University of Technology
(Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
Urban Planning Institute of
Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Igor L. Shubin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Petr P. Gaidzhurov, Professor, Dr.Sc.,
Don State Technical University; 1, Gagarina Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.,
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.,
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, Ph.D.,
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obratsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, Ph.D., Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал “**International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)**” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года (ISSN: 1524-5845). В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основной критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по отраслям науки

- 01.00.00 Физико-математические науки;
- 05.00.00 Технические науки

и группам специальностей

- 01.02.00 Механика
- 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление
- 05.23.00 Строительство и архитектура.

В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ).

Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science. Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – *Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк).* Официальными партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН)*, осуществляющая научное курирование издания, и *Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО).*

Цели журнала – продемонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

- предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности публиковать результаты своих исследований;

- привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;
- обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал ICCSE»): с основной информацией о журнале, его целях и задачами, составом редакционной коллегии и редакционного совета, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей, сведениями о соблюдении редакционной этики, о политике авторского права и лицензирования, о представлении журнала в информационных системах (индексировании), информацией о подписке на журнал, контактными данными и пр. Журнал работает по лицензии Creative Commons типа cc by-nc-sa (Attribution Non-Commercial Share Alike) – Лицензия «С указанием авторства – Некоммерческая – Копилефт».

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.gosp.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж,

офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (адреса электронной почты: sidorov.vladimir@gmail.com, sidorov@iasv.ru, iasv@iasv.ru, sidorov@gaasn.ru) или к техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: tkaytukov@gmail.com; Kaytukov@gaasn.ru). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство АСВ с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (PILA), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

CrossRef – независимая организация, образованная в 2000 году по инициативе группы научных издателей. Инициатором разработки технологии стало издательство Wiley. Технология использования ссылок (DOI) принадлежит агентству CrossRef.

Publishers International Linking Association (PILA) – Международная ассоциация по связям издателей – является управляющей структурой агентства CrossRef – агрегатора и регистратора DOI, а также международной базой научных статей и их метаданных (www.crossref.org). На настоящий момент в базе несколько десятков миллионов материалов.

Использование этой технологии позволит представить информацию о журнале на международной платформе издателей научной литературы CrossRef, обеспечит удобный и принятый в мировом научном сообществе доступ к полнотекстовой электронной версии. Это значительно облегчит поиск научной информации, что способствует повышению наукометрических показателей авторов статей, публикуемых в журнале. Если, например, у произведения российского автора есть DOI и если на его работу имеется ссылка в публикации зарубежного коллеги в журнале, включенном в Web of Science и Scopus, то такое произведение автоматически попадает в эти базы данных и получает в нем собственный индекс цитируемости.

Все журналы, индексируемые в международной базе научного цитирования Web of Science и большинство периодических изданий, индексируемых в международной базе Scopus, имеют DOI. Использование цифрового идентификатора говорит прежде всего о технологическом качестве научного издания и является неотъемлемым атрибутом системы научной коммуникации за счет эффективного обеспечения процессов обмена научной информацией.

С октября 2016 года стал возможным прием статей на рассмотрение и рецензирование через он-лайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала (электронная редакция):

<http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE>

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 13, Issue 4

2017

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

СОДЕРЖАНИЕ

- О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.**
Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий **14**
П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, Т.Б. Кайтуков, О.А. Негрозов
- Компьютерные технологии при формировании расчетных моделей монолитных железобетонных конструкций** **37**
А.И. Бедов, А.С. Салов, А.И. Габитов, Д.В. Кузнецов, Э.А. Садыкова
- Применение итерационного агрегирования в методе главных компонент** **47**
В.Е. Булгаков
- К вопросу влияния различных схем воздействия радиационных сред и нагрузок на армированные пластинчатые элементы конструкций** **53**
Р.Б. Гарибов
- Конечноэлементное моделирование выгиба преднапряженных железобетонных балок** **58**
П.П. Гайджуров
- Исследование поведения цементных композитов в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур** **66**
И.В. Ерофеева, В.В. Афонин, В.А. Федорцов, Д.В. Емельянов, Н.Ю. Подживотов, М.М. Зоткина
- О гамильтоновых формулировках и законах сохранения в теории пластин типа И.Н. Векуа – А.А. Амосова** **82**
С.И. Жаворонок
- Анализ устойчивости равновесия модели фермы с жесткими узлами на основе различных диаграмм деформирования материала** **96**
С.Б. Косицын, М.М. Бегичев

Численное моделирование податливых опор в виде труб кольцевого сечения при статическом и кратковременном динамическом нагружении <i>О.Г. Кумпяк, Н.В. Мецеулов</i>	<u>103</u>
Учет расчетных параметров шпунтовых стен профиля «Ларсен» при проектировании ограждений котлованов <i>Р.А. Мангушев, А.Б. Фадеев</i>	<u>114</u>
Вариационно-геометрические оценки решений для пластин с закрепленным контуром на основе модифицированного метода Релея – Ритца <i>Г.А. Мануйлов</i>	<u>121</u>
Двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы <i>М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов</i>	<u>128</u>
Моделирование напряженно-деформированного состояния толстых железобетонных плит с учетом ползучести бетона <i>Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, А.В. Сайбель</i>	<u>140</u>
Сообщение о конкурсе на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) за 2017 год	<u>149</u>
Сообщение о выборах членов Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) в 2018 году	<u>154</u>
Ушел из жизни Гурам Автандилович Джинчвелашвили	<u>160</u>

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 13, Issue 4

2017

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

CONTENTS

About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method	
Part 2: Special Aspects of Finite Element Approximation and Boundary Conditions	14
<i>Pavel A. Akimov, Alexander M. Belostotsky, Taymuraz B. Kaytukov, Oleg A. Negrozov</i>	
Computer Technologies in the Formation of Computed Models of Monolithic Reinforced Concrete Structures	37
<i>Anatoliy I. Bedov, Aleksandr S. Salov, Azat I. Gabitov, Dmitriy V. Kuznetsov, Elza A. Sadykova</i>	
Iterative Aggregation Method for Solving Principal Component Analysis Problems	47
<i>Vitaly E. Bulgakov</i>	
About Influence of Different Schemes of Impact Radiation Environments and Loads on Reinforced Lamellar Structural Members	53
<i>Rafail B. Garibov</i>	
Finite Element Modeling of Camber of Prestressed Concrete Beams	58
<i>Peter P. Gaigerov</i>	
Research of Behavior of Cement Composites in Conditions of High Humidity and Variable Positive Temperatures	66
<i>Irina V. Erofeeva, Victor V. Afonin, Vladislav A. Fedortsov, Denis V. Emelyanov, Nikolay Yu. Podzhivotov, Marina M. Zotkina</i>	
On Hamiltonian Formulations and Conservation Laws for Plate Theories of Vekua – Amosov Type	82
<i>Sergey I. Zhavoronok</i>	
Analysis of Stability of a Truss Model with Hard Nodes Based on Various Stress-Strain Curves	96
<i>Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev</i>	

Numerical Simulation of Yielding Supports in the Shape of Annular Tubes Under Static and Short-Term Dynamic Loading <i>Oleg G. Kumpyak, Nikita V. Mescheulov</i>	<u>103</u>
The Account of Options Sheet of Walls Profile Larsen in the Design of Excavations Supporting Walls <i>Rashid A. Mangushev, Alexandr B. Fadeev</i>	<u>114</u>
The Approximate Solution for Plates Using Modified Rayleigh-Ritz Method <i>Gaik A. Manuylov</i>	<u>121</u>
Two-Grid Method of Structural Analysis Based on Discrete Haar Basis Part 1: One-Dimensional Problems <i>Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov</i>	<u>128</u>
Modelling of Stress-Strain State of Thick Concrete Slabs Taking the Creep of Concrete into Account <i>Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko, Anzhelika V. Saibel</i>	<u>140</u>
Information about Competition for Medals and Diplomas of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences for 2017	<u>149</u>
Information about Election of Members of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences in 2018	<u>154</u>
In Memory of Prof. Guram A. Dzhinchvelashvili	<u>160</u>

О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 2: ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

П.А. Акимов^{1,2,3,4,5}, А.М. Белостоцкий^{2,3,4,5,6,7}, Т.Б. Кайтуков¹, О.А. Негрозов^{1,5,8}

¹ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

⁴ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁵ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

⁷ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

⁸ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Как известно, постановка многоточечной краевой задачи включает три основные составляющие: описание области, занимаемой конструкцией и соответствующих подобластей; описание условий внутри области, т.е. внутри соответствующих подобластей; описание условий на границе области, т.е. условий на границах «стыковки» подобластей. Данная статья является продолжением другой, опубликованной ранее работы, в которой рассматривались постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Отметим, что аппроксимация в пределах фрагментов конструкции, имеющих регулярные физико-геометрические параметры по одному из направлений, целесообразно проводить на основе дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), а для аппроксимации всех остальных фрагментов следует использовать стандартный метод конечных элементов (МКЭ). В настоящей публикации приводятся адаптированные для алгоритмической реализации формулы определения перемещений, производных от перемещений, деформаций и напряжений в рамках конечноэлементной модели (причем как в пределах конечного элемента, так и соответствующие узловые значения с учетом осреднения), проводится анализ вариантов условий стыковки на границах подобластей (соответственно дискретных моделей и дискретно-континуальных моделей и условия типа «шарнирное опирание», «свободных край», «идеальный контакт» (в общей сложности выделено двенадцать основных (базовых) вариантов стыковок, к которым сводятся большинство возникающих на практике условий)), для каждого из таких случаев представлены адаптированные для алгоритмической реализации формулы вычисления элементов соответствующих матриц коэффициентов и векторов правых частей.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, двумерные задачи, постановки задач, аппроксимация, многоточечная краевая задача

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL

FINITE ELEMENT METHOD PART 2: SPECIAL ASPECTS OF FINITE ELEMENT APPROXIMATION AND BOUNDARY CONDITIONS

*Pavel A. Akimov^{1,2,3,4,5}, Alexander M. Belostotsky^{2,3,4,5,6,7}, Taymuraz B. Kaytukov¹,
Oleg A. Negrozov^{1,5,8}*

¹ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

² Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

³ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

⁴ Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁵ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁶ Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA

⁷ Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

⁸ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: As is well known, the formulation of a multipoint boundary problem involves three main components: a description of the domain occupied by the structure and the corresponding subdomains; description of the conditions inside the domain and inside the corresponding subdomains, the description of the conditions on the boundary of the domain, conditions on the boundaries between subdomains. This paper is a continuation of another work published earlier, in which the formulation and general principles of the approximation of the multipoint boundary problem of a static analysis of deep beam on the basis of the joint application of the finite element method and the discrete-continual finite element method were considered. It should be noted that the approximation within the fragments of a domain that have regular physical-geometric parameters along one of the directions is expedient to be carried out on the basis of the discrete-continual finite element method (DCFEM), and for the approximation of all other fragments it is necessary to use the standard finite element method (FEM). In the present publication, the formulas for the computing of displacements partial derivatives of displacements, strains and stresses within the finite element model (both within the finite element and the corresponding nodal values (with the use of averaging)) are presented. Boundary conditions between subdomains (respectively, discrete models and discrete-continual models and typical conditions such as “hinged support”, “free edge”, “perfect contact” (twelve basic (basic) variants are available)) are under consideration as well. Governing formulas for computing of elements of the corresponding matrices of coefficients and vectors of the right-hand sides are given for each variant. All formulas are fully adapted for algorithmic implementation.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, two-dimensional problems, formulation of problems, approximation, multipoint boundary problem

1. ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРЕДЕЛАХ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА. ВОСПОЛНЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ

$$(x_{1,i}, x_{2,k,j}) \Rightarrow (0, 0); \quad (1.1)$$

$$(x_{1,i+1}, x_{2,k,j}) \Rightarrow (1, 0); \quad (1.2)$$

$$(x_{1,i}, x_{2,k,j+1}) \Rightarrow (0, 1); \quad (1.3)$$

$$(x_{1,i+1}, x_{2,k,j+1}) \Rightarrow (1, 1). \quad (1.4)$$

Рассмотрим произвольный (k, i, j) -й конечный элемент (рис. 1.1). На элементе вводится локальная система координат (координаты t_1 и t_2), при этом $t_1 \in [0, 1]$; $t_2 \in [0, 1]$.

Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента:

Пусть $\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T$ и $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$ – векторы координат произвольной точки дискретно-континуального конечного элемента в локальной и исходной глобальной системах координат.

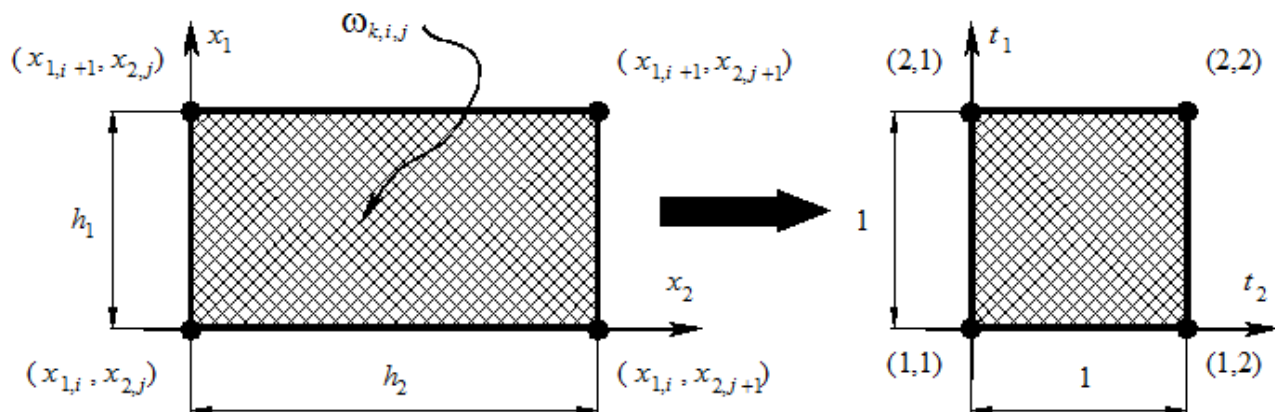


Рисунок 1.1. Переход к локальной системе координат на конечном элементе.

Формула преобразования координат на элементе (рис. 1.1):

$$\bar{x}(t_1, t_2) = \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x}^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 \bar{x}^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}^{(k,i,j)}, \quad (1.5)$$

$$\text{где } \Delta_1 \bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.6)$$

$$\Delta_2 \bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.7)$$

$$\Delta_{12} \bar{x}^{(k,i,j)} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}^{(k,i,j)}. \quad (1.8)$$

Поясним, что

$$\bar{x}_n^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i,j)} \\ x_2^{(k,i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,k,j} \end{bmatrix}; \quad (1.9)$$

$$\bar{x}_n^{(k,i+1,j)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i+1,j)} \\ x_2^{(k,i+1,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{2,k,j} \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

$$\bar{x}_n^{(k,i,j+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i,j+1)} \\ x_2^{(k,i,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,k,j+1} \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$

$$\bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k,i+1,j+1)} \\ x_2^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{2,k,j+1} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь $\bar{x}_n^{(k,i,j)}$, $\bar{t}_n^{(k,i,j)}$ – векторы координат (k, i, j) -го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно. Формула восполнения перемещений на элементе [1-3]:

$$\bar{u}^{(k)}(t_1, t_2) = \bar{u}_n^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{u}^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 \bar{u}^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{u}^{(k,i,j)}, \quad (1.13)$$

$$\text{где } \Delta_1 \bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{u}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.14)$$

$$\Delta_2 \bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{u}_n^{(k,i,j)}; \quad (1.15)$$

$$\Delta_{12} \bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{u}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{u}^{(k,i,j)} \quad (1.16)$$

(верхний индекс « (k) », следуя [1-3], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$).

Функциональная матрица $B(t_1, t_2)$ имеет вид:

$$B_{k,i,j}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \\ \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где

$$\beta_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(k,i,j)} - t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1, 2; \quad q=1, 2; \quad (1.18)$$

$$\Delta_1 x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i+1,j)} - x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1, 2; \quad (1.19)$$

$$\Delta_2 x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i,j+1)} - x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1, 2; \quad (1.20)$$

$$\Delta_{12} x_p^{(k,i,j)} = x_p^{(k,i+1,j+1)} - x_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 x_p^{(k,i,j)}, \quad p=1, 2. \quad (1.21)$$

Формула вычисления определителя:

$$J_{k,i,j}(t_1, t_2) = \det[\Lambda_{k,i,j}(t_1, t_2)] = \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2). \quad (1.22)$$

Матрица Якоби $\Lambda_{k,i,j}(t_1, t_2)$, определяемая формулой

$$\Lambda_{k,i,j}(t_1, t_2) = B_{k,i,j}^{-1}(t_1, t_2), \quad (1.23)$$

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

имеет вид

$$\Lambda_{k,i,j}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \\ \alpha_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\text{где } \alpha_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J_{k,i,j}(t_1, t_2)}; \quad (1.25)$$

$$\alpha_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J_{k,i,j}(t_1, t_2)}; \quad (1.26)$$

$$\alpha_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J_{k,i,j}(t_1, t_2)}; \quad (1.27)$$

$$\alpha_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J_{k,i,j}(t_1, t_2)}. \quad (1.28)$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЕДЕЛАХ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Частные производные от перемещений по переменным t_1 и t_2 определяются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_p} \bar{u}^{(k)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1, t_2) = \Delta_p \bar{u}^{(k,i,j)} + t_{3-p} \Delta_{12} \bar{u}^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2. \quad (2.1)$$

Формула определения частных производных от перемещений по переменным x_1 и x_2 имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_p} \bar{u}^{(k)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_q} \bar{u}^{(k)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1, t_2) \alpha_{q,p}^{(k,i,j)}(t_1, t_2), \quad (2.2)$$

$$p = 1, 2.$$

Формула для компонентов тензора деформаций на элементе (в рамках двумерной теории упругости [4-21]):

$$\varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_q} u_p^{(k)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1, t_2) + \left[\frac{\partial}{\partial x_p} u_q^{(k)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{k,i,j}^{fe}}(t_1, t_2) \right), \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2. \quad (2.3)$$

Формула для объемной деформации [1-3]:

$$\varepsilon^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \sum_{p=1}^2 \varepsilon_{p,p}^{(k,i,j)}(t_1, t_2). \quad (2.4)$$

Формула для компонентов тензора напряжений на элементе [1-3]:

$$\sigma_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \delta_{p,q} \bar{\lambda}_{k,i,j} \varepsilon^{(k,i,j)}(t_1, t_2) + 2\bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(t_1, t_2), \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2, \quad (2.5)$$

где $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \quad (2.6)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ К УЗЛАМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ЗНАЧЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Введем обозначения [22]:

$$\chi_{k,i,j} = \mathcal{G}_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1}, \quad (3.1)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1;$$

$$\chi_{k,1,j} = \mathcal{G}_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1}, \quad (3.2)$$

$$j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1;$$

$$\chi_{k,N_1,j} = \mathcal{G}_{k,N_1,j} (\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.3)$$

$$\chi_{k,i,1} = \mathcal{G}_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad (3.4)$$

$$\chi_{3,i,N_2} = \mathcal{G}_{2,i,N_2,k} (\theta_{k,i-1,N_2,k-1} + \theta_{k,i,N_2,k-1})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad (3.5)$$

$$\chi_{k,1,1} = \mathcal{G}_{k,1,1} \theta_{k,1,1}^{-1}; \quad (3.6)$$

$$\chi_{k,N_1,1} = \mathcal{G}_{k,N_1,1} \theta_{k,N_1-1,1}^{-1}; \quad (3.7)$$

$$\chi_{k,1,N_2} = \mathcal{G}_{k,1,N_2} \theta_{k,1,N_2-1}^{-1}; \quad (3.8)$$

$$\chi_{k,N_1,N_2} = \mathcal{G}_{k,N_1,N_2} \theta_{k,N_1-1,N_2-1}^{-1}, \quad (3.9)$$

где

$$\mathcal{G}_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \\ & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{G}_{k,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} = 0, \\ & j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{G}_{k,N_1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} = 0, \\ & j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{G}_{k,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} = 0, \\ & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{G}_{k,i,N_2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,N_2,k-1} + \theta_{k,i,N_2,k-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,N_2,k-1} + \theta_{k,i,N_2,k-1} = 0, \\ & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}_{k,1,1} = \theta_{k,1,1}; \quad (3.15)$$

$$\mathcal{G}_{k,N_1,1} = \theta_{k,N_1-1,1}; \quad (3.16)$$

$$\mathcal{G}_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \\ & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{G}_{k,1,N_2} = \theta_{k,1,N_2-1}; \quad (3.17)$$

$$\mathcal{G}_{k,N_1,N_2} = \theta_{k,N_1-1,N_2-1}. \quad (3.18)$$

Уточним, что в каждой из рассмотренных выше формул при $\mathcal{G}_{k,i,j} = 0$ будем иметь

$$\chi_{k,i,j} = 0.$$

Приведем ниже формулы для определения напряжений и деформаций в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду $p=1, 2$ и $q=1, 2$).

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)} = \chi_{k,i,j} (\sigma_{p,q}^{(k,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,i,j-1)}(0,1)\theta_{k,i,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,i-1,j)}(1,0)\theta_{k,i-1,j} + \sigma_{p,q}^{(k,i,j)}(0,0)\theta_{k,i,j}); \quad (3.19)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)} = \chi_{k,i,j} (\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{k,i-1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,j-1)}(0,1)\theta_{k,i,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,j)}(1,0)\theta_{k,i-1,j} + \varepsilon_{p,q}^{(k,i,j)}(0,0)\theta_{k,i,j}); \quad (3.20)$$

– «левая вертикальная граница» ($i=1$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$)

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,j)} = \chi_{k,1,j} (\sigma_{p,q}^{(k,1,j-1)}(0,1)\theta_{k,1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(k,1,j)}(0,0)\theta_{k,1,j}); \quad (3.21)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,j)} = \chi_{k,1,j} (\varepsilon_{p,q}^{(k,1,j-1)}(0,1)\theta_{k,1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(k,1,j)}(0,0)\theta_{k,1,j}); \quad (3.22)$$

– «правая вертикальная граница» ($i = N_1$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$)

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,j)} &= \\ &= \chi_{k,N_1,j} (\sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,j-1)} (1,1)\theta_{k,N_1-1,j-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,j)} (1,0)\theta_{k,N_1-1,j}); \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,j)} &= \\ &= \chi_{k,N_1,j} (\varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,j-1)} (1,1)\theta_{k,N_1-1,j-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,j)} (1,0)\theta_{k,N_1-1,j}); \end{aligned} \quad (3.24)$$

– «нижняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 1$; $j = 1$)

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,1)} &= \chi_{k,i,1} (\sigma_{p,q}^{(k,i-1,1)} (1,0)\theta_{k,i-1,1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(k,i,1)} (0,0)\theta_{k,i,1}); \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,1)} &= \chi_{k,i,1} (\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,1)} (1,0)\theta_{k,i-1,1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(k,i,1)} (0,0)\theta_{k,i,1}); \end{aligned} \quad (3.26)$$

– «верхняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_{2,k}$)

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,N_{2,k})} &= \chi_{k,i,j} (\sigma_{p,q}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)} (1,1)\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \\ &+ \sigma_{p,q}^{(k,i,N_{2,k}-1)} (0,1)\theta_{k,i,N_{2,k}-1}); \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,N_{2,k})} &= \chi_{k,i,j} (\varepsilon_{p,q}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)} (1,1)\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \\ &+ \varepsilon_{p,q}^{(k,i,N_{2,k}-1)} (0,1)\theta_{k,i,N_{2,k}-1}); \end{aligned} \quad (3.28)$$

– «угловые узлы границы»
в случае $i = 1$, $j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,1)} = \chi_{k,1,1} \sigma_{p,q}^{(k,1,1)} (0,0)\theta_{k,1,1}; \quad (3.29)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,1)} = \chi_{k,1,1} \varepsilon_{p,q}^{(k,1,1)} (0,0)\theta_{k,1,1}; \quad (3.30)$$

в случае $i = N_1$, $j = 1$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,1)} = \chi_{k,N_1,1} \sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,1)} (1,0)\theta_{k,N_1-1,1}; \quad (3.31)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,1)} = \chi_{k,N_1,1} \varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,1)} (1,0)\theta_{k,N_1-1,1}; \quad (3.32)$$

в случае $i = 1$, $j = N_{2,k}$ имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(1,N_2)} = \chi_{k,1,N_{2,k}} \sigma_{p,q}^{(k,1,N_2-1)} (0,1)\theta_{k,1,N_{2,k}-1}; \quad (3.33)$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(1,N_2,k)} = \chi_{k,1,N_{2,k}} \varepsilon_{p,q}^{(k,1,N_{2,k}-1)} (0,1)\theta_{k,1,N_{2,k}-1}; \quad (3.34)$$

в случае $i = N_1$, $j = N_{2,k}$ имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,N_{2,k})} &= \\ &= \chi_{k,N_1,N_{2,k}} \sigma_{p,q}^{(k,N_1-1,N_{2,k}-1)} (1,1)\theta_{k,N_1-1,N_{2,k}-1}; \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(N_1,N_{2,k})} &= \\ &= \chi_{k,N_1,N_{2,k}} \varepsilon_{p,q}^{(k,N_1-1,N_{2,k}-1)} (1,1)\theta_{k,N_1-1,N_{2,k}-1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

4. АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ УСЛОВИЙ СТЫКОВКИ

В практических приложениях наиболее часто встречаются следующие варианты стыковки на границах подобластей (1.6) из [1]:

- 1) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – дискретная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
- 2) стыковка вида «дискретная модель – дискретно-континуальная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
- 3) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – дискретно-континуальная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
- 4) стыковка вида «дискретная модель – дискретная модель», «внутреннее» условие типа «идеальный контакт»;
- 5) стыковка вида «внешняя граница – дискретная модель», условие типа «шарнирное опирание»;
- 6) стыковка вида «внешняя граница – дискретная модель», условие типа «свободный край»;
- 7) стыковка вида «внешняя граница – дискретно-континуальная модель», условие типа «шарнирное опирание»;
- 8) стыковка вида «внешняя граница – дискретно-континуальная модель», условие типа «свободный край»;

- 9) стыковка вида «дискретная модель – внешняя граница», условие типа «шарнирное опирание»;
- 10) стыковка вида «дискретная модель – внешняя граница», условие типа «свободный край»;
- 11) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – внешняя граница», условие типа «шарнирное опирание»;
- 12) стыковка вида «дискретно-континуальная модель – внешняя граница», условие типа «свободный край».

Разумеется, возможны и иные варианты стыковок, однако подобного рода варианты, так или иначе, как правило, сводятся к некоторым сочетаниям вышеперечисленных двенадцати. Рассмотрим далее алгоритмы задания граничных условий в каждом из указанных двенадцати вариантов стыковки на границах подобластей [1-3].

5. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1 < k < n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1} = 2$) и подобласти ω_k^{fe} с дискретизацией в рамках МКЭ ($\rho_k = 1$).

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = u_1^{(k,i,j)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \tag{5.1}$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = u_2^{(k,i,j)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \tag{5.2}$$

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = \sigma_{1,2}^{(k,i,j)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \tag{5.3}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = \sigma_{2,2}^{(k,i,j)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, \tag{5.4}$$

где $\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0)$ и $\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0)$ – соответственно приведенные к узлу (k, i) функции компонент напряжений $\sigma_{1,2}(x_2)$ и $\sigma_{2,2}(x_2)$ в пределах дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k-1,i}^{dc}$; $\sigma_{1,2}^{(k,i,j)}$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i,j)}$ – соответственно приведенные к узлу (k, i, j) значения компонент напряжений $\sigma_{1,2}$ и $\sigma_{2,2}$.

Уравнения (5.1)-(5.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) = B_k^+ \bar{U}_k, \tag{5.5}$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 5.1; B_k^+ – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 2N_1N_{2,k}$, формируемая на основе метода базисных вариаций. Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_k^+ при задании условий (5.5) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_k^+ определяются по формуле

$$(B_k^+)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 2N_1, \quad q = 1, 2, \dots, 2N_1. \tag{5.6}$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^+ по формуле (5.6) соответствует заданию граничных условий (5.1)-(5.2).

2. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

Таблица 5.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i-1), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.1)
2	$(N_1+i, 2i), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.2)
3	$(2N_1+1, 2)$	$\bar{\mu}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(5.3) $i=1$
4	$(2N_1+1, 4)$	$\bar{\mu}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
5	$(2N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}$	
6	$(2N_1+i, 2(i-1)),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(5.3) $i=2, 3, \dots,$ N_1-1
7	$(2N_1+i, 2i),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\mu}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\bar{\mu}_{k-1,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
8	$(2N_1+i, 2(i+1)),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
9	$(2N_1+i, 2(N_1+i)-1),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} (\bar{\mu}_{k-1,i-1} + \bar{\mu}_{k-1,i})$	
10	$(3N_1, 2N_1-2)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N_1'(1)$	
11	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N_2'(1)$	(5.3) $i=N_1$
12	$(3N_1, 4N_1-1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	
13	$(3N_1+1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(5.4) $i=1$
14	$(3N_1+1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
15	$(3N_1+1, 2N_1+1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} + 2\bar{\mu}_{k-1,1}$	
16	$(3N_1+i, 2i-3),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(5.4) $i=2, 3, \dots,$ N_1-1
17	$(3N_1+i, 2i-1),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\lambda}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\bar{\lambda}_{k-1,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
18	$(3N_1+i, 2i+1),$ $i=2, 3, \dots, N_1-1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	

1	2	3	4
19	$(3N_1 + i, 2(N_1 + i)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{k-1,i-1} + \bar{\lambda}_{k-1,i}) +$ $\bar{\mu}_{k-1,i-1} - \bar{\mu}_{k-1,i}$	(5.4) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
20	$(4N_1, 2N_1 - 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(5.4) $i = N_1$
21	$(4N_1, 2N_1 - 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
22	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,N_1-1} + 2\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^- не указанные в таблице равны нулю.

2.1.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i - 1) + 2N_1(j - 1); \quad (5.7)$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{U}_k (см. формулу (5.5) из [3]) задается

$$\bar{U}_k = \bar{e}_{j_g}. \quad (5.8)$$

2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$, $[\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$ тензора напряжений.

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^+ определяются по формулам

$$(B_k^+)_{2N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}; \quad (5.9)$$

$$(B_k^+)_{3N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}. \quad (5.10)$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^+ по формулам (5.9), (5.10) соответствует заданию граничных условий (5.3), (5.4).

6. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1 < k < n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{fe} с дискретизацией в рамках МКЭ ($\rho_{k-1} = 1$) и подобласти ω_k^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k = 2$).

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i,j)} = u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}; \quad (6.1)$$

$$u_2^{(k-1,i,j)} = u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}; \quad (6.2)$$

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i,j)} = \sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}; \quad (6.3)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i,j)} = \sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}, \quad (6.4)$$

где $\sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0)$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0)$ – соответственно приведенные к узлу (k, i) функции компонент напряжений $\sigma_{1,2}(x_2)$ и $\sigma_{2,2}(x_2)$ в пределах дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k,i}^{dc}$; $\sigma_{1,2}^{(k,i,j)}$ и $\sigma_{2,2}^{(k,i,j)}$ – соответственно приведенные к узлу (k, i, j) значения компонент напряжений $\sigma_{1,2}$ и $\sigma_{2,2}$;

Уравнения (6.1)-(6.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1} = B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0), \quad (6.5)$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 2N_1 N_{2,k-1}$, формируемая на основе метода базисных вариаций; B_k^+ – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 6.1.

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_k^- при задании условий (6.5) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_k^- определяются по формуле

$$(B_k^+)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 2N_1, \quad q = 1, 2, \dots, 2N_1. \quad (6.6)$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^- по формуле (3.6) соответствует заданию граничных условий (3.1)-(3.2).

2. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(j-1). \quad (6.7)$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{U}_k (см. формулу (5.5) из [1]) задается

$$\bar{U}_{k-1} = \bar{e}_{j_g}. \quad (6.8)$$

2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}$, $[\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}$ тензора напряжений.

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^+ определяются по формулам

$$(B_k^-)_{2N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}; \quad (6.9)$$

$$(B_k^-)_{3N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}. \quad (6.10)$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_k^- по формулам (6.9), (6.10) соответствует заданию граничных условий (6.3), (6.4).

Таблица 6.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(6.1)
2	$(N_1 + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(6.2)
3	$(2N_1 + 1, 2)$	$\bar{\mu}_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(6.3) $i = 1$
4	$(2N_1 + 1, 4)$	$\bar{\mu}_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
5	$(2N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\mu}_{k,1}$	
6	$(2N_1 + i, 2(i - 1)), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(6.3) $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$
7	$(2N_1 + i, 2i), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\mu}_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\mu}_{k,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
8	$(2N_1 + i, 2(i + 1)), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
9	$(2N_1 + i, 2(N_1 + i) - 1), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\mu}_{k,i-1} + \bar{\mu}_{k,i})$	
10	$(3N_1, 2N_1 - 2)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(6.3) $i = N_1$
11	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
12	$(3N_1, 4N_1 - 1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	
13	$(3N_1 + 1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(6.4) $i = 1$
14	$(3N_1 + 1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
15	$(3N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1} + 2\bar{\mu}_{k,1}$	
16	$(3N_1 + i, 2i - 3), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(6.4) $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$
17	$(3N_1 + i, 2i - 1), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\lambda}_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\lambda}_{k,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
18	$(3N_1 + i, 2i + 1), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

1	2	3	4
19	$(3N_1 + i, 2(N_1 + i)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{k,i-1} + \bar{\lambda}_{k,i}) + \bar{\mu}_{k,i-1} - \bar{\mu}_{k,i}$	(2.4) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
20	$(4N_1, 2N_1 - 3)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(2.4) $i = N_1$
21	$(4N_1, 2N_1 - 1)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
22	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{k,N_1-1} + 2\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

7. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1 < k < n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1} = 2$) и подобласти ω_k^{dc} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k = 2$).

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида [1-3]:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (7.1)$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (7.2)$$

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = \sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (7.3)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = \sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (7.4)$$

Уравнения (7.1)-(7.4) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) = B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0), \quad (7.5)$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 5.1; B_k^+ – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 6.1.

8. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» («ВНУТРЕННЕЕ» УСЛОВИЕ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»)

Пусть в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1 < k < n_b$ имеет место стыковка подобласти ω_{k-1}^{fe} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_{k-1} = 1$) и подобласти ω_k^{fe} с дискретизацией в рамках ДКМКЭ ($\rho_k = 1$).

Следует отметить, что в данном случае никаких граничных условий в сечении $x_2 = x_{2,k}^b$ формулировать не требуется. Подобласти ω_{k-1}^{fe} и ω_k^{fe} следует рассматривать в рамках МКЭ совместно, соответствующие условия типа «идеальный контакт» будут выполнены автоматически.

Таблица 9.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i - 1, 2N_1(N_{2,k} - 1) + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(9.1)
2	$(2i, 2N_1(N_{2,k} - 1) + 2i), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(9.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

9. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k = 1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{fe}, k = 1$ осуществляется в рамках МКЭ. Здесь следует задать $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k,i,j)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \quad (9.1)$$

$$u_2^{(k,i,j)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, \quad (9.2)$$

представимых также в матричной форме

$$B_k^+ \bar{U}_k = \bar{g}_k^+, \quad (9.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k}$ (таблица) 9.1; \bar{g}_k^+ – $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^+ = 0. \quad (9.4)$$

10. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k = 1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем

дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{fe}, k = 1$ осуществляется в рамках МКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k = 1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \quad (10.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1. \quad (10.2)$$

Уравнения (10.1)-(10.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+ \bar{U}_k = \bar{g}_k^+, \quad (10.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k}$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с описанным ниже алгоритмом.

1. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

1.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g $u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (11.1)$

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(j-1). \quad (10.4)$$

1.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{U}_k (см. формулу (5.5) из [1]) задается

$$\bar{U}_k = \bar{e}_{j_g}. \quad (10.5)$$

1.1.1.1.3. В соответствии со структурой (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$, $[\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}$ тензора напряжений.

1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^+ определяются по формулам

$$(B_k^+)_{i_g, j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}; \quad (10.6)$$

$$(B_k^+)_{N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g,1)}. \quad (10.7)$$

Вычисление элементов матрицы B_k^+ по формулам (10.6), (10.7) соответствует заданию граничных условий (10.1), (10.2).

11. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{dc}, k=1$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k=1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

представимых также в матричной форме

$$B_k^+ \bar{U}_k (x_{2,1}^b + 0) = \bar{g}_k^+, \quad (11.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_k \times 4N_k$ (таблица 11.1); \bar{g}_k^+ – $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^+ = 0. \quad (11.4)$$

12. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА – ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»).

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k=1$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{dc}, k=1$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

Здесь следует задать $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (12.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (12.2)$$

Уравнения (12.1)-(12.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+ \bar{U}_k (x_{2,1}^b + 0) = \bar{g}_k^+, \quad (12.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 12.1; \bar{g}_k^+ – $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^+ = 0. \quad (12.4)$$

Таблица 11.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2i-1), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(11.1)
2	$(2i, 2i), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(11.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

13. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k = n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{fe}, k = n_b$ осуществляется в рамках МКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k = n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$u_1^{(k-1,i,j)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}; \tag{13.1}$$

$$u_2^{(k-1,i,j)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}. \tag{13.2}$$

Уравнения (13.1)-(13.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1} = \bar{g}_k^-, \tag{10.3}$$

где B_k^- – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k-1}$, алгоритм формирования которой указан в таблице 13.1; \bar{g}_k^+ – $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^+ = 0. \tag{10.4}$$

14. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»).

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k = n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подобласти $\omega_k^{fe}, k = n_b$ осуществляется в рамках МКЭ.

В данном сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k = n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}; \tag{14.1}$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_{2,k-1}. \tag{14.2}$$

Уравнения (14.1)-(14.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_k = \bar{g}_k^-, \tag{14.3}$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 2N_1 N_{2,k-1}$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с описанным ниже алгоритмом.

1. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.
 - 1.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

Таблица 12.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(2N_1 + 1, 2)$	$\bar{\mu}_{k,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(12.1) $i = 1$
2	$(2N_1 + 1, 4)$	$\bar{\mu}_{k,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
3	$(2N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\mu}_{k,1}$	
4	$(2N_1 + i, 2(i-1)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(12.1) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
5	$(2N_1 + i, 2i),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\mu}_{k,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\bar{\mu}_{k,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
6	$(2N_1 + i, 2(i+1)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
7	$(2N_1 + i, 2(N_1 + i) - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\mu}_{k,i-1} + \bar{\mu}_{k,i})$	
8	$(3N_1, 2N_1 - 2)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N_1'(1)$	
9	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N_2'(1)$	
10	$(3N_1, 4N_1 - 1)$	$\bar{\mu}_{k,N_1-1}$	
11	$(3N_1 + 1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(12.2) $i = 1$
12	$(3N_1 + 1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
13	$(3N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\lambda}_{k,1} + 2\bar{\mu}_{k,1}$	
14	$(3N_1 + i, 2i - 3),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(12.2) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
15	$(3N_1 + i, 2i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\lambda}_{k,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\bar{\lambda}_{k,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
16	$(3N_1 + i, 2i + 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
17	$(3N_1 + i, 2(N_1 + i)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\lambda}_{k,i-1} + \bar{\lambda}_{k,i}) + \bar{\mu}_{k,i-1} - \bar{\mu}_{k,i}$	

1	2	3	4
18	$(4N_1, 2N_1 - 3)$	$\bar{\lambda}_{k, N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(12.2) $i = N_1$
19	$(4N_1, 2N_1 - 1)$	$\bar{\lambda}_{k, N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{k, N_1-1} + 2\bar{\mu}_{k, N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 13.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i - 1, 2N_1(N_{2,k-1} - 1) + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(13.1)
2	$(2i, 2N_1(N_{2,k-1} - 1) + 2i), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(13.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^+ не указанные в таблице равны нулю.

1.1.1. Последовательно перебираются $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$. Для каждого фиксированного значения j выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1. Последовательно перебираются $q = 1, 2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

1.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i - 1) + 2N_1(j - 1). \quad (14.4)$$

1.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{U}_k (см. (5.5) из [1]) задается

$$\bar{U}_{k-1} = \bar{e}_{j_g}. \quad (14.5)$$

1.1.1.1.3. Согласно структуре (5.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (3.19), (3.31), (3.23), (3.25), (3.27), (3.29), (3.31), (3.33) и (3.35) определяются приведенные к узлу компоненты $[\sigma_{1,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}$, $[\sigma_{2,2}^{(k-1)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}$ тензора напряжений.

1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_k^- определяются по формулам

$$(B_k^-)_{i_g, j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}; \quad (14.6)$$

$$(B_k^-)_{N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i_g, N_{2,k-1})}. \quad (14.7)$$

Вычисление элементов матрицы B_k^- по формулам (14.6), (14.7) соответствует заданию граничных условий (14.1), (14.2).

15. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b$, $k = n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подопласти ω_k^{dc} , $k = n_b$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий

Таблица 15.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i-1, 2i-1), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(8.1)
2	$(2i, 2i), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(8.2)

Примечание: Все элементы матрицы B_k^- не указанные в таблице равны нулю.

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k = n_b$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

$$\sigma_{1,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (16.1)$$

$$\sigma_{2,2}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (16.2)$$

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (15.1)$$

$$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (15.2)$$

Уравнения (16.1)-(16.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^+ \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) = \bar{g}_k^+, \quad (16.3)$$

Уравнения (15.1)-(15.2) можно переписать следующим образом:

$$B_k^- \bar{U}_k(x_{2,k}^b - 0) = \bar{g}_k^+, \quad (15.3)$$

где B_k^+ – матрица граничных условий размера $2N_{k-1} \times 4N_{k-1}$, алгоритм формирования которой указан в таблице 15.1; \bar{g}_k^+ – $2N_{k-1}$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^+ = 0. \quad (15.4)$$

16. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ СТЫКОВКЕ ВИДА «ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ ГРАНИЦА» (УСЛОВИЕ ТИПА «СВОБОДНЫЙ КРАЙ»)

Пусть в граничной точке $x_{2,k}^b, k = n_b$ задаются условия типа шарнирного опирания, причем дискретизация соответствующей подопласти $\omega_k^{dc}, k = n_b$ осуществляется в рамках ДКМКЭ.

В сечении $x_2 = x_{2,k}^b, k = 1$ следует задать условия $2N_1$ уравнений вида:

где B_k^- – матрица граничных условий размера $2N_1 \times 4N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 16.1; \bar{g}_k^- – $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_k^- = 0. \quad (16.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы, Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

Таблица 16.1. Алгоритм заполнения матрицы B_k^- .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(2N_1 + 1, 2)$	$\bar{\mu}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(16.1) $i = 1$
2	$(2N_1 + 1, 4)$	$\bar{\mu}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
3	$(2N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\mu}_{k-1,1}$	
4	$(2N_1 + i, 2(i-1)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(16.1) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
5	$(2N_1 + i, 2i),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\mu}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\mu}_{k-1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
6	$(2N_1 + i, 2(i+1)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
7	$(2N_1 + i, 2(N_1 + i) - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\mu}_{k-1,i-1} + \bar{\mu}_{k-1,i})$	
8	$(3N_1, 2N_1 - 2)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(16.1) $i = N_1$
9	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
10	$(3N_1, 4N_1 - 1)$	$\bar{\mu}_{k-1,N_1-1}$	
11	$(3N_1 + 1, 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(16.2) $i = 1$
12	$(3N_1 + 1, 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
13	$(3N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\lambda}_{k-1,1} + 2\bar{\mu}_{k-1,1}$	
14	$(3N_1 + i, 2i - 3),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(16.2) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
15	$(3N_1 + i, 2i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{\lambda}_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\lambda}_{k-1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N_1 + i, 2i + 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(3N_1 + i, 2(N_1 + i)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\lambda}_{k-1,i-1} + \bar{\lambda}_{k-1,i}) + \bar{\mu}_{k-1,i-1} - \bar{\mu}_{k-1,i}$	

1	2	3	4
18	$(4N_1, 2N_1 - 3)$	$\bar{\lambda}_{k-1, N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N_1'(1)$	(16.2) $i = N_1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Акимов П.А., Сидоров В.Н., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций)*, Vol. 13, Iss. 1 2017, pp. 23-33.
- Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, Vol. 153, 2016, pp. 8-15.
- Akimov P.A., Negrozov O.A.** Solution of Multipoint Boundary Problem of Two-Dimensional Theory of Elasticity Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. // *Procedia Structural Integrity*, Vol. 6, 2017, pp. 182-189.
- Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L.** A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 325, 2017, pp. 155-174.
- Barrios T.P., Behrens E.M., González M.** Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. // *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 84, 2014, pp. 46-65.
- Chen H., Lin E., Liu Y.** A novel Volume-Compensated Particle method for 2D elasticity and plasticity analysis. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Iss. 9, 2014, pp. 1819-1833.
- Donatelli M., Dorostkar A., Mazza M., Neytcheva M., Serra-Capizzano S.** Function-based block multigrid strategy for a two-dimensional linear elasticity-type problem. // *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, Iss. 5, 2017, pp. 1015-1028.
- Genna F., Perelmuter M.** Speeding-up Finite Element analyses by replacing the linear equation solver with a Boundary Element code. Part 1: 2D linear elasticity. // *Computers & Structures*, Vol. 88, Issues 13-14, 2010, pp. 845-858.
- Karafiat A.** Convergence estimates for a plane elasticity problem solved by the Galerkin boundary integral formulation with NURBS. // *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, Iss. 2, 2017, pp. 336-349.
- Li L.X., Chen Y.L., Lu Z.C.** Generalization of the multi-scale finite element method to plane elasticity problems. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, Iss. 2, 2015, pp. 642-653.
- Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // *MATEC Web of Conferences*, Vol. 117, 2017, 00109.
- Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary

- Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Marin L., Delvare F., Cimetiere A.** Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity. // *International Journal of Solids and Structures*, Vols. 78-79, 2016, pp. 9-20.
 14. **Qu W., Chen W.** Fast multipole singular boundary method for large-scale plane elasticity problems. // *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 28, Iss. 6, 2015, pp. 626-638.
 15. **Santos H.A.F.A., Moitinho de Almeida J.P.** A family of Piola – Kirchhoff hybrid stress finite elements for two-dimensional linear elasticity. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 85, 2014, pp. 33-49.
 16. **Stevens D., Power H., Cliffe K.A.** A meshless local RBF collocation method using integral operators for linear elasticity. // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 88, 2014, pp. 246-258.
 17. **Tonon P., Carrazedo R., Sanches R.A.K.** Immersed normalized B-spline finite elements – A convergence study for 2D problems. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 114, 2016, pp. 57-67.
 18. **Wen P.H., Cao P., Korakianitis T.** Finite Block Method in elasticity. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 46, 2014, pp. 116-125.
 19. **Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang C., Li G.** An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Iss. 6, 2014, pp. 1322-1329.
 20. **Yu H.-H., Diab M.** Boundary integral equations for 2D elasticity and its application in discrete dislocation dynamics simulation in finite body: 1. General theory. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Issues 3-4, 2014, pp. 673-679.
 21. **Zheng B., Gao X., Zhang Ch.** Radial integration BEM for vibration analysis of two- and three-dimensional elasticity structures. // *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 277, 2016, pp. 111-126.
 22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583, 2014, pp. 2898-2902.

REFERENCES

1. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Negrozov O.A.** О Решении Многоточечных Краевых Задач Расчета Конструкций в Двумерной Постановке на Основе Совместного Применения Метода Конецных Элементов и Дискретно-Континуального Метода Конецных Элементов. Част' 1: Постановка и Общие Принципы Аппроксимации задач [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation and Basic Principles of Approximation]. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Mezhdunarodniy zhurnal po rashetu grazhdanskikh i promishlennikh konstruktsiy*, No. 13(1), 2017, pp. 23-33.
2. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, Vol. 153, 2016, pp. 8-15.
3. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Solution of Multipoint Boundary Problem of Two-Dimensional Theory of Elasticity Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. // *Procedia Structural Integrity*, Vol. 6, 2017, pp. 182-189.

4. **Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L.** A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 325, 2017, pp. 155-174.
5. **Barrios T.P., Behrens E.M., González M.** Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. // *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 84, 2014, pp. 46-65.
6. **Chen H., Lin E., Liu Y.** A novel Volume-Compensated Particle method for 2D elasticity and plasticity analysis. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Iss. 9, 2014, pp. 1819-1833.
7. **Donatelli M., Dorostkar A., Mazza M., Neytcheva M., Serra-Capizzano S.** Function-based block multigrid strategy for a two-dimensional linear elasticity-type problem. // *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, Iss. 5, 2017, pp. 1015-1028.
8. **Genna F., Perelmuter M.** Speeding-up Finite Element analyses by replacing the linear equation solver with a Boundary Element code. Part 1: 2D linear elasticity. // *Computers & Structures*, Vol. 88, Issues 13-14, 2010, pp. 845-858.
9. **Karafiati A.** Convergence estimates for a plane elasticity problem solved by the Galerkin boundary integral formulation with NURBS. // *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, Iss. 2, 2017, pp. 336-349.
10. **Li L.X., Chen Y.L., Lu Z.C.** Generalization of the multi-scale finite element method to plane elasticity problems. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, Iss. 2, 2015, pp. 642-653.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // *MATEC Web of Conferences*, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. *MATEC Web of Conferences*, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Marin L., Delvare F., Cimetiere A.** Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity. // *International Journal of Solids and Structures*, Vols. 78-79, 2016, pp. 9-20.
14. **Qu W., Chen W.** Fast multipole singular boundary method for large-scale plane elasticity problems. // *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, Iss. 6, 2015, pp. 626-638.
15. **Santos H.A.F.A., Moitinho de Almeida J.P.** A family of Piola – Kirchhoff hybrid stress finite elements for two-dimensional linear elasticity. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 85, 2014, pp. 33-49.
16. **Stevens D., Power H., Cliffe K.A.** A meshless local RBF collocation method using integral operators for linear elasticity. // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 88, 2014, pp. 246-258.
17. **Tonon P., Carrazedo R., Sanches R.A.K.** Immersed normalized B-spline finite elements – A convergence study for 2D problems. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 114, 2016, pp. 57-67.
18. **Wen P.H., Cao P., Korakianitis T.** Finite Block Method in elasticity. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 46, 2014, pp. 116-125.
19. **Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang C., Li G.** An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Iss. 6, 2014, pp. 1322-1329.
20. **Yu H.-H., Diab M.** Boundary integral equations for 2D elasticity and its applica-

tion in discrete dislocation dynamics simulation in finite body: 1. General theory. // *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, Issues 3-4, 2014, pp. 673-679.

21. **Zheng B., Gao X., Zhang Ch.** Radial integration BEM for vibration analysis of two- and three-dimensional elasticity structures. // *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 277, 2016, pp. 111-126.
22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583, 2014, pp. 2898-2902.

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения» Российского университета транспорта (МИИТ); профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810; тел. +7 (499) 706-88-10; e-mail: amb@stadyo.ru.

Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, заместитель главного ученого секретаря Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-81-53;

факс +7 (495) 650-27-31; email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; советник информационно-издательского отдела, Российская академия архитектуры и строительных наук; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; email: NegrozovOA@mgsu.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center "StADyO"; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StADyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Director of Scientific Research Center "StADyO"; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport (RUT – MIIT); Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University; Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (499) 706-88-10; e-mail: amb@stadyo.ru.

Taymuraz B. Kaytukov, Advisor of of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Associated Professor, Ph.D.; Deputy Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-81-53; fax: +7 (495) 650-27-31; email: kaytukov@raasn.ru, tkaytukov@gmail.com.

Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Advisor of Department of Information and Publication, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-37-46

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МОНОЛИТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.И. Бедов¹, А.С. Салов², А.И. Габитов², Д.В. Кузнецов², Э.А. Садыкова²

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, РОССИЯ

Аннотация: Рассмотрены области применения бетонов и арматуры повышенных классов по прочности в конструктивных элементах монолитного железобетонного каркаса. Предложены аналитические зависимости, критерии и граничные условия, численно описывающие взаимосвязь повышения прочности бетона и снижения расхода арматурной стали для изгибаемых и сжато-изгибаемых элементов. Разработаны расчетно-аналитические модели напряженно-деформированного состояния перекрытий монолитного железобетонного многоэтажного каркаса на основе проведенных многофакторных численных исследований для различных значений толщин перекрытий, пролетов, действующих нагрузок, классов бетона и арматуры. Выявлены расчетные параметры плит перекрытий, определяющие их несущую способность. На основе компьютерных технологий смоделировано оптимальное сечение железобетонного элемента по критерию снижения материалоемкости и рационального сочетания классов бетона и арматуры.

Ключевые слова: программные комплексы, компьютерное моделирование, железобетон, высокопрочные бетоны, высокий класс прочности, подбор оптимального сечения железобетонного элемента, рациональное сочетание классов бетона и арматуры

COMPUTER TECHNOLOGIES IN THE FORMATION OF COMPUTED MODELS OF MONOLITHIC REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

*Anatoliy I. Bedov¹, Aleksandr S. Salov², Azat I. Gabitov²,
Dmitriy V. Kuznetsov², Elza A. Sadykova²*

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, RUSSIA

Abstract: The areas of application of concrete and reinforcement of higher grades for strength in structural elements of a monolithic reinforced concrete frame are considered. Analytic dependencies, criteria and boundary conditions are proposed that numerically describe the relationship between increasing the strength of concrete and reducing the consumption of reinforcing steel for bent and compressed-bent elements. Calculation-analytical models of the deformation state of overlaps of a monolithic reinforced concrete multi-storey frame have been developed on the basis of multifactor numerical studies carried out for various values of the thicknesses of ceilings, spans, operating loads, classes of concrete and reinforcement. Calculated parameters of slabs are determined, which determine their bearing capacity. On the basis of computer technology, the optimum section of a reinforced concrete element is modeled according to the criterion of reducing the material consumption and rational combination of classes of concrete and reinforcement.

Keywords: software complexes, computer modeling, reinforced concrete, high-strength concretes, high strength class, selection of the optimal section of the reinforced concrete element, rational combination of concrete classes and reinforcement

Развитие вычислительной техники в последние годы привело к возможности широкого использования численных методов определения напряжений и деформаций в элементах строительных конструкций. Среди таких методов наибольшее практическое значение имеет метод конечных элементов (МКЭ) [1]. В настоящее время в инженерной практике используется достаточно много комплексов, реализующих МКЭ.

В случае применения программных комплексов результаты расчетов сильно зависят от корректности применяемых расчетных моделей, в процессе реализации которых возникают многогранные вопросы компьютерного моделирования.

На сегодняшний день развитие вычислительной техники значительно упростило расчет сложных статически неопределимых систем. Это снизило материалоемкость и повлекло за собой увеличение объемов строительства зданий и сооружений с применением монолитных безбалочных каркасов [2].

Для каркасно-монолитных зданий применение бетонов повышенных и высоких классов прочности требует оценки их технико-экономической эффективности. Такая оценка применительно к железобетонным конструкциям целесообразна с учетом характера их нагружения и напряженно-деформированного состояния.

Существующий подход к определению эффективности повышения прочности бетона по критерию снижения расхода арматурной стали для сжатых и изгибаемых железобетонных элементов в дискретной форме представлен в отечественной и зарубежной литературе суммой примеров и не позволяет получить обобщающие представления о связи прочности бетона и расхода арматуры [3,4]. Несущая способность изгибаемого (балочного, плитного) элемента от действия изгибающего момента рассчитывается по формуле:

$$M_{ult} = R_{s0} A_{s0} \left(h_0 - \frac{R_{s0} A_{s0}}{2R_{b0}b} \right), \quad (1)$$

где R_{s0} , R_{b0} – расчётные сопротивления арматуры и бетона для исходного сечения; h_0 , b – рабочая высота и ширина прямоугольного сечения элемента; A_{s0} – площадь рабочей арматуры.

Производя подстановку

$$A_s = \mu_0 b h_0$$

в (1) (здесь μ_0 – коэффициент рабочего армирования для исходного сечения), получаем:

$$M_{ult} = R_{s0} \mu_0 b h_0 \left(h_0 - \frac{R_{s0} \mu_0 b h_0}{2R_{b0}b} \right). \quad (2)$$

Несущая способность вариантного сечения, отличающегося от исходного рабочей высотой сечения (h_{0i}), площадью рабочей арматуры (A_{si}) (коэффициентом рабочего армирования μ_i), расчетным сопротивлением бетона на сжатие для вариантного класса (R_{bi}) и арматуры на растяжение (R_{si}), при неизменности ширины прямоугольного сечения b , будет определяться зависимостью:

$$M_{ult} = R_{s0} \mu_0 b h_0 \left(h_0 - \frac{R_{s0} \mu_0 b h_0}{2R_{b0}b} \right)$$

$$M_{ult} = R_{si} \mu_i b h_{0i} \left(h_{0i} - \frac{R_{si} \mu_i b h_{0i}}{2R_{bi}b} \right). \quad (3)$$

Изменение прочностных характеристик и относительных расходов материалов при сопоставлении исходного и вариантного сечений можно учесть через коэффициенты изменения соответствующих параметров: a_s и a_b – расчетных сопротивлений для арматуры и бетона соответственно

$$a_s = \frac{R_{si}}{R_{s0}}, \quad a_b = \frac{R_{bi}}{R_{b0}}; \quad (4)$$

η_s и η_b – материалоемкости (расхода материала) для арматуры и бетона соответственно

$$\eta_s = \frac{\mu_{si}}{\mu_{s0}}, \quad \eta_b = \frac{h_{0i}}{h_0}. \quad (5)$$

Условие равнопрочности при этом получит вид:

$$\begin{aligned} R_{s0}\mu_0bh_0\left(h_0 - \frac{R_{s0}\mu_0h_0}{2R_{b0}}\right) &= \\ &= (R_{s0}a_s)(\mu_0\eta_s)b(h_0\eta_b)(h_0\eta_b - \\ &- \frac{(R_{s0}a_s)(\mu_0\eta_s)(h_0\eta_b)}{2R_{b0}a_b}) = \\ &= a_s\eta_s\eta_bR_{s0}\mu_0bh_0\left(\eta_bh_0 - \frac{a_s\eta_s\eta_bR_{s0}\mu_0h_0}{2R_{b0}a_b}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем параметр k_0 :

$$k_0 = \frac{R_{s0}}{2R_{b0}}. \quad (7)$$

Подставляя k_0 в (6), получаем:

$$1 - \mu_0k_0 = a_s\eta_s\eta_b\left(\eta_b - \frac{a_s\eta_s\eta_b\mu_0k_0}{a_b}\right). \quad (8)$$

Тогда взаимосвязь коэффициентов, характеризующих эффективность вариантного сечения с измененными параметрами - классом прочности бетона, расходом бетона, коэффициентом рабочего армирования и расчетным сопротивлением арматуры на растяжение, примет вид:

$$a_b = \frac{a_s^2\eta_s^2\eta_b^2\mu_0k_0}{a_s\eta_s\eta_b^2 - 1 + \mu_0k_0}. \quad (9)$$

Полученная зависимость (9) носит общий характер [5,6], представлена в безразмерных параметрах (таблица 1) и может быть использована для решения следующих задач:

1. снижение расхода арматурной стали за счет повышения класса прочности бетона на сжатие при неизменной прочности арматуры и неизменном расходе бетона ($a_s=1, \eta_b=1$);
2. снижение расхода арматурной стали за счет увеличения высоты рабочего сечения элемента, т.е. повышения удельного расхода бетона при неизменной прочности бетона и арматуры ($a_b=1, a_s=1$);
3. снижение удельного расхода бетона при повышении класса прочности бетона на сжатие при одинаковой прочности и неизменном расходе арматуры ($a_s=1, \eta_s=1$);
4. снижение расхода арматурной стали путем замены исходного класса стали (например А400) на повышенной прочности класса А500С при одинаковой прочности и неизменном расходе бетона ($a_b=1, \eta_b=1$).

Выполнено компьютерное моделирование оптимального вариантного сечения железобетонного элемента по критерию снижения материалоемкости и рационального сочетания классов бетона и арматуры [7,8]. Наложены ограничения по второй группе предельных состояний.

Исходными параметрами для выбора оптимального решения при использовании программы являются класс прочности бетона и арматуры, процент армирования и решение требуемой задачи по изменению класса бетона или арматуры. Программа позволяет рассчитать на выходе оптимальный расход арматурной стали вариантного сечения при применении высокопрочных бетонов классов до В90 [9,10,11]. Расчет ведется при одной и той же несущей способности изгибаемого элемента.

Программа позволяет выполнить вариантную количественную оценку расхода арматурной стали для изгибаемых железобетонных элементов без преднапряжения при изменении прочности бетона на сжатие и класса арматурной стали (рис. 1).

Таблица 1. Результаты решения основных задач по оценке эффективности применения бетонов и арматурных сталей повышенных и высоких классов прочности в изгибаемых (плитных) элементах

№	Содержание задачи	Относительные параметры				Формулы взаимосвязи параметров, характеризующих эффект	
		a_s	a_b	η_s	η_b		
1	Эффективность повышения прочности бетона по критерию снижения расхода арматурной стали при неизменном расходе бетона	1	a_b	η_s	1	$a_b = \frac{\eta_s^2 \mu_0 k_0}{\eta_s + \mu_0 k_0 - 1}$	$\eta_s = \frac{a_b \pm \sqrt{a_b^2 - 4\mu_0 k_0 + 4\mu_0^2 k_0^2 a_b}}{2\mu_0 k_0}$
2	Оптимизация соотношения удельных расходов бетона и арматуры в плитных элементах	1	1	η_s	η_b	$\eta_b = \sqrt{\frac{\mu_0 k_0 - 1}{\eta_s^2 \mu_0 k_0 - \eta_s}}$	$\eta_s = \frac{\eta_b \pm \sqrt{\eta_b^2 - 4\mu_0 k_0 + 4\mu_0^2 k_0^2}}{2\mu_0 k_0 \eta_b}$
3	Эффективность повышения прочности бетона по критерию снижения расхода бетона	1	a_b	1	η_b	$a_b = \frac{\eta_b^2 \mu_0 k_0}{\eta_b^2 - 1 + \mu_0 k_0}$	$\eta_b = \sqrt{\frac{a_b \mu_0 k_0 - a_b}{\mu_0 k_0 - a_b}}$
4	Снижение расхода арматурной стали путем замены исходного класса стали по прочности на повышенный класс при одинаковой прочности и неизменном расходе бетона	a_s	1	η_s	1	$\eta_s = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu_0 k_0 + 4\mu_0^2 k_0^2}}{2\mu_0 k_0 a_s}$	
5	Эффективность повышения прочности бетона и арматурной стали по критерию снижения расхода арматурной стали при неизменном расходе бетона	a_s	a_b	η_s	1	$\eta_s = \frac{a_b \pm \sqrt{a_b^2 - 4\mu_0 k_0 a_b + 4\mu_0^2 k_0^2 a_b}}{2\mu_0 k_0 a_s}$	

Область применения программы – вариантного сечения. Расчет ведется при проектировании монолитных балочных и одной и той же несущей способности безбалочных перекрытий. изгибаемого элемента.

Программа позволяет рассчитать на выходе оптимальный расход арматурной стали

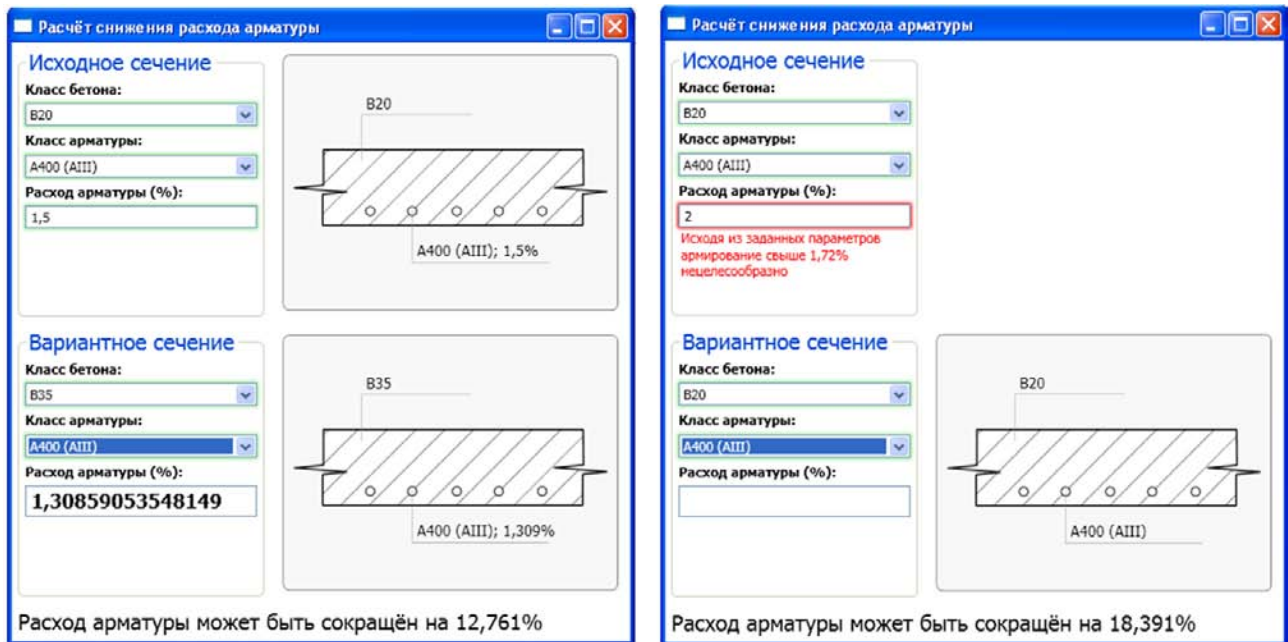


Рисунок 1. Графический интерфейс пользователя программы «Расчет эффективного расхода арматурной стали для вариантного сечения изгибаемого железобетонного элемента».

В последней зарегистрированной программе расчет осуществляется по всем четырем параметрам сечения: рабочая высота сечения (h_{oi}), площадь рабочей арматуры (A_{si}) (коэффициент рабочего армирования (μ_i)), расчетные сопротивления бетона на сжатие для вариантного класса (R_{bi}) и арматуры на растяжение (R_{si}).

Пользователь должен выбрать параметр вариантного сечения, который он хочет изменить (класс бетона, класс арматуры, расход бетона или арматуры). Алгоритм программы и графический интерфейс представлены на рис. 2.

Предлагаемый аппарат позволяет оперативно выполнить количественную оценку эффективности и выявить рациональные области применения бетонов повышенной прочности в изгибаемых железобетонных элементах для технико-экономического обоснования на стадии проектирования, что особенно важно при проектировании каркасно-монолитных объектов [12].

На основе использования программных комплексов SCAD-Office и ЛИРА-САПР были определены основные усилия,

произведены расчеты несущей способности элементов каркаса и определены характеристики армирования.

Данные анализа по снижению расхода рабочей арматуры А400, а также по арматуре А500С указывают на то, что использование бетонов особо высоких классов прочности дает максимальный эффект для изгибаемых (плитных) элементов около 25%. Из этого анализа также следует, что предельным уровнем повышения прочности бетона при исходном классе В20-В25 следует считать класс прочности В40-В50 [13,14]. Применение бетонов классов прочности выше В50-В60 в изгибаемых (плитных) элементах с целью снижения расхода арматурной стали неэффективно, что подтверждается данными рисунков 3.

Расчеты по второй группе предельных состояний (деформации и трещиностойкость) выявили в окончательной форме рациональные области применения бетонов повышенных классов по прочности на сжатие и арматуры А500С в зависимости от толщины изгибаемых элементов и расхода (%) рабочей арматуры

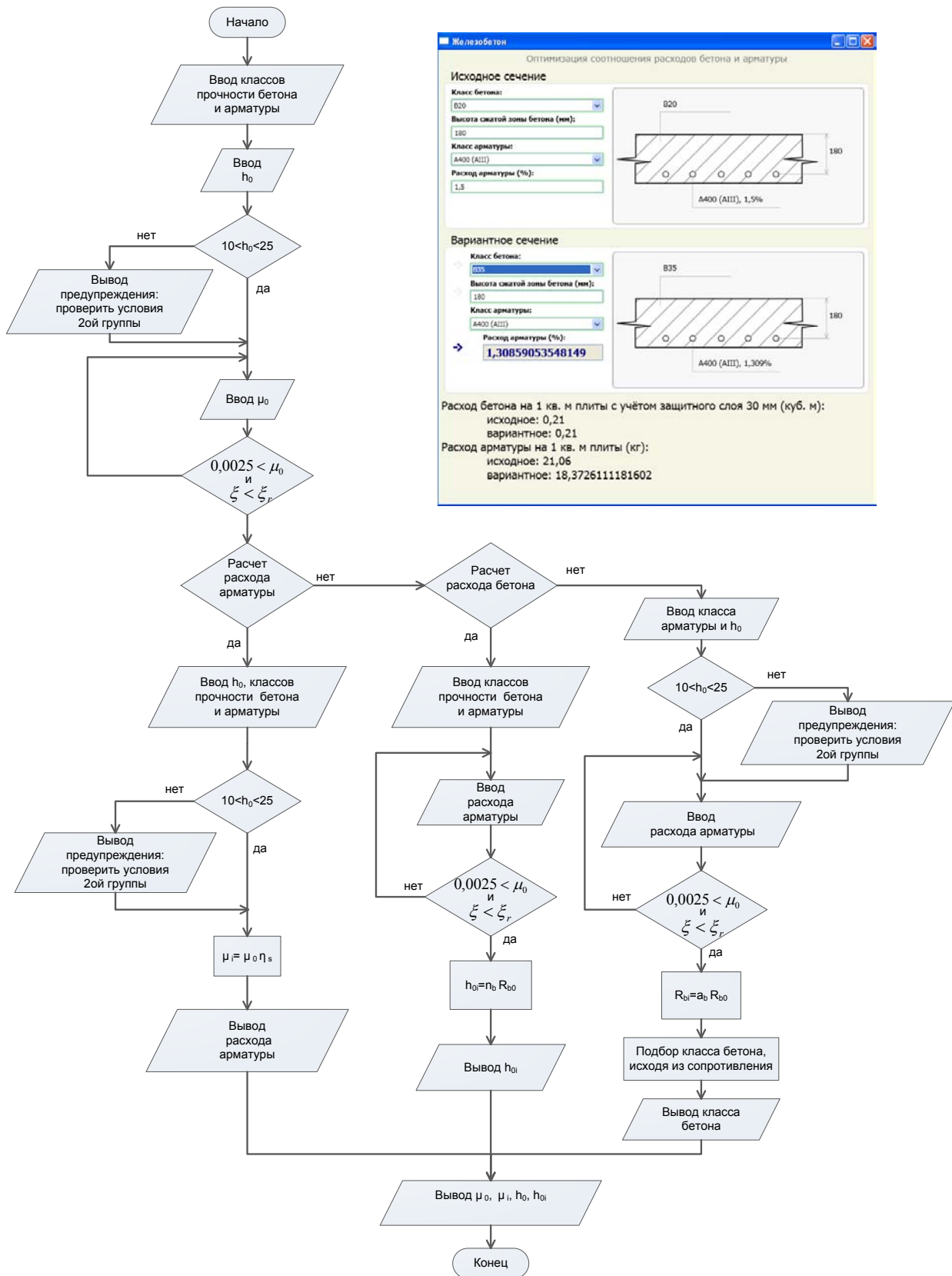


Рисунок 2. Блок-схема и графический интерфейс пользователя разработанной программы для ЭВМ.

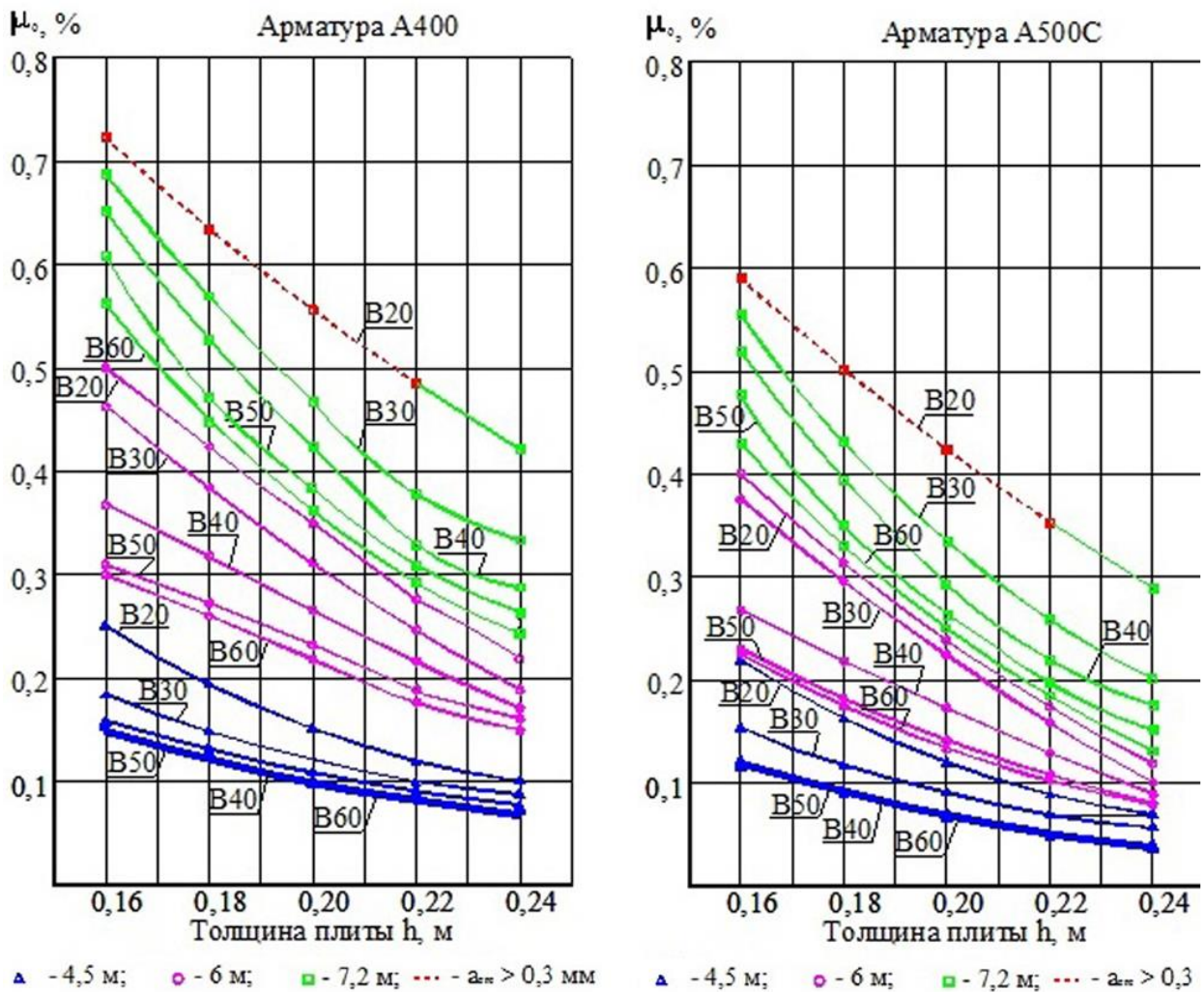


Рисунок 3. Зависимости процента армирования от толщины плиты, класса прочности бетона и сетки колонн каркаса.

[14]. Результаты этих расчетов представлены на рис. 3.

В ходе анализа проведенных многофакторных исследований и предложенных расчетных моделей напряженно-деформированного состояния монолитных железобетонных элементов удалось существенно уточнить расчетные параметры, определяющие несущую способность этих элементов. На основе проведенных исследований с использованием экономико-математических методов разработаны и зарегистрированы в Роспатенте РФ автоматизированные программные комплексы, позволяющие

оперативно решать задачи оптимизации расчета и конструирования монолитного железобетонного каркаса.

Таким образом, можно сделать вывод, что для снижения расхода арматурной стали при пролетах до 6 м оптимальным является применение бетонов классов по прочности на сжатие - до B40, а при пролетах свыше 6 м – до B50. Результаты исследований применены при проектировании и строительстве ряда каркасно-монолитных зданий повышенной этажности в Республике Башкортостан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
2. **Замалиев Ф.С.** Экспериментальные исследования пространственной работы сталежелезобетонных конструкций. // Вестник МГСУ, 2012, №12, с. 53-60.
3. **Бедов А.И., Бабков В.В., Габитов А.И., Сахибгареев Р.Р., Салов А.С.** Монолитное строительство в Республике Башкортостан: от теории к практике. // - Вестник МГСУ, 2013, №10, с. 110-121.
4. **Тамразян А.Г.** Бетон и железобетон: проблемы и перспективы. // Промышленное и гражданское строительство, 2014, №7, с. 51-54.
5. **Браун В.** Расход арматуры в железобетонных элементах. – М.: Стройиздат, 1993. – 144 с.
6. **Бедов А.И., Салов А.С., Бабков В.В., Габитов А.И., Недосеко И.В.** Оптимальное проектирование железобетонных изгибаемых элементов в составе монолитного каркаса при варьировании классов прочности бетона и арматуры // В сборнике: Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия под редакцией А.Г. Тамразяна, Д.Г. Копаницы. 2016, с. 503-507.
7. **Салов А.С.** Расчет оптимального вариантного сечения и вариантного армирования изгибаемого железобетонного элемента по критерию снижения материалоемкости и рационального сочетания классов бетона и арматуры: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011613598; правообладатель ГОУ ВПО УГНТУ; заявл. 21.03.2011; зарег. 05.05.2011.
8. **Бедов А.И., Гайсин А.М., Габитов А.И.** Компьютерное моделирование работы под нагрузкой высокопустотных керамических стеновых изделий и кладок на их основе. // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности, 2017, №3(369), с. 215-220.
9. **Shah S.P., Ahmad S.H.** High performance concrete: Properties and applications. // McGraw-Hill, Inc. 1994, 403 pages.
10. **Калашников В.И.** Расчет составов высокопрочных самоуплотняющихся бетонов. // Строительные материалы, 2008, №10, с. 4-6.
11. **Батраков В.Г.** Модификаторы бетона: новые возможности и перспективы. // Строительные материалы, 2006, №10, с. 4-7.
12. **Кабанцев О.В.** Расчет конструкций многоэтажных и высотных железобетонных зданий с учетом изменения основных параметров расчетной модели в режимах возведения и эксплуатации. // Бетон и железобетон - взгляд в будущее. Научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону: в 7 томах. М: Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 2014, с. 282-292.
13. **Сеськин И.Е., Баранов А.С.** Влияние суперпластификатора С-3 на формирование прочности пресованного бетона. // Строительные материалы, 2013, №1, с. 32-33.
14. **Панибратов Ю.П., Секо Е.В., Балберов А.А.** Экономическая оценка результатов энергосберегающих мероприятий в строительстве. // Academia. Архитектура и строительство, №2, 2012, с. 123-127.

REFERENCES

1. **Perel'muter A.V., Slivker V.I.** Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh

- analiza [Design models of structures and the possibility of their analysis]. Moscow, SKAD SOFT, 2011, 736 pages.
2. **Zamaliy F.S.** Eksperimental'nye issledovaniya prostranstvennoy raboty stalezhelezobetonnykh konstruksiy [Experimental studies of the spatial work of composite structures]. // Vestnik MGSU, 2012, Number 12, pp. 53-60.
 3. **Bedov A.I., Babkov V.V., Gabitov A.I., Sakhibgareev R.R., Salov A.S.** Monolitnoe stroitel'stvo v Respublike Bashkortostan: ot teorii k praktike [Monolithic construction in the Republic of Bashkortostan: from theory to practice]. // Vestnik MGSU, 2013, Number 10, pp. 110-121.
 4. **Tamrazyan A.G.** Beton i zhelezobeton: problemy i perspektivy [Concrete and reinforced concrete: problems and prospects]. // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo, 2014, Number 7, pp. 51-54.
 5. **Braun V.** Raskhod armatury v zhelezobetonnykh elementakh [Expenditure of reinforcement in reinforced concrete elements]. Moscow, Stroyizdat, 1993, 144 pages.
 6. **Bedov A.I., Salov A.S., Babkov V.V., Gabitov A.I., Nedoseko I.V.** Optimal'noe proektirovanie zhelezobetonnykh izgibaemykh elementov v sostave monolitnogo karkasa pri var'irovani klassov prochnosti betona i armatury [Optimum design of reinforced concrete bending elements in a monolithic frame structure with varying strength classes of concrete and reinforcement]. // V sbornike: Sovremennye problemy rascheta zhelezobetonnykh konstruksiy, zdaniy i sooruzheniy na avariynye vozdeystviya pod redaktsiyey A.G. Tamrazyana, D.G. Kopanitsy, 2016, pp. 503-507.
 7. **Salov A.S.** Raschet optimal'nogo variantnogo secheniya i variantnogo armirovaniya izgibaemogo zhelezobetonnogo elementa po kriteriyu snizheniya materialoemkosti i ratsional'nogo sochetaniya klassov betona i armatury [Calculation of the optimal variant section and variant reinforcement of the bent ferro-concrete element by the criterion of decreasing the material consumption and rational combination of classes of concrete and reinforcement]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2011613598; pravoobladatel' GOU VPO UGNTU; zayavl. 21.03.2011; zareg. 05.05.2011.
 8. **Bedov A.I., Gaysin A.M., Gabitov A.I.** Komp'yuternoe modelirovanie raboty pod nagruzkoy vysokopustotnykh keramicheskikh stenovykh izdeliy i kladok na ikh osnove [Computer modeling of work under load of high-vacuum ceramic wall articles and clutches on their basis]. // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti, 2017, Number 3(369), pp. 215-220.
 9. **Shah S.P., Ahmad S.H.** High performance concrete: Properties and applications // McGraw-Hill, Inc. 1994. 403 p.
 10. **Kalashnikov V.I.** Raschet sostavov vysokoprochnykh samouplotnyayushchikhsya betonov [Calculation of compositions of high-strength self-compacting concretes]. // Stroitel'nye materialy, 2008, Number 10, pp. 4-6.
 11. **Batrakov V.G.** Modifikatory betona: novye vozmozhnosti i perspektivy [Modifiers of concrete: new opportunities and prospects]. // Stroitel'nye materialy, 2006, Number 10, pp. 4-7.
 12. **Kabantsev O.V.** Raschet konstruksiy mnogoetazhnykh i vysotnykh zhelezobetonnykh zdaniy s uchetom izmeneniya osnovnykh parametrov raschetnoy modeli v rezhimakh vozvedeniya i ekspluatatsii [Structural analysis of multi-storey and high-rise concrete buildings taking into account changes in the basic parameters of the design model in the modes of erection and operation]. // Beton i zhelezobeton - vzglyad v budushchee. Nauchnye trudy III Vserossiyskoy (II Mezhdunarodnoy) konferentsii po betonu i zhelezobetonu: v 7 tomakh. M: Natsional'nyy issledovatel'skiy

Moskovskiy gosudarstvennyy stroitel'nyy universitet, 2014, pp. 282-292.

13. **Ses'kin I.E., Baranov A.S.** Vliyaniye superplastifikatora S-3 na formirovaniye prochnosti pressovannogo betona [Influence of the superplasticizer S-3 on the formation of the strength of pressed concrete]. // *Stroitel'nye materialy*, 2013, Number 1, pp. 32-33.
14. **Panibratov Yu.P., Seko E.V., Balberov A.A.** Ekonomicheskaya otsenka rezul'tatov energosberegayushchikh meropriyatiy v stroitel'stve [Economic evaluation of the results of energy-saving measures in construction]. // *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo*, Number 2, 2012, pp. 123-127.

Бедов Анатолий Иванович, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(495)781-99-88; e-mail: gbk@mgsu.ru.

Салов Александр Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автомобильные дороги и технология строительного производства»; Уфимский государственный нефтяной технический университет; 450062, Приволжский федеральный округ, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1; тел. +7(347) 243-19-77, тел/факс +7(347) 243-14-19; e-mail: salov@list.ru.

Габитов Азат Исмагилович, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций; Уфимский государственный нефтяной технический университет; 450062, Приволжский федеральный округ, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1; тел. +7(347) 243-19-77, тел/факс +7(347) 243-14-19; e-mail: azat7@ufanet.ru.

Кузнецов Дмитрий Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций; Уфимский государственный нефтяной технический университет; 450062, Приволжский федеральный округ, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1; тел. +7(347) 243-19-77, тел/факс +7(347) 243-14-19; e-mail: alex.03@mail.ru.

Садькова Эльза Альбертовна, инженер УНИР; Уфимский государственный нефтяной технический

университет; 450062, Приволжский федеральный округ, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1; тел. +7 (347) 243-19-77, тел/факс (347) 243-14-19; e-mail: sadykovaelza@gmail.com.

Anatoliy I. Bedov, Professor, Ph.D., Professor of Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone +7(495)781-99-88; e-mail: gbk@mgsu.ru.

Aleksandr S. Salov, Ph.D., Associate Professor of Department of Roads and Technology of Construction Production, Ufa State Petroleum Technological University; 1, Ulitsa Kosmonavtov, Ufa, 450062, Russia; phone +7 (347) 243-19-77, phone/fax +7(347) 243-14-19; e-mail: salov@list.ru.

Azat I. Gabitov, Professor, Dr.Sc., Professor of Department of Building Structures, Ufa State Petroleum Technological University; 1, Ulitsa Kosmonavtov, Ufa, 450062, Russia; phone +7 (347) 243-19-77, phone/fax +7(347) 243-14-19; e-mail: azat7@ufanet.ru.

Dmitriy V. Kuznetsov, Ph.D., Associate Professor of Department of Building Structures, Ufa State Petroleum Technological University; 1, Ulitsa Kosmonavtov, Ufa, 450062, Russia; phone +7 (347) 243-19-77, phone/fax +7(347) 243-14-19; e-mail: alex.03@mail.ru.

Elza A. Sadykova, Engineer, UNIR, Ufa State Petroleum Technological University; 1, Ulitsa Kosmonavtov, Ufa, 450062, Russia; phone +7 (347) 243-19-77, phone/fax +7(347) 243-14-19; e-mail: sadykovaelza@gmail.com.

ITERATIVE AGGREGATION METHOD FOR SOLVING PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS PROBLEMS

Vitaly E. Bulgakov

SemanticPro, Boston, USA

Abstract: Motivated by the previously developed multilevel aggregation method for solving structural analysis problems a novel two-level aggregation approach for efficient iterative solution of Principal Component Analysis (PCA) problems is proposed. The course aggregation model of the original covariance matrix is used in the iterative solution of the eigenvalue problem by a power iterations method. The method is tested on several data sets consisting of large number of text documents.

Keywords: principal component analysis, clustering method, power iteration method, aggregation method, eigenvalue problem

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО АГРЕГИРОВАНИЯ В МЕТОДЕ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

В.Е. Булгаков

SemanticPro, г. Бостон, США

Аннотация. Предлагаемый метод мотивирован разработанным ранее итерационным подходом многоуровневого агрегирования для решения задач расчёта строительных конструкций. При решении задач методом главных компонент применяется метод степенных итераций на основе агрегированной модели исходной ковариантной матрицы. Метод проверен при тестировании ряда массивов данных, каждый из которых включает большое количество текстовых документов.

Ключевые слова: метод главных компонент, кластерный анализ, итерационный степенной метод, метод агрегирования, проблема собственных значений

1. INTRODUCTION

This work was envisioned as application of the *multilevel aggregation method* [1] developed by the author back in 90s to PCA problems. Multilevel aggregation method was an extension of well-known *multigrid* methods [2] from boundary value problems to general structural analysis problems which brought it to the class of *algebraic multigrid* methods. The idea of the aggregation method was to use some naturally constructed course model of the original finite element approximation of a structure which provides a fast convergence for iterative methods for solving large algebraic systems of equations. One of applications of this method was an iterative solution of large eigenvalue

problems arising in structural natural vibration and buckling analyses [3]. In these problems a sought set of lowest vibration modes can be thought of as *principal components* of structure behavior. An obvious similarity with PCA was a turning point to start looking for a proper way to create an aggregation model for data matrix approximation and use it for efficient solution of PCA problems.

In this study PCA [4] is applied to and the method is tested on text analysis problems. A tested data set consists of documents each of which produces an N-dimensional vector stored as a column of a data matrix which values are term frequencies. Our raw data comes in the form of text files from data sets such as medical abstracts and news groups. The purpose of PCA

is to iteratively compute a set of highest eigenvalues and corresponding eigenvectors of the covariance matrix. Covariance matrix is never formed explicitly. The main operation is multiplication of large sparse data matrix or its transpose by a vector. The course aggregation model of the original covariance matrix is used in the iterative solution of the eigenvalue problem. Original covariance matrix and its approximation of small size assumes similarity of leading eigenvalues and eigenvectors. This fact allows fast convergence of subspace iterations at minimal additional computational cost. For numerical experiments we use R language which is rich of linear algebra, statistical and graphical packages.

2. PCA PROBLEM FORMULATION

PCA in multivariate statistics is widely used as an effective way to perform unsupervised dimension reduction. The essence of this method lies in using Singular Value Decomposition (SVD) which provides the best low rank approximation to original data according to Eckart-Young theorem [5]. Let n data points in m dimensional space be contained in the data matrix which is assumed already centered around the origin for computational stability

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = X \tag{1}$$

Then covariance matrix is

$$A = XX^T \tag{2}$$

Let (λ_k, φ_k) be an eigenpair of A , where eigenvectors φ_k define principal directions.

3. AGGREGATION MODEL

In order to create an aggregation model we divide the entire set of data vectors x_i into n_0 clusters using some similarity criteria where

$n_0 \ll n$. We will explain later how we do clustering. We assume that all vectors within the cluster are similar and a single representative of a cluster is an average of all vectors x_i where $i \in cluster_k$ or for $cluster_k$ we have

$$x_k^0 = \frac{1}{dim_k} * \sum_{i \in cluster_k} x_i \tag{3}$$

Transformation of matrix X to X_0 is done using matrix R which we call *aggregator*

$$X_0 = XR \tag{4}$$

where $R[i, k] = 1$ if $i \in cluster_k$ then $\frac{1}{dim_k}$ else 0.

X_0 is of size (m, n_0) .

Approximation A_0 of covariance matrix A is

$$A_0 = X_0X_0^T = XRR^TX^T \tag{5}$$

Formally matrix A_0 is of the same size as A but has a much lower rank. We do not need to use form (5) for computations. For matrix vector multiplication we rather use sparse matrix X_0 which according to (3) is constructed by simple averaging of vectors inside a cluster and

$$A_0v = X_0X_0^T v \tag{6}$$

Therefore A_0v requires $O(mn_0)$ operations which is much lower than $O(mn)$ operations required for Av . We also expect and this is confirmed by numerical experiments that convergence of iterative methods for solving partial eigenvalue problem for A_0 is faster than that for A .

There are quite a few clustering techniques known as computationally efficient. Besides since we need clustering as an auxiliary procedure we do not need highly accurate clustering results. In this study we use K-means clustering algorithm [6] which became very popular in data mining, unsupervised classification, etc. and which converges quickly to a local optimum.

Our experience says that the aggregated problem with a small number of clusters provides a good resemblance of the original and approximated covariance matrices in terms of first (highest) eigenvalues which is important for the iterative method described below.

In Figure 1 this resemblance is demonstrated where we show distribution of first 10 eigenvalues of both matrices where the data matrix X was obtained by processing 2014 documents of "Cardiovascular Diseases Abstracts" corpus. Matrix X₀ was obtained by K-means method with 10 clusters.

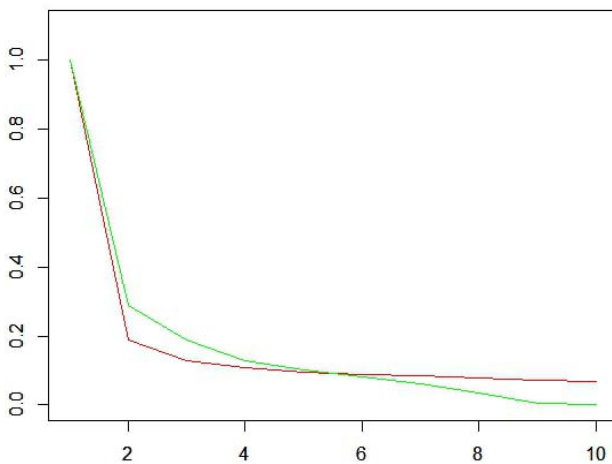


Figure 1. Distribution of 10 first eigenvalues of the original and approximate covariance matrices for 16058 by 2014 data matrix and 10 clusters.

4. ITERATIVE METHOD

We use power iteration method [7] for solving auxiliary aggregated eigenvalue problem and a modified power method for solving the original eigenvalue problem. This method is also known as subspace iteration when used to simultaneously iterate a set of eigenvectors. One iteration of the power algorithm consists of the following steps:

$$\text{for } i = 1 \text{ to } l: \quad \tilde{u}_i^{k+1} = \frac{1}{\|Au_i^k\|} * Au_i^k$$

$$u_1^{k+1}, \dots, u_l^{k+1} = \text{orthonorm}(\tilde{u}_1^{k+1}, \dots, \tilde{u}_l^{k+1})$$

with approximation of eigenvalues (7)

$$\lambda_i^k = \frac{(Au_i^k, u_i^k)}{(u_i^k, u_i^k)}$$

which starts with a set of l initial approximations of first eigenvectors

$$(u^0_1, u^0_2, \dots, u^0_l) = U^0.$$

The key property of the power method is that if approximation u^0_i is spanned by matrix A eigenvectors subspace, then after k multiplications of matrix A by this vector the linear combination of eigenvectors will be weighted by λ_i to the power k which gives boost to terms corresponding to highest eigenvalues:

$$A^k u = \sum_k c_i \lambda_i^k \varphi_i \quad (8)$$

In the method proposed for the first l principal directions of PCA we will need first k orthonormal eigenvectors of A_0 q_1, q_2, \dots, q_k where $k \geq l$. These vectors can be obtained by algorithms (7). We will also need matrix P_i

$$P_i = q_i q_i^T \quad (9)$$

Since

$$q_i^T q_j = \delta_{ij}$$

and

$$P_i P_i = P_i,$$

it is a projector to the subspace of i -th eigenvector of A_0 . We will modify method (7) using this projector in the following manner:

$$\text{for } i = 1 \text{ to } l: \quad \tilde{u}_i^{k+1} = \frac{1}{\|Bu_i^k\|} * Bu_i^k \quad \text{where}$$

$$Bu_i^k = Au_i^k + \alpha_i * P_i A P_i u_i^k \quad \text{and}$$

$$\alpha_i \Rightarrow \min \|A\tilde{u}_i^{k+1} - \lambda_i^k \tilde{u}_i^{k+1}\| \quad (10)$$

$u_1^{k+1}, \dots, u_i^{k+1} = \text{orthonorm}(\tilde{u}_1^{k+1}, \dots, \tilde{u}_i^{k+1})$
with approximation of eigenvalues

$$\lambda_i^k = \frac{(Au_i^k, u_i^k)}{(u_i^k, u_i^k)}$$

This approach can be thought of as "help" to the power iteration method to converge on the subspace of eigenvectors of the aggregated problem. The intuition for that is similarity of first eigenvectors and eigenvalues of the original and aggregated problem if clustering is done properly. Let

$$u = \sum c_i \varphi_i$$

where φ_i are eigenvectors of the original covariance matrix A and P_k be a projector on subspace of φ_k . Then

$$Au + \alpha P_k AP_k u = \sum_{i \neq k} c_i \lambda_i^k \varphi_i + c_k \lambda_k (1 + \alpha) \varphi_k \quad (11)$$

If α is chosen big then the second term of this expression dominates over the first term thus providing convergence for φ_k in one iteration step α can be derived from the condition stated in (10):

$$\Phi(\tilde{u}_i^{k+1}) = \|A\tilde{u}_i^{k+1} - \lambda_i^k \tilde{u}_i^{k+1}\|$$

$$\alpha \Rightarrow \min \Phi \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\alpha} = 0 \quad (12)$$

This equation leads to the quadratic equation for α . Omitting indexes and skipping details we arrive at the following expression for α

$$\alpha = -\frac{(A^2u, AFu) - 2\lambda(A^2u, Fu) + \lambda^2(Au, Fu)}{(Au, AFu) - 2\lambda(Au, Fu) + \lambda^2(Fu, Fu)} \quad (13)$$

where $F = PAP$.

We note that as you can see from (12) α is chosen from the previous step to simplify computations. This can also be justified by the fact that eigenvalues converge faster than eigenvectors. Detailed algorithm discussion is out of scope of this paper. We just mention here that all operations with matrix A are reduced to the matrix vector multiplications of the sparse data matrix X or its transpose X^T .

5. NUMERICAL EXPERIMENTS

For numerical experiments we used two data sets. The first one is "Cardiovascular Diseases Abstracts" which is a set where each abstract is an individual document. The data matrix X size is 16058 by 2014 where the first value is the total number of terms and the second one is the number of documents. We searched for 10 first eigenvalues of the covariance matrix

$$A = XX^T$$

and used 10 clusters for constructing auxiliary aggregation problem

$$A_0 = X_0X_0^T.$$

So the size of this problem is more than 201 times lower than that for the original problem. The problem is solved using algorithm (10). Figure 2 shows changes of parameter α for the first three eigenvectors. As expected the biggest contribution of projectors (9) is observed in first iterations to suppress errors caused by initial eigenvector guesses. After some number of iteration contribution of projectors is getting smaller while eigenvectors are getting more accurate.

We measure convergence of eigenvalues through

$$Error_1 = \frac{\|\Lambda^{k+1} - \Lambda^k\|_F}{\|\Lambda^k\|_F}$$

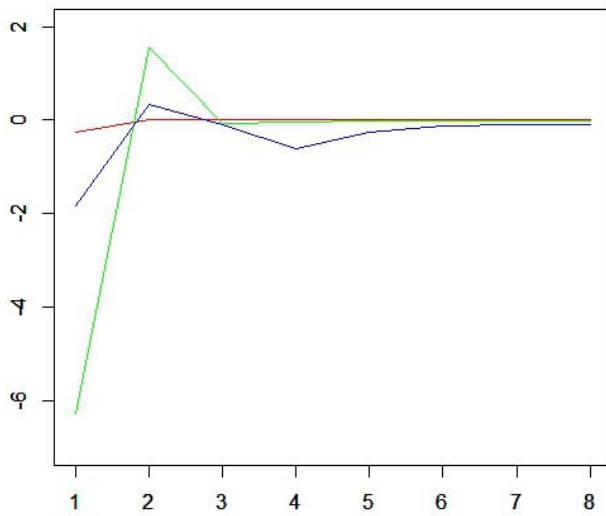


Figure 2. α changes with iteration number. α_1 (for eigenvector 1) - red, α_2 (for eigenvector 2) - green, α_3 (for eigenvector 3) - blue.

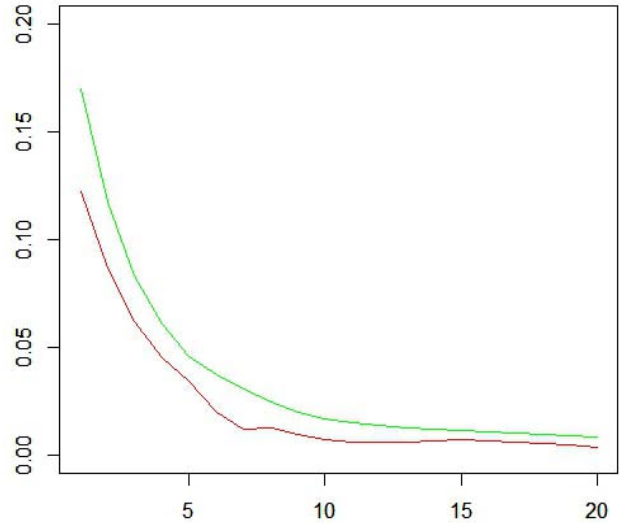


Figure 3. Eigenvalues and Eigenvectors convergence for "Cardiovascular Diseases Abstracts" data set. $Error_1$ - red, $Error_2$ - green.

and convergence of eigenvectors by the residual matrix through

$$Error_2 = \|AU^k - U^k \Lambda^k\|_F$$

where $\| \cdot \|_F$ is a matrix Frobenius norm, U^k consists of orthonormal vectors

$$u_1^k, \dots, u_l^k$$

which are approximations of the eigenvectors and Λ^k is a diagonal matrix of approximations of eigenvalues. Errors graph is demonstrated in Figure 3.

A good convergence rate of the iterative process is demonstrated. After 40 iterations we got $Error_1 = 0.00038$ and $Error_2 = 0.0017$.

The second corpus was "talk politics" set from the news groups. Size of this problem is 13511 (terms) by 1171 (documents). We searched for 10 first eigenvalues of the covariance matrix and used 10 clusters again. The quality of the clustering aggregated model can be viewed by comparing eigenvalues of the original and aggregated covariance matrices. Figure 4 demonstrates a good resemblance of eigenvalues distribution.

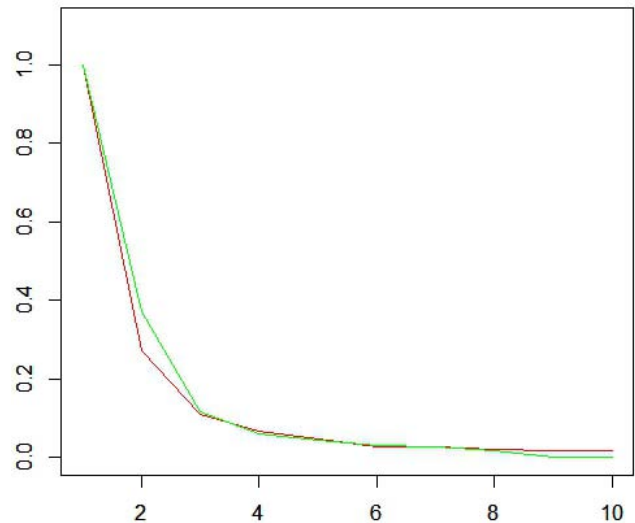


Figure 4. Distribution of 10 first eigenvalues of the original and approximate covariance matrices for 13511 by 1171 data matrix and 10 clusters.

Convergence graph is demonstrated in Figure 5. After 40 iterations we got $Error_1 = 0.00044$ and $Error_2 = 0.00049$.

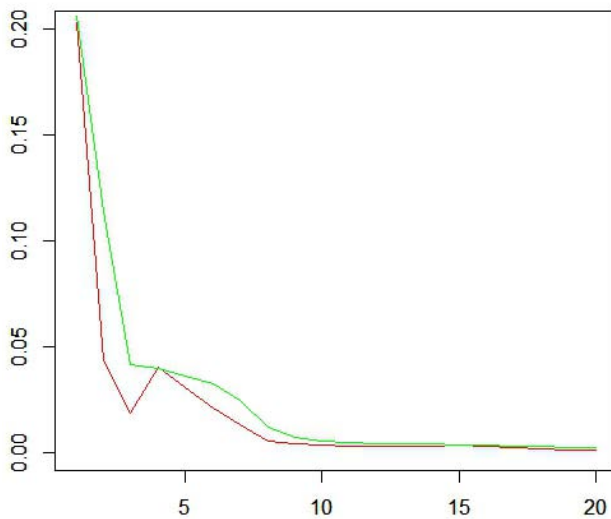


Figure 5. Eigenvalues and Eigenvectors convergence for "News Group" corpus. Error₁ – red, Error₂ – green.

REFERENCES

1. **Bulgakov V., Kuhn G.** High-performance multi-level iterative aggregation solver for large finite-element structural analysis problems. // *Int. j. numer. methods eng.*, 1995, Vol. 38, pp. 3529-3544.
2. **Hackbush W.** *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer, Berlin, 1985.
3. **Bulgakov V., Belyi M., Mathisen K.** Multilevel aggregation method for solving large-scale generalized eigenvalue problems in structural dynamics. // *Int. j. numer. methods eng.*, 1997, Vol. 40, pp. 453-471.
4. **Jolliffe I.T.** *Principal Component Analysis*. Series: Springer Series in Statistics, Springer, NY, 2002, XXIX, 487 pages.
5. **Eckart C., Young G.** The approximation of one matrix by another of lower rank. // *Psychometrika*, Volume 1, 1936
6. **MacQueen J.B.** Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations. // *Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press. pp. 281-297.
7. **Rutishauser H.** Simultaneous iteration method for symmetric matrices. // *Numer. Math.*, 1970, Vol. 16, pp. 205-223.

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.; SemanticPro; Boston, USA; phone +1 508-333-7178; e-mail: contact@semanticpro.com

Булгаков Виталий Евгеньевич, профессор, доктор технических наук; SemanticPro; Boston, USA; phone +1 508-333-7178; e-mail: contact@semanticpro.com

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-53-57

К ВОПРОСУ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ВОЗДЕЙСТВИЯ РАДИАЦИОННЫХ СРЕД И НАГРУЗОК НА АРМИРОВАННЫЕ ПЛАСТИНЧАТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ

Р.Б. Гарибов

Балаковский инженерно-технологический институт – филиал «Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», г. Балаково, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассматривается модель деформирования прямоугольной фибробетонной пластины под воздействием радиационных сред. При расчете пластины рассматривались различные схемы воздействия приложенной внешней нагрузки и радиационной среды.

Ключевые слова: фибробетон, прогиб пластины, внешней нагрузки, фиктивная радиационная нагрузка, неоднородная среда, армированные конструкции

ABOUT INFLUENCE OF DIFFERENT SCHEMES IMPACT RADIATION ENVIRONMENTS AND LOADS ON REINFORCED LAMELLAR STRUCTURAL MEMBERS

Rafail B. Garibov

Balakovo engineering and technological Institute – branch of “National Research Nuclear University “MEPhI”, Balakovo, RUSSIA

Abstract: The article discusses the model of deformation of fiber-reinforced concrete rectangular plate under the influence of radiation environments. In the calculation of the plate was considered different schemes impact of the applied external loads and radiation environments.

Keywords: the fiber-reinforced concrete, the deflection of the plate, external loads, dummy load, radiation, heterogeneous environment, reinforced design

Экспериментальному изучению влияние радиационных полей на металлические, бетонные, полимербетонные, фибробетонные и железобетонные конструкции посвящено определенное количество научных трудов. Однако теоретических исследований, посвященных математическому моделированию поведения этих армированные пластинчатые элементы конструкций в условиях воздействия радиационных сред, недостаточно. Конструктивные элементы, работающие в условиях радиационного влияние выполняются из дисперсно или дискретно армированного бетона в форме либо цилиндрических, либо прямоугольных емкостей. В связи с этим проблема расчета армированных кон-

струкций с учетом воздействия радиационных сред является актуальной [1,2]. В статье рассматривается модель деформирования прямоугольной фибробетонной пластины под воздействием радиационных сред. При расчёте пластины рассматривались различные схемы воздействия приложенной внешней нагрузки и радиационной среды. При построении модели использован феноменологический подход, основывающийся на рассмотрении фибробетона и железобетона как неоднородной среды с использованием традиционной методологии механики твердых деформируемых тел, в данном случае структурных параметров [3].

Разрешающее дифференциальное уравнение изгиба пластины с учётом радиационного облучения:

$$L(W) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_6 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y} \left(D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = p(x, y) + q(x, y), \quad (1)$$

где W – прогиб пластины, x, y – координаты в плане, $p(x, y)$ – интенсивность внешней нагрузки, $q(x, y)$ – фиктивная радиационная нагрузка (радиационная «добавка»);

$$q = \frac{\partial^2 \Delta M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Delta H_x^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_y^*}{\partial y^2}; \quad (2)$$

$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ – переменные жёсткости, определяющиеся из выражений:

$$\begin{aligned} D_1 &= f_1 J_1^{\phi\delta} + f_2 I_1^{\phi\delta} + J_2^{\phi\delta}; \\ D_2 &= f_2 J_1^{\phi\delta} + f_1 I_1^{\phi\delta} + I_2^{\phi\delta}; \\ D_3 &= f_3 J_1^{\phi\delta} + f_3 I_1^{\phi\delta}; \\ D_4 &= f_4 J_1^{\phi\delta} - f_5 I_1^{\phi\delta}; \\ D_5 &= f_4 I_1^{\phi\delta} - f_5 J_1^{\phi\delta}; \\ D_6 &= 2T_2^{\phi\delta} - 2 \frac{(T_1^{\phi\delta})^2}{T_0^{\phi\delta}}. \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{I_0^{\phi\delta} I_1^{\phi\delta} - J_0^{\phi\delta} J_1^{\phi\delta}}{(J_0^{\phi\delta})^2 - (I_0^{\phi\delta})^2}; \quad f_2 = \frac{I_0^{\phi\delta} J_1^{\phi\delta} - J_0^{\phi\delta} I_1^{\phi\delta}}{(J_0^{\phi\delta})^2 - (I_0^{\phi\delta})^2}; \\ f_3 &= \frac{I_0^{\phi\delta} J_0^{\phi\delta} - J_0^{\phi\delta} J_1^{\phi\delta}}{(J_0^{\phi\delta})^2 - (I_0^{\phi\delta})^2}; \quad f_4 = \frac{J_0^{\phi\delta}}{(J_0^{\phi\delta})^2 - (I_0^{\phi\delta})^2}; \\ f_5 &= \frac{I_0^{\phi\delta}}{(J_0^{\phi\delta})^2 - (I_0^{\phi\delta})^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Жёсткости, входящие в эти выражения, определяются формулами:

$$J_k^{\phi\delta} = \int_{-h/2}^{z_0} \alpha_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{h/2} \alpha_i z^k \partial z$$

при $k = 0, 1, 2$;

$$I_k^{\phi\delta} = \int_{-h/2}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{h/2} \alpha_i \nu_i z^k \partial z \quad (5)$$

при $k = 0, 1, 2$;

$$T_k^{\phi\delta} = \int_{-h/2}^{z_0} \beta_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{h/2} \beta_i z^k \partial z$$

при $k = 0, 1, 2$.

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} + \frac{2(1-\nu_{cp}) \cdot \varepsilon_{\phi\delta}}{\chi_x + \chi_y}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}; \quad \alpha_i = \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}; \\ \beta_j &= \frac{\Psi_j}{2(1+\nu_j)}; \quad \beta_i = \frac{\Psi_i}{2(1+\nu_i)}; \\ \nu_{cp} &= (\nu_j + \nu_i)/2. \end{aligned} \quad (7)$$

где z_0 – уравнение нейтральной поверхности, отделяющей растянутую зону пластины от сжатой; i, j – индексы, характеризующие сжатую и растянутую зоны пластины. При растянутой нижней зоне изгибаемой пластины $j=1, i=2$; при растянутой верхней зоне и сжатой нижней $j=2, i=1$; h – толщина пластины.

Зависимость, характеризующая распределение дозы облучения флюенса по толщине конструкции (элемента):

$$\psi_j^{\phi\delta} = \begin{cases} (A_j - B_j e^2), & \Phi < \Phi_{1nop} \\ (A_j - B_j e^2) \cdot f(\Phi), & \Phi \geq \Phi_{1nop} \end{cases}$$

К вопросу влияния различных схем воздействия радиационных сред и нагрузок на армированные пластинчатые элементы конструкций

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \nu_j^{\phi\delta}(e_u, \Phi))} \quad (8)$$

$$\cdot \sqrt{(e_x - e_y)^2 + e_x^2 + e_y^2 + \frac{2}{3}(e_{xy}^2)};$$

где $f(\Phi) = 1 - \alpha_1 \lg(\beta_1 \cdot \Phi);$ (9)

$$e_x = \varepsilon_x + \chi_x z; \quad e_y = \varepsilon_y + \chi_y z; \quad (10)$$

$$e_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2\chi_{xy} z.$$

Зависимость, описывающая изменение радиационного распухания:

$$\varepsilon_{\Phi}^{\phi\delta} = \begin{cases} 0, & \Phi < \Phi_{2пор} \\ \delta \cdot \frac{\varepsilon_{\max} [\exp(\nu \cdot (\Phi - \Phi_{2пор})) - 1]}{[\varepsilon_{\max} + \delta \exp(\nu \cdot (\Phi - \Phi_{2пор}))]}, & \Phi \geq \Phi_{2пор} \end{cases}, \quad (11)$$

где ε_{\max} – данного состава максимальное значение радиационных деформаций для бетона; ε_{Φ} – радиационные деформации бетона или радиационное распухание (объемное изменение); δ, ν – эмпирические коэффициенты, зависящие от радиационной деформативности заполнителя и энергетического спектра потока нейтронов; Φ – доза облучения или (флюенс); $\Phi_{1пор}, \Phi_{2пор}$ – пороговые дозы облучения, по достижению которых начинается изменение механических характеристик и появляется распухание; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – деформация точек срединной поверхности; $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ – кривизны в этих точках; z – координаты рассматриваемых точек, отсчитываемые от срединной поверхности; ν_j – коэффициент поперечной деформации; e_u – интенсивность деформаций точки.

Разработаны методика и программный комплекс, реализованный на базе *Matlab*, позволяющие исследовать данного состава НДС фибробетонной пластины и выполнить её расчёт при совместном действии нагрузки и радиационного облучения при различных схемах и сроках воздействия радиации и внешней приложенной нагрузки. Ниже (таблицы 1, 2) приведены результаты расчёта

фибробетонной пластины при разных схемах воздействия радиации и приложенной нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев В.И.** Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: АСВ, 2002. – 286 с.
2. **Дубровский В.Б.** Радиационная стойкость строительных материалов. – М.: Стройиздат, 1977. – 240 с.
3. **Гарибов Р.Б.** Сопротивление железобетонных элементов конструкций воздействиям агрессивных сред. – Саратов: СГТУ, 2003. – 228 с.
4. **Гарибов Р.Б., Овчинников И.Г.** Деформирование армированных пластинчатых элементов конструкций, подвергающихся радиационному облучению // Труды XXI международной конференции по теории оболочек и пластин. Саратов 14 – 16 ноября 2005 г. Саратов. СГТУ. 2005. с. 64 – 74
5. **Гарибов Р.Б., Матора А.В.** Моделирование поведения армированных элементов конструкций с учетом влияния радиационного облучения. // Вестник Самарского гос. Техн. Ун-та. Серия Физ-мат науки, №38, 2005, с. 35-41.
6. **Кабанин В.В., Гарибов Р.Б.** Прочность и долговечность толстостенной цилиндрической оболочки в условиях радиационного облучения // Оценка риска и безопасность строительных конструкций. Первая международная научно-практическая конференция. Воронеж, 2006.
7. **Матора А.В.** Модель поведения толстостенного цилиндрического сосуда (оболочки резервуара) в условиях радиационного воздействия // Новые ормационные технологии в решении проблем производства, коммунального хозяйства, экологии, образования, управления и права / Сб. статей II Российско-Украинского симпозиума. – Пенза, 2002.

Таблица 1. Результаты расчета пластины при однонаправленном действии нагрузки и радиационного облучения.

Схема воздействия внешних факторов						
Момент времени, лет	Максимальный прогиб, $\times 10^{-3}$ м	Максимум относительной деформации	Смещение нейтральной поверхности на краю $\times 10^{-3}$ м	Смещение нейтральной поверхности в центре, $\times 10^{-3}$ м	Секущий модуль в зоне растяжения, $\times 10^3$ МПа	Секущий модуль в зоне сжатия, $\times 10^3$ МПа
0	0,579	0,848	2,827	-1,739	23,52	36,18
1	0,578	0,848	2,645	-1,909	23,55	36,18
3	0,575	0,843	2,489	-2,087	23,63	36,19
6	0,618	0,912	4,080	-0,585	18,26	36,17
10	0,710	1,040	5,318	-0,330	13,65	31,94
15	0,811	1,196	6,820	-0,080	9,973	28,07
21	0,923	1,391	8,554	0,202	7,291	24,86
30	1,089	1,686	10,99	0,587	4,890	21,45

Таблица 2. Результаты расчета пластины при разнонаправленном действии нагрузки и радиационного облучения.

Схема воздействия внешних факторов						
Момент времени, лет	Максимальный прогиб, $\times 10^{-3}$ м	Максимум относительной деформации	Смещение нейтральной поверхности на краю $\times 10^{-3}$ м	Смещение нейтральной поверхности в центре, $\times 10^{-3}$ м	Секущий модуль в зоне растяжения, $\times 10^3$ МПа	Секущий модуль в зоне сжатия, $\times 10^3$ МПа
0	0,578	0,848	2,827	-1,739	23,32	36,18
1	0,578	0,849	2,985	-1,523	23,32	36,18
3	0,575	0,847	3,135	-1,355	23,36	36,18
6	0,623	0,886	1,867	-2,573	22,64	29,71
10	0,716	0,995	2,053	-3,321	18,17	24,85
15	0,818	1,121	2,396	-4,049	14,21	20,99
21	0,934	1,284	2,992	-4,732	11,01	17,78
30	1,108	1,534	3,989	-5,611	7,984	14,37

REFERENCES

1. **Andreev V.I.** Nekotorye Zzadachi Metody Mehaniki Neodnorodnyh Tel [Some Problems and Methods of Mechanics of Inhomogeneous Bodies]. Moscow, ASV, 2002, 286 pages.
2. **Dubrovsky V.B.** Radiacionnaja Stojkost' Stroitel'nyh Materialov [Radiation Resistance of Construction Materials]. Moscow, Stroyizdat, 1977, 240 pages.
3. **Garibov R.B.** Soprotivlenie Zhelezobetonnym Jelementov Konstrukcij Vozdejstvijam Agressivnyh Sred [Resistance of Reinforced Concrete Structural Members to the Effects of Aggressive Media]. Saratov, SGTU, 2003, 228 pages.
4. **Garibov R.B., Ovchinnikov I.G.** Deformirovanie Armirovannyh Plastinchatyh Jelementov Konstrukcij, Podvergajushihhsja Radiacionnomu Oblucheniju [Deformation of Reinforced Plate Structural Members Subjected to Radiation Irradiation]. // Proceedings of the 21st International Conference on the theory of shells and plates, 14-16 November, 2005, Saratov, SGTU, 2005, pp. 64-74/
5. **Garibov R.B., Matora A.V.** Modelirovanie Povedenija Armirovannyh Jelementov Konstrukcij s Uchetom Vlijanija Radiacionnogo Obluchenija [Modeling the Behavior of Reinforced Structural Members Taking into Account the Effect of Radiation Exposure]. // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta, Sriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, No. 38, 2005, pp. 35-41.
6. **Kabanin V.V., Garibov R.B.** Prochnost' i Dolgovechnost' Tolstostennoj Cilindricheskoy Obolochki v Uslovijah Radiacionnogo Obluchenija [Strength and Durability of a Thick-Walled Cylindrical Shell Under Conditions of Radiation Exposure]. // The First International scientific and practical Conference "Risk Assessment and Safety of Building Structures", Voronezh. 2006.
7. **Matora A.V.** Model' Povedenija Tolstostennogo Cilindricheskogo Sosuda (Obolochki Rezervuara) v Uslovijah Radiacionnogo Vozdejstvija [Model Behavior of a Thick-Walled Cylindrical Vessel (Shell of a Reservoir) under Conditions of Radiation Exposure]. // Proceeding of the Second Russian – Ukrainian Symposium, Penza, 2002.

Гарибов Рафаил Башир Оглы, советник РААСН, профессор, доктор технических наук; и.о. заведующего кафедрой «Промышленное и гражданское строительство», Балаковский инженерно-технологический институт – филиал «Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; 413853, Россия, Саратовская область, г. Балаково, ул. Чапаева, 140; тел. +7(8453)23-18-94; e-mail: garibovr@mail.ru.

Rafail B. Garibov, Professor, Dr.Sc.; Acting Head of Department of Industrial and Civil Construction, Balakovo engineering and technological Institute – branch of "National Research Nuclear University "MEPhI"; 140, ul. Chapayeva, Balakovo, Saratovskaya Oblast, 413853, Russia; phone +7(8453)23-18-94; e-mail: garibovr@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-58-65

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫГИБА ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

П.П. Гайджуров

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, РОССИЯ

Аннотация: Для большепролетных железобетонных балочных конструкций разработана методика определения выгиба, обусловленного предварительным напряжением стального каната на бетон. Выполнены числовые эксперименты по исследованию влияния различных схем криволинейной раскладки предварительно напряженной арматуры без сцепления с бетоном на распределение разгружающего усилия вдоль траектории армирования.

Ключевые слова: метод конечных элементов, предварительное напряжение бетона, матрицы жесткостей ферменного, комбинированного и плоского полилинейного конечных элементов

FINITE ELEMENT MODELING OF CAMBER OF PRESTRESSED CONCRETE BEAMS

Peter P. Gaigerov

Donskoy State Technical University, Rostov-on-Don, RUSSIA

Abstract: For large-span reinforced concrete beam structures developed by the method of determining the camber due to the prestressing of a steel rope on the concrete. Performed numerical experiments to study the impact of various schemes layout prestressed reinforcement without bonding with concrete on the distribution of the relief efforts along the path of the reinforcement.

Keywords: finite element method, pre-stressing concrete, the stiffness matrix of the truss, combined and plane multilinear finite elements

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время расчет на прочность и жесткость большепролетных предварительно напряженных железобетонных конструкций осуществляется методом конечных элементов [1-7] в сочетании со схемами распределенного (встроенного) или дискретно-связанного армирования [8]. Общим для обеих схем армирования является моделирование бетонного массива в зависимости от размерности задачи объемными или плоскими конечными элементами (КЭ) и армирующими элементами – стержневыми (ферменными или балочными) КЭ. При реализации расчетов по схеме распределенного армирования узлы конечно-элементных сеток объемных (плоских) и стержневых КЭ, как правило, не

совпадают. При этом сначала с помощью процедуры автоматического определения пересечения стержневых и объемных (плоских) КЭ формируются условия кинематических связей в соответствующих узлах сетки, так называемых «родительских доменах (parent domains)». После чего методом адресного объединения жесткостей объемных (плоских) и стержневых КЭ формируются матрицы жесткости «родительских доменов», размерность которых совпадает с размерностью объемных (плоских) КЭ. Более точной и вместе с тем более затратной в плане вычислительных ресурсов является схема дискретно-связанного армирования. В данном случае узлы объемных (плоских) и стержневых КЭ должны совпадать, что при криволинейной раскладке арматуры не поз-

воляет использовать регулярные прямолинейные сетки КЭ.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В строительной практике широкое распространение получила технология преднапряжения большепролетных железобетонных балок с помощью тросов, заключенных в пластиковую оболочку («монострендов») [9, 10]. Предлагаемая в [11] концепция моделирования передачи усилия от «моностренда» бетону основана на численном решении плоской линейно упругой задачи прикладной теории упругости. Расчетная схема включает трос, моделируемый шарнирно-стержневыми (ферменными) КЭ с двумя степенями свободы в узле (рис. 1), и податливые опоры, в качестве которых используем комбинированные КЭ пружинного типа (рис. 2). Результирующую составляющую от давления нескольких параллельно расположенных напрягаемых тросов на бетон можно определить, как сумму усилий от отдельных тросов.

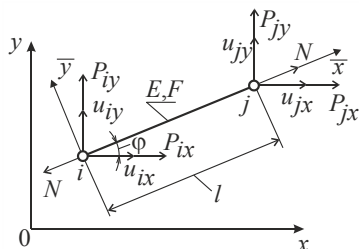


Рисунок 1. Ферменный КЭ.

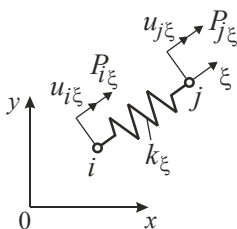


Рисунок 2. Комбинированный КЭ.

Уравнение равновесия для ферменного КЭ в

глобальных осях x, y представим в виде

$$[h]_a \{u\}_a = \{p\}_a,$$

где матрица жесткости

$$[h]_a = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix};$$

векторы узловых перемещений и сил –

$$\{u\}_a = \{u_{ix} \ u_{iy} \ u_{jx} \ u_{jy}\}^T;$$

$$\{p\}_a = \{p_{ix} \ p_{iy} \ p_{jx} \ p_{jy}\}^T;$$

E – модуль упругости материала троса; F – площадь поперечного сечения КЭ. Геометрические параметры φ и l определяем по значениям координат узлов КЭ.

Для вычисления продольной силы в локальных осях \bar{x}, \bar{y} (рис. 1) используем выражение

$$N = \frac{EF}{l} [-\cos \varphi \quad -\sin \varphi \quad \cos \varphi \quad \sin \varphi] \{u\}.$$

Уравнение равновесия для пружинного КЭ запишем в виде

$$[h]_b \{u\}_b = \{p\}_b,$$

где в зависимости от ориентации КЭ имеем:

– локальная ось КЭ ξ совпадает с осью x

$$[h]_b = k_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{u\}_b = \{u_{ix} \ 0 \ u_{jx} \ 0\}^T;$$

$$\{p\}_b = \{p_{ix} \ 0 \ p_{jx} \ 0\}^T;$$

– локальная ось КЭ ξ совпадает с осью y

$$[h]_b = k_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{u\}_b = \{0 \ u_{iy} \ 0 \ u_{jy}\}^T;$$

$$\{p\}_b = \{0 \ p_{iy} \ 0 \ p_{jy}\}^T.$$

Здесь k_y , k_x коэффициенты жесткости, соответствующие ориентациям пружины вдоль осей x и y .

На рис. 3 и 4 показана последовательность построения расчетной схемы для анализа передачи усилия предварительного натяжения троса P_{pr} , помещенного в канал диаметром Δ_c , на бетон. В данной расчетной схеме трение между тросом и стенками канала не учитывается, поэтому рассматривается $1/2$ части балки при соответствующих граничных условиях. В результате расчета определяем усилия F_1, F_2, \dots, F_n в комбинированных КЭ, которые используем в последующем анализе плоского напряженно-деформированного состояния балки, моделируемой плоскими 4-х узловыми КЭ (рис. 5) в соответствии со схемой дискретно-связанного армирования.

Уравнение равновесия для плоского 4-х узлового КЭ (рис. 6) в глобальных осях z_1, z_2 представим в виде

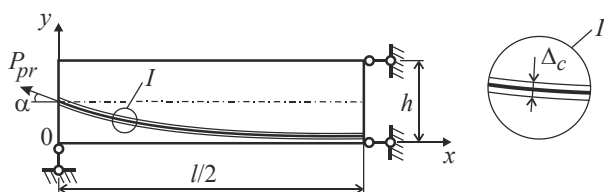


Рисунок 3. Расчетная схема $1/2$ части балки.

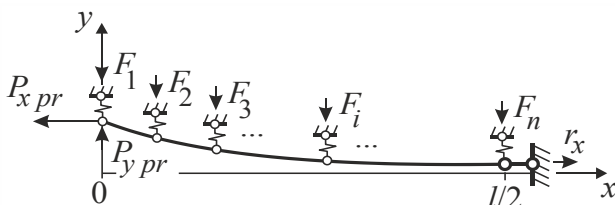


Рисунок 4. Конечно-элементная модель «моностренда».

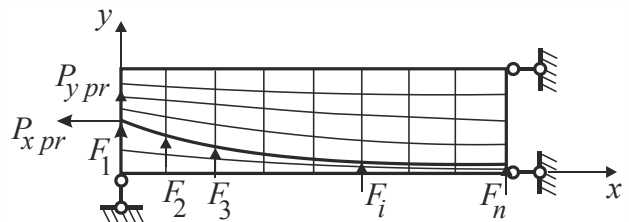


Рисунок 5. Конечно-элементная модель балки при обжатии бетона.

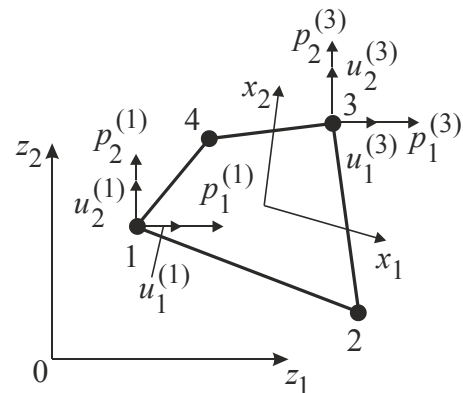


Рисунок 6. Плоский 4-х узловой КЭ.

$$[h]\{u\} = \{p\},$$

где $[h]$ – матрица жесткости КЭ размерностью 8×8 ; $\{u\}$, $\{p\}$ – векторы-столбцы узловых перемещений и узловых сил, имеющие структуру:

$$\{u\}_{(8 \times 1)} = \{u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ u_1^{(2)} \ u_2^{(2)} \ \dots \ u_1^{(8)} \ u_2^{(8)}\}^T,$$

$$\{p\}_{(8 \times 1)} = \{p_1^{(1)} \ p_2^{(1)} \ p_1^{(2)} \ p_2^{(2)} \ \dots \ p_1^{(8)} \ p_2^{(8)}\}^T.$$

В принятых обозначениях $u_l^{(k)}$ и $p_l^{(k)}$ нижний индекс соответствует номеру оси z_l , ($l = 1, 2$), а верхний индекс (k) – номеру узла КЭ ($k = 1, 2, 3, 4$). Обозначения осей z_1, z_2 и x, y эквивалентны.

Для случая, когда перемещения u_1 и u_2 в произвольной точке КЭ задаются в глобальных осях z_l , а деформации ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) определяются в местных «сопутствующих» в общем случае неортогональных осях x_r ,

($r=1,2$) матрицу жесткости вычисляем по формуле [12]:

$$[h]_{(8 \times 8)} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [D]^T [E] [D] |J| dx_1 dx_2$$

где t – толщина КЭ; $|J|$ – определитель матрицы Якоби; $[E]$ – матрица упругости материала;

$$[D]_{(3 \times 8)} = [[D]_1 [D]_2 [D]_3 [D]_4]$$

– блочная матрица; субматрица и ее компоненты:

$$[D]_k_{(3 \times 2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix} \quad (k=1,2,3,4);$$

$$d_{11} = c_{1k} [z_{1,1} + (z_{1,12} + z_{1,1} c_{2k}) x_2];$$

$$d_{12} = c_{1k} [z_{2,1} + (z_{2,12} + z_{2,1} c_{2k}) x_2];$$

$$d_{21} = c_{2k} [z_{1,2} + (z_{1,12} + z_{1,2} c_{1k}) x_1];$$

$$c_{21} = p_{2k} [z_{1,2} + (z_{1,12} + z_{1,2} c_{1k}) x_1];$$

$$d_{22} = c_{2k} [z_{2,2} + (z_{2,12} + z_{2,2} c_{1k}) x_1];$$

$$d_{31} = z_{1,1} c_{2k} + z_{1,2} c_{1k}; \quad d_{32} = z_{2,1} c_{2k} + z_{2,2} c_{1k}.$$

Здесь c_{1k} и c_{2k} – элементы матрицы координат узлов КЭ в местных осях

$$[c]_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$z_{l,j} = \frac{\partial z_l}{\partial x_j}, \quad z_{l,ij} = \frac{\partial z_l}{\partial x_i \partial x_j}$$

– компоненты тензора преобразования координат. Индексы i, j, l изменяются в диапазоне от 1 до 2. Интегрирование в выражении $[h]$ выполняем численно по формуле Гаусса. Процедура вычисления напряжений в узлах КЭ представляет следующую последовательность:

1. Формируем массив $[r]_{(4 \times 3)}$ – статически эквивалентной нагрузки в узлах КЭ:

$$r_{nm} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \sigma_{ij}^k (1 + c_{1n} x_1^k) (1 + c_{2n} x_2^k),$$

$$n=1,2,\dots,4; \quad \begin{cases} \text{при } m=1 \Rightarrow i=1, j=1; \\ \text{при } m=2 \Rightarrow i=2, j=2; \\ \text{при } m=3 \Rightarrow i=1, j=2. \end{cases}$$

где x_1^k, x_2^k – значения локальных координат в точках интегрирования; σ_{ij}^k – компоненты тензора напряжений в точках интегрирования.

2. Формируем массив узловых напряжений

$$[\Omega]_{(4 \times 3)} = [\Psi]_{(4 \times 4)}^{-1} [r]_{(4 \times 3)},$$

где фундаментальная матрица плоского 4-х узлового КЭ

$$[\Psi]_{(4 \times 4)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\varphi\}^T \{\varphi\} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{\varphi\} = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_4\}^T$$

– вектор-столбец полилинейных функций формы КЭ.

Для сглаживания скачков поля напряжений выполняем осреднение напряжений в смежных узлах конечно-элементной сетки.

ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

С целью демонстрации возможностей разработанной методики выполним численные эксперименты, в которых используем дискретно-связанную конечно-элементную модель балки пролетом 10 м, имеющей прямо-

угольное поперечное сечение $0,4 \times 0,8$ м. Усилие преднапряжения арматуры 170 т. Механические константы бетона: модуль упругости $3,04 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона 0,17, удельный вес 2200 кг/м^3 . На рис. 7-9 приведены графики траектории армирования $y(x)$ и разгружающего усилия $F(x)$ для трех схем (параболическая, сплайновая, трапецидальная) раскладки напрягаемой арматуры на $1/2$ части балки.

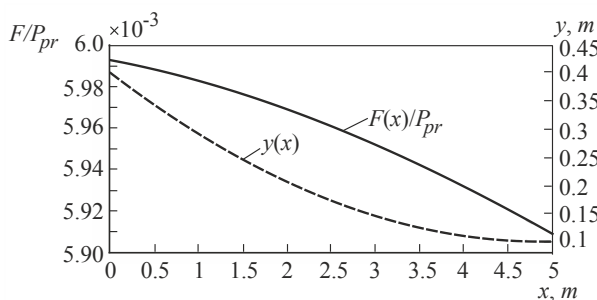


Рисунок 7. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для параболической траектории армирования.

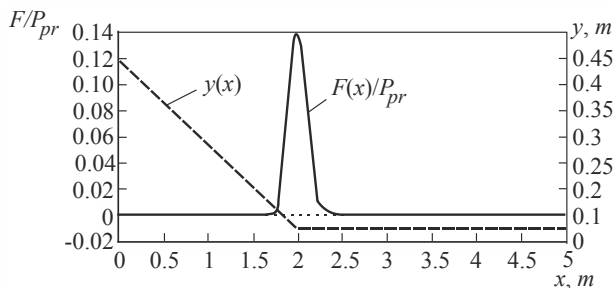


Рисунок 8. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для трапецидальной траектории армирования.

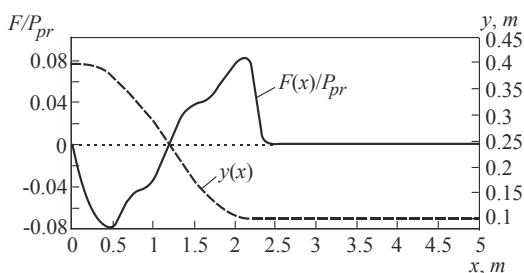


Рисунок 9. Графики $y(x)$ и $F(x)$ для сплайновой траектории армирования.

Результаты конечно-элементного моделирования для исследуемых схем раскладки преднапряженной арматуры в виде контрастных картин распределения полей продольных напряжений σ_x и вертикальных перемещений u_2 показаны на рис. 10-12.

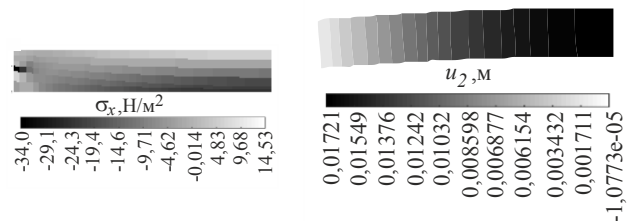


Рисунок 10. Распределение полей σ_x и u_2 в $1/2$ части балки при параболической схеме преднапряжения.

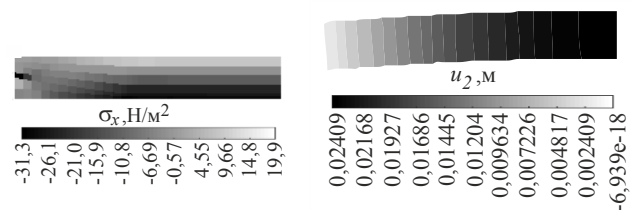


Рисунок 11. Распределение полей σ_x и u_2 в $1/2$ части балки при трапецидальной схеме преднапряжения.

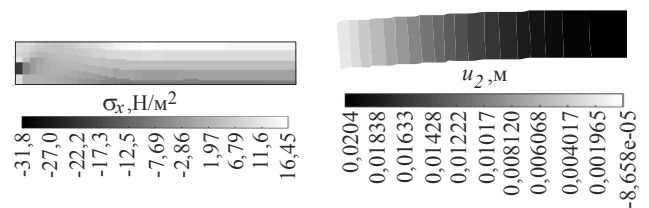


Рисунок 12. Распределение полей σ_x и u_2 в $1/2$ части балки при сплайновой схеме преднапряжения.

Как видно из представленных данных для всех схем раскладки экстремальные значения σ_x локализируются в зоне анкеровки преднапряженной арматуры. Сопоставление значений выгиба балки, полученных с помощью конечно-элементного моделирования и упрощенного расчета [10] представлено в таблице 1.

Таблица 1. Сопоставление значений выгиба балки, полученных с помощью конечно-элементного моделирования и упрощенного расчета.

Схема предварительного напряжения	Значения выгиба балки, м	
	МКЭ	Упрощенная методика [10]
Параболическая	0,0172	0,00940
Трапецеидальная	0,0241	0,00934
Сплайновая	0,0204	0,00954

Анализируя эти данные, приходим к выводу, что упрощенная методика дает заниженные значения выгиба. Причем при конечно-элементном анализе значение выгиба более существенно зависит от схемы раскладки преднапряженной арматуры, чем при упрощенном расчете.

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика численного расчета выгиба большепролетных железобетонных балок с преднапряжением арматуры на бетон, позволяющая для схем криволинейного армирования без сцепления с бетоном реалистично моделировать разгружающий эффект.
2. Установлено, что значения выгиба балки, вычисленные по предлагаемой методике в 1,8...2,6 раза больше величин, полученных по упрощенной методике. Занижение реального значения выгиба не позволяет в полной мере реализовать преимущества предварительного напряжения балочной конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В.** Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы,

опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологии). – К.: Изд. «Факт», 2004. – 206 с.

2. **Joshuva N.R., Saibabu S., Eapen Sakaria P., Lakshmikandhan K.N., Sivakumar P.** Finite element analysis of reinforced and pre-tensioned concrete beams. // International journal of emerging technology and advanced engineering, Vol. 4, Iss. 10, 2014, pp. 449-457.
3. **Kote P.B., Patil S.P., Sangle K. Keshav.** Finite element analysis of pre-stressed beam. // International journal of foundation and research in science & engineering, Vol. 1, Iss. 3, 2014, pp. 40-48.
4. **Kwak H.-G., Filippou F.C.** Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Department of civil engineering university of California Berkeley, California, November 1990, 120 pages.
5. **Фиалко С.Ю.** Четырехузловой конечный элемент для моделирования поведения тонкостенных железобетонных конструкций. // Инженерно-строительный журнал, №5, 2014, с. 27-36.
6. **Прокопович А.А.** Сопротивление изгибу железобетонных конструкций с различными условиями сцепления продольной арматуры с бетоном. – Самара, НФК «Сенсоры. Модули. Систем», 2000. – 296 с.
7. **Дзюба И.С., Ватин Н.И., Кузнецов В.Д.** Монолитное большепролетное ребристое перекрытие с постнапряжением. // Инженерно-строительный журнал, №1, 2008, с. 5-12.
8. **Лукин А.В., Модестов В.С.** Конечно-элементное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, №3(201), 2014, с. 35-46.
9. **Гибшман Е.Е., Гибшман М.Е.** Теория и расчет предварительно напряженных

- железобетонных мостов. – М.: Изд. Автотрансиздат, 1963. – 396 с.
10. **Портаев Д.В.** Расчет и конструирование монолитных преднапряженных конструкций гражданских зданий. – М.: АСВ, 2011. – 248 с.
 11. **Гайджуров П.П., Аль-Джабоби Сами Фахль, Аль-Хадж Махмуд Абдо Хаса.** Конечно-элементное моделирование передачи усилия натяжения стального каната на бетон. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, №2, 2017, с. 73-78.
 12. **Гайджуров П.П., Исхакова Э.Р.** Билинейный четырехузловой конечный элемент для решения двумерных задач теории упругости. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, №4, 2011, с. 7-13.
- REFERENCES**
1. **Gorodetskiy A.S., Laborer L.G., Gorodetsky D.A., Laznik M.V., Yusi-Penco S.V.** Raschet i Proektirovanie Konstrukcij Vysotnyh Zdanij iz Monolitnogo Zhelezobetona (Problemy, Opyt, Vozmozhnye Reshenija i Rekomendacii, Komp'juternye Modeli, Informacionnye Tehnologii) [Calculation and design of structures of high-rise buildings of reinforced concrete (problems, experiences, possible solutions and recommendations, computer models, information technologies)]. Kiev, "Fact", 2004, 206 pages.
 2. **Joshuva N.R., Saibabu S., Eapen Sakaria P., Lakshmikandhan K.N., Sivakumar P.** Finite element analysis of reinforced and pre-tensioned concrete beams. // International journal of emerging technology and advanced engineering, Vol. 4, Iss. 10, 2014, pp. 449-457.
 3. **Kote P.B., Patil S.P., Sangle K. Keshav.** Finite element analysis of pre-stressed beam. // International journal of foundation and research in science & engineering, Vol. 1, Iss. 3, 2014, pp. 40-48.
 4. **Kwak H.-G., Filippou F.C.** Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Department of civil engineering university of California Berkeley, California, November 1990, 120 pages.
 5. **Fialko S.Yu.** Chetyrehuzlovoj Konechnyj Jelement Dlja Modelirovanija Povedenija Tonkostennyh Zhelezobetonnyh Konstrukcij [Four-node finite element for modeling the behavior of thin-walled concrete structures]. // Inzhenerno-Stroitelny Zhurnal, No. 5, 2014, pp. 27-36.
 6. **Prokopovich A.A.** Soprotivlenie Izgibu Zhelezobetonnyh Konstrukcij s Razlichnymi Uslovijami Sceplenija Prodol'noj Armatury s Betonom [Bending strength of reinforced concrete structures with different conditions of coupling for the longitudinal reinforcement to the concrete]. Samara, NFK "Sensors. Modules. Systems", 2000, 296 pages.
 7. **Dzyuba I.S., Vatin N.I., Kuznetsov V.D.** Monolithic Long-Span Ribbed Slab by Postradiation. // Inzhenerno-Stroitelny Zhurnal, No. 1, 2008, pp. 5-12.
 8. **Lukin, A.V., Modestov V.S.** Konechno-Jelementnoe Modelirovanie i Analiz Naprazhenno-Deformirovannogo Sostojanija Zhelezobetonnyh Konstrukcij [Finite element modeling and analysis of stress-strain state of reinforced concrete structures]. // Scientific-technical Bulletin of SPbSPU. Physics and mathematics, 2014, No. 3(201), pp. 35-46.
 9. **Gibshman E.E., Hirshman M.E.**
 10. **Teorija i Raschet Predvaritel'no Naprazhennyh Zhelezobetonnyh Mostov** [Theory and design of prestressed concrete bridges]. Moscow, Autotransmit, 1963, 396 pages.
 11. **Portaev D.V.** Raschet i konstruirovanie monolitnyh prednaprazhennyh konstrukcij grazhdanskih zdanij [Calculation and design of monolithic prestressed structures for civil buildings]. Moscow, ASV Publishing House, 2011, 248 pages.

12. **Gaigerov P. P., Al-Jabobi Themselves Fahl, Al-Hajj Mahmoud Abdo Hasa.** Konechno-jelementnoe Modelirovanie Peredachi Usilija Natjazhenija Stal'nogo Kanata na Beton [Finite element modeling of the transmission of the tension force of the steel rope on the concrete]. // *Izvestia vuzov. Severo-Kavkazsky Regionn. Technicheskie Nauki*, No. 2, 2017, pp. 73-78.
13. **Gaigerov P.P., Iskhakova E.R.** Bilinejnyj Chetyrehuzlovoj Konechnyj Jelement Dlja Reshenija Dvumernyh Zadach Teorii Uprugosti [Bilinear four-node finite element for solving two-dimensional problems of elasticity theory]. // *Izvestia vuzov. Severo-Kavkazsky Regionn. Technicheskie Nauki*, No. 4, 2011, pp. 7-13.

Гайджуров Петр Павлович, профессор, доктор технических наук; профессор кафедры «Техническая механика» Донского государственного технического университета; 344000, Россия, г. Ростов-на-Дону, площадь Гагарина, д. 1; тел. 8(800)100-19-30; факс: +7(863)232-79-53; e-mail: gpp-161@yandex.ru

Peter. P. Gaigerov, Professor, Dr.Sc.; Professor of Department of Technical Mechanics, Don State Technical University; Gagarin square 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia; phone 8(800)100-19-30; fax +7(863)232-79-53; e-mail: gpp-161@yandex.ru.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЦЕМЕНТНЫХ КОМПОЗИТОВ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ ВЛАЖНОСТИ И ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУР

*И.В. Ерофеева¹, В.В. Афонин¹, В.А. Федорцов¹, Д.В. Емельянов¹,
Н.Ю. Поджivotов², М.М. Зоткина¹*

¹ Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск, РОССИЯ

² Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов ГИИ РАН, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В работе приводятся результаты испытаний цементных композитов в условиях воздействия на них повышенной влажности и переменных положительных температур. По коэффициенту изменения твердости (стойкости) сравниваются составы с различными наполнителями, пластифицирующими и другими фунгицидными добавками. Для принятия решения о стойкости (устойчивости) структуры и свойств композитов предлагается опираться на величину площади многоугольника, полученного в результате кусочно-линейной аппроксимации точек экспонирования. Даются объяснения влияния факторов среды на изменение твердости композитов.

Ключевые слова: композиты, влажность, положительные температуры, коэффициент стойкости, площадь многоугольника, составы композитных материалов, устойчивость, относительные значения, кусочно-линейная интерполяция

RESEARCH OF BEHAVIOR OF CEMENT COMPOSITES IN CONDITIONS OF HIGH HUMIDITY AND VARIABLE POSITIVE TEMPERATURES

*Irina V. Erofeeva¹, Victor V. Afonin¹, Vladislav A. Fedortsov¹,
Denis V. Emelyanov¹, Nikolay Yu. Podzhivotov², Marina M. Zotkina¹*

¹ National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, RUSSIA

² All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials GNC RF, Moscow, RUSSIA

Abstract: In this paper, the results of testing cement composites under the conditions of the effect of high humidity and variable positive temperatures are given. By the coefficient of variation of hardness (stability), the compositions are compared with various fillers, plasticizing and other fungicidal additives. To decide on the stability (stability) of the structure and properties of composites, it is proposed to rely on the area of the polygon obtained as a result of piecewise linear approximation of the exposure points. Explanations of the influence of environmental factors on hardness change of the composites.

Keywords: composites, humidity, positive temperatures, coefficient of stability, polygon area, compositions of composite materials, stability, relative values, piecewise linear interpolation

Цементные композиты во время своей эксплуатации могут подвергаться воздействию различных климатических факторов. Основными из них являются влажность и температура окружающей среды. Эти факторы могут действовать в различном сочетании. Есть и

такие воздействия, когда можно считать, что один из этих факторов в течение суток остается постоянным, а второй меняется. Очевидно, что в этом случае задача по определению влияния составляющих окружающей

среды на изменение механических свойств композитов упрощается.

В данной статье исследуются композиты на цементной основе, выдержанные в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур. За основу исследования принято выполненное авторами исследование поведения цементных композитов в условиях циклического воздействия отрицательных и положительных температур.

Одним из важнейших свойств строительных материалов и, в частности, цементных композитов является их способность сопротивляться действию окружающей среды, которая оценивается коэффициентом стойкости (устойчивости) структуры и свойств физическим, химическим и другим воздействиям.

Исследования выполнены в 4 этапа:

- сравнивались результаты по составам цементного камня с различным водосодержанием и с введением гиперпластификатора (этап №1);
- цементным композитам, включающих в своем составе песочные фракции, а также добавки микрокремнезема с каменной мукой (этап №2);
- на активированной воде затворения (этап №3);
- цементные композиты, имеющие в своем составе биоцидные добавки (этап №4).

Для различных композитов, с различными добавками значения коэффициентов стойкости, как правило, заметно различаются. Исследованию стойкости строительных композитов в различных эксплуатационных средах посвящено достаточно много работ, включая работы авторов [1–17]. Коэффициент стойкости устанавливают по характеру изменения физико-механических и других свойств. В наших исследованиях стойкость оценивали по изменению твердости на поверхности образцов. Как известно, твердость напрямую связана с показателем прочности [18]. Контрольные точки времени изменения свойств композитов фиксировались через 15 и 45 суток испытаний. Начальная точка ноль соответствует контрольному показателю свойства.

В качестве объектов исследования рассматривались цементные композиты, составы которых приведены в таблице 1.

Образцы композитов, приведенных составов, подвергали термоциклическому испытанию. Один термоцикл длился 24 часа и включал четыре термосостояния:

- нагрев образцов от комнатной температуры (+23 °С) до +60 °С при влажности 98 % – около 5 мин.;
- выдержка образцов при температуре +60 °С и влажности 98 % – 9 часов;
- при выключенной камере естественное остывание образцов до комнатной – температуры (+23 °С) при влажности 98 % – примерно 5 часов 55 мин.;
- выдержка образцов при комнатной температуре (+23 °С) при влажности 98 % – 9 часов.

Таким образом, композиты испытывали при постоянной высокой влажности и переменных положительных температурах.

Для сравнения композитов по коэффициентам стойкости целесообразно их привести к относительным значениям, относительно контрольного образца перед началом экспонирования. Тогда характерный вид зависимостей относительного значения свойства (например, коэффициента твердости) может быть приведена в том виде, как показано на рис. 1.

На рис. 1 под каждой ломаной прямой выделены области в виде многоугольников, для которых можно рассчитать площадь (S), например, по методу трапеций. Формально размерность таких площадей соответствует размерности времени. Форма многоугольников может быть разнообразной. По величине площади предлагается оценивать стойкость составов композитов к изменениям свойств их структуры, соответственно и свойств. Контрольный образец композита обозначим как состав 1. Сравнимые образцы будем обозначать как 2, 3 и т. д. (см. таблицу 1).

Рассмотрим сначала композиты (составы 1, 2), основу которых составляет цементный камень.

Таблица 1. Исследуемые составы цементных композитов и их начальные механические характеристики.

№ состава	Исходные составляющие вещества композита	Количество вещества по отношению к содержанию цемента, отн. числа	Прочность на сжатие, МПа	Показатель твердости, МПа
1	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Вола	1 0,267	56,4	4010,17
2	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Вола	1 0,35	52,6	2065,24
3	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 ГП «Melflux 1641 F» Вола	1 0,009 0,171	133	7016,08
4	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Песок молотый (микрокварц) Песок фр. 0-0.63 мм (г. Иваново) Песок фр. 0,63-2,5 мм (г. Иваново) ГП «Melflux 1641 F» Вола	1 1,1 2,753 2,347 0,009 0,6	67,1	5476,90
5	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Песок молотый (микрокварц) Микрокремнезем Песок фр. 0-0.63 мм (г. Иваново) Песок фр. 0,63-2,5 мм (г. Иваново) ГП «Melflux 1641 F» Вола	1 0,75 0,1 1,775 1,975 0,009 0,475	110	9746,86
6	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Песок фр. 0-0.63 мм (г. Иваново) Песок фр. 0,63-2,5 мм (г. Иваново) ГП «Melflux 1641 F» Вола	1 2,065 1,76 0,009 0,525	32,5	4089,57
7	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Песок фр. 0-0.63 мм (г. Иваново) Песок фр. 0,63-2,5 мм (г. Иваново) ГП «Melflux 1641 F» Вола	1 2,51 2,14 0,009 0,56	41	1187,85
8	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Песок молотый (микрокварц) Песок фр. 0-0.63 мм (г. Иваново) Песок фр. 0,63-2,5 мм (г. Иваново) ГП «Хидетал 9у» Вола	1 0,825 2,065 1,76 0,012 0,56	55	7488,59
МЗ	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Вола активированная по режиму Э+М (3-3)	1 0,26	85	5168,04
ТЗ	Цемент ульяновский ПЦ500Д0 Биоцидная добавка «Teflex Универсальный» Вола	1 0,03 0,267	32	1174,46

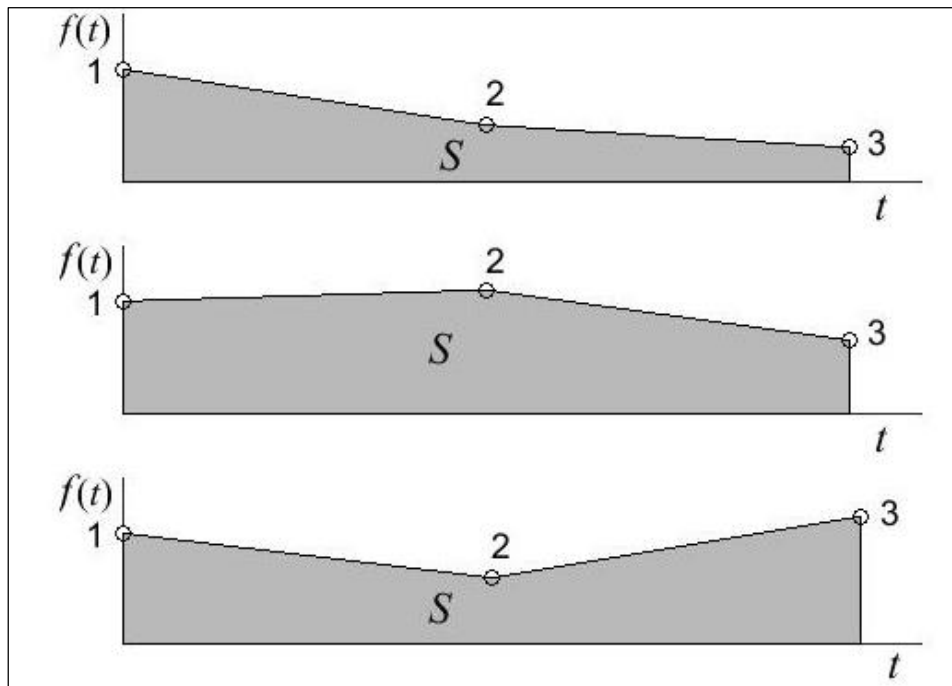


Рисунок 1. Примеры изменения относительного показателя свойства и ограниченной им площади многоугольника

Таблица 2. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, 2

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости, МПа, для составов		Относительные показатели твердости для составов		Площадь многоугольника, для составов	
	1	2	1	2	1	2
0	4010,17	2065,24	1,00000	1,00000	46,85506	69.92950
15	4308,81	3492,44	1,07447	1,69106		
45	4058,15	3356,80	1,01196	1,62538		

Изменение показателей твердости композитов по мере выдержки в среде, а также значения площадей многоугольников, рассчитанных по рис. 2 приведены в табл. 2. Видно, что для композита состава 2, имеющего по мере испытания повышение показателей твердости по сравнению с материалом состава 1, имеет место и значительное превышение площади многоугольника.

Из табл. 2 и рис. 2 следует, что по показателю твердости состав на основе теста нормальной густоты является более прочным, нежели состав с повышенным водосодержанием. В тоже время при воздействии среды у состава

с повышенным водосодержанием произошло увеличение рассматриваемого показателя. Это, по-видимому, объясняется в большей степени, чем для материала состава 1, снижением поверхностной пористости образцов из-за общей тенденции уменьшения их поверхности за счет продолжения гидратации вяжущего, поверхностной карбонизации цементного камня и других процессов, способствующих уменьшению поверхностной энергии. Рассмотрим составы 1 и 3. Состав 3 относится к цементному камню из самоуплотняющейся цементной суспензии с гиперпластификатором.

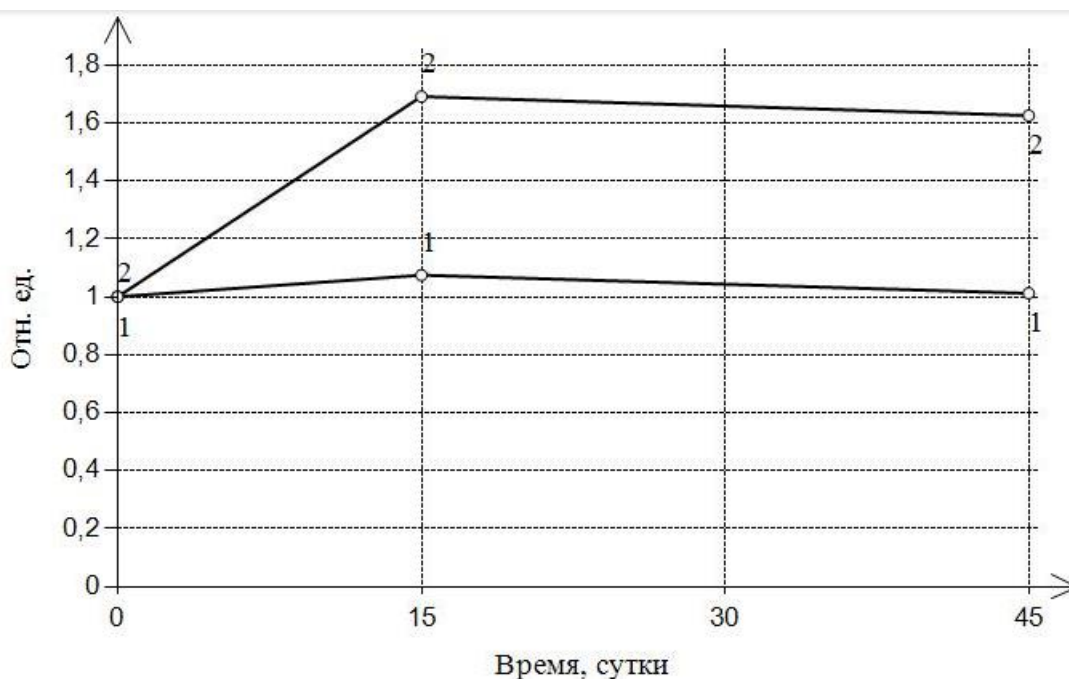


Рисунок 2. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1 и 2

Таблица 3. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, 3

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов		Относительные показатели твердости для составов		Площадь многоугольника, для составов	
	1	3	1	3	1	3
0	4010,17	7016,08	1,00000	1,00000	46,85506	37,38871
15	4308,81	4926,15	1,07447	0,70212		
45	4058,15	6590,88	1,01196	0,93940		

Результаты расчетов, аналогичные, отраженным в таблице 2, приведены в таблице 3. Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости от времени для композитов составов 1 и 3 показаны на рис. 3.

Сравнение результатов испытаний по абсолютным показателям свидетельствует о более высокой прочности составов с добавками гиперпластификатора. В тоже время следует отметить сохранение поверхностной твердости у композита на основе теста нормальной плотности без пластифицирующих доба-

вок (рис. 3). Как в предыдущем случае повышение и сохранение твердости более выражено у менее твердого (прочного) композита, а соответственно более пористого. У изначально более твердого материала в начальное время выдержки происходит уменьшение твердости с последующим ее возрастанием. Рассмотрим составы 1, 3 и 6. Состав 6 относится к песчаному бетону переходного поколения с ГП. Результаты расчетов приведены в табл. 4. Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости от времени для составов 1, 3 и 6 приведены на рис. 4.

Исследование поведения цементных композитов в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур

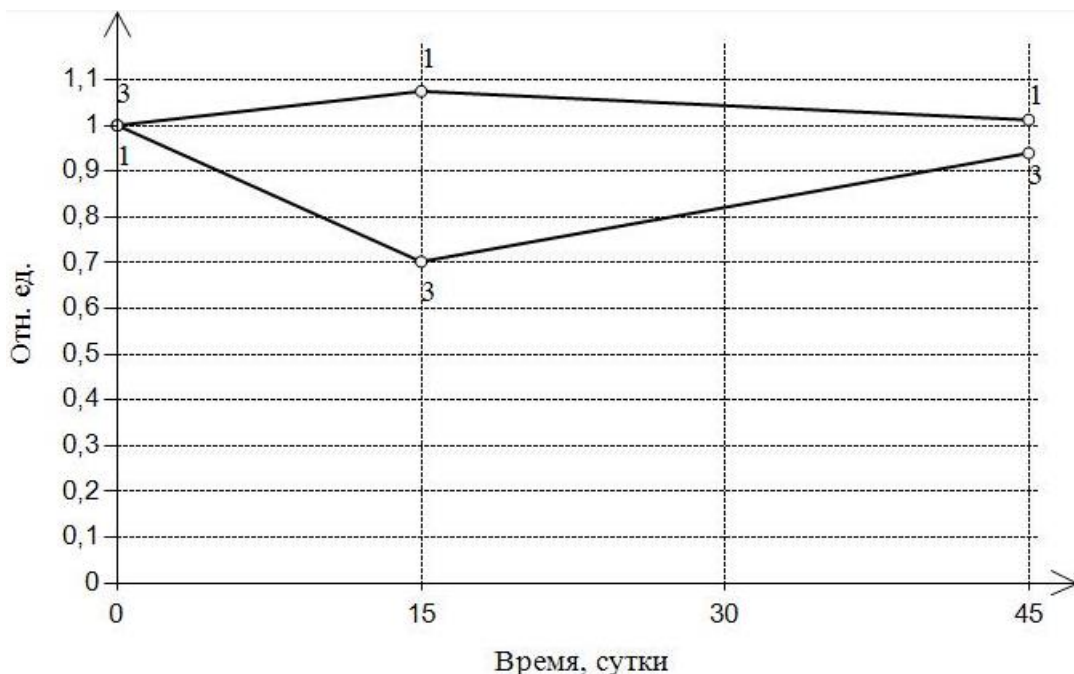


Рисунок 3. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1 и 3.

Таблица 4. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, 3, 6.

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов			Относительные показатели твердости для составов			Площадь многоугольника, для составов		
	1	3	6	1	3	6	1	3	6
0	4010,17	7016,08	4089,57	1,00000	1,00000	1,00000	46,85506	37,38871	60,12981
15	4308,81	4926,15	5337,79	1,07447	0,70212	1,30522			
45	4058,15	6590,88	6342,20	1,01196	0,93940	1,55082			

Результаты испытаний, рассмотренных материалов, приведенные в таблице 4 и графиках изменения коэффициентов твердости (рис. 4), подтверждают ранее полученные показатели, что увеличение воздействия повышенной влажностью и переменными положительными температурами в пределах 22–60 °С приводит к снижению пористости материалов и тем самым увеличению показателя твердости.

Рассмотрим составы 1, 4, 5, 6. Состав №4 – это песчаный бетон нового поколения с ГП и каменной муки (КМ), а состав 5 – это песчаный бетон нового поколения с МК (с использованием микрокремнезема) и ГП (с гиперпластификатором). Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости от времени выдержки для композитов составов 1, 4, 5, 6 приведены на рис. 5, а результаты расчетов приведены в таблице 5.

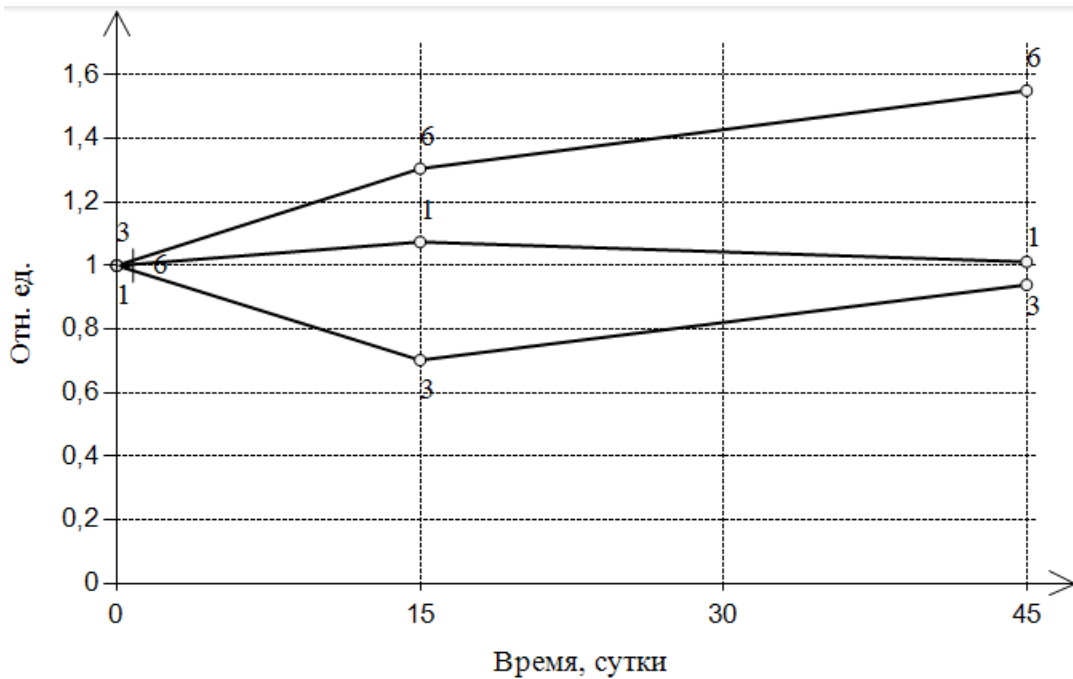


Рисунок 4. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1, 3 и 6.

Таблица 5. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, 4, 5, 6.

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов				Относительные показатели твердости для составов				Площадь многоугольника, для составов			
	1	4	5	6	1	4	5	6	1	4	5	6
0	4010,17	5476,90	9746,86	4089,57	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000				
15	4308,81	4591,72	5577,39	5337,79	1,07447	0,83838	0,57222	1,30522	46,85506	48,69674	39,92888	60,12981
45	4058,15	12705,9	12705,90	6342,20	1,01196	1,48888	1,30359	1,55082				

Сравнение между собой рассмотренных составов показывает достаточно высокие физико-механические свойства у материалов нового поколения, включающих в своем составе

одновременно с двумя фракциями кварцевого наполнителя гиперпластификатор, каменную муку и микрокремнезем.

Исследование поведения цементных композитов в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур

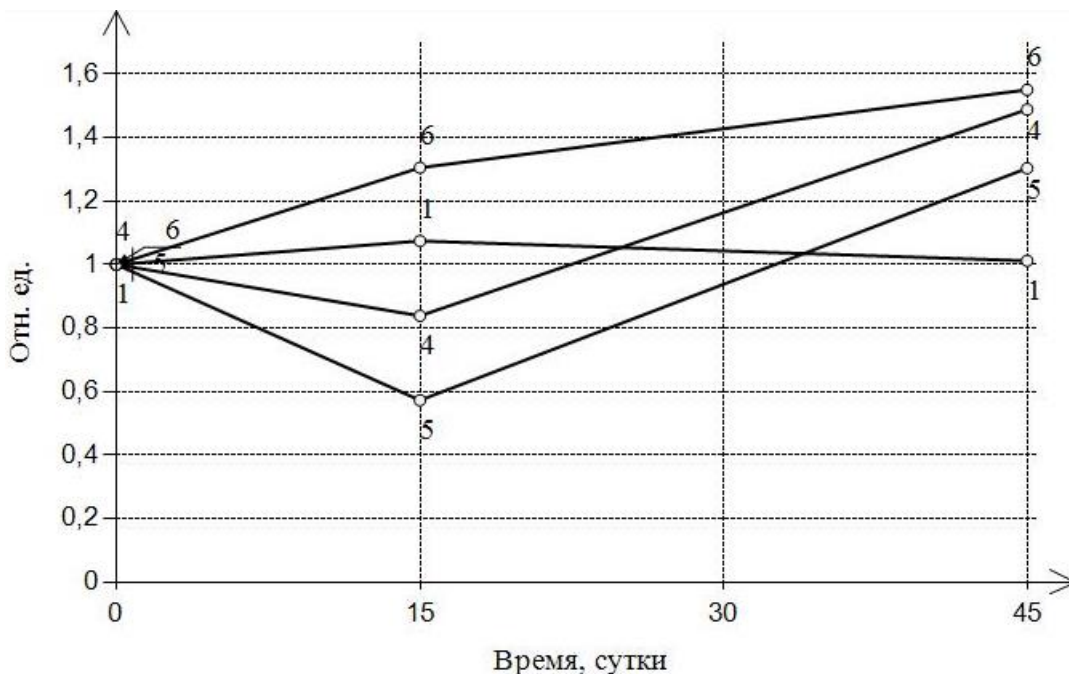


Рисунок 5. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1, 4, 5 и 6.

Таблица 6. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, 5, 7, 8.

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов				Относительные показатели твердости для составов				Площадь многоугольника, для составов			
	1	5	7	8	1	5	7	8	1	5	7	8
0	4010,17	9746,86	1187,85	7488,59	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	46,85506	39,92888	51,09168	22,91096
15	4308,81	5577,39	1496,49	3119,91	1,07447	0,57222	1,25983	0,41662				
45	4058,15	12705,90	1207,29	3013,89	1,01196	1,30359	1,01637	0,40246				

Однако, как и у композита состава 3, имеющего также высокую начальную твердость, в первые дни выдержки наблюдается снижение твердости с последующим ее повышением. Рассмотрим составы 1, 5, 7, 8. Состав 7 – песчаный бетон переходного поколения с ГП

Melflux. Состав 8 – песчаный бетон переходного поколения с ГП «Хидетал 9γ». Результаты расчетов приведены в таблице 6. Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости композитов от времени их выдерживания для составов 1, 5, 7, 8 приведена на рис. 6.

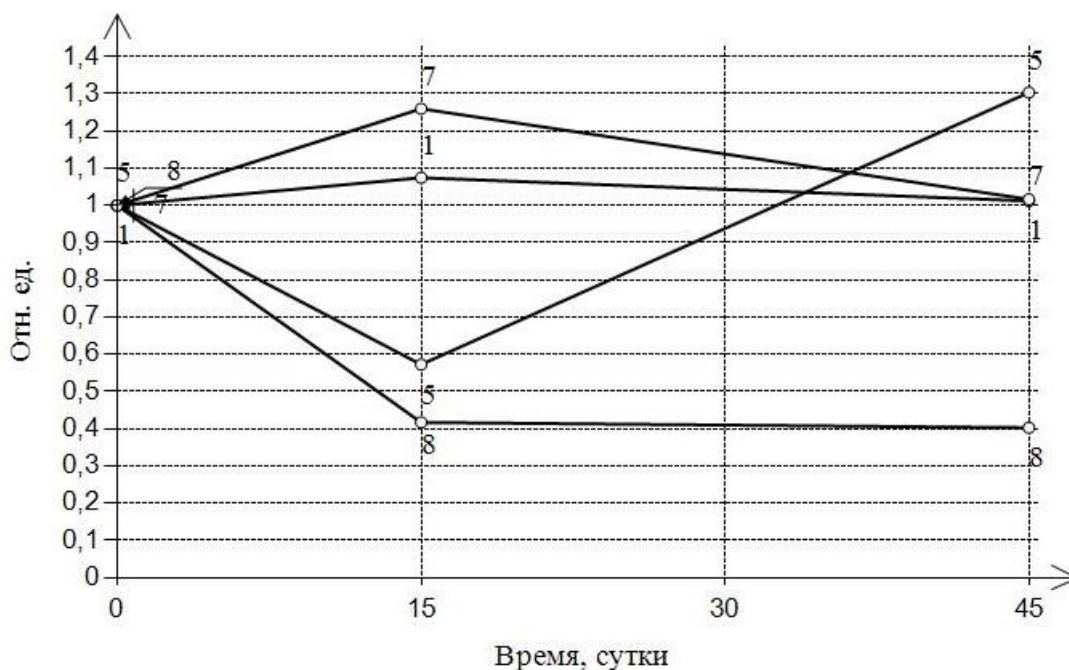


Рисунок 6. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1, 5, 7, 8.

Результаты испытаний свидетельствуют о том, что повышенные значения влажности и температуры приводят к более значительным изменениям свойств цементных композитов с добавкой ГП «Хидетал», чем у материалов с ГП «Melflux». В тоже время начальная твердость значительно выше у материалов с гиперпластификатором «Хидетал». Очевидно, что композит с высокой твердостью в начальное время испытания в среде с повышенной влажностью и переменными положительными температурами (23– 60 °С) теряет ее на 60 %. В то же время материал, имеющий показатель твердости в несколько раз меньше, не уменьшает его в течение всего периода испытания в этой же среде.

Рассмотрим составы 1 и М3. Состав М3 – это цементный камень на активированной по режиму Э+М (3-3) воде затворения. Шифр Э+М (3-3) означает, что вода затворения обработана электрическим током с плотностью $J_{\max} = 22 \text{ А/м}^2$ в камере электрохимической активации и электромагнитным полем с $H_{\max} = 75 \text{ кН/м}$ в камере электромагнитной активации. Результаты расчетов приведены в

таблице 7. Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости от времени для составов 1 и М3 приведена на рис. 7.

Из таблицы 7 и рис. 7 видно, что активная вода затворения значительно не повлияла на стойкость цементного камня. Она меньше у цементного камня на активированной воде. Об этом свидетельствует и площади многоугольников. Для такого композита наблюдается в начальное время выдержки в среде снижение поверхностной твердости на 40%.

Рассмотрим составы 1 и Т3. Состав Т3 – это биостойкий композит с добавкой «Teflex Универсальный». Результаты расчетов приведены в таблице 8. Диаграмма с изменениями коэффициентов твердости композитов от времени их выдерживания в среде для составов 1 и Т3 приведена на рис. 8.

Испытания образцов, приготовленных из составов с биоцидной добавкой и без нее, показали уменьшение твердости образцов с добавкой. При этом из результатов также видно, что изменения твердости у образцов обоих составов при выдержке в среде имеют примерно одинаковый характер.

Исследование поведения цементных композитов в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур

Таблица 7. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, М3.

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов		Относительные показатели твердости для составов		Площадь многоугольника, для составов	
	1	М3	1	М3	1	М3
0	4010,17	5168,04	1,00000	1,00000	46,85506	39,23126
15	4308,81	3081,12	1,07447	0,59619		
45	4058,15	6310,88	1,01196	1,22114		

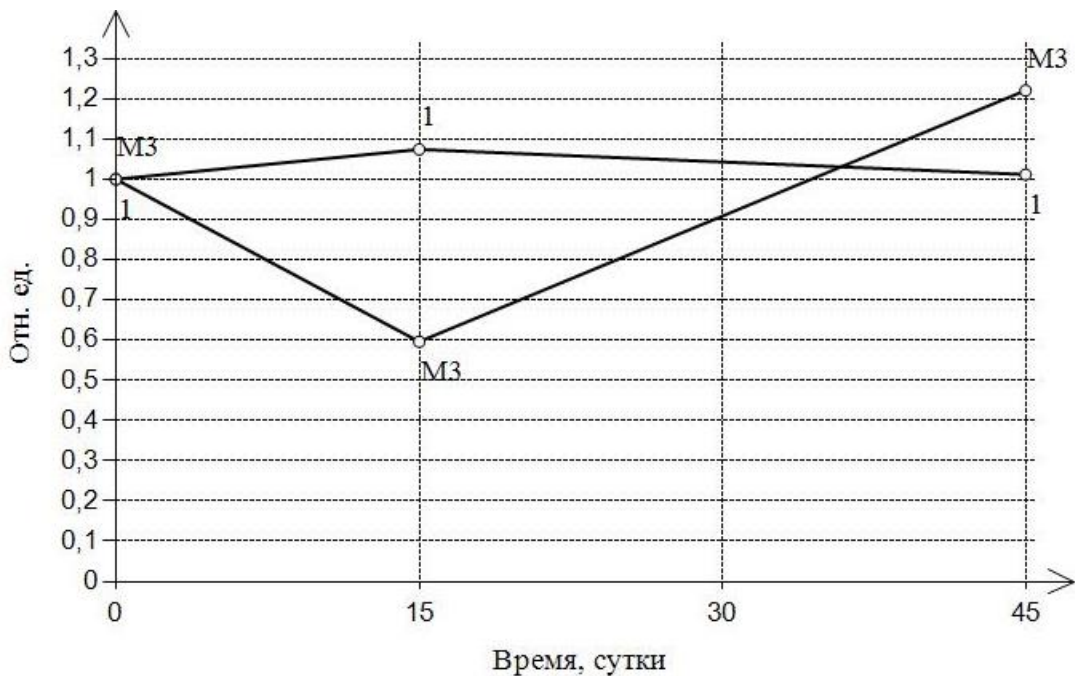


Рисунок 7. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов 1 и М3

Таблица 8. Результаты экспонирования композитов при повышенной влажности и переменной положительной температуре (22–60 °С) составов 1, Т3.

Длительность экспонирования, сутки	Показатели твердости МПа, для составов		Относительные показатели твердости для составов		Площадь многоугольника, для составов	
	1	Т3	1	Т3	1	Т3
0	4010,17	1174,46	1,00000	1,00000	46,85506	52,21704
15	4308,81	1518,65	1,07447	1,29306		
45	4058,15	1223,25	1,01196	1,04154		

Первоначальные свойства материалов при воздействии среды практически не изменились. Уменьшение начальной твердости не наблюдается. Однако, как и в других случаях, материал, имеющий начальную твердость

меньше, в первое время воздействия среды больше уплотняется.

Таким образом, в рассматриваемой статье установлено изменение свойств на поверхности образцов на основе пластифицированных

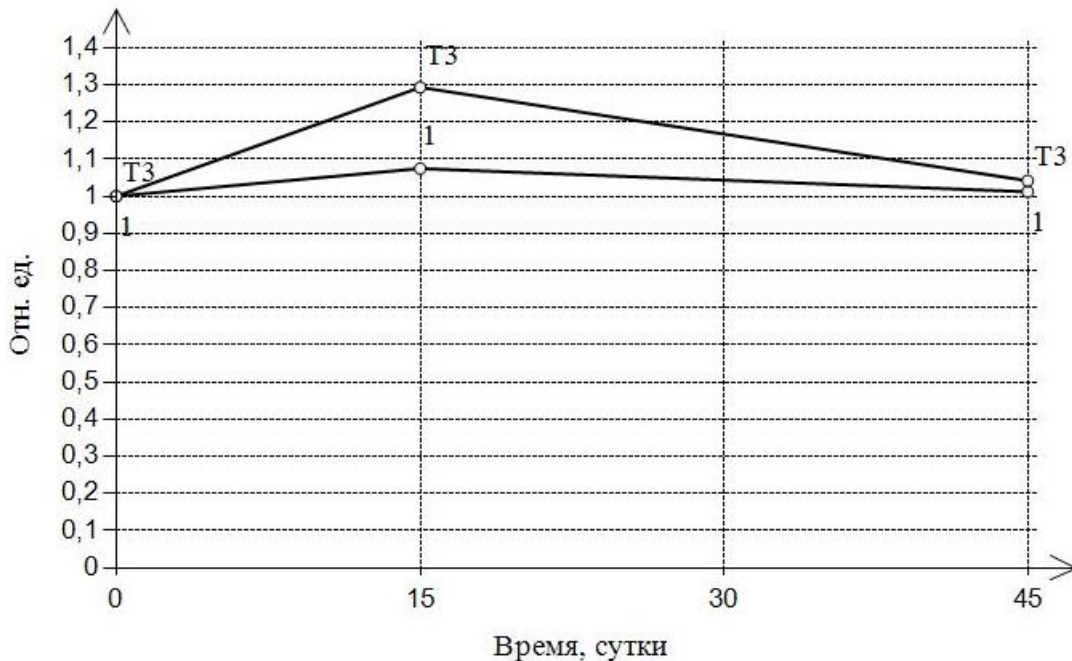


Рисунок 8. Изменение коэффициента твердости композита в зависимости от времени воздействия среды для составов I и T3.

и биоцидных цементных композиций с различными наполнителями. Устойчивость (стойкость) структуры композитов предложено оценивать по величине площади многоугольника, полученного в результате кусочно-линейной интерполяции точек экспонирования.

Кроме того экспериментально установлено, что композиты, имеющие начальные показатели твердости от 1174,46 МПа до 4089,57 МПа по мере выдержки в среде с повышенной влажностью и переменными положительными температурами их не снижают, а наоборот, наблюдается даже повышение, в основном в начальное время испытания. А более твердые композиты, с показателями твердости от 5168,04 МПа до 9746,86 МПа, имеют тенденцию в начальное время воздействия среды уменьшать свою поверхностную твердость, затем ее увеличивать или сохранять, как например песчаный композит с ГП Хидетал 9у. Закономерностям изменения поверхностной твердости цементных композитов можно найти объяснение из рассмотрения особенностей их отвердевания, приведенных в научной и учебной литературе [19, 20, 21,

22]. Приведем некоторые положения при отвердевании цементных композитов:

- темп упрочнения цементного композита в позднем возрасте уменьшается при повышении его прочности [20];
- величина недобора прочности композита увеличивается при более высоких значениях водоцементного отношения (В/Ц) смеси [20];
- карбонизация цементных композитов становится незначительной при относительной влажности близкой к 100 %, потому что в микропорах происходит конденсация водяного пара и их диффузионная проницаемость снижается на несколько порядков [19, 21];
- карбонизация развивается тем быстрее, чем выше температура и менее плотен бетон, поскольку в этом случае возрастает количество пор, не заполненных конденсатом [19, 21];
- колебания температуры в оптимальных пределах при повышенной относительной влажности могут дополнительно способствовать образованию зародышей материала с последующим его упрочнением [22].

Принимая во внимание результаты исследования, приведенные в табл. 1, согласно которым твердость больше у композитов с более высокой прочностью на сжатие, можно предположить, что повышение и сохранение твердости менее твердых материалов в начальное время действия среды связано с их большей потенциальной возможностью упрочняться, а соответственно повышать поверхностное отвердевание.

Роль карбонизации композитов в упрочнении незначительна, она поверхностна и все же больше для менее твердых композитов, поскольку они имеют поры больших размеров, которые не заполняются конденсатом, что способствует уменьшению сопротивления карбонизации.

Уменьшение твердости более плотных композитов в начальное время выдержки в среде с повышенной влажностью и переменными положительными температурами можно объяснить их микропористой структурой, в которой конденсируется влага, приводящая к временному снижению твердости из-за поверхностного увлажнения. Однако с появлением новых центров кристаллизации из-за колебания положительных температур появляется возможность упрочнения композитов, а соответственно повышения их твердости [22].

Роль составляющих композита, в частности добавок, сказывается в основном с их влиянием на интегральную и дифференциальную пористость материала, на его прочность и твердость. Это влияние требует детального изучения, поскольку при общей тенденции повышения твердости с повышением прочности мы не можем говорить о том, что между характеристиками этих свойств наблюдается прямая зависимость (см. таблицу 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меркулов Д.А., Коротяев С.А., Ерофеев В.Т. Оптимизация гранулометрического состава кварцenaполненных полиэфирных композитов. // БСТ : Бюллетень строительной техники, 2017, № 5(993), с. 31-33.
2. Ерофеев В.Т., Смирнов И.В., Меркулов Д.А., Мышкин А.В., Старцев В.О., Молоков М.В., Блазнов А.Н., Журковский М.Е. Теплостойкость полимерных композитов на основе различных связующих. // БСТ : Бюллетень строительной техники, 2017, №5(993), с. 34-36.
3. Ерофеев В.Т., Федорцов А.П., Карпушин С.Н., Воронов П.В., Родин А.И., Болдина И.В. Коррозионная стойкость цементных композитов, изготовленных на основе биоцидных портландцементов с активной минеральной добавкой. // Фундаментальные исследования, 2017, № 4-2, с. 247-256.
4. Ерофеев В.Т., Смирнов В.Ф., Лазарев А.В., Богатов А.Д., Казначеев С.В., Родин А.И., Смирнова О.Н., Смирнов И.В. Биологическая и климатическая стойкость полимерных композитов. // Academia. Архитектура и строительство, 2017, №1, с. 112-119.
5. Ерофеев В.Т., Афонин В.В., Черушова Н.В., Зоткина М.М., Митина Е.А., Зоткин В.Б., Ерофеева И.В. Методы и алгоритмы оценки качества поверхности строительных изделий и конструкций // Фундаментальные исследования, 2016, №4-1, с. 33-40.
6. Ерофеев В.Т., Смирнов И.В., Воронов П.В., Афонин В.В., Каблов Е.Н., Старцев О.В., Старцев В.О., Медведев И.М. Исследование стойкости полимерных покрытий в условиях воздействия климатических факторов Черноморского побережья. // Фундаментальные исследования, 2016, №11-5, с. 911-923.
7. Смирнов И.В., Воронов П.В., Светлов Д.А., Афонин В.В., Качалов А.Н. Климатическая стойкость эпоксидных композитов, наполненных портландцементом. // Сборник статей международной научно-технической конференции «Композиционные строительные материалы. Теория и практика», 2016, с. 79-81.

8. **Смирнов И.В., Воронов П.В., Светлов Д.А., Афонин В.В., Харитонов Ян.А.** Климатическая стойкость эпоксидных композитов в зависимости от содержания отвердителя. // Сборник статей международной научно-технической конференции «Композиционные строительные материалы. Теория и практика», 2016, с. 82-84.
9. **Смирнов И.В., Воронов П.В., Афонин В.В., Светлов Д.А., Харитонов Ян.А.** Климатическая стойкость эпоксидных композитов в зависимости от содержания разжижителя – бутилового спирта. // Сборник статей международной научно-технической конференции «Композиционные строительные материалы. Теория и практика», 2016, с. 85-88.
10. **Ерофеев В.Т., Родин А.И., Калашников В.И., Ерофеева И.В., Смирнов В.Ф.** Биостойкость декоративных цементных композитов. // Вестник Волжского регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук, 2016, №19, с. 304-308.
11. **Ерофеев В.Т., Богатов А.Д., Федорцов А.П., Пронькин С.П.** Исследование механизмов повреждения битумных композитов в условиях воздействия биологических агрессивных сред. // Фундаментальные исследования, 2015, №2-13, с. 2787-2800.
12. **Зоткина М.М., Зоткин В.Б., Емельянов Д.В., Захарова Е.А., Черушова Н.В., Ерофеева И.В., Афонин В.В.** Изменение декоративных свойств пигментированных цементных композитов в результате воздействия биологических агрессивных сред. // Сборник трудов XIV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства», 2015, с. 221-224.
13. **Turusov R.A., Kuperman A.M., Yakhontova E.R.** Regular composite. // Polymer Science, Series D, 2014, Vol. 7, Iss. 1, pp. 9-13.
14. **Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козоматов В.Н.** Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. – СПб.: Наука, 2012. – 476 с.
15. **Сутягин В.М., Ляпков А.А.** Физико-химические методы исследования полимеров. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 140 с.
16. **Турусов Р.А., Егоров В.И., Счастливец И.В., Баранов А.О., Науменко В.Ю.** Результаты испытаний образцов трахеи и вида соединяющих швов. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2009, Том 15, №2, с. 289-305.
17. **Ерофеев В.Т., Митина Е.А., Матвиевский А.А., Осипов А.К., Емельянов Д.В., Юдин П.В.** Композиционные строительные материалы на активированной воде затворения. // Строительные материалы, 2007, №11, с. 56-58.
18. **Фудзии Т., Дзако М.** Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
19. **Алексеев С.Н., Розенталь Н.К.** Коррозионная стойкость железобетонных конструкций в агрессивной промышленной среде. – М. : Стройиздат, 1976. – 205 с.
20. **Баженов Ю. М.** Технология бетона. – М.: Высшая школа, 1987. – 415 с.
21. **Новичков П.И.** Теоретические основы конструирования железобетонных элементов с учетом сопротивления физическим и химическим воздействиям. – СПб. : Наука, 2011. – 216 с.
22. **Федорцов А.П.** Физико-химическое сопротивление строительных композитов и способы его повышения. – Саранск: Издательство Мордовского университета, 2015 – 464 с.

REFERENCES

1. **Merkulov D.A., Korotaev S.A., Erofeev V.T.** Optimizacija granulometricheskogo sostava kvarcenapolnennyh polijefirnyh

- kompozitov [Optimization of the granulometric composition of quarten-filled polyester composites]. // BST Bulletin stroitel'noy tekhniki, 2017, Number 5(993), pp. 31-33.
2. **Erofeev V.T., Smirnov I.V., Merkulov D.A., Mishkin A.V., Startsev V.O., Molokov M.V., Blaznov A.N., Zhurkovsky M.E.** Teplostojkost' polimernyh kompozitov na osnove razlichnyh svjazujushhih [Heat resistance of polymer composites based on various binders]. // BST Bulletin stroitel'noy tekhniki, 2017, Number 5(993), pp. 34-36.
 3. **Erofeev V.T., Fedortsov A.P., Karpushin S.N., Voronov P.V., Rodin A.I., Boldina I.V.** Korrozionnaja stojkost' cementnyh kompozitov, izgotovlennyh na osnove biocidnyh portlandcementov s aktiv-noj mineral'noj dobavkoj [Corrosion resistance of cement composites made on the basis of biocidal Portland cement with an active mineral additive]. // Fundamentalnie Issledovaniya, 2017, Vol. 4-2, pp. 247-256.
 4. **Erofeev V.T., Smirnov V.F., Lazarev A.V., Bogatov A.D., Kaznacheev S.V., Rodin A.I., Smirnova O.N., Smirnov I.V.** Biologicheskaja i klimaticheskaja stojkost' polimernyh kompozitov [Biological and climatic stability of polymer composites]. // Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo, 2017, Number 1, pp. 112-119.
 5. **Erofeev V.T., Afonin V.V., Cherushova N.V., Zotkina M.M., Mitina E.A., Zotkin V.B., Erofeeva I.V.** Metody i algoritmy ocenki kachestva poverhnosti stroitel'nyh izdelij i konstrukcij [Methods and algorithms for assessing the surface quality of building products and structures]. // Fundamentalnie Issledovaniya, 2016, Vol. 4-1, pp. 33-40.
 6. **Erofeev V.T., Smirnov V.F., Voronov P.V., Afonin V.V., Kablov E.N., Startsev O.V., Startsev V.O., Medvedev I.M.** Issledovanie stojkosti polimernyh pokrytij v uslovijah vozdeystvija klimaticheskikh faktorov Chernomorskogo poberezh'ja [Investigation of the durability of polymer coatings under the influence of climatic factors of the Black Sea coast]. // Fundamentalnie Issledovaniya, 2016, Vol. 11-5, pp. 911-923.
 7. **Smirnov I.V., Voronov P.V., Svetlov D.A., Afonin V.V., Kachalov A.N.** Klimaticheskaja stojkost' jepoksidnyh kompozitov, napolnennyh portlandcementom [The climatic stability of epoxy composites filled with Portland cement]. // Proceedings of the International scientific and technical conference "Kompozicionnye stroitel'nye materialy. Teorija i praktika", 2016, pp. 79-81.
 8. **Smirnov I.V., Voronov P.V., Svetlov D.A., Afonin V.V., Kharitonov Y.A.** Klimaticheskaja stojkost' jepoksidnyh kompozitov v zavisimosti ot sodержaniya otverditelja [The climatic stability of epoxy composites depending on the content of the hardener]. // Proceedings of the International scientific and technical conference "Kompozicionnye stroitel'nye materialy. Teorija i praktika", 2016, pp. 82-84.
 9. **Smirnov I.V., Voronov P.V., Afonin V.V., Svetlov D.A., Kharitonov Y.A.** Klimaticheskaja stojkost' jepoksidnyh kompozitov v zavisimosti ot sodержaniya razzhizhitelja – butilovogo spirta [The climatic stability of epoxy composites, depending on the content of the diluent - butyl alcohol]. // Proceedings of the International scientific and technical conference "Kompozicionnye stroitel'nye materialy. Teorija i praktika", 2016, pp. 85-88.
 10. **Erofeev V.T., Rodin A.I., Kalashnikov V.I., Erofeeva I.V., Smirnov V.F.** Biostojkost' dekorativnyh cementnyh kompozitov [Biostability of decorative cement composites]. // Vestnik Volzhskogo regional'nogo otdelenijah Rossijskoj akademii arhitektury i stroitel'nyh nauk, 2016, Number 19, pp. 304-309.
 11. **Erofeev V.T., Bogatov A.D., Fedortsov A.P., Pronkin S.P.** Issledovanie mehanizmov povrezhdenija bitumnyh kompozitov v uslovijah vozdeystvija biologicheskikh agresivnyh sred [Investigation of the mechanisms of damaging bituminous composites

- under the conditions of the action of biological corrosive media]. *Fundamentalnie Issledovaniya*, 2015, Vol. 2-13, pp. 2787-2800.
12. **Zotkina M.M., Zotkin V.B., Emelyanov D.V., Zakharova E.A., Cherushova N.V., Erofeeva I.V., Afonin V.V.** Izmenenie dekorativnykh svoystv pigmentirovannykh cementnykh kompozitov v rezul'tate vozdeystvija biologicheskikh agressivnykh sred [Change in the decorative properties of pigmented cement composites as a result of exposure to biological corrosive media]. *Proceeding of the 14th International Scientific and Technical Conference "Aktual'nye voprosy arhitektury i stroitel'stva"*, 2015, pp. 221-224.
 13. **Turusov R.A., Kuperman A.M., Yakhontova E.R.** Regular composite. // *Polymer Science, Series D*, 2014, Vol. 7, Iss. 1, pp. 9-13.
 14. **Bobrishev A.N., Erofeev V.T., Kozomazov V.N.** Fizika i sinergetika dispersno-neuporjadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh system [Physics and Synergetics of Disperse-Disordered Condensed Composite Systems]. Saint-Petersburg, 2012, 476 pages.
 15. **Sutyagin V.M., Lyapkov A.A.** Fiziko-himicheskie metody issledovaniya polimerov [Physico-chemical methods for the study of polymers]. Tomsk, Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2010, 140 pages.
 16. **Turusov R.A., Egorov V.I., Schastlivtsev I.V., Baranov A.O., Naumenko V.Yu.** Rezul'taty ispytaniy obrazcov trahei i vida soedinjajushhih shvov [The results of tests of tracheal specimens and the kind of joints]. // *Mehanika kompozicionnykh materialov i konstrukcij*, 2009, Vol. 15, Iss. 2, pp. 289-305.
 17. **Erofeev V.T., Mitina E.A., Matvievsky A.A., Osipov A.K., Emelyanov D.V., Yudin P.V.** Kompozicionnye stroitel'nye materialy na aktivirovannoj vode zatvorenija [Composite building materials on activated mixing water]. // *Stroutelniye materialy*, 2007, Number 11, pp. 56-58.
 18. **Fudzin T., Dzako M.** *Mehanika razrusheniya kompozicionnykh materialov* [Mechanics of fracture of composite materials]. Moscow, Mir, 1982, 232 pages.
 19. **Alekseev S.N., Rozental N.K.** Korroziionnaja stojkost' zhelezobetonnykh konstrukcij v agressivnoj promyshlennoj srede [Corrosion resistance of reinforced concrete structures in an aggressive industrial environment]. Moscow, Stroyizdat, 1976, 205 pages.
 20. **Bazhenov Yu.M.** *Tehnologija betona* [Technology of concrete]. Moscow, Visshaya shkola, 1987, 415 pages.
 21. **Novichkov P.I.** *Teoreticheskie osnovy konstruirovaniya zhelezobetonnykh jelementov s uchetom soprotivlenija fizicheskim i himicheskim vozdeystvijam* [Theoretical bases of designing reinforced concrete elements with regard to resistance to physical and chemical influences]. Saint-Petersburg, 2011, 216 pages.
 22. **Fedortsov A.P.** *Fiziko-himicheskoe soprotivlenie stroitel'nykh kompozitov i sposoby ego povysheniya* [Physico-chemical resistance of building composites and ways to improve it]. Saransk, Izdatelstvo Morдовского университета, 2015, 464 pages.
-
- Ерофеева Ирина Владимировна, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва; 430005, Российская Федерация, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.
- Афонин Виктор Васильевич, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва; 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7 (8342) 29-06-02; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.
- Федорцов В.А., Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва; 430005, Российская Федерация, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Исследование поведения цементных композитов в условиях повышенной влажности и переменных положительных температур

Емельянов Денис Владимирович, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва; 430005, Российская Федерация, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Подживотов Николай Юрьевич, кандидат технических наук, лаборатория №30, Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов ГНЦ РФ; 105005, Россия, Москва, ул. Радио, д. 17; тел.: +7 (499) 261-86-77, +7 (499) 267-21-09; факс: +7 (499) 267-86-09; e-mail: admin@viam.ru.

Зоткина Марина Михайловна, кандидат технических наук; кафедра строительных материалов и технологий, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва; 430005, Российская Федерация, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Irina V. Erofeeva, National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; phone +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Victor V. Afonin, Associate Professor, Ph.D., Associate Professor of Department of automated information processing and management systems, National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; phone +7 (8342) 29-06-02; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Vladislav A. Fedortsov, National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; phone +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Denis V. Emelyanov, National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; phone +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

Nikolay Yu. Podzhivotov, Ph.D, Laboratory 30, All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials GNC RF; 17, Ulitsa Radio, Moscow, 105055, Russia; phones: +7 (499) 261-86-77, +7 (499) 267-21-09; fax: +7 (499) 267-86-09; e-mail: admin@viam.ru.

Marina M. Zotkina, Ph.D, Department of Construction Materials and Technologies, National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; phone +7 (8342) 47-29-13; e-mail: vvafonin53@yandex.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-82-95

ON HAMILTONIAN FORMULATIONS AND CONSERVATION LAWS FOR PLATE THEORIES OF VEKUA-AMOSOV TYPE

Sergey I. Zhavoronok

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, RUSSIA

Abstract: Some variants of the generalized Hamiltonian formulation of the plate theory of I. N. Vekua – A. A. Amosov type are presented. The infinite dimensional formulation with one evolution variable, or an “instantaneous” formalism, as well as the de Donder – Weyl one are considered, and their application to the numerical simulation of shell and plate dynamics is briefly discussed. The main conservation laws are formulated for the general plate theory of N^{th} order, and the possible motion integrals are introduced.

Keywords: refined shell theory, analytical mechanics of continua, Hamiltonian formalism, de Donder – Weyl formulation, conservation laws

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ И ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИЯХ ПЛАСТИН ТИПА И.Н. ВЕКУА – А.А. АМОСОВА

С.И. Жаворонок

Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Резюме: Предложены различные варианты обобщенных гамильтоновых формулировок общей теории оболочек типа И.Н. Веква – А.А. Амосова. Рассмотрены формулировки на базе бесконечномерного фазового пространства с одной эволюционной переменной, а также на основе формализма де Дондера – Вейля, обсуждаются возможности их приложения к численным решениям задач механики тонкостенных систем. Получены основные законы сохранения для теории оболочек N -го порядка и определены основные первые интегралы системы.

Ключевые слова: теория оболочек высшего порядка, аналитическая механика континуальных систем, формализм Гамильтона, формулировка де Дондера – Вейля, законы сохранения

1. INTRODUCTION

The modern theory of shells and plates deals with many different problems in thin-walled structures' mechanics [1]. One can note that “...new, more reliable 2D multi-field models are needed... for high-frequency vibrations of shells” [2] (see also [3-7]), in particular for functionally graded structures [8-10], as well as for wave propagation problems [11-13] and in the transient plate and shell dynamics [14]. A lot of different refined models for plates and shells exist, for instance the ones based on power series extension [4, 5, 8], or using the asymptotic integration [11-13, 15, 16]. An

efficient approach that allows one to construct the hierarchy of various order shell and plate models was constructed by I.N. Vekua [17] on the basis of orthogonal series and further improved in [18-20]; this type of shell theories has shown its efficiency in dynamics, especially for transient problems [21].

The new variant of the shell theory of I. N. Vekua type obtained by A.A. Amosov [22, 23] is based on the use of the tensor algebra; it offers the improved formalization level close to the one of the finite element method [23, 24]. The further improvement of the Vekua – Amosov higher order theory of shells and plates consists in the use of Lagrangian formalism of

analytical mechanics extended to continuum systems [24-27].

The Lagrangian formulation of refined plate models is quite efficient in steady dynamics problems such as [28, 29]. At the same time it is known that the Hamiltonian approach [30] provides some advantages (e. g. see [31]). Some attempts to use the features of symplecticity of Hamiltonian structures in statics were made in [32-35] where the so-called “instantaneous” formalism was applied and the Hamiltonian systems with operator coefficients were studied (an approach similar to [36-38]). This way leads to first-order “evolution” differential equations in time domain with second-order spatial derivatives. An alternative approach proposed by N.A. Kilchevskiy [39] deals with the Legendre transform considering both time and space derivatives; it leads to the finite dimensional phase space formalism well known in the general field theory as a “polymomentum formalism” [40, 41]. Various types of Lepagean equivalents may be used to obtain different Hamiltonian systems while the simplest one corresponds to the de Donder – Weyl formalism [40]. Both “instantaneous” and de Donder formulations for the plate theory of Nth order are constructed below, and main conservation laws are considered.

2. FUNDAMENTALS OF THE PLATE THEORY OF NTH ORDER

Let the plate be a three-dimensional body bounded by face planes S_{\pm} and a lateral surface S_B [23-27, 47], with the mid-plane S and the plate thickness denoted as $2h$ [25].

$$V \subset \mathbb{R}^3, \bar{V} = V \cup \partial V, \partial V = S_B \oplus S_{\pm};$$

$$\forall M_* \in \bar{V}, M \in S \quad \mathbf{R}(M_*) = \mathbf{r}(M) + h\zeta \mathbf{n}.$$

The two-dimensional model of a plate consists in the two-dimensional manifold S ,

$$\bar{S} = S \cup (\partial S = S \cap S_B)$$

with the curvilinear chart $\xi^{\alpha} \in D_{\xi} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\alpha = 1, 2$, so that $\forall M \in \bar{S} \quad \mathbf{R}(M) \equiv \mathbf{r}(\xi^{\alpha})$. Two base vectors

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \mathbf{r}, \quad \partial_{\alpha} \equiv \partial / \partial \xi^{\alpha}$$

corresponding to ξ^{α} induce the metrics

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\beta};$$

the normal unit is defined as

$$\mathbf{n} = a^{-1/2} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2), \quad a = \det a_{\alpha\beta}.$$

Let

$$\mathbf{u} = u_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} + u_3 \mathbf{n}$$

be the spatial displacement vector field. Thus, the three-dimensional problem statement of elasticity theory is based on the Hamilton principle [25, 26]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \mathcal{L}_V dV + \int_{\partial V} \mathcal{L}_{\partial V} dS \right) dt = 0. \quad (2.1)$$

Let us consider the Lagrangian continuum system defined within the configuration manifold Ω_N with the field variables of the 1st kind $u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}$ being the expansion factors of the spatial displacement field \mathbf{u} with respect to the biorthogonal function system $p_{(k)}(\zeta), p^{(k)}(\zeta)$ [26, 27], so that we have

$$\mathbf{u}(t, \xi^{\alpha}, \zeta) \approx \left(u_{\alpha}^{(k)} \mathbf{r}^{\alpha} + u_3^{(k)} \mathbf{n} \right) p_{(k)}(\zeta), \quad k = \overline{0, N}.$$

Here the components $u_{\alpha}(t, \xi^{\alpha}, \zeta), u_3(t, \xi^{\alpha}, \zeta)$ are assumed to be square integrable over

$[-1,1] \ni \zeta$ [25-27]. In general, the convergence is supposed following [15].

The Lagrangian density can be now defined on S and ∂S as follows [33, 35]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_\alpha^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}) = \\ = \frac{1}{2} \rho_{(k)}^{(m)} (\dot{u}_{(m)}^\alpha \dot{u}_\alpha^{(k)} + \dot{u}_{(m)}^3 \dot{u}_3^{(k)}) + F_{(k)}^i u_i^{(k)} - \\ - \frac{1}{2} (C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\nabla}_\gamma u_\delta^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha\beta 3} u_3^{(m)}) \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} - \\ - \frac{1}{2} (C_{(km)}^{3\beta\gamma 3} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(m)} + C_{(km)}^{3\beta\gamma} u_\gamma^{(m)}) \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} - \quad (2.2) \\ - \frac{1}{2} h^{-1} (C_{(km)}^{33\gamma\delta} \bar{\nabla}_\gamma u_\delta^{(m)} + C_{(km)}^{333} u_3^{(m)}) D_{(n)}^{(k)} u_3^{(n)} - \\ - \frac{1}{2} h^{-1} (C_{(km)}^{\alpha 3\gamma 3} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha 3\gamma} u_\gamma^{(m)}) D_{(n)}^{(k)} u_\alpha^{(n)}; \\ \mathcal{L}_{\partial S}(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}) = q_{B(k)}^\alpha u_\alpha^{(k)} + q_{B(k)}^3 u_3^{(k)}. \end{aligned}$$

Here $\bar{\nabla}$ denotes the covariant derivative and $D_{(m)}^{(k)}$ are linear operators (see [23-29]):

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}^{(m)} = (\rho p^{(m)}, p_{(k)})_1; \quad D_{(n)}^{(k)} = (dp_{(n)}/d\zeta, p^{(k)})_1; \\ C_{(km)}^{333} = h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{3333}; \quad C_{(km)}^{\alpha\beta 3} = h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{\alpha\beta 33}; \\ C_{(km)}^{3\beta\gamma 3} = h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{3\beta\gamma 3\gamma}; \quad C_{(km)}^{\alpha\beta 3} = h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{\alpha\beta 33}. \end{aligned}$$

Thus, the plate is defined as a two-dimensional continuum system within the field variables $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ and the Lagrangian densities \mathcal{L}_S , $\mathcal{L}_{\partial S}$. Finally, the generalized Lagrange equations of the second kind [25]

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} = 0; \\ \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} = 0 \quad (2.3) \end{aligned}$$

can be formulated in the particular case of the Nth order plate theory as (2.4) (e. g. see [25])

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_{(m)}^\alpha = \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} D_{(k)}^{(m)} \sigma_{(m)}^{\alpha 3} + \bar{F}_{(k)}^\alpha; \\ \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_{(m)}^3 = \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{3\beta} - h^{-1} D_{(k)}^{(m)} \sigma_{(m)}^{33} + \bar{F}_{(k)}^3; \end{aligned} \quad (2.4)$$

as well their natural boundary conditions (2.5)

$$\begin{aligned} (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_\beta - q_{B(k)}^\alpha) \delta u_\alpha^{(k)} \Big|_{S_B} = 0; \\ (\sigma_{(k)}^{3\beta} \nu_\beta - q_{B(k)}^3) \delta u_3^{(k)} \Big|_{S_B} = 0; \end{aligned} \quad (2.5)$$

while the corresponding initial conditions can be written as (2.6) (see [24-26]):

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_\alpha^{(k)}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_3^{(k)}; \\ \dot{u}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = V_\alpha^{(k)}; \quad \dot{u}_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = V_3^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Let us note that the generalized tangential and shear forces can be defined by the partial derivatives of the Lagrangian density \mathcal{L}_S :

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}}, \quad \sigma_{(k)}^{3\beta} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}}. \quad (2.7)$$

Finally, the total Lagrangian for the plate can be determined as follows:

$$L = \int_S \mathcal{L}_S dS + \int_{\partial S} \mathcal{L}_{\partial S} d\Gamma.$$

3. ENERGY AND MOMENTUM CONSERVATION LAWS IN THE PLATE THEORY OF NTH ORDER

Let us define the total time derivative of the Lagrangian densities given by (2.2):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{L}_S \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_\alpha^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} \right) = \\ & = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} \dot{u}_3^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} \ddot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} \ddot{u}_3^{(k)} + \\ & \quad + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\beta \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\beta \dot{u}_3^{(k)}; \\ & \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\partial S} \left(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)} \right) = \bar{q}_{(k)}^\alpha \dot{u}_\alpha^{(k)} + \bar{q}_{(k)}^3 \dot{u}_3^{(k)}. \end{aligned}$$

Accounting for the Gauss-Ostrogradsky theorem, we can represent the corresponding time derivative for the total Lagrangian as

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{d\mathcal{L}_S}{dt} dS + \int_{\partial S} \frac{d\mathcal{L}_{\partial S}}{dt} d\Gamma = \\ & = \int_S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} \dot{u}_3^{(k)} \right) dS + \\ & - \int_S \left[\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right] \dot{u}_\alpha^{(k)} dS - \\ & - \int_S \left[\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} \right] \dot{u}_3^{(k)} dS + \\ & + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} \dot{u}_3^{(k)} \right) \nu_\beta d\Gamma - \\ & + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial u_3^{(k)}} \dot{u}_3^{(k)} \right) d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Taking into account the generalized Lagrange equations of the second kind (2.3) for the plate theory of N^{th} order [25-27] coinciding with the square-bracketed terms in (3.1) as well as their natural boundary conditions (2.5), we can write the total time derivative using the following representation:

$$\begin{aligned} \frac{dH^0}{dt} & = \int_{\partial S} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_\beta - \bar{q}_{B(k)}^\alpha \right) \dot{u}_\alpha^{(k)} d\Gamma + \\ & + \int_{\partial S} \left(\sigma_{(k)}^{3\beta} \nu_\beta - \bar{q}_{B(k)}^3 \right) \dot{u}_3^{(k)} d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where the Hamiltonian is defined as follows:

$$H^0 = \int_S \mathcal{H}^0 dS.$$

The surface density of the Hamiltonian \mathcal{H}^0 is constructed by means of the Legendre transform of the Lagrangian surface density \mathcal{L}_S considering only time derivatives of the field variables $\dot{u}_\alpha^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}$ in terms of the so-called “infinite dimensional phase space”, or “instantaneous” formulation [30, 42]:

$$\mathcal{H}^0 = p_\alpha^{(k)} \dot{u}_\alpha^{(k)} + p_3^{(k)} \dot{u}_3^{(k)} - \mathcal{L}_S, \tag{3.3}$$

where the generalized momenta of the k - th order are determined by the formulae

$$\begin{aligned} p_\alpha^{(k)} & = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} = \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_\alpha^{(m)}; \\ p_3^{(k)} & = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} = \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_3^{(m)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

The formula (3.3) yields that H^0 is the total energy; it follows from (2.2) and (3.4). It can be seen that the bracketed terms in (3.2) coincide with (2.5), therefore the total energy H^0 becomes the integral of motion for the plate if the boundary conditions on ∂S are exactly satisfied. Thus, the formula (3.2) defines the energy conservation. Moreover we can obtain the differential formulation of the conservation law for the energy density \mathcal{H}^0 :

$$\dot{\mathcal{H}}^0 = -\bar{\nabla}_\beta S^\beta; \tag{3.5}$$

here $\mathbf{S} = S^\beta \mathbf{r}_\beta$ is the tangent vector field of the energy flux [43]:

$$S^\beta = -s_{(k)}^{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha^{(k)} - s_{(k)}^{3\beta} \dot{u}_3^{(k)}. \tag{3.6}$$

This quantity can be useful, in particular, for waveguide problems such as [28, 29].

Now let us consider the total derivatives of the Lagrangian densities with respect to the surface coordinates ξ^γ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi^\gamma} \mathcal{L}_S(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_\alpha^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}, \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}) = \\ = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma \dot{u}_3^{(k)} + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma \bar{\nabla}_\beta \dot{u}_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma \bar{\nabla}_\beta \dot{u}_3^{(k)}; \\ \frac{d\mathcal{L}_{\partial S}}{d\xi^\gamma} = \bar{q}_{(k)}^\alpha \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \bar{q}_{(k)}^3 \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)}. \end{aligned}$$

Keeping in mind that the Riemann-Christoffel tensor of the plane S vanishes,

$$R_{\alpha\beta\bar{i}}^{\bar{i}j} = 0,$$

and for the Gauss-Ostrogradsky theorem, we have

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d\mathcal{L}_S}{d\xi^\gamma} dS + \int_{\partial S} \frac{d\mathcal{L}_{\partial S}}{d\xi^\gamma} d\Gamma = \\ = \int_S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} \right) dS - \\ - \int_S \left[\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right] \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} dS - \\ - \int_S \left[\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} + \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} \right] \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} dS + \\ + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} \right) v_\beta d\Gamma + \\ + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\partial S}}{\partial u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} \right) d\Gamma. \end{aligned}$$

Accounting hence for the Lagrange equations (2.3) for plates [25-27], we have finally

$$\frac{dG_\gamma}{dt} = \int_S \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} v_\beta - \bar{q}_{B(k)}^\alpha \right) \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} d\Gamma + \quad (3.7)$$

$$+ \int_S \left(\sigma_{(k)}^{3\beta} v_\beta - \bar{q}_{B(k)}^3 \right) \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} d\Gamma,$$

$$G_\gamma = \int_S \mathcal{G}_\gamma dS, \quad (3.8)$$

where the covariant components of the wave momentum vector [30] are defined by (3.9):

$$\mathcal{G}_\gamma = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)}. \quad (3.9)$$

Thus, the covariant components G_γ of the total wave momentum vector (3.8) become the integrals of motion if the boundary conditions on ∂S coinciding with the bracketed terms in the formula (3.7) are satisfied exactly.

The differential form of the field momentum conservation law can be written as follows:

$$\dot{\mathcal{G}}_\gamma = \bar{\nabla}_\beta \mathcal{H}_{\gamma}^{\beta\bar{i}}, \quad (3.10)$$

where the components of the Hamilton tensor are introduced by (3.11) accordingly to [40]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\gamma}^{\beta\bar{i}} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_\alpha^{(k)} + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} \bar{\nabla}_\gamma u_3^{(k)} - \delta_\gamma^\beta \mathcal{L}_S. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finally, the conservation law for the moments of wave momentum [30] can be formulated. Let us introduce the momentum moment field normal to the mid-plane S of the plate:

$$M_3 = \int_S \mathcal{M}_3 dS, \quad \mathcal{M}_3 = \epsilon_{\gamma\delta} \xi^\gamma \mathcal{G}^\delta. \quad (3.12)$$

Similarly to the previously derived integral conservation laws, we obtain for the wave momentum moment (3.12) the following one:

$$\begin{aligned} \frac{dM_3}{dt} = & - \int_S \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{H}^{\beta\gamma} dS + \\ & + \int_{\partial S} \epsilon_{\delta\gamma} \xi^\delta a^{\gamma\epsilon} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_\beta - \bar{q}_{B(k)}^\alpha \right) \bar{\nabla}_\epsilon u_\alpha^{(k)} d\Gamma + \quad (3.13) \\ & + \int_{\partial S} \epsilon_{\delta\gamma} \xi^\delta a^{\gamma\epsilon} \left(\sigma_{(k)}^{3\beta} \nu_\beta - \bar{q}_{B(k)}^3 \right) \bar{\nabla}_\epsilon u_3^{(k)} d\Gamma. \end{aligned}$$

The stress symmetry,

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha},$$

and the first term in (3.13) imply that the Hamilton tensor (3.11) is symmetric; the total moment of momentum (3.12) becomes integral of motion if the boundary conditions on the plate contour ∂S are satisfied exactly.

4. HAMILTON EQUATIONS OF THE NTH ORDER PLATE THEORY IN TERMS OF THE INSTANTANEOUS HAMILTON FORMALISM

These equations can be obtained following J.B. Leech [30]. Let us consider the total differential of the Hamiltonian \mathcal{H}^0 :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}^0 = & \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_\alpha^{(k)}} du_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_3^{(k)}} du_3^{(k)} + \\ & + \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_{(k)}^\alpha} dp_{(k)}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} d\left(\bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}\right) + \\ & + \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_{(k)}^3} dp_{(k)}^3 + \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} d\left(\bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}\right). \end{aligned}$$

On the other hand, from the definition for the \mathcal{H}^0 (3.3) we have accordingly to J. Leech [30]

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}^0 = & - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} du_\alpha^{(k)} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} du_3^{(k)} - \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} d\left(\bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} d\left(\bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}\right) - \\ & + p_{(k)}^\alpha \dot{u}_\alpha^{(k)} + p_{(k)}^3 \dot{u}_3^{(k)} + \dot{u}_\alpha^{(k)} p_{(k)}^\alpha + \dot{u}_3^{(k)} p_{(k)}^3, \end{aligned}$$

and the following relations can be derived:

$$\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_\alpha^{(k)}} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_3^{(k)}} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}}; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}}; \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} = - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}}$$

as well as two Hamiltonian equations:

$$\dot{u}_\alpha^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_{(k)}^\alpha}, \quad \dot{u}_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_{(k)}^3}. \quad (4.3)$$

Now let us consider the generalized momenta (3.4). Accounting for the Lagrange equations [25] results in the following relationships:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(k)}^\alpha = & \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_\alpha^{(k)}}; \\ \dot{p}_{(k)}^3 = & \bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} - \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u_3^{(k)}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

They are the dynamics equations [30, 40]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(k)}^\alpha = & \bar{\nabla}_\beta \left(C_{(nm)}^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)} + C_{(nm)}^{\alpha\beta 3} u_3^{(m)} \right) - \\ & - h^{-1} D_{(k\Gamma)}^{(n)} \left(C_{(nm)}^{\alpha 33\delta} \bar{\nabla}_\delta u_3^{(m)} + C_{(nm)}^{\alpha 3\gamma} u_\gamma^{(m)} \right) + F_{(k)}^\alpha; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(k)}^3 = & \bar{\nabla}_\beta \left(C_{(nm)}^{3\beta 3\delta} \bar{\nabla}_\delta u_3^{(m)} + \bar{C}_{(nm)}^{3\beta\gamma} u_\gamma^{(m)} \right) + \\ & - h^{-1} D_{(k\Gamma)}^{(n)} \left(\bar{C}_{(nm)}^{33\gamma\delta} \bar{\nabla}_\delta u_\gamma^{(m)} + \bar{C}_{(nm)}^{333} u_3^{(m)} \right) + F_{(k)}^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

similar to the Lagrange equations [25-27]; their right hand sides contain second-order covariant derivatives of the field variables $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$. The natural boundary conditions can be rewritten in the following notation:

$$\left[v_\beta \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{H}_{\partial S}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right] \delta u_\alpha^{(k)} \Big|_{\partial S} = 0; \quad (4.7)$$

$$\left[v_\beta \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{H}_{\partial S}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right] \delta u_\alpha^{(k)} \Big|_{\partial S} = 0$$

where formally

$$\mathcal{H}_{\partial S} = \mathcal{L}_{\partial S}.$$

Finally, we have the initial conditions

$$u_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_\alpha^{(k)}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = U_3^{(k)}; \quad (4.8)$$

$$p_{(k)}^\alpha \Big|_{t=t_0} = P_{(k)}^\alpha; \quad p_{(k)}^3 \Big|_{t=t_0} = P_{(k)}^3.$$

The obtained formulation (4.3), (4.5), (4.6), (4.7), and (4.8) corresponds to the so-called “instantaneous” Hamiltonian formulation for continuum systems that is based on the infinite-dimensional phase spaces [42].

5. HAMILTON – DE DONDER – WEYL EQUATIONS OF THE N-TH ORDER PLATE THEORY

The Hamilton – de Donder – Weyl approach deals with finite dimensional phase spaces [41, 42] and is based on the set of polymomenta induced by spatial derivatives of field variables of the 1st kind (2.7).

Let us construct the new Hamiltonian density depending on momenta and polymomenta using the Legendre transform considering both time and space derivatives of $\dot{u}_\alpha^{(k)}$, $\dot{u}_3^{(k)}$:

$$\mathcal{H}^{DW}(u_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, p_{(k)}^\alpha, p_{(k)}^3, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}, \sigma_{(k)}^{3\beta}) =$$

$$= p_{(k)}^\alpha \dot{u}_\alpha^{(k)} + p_{(k)}^3 \dot{u}_3^{(k)} + \quad (5.1)$$

$$+ \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} + \sigma_{(k)}^{3\beta} \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} - \mathcal{L}_S$$

and let us compute its total differential:

$$d\mathcal{H}^{DW} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_{(k)}^\alpha} dp_{(k)}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_{(k)}^3} dp_{(k)}^3 +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} d\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{3\beta}} d\sigma_{(k)}^{3\beta} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_\alpha^{(k)}} du_\alpha^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_3^{(k)}} du_3^{(k)}.$$

On the other hand, from the definition given by Legendre transform (5.1) we obtain

$$d\mathcal{H}^{DW} = \dot{u}_\alpha^{(k)} dp_{(k)}^\alpha + \dot{u}_3^{(k)} dp_{(k)}^3 +$$

$$+ \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} d\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} + \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} d\sigma_{(k)}^{3\beta} +$$

$$+ p_{(k)}^\alpha d\dot{u}_\alpha^{(k)} + p_{(k)}^3 d\dot{u}_3^{(k)} +$$

$$+ \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} d(\bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}) + \sigma_{(k)}^{3\beta} d(\bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}) - \quad (5.2)$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_\alpha^{(k)}} d\dot{u}_\alpha^{(k)} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{u}_3^{(k)}} d\dot{u}_3^{(k)} -$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)}} d\bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)}} d\bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} -$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}} du_\alpha^{(k)} - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} du_3^{(k)},$$

therefore we have the following relations for the partial derivatives of the Lagrangian and Hamiltonian surface densities:

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_\alpha^{(k)}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_\alpha^{(k)}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_3^{(k)}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial u_3^{(k)}} \quad (5.3)$$

as well as the first pair of the canonical Hamilton – de Donder – Weyl equations:

$$\dot{u}_\alpha^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_\alpha^{(k)}}, \quad \dot{u}_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial p_3^{(k)}} \quad (5.4)$$

and the second quasi-canonical pair:

$$\bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}}, \quad \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial \sigma_{(k)}^{3\beta}}. \quad (5.5)$$

The equations (5.4) define the generalized velocities, or field variables of the 2nd kind, whereas the equations (5.5) are constitutive relations represented in their inverse formulation and solved for the distortions.

Considering hence the Lagrange equations of (2.3) together with the definitions of momenta (3.4) and polymomenta (2.7), we obtain the last pair of quasi-canonical equations (5.6):

$$\begin{aligned} \dot{p}_{(k)}^\alpha - \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_\alpha^{(k)}}, \\ \dot{p}_{(k)}^3 - \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{3\beta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{DW}}{\partial u_3^{(k)}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

The equations (5.6) coincide with the equations (2.4) except the terms with $\sigma_{(k)}^{\alpha 3}$, $\sigma_{(k)}^{33}$ that are expressed through $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$.

Finally, the natural boundary conditions (4.7) can be represented similarly to (2.5):

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \nu_\beta - \frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma^{DW}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right) \Big|_{\partial S} &= 0; \\ \left(\sigma_{(k)}^{3\beta} \nu_\beta - \frac{\partial \mathcal{H}_\Gamma^{DW}}{\partial u_\alpha^{(k)}} \right) \Big|_{\partial S} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

where formally $\mathcal{H}_\Gamma^{DW} = -\mathcal{L}_{\partial S}$ while the kinematic boundary conditions pair corresponds to the equations (5.5) in accordance with the approach shown in [39]. The initial conditions correspond to (4.8).

CONCLUSIONS

Starting from the Lagrangian formalism of the Vekua-Amosov general theory of thick plates, the conservation conditions are formulated, and the main motion integrals are constructed. It has to be noted that the presented plate model corresponds to the “elementary” theory that does not accounts for the boundary conditions on the faces of thin-walled structures. These boundary conditions are approximately satisfied as a result of the convergence of the two-dimensional solutions sequence to the solution of the three-dimensional initial-boundary value problem. Thus, the nonzero energy flux vector field and the normal component of the second-rank Hamilton tensor due to the boundary conditions discrepancy appear on the mid-plane; the total Hamiltonian H^0 as well as the integral field momentum vector components G_γ are therefore motion integrals under assumption of vanishing boundary conditions discrepancy as $N \rightarrow \infty$. In general, this drawback of “elementary” theories can be eliminated on the background of “extended” plate and shell theories (e. g. see [44-47]).

The Hamiltonian field equations for the Nth order plate theory are constructed. This formulation is variationally consistent and allows one the use of methods of lines in time domain for numerical solutions in transient plate dynamics’ problems. On the other hand, the instantaneous Hamiltonian formulation can be considered as an “evolutionary” system of ordinary differential equations in time domain, or, with coefficients containing differential operators. This formalism maybe useful in various semi-analytical approaches such as [31-34], [35] as well as [36-38].

The obtained de Donder – Weyl Hamiltonian \mathcal{H}^0 does not represent the total energy density [40] but allows one to construct the equations system that contains only first-order covariant derivatives. The obtained equations of Hamilton – de Donder – Weyl type (5.5) cannot be interpreted as canonical equations because of presence in their left hand sides the covariant

derivatives; they can be rewritten nevertheless in the canonical representation by translating the terms with Christoffel symbols to their right hand sides. At the same time the dynamic equations (5.6) remain quasi-canonical due to the divergence operators and minus marks with the corresponding terms. The last drawback can be eliminated by means of different Hamiltonian construction (e. g. see [39]); the polymomenta definition also allows a certain degree of arbitrariness in the model formulation, so that the following general notation can be obtained:

$$\nabla^* \otimes \mathbf{U} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}}, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}},$$

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{p} \quad \boldsymbol{\sigma}\}^T, \quad \nabla^* = \{\partial_t \quad \bar{\nabla}\}.$$

The proposed Hamiltonian formulation can be considered only as a simplest one; its improvement become possible on the background of the powerful symplectic geometry formalism developed in the field theory [40, 41, 43]. Let us also note that the more complex Hamilton – Caratheodory formalism [41] offers nevertheless some features, at least in the numerical simulation, providing the use of Hamilton–Jacobi theory.

ACKNOWLEDGEMENTS

This investigation was financially supported by Russian Foundation for Basic Researches under grants Nr. 16-01-00751-a, Nr. 17-08-01461-a).

REFERENCES

1. **Kienzler R., Altenbach H., Otts I.** Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
2. **Eremeyev V., Pietraszkiewicz W.** Refined theories of plates and shells // ZAMM. Vol. 94 (2014), pp. 5-6.
3. **Zhou D., Au F.T.K., Cheung Y.K., Lo S.H.** Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via the Chebyshev-Ritz method // Int. J. Sol. Struct. Vol. 40 (2003), pp. 3089-3105.
4. **Kang Jae-Hoon, Leissa A.W.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells // Trans. of ASME. Vol. 71 (2004), pp. 502-507.
5. **Batra R.C., Aimmancee S.** Vibrations of thick isotropic plates with higher order shear and normal deformable plate theories // Comput. and Struct. Vol. 83 (2005), pp. 934-955.
6. **Carrera E., Brischetto S.** Importance of higher order modes and refined theories in free vibration analysis of composite plates // J. Applied Math. Vol. 77 (2010), 011013 (14 pp).
7. **Carrera E., Zappino E.** Carrera unified formulation for free vibration analysis of aircraft structures // AIAA Journal, Vol. 54, No. 1 (2016), pp. 280-292.
8. **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // Composite Structures. Vol. 84 (2008), pp. 132-146.
9. **Kulikov G.M., Plotnikova S.V.** Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces // Mech. Composite Mater. Vol. 53(2017), pp.1-14.
10. **Gupta A., Talha M., Singh B.N.** Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory // Composites Pt. B: Enrg, Vol. 94 (2016), pp. 64-74.
11. **Zernov V., Kaplunov J.D.** Three-dimensional edge waves in plates // Proc. Roy. Soc. Lond. A: Math. Phys. Enrg. Sci. Vol. 464 (2008), pp. 301-318.
12. **Wilde M.V.** Issledovanie javlenija kraevogo rezonansa v plastinah na osnove trehmernyh uravnenij teorii uprugosti [Investigation of the boundary resonance phenomenon in

- plates on the basis of the 3D elasticity theory equations]. // *Mech. Deform. Media*, Saratov Univ., Issue 16 (2010), pp. 7-14.
13. **Wilde M.V.** Kromochnye volny vysshego porjadka v tonkoj plastine [Higher order edge waves in thick plates]. // *Vestn. Lobachevsky Univ. N. Novgorod*, Issues 4-5 (2011), pp. 2060-2062.
 14. **Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A.** The identification of material parameters in nonlinear deformation models of metallic-plastic cylindrical shells under pulsed loadings // *Mater. Phys. Mech.* Vol. 23 (2015), pp. 66-70.
 15. **Goldenweiser A.L.** Theory of Thin Elastic Shells. Int. Ser. of Monograph in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, N. Y. 1961.
 16. **Berdichevskiy V.L.** Variational methods of constructing models of shells // *J. of Applied Mathematics and Mechanics.* Vol. 36 (1972), pp. 743-758.
 17. **Vekua I. N.** Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
 18. **Khoma I.Yu.** Obobshhennaja teorija anizotropnyh obolochek [General Anisotropic Shell Theory]. Kiev, Naukova Dumka, 1986.
 19. **Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G.** Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates // *Comput. Math. Appl.* Vol. 51 (2006), pp. 1789-1808.
 20. **Meunargia T.** Some general methods for constructing the theory of shells // *J. Math. Sci.* Vol.157, No.1(2009), pp. 1-15.
 21. **Guliaev V.I., Bazhenov B.A., Lizunov P.P.** Neklassicheskaja teorija obolochek i ee prilozhenie k resheniju inzhenernyh zadach [Nonclassical Shell Theory and Applications in Engineering]. Lvov, Vishcha Shkola, 1978.
 22. **Amosov A.A.** An approximate three-dimensional theory of thick plates and shells // *Structural Mechanics and Design of Buildings*, No. 5 (1987), pp. 37-42.
 23. **Amosov A.A., Zhavoronok S.I.** An approximate high-order theory of thick anisotropic shells // *International Journal of Computational Civil and Structural Engineering.* Vol. 1 (2003), pp. 28–38.
 24. **Zhavoronok S.I.** Modeli vysshego porjadka anizotropnyh obolochek [High-order anisotropic shells models]. // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konst-ruksii.* Vol.14, No. 4 (2008), pp. 561-571.
 25. **Zhavoronok S.I.** Obobshhennye uravnenija Lagranzha vtorogo roda trehmernoj teorii anizotropnyh obolochek [Generalized Lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell theory]. // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii.* Vol. 17 (2011), pp. 116-132.
 26. **Zhavoronok S.I.** A Vekua-type linear theory of thick elastic shells // *ZAMM.* Vol. 94 (2014), pp. 164-184.
 27. **Zhavoronok S.I.** Variational formulations of Vekua-type shell theories and some their applications. *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 3, eds: W. Pietraszkiewicz, J. Gorski, CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden (2014), pp. 341-344.
 28. **Zhavoronok S.I.** Issledovanie kinematiki normal'nyh voln v uprugom sloe na osnove trehmernoj teorii obolochek N-go porjadka dlja razlichnyh znachenij volnovykh chisel [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wavenumbers investigation based on N-th order three-dimensional shells' theory]. // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii.* Vol. 18 (2012), pp. 45-56.
 29. **Zhavoronok S.I.** A Formulation of the three-dimensional approximated shells theory of N-th order using generalized displacements and its application to steady dynamics // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konst-ruksii.* Vol.18 (2012), pp. 333-344.

30. **Leech J. W.** Classical Mechanics. London: Methuen and Co Ltd; New York: Wiley and Sons, 1958.
31. **Changcheng Du, Yinghui Li.** Nonlinear resonance of functionally graded cylindrical shells using the Hamiltonian dynamics // *Acta Mech. Solida Sinica*. Vol. 27 (2014), pp. 635-647.
32. **Tarn J.-Q., Chang H.-H., Tseng W.-D.** Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach // *J. Elast.* Vol. 97 (2009), pp. 131-154.
33. **Tarn J.-Q., Chang H.-H., Tseng W.-D.** A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers // *J. Elast.* Vol. 101 (2010), pp. 207-237.
34. **Chang H.-H., Tarn J.-Q.** Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates // *J. Elast.* Vol. 108 (2012), pp. 49-66.
35. **Tarn J.-Q., Tseng W.-D.** Exact Analysis of Curved Beams and Arches with Arbitrary End Conditions: A Hamiltonian State Space Approach // *J. Elast.* Vol. 107 (2012), pp. 39-63.
36. **Akimov P.A.** Correct discrete-continual finite element method of structural analysis based on precise analytical solutions of resulting multipoint boundary problems for systems of ordinary differential equations // *Appl.Mech.Mater.* Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
37. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** O nekotoryh napravlenijah razvitija korrektnyh diskretno-kontinual'nyh metodov mnogourovnevnogo rascheta konstrukcij [About one sample of deep beam analysis based on combined application of finite element method and discrete-continual finite element method]. // *International Journal of Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 11, Issue (2015), pp. 14-28.
38. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Aslami M., Negrozov O.A.** O nekotoryh napravlenijah razvitija korrektnyh diskretno-kontinual'nyh metodov mnogourovnevnogo rascheta konstrukcij [On some paths of development of the correct discrete-continual methods of multi-level computing of structures]. // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii*. Vol.21(2015), pp. 469-488.
39. **Kilchevskiy N.A., Kilchinskaya G.A., Tkachenko N.E.** Analiticheskaja mehanika kontinual'nyh sistem [Analytical Mechanics of Continuum Systems]. Kiev, Naukova Dumka, 1979.
40. **Kastrup H.A.** Canonical theories of Lagrangian dynamical systems in physics // *Phys. Reports (Review Sect. of Phys. Lett.)* Vol. 101 (1983), pp. 1-167.
41. **Kanatchikov I.V.** Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space // *Reports Math. Phys.* Vol. 41 (1988), pp. 49-90.
42. **Grinchenko V.T., Meleshko V.V.** Garmonicheskie kolebanija i volny v uprugih telah [Harmonic oscillations and waves in elastic solids]. Kiev, Naukova Dumka, 1981.
43. **Giachetta G., Mangarotti L., Sardanashvili G.** New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory. Singapore, World Scientific, 1997.
44. **Zhavoronok S. I.** On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I. N. Vekua type // *Procedia Engineering*. Vol. 111 (2015), pp. 888-895.
45. **Zhavoronok S. I.** Obobshhennye uravnenija Lagranzha vtorigo porjadka rasshirenoj trehmernoj teorii N-go porjadka anizotropnyh obolochek [The generalized Lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional Nth order theory of anisotropic shells]. // *The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii*. Vol. 21 (2015), pp. 370-381.
46. **Zhavoronok S. I.** The extended shell theory of Vekua-Amosov type and the low-order plate models // *International Journal for*

- Computational Civil and Structural Engineering. Vol. 12 (2016), pp. 27-35.
47. **Zhavoronok S. I.** A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems. *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 4. CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden (2017), pp. 189-192.
 48. **Kulikov G.M., Plotnikova S.V.** Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces // *Mech. Composite Mater.* Vol. 53(2017), pp.1-14.
 49. **Gupta A., Talha M., Singh B.N.** Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory // *Composites Pt. B: Enrg*, Vol. 94 (2016), pp. 64-74.
 50. **Zernov V., Kaplunov J.D.** Three-dimensional edge waves in plates // *Proc. Roy. Soc. Lond. A: Math. Phys. Engrg. Sci.* Vol. 464 (2008), pp. 301-318.
 51. **Вильде М.В.** Исследование явления краевого резонанса в пластинах на основе трехмерных уравнений теории упругости. // *Механика деформируемых сред*, №16, 2010, с. 7-14.
 52. **Вильде М.В.** Кромочные волны высшего порядка в тонкой пластине. // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, №4-5, 2011, с. 2060-2062.
 53. **Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A.** The identification of material parameters in nonlinear deformation models of metallic-plastic cylindrical shells under pulsed loadings // *Mater. Phys. Mech.* Vol. 23 (2015), pp. 66-70.
 54. **Goldenweiser A.L.** *Theory of Thin Elastic Shells.* Int. Ser. of Monograph in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, N. Y. 1961.
 55. **Berdichevskiy V.L.** Variational methods of constructing models of shells // *J. of Applied Mathematics and Mechanics.* Vol. 36 (1972), pp. 743-758.
 56. **Vekua I.N.** *Shell Theory: General Methods of Construction*, Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
 57. **Хома И.Ю.** *Обобщенная теория анизотропных оболочек.* – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
 58. **Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G.** Hierarchical models for elastic shells in
 1. **Kienzler R., Altenbach H., Otts I.** *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
 2. **Eremeyev V., Pietraszkiewicz W.** Refined theories of plates and shells // *ZAMM.* Vol. 94 (2014), pp. 5-6.
 3. **Zhou D., Au F.T.K., Cheung Y.K., Lo S.H.** Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via the Chebyshev-Ritz method // *Int. J. Sol. Struct.* Vol. 40 (2003), pp. 3089-3105.
 4. **Kang Jae-Hoon, Leissa A. W.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells // *Trans. of ASME.* Vol. 71 (2004), pp. 502-507.
 5. **Batra R. C., Aimmanee S.** Vibrations of thick isotropic plates with higher order shear and normal deformable plate theories // *Comput. and Struct.* Vol. 83 (2005), pp. 934-955.
 6. **Carrera E., Brischetto S.** Importance of higher order modes and refined theories in free vibration analysis of composite plates // *J. Applied Math.* Vol. 77 (2010), 011013 (14 pp).
 7. **Carrera E., Zappino E.** Carrera unified formulation for free vibration analysis of aircraft structures // *AIAA Journal*, Vol. 54, No. 1 (2016), pp. 280-292.
 8. **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // *Composite Structures.* Vol. 84 (2008), pp. 132-146.

- curvilinear coordinates // *Comput. Math. Appl.* Vol. 51 (2006), pp. 1789-1808.
20. **Meunargia T.** Some general methods for constructing the theory of shells // *J. Math. Sci.* Vol.157, No.1(2009), pp. 1-15.
 21. **Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.** Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
 22. **Amosov A.A.** An approximate three-dimensional theory of thick plates and shells // *Structural Mechanics and Design of Buildings*, No. 5 (1987), pp. 37-42.
 23. **Amosov A.A., Zhavoronok S.I.** An approximate high-order theory of thick anisotropic shells. // *International Journal of Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 1 (2003), pp. 28–38.
 24. **Жаворонок С.И.** Модели высшего порядка анизотропных оболочек. // *Механика композиционных материалов и конструкций*, Том 14, Номер 4, 2008, с. 561-571.
 25. **Жаворонок С.И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек. // *Механика композиционных материалов и конструкций*, Том 17, Номер 1, 2011, с. 116-132.
 26. **Zhavoronok S.I.** A Vekua-type linear theory of thick elastic shells // *ZAMM*. Vol. 94 (2014), pp. 164-184.
 27. **Zhavoronok S.I.** Variational formulations of Vekua-type shell theories and some their applications. *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 3, eds: W. Pietraszkiewicz, J. Gorski, CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden (2014), pp. 341-344.
 28. **Жаворонок С.И.** Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел. // *Механика композиционных материалов и конструкций*, Том 18, Номер 1, 2012, с. 45-56.
 29. **Zhavoronok S.I.** A Formulation of the three-dimensional approximated shells theory of N-th order using generalized displacements and its application to steady dynamics. // *Механика композиционных материалов и конструкций*, Том 18, Номер 3, 2012, с. 333-344.
 30. **Leech J.W.** *Classical Mechanics*. London: Methuen and Co Ltd; New York: Wiley and Sons, 1958.
 31. **Changcheng Du, Yinghui Li.** Nonlinear resonance of functionally graded cylindrical shells using the Hamiltonian dynamics // *Acta Mech. Solida Sinica*. Vol. 27 (2014), pp. 635-647.
 32. **Tarn J.-Q., Chang H.-H., Tseng W.-D.** Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach // *J. Elast.* Vol. 97 (2009), pp. 131-154.
 33. **Tarn J.-Q., Chang H.-H., Tseng W.-D.** A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers // *J. Elast.* Vol. 101 (2010), pp. 207-237.
 34. **Chang H.-H., Tarn J.-Q.** Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates // *J. Elast.* Vol. 108 (2012), pp. 49-66.
 35. **Tarn J.-Q., Tseng W.-D.** Exact Analysis of Curved Beams and Arches with Arbitrary End Conditions: A Hamiltonian State Space Approach // *J. Elast.* Vol. 107 (2012), pp. 39-63.
 36. **Akimov P.A.** Correct discrete-continual finite element method of structural analysis based on precise analytical solutions of resulting multipoint boundary problems for systems of ordinary differential equations // *Appl.Mech.Mater.* Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
 37. **Акимов П.А., Негрозов О.А.** Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. // *International Journal of Computational Civil and Structural*

- Engineering. Vol. 11, Issue 4 (2015), pp. 14–28.
38. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджаба Аслами, Негрозов О.А.** О некоторых направлениях развития корректных дискретно-континуальных методов многоуровневого расчета конструкций. // Механика композиционных материалов и конструкций, Том 21, Номер 4, 2015, с. 469-488.
39. **Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е.** Аналитическая механика континуальных систем. – Киев: Наука, думка, 1979. – 188 с.
40. **Kastrup H.A.** Canonical theories of Lagrangian dynamical systems in physics // Phys. Reports (Review Sect. of Phys. Lett.) Vol. 101 (1983), pp. 1-167.
41. **Kanatchikov I.V.** Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space // Reports Math. Phys. Vol. 41 (1988), pp. 49-90.
42. **Гринченко В.Т., Мелешко В.В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
43. **Giachetta G., Mangarotti L., Sardanashvili G.** New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory. Singapore, World Scientific, 1997.
44. **Zhavoronok S. I.** On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I. N. Vekua type // Procedia Engineering. Vol. 111 (2015), pp. 888-895.
45. **Жаворонок С.И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго порядка расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек. // Механика композиционных материалов и конструкций, Том 21, Номер 3, 2015, с. 370-381.
46. **Zhavoronok S. I.** The extended shell theory of Vekua-Amosov type and the low-order plate models // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Vol. 12, Issue 4 (2016), pp. 27-35.
47. **Zhavoronok S. I.** A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems. Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 4. CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden (2017), pp. 189-192.
-
- Zhavoronok Sergey Igorevich, Ph.D., Senior researcher of the Department of Mechanics of Smart and Composite Materials and Systems, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences; Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Machine Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute (National Research University); Address: Leningradskiy Prospekt 7, 125040, Moscow, Russia.
Phone: +7(495) 941-1777; +7(916) 134-2843.
e-mail: Zhavoronok@iam.ras.ru, zhavor71@mail.ru
- Жаворонок Сергей Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН); доцент кафедры сопротивления материалов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); 125 040, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 7, стр. 1; тел. +7(495) 941-1777; +7(916) 134-2843.
e-mail: Zhavoronok@iam.ras.ru, zhavor71@mail.ru

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-96-102

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛИ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

С.Б. Косицын, М.М. Бегичев

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В работе на примере мостовой фермы с жесткими узлами численно изучены вопросы устойчивости равновесия стержневых систем с учетом геометрической нелинейности и появления пластических деформаций материала. Рассмотрены различные модели материала: линейно упругий и упругопластический с диаграммами деформирования Прандтля и реальной. Показаны особенности потери устойчивости равновесия.

Ключевые слова: потеря устойчивости равновесия, хлопок, предельная точка, пластические деформации

ANALYSIS OF STABILITY OF A TRUSS MODEL WITH HARD NODES BASED ON VARIOUS STRESS-STRAIN CURVES

Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: The stability of the equilibrium of rod systems is studied numerically taking into account the geometric nonlinearity using as an example a truss with rigid nodes. Various material models are used: linear elastic and elastoplastic with Prandtl and real stress-strain curves. The features of the loss of equilibrium stability are shown.

Keywords: loss of stability, buckling, limit point, plastic strain

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании любого инженерного сооружения (в том числе состоящего из стержневых или тонкостенных пространственных элементов) одной из наиболее важных задач является обеспечение устойчивости его равновесия при различных внешних воздействиях. Задачи устойчивости равновесия составляют достаточно сложный и мало изученный раздел строительной механики. Ряд конструкций (например, рамные каркасы зданий, элементы транспортных сооружений и др.) теряют устойчивость при появлении пластических деформаций материалов, что еще более усложняет задачу. В моменты, предшествующие потере устойчивости, а также в закри-

тическом состоянии, элементы конструкций имеют достаточно большие перемещения, которыми нельзя пренебрегать в расчетах, поэтому корректно поставленная задача устойчивости равновесия является геометрически нелинейной.

В настоящей работе на примере симметричной плоской восьмипанельной горизонтальной мостовой фермы с жесткими узлами (пролет фермы 44 м, высота 8,5 м), нагруженной одинаковыми вертикальными силами, приложенными в узлах нижнего пояса (рис. 1) в геометрически нелинейной постановке рассмотрены вопросы устойчивости равновесия. Стержни фермы – тонкостенные пространственные Н – образные. Геометрические характеристики поперечных сечений приведены в табл. 1.

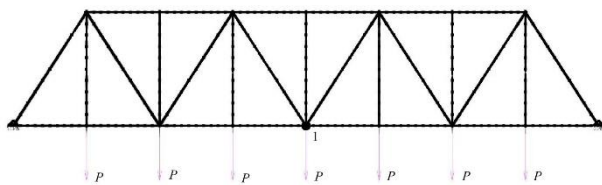


Рисунок 1. Расчетная модель мостовой фермы.

Модель фермы состоит из одномерных конечных элементов (их число 290), работающих на растяжение (сжатие) и изгиб. Элементы соединены в узлах жестко. В программном комплексе MSC.NASTRAN [1], при помощи которого произведены расчеты, их называют BEAM.

На рис. 1 изображены связи, наложенные на опорные узлы фермы. Ферма в программном комплексе MSC.NASTRAN рассматривается как пространственная система, однако в настоящей работе изучена лишь плоская потеря ее устойчивости.

Исследованы возможные сценарии потери устойчивости равновесия фермы. Материал стержней считался:

- линейно упругим (модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,3$);
- упругопластическим согласно билинейной диаграмме, весьма близкой к диаграмме Прандтля (предел текучести и равный ему предел пропорциональности $\sigma_T = \sigma_{пц} = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$);
- упругопластическим на основе реальной диаграммы пластичной стали (табл. 2, рис. 2).

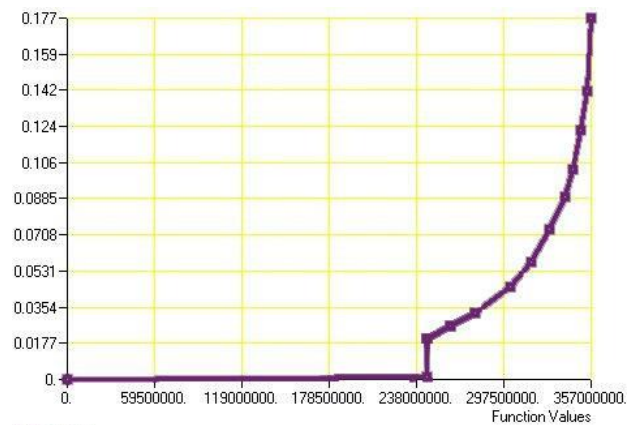


Рисунок 2. Реальная диаграмма деформирования материала (σ – ϵ).

Таблица 1. Геометрические характеристики поперечных сечений пространственных H – образных элементов фермы.

Элемент	Размеры листов	Площадь листов	Площадь общая	Момент инерции J_z	Момент инерции J_y	Момент инерции $J_{кр}$
	мм	мм ²				
Пояс верхний / нижний	420×12	5040	0,023440	9,65261	3,24514	2,72228
	460×20	9200				
	460×20	9200				
	Сумма	23440				
Раскос восходящий / нисходящий	440×10	4400	0,012800	4,96307	1,23517	0,450507
	420×10	4200				
	420×10	4200				
	Сумма	12800				
Стойка / подвеска	436×10	4360	0,010120	3,58151	2,76843	0,434578
	240×18	2880				
	240×18	2880				
	Сумма	10120				

Таблица 2. Числовые значения диаграммы деформирования материала.

№ точки	σ	ε
	10^8 Н/м^2	
1	0	0
2	2,4500	0,001225
3	2,4516	0,020000
4	2,6100	0,026500
5	2,7800	0,032400
6	3,0200	0,045600
7	3,1600	0,057500
8	3,2900	0,073600
9	3,3900	0,089200
10	3,4500	0,103000
11	3,5000	0,122000
12	3,5400	0,141000
13	3,5700	0,177000

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Проанализируем результаты классического линейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами, выполненного на основе процедуры решения проблемы собственных значений [2]

$$(\mathbf{K}_{nm}^{ik} - \lambda \mathbf{G}_{nm}^{ik}) \bar{\mathbf{Z}}_k^m = 0. \quad (1)$$

Здесь обозначено: \mathbf{K}_{nm}^{ik} – компоненты матрицы жесткостей на начальном этапе нагружения; \mathbf{G}_{nm}^{ik} – составляющие матрицы начальных напряжений; $\bar{\mathbf{Z}}_k^m$ – компоненты собственного вектора, определяющие форму потери устойчивости; λ – собственное значение (масштабный фактор), λ_1 является запасом устойчивости по отношению к действующей нагрузке.

В (1) и в дальнейшем использовано соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу.

Критический параметр оказался двукратным с точностью до четырех значащих цифр. Найденные его величины составили

$$P_{kr1} = \lambda_1 \cdot P_{max} = 0,018965 \cdot (1 \cdot 10^8) = 1,8965 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr2} = \lambda_2 \cdot P_{max} = 0,018968 \cdot (1 \cdot 10^8) = 1,8968 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Формы потери устойчивости показаны на рис. 3 в соответствующем масштабе.

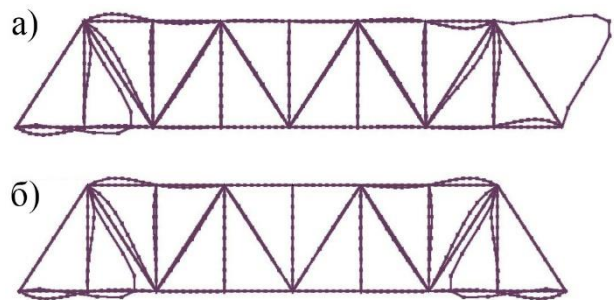


Рисунок 3. Двукратные формы потери устойчивости мостовой фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий); а) первая (кососимметричная); б) вторая (симметричная).

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Рассмотрим результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами. Материал стержней фермы считался бесконечно линейно упругим. В среднем узле нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) приложена дополнительная возмущающая горизонтальная сила $0,001P$ с целью выявления возможных несимметричных равновесных форм в процессе потери устойчивости. Для решения геометрически нелинейной задачи запишем нелинейные алгебраические уравнения в приращениях для отдельного шага по аналогии с фундаментальной монографией Дж. Одена [2]:

Анализ устойчивости равновесия модели фермы с жесткими узлами на основе различных диаграмм деформирования материала

$$\mathbf{K}_{nm}^{ik} \Delta \bar{\mathbf{Z}}_k^m = \Delta \bar{\mathbf{P}}_n^i. \quad (2)$$

Здесь $\Delta \bar{\mathbf{Z}}_k^m$ – составляющие приращений неизвестных обобщенных перемещений; $\Delta \bar{\mathbf{P}}_n^i$ – элементы вектора приращения параметра узловой нагрузки; \mathbf{K}_{nm}^{ik} – компоненты касательной матрицы жесткостей системы нелинейных уравнений:

$$\mathbf{K}_{nm}^{ik} = \tilde{\mathbf{K}}_{nm}^{ik} + \mathbf{G}_{nm}^{ik} + \mathbf{C}_{nm}^{ik} + \mathbf{R}_{nm}^{ik}. \quad (3)$$

Здесь обозначено: $\tilde{\mathbf{K}}_{nm}^{ik}$ – компоненты матрицы приращений жесткостей; \mathbf{G}_{nm}^{ik} – составляющие матрицы начальных напряжений; \mathbf{C}_{nm}^{ik} – элементы матрицы начальных поворотов; \mathbf{R}_{nm}^{ik} – компоненты матрицы начального нагружения.

Для анализа решения нелинейной задачи устойчивости равновесия необходимо построить диаграмму равновесных состояний. Диаграмму строят посредством шаговой процедуры, на каждом шаге которой методом Ньютона – Рафсона решают систему нелинейных алгебраических уравнений (2). С целью поиска предельных точек использована процедура Arc-Length метода в варианте Криффилда [3].

Кривая состояний равновесия для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 4.

Анализ результатов расчета показал, что потеря устойчивости фермы произошла хлопком из точки 1 (рис. 4) на восходящую часть кривой равновесных состояний (точка 2 на рис. 4). После этого при более высокой нагрузке произошла вторичная потеря устойчивости хлопком из точки 3 в точку 4 (рис. 4). И, наконец, еще одна потеря устойчивости произошла в предельной точке (точка 5 на рис. 4). Формы равновесия, соответствующие точкам 1, 2, 3, 4 и 5 рис. 4, изображены на рис. 5, 6 и 7 соответственно.

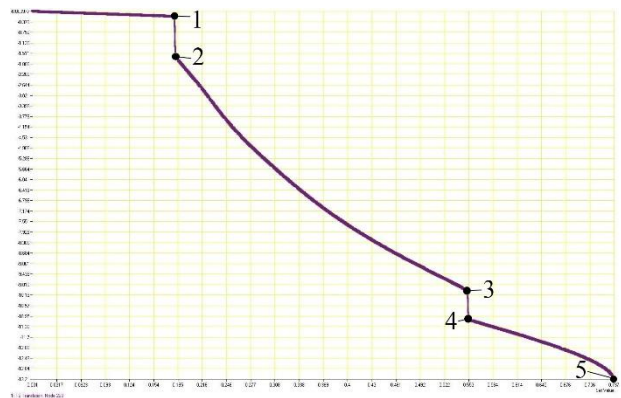


Рисунок 4. Кривая равновесных состояний «прогиб – нагрузка» для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий).

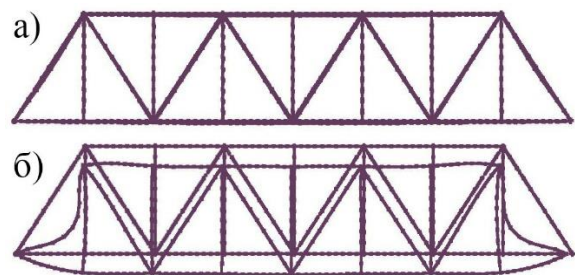


Рисунок 5. Формы равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) при первом хлопке; а) до хлопка; б) после хлопка.

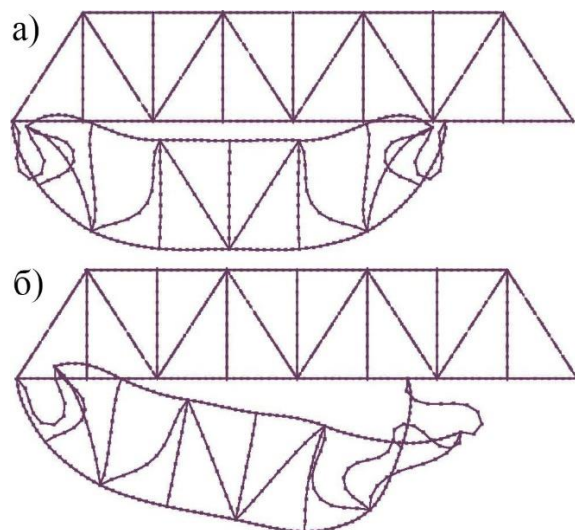


Рисунок 6. Формы равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) при втором хлопке; а) до хлопка; б) после хлопка.

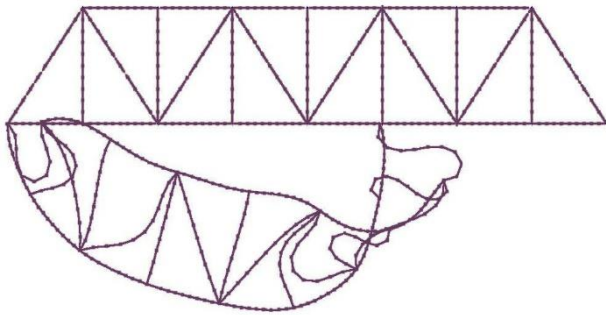


Рисунок 7. Форма равновесия фермы с жесткими узлами (материал – линейно упругий) в предельной точке (5)

Величины критических параметров:

$$P_{kr1}=0,1805 \cdot P_{max}=0,1805 \cdot (1 \cdot 10^7)=1,805 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr2}=0,5515 \cdot P_{max}=0,5515 \cdot (1 \cdot 10^7)=5,515 \cdot 10^6 \text{ Н,}$$

$$P_{kr3}=0,7369 \cdot P_{max}=0,7369 \cdot (1 \cdot 10^7)=7,369 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БИЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА, БЛИЗКОЙ К ДИАГРАММЕ ПРАНДТЛЯ

Проанализируем результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с жесткими узлами, изготовленной из упругопластического материала с билинейной диаграммой, близкой к диаграмме Прандтля. Учет пластических деформаций произведен по теории пластического течения [4, 5]. Поверхность текучести принята в соответствии с критерием текучести Хубера – Мизеса [4, 5]. Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 8.

Анализ результатов расчета показал, что потеря устойчивости фермы произошла в предельной точке (точка 1 на рис. 8) с появлением пластических деформаций в крайних (портальных) раскосах (на рис. 9 отмечены эти пластические деформации). Только в этих раскосах напряжения достигли предела

текучести. Дальнейшее увеличение нагрузки на ферму стало уже невозможным. Величина критического параметра составила

$$P_{kr1}=0,0723357 \cdot P_{max}=$$

$$=0,0723357 \cdot (1 \cdot 10^7)=0,723357 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$



Рисунок 8. Кривая равновесных состояний «прогиб – нагрузка» для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с билинейной диаграммой).

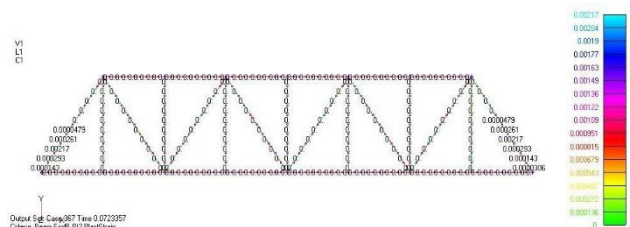


Рисунок 9. Пластические деформации в стержнях фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с билинейной диаграммой) при потере устойчивости равновесия.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕАЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Рассмотрим результаты геометрически нелинейного расчета мостовой фермы с шар-

нирными узлами, изготовленной из упруго-пластического материала с реальной диаграммой деформирования, показанной на рис. 2. Числовые значения характерных точек диаграммы приведены в табл. 2. Поверхность текучести при этом расширялась изотропно (изотропное упрочнение).

Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы (точка 1 на рис. 1) изображена на рис. 10.



Рисунок 10. Кривая равновесных состояний для средней точки нижнего пояса фермы с жесткими узлами (материал – упругопластический с реальной диаграммой).

Результаты расчета показали, что потеря устойчивости фермы произошла в предельной точке (точка 1 на рис. 10) с появлением пластических деформаций в порталных раскосах. Только в них напряжения достигли предела текучести. После потери устойчивости увеличение нагрузки на ферму стало уже невозможно. Найденное значение критического параметра составило

$$P_{kr1} = 0,0722999 \cdot P_{max} = 0,0722999 \cdot (1 \cdot 10^7) = 0,722999 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ МОСТОВОЙ ФЕРМЫ С ЖЕСТКИМИ УЗЛАМИ

Критические нагрузки для конструкций типа мостовых ферм с жесткими узлами и стержнями, выполненными из упругопластических материалов, вследствие снижения

жесткости систем при сжатии после появления пластических деформаций оказались в 2,5 раза ниже аналогичной нагрузки для фермы со стержнями из неограниченно линейно упругого материала. Так, если для фермы со стержнями из линейно упругого материала (геометрически нелинейная постановка задачи) при первом хлопке $P_{kr1} = 1,805 \cdot 10^6$ Н, то для ферм со стержнями из упругопластических материалов с билинейной и реальной диаграммами деформирования (геометрически и физически нелинейные постановки задач) аналогичные нагрузки при потере устойчивости в предельных точках составили соответственно $P_{kr1} = 0,723357 \cdot 10^6$ Н и $P_{kr1} = 0,722999 \cdot 10^6$ Н. При этом вид диаграммы деформирования материала (билинейная или реальная) на величину критического параметра повлиял незначительно (критические параметры совпали с точностью до трех значащих цифр). Линейный бифуркационный анализ (решение проблемы собственных значений) дал более чем двукратную величину критического параметра ($P_{kr1} = 1,89654 \cdot 10^6$ Н и $P_{kr2} = 1,89683 \cdot 10^6$ Н совпали с точностью до четырех значащих цифр), которая на 5% выше критического значения, полученного из геометрически нелинейного решения упругой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Копанев Д.Б.** Решение задач нелинейной статики в MSC.Patran-Nastran. Руководство пользователя – М.: 1999. – 85 с.
2. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
3. **Crisfield M.A.** A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Trough”. // Computers & Structures, 1981, Vol. 13, Number 1, pp. 55-62.
4. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

5. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

Maxim M. Begichev, Ph.D., Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (МИИТ); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; e-mail: noxonius@mail.ru.

REFERENCES

1. **Корпанев Д.В.** Resheniye zadach nelineynoy statiki v MSC.Patran-Nastran. Rukovodstvo polzovatelya [Solving the problems of nonlinear statics in MSC.Patran-Nastran. User guide]. Moscow, 1999, - 85 pages.
2. **Oden Dzh.** Konechnyye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred [Finite Elements in Nonlinear Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Mir, 1976, 465 pages.
3. **Crisfield M.A.** A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Trough”. // Computers & Structures, 1981, Vol. 13, Number 1, pp. 55-62.
4. **Kachanov L.M.** Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969, 420 pages.
5. **Zenkevich O.** Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir, 1975, 543 pages.

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; e-mail: noxonius@mail.ru

Sergey B. Kosytsyn, Dr.Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (МИИТ); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax: +7(499) 978-16-73; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

NUMERICAL SIMULATION OF YIELDING SUPPORTS IN THE SHAPE OF ANNULAR TUBES UNDER STATIC AND SHORT-TERM DYNAMIC LOADING

Oleg G. Kumpyak, Nikita V. Mescheulov

Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

Abstract: Occurrence of extreme man-made impacts on buildings and structures has become frequent lately as a consequence of condensed explosives or explosive combustion of gas- vapor or air-fuel mixtures. Such accidents involve large human and economic losses, and their prevention methods are not always effective and reasonable. The given research aims at studying the way of enhancing explosion safety of building structures by means of yielding supports. The paper presents results of numerical studies (finite element, 3D nonlinear) of strength and deformability of yielding supports in the shape of annular tubes under static and short-term dynamic loading. The degree of influence of yielding supports was assessed taking into account three peculiar stages of deformation: elastic; elasto-plastic; elasto-plastic with hardening. The methodology for numerical studies performance was described. It was established that rigidity of yielding supports influences significantly their stress-strain state. The research determined that with increase of deformable elements rigidity dependency between load and deformation of yielding supports in elastic and plastic stages have linear character. Significant reduction of dynamic response and increase of deformation time of yielding supports was observed by increasing the plastic component. Therefore it allows assuming on possibility of their application as supporting units in reinforced concrete constructions.

Keywords: yielding supports, strength, deformability, numerical simulation, finite element method, explicit dynamic, nonlinear effects

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАТЛИВЫХ ОПОР В ВИДЕ ТРУБ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И КРАТКОВРЕМЕННОМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

О.Г. Кумпяк, Н.В. Мещулов

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В последнее время участились случаи экстремальных техногенных воздействий на здания и сооружения, например, вследствие взрыва конденсированных взрывчатых веществ либо взрывного горения газо-, паро- или пылевоздушных смесей. Такие события могут повлечь большие человеческие и экономические потери, а методы их предотвращения или снижения последствий не всегда эффективны и рациональны. Целью данной работы является изучение способа повышения взрывобезопасности строительных конструкций за счет применения податливых опор. Представлены результаты численных (конечноэлементных, в трехмерной нелинейной постановках) исследований прочности и деформативности податливых опор в виде труб кольцевого сечения при статическом и кратковременном динамическом нагружении. Произведена оценка степени влияния податливых опор, имеющих три характерные стадии деформирования: упругая; упруго-пластическая; упруго-пластическая с отвердением. Приведено описание методики численных исследований и ее программной реализации. Установлено, что при увеличении жесткости сминаемых вставок зависимость между нагрузкой и деформированием опоры в упругой и пластической стадиях имеет линейный характер. Выявлено также значительное снижение динамической реакции и увеличение времени деформирования податливых опор при увеличении их пластической составляющей, что позволяет рекомендовать их к применению в качестве опорных устройств для железобетонных изгибаемых и сжато-изгибаемых конструкций.

Ключевые слова: податливые опоры, прочность, деформативность, численное моделирование, метод конечных элементов, неявная схема интегрирования, нелинейные эффекты

1. INTRODUCTION

Explosive impacts refer to single emergency loads. They are characterized by short term of action but high intensity which results not only in structural failure but also in production facilities damage and human losses. The existing approaches to designing building structures resistive to explosive impacts are based on increasing the material consumption of structures, which leads to increasing the cost of objects. Therefore, the elaboration of alternative economically feasible and reliable approaches is required to design structures that are resistant to intensive dynamic loads.

Yielding supports are one of the active means of structural protection, based on prevention or localization of dynamic impact or reducing the intensity of dynamic loading [1-9].

Currently, research results in the field of yielding supports application for protection of buildings and structures subjected to intensive dynamic loading are fragmentary. Experimental, theoretical and experimental-theoretical research [1-9] demonstrate both positive and possible negative influence of yielding supports on the dynamic response of RC beams. The object of the present study is numerical study of the strength and deformation property of yielding supports given as the tubes of annular section under static and short-term dynamic loading.

2. METHODOLOGY FOR CONDUCTING NUMERICAL SIMULATION OF YIELDING SUPPORTS UNDER STATIC LOADING

Finite element method (FEM) is certainly one of the dominant modern techniques of numerical simulation of such 3D nonlinear (physically, geometrically and structurally) static objectives; therefore it was selected as the basic one for conducting the present studies.

Program software Ansys Mechanical, v 17.2. was used as a software package realizing FEM in the given statement. The first stage of the

work included analysis of yielding supports under quasi-static loading with the constant loading velocity. The design model was idealized and formalized copy of the physical reality and it duplicated the experimental study with a large accuracy [1] (Fig. 1).

Finite element model consisted of the two slabs, one of them was supporting and motionless, the second slab served as a force slab and it had the capacity of vertical displacement. The third element of the model was yielding support. Sample spacing of the finite element mesh of the slabs was 4 mm, of the yielding support – 0.8 ± 0.1 mm. The volume eight-node finite element SOLID185 was used as a finite element. Each finite element node is defined by three translational degrees of freedom and includes the possibility of using plastic materials and is also able to withstand larger deformations.

The model uses low-order finite elements (h-simulation technique). The analysis was performed for all the considered lengths of yielding supports in the range from 10 to 120 mm (Fig. 2).

The dimensions of the solved objective depending on the length of yielding support varied from 5664 to 58464 finite elements.

The work of material of yielding support was described by multilinear diagram of material straining with isotropic hardening. It was obtained by preliminary field experimental study of material under tension.

The loading of yielding support (rigid, kinematic) was performed by means of the given displacement of the upper slab (Fig. 1) to the distance corresponding to the inner diameter of yielding support.

3. RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION OF YIELDING SUPPORTS UNDER STATIC LOADING

Let us consider the distinctive features of yielding supports straining on the example of inserted element of annular cross-section 40 mm long (Fig. 3). As can be observed, for all the sta-

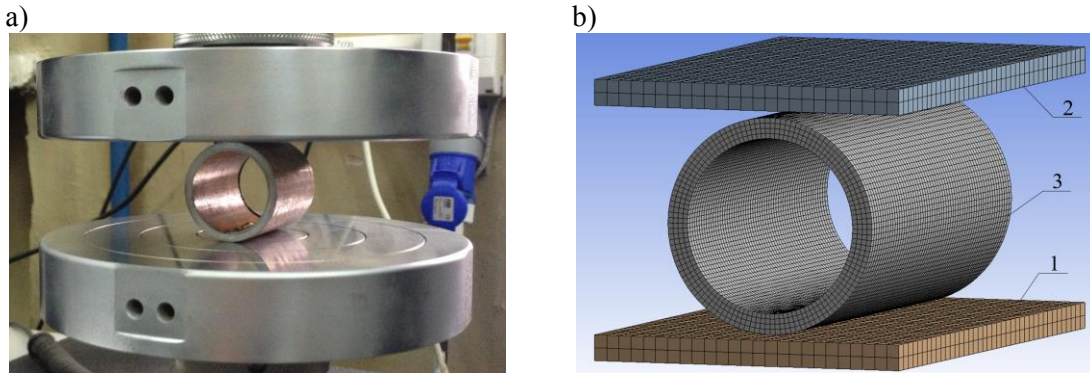


Figure 1. The general view of yielding supports field tests (a); numerical simulation (b); 1 – supporting slab; 2 – reinforced slab; 3 – yielding support.

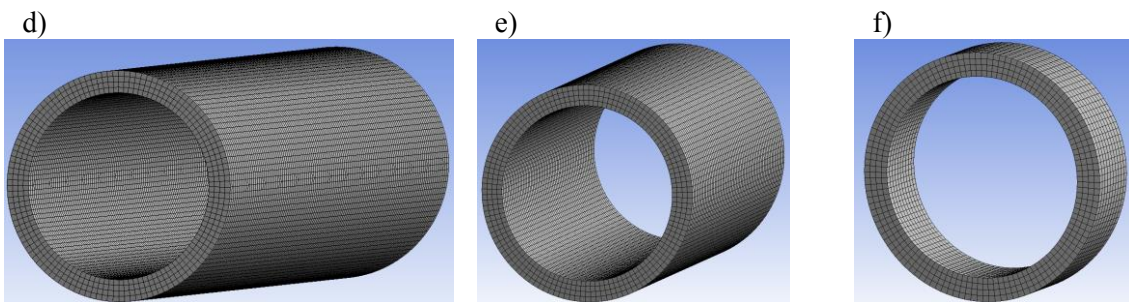


Figure 2. The general view of flexible bearings of various length: experimental studies (a; b; c); numerical finite element model (d, e, f): 120mm (a, d); 60mm (b, e); 10mm (c, f).

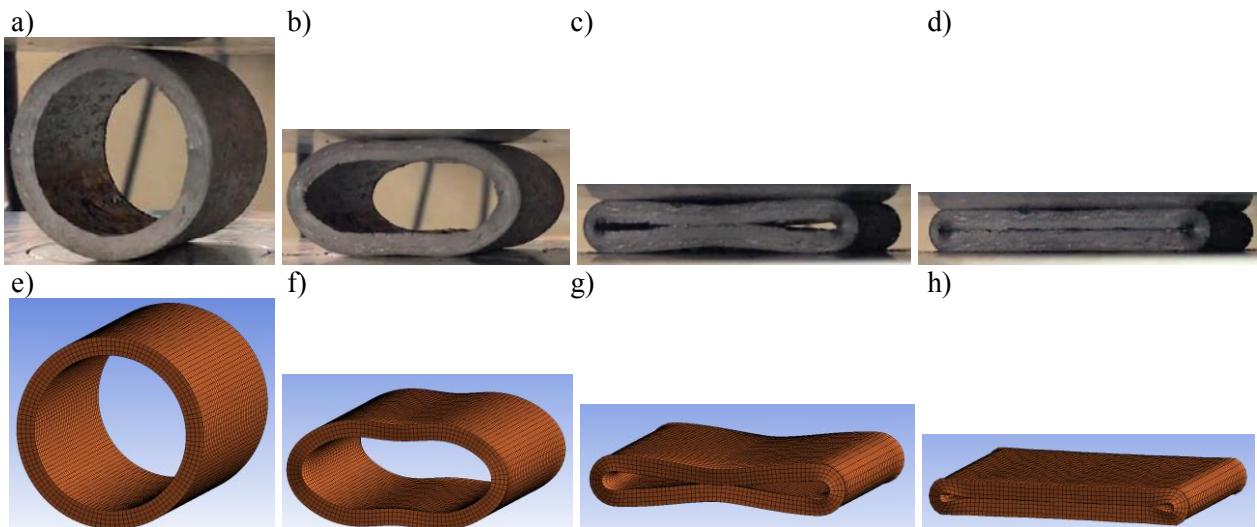


Figure 3. Peculiar stages of yielding supports deformation: elastic (a, e); elasto-plastic (b, f); elasto-plastic with hardening (c, g, d, h)

ges of yielding support work the strain pattern during field test corresponds to the strain pattern during numerical simulation.

The geometry of the studied sample during loading significantly changes its shape several times (Fig. 3) and the rigidity accordingly.

Considering that fact, the model was supplemented with the option of finite displacements consideration and angular displacements after each equilibrium iteration (geometrical nonlinearity). During straining process (Fig. 3), the yielding support interacts

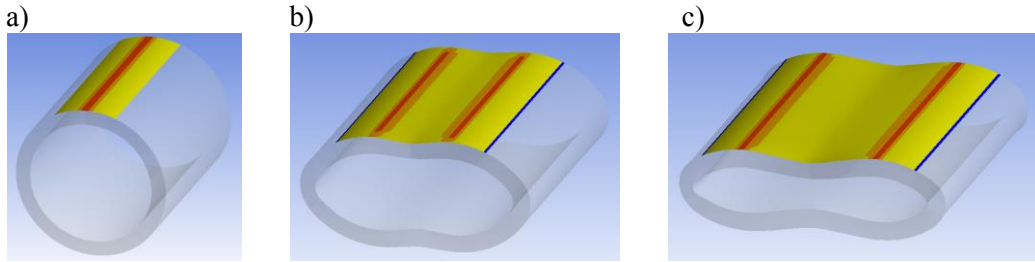


Figure 4. Alteration of the design model of yielding support in the process of straining: one contact point (line) with the slab (a); two contact points with the slab (b, c).

with the force slabs changing its design model several times. After occurrence of the plastic strain in the yielding support, the contact point with each of the force slabs is divided in two. Then, along with the load increase, the contact points distribute from the center of the support to its edges (Fig. 4). In order to consider the above-mentioned process contacting pairs were established in the model between the inserted element and the force slabs, as well as between the internal surfaces of the yielding support. The blue color in Figure 7 identifies the contact elements, which are significantly remote from the contact surface. Contact elements, which are rather close to the contacting surface, are marked with yellow color. The red color identifies contact elements interacting with the contact surface, the force slab in particular. Moreover, during yielding supports straining the contact of inner surfaces of the ring occurs (Fig. 3 c, g), which in its turn alters the simulation model one more time. Further, the internal surfaces come into full contact (Fig. 3 d, h). It was established, that during straining process distortion of the ends of yielding support occurs in the areas of plastic hinge. Thus, the contact of internal surfaces of the ring occurs not simultaneously and from the ends to the middle part (Fig. 5).

As a contact interaction interface for all contacting pairs the model of contact with friction $\mu=0.15$ was used. This model includes the possibility to divide contacting pairs after interaction and generally can contain the areas of cohesion and sliding. Augmented Lagrangian method was applied for solution of contact

interaction; it is based on the dependency of contact force on the penetration value (1):

$$F_n = k_n x_p + \lambda, \tag{1}$$

where: k_n – contact stiffness directed from normal to the surface, x_p – the value of penetration along the normal to the surface, λ – the augend reducing sensitivity to the value of contact. Simultaneous linear equations method was used for solution of the given objective (2):

$$[K]\{u\} = \{F\}, \tag{2}$$

where, $[K]$ – system stiffness matrix, $\{u\}$ – the unknown vector of nodal displacements, $\{F\}$ – the vector of the given external forces.

Checking the solution of non-linear problem was conducted using the Newton-Raphson method based on the equilibrium equation (3):

$$R = \|F_{ext} - F_{int}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^N (F_{ext,i} - F_{int,i})^2}. \tag{3}$$

where, R – the difference between the external and internal force vectors, F_{ext} – external force vector, F_{int} – internal force vector, N – the number of vector elements, equal to the amount of degrees of freedom of FEM. During solving the objective of static loading of the yielding supports, the solution admitted computational error of 5% between internal and external forces. Along with the increase in the number of elements in the solved objective in order to

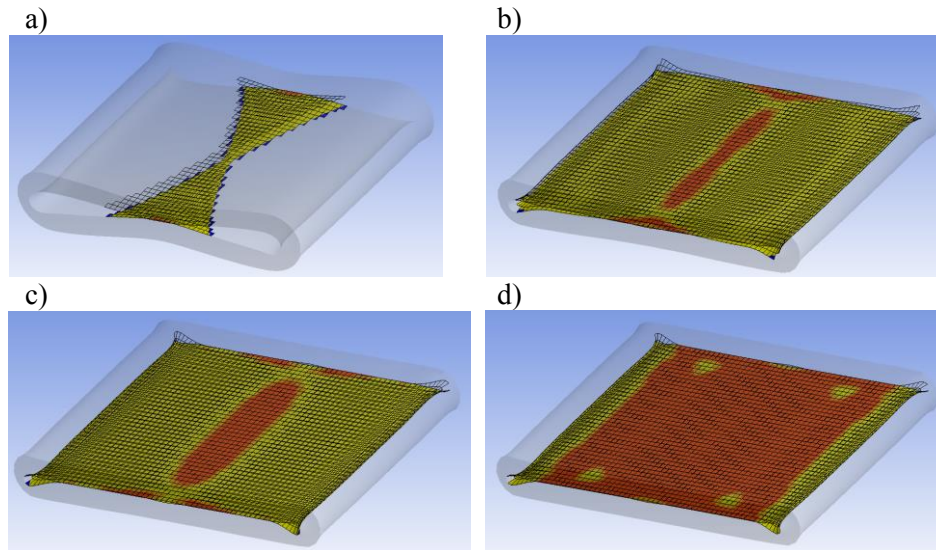


Figure 5. Alteration in the design model of yielding support during straining: impact of contacting pairs at the edges (a); contact of internal surfaces in the mid-area (b); gradual increase of the contact spot in the middle area (c); full contact of the internal surfaces (d).

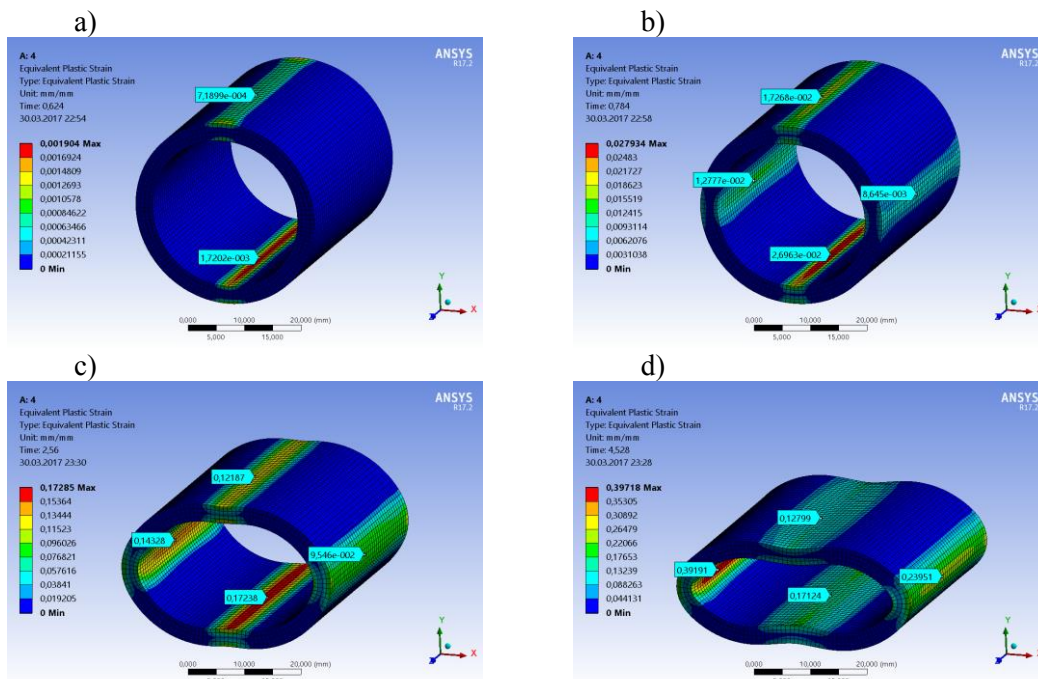


Figure 6. Distribution pattern of the plastic strain in the yielding support.

provide high accuracy, the proportional increase in the number of equilibrium iterations was required. Thus, the objectives considered from 500 to 8000 iterations. Analysis of the results of numerical simulation demonstrated that significant straining of yielding supports occurs due to formation of plastic hinges when the stresses in the material reach the yield stress.

These areas are first established in the upper and lower areas of the rings (Fig. 6a), and then at the lateral surfaces of the sample (Fig. 6b). Further straining is accompanied by the gradual growth of plastic strain and increasing the area of active straining. It should be noted that the value of relative strain at the internal lateral surface of the yielding support $\epsilon > 39\%$ (Fig. 6d),

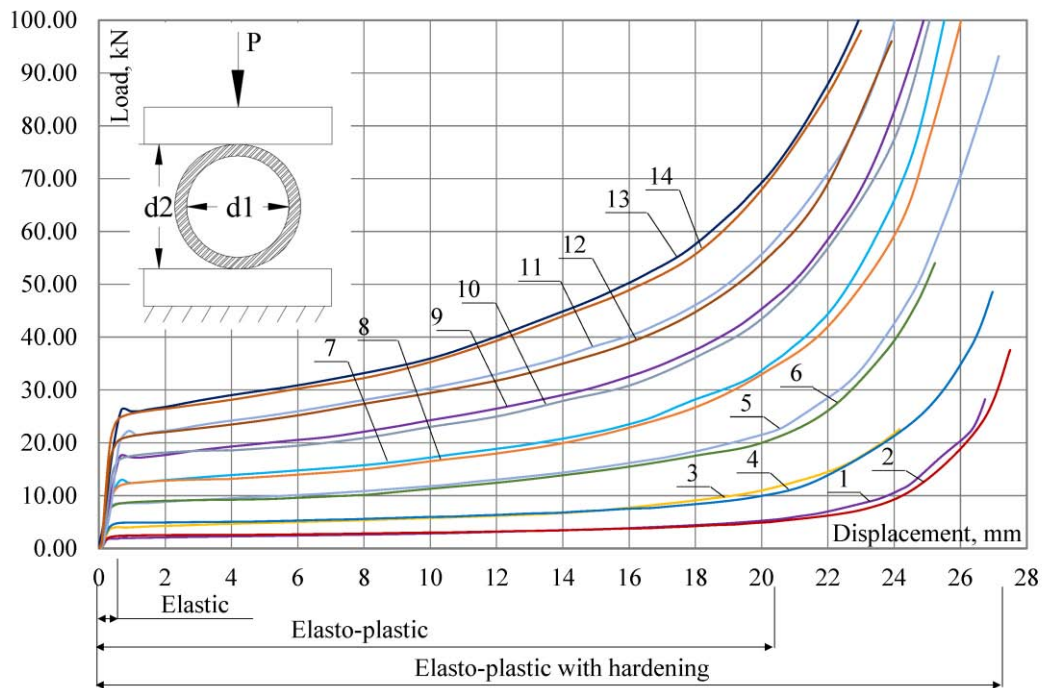


Figure 7. The strain diagram of yielding supports of various length under numerical and experimental study; d1- inner diameter; d2- outer diameter of the yielding supports; the uneven numbers correspond to the experimental studies; the even numbers present numerical simulation. 1-2- 10 mm; 3-4- 20 mm; 5-6- 40 mm; 7-8 60 mm; 9-10-80 mm; 11-12- 100 mm; 13-14- 120 mm.

which exceeds the ultimate strain of the steel $\epsilon_s 255 > 26\%$. The mentioned area of straining undergoes compressive strain and due to curvilinear geometry of the sample, these locations are marked by the materials self-hardening effect.

Analysis of the results of numerical and experimental studies under quasi-static loading can be conducted based on the strain diagram of yielding supports (Fig. 7). Figure 7 illustrates the diagrams “load-displacement” for the yielding supports 10 and 20- 120 mm long with the span of 20 mm. According to the diagram, it can be judged on the close level of accordance of the experimental and numerical results at all stages of yielding supports performance.

Furthermore, with the increase of the yielding supports rigidity during experimental studies the strain diagrams are marked with the “yield drop” during transition of the support work from elastic into plastic stage of hardening, however it was not observed at the diagrams of numerical

simulation. This effect applies for the low-carbon steel. The occurrence of the “yield drop” is attributed to the dislocation deformation mechanism. At the initial phase, the density of dislocations is insignificant to provide larger strain degree. After reaching the upper yield stress, the intensive formation of new dislocations begins resulting in decrease of stress. Software package Ansys v 17.2 does not consider the dislocation deformation mechanisms referring to micro-structural steel composition; therefore, it leads to the absence of the “yield drop” in Figure 7.

Along with that, the local inaccuracy of the absolute value of load between the experimental and numerical result does not exceed 3.5 % and does not change significantly the general strain pattern of yielding support within the solution of the given objective.

4. METHODOLOGY FOR CONDUCTING NUMERICAL SIMULATION OF YIELDING SUPPORTS UNDER DYNAMIC LOADING

Simulation of dynamic impact was conducted in the module Ansys v17.2 - explicit dynamic (explicit difference integration scheme in time for dynamic objectives). Explicit dynamic defines the time step considering the stability condition of Courant-Friedrichs-Lewy (4):

$$\Delta t \leq f * \left[\frac{h}{c} \right]_{min}, \quad (4)$$

where, Δt – the time step, f – Courant number ($f < 1$), h – the typical element size, c – the local sound velocity in the element material.

The objectives were solved using Lagrangian approach to the medium motion description.

The simulation of the yielding supports operation under short-term dynamic loading was aimed at assessing the influence degree of the yielding supports on the dynamic response of the system: falling weight - yielding support - supporting slab (Fig. 8). The variable rigidity parameter in the work was changing the length of the deformable element. Cross-section and the material of yielding support were accepted in accordance with the experimental studies [1]. Within the present objective the moment of impact of the falling weight 1 on the yielding support 2 was simulated. The mass of the weight 1 corresponded to the weight used while experimental studies, which is 265 kg. For that purpose, the density of the weight was increased for each of the solved objectives.

The velocity of the weight 1 at the moment of impact on the yielding support 2 corresponded to the velocity of weight dropped from the height of 650 mm during experimental studies. The velocity of the weight 1 at the moment of impact on the yielding support 2 was calculated according to the dependence (1) obtained from the formulas for uniformly accelerated straight line motion (5) and was 3.57 m/s.

$$S_x = \frac{V_x^2 - V_0^2}{2a_x}, \quad (5)$$

where: S_x - the height of falling weight (0.65 m), V_x^2 - squared velocity at the impact moment of falling weight 1 and yielding support 2, V_0^2 - squared initial velocity of falling weight 1 (0 m/s²- the weight is suspended), a_x - acceleration of weight 1 (corresponds to gravity acceleration 9.81 m/s²).

The supporting plate 3 was rigidly fixed along all degrees of freedom. Weight 1 and supporting plate 3, due to their small thickness in the model (Fig. 8 b), were accepted as completely rigid elements.

In the present work, three distinctive types of supports were considered (Fig. 9): a – elastic support; b – yielding support, working in elasto-plastic stage with hardening, c – yielding support, working in elasto-plastic stage.

5. RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS OF YIELDING SUPPORTS UNDER DYNAMIC LOADING

The degree of influence of the support rigidity can be evaluated from the diagram (Fig. 13). The first case (Fig. 9a) presents the elastic support, which possesses the properties of low-carbon steel, which strains according to the Hooke's law. This support can be conventionally considered as elastic as the relative strain in it under dynamic loading will be changed according to the linear law with the constant deformation modulus corresponding to the steel elasticity modulus.

The support working in elasto-plastic with hardening stage (Fig. 9b) is characterized by the plastic straining with smooth increase in the dynamic response up to the moment when the internal surfaces of the supports contact (Fig. 10) and (Fig. 13b, point A). After that sharp increase in the value of dynamic response occurs.

Supports working in elasto-plastic stage (Fig. 9c), (Fig. 13 3, 4), depending on their rigidity

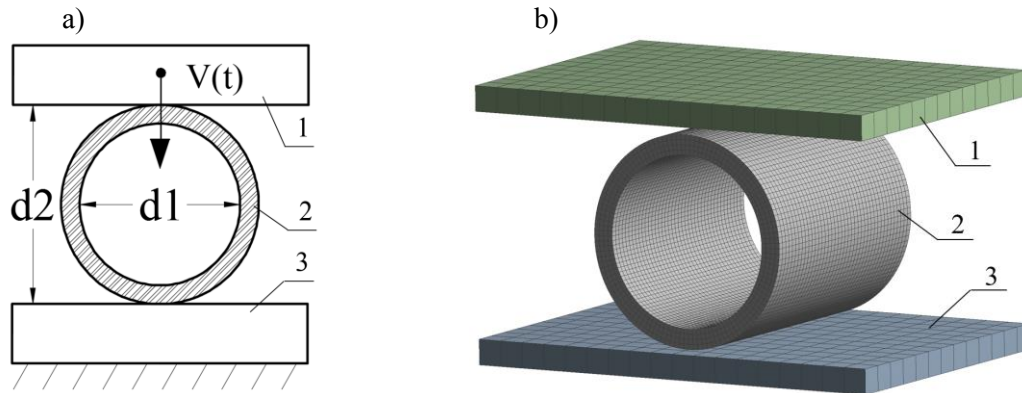


Figure 8. Design model of the yielding support testing under short-term dynamic loading (a); general view of the finite element model (b); falling weight (1); yielding support (2); supporting slab (3); d1-inner diameter: d2-outer diameter.

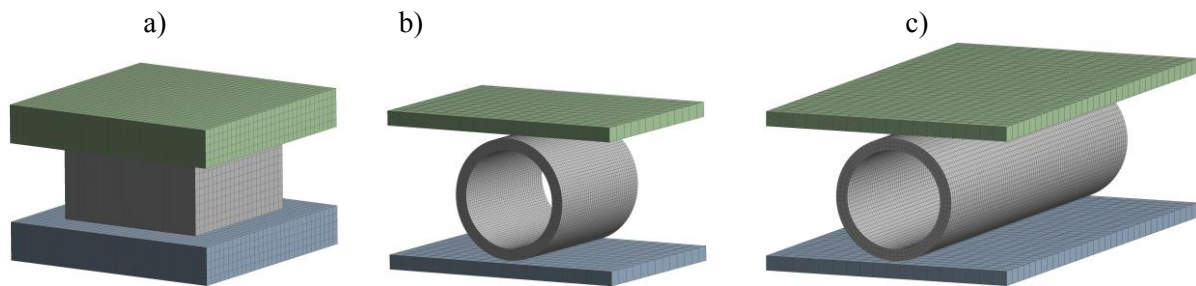


Figure 9. Computational finite element models of yielding support under short-term dynamic loading; elastic support (a); yielding support, working in elasto-plastic stage with hardening (b); yielding supports working in elasto-plastic stage (c, d).

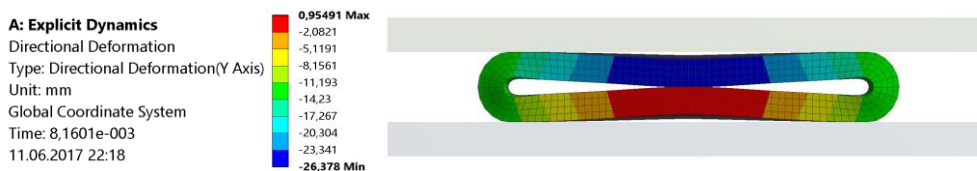


Figure 10. The overall scheme of the support straining, working in elasto-plastic with hardening stage, the moment of transition of the support into hardening stage point A (Fig. 13b).

can have different dynamic response diagrams. Along with the increase in plastic component of such supports increase in time of response occurs. Thus, for instance for the support 120 mm long (Fig. 13 4), compared to the support 1600 mm long (Fig. 13 3), the time of dynamic resistance increased by 2.66 times, which testifies on more plastic work of the first one. Moreover, the support of the larger length does not deplete the whole potential of its plastic properties (Fig. 11), while the support of the less length almost come into contact by the internal surfaces of the ring (Fig. 12). The

decrease in the maximum value of dynamic response should be noted (Fig. 13 3, 4) from 407 kN corresponding to the support 1600 mm long to 288 kN for the support 120 mm long which makes 29.2 %.

Having compared the support work in elasto-plastic stage (Fig. 13 3, 4) and the support work in hardening stage (Fig. 13 2), the reduction of the system dynamic response by 6.4 times was observed (Fig. 13).

Conducting the analysis of yielding supports work (Fig. 13 2-4) with totally elastic support (Fig. 13 1), a significant reduction in the system

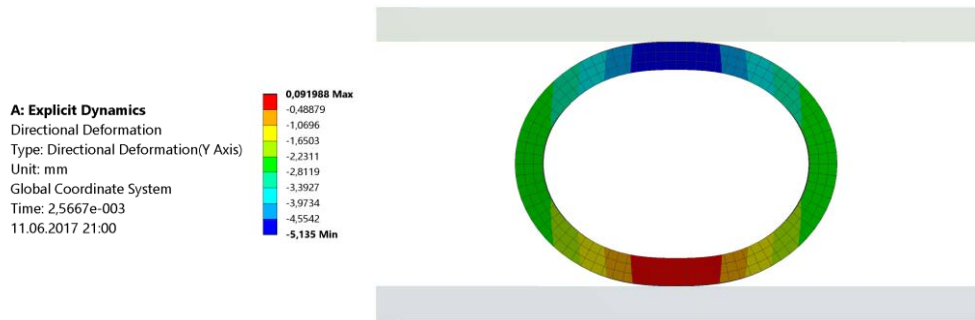


Figure 11. The general strain pattern of the support working in elasto-plastic stage (the length of the support 1600 mm).

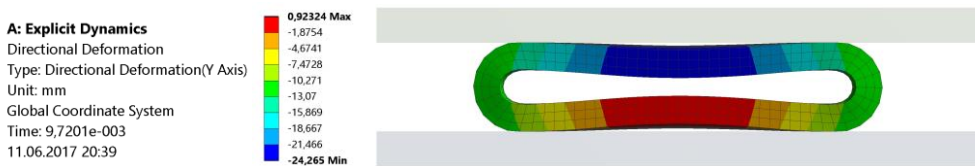


Figure 12. The general strain pattern of the support working in elasto-plastic stage (the length of the support 120 mm).

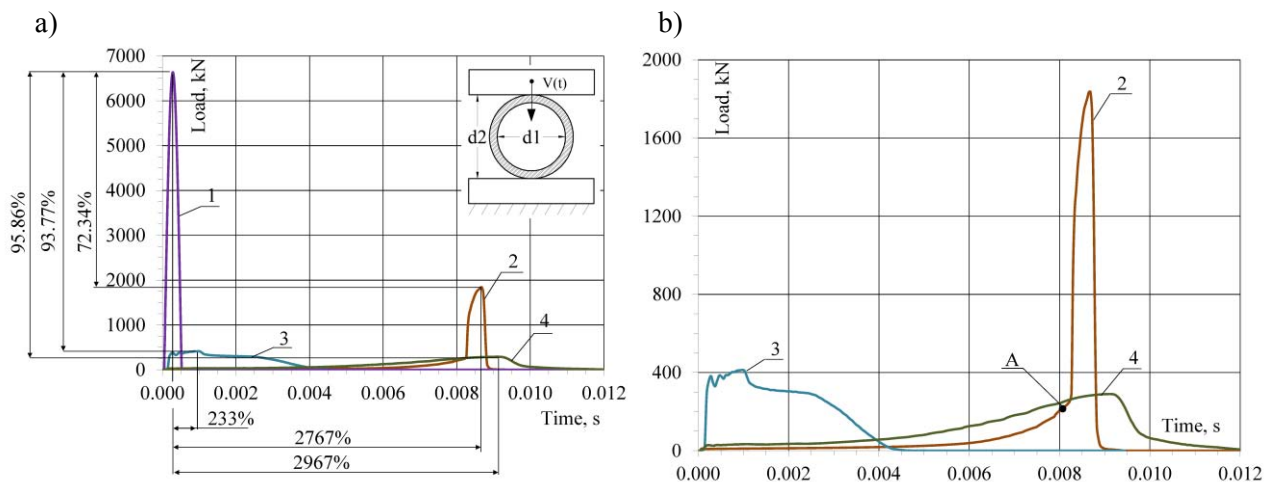


Figure 13. Diagram of changing in the dynamic response of the supports depending on their rigidity; totally elastic support (1); yielding support, working in elasto-plastic with hardening stage (2); the moment of transition of yielding support into the hardening stage (A); yielding supports working in elasto-plastic stage (3, 4).

dynamic response was revealed, thus, for instance for the elasto-plastic support (Fig. 13 4), compared to the totally elastic support (Fig. 13 1) the reduction was 23.4 times, and for the elasto-plastic with hardening support it was 6.62 times. Along with that, one should note that the increase in the time of dynamic response for yielding supports compared to the totally elastic ones should be specified (Fig. 13). The time of straining for totally elastic supports was 0.0005

sec, while for the supports working in the hardening stage it was 0.009, and for elasto-plastic it was 0.012, which is 18 and 24 times more than for the elastic supports accordingly.

5. CONCLUSION

Within the conducted research, the results of numerical and experimental studies of

deformation of yielding supports in the shape of inserted elements of annular cross-section under static loading were compared. Results demonstrate high qualitative and quantitative coincidence of the used methods. Therefore it testifies on possibility of FEM application for solution of objectives with significant physical, geometrical and contact (structural) nonlinearities, being simultaneously present in one objective. Along with that, it should be noted that FEM application in research of nonlinear structural behavior under dynamic impact is an effective tool compared to the field tests. Field tests are generally hard or even impossible to implement while the obtained data is fragmentary and to a large extent limited by the measuring facilities.

Numerical simulation results found in the present paper also demonstrate high efficiency of yielding supports subjected to short-term dynamic loading as compared to traditional elastic supports. The required effect is reached due to the peculiarities of plastic straining of the annular section and increase in the time of dynamic straining. Therefore, the obtained results enable to judge on the possibility of yielding supports application aimed at the increase in the dynamic strength of RC beams.

ACKNOWLEDGEMENT

Authors acknowledge A.M. Belostotskii, D.Sc., I.N. Afanasieva, PhD and S.V. Scherbina, the research workers of ZAO Research Center StaDyO and Research and Educational Centre of Computer Modeling, Moscow State University of Civil Engineering for a significant assistance in studying the methodologies and program software for numerical simulation to one of the authors during his research internship.

The research was conducted with the support of the Russian Foundation for Basic Research; Project No. 16-38-00133.

REFERENCES

1. **Kumpyak O.G., Meshcheulov N.V.** Prochnost' szhato-izgibaemyh zhelezobetonyh konstrukcij po naklonnym sechenijam na podatlivyh oporah pri dinamicheskom nagruzenii [Strength of reinforced concrete beams on yielding supports along oblique sections under dynamic loading]. Vestnik of TSUAB, 2014, Number 6, pp. 70-80.
2. **Poonaya S., Thinvongpituk C., Teeboonm U.** An Analysis of Collapse Mechanism of Thin-Walled Circular Tubes Subjected to Bending. // Proceedings of WASET, 2007, Number 26, pp. 329-334.
3. **Mata P., Barbat A., Oller S., Boroschek R.** Constitutive and geometric nonlinear models for the seismic analysis of rc structures with energy dissipators. // Arch. comput. methods eng., 2008, Number 15, pp. 489-539.
4. **Olabi A., Morris E., Hashmi M.** Metallic tube type energy absorbers: A synopsis. // Journal of Thin-Walled Structures, 2008, Number 45, pp. 706-726.
5. **Marzbanrad J., Mehdikhanlo M., Saeedi Pour A.** An energy absorption comparison of square, circular, and elliptic steel and aluminum tubes under impact loading. // Turkish J. Eng. Env. Sci., 2009, Number 33, pp. 159-166.
6. **Kumpyak O.G., Galyautdinov Z.R., Kokorin D.N.** Strength of concrete structures under dynamic loading. // II All-Russian Scientific Conference of Young Scientists "Advanced Materials in Technology and Construction", 2015, Number 1698.
7. **Chiaia B., Kumpyak O.G., Placidi L., Maksimov V.B.** Experimental analysis and modeling of two-way reinforced concrete slabs over different kinds of yielding supports under short-term dynamic loading. // Engineering Structures, 2015, Number 96, pp. 88-99.

8. **Rastorguev V.S.** Primenenie dinamicheskikh gasitelej kolebanij pri vzryvnyh vozdeystvijah [Application of dynamic oscillation dampers under explosive impacts]. // Building mechanics and analysis of structures, 2009, Number 1, pp. 50-57.
9. **Kumpyak O.G., Galyautdinov Z.R., Kokorin D.N.** Prochnost' i deformativnost' zhelezobetonnyh konstrukcij na podatlivykh oporah pri kratkovremennom dinamicheskom nagruzhenii [Strength and deformability of reinforced concrete structures on yielding supports under short-term dynamic loading]. Tomsk, TSUAB Publishing Office, 2016, 272 pages.
6. **Kumpyak O.G., Galyautdinov Z.R., Kokorin D.N.** Strength of concrete structures under dynamic loading. // II All-Russian Scientific Conference of Young Scientists "Advanced Materials in Technology and Construction", 2015, Number 1698.
7. **Chiaia B., Kumpyak O.G., Placidi L., Maksimov V.B.** Experimental analysis and modeling of two-way reinforced concrete slabs over different kinds of yielding supports under short-term dynamic loading. // Engineering Structures, 2015, Number 96, pp. 88-99.
8. **Расторгуев В.С.** Применение динамических гасителей колебаний при взрывных воздействиях. // Строительная механика и расчет сооружений, 2009, №1, с. 50-57.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кумпяк О.Г., Мещеулов Н.В.** Прочность сжато-изгибаемых железобетонных конструкций по наклонным сечениям на податливых опорах при динамическом нагружении. // Вестник ТГАСУ, 2014, №6, с. 70-80.
 2. **Poonaya S., Thinvongpituk C., Teeboonm U.** An Analysis of Collapse Mechanism of Thin-Walled Circular Tubes Subjected to Bending. // Proceedings of WASET, 2007, Number 26, pp. 329-334.
 3. **Mata P., Barbat A., Oller S., Boroschek R.** Constitutive and geometric nonlinear models for the seismic analysis of rc structures with energy dissipators. // Arch. comput. methods eng., 2008, Number 15, pp. 489-539.
 4. **Olabi A., Morris E., Hashmi M.** Metallic tube type energy absorbers: A synopsis. // Journal of Thin-Walled Structures, 2008, Number 45, pp. 706-726.
 5. **Marzbanrad J., Mehdikhanlo M., Saeedi Pour A.** An energy absorption comparison of square, circular, and elliptic steel and aluminum tubes under impact loading. // Turkish J. Eng. Env. Sci., 2009, Number 33, pp. 159-166.
 9. **Кумпяк О.Г., Галяутдинов З.Р., Кокорин Д.Н.** Прочность и деформативность железобетонных конструкций на податливых опорах при кратковременном динамическом нагружении. – Томск: Издательство ТГАСУ, 2016. – 272 с.
-
- Oleg G. Kumpyak, Tomsk State University of Architecture and Building, Reinforced Concrete and Masonry Structures, 634003, Russia, Tomsk, 2 Solyanaya sq., Building 5, e-mail: kumpyak@yandex.ru.
- Nikita V. Mescheulov, Tomsk State University of Architecture and Building, Head of the Research and Education Center of Computer Simulation and Modeling of Building Structures and Systems, 634003, Russia, Tomsk, 2 Solyanaya sq., Building 1, e-mail: nikita.mesheulov@mail.ru.
- Кумпяк Олег Григорьевич, Томский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра железобетонных и каменных конструкций 634003, Россия, г. Томск, Соляная площадь, 2 корпус 5, e-mail: kumpyak@yandex.ru.
- Мещеулов Никита Владимирович, Томский государственный архитектурно-строительный университет, научно-образовательный центр компьютерного моделирования строительных конструкций и систем 634003, Россия, г. Томск, Соляная площадь, 2 корпус 1, e-mail: nikita.mesheulov@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-114-120

УЧЕТ РАСЧЕТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ШПУНТОВЫХ СТЕН ПРОФИЛЯ «ЛАРСЕН» ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОГРАЖДЕНИЙ КОТЛОВАНОВ

Р.А. Мангушев, А.Б. Фадеев

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Санкт-Петербург, РОССИЯ

Аннотация: Механизм работы, жесткость и прочность на изгиб шпунтовых стен из рофиля Ларсен зависит от сопротивляемости сдвигу замковых сочленений свай в стене. Этот факт не учитывается в отечественной практике проектирования и устройства шпунтовых стен.

Ключевые слова: стальные шпунтовые стенки, показатели прочности и жесткости, замковые соединения, момент инерции, момент сопротивления

THE ACCOUNT OF OPTIONS SHEET OF WALLS PROFILE LARSEN IN THE DESIGN OF EXCAVATIONS SUPPORTING WALLS

Rashid A. Mangushev, Alexandr B. Fadeev

Saint-Petersburg State Architecture and Construction University, Saint-Petersburg, RUSSIA

Abstract: Bending stiffness and strength of steel sheet retaining walls is strongly dependent on shear resistance of pile interlocks. This fact, usually, is not taken into account in domestic practice of design and construction of sheet walls.

Keywords: steel sheet pile wall, strength and rigidity of the tool joint, moment of inertia, moment of resistance

ВВЕДЕНИЕ

Стальные шпунтовые стены широко используются в различных областях геотехнического строительства. Их достоинствами являются быстрота и относительная простота возведения, высокая прочность, малая водопроницаемость, возможность демонтажа и повторного использования. В конечном итоге стальные шпунтовые стены обычно оказываются экономичнее других подпорных конструкций.

Показатели жесткости и прочности шпунтовых стен из профилей Ларсен зависят от сопротивляемости замковых сочленений свай сдвиговым усилиям, возникающим между

четными и нечетными сваями в стене. Этот факт не учитывается в отечественной практике проектирования и устройства шпунтовых стен, что может иметь неблагоприятные последствия.

1. УСИЛИЯ В ЗАМКАХ

Для устройства шпунтовых ограждений котлованов обычно используются горячекатаные стальные сваи U-профиля (Ларсен) и Z-профиля (рис.1) [1]. В европейской практике чаще находит применение U-профиль, в США обычно предпочтение отдается Z-профилю.

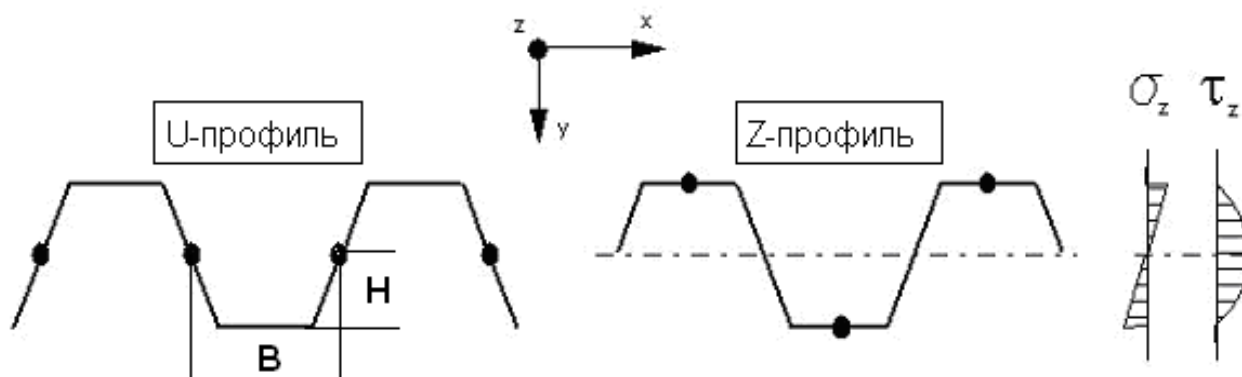


Рисунок 1. Положение замков и распределение напряжений.

Таблица 1. Параметры сечений шпунта U-профиля.

Профиль	Размеры сечения сваи, м		Масса 1 м, кг		Момент инерции I, см ⁴		Момент сопротивления W, см ³	
	B	H	сваи	стены	сваи	1м стены	сваи	1м стены
Л4	0,40	0,18	74	185	4660	39600	405	2200
Л5	0,42	0,18	100	238	6243	54000	461	2962

При изгибе шпунтовой стены в плоскости yz максимальные нормальные напряжения σ_z возникают в крайних волокнах сечения стены, а максимальные напряжения сдвига τ_z возникают на нейтральной оси сечения. Принципиальное различие стен из U и Z профилей заключается в положении замков сочленений свай: у Z-стен замки находятся на крайних волокнах сечения и на них не передаются сдвиговые усилия, а у U-стен замки находятся на нейтральной оси и на них передаются максимальные сдвигающие силы. Если сопротивляемость замков достаточно велика и взаимного сдвига свай в них не происходит, то сечение стены работает как сплошное с максимальными моментами инерции и сопротивления. Если же сопротивляемость взаимному сдвигу свай равна нулю и сваи в замках свободно проскальзывают, то стена превращается в ряд независимо работающих свай с их параметрами.

В табл.1 приводятся параметры отечественных U-профилей Л4 и Л5.

В таблице 1 моменты инерции и сопротивления 1 м стены приводятся для сплошного сечения без проскальзывания в замках. В оте-

чественной практике проектирования шпунтовых стен именно эти значения и используются. Между тем зарубежные производители U-профилей шпунта, приводя такие показатели, обязательно оговаривают, что они действительны лишь при условии наличия необходимой прочности замка на сдвиг [2,3,4,5].

Величина сил сопротивления взаимному сдвигу соседних свай в стене определяется следующими составляющими:

- трение в замке из-за вариаций геометрии замка по длине сваи,
- трение в замке из-за зацементированного в замке грунта,
- трение сваи о грунт.

Однако, этих сил сопротивления может оказаться недостаточно для противостояния сдвигу, особенно в слабых глинах и суглинках при вибропогружении шпунта. В этом случае грунтовое заполнение замка будет скорее играть роль смазки, нежели усилителя трения.

На рис.2 приведены три расчетных графика сдвигающей силы в замке по глубине шпунтовой стены, подпертой в уровне -2,0 м [4].

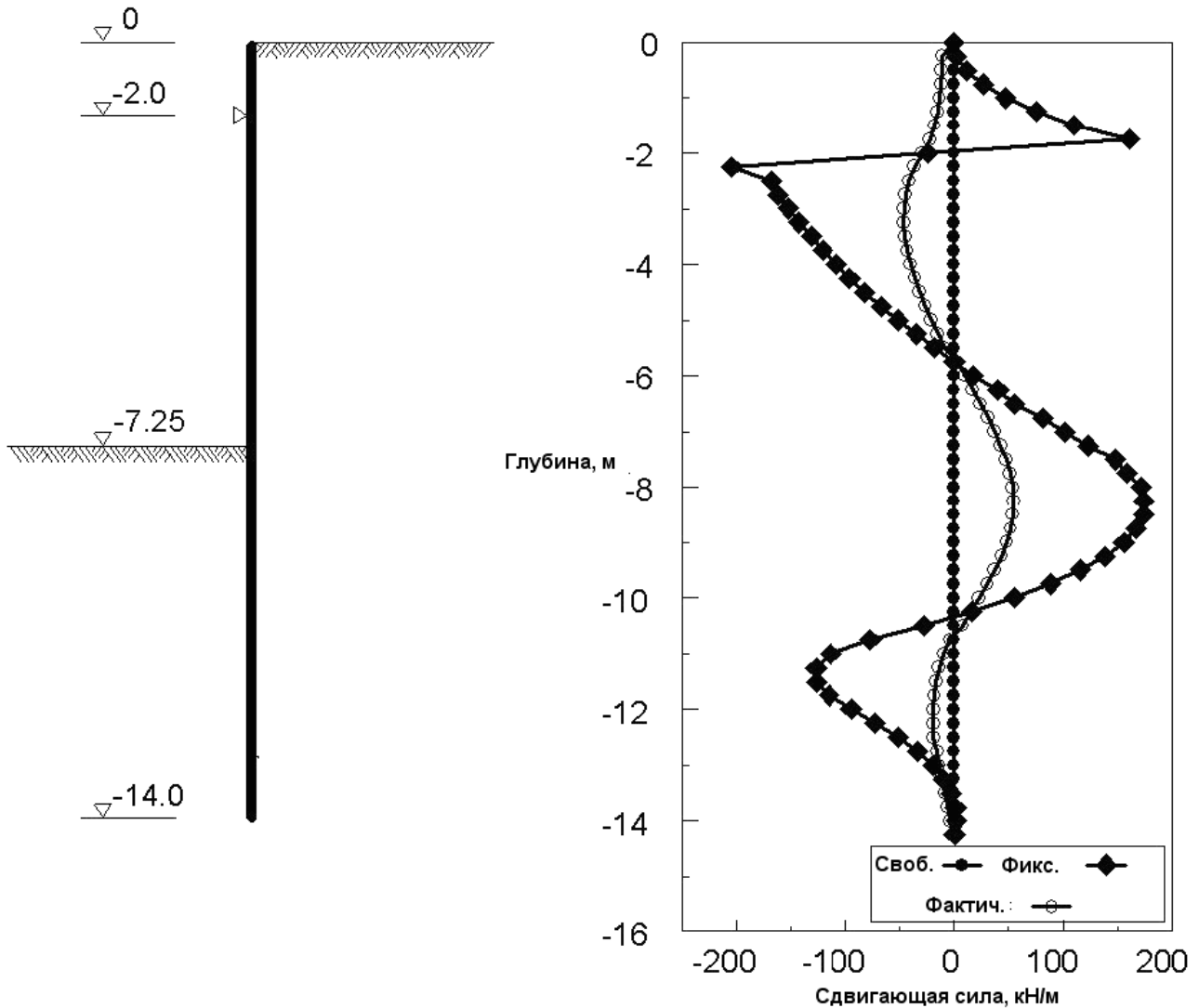


Рисунок 2. Графики сдвигающей силы в замке шпунтовой стены.

При свободном сочленении свай в замке сдвигающая сила по всей глубине естественно равна нулю. При полной фиксации замка от сдвига сдвигающая сила максимальна. Фактический график сдвигающей силы, построенный для реального грунта, находится в промежутке между двумя крайними случаями, при этом сила сопротивления сдвигу свай в замке составляет около $1/3$ от величины, необходимой для полного исключения сдвига. Естественно, использование при расчетах в этом случае параметров профилей, определенных для условий полной фиксации в замках, привело бы к опасной переоценке сопротивляемости стены. Известны аварий-

ные ситуации, возникшие по такой причине [1,4].

Радикальной мерой для исключения сдвига в замке является его сварка или чеканка. В зарубежной практике обычно шпунтовые сваи U-профиля (да и Z-профиля тоже) погружаются сочлененными попарно, а изготовители обеспечивают поставку сдвоенных и даже строенных свай с гарантированной сопротивляемостью замков сдвигу. Чаще всего замки на сдвоенных сваях скрепляются точечной чеканкой через 25-30 см. Каждая чеканка обеспечивает сопротивление сдвигу не ниже 75 кН [5].

Наличие заводской сварки или чеканки каждого второго замка в стене приближает ее моменты инерции и сопротивления к максимальным значениям.

При отсутствии сварки или чеканки замков стена в слабом водонасыщенном глинистом грунте будет иметь моменты инерции и сопротивления, близкие к минимальным значениям, равным арифметической сумме моментов свай, приходящихся на 1 метр стены:

$$I_{\text{стены}} = I_{\text{свай}}/B; W_{\text{стены}} = W_{\text{свай}}/B,$$

где B – ширина свай, м).

Расчетный изгибающий момент M для шпунтовой стены определяется выражением:

$$M = WR_y,$$

где R_y – расчетное сопротивление стали по пределу текучести).

В табл. 2 приведены значения момента инерции, момента сопротивления и расчетного изгибающего момента для 1 м шпунтовых стен со свободными и фиксированными замками. Материал шпунтовых свай сталь С235 с расчетным сопротивлением $R_y = 230$ МПа.

Из табл.2 видно, что отсутствие сварки или чеканки замков может снизить момент инерции стены более чем втрое и соответственно увеличить деформации стены и осадки окружающих сооружений. Одновременно момент сопротивления и расчетный изгибающий момент стены снижаются более чем вдвое, что заставит использовать более тяжелый профиль.

Необходимость фиксации замков закреплена в европейских нормах [3], но пока не нашла отражения в отечественной нормативной документации.

2. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

В Петербурге на одном из объектов спроектировано шпунтовое ограждение и под его защитой осуществлялась откопка строитель-

ного котлована. Было выполнено численное моделирование сооружения стены и откопки котлована с помощью программы Plaxis в плоской постановке.

Общая расчетная схема приведена на рис.3. Грунты - характерные для Петербурга: преимущественно водонасыщенные пылеватые пески и слабые суглинки. Свойства грунтов в порядке следования слоев на рис. 3 приведены в табл. 3.

По поверхности грунта за пределами откапываемого котлована приложена нагрузка 20 кПа.

Откопка котлована выполняется в 3 фазы: до глубины 4, 8 и 10 м.

Борт котлована поддерживается стеной из шпунта Л5. Глубина стены 13,5 м. Шпунтовая стена опирается на 3 яруса распорок, устанавливаемых последовательно по мере откопки котлована. Жесткость распорок $E_A = 1,000E+06$ кН на 1 м стены.

Были выполнены две серии моделирования: 1 – изгибная жесткость шпунтовой стены соответствует стене с фиксированными замками: $EI = 1,069E+05$ кНм²/м;

2 – изгибная жесткость шпунтовой стены соответствует стене со свободными замками: $EI = 3,062E+04$ кНм²/м.

Все прочие параметры в обеих сериях моделирования одинаковы.

На рис.4 а,б,в приведена общая картина деформаций после 1, 2 и 3-й фазы откопки котлована (стена с фиксированными замками), а на рис.4г,д,е – то же для стены со свободными замками.

Максимальное перемещение узловых точек на рис.4а составляет 65,0 мм, на рис.4б – 65,4 мм, на рис.4в – 52,8 мм, на рис.4г – 84,0 мм, на рис.4д – 112,3 мм, на рис.4е – 104,7 мм. Сравнительный анализ результатов расчета, позволил установить, что при свободных замках все деформации примерно в два раза выше, чем при фиксированных.

Усилия в распорках мало зависят от состояния замков. Максимальное усилие в распорках при фиксированных замках составило 442,9 кН/м, при свободных замках – 471,4 кН/м.

Таблица 2. Расчетные параметры шпунтовых стен.

Тип профиля	Состояние замков	Момент инерции I , $\text{см}^4/\text{м}$	Момент сопротивления, W , $\text{см}^3/\text{м}$	Расчетный изгибающий момент M , кНм/м
Л4	свободны	11650	1012	234
	фиксированы	39600	2200	506
Л5	свободны	14864	1098	252
	фиксированы	54000	2962	681

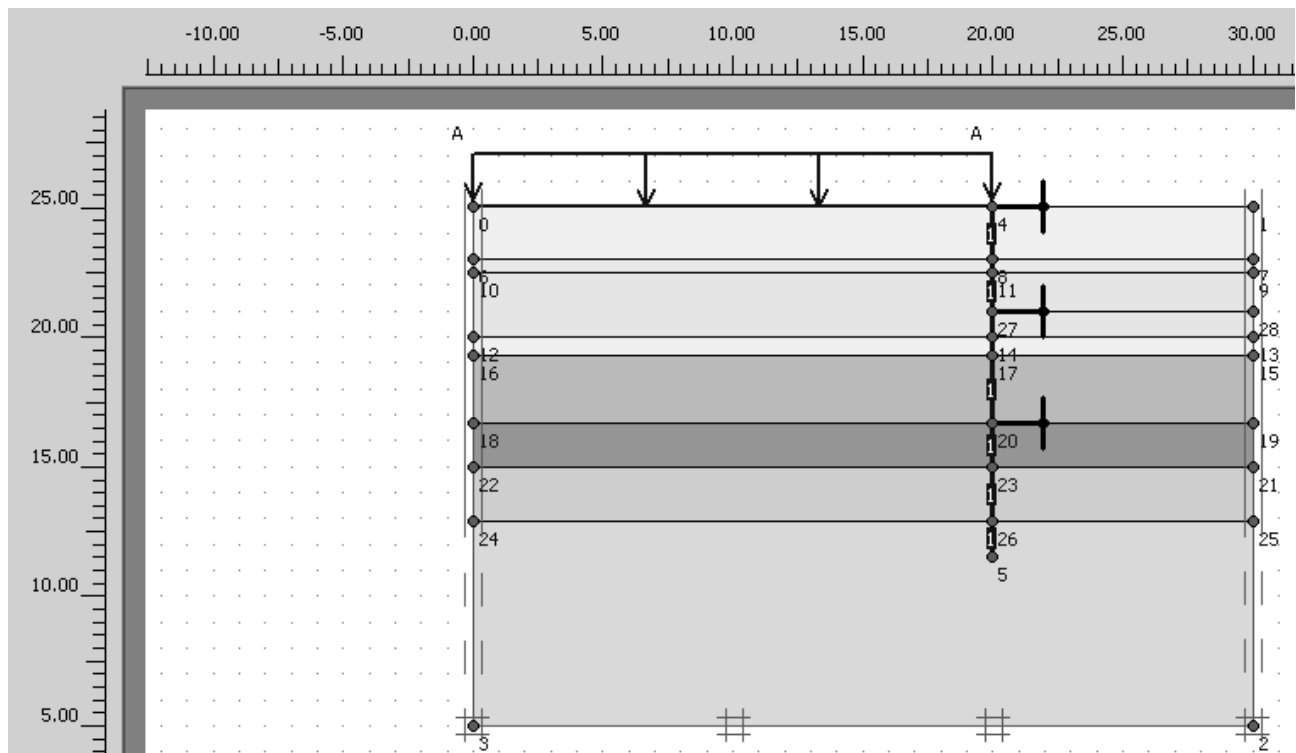


Рисунок 3. Общая расчетная схема.

Таблица 3. Свойства грунтов строительной площадки.

№ слоя	Объемный вес, кН/м^3	Модуль деформации кН/м^2	Сцепление кН/м^2	Угол вн. тр. градусов
1	19,7	6000	8,0	14,8
2	20,0	18000	1,0	25,45
3	20,0	11000	1,3	23,6
4	19,7	6000	8,0	14,8
5	18,0	4000	3,3	11,3
6	19,5	9000	8,7	12,2
7	20,6	22000	21,3	13,9
8	21,8	32000	33,3	18,3

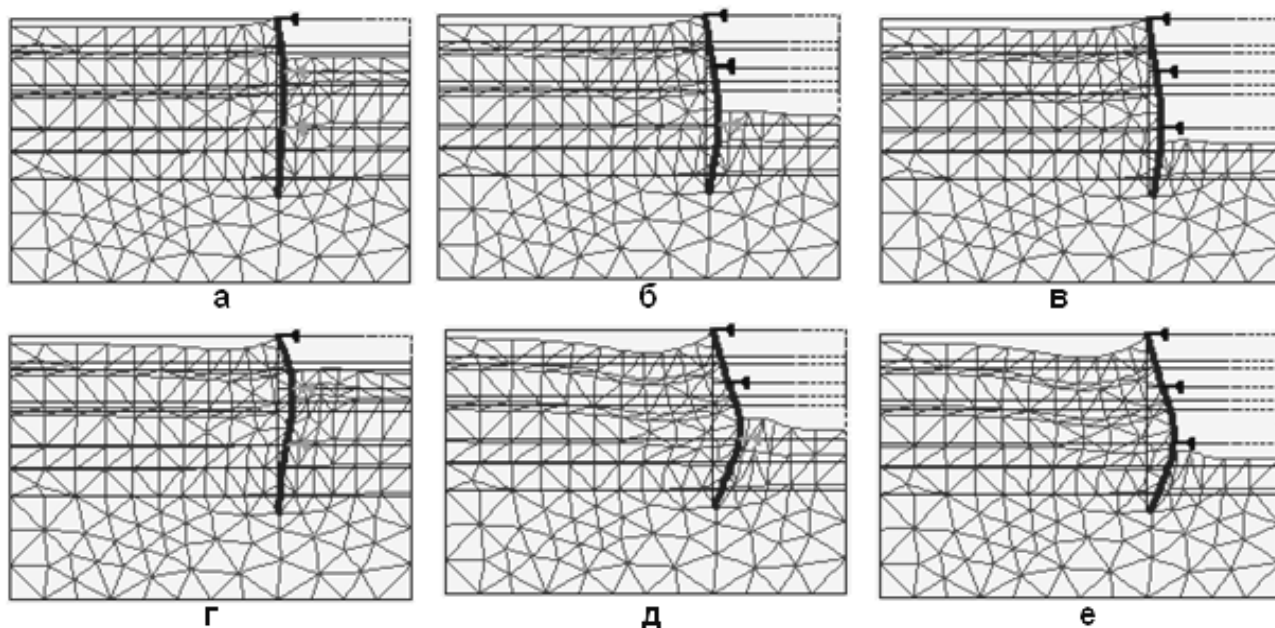


Рисунок 4. Деформации стены и грунта в ходе откопки при фиксированных (а,б,в) и свободных замках(г,д,е).

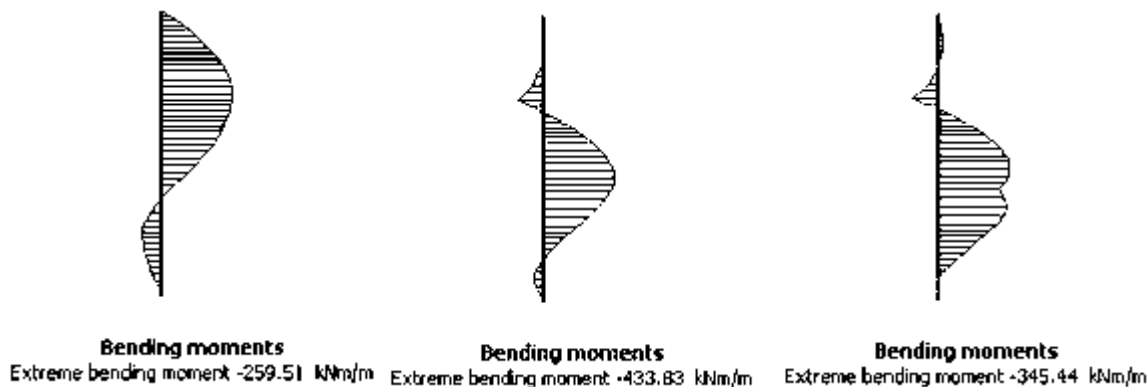


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов в шпунтовой стене с фиксированными замками на 1, 2 и 3 фазе откопки.

На рис.5 приведены эпюры изгибающих моментов в шпунтовой стене с фиксированными замками на 1, 2 и 3 фазе откопки.

Максимальный изгибающий момент 433,83 кНм/м возникает на 2 фазе. Это ниже расчетного момента профиля Л5 с фиксированными замками 681 кНм/м (табл. 2), то есть прочность стены достаточна.

Эпюры изгибающих моментов в стене со свободными замками по форме аналогичны рис. 5, но абсолютные величины моментов примерно в 1,5 раза ниже вследствие меньшей жесткости стены. Максимальный изги-

бающий момент возникает также на 2 фазе и составляет 320,08 кНм/м. Эта величина превышает расчетный момент профиля Л5 со свободными замками 252 кНм/м (табл.2), то есть прочность стены на изгиб со свободными замками недостаточна.

Таким образом, рассматриваемая шпунтовая стена, сооруженная без мер усиления замков, может прийти в аварийное состояние при возникновении сдвигов в замках. Рассмотренный пример наглядно демонстрирует необходимость учета состояния замков при проектировании шпунтовых стен.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для устройства шпунтовых стен в отечественной практике обычно используются стальные сваи U-профиля (Ларсен). Жесткость и прочность таких стен зависит от величины сил сопротивления взаимному сдвигу соседних шпунтовых свай в замках. До сих пор, этому факту не уделяется должного внимания и часто, по умолчанию, шпунтовые ограждения проектируются на максимальные показатели, что создает предпосылки для возникновения аварийных ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мангушев Р.А., Никифорова Н.С., Конюшков В.В., Осокин А., Сапин Д.С. Проектирование и устройство подземных сооружений в открытых котлованах. – М.: АСВ, 2013. – 256 с.
2. Carl A.Thoresen. Port Designer's Handbook, 2003, 549 pages.
3. CEN: ENV1993-5 Eurocode 3: Design of steel structures, Part 5: Piling, 1997.
4. Bending Behavior of Double U Sheet Piles. <http://www.skylinesteel.com/assets/WhitePapers/locked/DoubleUPileBehaviorWP.doc>.
5. Piling Handbook. ArcelorMittal. 8th Edition. 2008. <http://www.skylinesteel.com/resource/piling101.aspx>.
6. Sheet Piling Handbook. Design. Thyssen-Krupp GfT Bautechnik GmbH. http://www.tkgftbautechnik.com/english/_pdf/Rammprofile/Sheet-piling_handbook.pdf.

REFERENCES

1. Mangushev R.A., Nikoforova N.S., Konushkov V.V., Osokin A., Sapin D.S. Proektirovaniye i ustroystvo podzemnikh sooruzheniy v otkritikh kotlovanakh [Design and Construction of Underground

- Structures in Open Pits]. Moscow, ASV Publishing House, 2013, 256 pages.
2. Carl A.Thoresen. Port Designer's Handbook, 2003, 549 pages.
3. CEN: ENV1993-5 Eurocode 3: Design of steel structures, Part 5: Piling, 1997.
4. Bending Behavior of Double U Sheet Piles. <http://www.skylinesteel.com/assets/WhitePapers/locked/DoubleUPileBehaviorWP.doc>.
5. Piling Handbook. ArcelorMittal. 8th Edition. 2008. <http://www.skylinesteel.com/resource/piling101.aspx>.
6. Sheet Piling Handbook. Design. Thyssen-Krupp GfT Bautechnik GmbH. http://www.tkgftbautechnik.com/english/_pdf/Rammprofile/Sheet-piling_handbook.pdf.

Мангушев Рашид Абдуллоевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; заведующий кафедрой геотехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ), директор научно производственного консалтингового центра геотехнологий СПбГАСУ. Россия, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская 4; e-mail: ramangushev@yandex.ru.

Фадеев Александр Борисович, доктор технических наук, профессор кафедры геотехники СПбГАСУ.

Mangushev Rashid Abdullovich, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Doctor of Technical Sciences; Head of Geotechnical Department, Saint-Petersburg State Architecture and Construction University, Director of Scientific and Consulting Centre of Geotechnologies, Russia, Saint-Petersburg, 2-ya Krasnoarmeyskaya 4; e-mail: ramangushev@yandex.ru.

Fadееv Aleksandr Borisovich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Geotechnical Department Saint-Petersburg State Architecture and Construction University.

ВАРИАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПЛАСТИН С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНТУРОМ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА РЕЛЕЯ – РИТЦА

Г.А. Мануйлов

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Для тонких упругих пластин произвольного очертания с гладким защемленным или шарнирно опертым контуром на основе модифицированного метода Релея-Ритца получены явные выражения для приближенных значений максимального прогиба от равномерно распределенной нагрузки, прогиба в точке приложения сосредоточенной силы, критической силы равномерного сжатия и основной частоты собственных колебаний. Поперечные перемещения аппроксимировались специальными функциями, имеющими линии уровня, подобные контуру пластины. Приведены результаты расчета пластины в форме грушевидного овала, которые хорошо согласуются с двусторонними геометрическими оценками соответствующих решений.

Ключевые слова: метод Релея-Ритца, прогиб, частота собственных колебаний, потеря устойчивости, пластина

THE APPROXIMATE SOLUTION FOR PLATES USING MODIFIED RAYLEIGH-RITZ METHOD

Gaik A. Manuylov

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: For thin elastic plates of arbitrary shape with a smooth pinched or hinged contour based on the modified Rayleigh-Ritz method, explicit expressions are obtained for the approximate values of the maximum deflection from a uniformly distributed load, the deflection at the point of application of the concentrated force, the critical force of uniform compression, and the first eigenfrequency. The lateral movements were approximated by special functions having level lines similar to the plate contour. The results of calculating the plate in the form of a pear-shaped oval are presented, which are in good agreement with the two-sided geometric estimates of the corresponding solutions.

Keywords: Rayleigh-Ritz method, deflection, eigenfrequency, loss of stability, plate

Рассмотрим возможности получения вариационно-геометрических оценок максимального прогиба W_q от действия равномерно распределенной нагрузки q , прогиба W_{PP} под сосредоточенной силой P , критической силы равномерного сжатия N_{KP} и основной частоты колебаний ω_1 . Будем определять указанные элементы решений для защемленных и шарнирно опертых пластин, ограниченных гладким выпуклым контуром Γ по известным вариационным представлениям.

$$W_q = \iint q \cdot f(x, y) dA / 2n_{\Delta}(f(x, y)); \quad (1)$$

$$\omega_1^2 = \min\{2n_{\Delta}(f(x, y)) / \iint f^2(x, y) dA\}; \quad (1a)$$

$$W_{PP} = \max\{P / 2n_{\Delta}(f(x, y))\}; \quad (2)$$

$$N_{KP} = \min \left\{ \frac{2n_{\Delta}(f(x, y))}{\iint grad^2 f(x, y) dA} \right\}. \quad (2a)$$

Здесь $f(x, y)$ – «единичные» функции ($0 \leq f(x, y) \leq 1$), удовлетворяющие граничным условиям защемления или шарнир-

ного опирания; Δ – оператор Лапласа; Π_{\ominus} – потенциальная энергия упругой деформации; dA – элемент площади пластины. При этом

$$W_q(x, y) = W_q \cdot f(x, y);$$

$$W_p(x, y) = W_{pp} \cdot f(x, y).$$

Для получения приближенных значений рассматриваемых прогибов, а также критической силы и основной частоты колебаний применим модифицированный метод Релея-Ритца, в котором используются как «допустимые функции сравнения», некоторые функции $f^*(x, y)$, имеющие линии уровня, подобные контуру пластины, и подобно расположенные с центром подобия в начале координат. Это позволяет двумерную задачу свести к одномерной, поскольку такие функции имеют вид

$$f^*(x, y) = g(t/r(\varphi)) = g(\rho), \quad (0 \leq \rho \leq 1),$$

где $r(\varphi)$ – полярное уравнение контура Γ с центром в начале координат; $g(\rho)$ – функция, управляющая законом распределения линий уровня от «центра» к периферии. Впервые эти функции были применены Д.Полиа и Г.Сеге [1] в задачах о колебаниях закрепленных мембран и кручении стержней. Для интегралов от функции типа $f^*(x, y)$, входящих в выражения (1,2), ими были получены следующие выражения

$$\iint f^*(x, y) dA = 2A \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho,$$

$$\iint f^{*2}(x, y) dA = 2A \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho,$$

$$\iint grad^2 f^*(x, y) dA = B \int_0^1 g^{\odot 2}(\rho) d\rho,$$

$$B = \int_0^{2\pi} (1 + r^{\odot 2}(\varphi) / r^2(\varphi)) \geq 2\pi$$

Здесь B – характеристика правильности формы пластины.

Развивая идеи работы [1], В.И. Коробко [2] вывел важную формулу для интеграла от квадрата лапласиана функции $f^*(x, y)$ в полярных координатах

$$D \iint (\Delta f^*(x, y))^2 dA = D \left(J_1 \int_0^1 g'^2 \rho d\rho + J_2 \int_0^1 2g' g'' \rho d\rho + J_3 \int_0^1 (g'^2 / \rho) d\rho \right), \quad (3)$$

где J_1, J_2, J_3 – интегралы по замкнутому контуру ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $r = r(\varphi)$,

$$J_1 = \int (1 + r'^2 / r^2)^2 d\varphi / r^2, \quad (4)$$

$$J_2 = \int (1 + r'^2 / r^2)(1 + 2r'' / r^2 - r''' / r) d\varphi / r^2, \quad (4a)$$

$$J_3 = \int (1 + 2r'^2 / r^2 - r''' / r)^2 d\varphi / r^2. \quad (5)$$

В расчетах пластин эти формулы, насколько известно автору, до сих пор не применялись; В.И. Коробко пошел дальше, и с помощью неравенства Коши-Буняковского получил интересную изопериметрическую оценку

$$D \iint (\Delta f^*(x, y))^2 dA \approx D(B^2 / 2A) \cdot \int_0^1 (g'^2 \rho + 2g' g'' + g'^2 / \rho) d\rho \quad (6)$$

Равенство здесь достигается для круглых пластин и в некоторых задачах изгиба защемленных эллиптических пластин.

Отметим, что равенство (3) дает представление потенциальной энергии защемленных пластин с гладким контуром, если деформация изгиба задается «единичной» функцией типа $f^*(x, y)$. При этом второй член правой части равен нулю. Для пластин с гладким шарнирно опертым контуром выведем ана-

логичную формулу при помощи известного выражения

$$2\Pi_{\mathcal{E}} = D \iint (\Delta f)^2 dA - 2(1-\nu) \iint (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) dA, \quad (7)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, ν – коэффициент Пуассона; индексами отмечены вторые производные по x и по y . Второй интеграл в этой формуле есть интеграл от гауссовой кривизны поверхности прогибов пластины; он равен нулю для любых пластин с защемленным контуром, а также для полигональных пластин с шарнирно опертым контуром. Поэтому для таких пластин в выражении потенциальной энергии упругой деформации остается только интеграл от квадрата лапласиана. Для шарнирно опертых пластин с кусочно-гладким криволинейным контуром интеграл от гауссовой кривизны не равен нулю; имеются пластины с гладким контуром, поверхность прогибов которых при действии ряда нагрузок оказывается всюду выпуклой. В связи с этим для дальнейшего второй интеграл в (7) удобно преобразовать в контурный (М.Ш. Бирман, [3, 4]). Будем иметь

$$2n_{\mathcal{E}} = D \iint (\Delta f)^2 dA - (1-\nu) \oint \frac{\mathcal{F}(s)^2}{\partial n} \cdot \frac{ds}{R(s)}, \quad (8)$$

где $R(s)$ – радиус кривизны контура, $\mathcal{F}(s)/\partial n$ – производная по нормали к контуру (угол поворота), ds – элемент дуги контура:

$$ds = r \cdot d\varphi \sqrt{1 + r'^2 / r^2}.$$

Чтобы получить для величины $2\Pi_{\mathcal{E}}(f^*)$ выражение, аналогичное (3), воспользуемся следующими соотношениями

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r}{r(1 + r'^2 / r^2)^{3/2}},$$

$$\left(\frac{\mathcal{F}^*}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{F}^*}{\partial t}\right)^2 = g'^2 \left(\frac{t}{r} = 1\right) \cdot \frac{1}{r^2} = g'^2(1) \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Подстановка этих соотношений в (7) дает выражение $2\Pi_{\mathcal{E}}(f^*)$ для шарнирно опертых пластин с гладким контуром, аналогичное (3):

$$2n_{\mathcal{E}}(f^*) = D(J_1 \cdot \int_0^1 g'^2 \rho d\rho + J_2 \cdot \int_0^1 2g'g'' d\rho + J_3 \cdot \int_0^1 (g'^2 / \rho) d\rho - J_4(1-\nu) \cdot g'^2(1)), \quad (9)$$

где интегралы J_1, J_2, J_3 вычисляются согласно (4,5); интеграл J_4 имеет вид

$$J_4 = \oint (1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r) d\varphi / r^2 (1 + r'^2 / r^2).$$

Использование формул (3, 9) для получения приближенных значений функционалов (1,2) требует предварительного исследования области их возможного корректного применения. Дело в том, что на прямолинейных участках контура интегралы J_2, J_3 и J_4 равны нулю, поскольку в ноль обращается выражение

$$1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r,$$

стоящее в числителе формулы для кривизны контура. Поэтому для полигональных пластин в соотношениях (3) и (9) для $2\Pi_{\mathcal{E}}(f^*)$ остается только интеграл J_1 , а линии уровня функций типа $f^*(x,y)$ оказываются замкнутыми многоугольниками. Функции с такими линиями уровня использовались авторами [1] в задачах о колебаниях мембран многоугольной формы и кручении стержней с многоугольными сечениями. Казалось бы, что и для многоугольных пластин подобные функции также являются допустимыми. На самом деле функции $f^*(x,y)$ с линиями

уровня в виде замкнутых многоугольников не могут принадлежать области определения функционалов (1,2) для пластин, поскольку в ряде задач применение таких функции приводит к нарушению соответствующих вариационных принципов. Например, для квадратной защемленной пластины при использовании в качестве собственной формы функции $f^*(x,y)$ с квадратными линиями уровня вычисленная основная частота собственных колебаний оказалась меньше точной:

$$\omega_1^* = 34,29\sqrt{D/m/a^2}$$

вместо

$$\omega_1 = 35,985\sqrt{D/m/a^2}.$$

Точно также при вычислении критической силы равномерного сжатия для защемленной квадратной пластины было получено

$$N_{KP}^* = 38,07D/a^2$$

вместо точного значения

$$N_{KP} = 52,344D/a^2$$

(a – сторона квадрата).

Есть и еще одно соображение, которое указывает на неприменимость функции $f^*(x,y)$ с линиями уровня в виде замкнутых кусочно гладких кривых с угловыми точками для получения вариационных оценок решений в бигармонических задачах, связанных с пластинами. Такие функции имеют ребристую поверхность с линиями сосредоточенных кривизн, идущих от вершины “холма” функции $f^*(x,y)$ к каждой угловой точке контура Γ . Вдоль ребра первая производная по нормали будет ступенчатой функцией, а вторая производная $\partial^2 f^* / \partial n^2$ “на ребре” оказывается δ – функцией. В выражения потенциальной энергии упругой деформации

(3,9) входят интегралы от квадратов вторых производных. Но операции возведения δ – функции в квадрат и интегрирования этого квадрата в математике не определены (на это обстоятельство внимание автора обратил А.А. Космодемьянский).

Из сказанного вытекает, что выражения (3) и (9) для $2\Pi_3(f^*)$ корректны только в случае гладкого контура (возможно, частично прямолинейного [5, 6]).

Что касается неравенства (6), то оно справедливо только для областей, ограниченных гладким, всюду криволинейным звездным контуром, поскольку лишь для таких замкнутых контуров справедливо равенство [7]

$$B = \oint_{2\pi} (1 + r'^2 / r^2) d\varphi = \oint_{2\pi} (1 + 2r'^2 / r^2 - r'' / r) d\varphi.$$

При вычислении оценок существенным оказывается выбор функций $g(\rho)$. Наилучшие результаты дают функции, являющиеся точными (или почти точными) решениями соответствующих задач для круглых пластин. Поэтому в оценках прогибов W_q и W_{pp} используем известные точные решения. Для защемленного контура:

$$g_q(\rho) = (1 - \rho^2)^2;$$

$$g_p(\rho) = 1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln \rho.$$

Для шарнирно опертого контура:

$$g_q(\rho) = 1 - \rho^2(6 + 2\nu)/(5 + \nu) + \rho^4(1 + \nu)/(5 + \nu);$$

$$g_p(\rho) = 1 - \rho^2 + 2\rho^2(1 + \nu) \ln \rho / (3 + \nu).$$

В оценках критической силы N_{KP} защемленных пластин использовалось точное решение, выраженное через функцию Бесселя.

$$J_0(x) - (g(\rho) = 1 - J_0(\lambda_1 \rho) / J_0(\lambda_1);$$

($\lambda_1 = 3,831706$). При шарнирном опирании контура в качестве $g(\rho)$ приближенно принималась функция $g_q(\rho)$. Эта же функция использовалась и при определении основной частоты колебаний ω_1 . В случае защемленного контура в этой задаче использовалось «достаточно хорошее» приближенное решение [8]

$$g(\rho) = (1 - \rho^2)^2 + 0,325(1 - \rho^2)^3.$$

Окончательно вариационно-геометрические оценки W_q, W_{pp}, N_{kp} и ω_1 для защемленных пластин с гладким контуром запишутся так

$$\tilde{W}_q = qA/D(24J_1 + 8J_3) \approx W_q \quad (10)$$

$$\tilde{W}_{pp} = P/4D(J_1 + J_3) \leq W_{pp} \quad (11)$$

$$\tilde{N}_{kp} = D(9,5173 \cdot J_1 + 5,16468 \cdot J_3)/B \geq N_{kp} \quad (12)$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = D(36,7436 \cdot J_1 + 15,4488 \cdot J_3)/mA \geq \omega_1^2 \quad (13)$$

Для шарнирно опертых пластин с гладким контуром эти оценки имеют вид

$$\tilde{W}_q = \frac{qA(7 + \nu)(5 + \nu)}{D \cdot [24(3 + \nu^2)J_1 + 192 \cdot J_2 + 8(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 192(1 - \nu)J_4]} \approx W_q \quad (14)$$

$$\tilde{W}_{pp} = \frac{P(3 + \nu)^2}{4D \cdot [(1 + \nu^2)J_1 + 4 \cdot J_2 + (5 + 4\nu + \nu^2)J_3 - 4(1 - \nu)J_4]} \leq W_{pp} \quad (15)$$

$$\tilde{N}_{kp} = \frac{D \cdot [12(3 + \nu^2)J_1 + 96 \cdot J_2 + 4(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 96(1 - \nu)J_4]}{B(33 + 10\nu + \nu^2)} > N_{kp} \quad (16)$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{D[24(3 + \nu^2)J_1 + 192 \cdot J_2 + 8(19 + 8\nu + \nu^2)J_3 - 192(1 - \nu)J_4]}{mA(22,6 + 7,2\nu + 0,6\nu^2)} > \omega_1^2 \quad (17)$$

Отметим, что интегралы $J_1 - J_4$ - размерные величины,

$$J_k = \bar{J}_k/[L]^2,$$

и для их вычисления (как правило, численного) необходимо иметь полярное уравнение контура пластины $r = r(\varphi)$. Если Γ -окружность радиуса R , и начало координат помещено в ее центре, то

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 2\pi/R^2.$$

Если же начало координат смещено от центра на расстояние

$$a = \xi R$$

так, что $r(0) > R$, то получим

$$J_1 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{(1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^2 [\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]^2}, \quad (18)$$

$$J_2 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{(1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} [\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]^2}, \quad (19)$$

$$J_3 = R^{-2} \int d\varphi / (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^3, \quad (20)$$

$$J_4 = R^{-2} \int \frac{d\varphi}{[\xi \cos \varphi + (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}] (1 - \xi^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2). \quad (21)$$

В частном случае при $\xi = 1$ интегралы оказываются табличными. Для эллиптических контуров с началом координат в центре эллипса были также выведены формулы для интегралов $J_1 - J_4$. При интегрировании по замкнутому контуру эллипса для интегралов J_1 и J_3 получено конечное представление

$$J_1 = J_3 = (0,75 \cdot B^2 - \pi^2) / A, \\ A = \pi ab, \\ B = \pi(a/b + b/a),$$

где a и b – полуоси эллипса. Для этого использованы результаты работы [2]. Для прямолинейного участка контура

$$J_2=J_3=J_4=0, J_1 = (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)/a^2$$

(a – расстояние от начала координат до прямой, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$).

В заключение приведем приближенные значения решений W_q, W_{pp}, N_{kp} и ω_1 для пластины в виде грушевидного овала, ограниченного двумя дугами окружностей (с радиусами R и $0,5R$), соединенных между собой двумя касательными прямыми. Дуга большего радиуса охватывает угол 240° , меньшего – 120° ; расстояние между центрами дуг $0,5R$; начало координат (предполагаемая точка максимума прогибов) принято на расстоянии $0,15R$ от центра большей дуги. Площадь овала $A=3,441216R^2$, характеристика $B=6,810055$. В случае защемленного контура приближения согласно (10-13), (18-21), и двусторонние оценки имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{W}_q &= 0,001453 qA^2 / D ; \\ (0,001394 < W_q < 0,001583) qA^2 / D ; \\ \tilde{W}_{pp} &= 0,01921 PR^2 / D ; \\ (0,01989 < W_{pp} < 0,02179) PR^2 / D ; \\ \tilde{N}_{kp} &= 13,698 D / R^2 ; \\ (13,404 < N_{kp} < 14,682) D / R^2 ; \\ \tilde{\omega}_1 &= 9,7714(D/m)^{1/2} / R^2 ; \\ (9,3256 < \omega_1 < 10,215)(D/m)^{1/2} / R^2 . \end{aligned}$$

Аналогичные двусторонние оценки и приближенные решения на основе (14)-(17) и (18)-(21) были получены и для шарнирно опертого овала (при $\nu = 0,3$)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_q &= 0,0666 qR^4 / D ; \\ (0,0637 < W_q < 0,07643) qR / D^4 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{pp} &= 0,04697 PR^2 / D ; \\ (0,0505 < W_{pp} < 0,05532) PR / D^2 ; \\ \tilde{N}_{kp} &= 4,0437 D / R^2 ; \\ (3,8311 < N_{kp} < 4,1965) D / R^2 ; \\ \tilde{\omega}_1 &= 4,8385(D/m)^{1/2} / R^2 ; \\ (4,5074 < \omega_1 < 4,9373)(D/m)^{1/2} / R^2 . \end{aligned}$$

В качестве двусторонних оценок принимались решения для круглых пластин, одна из которых имеет радиус, равный R , а другая равновеликая с данным овалом. Как видно из сопоставления почти все приближенные решения попали в интервалы двусторонних оценок. Более грубыми оказались приближения для прогиба под сосредоточенной силой при условиях шарнирного опирания. Возможно, что это объясняется несовпадением точки максимального прогиба $\max W_{pp}$ и начала координат [9, 10]. Для эллиптических пластин приближенные решения согласно (10)-(13) и (14)-(17) были также весьма близки к известным решениям или соответствующим оценкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полиа Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. **Коробко В.И.** Изопериметрические неравенства в строительной механике пластинок. – М.: Стройиздат, 1993. – 208 с.
3. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. – М.: ГТТИ, 1957. – 476 с.
4. **Van Gorder R.A.** Asymptotic solutions for the Föppl – von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 91, May 2017, Pages 8-21.

5. **Faroughi Sh., Goushegir S.M.H., Haddad Khodaparast H., Friswell M.I.** Nonlocal elasticity in plates using novel trial functions // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 130, 2017, pp. 221-233.
6. **Oliveri V., Milazzo A.** A Rayleigh-Ritz approach for postbuckling analysis of variable angle tow composite stiffened panels // *Computers & Structures*, Vol. 196, 2018, pp. 263-276
7. **Ржаницын А.Р.** Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. – М.: Стройиздат, 1954. – 285 с.
8. **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
9. **Мануйлов Г.А.** Приближенные оценки решений для пластин на основе модифицированного метода Релея-Ритца. // Вестник МИИТа. Научно-технический журнал: МИИТ, Вып. 3, 2000, с. 111-115.
10. **Pradhan K.K., Chakraverty S.** Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Iss. 3, 2015, pp, 721-734.
- governing deflections of thin axisymmetric annular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 91, May 2017, Pages 8-21.
5. **Faroughi Sh., Goushegir S.M.H., Haddad Khodaparast H., Friswell M.I.** Nonlocal elasticity in plates using novel trial functions // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 130, 2017, pp. 221-233.
6. **Oliveri V., Milazzo A.** A Rayleigh-Ritz approach for postbuckling analysis of variable angle tow composite stiffened panels // *Computers & Structures*, Vol. 196, 2018, pp. 263-276
7. **Rzhanitsyn A.R.** Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov [Structural analysis with allowance for plastic properties of materials]. Moscow, Stroyizdat, 1954, 285 pages.
8. **Kantorovich L.V., Krylov V.I.** Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 708 pages.
9. **Manuylov G.A.** Priblizhennyye otsenki resheniy dlya plastin na osnove modifitsirovannogo metoda Releya-Rittsa [Approximate estimates of solutions for plates based on the modified Rayleigh-Ritz method] // *Vestnik MIITa. Nauchnotekhnicheskij zhurnal.*: MIIT, No. 3m 2000, pp. 111-115.
10. **Pradhan K.K., Chakraverty S.** Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Iss. 3, 2015, pp, 721-734.

REFERENCES

1. **Polia G., Sege G.** Izoperimetricheskiye neravenstva v matematicheskoy fizike [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 336 pages.
 2. **Korobko V.I.** Izoperimetricheskiye neravenstva v stroitel'noy mekhanike plastinok [Isoperimetric inequalities in the structural mechanics of plates]. Moscow, Stroyizdat, 1993, 208 pages.
 3. **Mikhlin S.G.** Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, GTTI. 1957, 476 pages.
 4. **Van Gorder R.A.** Asymptotic solutions for the Föppl – von Kármán equations
-
- Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» Российский университет транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 972-49-81
- Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone/fax +7(499)972-49-81.

DOI:10.22337/2587-9618-2017-13-4-128-140

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 1: ОДНОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

М.Л. Мозгалева¹, П.А. Акимов^{2,3,4,5,6}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁴ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

⁵ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии
архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования дискретного базиса Хаара (в частности, здесь рассматриваются простейшие одномерные задачи). Приведен краткий обзор публикаций последних лет российских и зарубежных специалистов, посвященных актуальным направлениям использования вейвлет-анализа в строительной механике, описаны аппроксимации сеточных функций в дискретных базисах Хаара нулевого и первого уровней (сеточная функция представляется в виде суммы, в которой одно слагаемое является ее аппроксимацией первого уровня, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня), построены проекторы на пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, изложена схема построения двухсеточного метода, позволяющего получить решение краевых задач строительной механики, оперируя матричными операторами существенно меньшей размерности. Поясним, что в качестве дискретного аналога исходного операторного уравнения, определенного на заданном отрезке выступает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), сформированная в рамках метода конечных разностей или метода конечных элементов. Далее осуществляется переход к разрешающей СЛАУ, решаемой с использованием блочного метода Гаусса (производится соответственно прямой и обратный ход). В качестве характерного практически важного одномерного примера рассмотрено численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли, лежащей на упругом основании, описываемом в рамках модели Винклера. Имеет место хорошая согласованность результатов, полученных предложенным методом и стандартным методом конечных разностей.

Ключевые слова: двухсеточный метод, метод конечных разностей, метод конечных элементов, вейвлет-анализ, дискретный базис Хаара, расчеты строительных конструкций, краевая задача, одномерные задачи

TWO-GRID METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS BASED ON DISCRETE HAAR BASIS PART 1: ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

Marina L. Mozgaleva¹, Pavel A. Akimov^{2,3,4,5,6}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

⁵ Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁶ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to the two-grid method of structural analysis based on discrete Haar basis (in particular, the simplest one-dimensional problems are under consideration). A brief review of publications of recent years of Russian and foreign specialists devoted to the current trends in the use of wavelet analysis in construction mechanics is given. Approximations of the mesh functions in discrete Haar bases of zero and first levels are described (the mesh function is represented as the sum in which one term is its approximation of the first level, and the second term is so-called complement (up to the initial state) on the grid of the first level). Projectors are constructed for the spaces of vector functions of the original grid to the space of their approximation on the first-level grid and its complement (the detailing component) to the initial state. Basic scheme of the two-grid method is presented. This method allows solution of boundary problems of structural mechanics with the use of matrix operators of significantly smaller dimension. It should be noted that discrete analogue of the initial operator equation (defined on a given interval) is a system of linear algebraic equations (SLAE) constructed within finite difference method (FDM) or the finite element method (FEM). Next, the transition to the resolving SLAE is done. Block Gauss method is used for its direct solution (forward-backward algorithm is realized). We consider a numerical solution of the boundary problem of bending of the Bernoulli beam lying on an elastic foundation (within Winkler model) as a practically important one-dimensional sample. There is good consistency of the results obtained by the proposed method and by standard finite difference method.

Keywords: two-grid method, finite difference method, finite element method, wavelet analysis, discrete Haar basis, structural analysis, boundary problems, one-dimensional problems

1. О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Следует сразу подчеркнуть, что в последние годы вейвлет-анализ [1] находит все более широкое применение в технических науках. Вместе с тем, в области строительной механике все еще наблюдается относительно небольшое число подобных исследований. В числе основных направлений исследований можно указать следующие: решение задач статики сооружений [2-9]; решение задач устойчивости сооружений [2,3]; решение задач динамики сооружений [10-12]; развитие метода конечных элементов [13,14]; выявление дефектов (зон разрушения, трещин и т.д.) в конструкциях, в том числе в рамках мониторинга состояния строительных конструкций, зданий и сооружений [15-27]; расчет связанных систем типа «сооружение – основание» [28]; развитие вероятностных методов в строительной механике и др. Отметим, что значительным успехом видятся достижения последних лет, касающиеся использования вейвлетов в численных и численно-аналитических методах решения раз-

личных операторных уравнений, в том числе эллиптических уравнений в частных производных, граничных интегральных уравнений, псевдодифференциальных уравнений и др., что представляется особенно важным, например, при решении задач теории упругости и пластичности (соответствующая подробная библиография приведена в [29]). В целом, методы, использующие вейвлет-анализ, характеризуются, как правило, многоуровневым характером и высоким качеством аппроксимации соответствующих операторов и функций.

В числе работ российских исследователей необходимо выделить публикации М.В. Жигалова [30-32], А.В. Крысько [30,33,34], В.А. Крысько [31,32,35] и В.В. Солдатова [30-33] ведется построение математических моделей сложных колебаний распределенных систем (в виде одно- и многослойных балок (спаянных и неспаянных), пластинок, сферических пологих и цилиндрических оболочек), а также разработка программного обеспечения, позволяющего осуществлять вейвлет-анализ сценариев перехода в хаос для таких систем. С.П. Копысов [36-39] и Ю.А. Сагдеева [36-39] разработали метод осреднения эллипти-

ческих дифференциальных уравнений, основанный на вейвлет-преобразовании и методе конечных элементов для прогнозирования эффективных свойств и анализа осредненных решений уравнений для композитов с известными структурой и свойствами составляющих компонент.

Серия работ А.Б. Золотова, М.Л. Мозгалевой, П.А. Акимова и Д.Н. Алексеева посвящена разработке и изучению численных методов и алгоритмов исследования локального напряженно-деформированного состояния конструкций с помощью вейвлет-анализа (подробная библиография имеется в [29]). Так, например, в [9] решение представляется с позиции определения напряженно-деформированного состояния в заранее выделенной локальной зоне. На основе этих соображений строится оптимальная расчетная сетка, дающая качественную картину степени влияния напряженных состояний конструкции в различных областях друг на друга. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. Строится не только более качественная расчетная модель, но и вносятся некоторые конструктивные изменения. В [1] представлены разработанные специальные дискретные модели расчета конструкций, эффективные для применения локальных методов исследования и вейвлет-анализа; предложены методы вычисления фундаментальных функций для задач теории упругости с привлечением вейвлет-анализа; описаны методы дискретного вейвлет-анализа на основе базиса Хаара с позиций его использования в расчете конструкций; представлены алгоритмы синтеза и анализа по дискретному базису Хаара с выделением локальных и глобальных элементов; разработана методика получения локальных решений; решены практические примеры с введением локализованных сеток и многоуровневого представления решений в вейвлет-базисе Хаара.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Пусть задан отрезок длиной L . Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_1, \dots, u_N]^T \quad (1.1)$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \bar{\Phi}_j^0, \quad (1.2)$$

где
$$N_0 = N, \quad (1.3)$$

причем N – четное;

$$u_j^0 = u_j, \quad 1 \leq j \leq N; \quad (1.4)$$

$$\bar{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

– j -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня,

$$1 \leq j \leq N_0 = N, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара 1-го уровня в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1, \quad (1.6)$$

где
$$N_1 = N/2 \quad (1.7)$$

$$u_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_j^1), \quad 1 \leq j \leq N_1; \quad (1.8)$$

$$\bar{u}^1 = [u_1^1 \dots u_{N_1}^1]^T; \quad \bar{v}^1 = [v_1^1 \dots v_{N_1}^1]^T; \quad (1.9)$$

$$\bar{\Phi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j}^0) \quad (1.10)$$

– j -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \leq j \leq N_1$;

$$\bar{\Psi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j}^0) \quad (1.11)$$

– j -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \leq j \leq N_1$,

$$\alpha = 1/\sqrt{2} \quad (1.12)$$

– нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (1.6) сеточная функция \bar{u} представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1 – узлов, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.

Представление (1.6) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \quad (1.13)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1, \quad (1.14)$$

$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1 = \Psi_1 \Psi_1^T \bar{u} = \Psi_1 \bar{v}^1, \quad (1.15)$$

где $\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1}^1]; \quad (1.16)$

$$\Psi_1 = [\bar{\Psi}_1^1, \dots, \bar{\Psi}_{N_1}^1] \quad (1.17)$$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T; \quad P_\Psi = \Psi_1 \Psi_1^T \quad (1.18)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Пусть система линейных алгебраических уравнений порядка N

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (2.1)$$

является дискретным аналогом некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке.

Подставим в (2.1) выражение для u в виде (1.13). И умножим поочередно обе стороны равенства слева на Φ_1^T и Ψ_1^T , т.е.

$$\begin{aligned} \Phi_1^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Phi_1^T A \Psi_1 \bar{v}^1 &= \Phi_1^T \bar{f} \\ \Psi_1^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_1^T A \Psi_1 \bar{v}^1 &= \Psi_1^T \bar{f} \end{aligned} \quad (2.2)$$

или

$$A_{11} \bar{u}^1 + A_{12} \bar{v}^1 = \bar{f}_u \quad (2.3)$$

$$A_{21} \bar{u}^1 + A_{22} \bar{v}^1 = \bar{f}_v$$

где $A_{11} = \Phi_1^T A \Phi_1; \quad A_{12} = \Phi_1^T A \Psi_1; \quad (2.4)$

$$A_{21} = \Psi_1^T A \Phi_1; \quad A_{22} = \Psi_1^T A \Psi_1 \quad (2.5)$$

– блочные матрицы размером $N_1 \times N_1$;

$$\bar{f}_u = \Phi_1^T \bar{f}, \quad \bar{f}_v = \Psi_1^T \bar{f} \quad (2.6)$$

– векторы правой части размером N_1 .

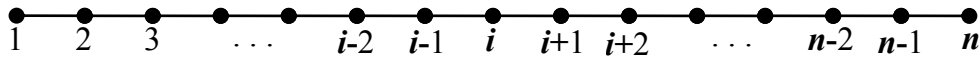
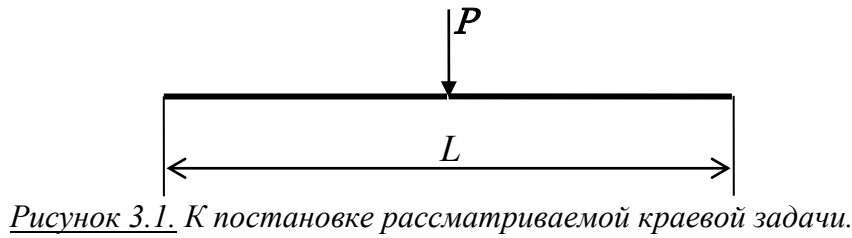
Находим решение системы (2.3), используя блочный метод Гаусса.

Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \bar{f}_u \\ A_{21} & A_{22} & \bar{f}_v \end{array} \right] \quad (2.7)$$

Прямой ход

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{22}^1 & \bar{f}_v^1 \end{array} \right], \quad (2.8)$$



где $A_{22}^1 = A_{22} - C_{21}A_{12};$ (2.9)

$\bar{f}_v^1 = \bar{f}_v - C_{12}\bar{f}_u;$ (2.10)

$C_{12} = A_{21}A_{11}^{-1}.$ (2.11)

средней точке, $P_h = 100/h_b$; $k = 75 \cdot 10^3$ кН/м³ – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера;

$\bar{k} = k \cdot b$; $J = bh^3 / 12.$ (3.1)

Обратный ход:

$\bar{v}^1 = (A_{22}^1)^{-1} \bar{f}_v^1$ (2.12)

$\bar{u}^1 = A_{11}^{-1}(\bar{f}_u - A_{12}\bar{v}^1)$

Определение прогиба балки Бернулли сводится к решению следующей краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка:

Тогда, следуя формулам (1.13)-(1.17), решение исходной задачи (2.1) получаем в виде:

$\bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_1 \bar{v}^1$ (2.13)

$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), \quad 0 < x < L,$ (3.2)

$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases}$ (3.2)

При этом следует отметить, что предложенный алгоритм позволяет получить решение, оперируя матричными операторами размерности $N_1 = N/2$.

где $4\alpha^4 = \frac{\bar{k}}{EJ}$; $F = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2}).$ (3.3)

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ

Дискретное решение задачи. Разбиваем отрезок $(0, L)$ на равные части с шагом h_b (рис. 3.2).

Если n – общее количество точек, то очевидно, что

$h_b = L/(n-1).$ (3.4)

Постановка задачи. В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом основании со следующими параметрами (рис. 3.1): $L=8$ м – длина; $h=1.3$ м, $b=1$ м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м² – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в

Далее переходим от решения краевой задачи (3.2)-(3.3) к решению системы разностных уравнений вида

$A\bar{y} = \bar{f},$ (3.5)

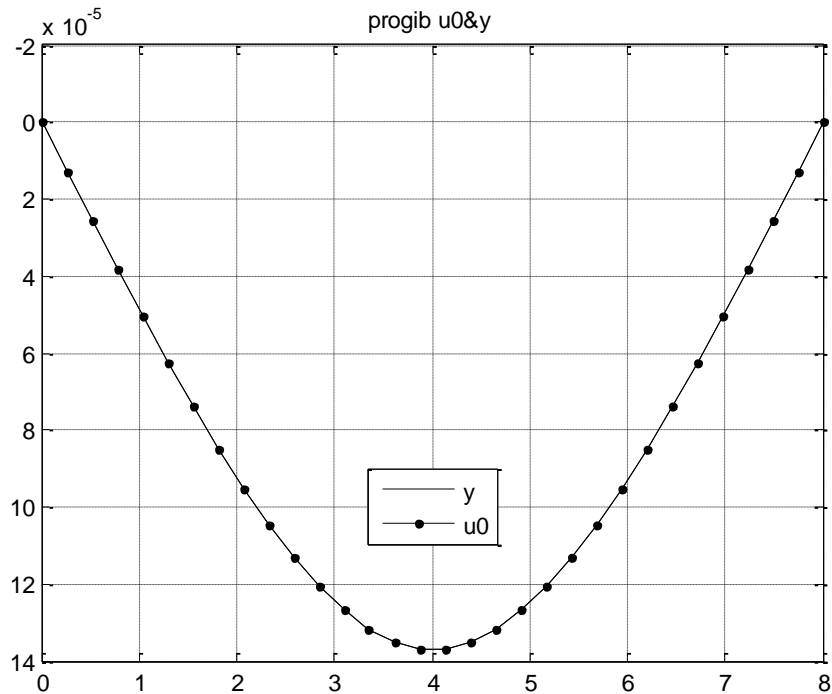


Рисунок 3.3. Сравнение результатов.

подробно представленных с учетом краевых условий (3.2) в виде:

$i = 1$:

$$y_1 = f_1$$

$i = 2$:

$$-2y_1 + (5 + 4h_b^4 \alpha^4)y_2 - 4y_3 + y_4 = f_2$$

$2 < i < n - 1$:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 4h_b^4 \alpha^4)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i$$

$i = n - 1$:

$$y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5 + 4h_b^4 \alpha^4)y_{n-1} - 2y_n = f_{n-1}$$

$i = n$:

$$y_n = f_n$$

(3.6)

где

$$x_i = h_b(i-1); \quad y_i = y(x_i); \quad (3.7)$$

$$f_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ h_b^4 [F(x_i) / h_b], & 2 \leq i \leq n-1 \\ 0, & i = n \end{cases} \quad (3.8)$$

По результатам расчета при $N = 32$ построены сравнительные графики прогибов. На рисунке 3 – сравнение непосредственного решения системы (3.6) y с u_0 , построенного по формуле (2.13). Аналогично можно показать хорошую согласованность и других параметров напряженно-деформированного состояния конструкции, определенных в соответствии с предложенным подходом и стандартным численным методом (в данном случае – методом конечных разностей) [40].

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы, Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработ-

ка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Li B., Chen X.** Wavelet-based numerical analysis: A review and classification. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 81, 2014, pp. 14-31.
2. **Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y.** A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. // *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 28, Iss. 1, 2015, pp. 83-90.
3. **Xie X., Jin G., Liu Z.** Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method. // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 77, 2013, pp. 47-56.
4. **Zhang L., Wang J., Zhou Y.-H.** Large deflection and post-buckling analysis of non-linearly elastic rods by wavelet method. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 78, 2016, pp. 45-52.
5. **Zhong Y., Xiang J.** Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems. // *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 24, Iss. 4, 2011, pp. 355-364.
6. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // *Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings* 1623, 3, (2014), pp. 3-6.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // *ACSR-Advances in Computer Science Research*, Vol. 18, 2015, pp. 713-716.
8. **Aslami M., Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 98, Part B, 2015-2016, pp. 392-402.
9. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Multi-level Wavelet-based Numerical Method of Local Structural Analysis for Three-dimensional Problem. // *Procedia Engineering*, Vol. 111, 2015, pp. 569-574.
10. **Joglekar D.M., Mitra M.** Analysis of flexural wave propagation through beams with a breathing crack using wavelet spectral finite element method. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vols. 76-77, 2016, pp. 576-591.
11. **Kaur H., Mittal R.C., Mishra V.** Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, Iss. 21-22, 1 2014, pp. 4958-4971.
12. **Spanos P.D., Kong F., Li J., Kougioumtzoglou I.A.** Harmonic wavelets based excitation-response relationships for linear systems: A critical perspective. // *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 44, 2016, pp. 163-173.
13. **Diaz L.A., Martin M.T., Vampa V.** Daubechies wavelet beam and plate finite elements. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, Iss. 3, 2009, pp. 200-209.
14. **He W.-Y., Ren W.-X.** Finite element analysis of beam structures based on trigonometric wavelet. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 51, 2012, pp. 59-66.
15. **Cao M., Cheng L., Su Z., Xu H.** A multi-scale pseudo-force model in wavelet domain for identification of damage in structural components. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 28, 2012, pp. 638-659.
16. **Cao M.-S., Xu W., Ren W.-X., Ostachowicz W., Sha G.-G., Pan L.-X.** A concept of complex-wavelet modal cur-

- vature for detecting multiple cracks in beams under noisy conditions. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vols. 76-77, 2016, pp. 555-575.
17. **El-Gebeily M., Khulief Y.A.** Identification of wall-thinning and cracks in pipes utilizing vibration modes and wavelets. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, Iss. 9-10, 2016, pp. 5335-5348.
 18. **Janeliukstis R., Rucevskis S., Wesolowski M., Chate A.** Multiple Damage Identification in Beam Structure Based on Wavelet Transform. // *Procedia Engineering*, Vol. 172, 2017, pp. 426-432.
 19. **Li H., Yi T., Gu M., Huo L.** Evaluation of earthquake-induced structural damages by wavelet transform. // *Progress in Natural Science*, Vol. 19, Iss. 4, 2009, pp. 461-470.
 20. **Liu Z., Jiang B., Tang L., Liu Y., Zhang C., Li Y.** Features of long-term health monitored strains of a bridge with wavelet analysis. // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, Vol. 1, Iss. 5, 2011, pp. 051006.
 21. **Montanari L., Spagnoli A., Basu B., Broderick B.** On the effect of spatial sampling in damage detection of cracked beams by continuous wavelet transform. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 345, 2015, pp. 233-249.
 22. **Patel S.S., Chourasia A.P., Panigrahi S.K., Parashar J., Parvez N., Kumar M.** Damage Identification of RC Structures Using Wavelet Transformation. // *Procedia Engineering*, Vol. 144, 2016, pp. 336-342.
 23. **Sannomaru S., Tanaka S., Yoshida K.-I., Bui T.Q., Okazawa S., Hagihara S.** Treatment of Dirichlet-type boundary conditions in the spline-based wavelet Galerkin method employing multiple point constraints. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 43, 2017, pp. 592-610.
 24. **Silva C.M., Castro L.M.S.S.** Damage analysis of concrete structures using polynomial wavelets. // *Advances in Engineering Software*, Vol. 50, 2012, pp. 69-81.
 25. **Solis M., Algaba M., Galvin P.** Continuous wavelet analysis of mode shapes differences for damage detection. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 40, Iss. 2, 2013, pp. 645-666.
 26. **Tanaka S., Sannomaru S., Imachi M., Hagihara S., Okazawa S., Okada H.** Analysis of dynamic stress concentration problems employing spline-based wavelet Galerkin method. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 58, 2015, pp. 129-139.
 27. **Zhang X., Gao R.X., Yan R., Chen X., Sun C., Yang Z.** Multivariable wavelet finite element-based vibration model for quantitative crack identification by using particle swarm optimization. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 375, 2016, pp. 200-216.
 28. **Guo J., Ding L., Luo H., Zhou C., Ma L.** Wavelet prediction method for ground deformation induced by tunneling. // *Tunneling and Underground Space Technology*, Vol. 41, 2014, pp. 137-151.
 29. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: Издательство МИСИ – МГСУ, 2014. – 632 с.
 30. **Крысько А.В., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Анализ хаотических колебаний распределенных систем в виде балок Эйлера-Бернулли с помощью вейвлет-преобразования. // *Известия вузов. Авиационная техника*, 2009, №4, с. 21-24.
 31. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Вейвлет-анализ колебаний замкнутых цилиндрических оболочек. // *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2009, №4, вып. 1, с. 24-30.
 32. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** О выборе типа вейвлета при

- изучении нелинейных колебаний балок с учетом поперечных сдвигов. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, №3(40), вып. 1, с. 14-22.
33. **Awrejcewicz J., Krysko A., Soldatov V.** On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally. // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2009, Vol. 19, Iss. 10, pp. 3347-3371.
 34. **Axelsson O., Vassilevski P.** Algebraic multilevel preconditioning methods, I. // *Num. Math.*, 1989, No. 56, pp. 157-177.
 35. **Крысько В.А., Куцемако А.Н.** О сходимости метода Канторовича-Власова при исследовании нелинейных собственных колебаний прямоугольных пластин и оболочек. // «Исследования по теории пластин и оболочек», выпуск 11, 1975, с. 279-288.
 36. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Вычислительные особенности двумерного вейвлет-осреднения в задачах многомасштабного анализа // *Вычислительные методы и программирование*, 2005, т. 6, №1, с. 1-8.
 37. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Об одном методе определения эффективных упругих характеристик композитов с помощью вейвлет-преобразования // *Интеллектуальные системы в производстве*, 2007, т. 1, с. 49-61.
 38. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Применение вейвлет-преобразования при численном осреднении дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. // *Известия вузов. Математика*, 2007, №7, с. 80-83.
 39. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Численное определение осредненных характеристик композитов на основе МКЭ и вейвлет-преобразования. // *Известия института математики и информатики УдГУ*, 2006, т. 37, №3, с. 67-68.
 40. **Мозгалева М.Л.** Двухсеточный метод решения краевых задач строительной механики на основе использования дискретного базиса Хаара. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций)*, Vol. 13, Iss. 1, 2017, pp. 69-85.

REFERENCES

1. **Li B., Chen X.** Wavelet-based numerical analysis: A review and classification. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 81, 2014, pp. 14-31.
2. **Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y.** A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. // *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, Iss. 1, 2015, pp. 83-90.
3. **Xie X., Jin G., Liu Z.** Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method. // *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 77, 2013, pp. 47-56.
4. **Zhang L., Wang J., Zhou Y.-H.** Large deflection and post-buckling analysis of non-linearly elastic rods by wavelet method. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 78, 2016, pp. 45-52.
5. **Zhong Y., Xiang J.** Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems. // *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 24, Iss. 4, 2011, pp. 355-364.
6. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // *Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings* 1623, 3, (2014, pp. 3-6.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element

- Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // *ACSR-Advances in Computer Science Research*, Vol. 18, 2015, pp. 713-716.
8. **Aslami M., Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // *Thin-Walled Structures*, Vol. 98, Part B, 2015-2016, pp. 392-402.
 9. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Multi-level Wavelet-based Numerical Method of Local Structural Analysis for Three-dimensional Problem. // *Procedia Engineering*, Vol. 111, 2015, pp. 569-574.
 10. **Joglekar D.M., Mitra M.** Analysis of flexural wave propagation through beams with a breathing crack using wavelet spectral finite element method. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vols. 76-77, 2016, pp. 576-591.
 11. **Kaur H., Mittal R.C., Mishra V.** Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, Iss. 21-22, 1 2014, pp. 4958-4971.
 12. **Spanos P.D., Kong F., Li J., Kougioumtzoglou I.A.** Harmonic wavelets based excitation–response relationships for linear systems: A critical perspective. // *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 44, 2016, pp. 163-173.
 13. **Diaz L.A., Martin M.T., Vampa V.** Daubechies wavelet beam and plate finite elements. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, Iss. 3, 2009, pp. 200-209.
 14. **He W.-Y., Ren W.-X.** Finite element analysis of beam structures based on trigonometric wavelet. // *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 51, 2012, pp. 59-66.
 15. **Cao M., Cheng L., Su Z., Xu H.** A multi-scale pseudo-force model in wavelet domain for identification of damage in structural components. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 28, 2012, pp. 638-659.
 16. **Cao M.-S., Xu W., Ren W.-X., Ostachowicz W., Sha G.-G., Pan L.-X.** A concept of complex-wavelet modal curvature for detecting multiple cracks in beams under noisy conditions. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vols. 76-77, 2016, pp. 555-575.
 17. **El-Gebeily M., Khulief Y.A.** Identification of wall-thinning and cracks in pipes utilizing vibration modes and wavelets. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, Iss. 9-10, 2016, pp. 5335-5348.
 18. **Janeliukstis R., Rucevskis S., Wesolowski M., Chate A.** Multiple Damage Identification in Beam Structure Based on Wavelet Transform. // *Procedia Engineering*, Vol. 172, 2017, pp. 426-432.
 19. **Li H., Yi T., Gu M., Huo L.** Evaluation of earthquake-induced structural damages by wavelet transform. // *Progress in Natural Science*, Vol. 19, Iss. 4, 2009, pp. 461-470.
 20. **Liu Z., Jiang B., Tang L., Liu Y., Zhang C., Li Y.** Features of long-term health monitored strains of a bridge with wavelet analysis. // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, Vol. 1, Iss. 5, 2011, pp. 051006.
 21. **Montanari L., Spagnoli A., Basu B., Broderick B.** On the effect of spatial sampling in damage detection of cracked beams by continuous wavelet transform. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 345, 2015, pp. 233-249.
 22. **Patel S.S., Chourasia A.P., Panigrahi S.K., Parashar J., Parvez N., Kumar M.** Damage Identification of RC Structures Using Wavelet Transformation. // *Procedia Engineering*, Vol. 144, 2016, pp. 336-342.
 23. **Sannomaru S., Tanaka S., Yoshida K.-I., Bui T.Q., Okazawa S., Hagihara S.** Treatment of Dirichlet-type boundary conditions in the spline-based wavelet Galerkin method employing multiple point constraints. // *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 43, 2017, pp. 592-610.

24. **Silva C.M., Castro L.M.S.S.** Damage analysis of concrete structures using polynomial wavelets. // *Advances in Engineering Software*, Vol. 50, 2012, pp. 69-81.
25. **Solis M., Algaba M., Galvin P.** Continuous wavelet analysis of mode shapes differences for damage detection. // *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 40, Iss. 2, 2013, pp. 645-666.
26. **Tanaka S., Sannomaru S., Imachi M., Hagihara S. Okazawa S., Okada H.** Analysis of dynamic stress concentration problems employing spline-based wavelet Galerkin method. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 58, 2015, pp. 129-139.
27. **Zhang X., Gao R.X., Yan R., Chen X., Sun C., Yang Z.** Multivariable wavelet finite element-based vibration model for quantitative crack identification by using particle swarm optimization. // *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 375, 2016, pp. 200-216.
28. **Guo J., Ding L., Luo H., Zhou C., Ma L.** Wavelet prediction method for ground deformation induced by tunneling. // *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 41, 2014, pp. 137-151.
29. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Mnogourovnevye Diskretnye i Diskretno-Kontinual'nye Metody Lokal'nogo Rascheta Stroitel'nyh Konstrukcij [Multi-level Discrete and Discrete-Continual Methods of Local Structural Analysis]. Moscow, MISI – MGSU Publishing House, 2014, 632 pages.
30. **Krysko A.V., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** Analiz Haoticheskikh Kolebanij Raspredelennyh Sistem v Vide Balok Jejlера-Bernulli s Pomoshh'ju Vejvlet-Preobrazovanija [Analysis of Chaotic Oscillations of Distributed Systems in the Form of Euler-Bernoulli beams by Means of a Wavelet Transform]. // *Izvestia vuzov. Aviatsionnaya Technika*, No. 4, 2009, pp. 21-24.
31. **Krysko V.A., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** Vejvlet-Analiz Kolebanij Zamknutyh Cilindricheskikh Obolochek [Wavelet Analysis of Oscillations of Closed Cylindrical Shells]. // *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta*, No. 4(1), 2009, pp. 24-30.
32. **Krysko V.A., Zhigalov M.V., Soldatov V.V.** O Vyboire Tipa Vejvleta Pri Izuchenii Nelinejnyh Kolebanij Balok s Uchetom Poperechnyh Sdvigov [About the Choice of the Wavelet Type in the Study of Nonlinear Oscillations of Beams with Allowance for Transverse Shifts]. // *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta*, No. 3(1), 2009, pp. 14-22.
33. **Awrejcewicz J., Krysko A., Soldatov V.** On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally. // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2009, Vol. 19, Iss. 10, pp. 3347-3371.
34. **Axelsson O., Vassilevski P.** Algebraic multilevel preconditioning methods, I. // *Num. Math.*, 1989, No. 56, pp. 157-177.
35. **Krysko V.A., Kutsemako A.N.** O Shodimosti Metoda Kantorovicha-Vlasova pri Issledovanii Nelinejnyh Sobstvennyh Kolebanij Prjamougol'nyh Plastin i Obolochek [About the Convergence of the Kantorovich-Vlasov Method for Studying of Nonlinear Natural Oscillations of Rectangular Plates and Shells]. // *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*, No. 11, 1975, pp. 279-288.
36. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Vychislitel'nye Osobennosti Dvumernogo Vejvlet-osrednenija v Zadachah Mnogomasshtabnogo Analiza [Computational Specificity of Two-Dimensional Wavelet Averaging in Problems of Multiscale Analysis]. // *Vychislitelniye Metodi*

- i Programmirovaniye, Tom 6(1), 2005, pp. 1-8.
37. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Ob Odnom Metode Opredeleniya Jefferktivnyh Uprugih Harakteristik Kompozitov s Pomoshh'ju Vejvlet-Preobrazovaniya [About One Method for Determining the Effective Elastic Parameters of Composites by Means of a Wavelet Transform]. // *Intellectualniye sistemi v proizvodstve*, No. 1, 2007, pp. 49-61.
38. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Primenenie Vejvlet-Preobrazovaniya Pri Chislennom Osrednenii Differencial'nyh Uravnenij s Bystro Oscillirujushhimi Koefficientami [The Application of the Wavelet Transform in the Numerical Averaging of Differential Equations with Rapidly Oscillating Coefficients]. // *Izvestia vuzov. Matematika*, No. 7, 2007, pp. 80-83.
39. **Kopisov S.P., Gagdeeva Yu.A.** Chislennoe Opredelenie Osrednennyh Harakteristik Kompozitov na Osnove MKJe i Vejvlet-Preobrazovaniya [Numerical Computing of Averaged Parameters of Composites Based on FEM and Wavelet Transform]. // *Izvestia Instituta matematiki i informatiki UdGU*, No. 37(3), 2006, pp. 67-68.
40. **Mozgaleva M.L.** Dvuhsetochnyj Metod Resheniya Kraevyh Zadach Stroitel'noj Mehaniki na Osnove Ispol'zovaniya Diskretnogo Bazisa Haara [Two-Stage Grid Method of Solution of Boundary Problems of Structural Mechanics with the Use of Discrete Haar Basis]. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Mezhdunarodniy zhurnal po rashetu grazhdanskikh i promishlennikh konstruktsiy)*, No. 13(1), 2017, pp. 69-85.
- наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.
- Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, А.В. Сайбель

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, РОССИЯ

Аннотация: В статье приводится вывод разрешающих уравнений для расчета с учетом ползучести толстых железобетонных плит. Используется гипотеза о параболическом законе распределения касательных напряжений по толщине плиты. Задача свелась к системе из двух дифференциальных уравнений относительно прогиба и функции сдвига. Приведен пример расчета шарнирно опертой по контуру плиты, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, с использованием вязкоупругой модели наследственного старения бетона. Решение производилось при помощи двойных тригонометрических рядов в сочетании с методом Эйлера для определения деформаций ползучести.

Ключевые слова: железобетонные плиты, теория толстых плит, ползучесть, вязкоупругость, численные методы

MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF THICK CONCRETE SLABS TAKING THE CREEP OF CONCRETE INTO ACCOUNT

Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko, Anzhelika V. Saibel

Don State Technical University, Rostov-on-Don, RUSSIA

Abstract: In the article the derivation of the resolving equations for calculation taking into account creep of thick reinforced concrete plates is given. We use the hypothesis of a parabolic law for the distribution of tangential stresses over the thickness of a plate. The problem was reduced to a system of two differential equations with respect to deflection and the function of shear. An example is given of a calculation of a plate hinged on the contour loaded with a uniformly distributed load using a viscoelastic model of hereditary aging of concrete. The solution was carried out using double trigonometric series in combination with the Euler method for determining creep strains.

Keywords: reinforced concrete slabs, the theory of thick plates, creep, viscoelasticity, numerical methods

INTRODUCTION

At present, when calculating reinforced concrete slabs, the Kirchhoff-Love theory is widely used, based on the hypothesis of straight normals. This theory well describes the stress-strain state of thin plates, in which the shear deformations γ_{zx} , γ_{zy} are much smaller than the angles of rotation

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Thin plates are those for which the following relation is valid [1]:

$$\left(\frac{1}{80} \div \frac{1}{100} \right) \leq \frac{h}{a} \leq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \right), \quad (1)$$

where h – plate thickness, a – the smallest size in plane.

Calculations with allowance for the creep of thin plates are considered in papers [2-5].

There are many different versions of refined theories of thick plates, differing not only in the

sets of accepted hypotheses and the factors considered neglected in the classical theory, but also in methods of construction [6]. In dynamics and in the theory of stability, a refined theory generalizing Tymoshenko's theory of beam bending taking into account the shear has become widespread and allows us to accurately calculate the integral characteristics of the plate (critical loads, oscillation frequencies, etc.) However, in this theory, shear deformations, like tangential stresses τ_{zx} , τ_{zy} are assumed to be constant across the thickness of the plate, which contradicts the absence of tangential loads on the plate surface in the most common case of a uniformly distributed area load. When calculating the stress-strain state of plates, theories are often used in which the quantities γ_{zx} and γ_{zy} as well as τ_{zx} and τ_{zy} in thickness are variable. The smallest errors are obtained by refined theories in which a parabolic change in stress τ_{zx} and τ_{zy} along the plate thickness is assumed. Among these theories, we can distinguish the theory of S.A. Ambartsyumyan [7], also taking into account normal stresses σ_z .

1. DERIVATION OF RESOLVING EQUATIONS

In deriving the resolving equations, we will use the basic hypotheses adopted in [7]. The element of reinforced concrete slab considered is shown in Fig. 1.

For the tangential stresses τ_{bzx} and τ_{bzy} along the thickness of the plate, we take the distribution according to the law of a quadratic parabola:

$$\tau_{bzx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right); \tau_{bzy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right), \quad (2)$$

where $\varphi = \varphi(x, y)$ – shear function.

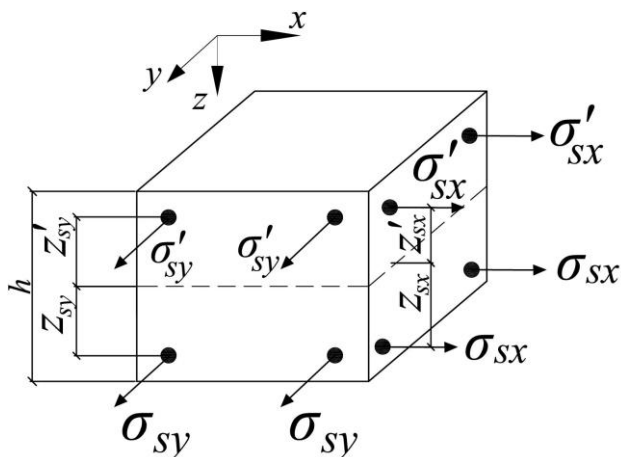


Figure 1. Element of reinforced concrete slab.

We assume that the tangent stresses τ_{zx} and τ_{zy} , as well as the normal stresses σ_z , the armature does not perceive, ie:

$$\tau_{zx} = \tau_{bzx}, \quad \tau_{zy} = \tau_{bzy}, \quad \sigma_z = \sigma_{bz}. \quad (13)$$

Stresses τ_{zx} , τ_{zy} and σ_z and are related by the equation of equilibrium:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Substituting (2) into (4), we obtain:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\nabla^2 \varphi \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (5)$$

Integration of equation (5) will give:

$$\sigma_z = -\nabla^2 \varphi \Phi(z) + C(x, y), \quad (6)$$

where $\Phi(z) = z \left(1 - 4z^2 / (3h^2) \right)$,

$C(x, y)$ is an arbitrary integration function determined from the boundary conditions:

$$\begin{aligned} \text{at } z = -h/2 : \sigma_z &= -q(x, y); \\ \text{at } z = h/2 : \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

Substituting the boundary conditions in (6), we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} \nabla^2 \varphi &= C(x, y); \\ -q(x, y) &= \frac{h}{3} \nabla^2 \varphi + C(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

Summing the first and second equalities in (7), we find the function $C(x, y)$:

$$C(x, y) = -q(x, y) / 2. \quad (8)$$

Substituting (8) in the first equation (7), we obtain the resolving equation for the shear function:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{3}{2} \frac{q(x, y)}{h}. \quad (9)$$

We obtain an expression for σ_z by substituting (8) and (9) in (5):

$$\sigma_z = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} + 4 \frac{z^3}{h^3} \right). \quad (10)$$

The Cauchy relations for shear strains have the form:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (11)$$

From the physical point of view, the deformations γ_{zx} and γ_{zy} represent the sum of elastic deformations and creep strains:

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \gamma_{zx}^*; \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} + \gamma_{zy}^*, \quad (12)$$

where G – shear modulus of concrete. Substituting (2) into (12) and equating (12) to (11), we obtain:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) + \gamma_{zx}^* - \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (13)$$

Integration of (13) with respect to z gives:

$$u = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Phi(z) + \int_0^z \gamma_{zx}^* dz - z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y). \quad (14)$$

We will consider the case of symmetric reinforcement, then the middle plane is not deformable, and when

$$z = 0 \quad u = 0,$$

from which it follows that

$$f_1(x, y) = 0.$$

Similarly, for displacements v , we can write:

$$v = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Phi(z) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \int_0^z \gamma_{zy}^* dz. \quad (15)$$

Deformations ε_x , ε_y и γ_{xy} , and are defined as follows:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Phi}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\Phi}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma_y; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\Phi}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Gamma_{xy},$$

where $\Gamma_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \gamma_{zx}^* dz; \Gamma_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \gamma_{zy}^* dz;$

$$\Gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \gamma_{zy}^* dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \gamma_{zx}^* dz.$$

It follows from (16) that the deformations, and consequently also the stresses in the plate along the thickness, are distributed nonlinearly.

The relationship between strains and stresses in concrete in the case of a volumetric stress state is written as:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_{bx} - \nu(\sigma_{by} + \sigma_{bz})}{E_b} + \varepsilon_{bx}^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_{by} - \nu(\sigma_{bx} + \sigma_{bz})}{E_b} + \varepsilon_{by}^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{bxy}}{G} + \gamma_{bxy}^*.\end{aligned}\quad (17)$$

We express from (17) the stresses through deformations:

$$\begin{aligned}\sigma_{bx} &= -\frac{E_b}{1-\nu^2} \left(z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{bx}^* + \nu \varepsilon_{by}^* - \right. \\ &\quad \left. - (\Gamma_x + \nu \Gamma_y) \right) + \frac{2\Phi}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu \sigma_{bz}}{1-\nu}; \\ \sigma_{by} &= -\frac{E_b}{1-\nu^2} \left(z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_{by}^* + \nu \varepsilon_{bx}^* - \right. \\ &\quad \left. - (\Gamma_y + \nu \Gamma_x) \right) + \frac{2\Phi}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu \sigma_{bz}}{1-\nu}; \\ \tau_{bxy} &= \frac{E_b}{2(1+\nu)} \left(-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Gamma_{xy} - \gamma_{bxy}^* \right) + 2\Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Bending and twisting moments, perceived by concrete, are written in the form:

$$\begin{aligned}M_{bx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{bx} z dz = -D_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_{bx}^* + \\ &\quad + \frac{2h^3}{15(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{qh^2}{10}; \\ M_{by} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{by} z dz = -D_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_{by}^* + \\ &\quad + \frac{2h^3}{15(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu qh^2}{10(1-\nu)};\end{aligned}$$

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{bxy} z dz = -D_b (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2h^3}{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - H_b^*,$$

where

$$\begin{aligned}D_b &= E_b h^3 / (12(1-\nu^2)); \\ H_b^* &= G \int_{-h/2}^{h/2} (-\Gamma_{xy} + \gamma_{bxy}^*) z dz; \\ M_{bx}^* &= \frac{E_b}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{bx}^* + \nu \varepsilon_{by}^* - (\Gamma_x + \nu \Gamma_y)) z dz; \\ M_{by}^* &= \frac{E_b}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{by}^* + \nu \varepsilon_{bx}^* - (\Gamma_y + \nu \Gamma_x)) z dz.\end{aligned}$$

We define deformations of reinforcement from the condition of its joint work with concrete:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sx} &= -z_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Phi(z_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x(z_{sx}); \\ \varepsilon'_{sx} &= z'_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\Phi(z_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x(z_{sx}); \\ \varepsilon_{sy} &= -z_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\Phi(z_{sy})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma_y(z_{sy}); \\ \varepsilon'_{sy} &= z'_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\Phi(z_{sy})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma_y(z_{sy}).\end{aligned}\quad (18)$$

The bending moments perceived by the armature are written as:

$$\begin{aligned}M_{sx} &= \mu_{sx} h z_{sx} \sigma_{sx} - \mu'_{sx} h z'_{sx} \sigma'_{sx} = \\ &= E_s h (\mu_{sx} z_{sx} \varepsilon_{sx} - \mu'_{sx} z'_{sx} \varepsilon'_{sx}) = \\ &= -D_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\mu_{sx} h z_{sx} E_s \frac{\Phi(z_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ M_{sy} &= \mu_{sy} h z_{sy} \sigma_{sy} - \mu'_{sy} h z'_{sy} \sigma'_{sy} = \\ &= E_s h (\mu_{sy} z_{sy} \varepsilon_{sy} - \mu'_{sy} z'_{sy} \varepsilon'_{sy}) = \\ &= -D_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mu_{sy} h z_{sy} E_s \frac{\Phi(z_{sy})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (19)$$

where $D_{sx} = 2\mu_{sx} h z_{sx}^2 E_s$, $D_{sy} = 2\mu_{sy} h z_{sy}^2 E_s$; μ_{sx} ,

$\mu'_{sx}, \mu'_{sy}, \mu'_{sy}$ – reinforcement factors.

The equation of equilibrium is written as:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y). \quad (20)$$

Substituting the expressions for the bending and torsional moments into the equilibrium equation (20), we obtain the second resolving equation:

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q + \frac{\nu h^2 \nabla^2 q}{(1-\nu)10} \\ -q^* + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \left(\frac{2h^3}{15(1-\nu)} + \frac{2\mu_{sx} h z_{sx} E_s \Phi(z_{sx})}{G} \right) + \\ + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \left(\frac{2h^3}{15(1-\nu)} + \frac{2\mu_{sy} h z_{sy} E_s \Phi(z_{sy})}{G} \right) + \\ + \frac{4h^3}{15(1-\nu)} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$q^*(x, y) = - \left(\frac{\partial^2 M_{bx}^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_b^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{by}^*}{\partial y^2} \right),$$

$$D_1 = D_b + D_{sx}, \quad D_2 = D_b + D_{sy}.$$

Thus, the problem of calculating a thick reinforced concrete slab with allowance for creep was reduced to a system of two differential equations (9) and (21).

2. METHOD OF CALCULATION

For the hingedly supported contour of the plate, the solution is sought in the form:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (22)$$

The functions $q(x, y)$ and $q^*(x, y)$ can be expanded in a Fourier series:

$$\begin{aligned} q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ q^*(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (23)$$

The coefficients of expansion are determined by the formulas:

$$\begin{aligned} B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \\ C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^*(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned}$$

The coefficients B_{mn} for some loads can be determined analytically. The coefficients C_{mn} are determined by numerical integration.

Substituting the expansions of the functions $q(x, y)$ and $\varphi(x, y)$ into (9), we obtain:

$$\varphi_{mn} = \frac{3B_{mn}}{2h \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}. \quad (24)$$

The shear function does not depend on time, and therefore the coefficients φ_{mn} are determined only once.

Substituting (22) and (23) into (21), we obtain:

$$a_{11} w_{mn} = a_{1p}, \quad (25)$$

where

$$a_{11} = D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_b \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4;$$

$$a_{1p} = B_{mn} \left(1 - \frac{\nu h^2}{(1-\nu)10} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \right) +$$

$$+ C_{mn} + \varphi_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^4}{a^4} \left\{ \frac{2h^3}{15(1-\nu)} + \frac{2\mu_{sx} h z_{sx} E_s}{G} \Phi(z_{sx}) \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n^4}{b^4} \left\{ \frac{h^3}{15(1-\nu)} + \frac{\mu_{sy} h z_{sy} E_s}{G} \Phi(z_{sy}) \right\} + \frac{2m^2 n^2 h^3}{15(1-\nu) a^2 b^2} \right).$$

As the law of creep, we will use the equation of the viscoelastic model of the hereditary aging of concrete, which under the uniaxial stress state has the form [8]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad (26)$$

$$C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1} + B(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma \tau}),$$

where $C = 3.77 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 / \text{kN}$,
 $B = 5.68 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 / \text{kN}$,
 $\alpha = 0.032 \text{ days}^{-1}$; $\gamma = 0.062 \text{ days}^{-1}$

– rheological parameters of the material. For a bulk stress state, the transition is performed on the basis of the superposition principle. The differential form of equation (26) is given in [9,10]. The calculation is carried out by the stepping method, the creep strains at the time $t + \Delta t$ are determined by strains and stresses at the time t using the Euler method.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The calculation was carried out for a rectangular plate hinged by the contour at

$$q = 100 \text{ kPa}, a = 2.5 \text{ m}, b = 3 \text{ m},$$

$$E_b = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \nu = 0.2, E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\mu_{sx} = \mu'_{sx} = 0.005, \mu_{sy} = \mu'_{sy} = 0.006,$$

$$h = 45 \text{ cm}, z_{sx} = z'_{sx} = 12 \text{ cm},$$

$$z_{sy} = z'_{sy} = 10.5 \text{ cm}.$$

Fig. 2 shows the growth curve of the deflection in the center of the plate. The dashed line corresponds to a solution based on the Kirchhoff-Love theory. The difference between displacements at $t = \tau_0$ is 13.6%, and at $t \rightarrow \infty$ is 5.11%.

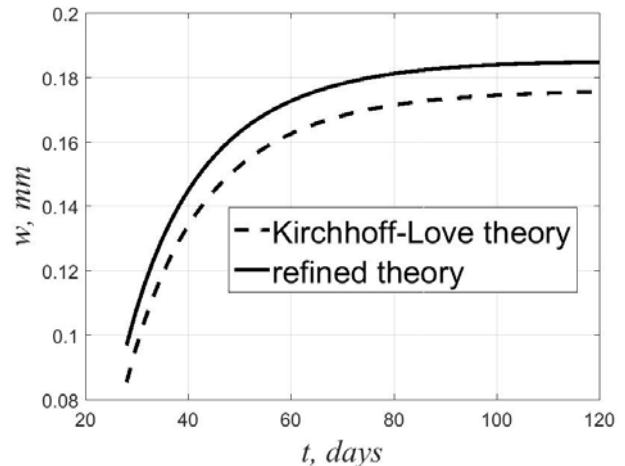


Figure 2. The graph of the growth of the deflection.

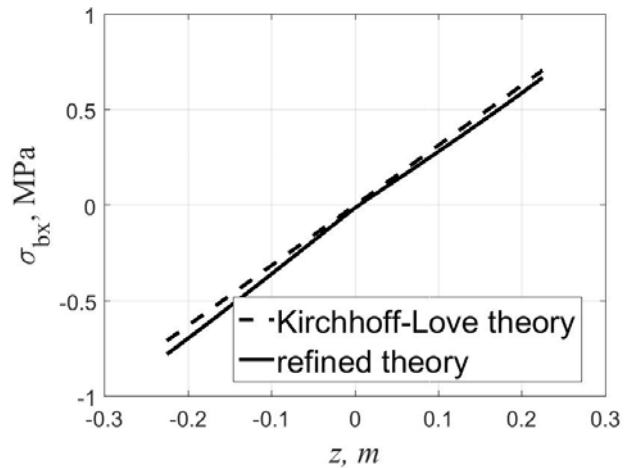


Figure 3. Distribution of stresses σ_{bx} over plate thickness.

The stress σ_{bx} distribution along the plate thickness at the end of the creep process is shown in Fig. 3. It can be seen from the presented graph that at a given ratio h/a the nonlinear character of the diagrams begins to appear. Fig. 4 and Fig. 5 show variation of the maximum stresses in concrete and reinforcement. Stresses in concrete, obtained on the basis of the direct normal hypothesis and using a refined theory, differ by 4.1% at the beginning of the

creep process, and by 9.6% at $t \rightarrow \infty$. For the stresses in the reinforcement the difference is 0.6% and 7.1%, respectively. When the shear strains are taken into account, the redistribution of stresses between the reinforcement and concrete is less pronounced.

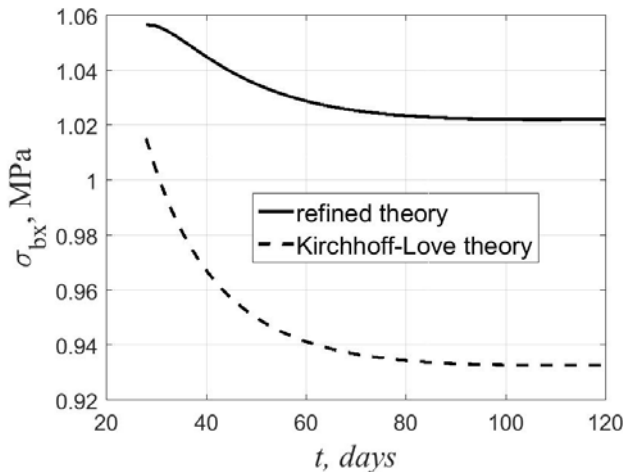


Figure 4. The time variation of the maximum stresses σ_{bx} .

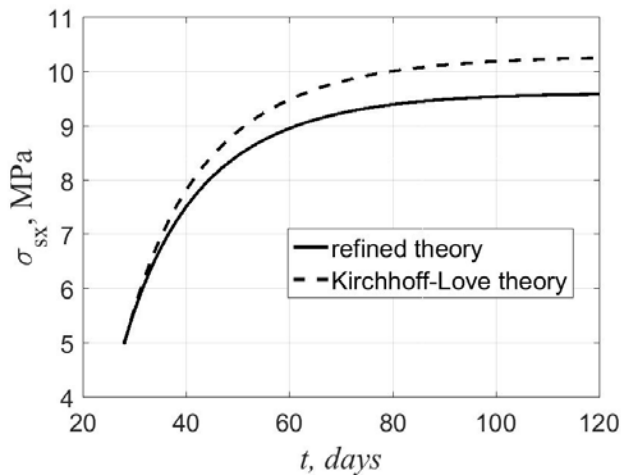


Figure 5. The time variation of the maximum stresses σ_{sx} .

CONCLUSIONS

The equations obtained are universal and allow us to calculate thick reinforced concrete slabs under any creep law. As a result of the solution of the test problem, it is established that at $a/h = 5.5$ the nonlinear character of stress distribution in concrete over the plate thickness begins to appear. Also, at this ratio between the

thickness of the slab and its smallest size in the plan, the discrepancy between the displacements obtained on the basis of the Kirchhoff-Love theory and taking into account the shear deformations reaches 13.6%, despite the fact that, according to the generally accepted classification, the slab is thin.

REFERENCES

1. **Samul' V.I.** Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982, 264 pages.
2. **Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S.** Osesimmetrichnyy izgib krugloy gibkoy plastinki pri polzuchesti [Axisymmetric bending of a round elastic plate in case of creep] // Vestnik MGSU, 2014, no. 5, pp. 16-24.
3. **Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S.** On the bending of a thin plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 900, pp. 707-710.
4. **Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Yazyev S.B.** Raschet trekhsloynnoy plastinki metodom konechnykh elementov s uchetom polzuchesti srednego sloya [Calculation of a three-layer plate by the finite element method taking into account the creep of the middle layer] // Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, Vol. 33, no. 2, pp. 47-55.
5. **Chepurnenko A.S., Chepurnenko V.S., Savchenko A.A.** Konechno-elementnoe modelirovanie polzuchesti trekhsloynnoy plastiny [Finite element modeling of creep of a three-layer plate] // Molodoy issledovatel' Dona, 2017, no. 3 (6), pp. 95-102.
6. **Paliy O.M.** Spravochnik po stroitel'noy mekhanike korablya. Chast' 2. Plastiny. Teoriya plastichnosti i polzuchesti. Chislennyye metody [Handbook of ship mechanics. Part 2. Plates. Theory of plasticity and creep.

- Numerical methods.]. Leningrad, Sudostroenie, 1982, 464 pages.
7. **Ambartsumyan S.A.** Teoriya anizotropnykh plastin: Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya [Theory of anisotropic plates: Strength, stability and vibrations]. Moscow, Nauka, 1987, 360 pages.
 8. **Tamrazyan A.G.** Mekhanika polzuchesti betona [Creep mechanics of concrete] / A. G. Tamrazyan, S. G. Esayan. Moscow: MSUCE, 2012, 490 pages.
 9. **Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Kozel'skaya M.Yu.** Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie predvaritel'no napryazhennogo zhelezobetonnoogo tsilindra s uchetom polzuchesti betona [Stress-strain state of prestressed reinforced concrete cylinder taking into account creep of concrete] // Nauchnoe obozrenie, 2014, no.11, pp. 759-763.
 10. **Yukhnov I.V., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V.** Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie korotkogo vnetsentrenno szhatogo zhelezobetonnoogo sterzhnya pri nelineynoy polzuchesti [Stress-strain state of a short eccentrically compressed reinforced concrete rod with nonlinear creep] // Nauchnoe obozrenie, 2014, no. 8-3, pp. 929-934.
 - ментов с учетом ползучести среднего слоя. // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки, 2014, Выпуск 33, №2, с. 47-55.
 5. **Чепурненко А.С., Чепурненко В.С., Савченко А.А.** Конечноэлементное моделирование ползучести трехслойной пластины. // Молодой исследователь Дона, 2017, №3(6), с. 95-102.
 6. **Палий О.М.** (ред.) Справочник по строительной механике корабля. Часть 2. Пластины. Теория пластичности и ползучести. Численные методы. – Ленинград: Судостроение, 1982. – 464 с.
 7. **Амбарцумян С.А.** Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
 8. **Тамразян А.Г., Есаян С.Г.** Механика ползучести бетона. – М.: МГСУ, 2012. – 490 с.
 9. **Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Козельская М.Ю.** Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона. // Научное обозрение, 2014, №11, с. 759-763.
 10. **Юхнов И.В., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В.** Напряженно-деформированное состояние короткого внецентренно сжатого железобетонного стержня при нелинейной ползучести. // Научное обозрение, 2014, №8(3), с. 929-934.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Самуль В.И.** Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
2. **Андреев В.И., Языев Б.М., Чепурненко А.С.** Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести. // Вестник МГСУ, 2014, №5, с. 16-24.
3. **Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S.** On the bending of a thin plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 900, pp. 707-710.
4. **Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Языев С.Б.** Расчет трехслойной пластинки методом конечных эле-

Языев Батыр Меретович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета, 344022, Россия, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162; тел.: +7(863)201-91-36; e-mail: ps62@yandex.ru; <http://orcid.org/0000-0002-5205-1446>.

Чепурненко Антон Сергеевич, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета, 344022, Россия, Ростов-на-

Дону, ул. Социалистическая, 162; тел.: +7(863)201-91-36; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru;
<http://orcid.org/0000-0002-9133-8546>.

Сайбель Анжелика Владимировна, ассистент кафедры «Строительство уникальных зданий и сооружений» Донского государственного технического университета, 344022, Россия, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162; тел.: +7(863)201-90-08; e-mail: angelica_70@mail.ru.

Yazyev Batyr Meretovich, Advisor of RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department "Strength of Materials", Don State Technical University, 344022, Russia, Rostov-on-Don, Sotcialisticheskaya st., 162; phone: +7 (863) 201-91-36; e-mail: ps62@yandex.ru;
<http://orcid.org/0000-0002-5205-1446>.

Chepurnenko Anton Sergeevich, Candidate of Technical Sciences, Senior lecturer of the Department "Strength of Materials", Don State Technical University, 344022, Russia, Rostov-on-Don, Sotcialisticheskaya st., 162; phone: +7 (863) 201-91-36; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru;
<http://orcid.org/0000-0002-9133-8546>.

Saibel Anzhelika Vladimirovna, Assistant of the Department "Construction of Unique Buildings and Structures", Don State Technical University, 344022, Russia, Rostov-on-Don, Sotcialisticheskaya st., 162; phone: +7 (863) 201-90-08; e-mail: angelica_70@mail.ru.



СООБЩЕНИЕ О КОНКУРСЕ НА МЕДАЛИ И ДИПЛОМЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК (РААСН) ЗА 2017 ГОД

В соответствии с «Положением о Конкурсе на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук за лучшие научные и творческие работы», утвержденным постановлением Общего собрания членов Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) от 22 апреля 2016 года, и решением президиума РААСН (постановление президиума РААСН от 27 сентября 2017 года №10) **Российская академия архитектуры и строительных наук объявляет о проведении XXI Конкурса на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2017 год** (далее – *Конкурс*).

Награды Российской академии архитектуры и строительных наук (*медали и дипломы РААСН*) присуждаются на конкурсной основе работам архитекторов, градостроителей, учёных архитектурно-градостроительных и строительных специальностей – гражданам Российской Федерации и/или иностранных государств – в следующих номинациях:

- за лучший реализованный проект (*срок эксплуатации должен составлять не менее 1 (одного) года*);
- за лучший проект, находящиеся в стадии реализации, с подтвержденными документами об утверждении проекта (*для градостроительных работ*);
- за лучшую научно-исследовательскую и/или проектно-конструкторскую разработку, в результате которой получен значительный экономический или социальный эффект, подтвержденный конкретными расчетами и рекомендациями;
- за лучшие опубликованные научные труды, монографии, имеющие опубликованные положительные рецензии;
- за лучшее учебное издание (*учебник или учебное пособие*), имеющее опубликованную положительную рецензию;
- за лучший неосуществленный архитектурный проект;
- за лучший концептуальный градостроительный проект.

На Конкурс представляются:

- проекты, реализованные (*по архитектуре*) или проекты реализуемые (*по градостроительству*), инженерные проекты, научные сопровождения реализованного инженерного проекта или разработанная и реализованная технология (*по строительным наукам*), и выполненные в течение последних 5 (*пяти*) лет;

- опубликованные научные работы (*по архитектуре, по градостроительству, по строительным наукам*), и изданные в течение последних 5 (*пяти*) лет.

На Конкурсе не представляются:

- работы, удостоенные Государственных премий Российской Федерации, премий Правительства Российской Федерации в области науки и техники, премий Правительства Российской Федерации в области образования, премий Правительства Российской Федерации в области науки и техники для молодых ученых, медалей и дипломов Российской академии наук, других государственных академий наук;
- работы, выдвинутые в 2017 году на соискание премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники, премии Правительства Российской Федерации в области образования, премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники для молодых ученых, медалей и дипломов Российской академии наук, других государственных академий наук;
- работы, участвовавшие в заказных и открытых архитектурных и градостроительных конкурсах;
- работы, ранее удостоенные медалей и дипломов РААСН;
- коллективные сборники научных трудов, за исключением коллективных монографий.

В рамках Конкурса в установленном порядке проводится отдельный конкурс «За лучшие труды и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук для молодых учёных и специалистов» (*в возрасте до 35 лет включительно*).

Примечание:

Работа, представленная на Конкурс и не прошедшая конкурсный отбор, может быть выдвинута на соискание медалей и дипломов РААСН еще один раз, но при этом оформление документов производится повторно.

На Конкурсе установлены следующие медали РААСН:

1 (одна) Золотая медаль РААСН и 1 (одна) Серебряная медаль РААСН – в области архитектуры в следующих номинациях:

- «За лучший реализованный архитектурный проект»;
- «За лучшую опубликованную научную работу».

1 (одна) Золотая и 1 (одна) Серебряная медаль РААСН – в области градостроительства в следующих номинациях:

- «За лучший проект, полностью или частично реализованный»;
- «За лучшую опубликованную научную работу».

1 (одна) Золотая и 1 (одна) Серебряная медаль РААСН – в области строительных наук в следующих номинациях:

- «За лучший реализованный инженерный проект или за лучшее научное сопровождение реализованного инженерного проекта или за лучшую разработанную и реализованную технологию»;
- «За лучшую опубликованную научную работу».

Примечания:

Золотая и Серебряная медали РААСН присуждаются автору или каждому члену авторско-

го коллектива на основе конкурса между работами, представленными в отделения РААСН в соответствии с объявленными номинациями.

Дополнительно к Золотой и Серебряной медали РААСН автору или каждому члену авторского коллектива вручается диплом РААСН.

На Конкурсе установлены следующие Дипломы РААСН:

4 (четыре) Диплома в области архитектуры (без разделения на номинации) и дополнительно в следующих номинациях:

- 1 (один) Диплом «За архитектурный проект» для работ, неосуществленных в строительстве (*конкурсные проекты, эскизные проекты, проекты, принятые, но не реализованные в натуре и др.*);
- 1 (один) Диплом «За лучший учебник или учебное пособие»;
- 2 (два) Диплома «За лучшие научные и творческие работы молодых ученых и специалистов».

4 (четыре) Диплома в области градостроительства (без разделения на номинации) и дополнительно в следующих номинациях:

- 1 (один) диплом «За концептуальный градостроительный проект» (*градостроительные концепции, инициативные проекты и другие разработки, не требующие утверждения*);
- 1 (один) Диплом «За лучший учебник или учебное пособие»;
- 2 (два) Диплома «За лучшие научные и творческие работы молодых ученых и специалистов».

4 (четыре) Диплома в области строительной науки (без разделения на номинации) и дополнительно в следующих номинациях:

- 1 (один) Диплом «За лучший учебник или учебное пособие»;
- 2 (два) Диплома «За лучшие научные и творческие работы молодых ученых и специалистов».

На Конкурсе установлен следующий порядок выдвижения работ на соискание медалей и дипломов РААСН:

- на соискание медалей и дипломов РААСН представляются авторы или авторские коллективы, причем количество соискателей медалей и дипломов РААСН в составе авторского коллектива не должно превышать 6 (*шесть*) человек;
- медали и дипломы РААСН присуждаются каждому члену представленного авторского коллектива.

На Конкурсе не допускается включение в состав соискателей лиц:

- осуществлявших в процессе выполнения работы только административные и (или) организационные функции;
- включенных в авторский коллектив, выполнявший другую работу, выдвинутую в 2017 году на соискание медалей и дипломов РААСН, премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники, премии Правительства Российской Федерации в области образования, премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники для молодых ученых.

Примечания:

Архитекторы, градостроители, ученые архитектурно-градостроительных и строительных специальностей, награжденные медалями РААСН, имеют право повторно участвовать в конкурсе на медали и дипломы РААСН за лучшие научные и творческие работы не ранее чем через 5 (пять) лет после утверждения президиумом РААСН решения о присуждении медали РААСН.

Архитекторы, градостроители, ученые архитектурно-градостроительных и строительных специальностей, награжденные дипломами РААСН, имеют право повторно участвовать в конкурсе на медали и дипломы РААСН за лучшие научные и творческие работы не ранее чем через 3 (три) года после утверждения президиумом РААСН решения о присуждении диплома РААСН.

На Конкурс работы выдвигаются:

- профессиональными организациями в области архитектуры, градостроительства и строительных наук (союзами архитекторов и строителей, проектными и научно-исследовательскими организациями, образовательными организациями высшего образования и др.);
- членами РААСН (академиками РААСН и членами-корреспондентами РААСН), бюро отделений РААСН и президиумами территориальных отделений РААСН, советом молодых ученых и специалистов РААСН;
- государственными органами в области архитектуры, градостроительства и строительства.

На Конкурс представляются материалы следующие материалы (рекомендации по подготовке и оформлению работ (материалов), выдвигаемых на Конкурс на медали и дипломы РААСН размещены на официальном сайте РААСН (<http://raasn.ru/>):

- представление выдвигающей организации или члена РААСН, содержащее основания для выдвижения;
- письмо о возможности опубликования в открытой печати названия и содержания работы, фамилий авторов, их должностей, мест работы;
- согласие каждого автора на обработку персональных данных (в одном экземпляре);
- один экземпляр альбома (буклета) с описанием (*текстовый и графический материал*) архитектурного проекта, проектной работы в области градостроительства, инженерного проекта, научного сопровождения инженерного проекта, разработанной и реализованной технологии (*в цветном разрешении, размер А3 или А4*), в том числе электронная версия (*на CD и/или DVD-диске и/или флэш накопителе*) предоставляемых материалов;
- один комплект дополнительных материалов (копии статей, патентов на изобретения, свидетельств на полезные модели, патентов на промышленные образцы, свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ и др.), раскрывающих сущность и поясняющих изложенные в указанном альбоме (буклете) сведения;
- один экземпляр опубликованной научной работы, учебного издания (*учебника, учебного пособия*) с опубликованной рецензией;
- один экземпляр реферат-презентации работы;
- один экземпляр аннотации работы;
- справки о творческом вкладе авторов (справка о творческом вкладе каждого автора должна содержать фамилию, имя, отчество автора, сведения о занимаемой им долж-

ности, а также должностях в период выполнения работы, сведения о наличии ученой степени, ученого звания, описание конкретного вклада автора в работу и обоснование включения в состав авторского коллектива);

- сведения об авторах;
- дополнительные материалы (в состав которых могут быть включены схемы, чертежи, копии авторских свидетельств, карты, фотографии, вырезки из газет и журналов, список отчетов по тематике работы, другие материалы, которые вкладываются в отдельную папку);
- электронный носитель информации (DVD-RW или другой) с размещенными на нем вышеперечисленными материалами.

Примечания:

Материалы, отправленные по почте, должны прибыть в РААСН не позднее установленного срока.

Материалы, представленные на Конкурс (в том числе научные работы, монографии, учебные издания (учебники, учебные пособия), альбомы (буклеты) и электронные носители с проектами (с постройками)), не возвращаются.

Опубликованные научные труды, монографии, учебники, учебные пособия и альбомы (буклеты) проектов передаются в библиотеку РААСН.

Решение о присуждении медалей и дипломов принимает президиум РААСН.

Установлен срок представления работ (материалов) на Конкурс РААСН

- не позднее 31 января 2018 года (среда) включительно, до 17 часов 00 минут.

Работы (с материалами) представляются в РААСН или направляются (почтой) по адресу:

Российская Федерация, 107031, Москва, ул. Большая Дмитровка, дом 24, строение 1
в соответствующее отделение РААСН
(Отделение архитектуры, Отделение градостроительства
и Отделение строительных наук).

Контактная информация:

Отделение архитектуры РААСН

– тел. 8(495) 629-14-95, 8(495) 625-76-84, e-mail: oarch@raasn.ru

Отделение градостроительства РААСН

– тел. 8(495) 629-19-91, 625-81-48, e-mail: grado@raasn.ru

Отделение строительных наук РААСН

– тел. 8(495) 625-76-80, 8(495) 625-73-16, e-mail: osn@raasn.ru



СООБЩЕНИЕ О ВЫБОРАХ ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК (РААСН) В 2018 ГОДУ

*Утверждено постановлением Президиума
Российской академии архитектуры и строительных наук
от 8 декабря 2017 г. No13*

В соответствии с пунктом 24 Устава федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» (РААСН), утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 28 мая 2014 г. № 488 (далее – Устав РААСН), президиум Российской академии архитектуры и строительных наук сообщает о проведении 19 и 20 апреля 2018 года очередных выборов академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН по отделениям РААСН и научным направлениям (специальностям).

1. Распределение вакансий членов РААСН (академиков РААСН и членов-корреспондентов РААСН) по отделениям РААСН и по научным направлениям (специальностям) на выборах в РААСН в 2018 году

1.1. На выборы академиков РААСН установлены следующие наименования научных направлений (специальностей) и количество вакансий по Отделению архитектуры РААСН в отношении каждого научного направления (специальности):

Наименование отделения	Наименование научного направления (специальность)	Количество вакансий
Отделение архитектуры РААСН	Наука и образование	1
	Архитектурная практика	2

1.2. На выборы членов-корреспондентов РААСН установлены следующие наименования научных направлений (специальностей) и количество вакансий по Отделениям РААСН в отношении каждого научного направления (специальности):

Наименование отделения	Наименование научного направления (специальность)	Количество вакансий
Отделение архитектуры РААСН	Наука и образование	1*
	Архитектурная практика	1+1*
Отделение градостроительства РААСН	Градостроительная наука	1
	Градостроительная практика	1+1*
Отделение строительных наук РААСН	Теоретические основы строительных наук	2+2*

Примечание: Символ «» означает, что на основании постановления президиума РААСН от 8 декабря 2017 г. №13 данная вакансия объявлена с ограничением возраста кандидата на момент избрания в члены-корреспонденты РААСН – до 60 лет включительно.*

2. Порядок и условия избрания членов РААСН.

2.1. Порядок и условия избрания членов РААСН, перечень документов, представляемых кандидатами в члены РААСН, а также порядок проведения голосования и подсчета голосов на выборах членов РААСН определяются соответственно Уставом РААСН и Регламентом выдвижения кандидатов, проведения голосования и подсчета голосов на выборах членов Российской академии архитектуры и строительных наук, утвержденным постановлением президиума РААСН от 29 ноября 2017 г. № 12.

2.2. Академиками РААСН избираются ученые из числа членов-корреспондентов РААСН, а также ведущие мастера архитектуры и градостроительства, обогатившие архитектуру, градостроительство и строительные науки трудами первостепенного научного и творческого значения.

2.3. Членами-корреспондентами РААСН избираются граждане Российской Федерации, обогатившие современные архитектуру, градостроительство и строительные науки выдающимися трудами и (или) значимыми практическими достижениями.

2.4. Кандидатами в члены РААСН по Отделению архитектуры РААСН могут быть:

2.4.1. ученые в области архитектурной науки, научно-педагогические работники образовательных организаций высшего образования (образовательных организаций высшего образования архитектурного профиля, структурных подразделений архитектурного профиля образовательных организаций высшего образования), имеющие опубликованные научные и учебно-методические труды, получившие широкое профессиональное и общественное признание, ученую степень доктора наук или ученое звание профессора, присвоенное Высшей аттестационной комиссией (ВАК) при Министерстве образования и науки Российской Федерации;

2.4.2. дипломированные архитекторы, являющиеся основными авторами выдающихся проектов и построек, получивших широкое общественное признание, творческая деятельность которых отмечена почетными званиями, государственными и профессиональными премиями и наградами.

2.5. Кандидатами в члены РААСН по Отделению градостроительства РААСН могут быть:

2.5.1. ученые в области градостроительной науки, научно-педагогические работники образовательных организаций высшего образования (образовательных организаций высшего образования архитектурного профиля, структурных подразделений архитектурного профиля образовательных организаций высшего образования), имеющие опубликованные научные и учебно-методические труды, получившие широкое профессиональное и общественное признание, ученую степень доктора наук или ученое звание профессора, присвоенное Высшей аттестационной комиссией (ВАК) при Министерстве образования и науки Российской Федерации;

2.5.2. дипломированные градостроители, являющиеся основными авторами выдающихся проектов и построек, получивших широкое общественное признание, творческая деятельность которых отмечена почетными званиями, государственными и профессиональными премиями и наградами.

2.6. Кандидатами в члены РААСН по Отделению строительных наук РААСН могут быть ученые строительных специальностей и научно-педагогические работники образовательных организаций высшего образования (образовательных организаций высшего образования строительного профиля,

структурных подразделений строительного профиля образовательных организаций высшего образования), имеющие опубликованные научные труды, получившие широкое профессиональное признание, и ученую степень доктора наук.

2.7. Поскольку замещение должностей в органах государственной власти Российской Федерации, работа руководителей крупных компаний подразумевает исполнение должностных обязанностей на высоком профессиональном уровне, а научная деятельность может осуществляться только в свободное от основной работы время, лицам, занимающим государственные должности Российской Федерации, должности государственной гражданской службы Российской Федерации, должности руководителей государственных корпораций, государственных компаний и акционерных обществ с государственным участием, рекомендуется воздержаться от участия в выборах.

2.8. Право выдвижения кандидатов в члены РААСН предоставляется (без ограничения количества выдвинутых):

2.8.1. *Членам РААСН (академикам РААСН и членам-корреспондентам РААСН)*, причем право выдвижения кандидата в академики РААСН предоставляется академику РААСН, кандидата в члены-корреспонденты РААСН – члену РААСН.

2.8.2. *Государственным органам, осуществляющим управление в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук*, причем выдвижение кандидата в члены РААСН проводится на заседании коллегиального органа государственного органа, осуществляющего управление в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук, путем тайного голосования простым большинством голосов при наличии кворума.

2.8.3. *Научным организациям, действующим в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук*, причем выдвижение кандидата в члены РААСН проводится на заседании ученого или научно-технического совета путем тайного голосования простым большинством голосов при наличии кворума.

2.8.4. *Общественным организациям¹, действующим в сфере архитектуры, градостроительства и строительных наук*, причем устав общественной организации должен содержать указание на научную и творческую деятельность как направление деятельности общественной организации и в структуре общественной организации должен присутствовать ученый совет или научно-технический совет (или иной орган), осуществляющий научно-экспертную деятельность в области архитектуры, градостроительства и строительных наук, причем выдвижение кандидата в члены РААСН проводится на заседании ученого совета или научно-технического совета, или иного органа, осуществляющего научно-экспертную деятельность в области архитектуры, градостроительства и строительных наук путем тайного голосования простым большинством голосов при наличии кворума.

2.9. Президент РААСН, первый вице-президент РААСН, вице-президенты РААСН, главный ученый секретарь президиума РААСН, академики-секретари Отделений РААСН от рекомендаций по выдвижению кандидатов в члены РААСН воздерживаются.

3. Подготовка документов для регистрации кандидатов в члены РААСН

3.1. Выдвинутые кандидаты в члены РААСН регистрируются в отделениях РААСН, предоставляя одновременно материалы по представленному далее перечню.

3.1.1. *Письменное заявление с согласием на выдвижение и избрание в состав членов РААСН* (форма документа и требования к его оформлению размещены на официальном сайте РААСН²).

3.1.2. *Представление кандидата в члены РААСН* (допускается не более 1 (одного) представления) (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

¹ В соответствии с Федеральным законом от 19 мая 1995 года №82-ФЗ (действующая редакция, 2016) «Об общественных объединениях» общественной организацией является основанное на членстве общественное объединение, созданное на основе совместной деятельности для защиты общих интересов и достижения уставных целей объединившихся граждан (Статья 8. Общественная организация).

² Здесь и далее: официальный сайт РААСН – <http://www.raasn.ru/>.

3.1.3. Научная и творческая характеристика кандидата в члены РААСН (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.4. Список опубликованных учебных изданий и научных трудов кандидата в члены РААСН с выделением научных и учебно-методических трудов по тому научному направлению (специальности), по которому выдвигается кандидат в члены Академии – обязателен только для кандидатов в члены РААСН, соответствующих требованиям пункта 2.4.1, или пункта 2.5.1, или пункта 2.6 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН (форма документа и требования к его оформлению размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.5. Справка о цитируемости публикаций кандидата в члены РААСН, индексируемых в международных информационно-аналитических системах научного цитирования – обязательна только для кандидатов в члены РААСН, соответствующих требованиям пункта 2.4.1, или пункта 2.5.1, или пункта 2.6 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН (форма документа и требования к его оформлению размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.6. Список проектов и построек, выполненных кандидатом в члены РААСН в качестве основного автора – обязателен только для кандидатов в члены РААСН, соответствующих требованиям пункта 2.4.2 или пункта 2.5.2 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.7. Доклад о наиболее важных сторонах научной, практической, педагогической деятельности по объявленному научному направлению (специальности) (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.8. Копия паспорта гражданина Российской Федерации или документа, заменяющего паспорт гражданина Российской Федерации, удостоверяющего личность кандидата в члены РААСН, заверенная личной подписью кандидата в члены РААСН.

3.1.9. Личный листок по учету кадров с приклеенной фотографией (форма документа и требования к его оформлению размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.10. Копия трудовой книжки кандидата в члены РААСН (требования к заверению указанной копии размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.11. Автобиография кандидата в члены РААСН в произвольной форме (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.12. Краткая научная и творческая характеристика кандидата в члены РААСН (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.13. Справка о месте основной работы кандидата в члены РААСН (требования к оформлению документа размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.14. Копии дипломов (аттестатов) об окончании образовательной организации высшего образования, о присвоении ученых степеней, о присвоении ученых званий, копия аттестата советника РААСН (для кандидатов в члены РААСН, баллотирующихся в состав членов-корреспондентов РААСН, при наличии), копия диплома члена-корреспондента РААСН (для кандидатов в члены РААСН, баллотирующихся в состав академиков РААСН, при наличии), копии удостоверений и грамот о присвоении почетных званий, лауреатов премий, копии дипломов членов (академиков, членов-корреспондентов) Российской академии наук и/или других государственных академий; копии документов, подтверждающих признание творческой деятельности кандидата в члены РААСН путем присвоения почетных званий, государственных и профессиональных премий и наград (обязательно только для кандидатов в члены РААСН, соответствующих требованиям пункта 2.4.2 или пункта 2.5.2 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН) (требования к заверению указанных копий размещены на официальном сайте РААСН).

3.1.15. Цветные фотографии кандидата в члены РААСН размером 4.5 см x 6 см, без уголка (3 (три) штуки, на каждой фотографии с оборотной стороны карандашом указываются инициалы и фамилия кандидата в члены РААСН).

3.1.16. Согласие кандидата в члены РААСН на хранение, обработку, проверку и публикацию персональных данных в части, касающейся участия в выборах в члены РААСН (форма документа размещена на официальном сайте РААСН).

3.1.17. Копия устава общественной организации, указанной в пункте 2.8.4 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН, при выдвижении кандидата в члены РААСН согласно пункту 2.8.4 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН (требования к заверению указанной копии размещены на официальном сайте РААСН).

3.2. Даты необходимо проставить на всех предоставляемых документах за исключением документов, указанных в пункте 3.1.14 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН. Действительны документы, датированные только в 45-дневный период со дня опубликования сообщения о проведении выборов членов РААСН в общероссийских средствах массовой информации.

3.3. Материалы, указанные в пунктах 3.1.1 – 3.1.17 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН, со сквозной нумерацией листов (выполняется карандашом в правом нижнем углу), снабжаются описью и комплектуется в одну или несколько папок с файлами, изготовленных из пластика и обеспечивающих надлежащую сохранность документов формата А4.

На лицевой стороне обложки папки указываются:

- фамилия, имя, отчество кандидата в члены РААСН;
- категория членства (академик РААСН, член-корреспондент РААСН), отделение РААСН, научное направление (специальность), соответствующее одному из объявленных; отметка об участии в выборах с установленным ограничением возраста для кандидатов в члены РААСН (в случае изъявления желания участвовать в выборах с установленным ограничением возраста для кандидатов в члены РААСН) (в соответствии с указанным в письменном заявлении с согласием на выдвижение и избрание в состав членов РААСН);

- контактные телефон(ы) и адрес(а) электронной почты кандидата в члены РААСН.

3.4. Все материалы, указанные в пунктах 3.1.1 – 3.1.17 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН (каждый документ в виде отдельного файла) дополнительно представляются на электронном носителе (диск DVD-RW или другой), который вкладывается в папку с файлами, указанную в пункте 3.2 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН).

Формат представления документов на электронном носителе – Adobe PDF (сканированные документы). Электронные версии документов, указанных в пунктах 3.1.11 и 3.1.12 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН должны быть также представлены в формате Microsoft Word (DOC или DOCX).

3.5. Кандидат в члены РААСН может выдвигаться только по одной из объявленных вакансий, в соответствии с указанным им в письменном заявлении с согласием на выдвижение и избрание в состав членов РААСН, категорией членства, отделением РААСН, научным направлением (специальностью), отметкой об участии в выборах с установленным ограничением возраста для кандидатов в члены РААСН (в случае изъявления желания участвовать в выборах с установленным ограничением возраста для кандидатов в члены РААСН).

3.6. Ответственность за правильность оформления, достоверность и полноту предоставляемых документов несет кандидат в члены РААСН.

3.7. Отсутствие или представление незаверенным какого-либо из документов по указанному перечню может быть причиной последующего отклонения кандидата в члены РААСН президиумом РААСН.

4. Прием документов кандидатов в члены РААСН.

4.1. Сообщение о проведении выборов членов РААСН подлежит публикации в «Строительной газете» 12 января 2018 года (Свидетельство о регистрации ПИ No ФС-77-69446 от 02 мая 2017 года выдано Роскомнадзором).

4.2. Единовременный приём всего комплекта документов осуществляется в здании Российской академии архитектуры и строительных наук по адресу: 107031, Российская Федерация, Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1, ежедневно с 10 часов 00 минут 12 января до 17 часов 00 минут 26 февраля, кроме выходных и праздничных дней, со дня опубликования сообщения о проведении выборов членов РААСН в общероссийских средствах массовой информации.

4.3. Комплект документов, отправленный кандидатом в члены РААСН по почте и не полученный в указанный срок или представленный кандидатом в члены РААСН позднее установленного времени, не рассматривается.

Рекомендуется не откладывать подачу документов на последние дни.

5. Утверждение кандидатов и выборы в члены РААСН

5.1. По результатам заседания бюро отделения РААСН отделение РААСН подготавливает экспертные заключения в отношении всех выдвинутых по соответствующему отделению кандидатов и рекомендует кандидатуры для утверждения президиумом РААСН кандидатами в члены РААСН.

5.2. Кандидаты в члены РААСН могут заслушиваться на заседании бюро отделения РААСН, проведение которого предусмотрено пунктом 5.1 настоящего Сообщения о выборах членов РААСН.

5.3. Президиум РААСН утверждает кандидатов в члены РААСН.

5.4. Списки утвержденных президиумом РААСН кандидатов в члены РААСН, подготовленные в соответствии с распределением вакансий будут опубликованы на официальном сайте РААСН в срок до 19 марта 2018 года.

5.5. Утвержденные президиумом РААСН кандидаты в члены РААСН, официально приглашаются на Общее собрание членов РААСН в 2018 году, на котором 19 и 20 апреля 2018 года состоятся выборы членов РААСН.

5.6. Выборы членов РААСН проводятся путем тайного голосования на Общем собрании членов РААСН и на основе тайных голосований на общих собраниях отделений РААСН, проводимых в рамках Общего собрания членов РААСН.

5.7. В случае избрания члена-корреспондента РААСН академиком РААСН, образовавшаяся таким образом вакансия члена-корреспондента РААСН остается вакантной до следующих выборов членов РААСН.

6. Контактная информация

Официальный сайт РААСН – <http://www.raasn.ru/>

Отделение архитектуры РААСН	Отделение градостроительства РААСН	Отделение строительных наук РААСН
<p><i>Телефоны:</i> +7 (495) 629-14-95 +7 (495) 625-76-84. <i>Адрес электронной почты:</i> oarch@raasn.ru</p>	<p><i>Телефоны:</i> +7 (495) 625-79-75 +7 (495) 629-19-91. <i>Адрес электронной почты:</i> grado@raasn.ru</p>	<p><i>Телефоны:</i> +7 (495) 625-73-16 +7 (495) 625-76-80. <i>Адрес электронной почты:</i> osn@raasn.ru</p>



УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ ГУРАМ АВТАНДИЛОВИЧ ДЖИНЧВЕЛАШВИЛИ

8 декабря 2017 года на 62-м году ушел из жизни Джинчвелашвили Гурам Автандилович, заведующий кафедрой «Высшая математика и естественные науки» Российского университета транспорта (МИИТ), Ученый секретарь Научного совета РААСН по сейсмологии и сейсмостойкому строительству, профессор, доктор технических наук.

Уход из жизни Г.А. Джинчвелашвили – одним из ведущих российских ученых в области сейсмостойкого строительства, замечательного педагога, учителя, преданного науке и профессии, высокоинтеллектуального человека, отзывчивого и внимательного коллегу, исключительно надежного друга – невосполнимая потеря для строительной науки, а также и для каждого, кто знал его лично. Благодарная память о нем навсегда сохранится в сердцах его друзей и коллег.

*Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*

*Редакционная Коллегия международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*