

International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering

**Международный журнал по расчету гражданских
и строительных конструкций**

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Urban Planning Institute of Residential and Public
Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow,
Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy of
Architecture and Construction Sciences; National
Research Moscow State University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow,
Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS, Professor, Dr.Sc., Russian
University of Transport (RUT - MIIT); Russian
University of Friendship of Peoples; Moscow Institute of
Architecture (State Academy); Perm National Research
Polytechnic University;
Kielce University of Technology (Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing House; National Research
Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO",
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center "STADYO";
Russian University of Transport (RUT - MIIT); Russian
University of Friendship of Peoples;
Perm National Research Polytechnic University;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systemes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W 02919 Johnston, RI,
United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systemes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W 02919 Johnston, RI,
United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.,
Parametric Technology Corp.;
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr.Sc., Systems
Research Institute Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University of Technology and
Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenکو, Professor, Dr.Sc., Equipe
d'Analyse Numerique NMR CNRS 5585 University Gean
Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

PUBLISHER

ООО «Издательство АСВ»
(Publishing House ASV)
Yaroslavl'skoe sh. 19/1,12, 129337 Moscow, Russia
Tel. +7 (925) 084-74-24, iasv@iasv.ru

INDEXED IN:

CrossRef
Google Scholar
Index Copernicus
Russian Science Citation Index
ISSN 2587-9618

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Robert M. Aloyan,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Mojtaba Aslami, Ph.D,
Fasa University;
Daneshjou blvd, Fasa,
Fars Province, Iran

Mukhtaritdin M. Batdalov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Dagestan State University
of National Economy;
5, Ul. D. Ataeva, Makhachkala,
Dagestan, 367008, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Yuri M. Bazhenov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Alexander T. Bekker,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Far Eastern Federal University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
8, Sukhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak,
Professor, Ph.D.,
University of Žilina;
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir G. Gagarin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Alexander S. Gorodetsky,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
LIRA SAPR Ltd.;
7a Kiyanovsky Side Street
(Pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vladimir T. Erofeev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey V. Fedosov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Sergiy Yu. Fialko,
Professor, Dr.Sc.,
Cracow University of
Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Vyatcheslav A. Ilyichev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Podzemproekt Ltd.;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego Kielce, 25 – 314,
Poland

Sergey Yu. Kalashnikov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Volgograd State Technical
University;
28, Lenin avenue, Volgograd,
400005, Russia

Semen S. Kaprielov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutsckaya St., Moscow,
109428, Russia

Nikolay I. Karpenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov,
Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Perm National Research
Polytechnic University;
29 Komsomolsky pros., Perm,
Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Southwest State University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
94, 50 let Oktyabrya, Kursk,
305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey B. Krylov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutskaya St., Moscow,
109428, Russia

Sergey V. Kuznetsov,
Professor, Dr.Sc.,
Ishlinsky Institute for Problems
in Mechanics of the Russian
Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo,
Moscow, 119526, Russia

Vladimir V. Lalin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint-Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya Sq., Tomsk,
634003, Russia

Rashid A. Mangushev,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan,
420043, Republic of Tatarstan,
Russia

Vladimir L. Mondrus,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Valery I. Morozov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Anatoly V. Perelmuter,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect,
Petrozavodsk, 185910,
Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
7, Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi,
Professor, Dr.Sc.,
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Vladimir P. Selyaev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Eun Chul Shin,
Professor, Ph.D.,
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh,
Professor, Ph.D.,
University of Roorkee;
Roorkee, India, 247667

Waclaw Szcześniak,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka,
Professor, Dr.Sc.,
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Josef Vičan,
Professor, Ph.D., Ing.,
University of Žilina; Univerzitná
1, 010 26, Žilina, Slovakia

Zbigniew Wojcicki,
Professor, Dr.Sc.,
Wroclaw University
of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University
of Technology;
Pl. Politechniki 1, 00-661
Warsaw, Poland

Segrey I. Zhavoronok, Ph.D.,
Institute of Applied Mechanics of
Russian Academy of Sciences;
Moscow Aviation Institute
(National Research University);
7, Leningradsky Prt.,
Moscow, 125040, Russia

Askar Zhussupbekov,
Professor, Dr.Sc.,
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

TECHNICAL EDITOR

Irina N. Afanasyeva, Ph.D.,
National Research
Moscow State University of Civil
Engineering; Research &
Development Center STADYO”;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337
Moscow, Russia

EDITORIAL TEAM

Alexander V. Kuzmin,
Full Member of RAACS,
President of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
Research Center of Construction;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of
the Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences; Scientific Research
Center "STADYO",
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of
RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center
"STADYO";
Russian University of Friendship
of Peoples; Perm National
Research Polytechnic University;
8th Floor, 18, ul. Tretya
Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi,
Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov,
Professor, Dr.Sc.,
Parametric Technology Corp.;
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Charles El Nouty,
Professor, Dr.Sc.,
LAGA Paris-13 Sorbonne Paris
Cite; 99 avenue J.B. Clément,
93430 Villetaneuse, France

Darya Filatova,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego, Kielce, 25-314, Poland

Vladimir Ya. Gecha,
Professor, Dr.Sc.,
Research and Production
Enterprise All-Russia
Scientific-Research Institute
of Electromechanics with Plant
Named after A.G. Iosiphyan;
30, Volnaya Street, Moscow,
105187, Russia

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D,
Deputy Executive Scientific
Secretary of the Russian
Academy of Architecture
and Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Amirlan A. Kusainov,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazakh-American University,
9, Toraighyrov Str., Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing
House;
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337
Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii,
Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in
Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600,
Radom, Poland

Gregory P. Panasenکو,
Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023,
St.Etienne, France

Leonid A. Rozin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Marina V. Shitikova,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Igor L. Shubin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
Russian University of Friendship
of Peoples;
Moscow Institute of Architecture
(State Academy);
Perm National Research
Polytechnic University;
Kielce University of Technology
(Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
Urban Planning Institute of
Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Tatyana L. Dmitrieva, Professor, Dr.Sc.,
Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov Street, Irkutsk, 664074, Russia

Petr P. Gaidzhurov, Professor, Dr.Sc.,
Don State Technical University; 1, Gagarina Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

Jacek Grosel, Ph.D.,
Wroclaw University of Technology; 11 Grunwaldzki Sq., 50-377, Wrocław, Poland

Stanislaw Jemiolo, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.,
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.,
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, Ph.D.,
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering
(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года (ISSN: 1524-5845). В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по отраслям науки

- 01.00.00 Физико-математические науки;
- 05.00.00 Технические науки

и группам специальностей

- 01.02.00 Механика
- 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление
- 05.23.00 Строительство и архитектура.

В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ).

Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science. Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк). Официальными партнерами издания является Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН), осуществляющая научное курирование издания, и Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО).

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

- предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности публиковать результаты своих исследований;

- привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;
- обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал IJCCSE»): с основной информацией о журнале, его целях и задачами, составом редакционной коллегии и редакционного совета, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей, сведениями о соблюдении редакционной этики, о политике авторского права и лицензирования, о представлении журнала в информационных системах (индексировании), информацией о подписке на журнал, контактными данными и пр. Журнал работает по лицензии Creative Commons типа cc by-nc-sa (Attribution Non-Commercial Share Alike) – Лицензия «С указанием авторства – Некоммерческая – Копилефт».

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.rospr.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж,

офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (адреса электронной почты: sidorov.vladimir@gmail.com, sidorov@iasv.ru, iasv@iasv.ru, sidorov@gaasn.ru) или к техническому редактору журнала *Афанасьевой Ирине Николаевне* (адреса электронной почты: irina.n.afanasyeva@gmail.com; rena1986@mail.ru). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никутиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство АСВ с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (PILA), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

CrossRef – независимая организация, образованная в 2000 году по инициативе группы научных издателей. Инициатором разработки технологии стало издательство Wiley. Технология использования ссылок (DOI) принадлежит агентству CrossRef.

Publishers International Linking Association (PILA) – Международная ассоциация по связям издателей – является управляющей структурой агентства CrossRef – агрегатора и регистратора DOI, а также международной базой научных статей и их метаданных (www.crossref.org). На настоящий момент в базе несколько десятков миллионов материалов.

Использование этой технологии позволит представить информацию о журнале на международной платформе издателей научной литературы CrossRef, обеспечит удобный и принятый в мировом научном сообществе доступ к полнотекстовой электронной версии. Это значительно облегчит поиск научной информации, что способствует повышению наукометрических показателей авторов статей, публикуемых в журнале. Если, например, у произведения российского автора есть DOI и если на его работу имеется ссылка в публикации зарубежного коллеги в журнале, включенном в Web of Science и Scopus, то такое произведение автоматически попадает в эти базы данных и получает в нем собственный индекс цитируемости.

Все журналы, индексируемые в международной базе научного цитирования Web of Science и большинство периодических изданий, индексируемых в международной базе Scopus, имеют DOI. Использование цифрового идентификатора говорит прежде всего о технологическом качестве научного издания и является неотъемлемым атрибутом системы научной коммуникации за счет эффективного обеспечения процессов обмена научной информацией.

С октября 2016 года стал возможным прием статей на рассмотрение и рецензирование через он-лайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала (электронная редакция):

<http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE>

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

International Journal for **Computational Civil and Structural Engineering**

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 13, Issue 3

2017

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

СОДЕРЖАНИЕ

Материальное демпфирование при расчете конструкций на динамические воздействия	<u>13</u>
<i>М.С. Барабаш, А.В. Пикуль</i>	
О современных методах редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов	<u>19</u>
<i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Д.С. Дмитриев</i>	
Моделирование работы грунтовых массивов на динамическое воздействие	<u>34</u>
<i>А.С. Городецкий, А.В. Пикуль, Б.Ю. Писаревский</i>	
Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов	<u>42</u>
<i>Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков, И.Л. Тонков</i>	
Деформационные зависимости для плосконапряженного коррозионно поврежденного составного элемента в зоне контакта	<u>58</u>
<i>В.И. Колчунов, М.С. Губанова</i>	
Численное и асимптотическое моделирование задачи фильтрации с первоначальным осадком	<u>70</u>
<i>Л.И. Кузьмина, Ю.В. Осипов, Ю.П. Галагуз</i>	
Оценивание матричных параметров кусочно-непрерывной модели нелинейного объекта управления	<u>77</u>
<i>Р.Л. Лейбов</i>	
Готовы ли мы перейти к нелинейному анализу при проектировании?	<u>86</u>
<i>А.В. Перельмутер, В.В. Тур</i>	
Решение нелинейных задач строительной механики методом наискорейшего спуска	<u>103</u>
<i>В.В. Петров</i>	

Моделирование распределения температурных полей пеностекольной шихты в условиях термической обработки пеностекла <i>С.В. Федосов, М.О. Баканов</i>	<u>112</u>
Применение жестких вставок в расчетных моделях конструкций <i>С.Ю. Фиалко</i>	<u>119</u>
Информация о конкурсном отборе тем фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук в 2017 году	<u>138</u>

International Journal for **Computational Civil and Structural Engineering**

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 13, Issue 3

2017

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

CONTENTS

Material Damping in Dynamic Analysis of Structures <i>Maria S. Barabash, Anatol V. Pikul</i>	<u>13</u>
About Contemporary Approaches to Reduction of Computational Dimension of Problems of Structural Analysis within Finite Element Method <i>Alexander M. Belostotsky, Pavel A. Akimov, Dmitry S. Dmitriev</i>	<u>19</u>
Modelling of Soil Behavior in Dynamic Load <i>Alexander S. Gorodetsky, Anatol V. Pikul, Bogdan Y. Pysarevskiy</i>	<u>34</u>
Intellectual Automation of Engineering Survey of Building Objects <i>Galina G. Kashevarova, Yuri L. Tonkov, Igor L. Tonkov</i>	<u>42</u>
Relationships Between Deformations and Stresses at Contact Zone of Flat-Stressed Composite Element, which was Subjected Corrosion Damages <i>Vitaly I. Kolchunov, Maria S. Gubanova</i>	<u>58</u>
Numerical and Asymptotic Modelling of a Filtration Problem with the Initial Deposit <i>Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov, Yuri P. Galaguz</i>	<u>70</u>
Nonlinear Plant Piecewise-Continuous Model Matrix Parameters Estimation <i>Roman L. Leibov</i>	<u>77</u>
Whether we are Ready to Proceed to a Nonlinear Analysis at Designing? <i>Anatoly V. Perelmuter, Victor V. Tur</i>	<u>86</u>
Solution of Non-Linear Problems of Structural Analysis by Method of Steepest Descent <i>Vladilen V. Petrov</i>	<u>103</u>
Modelling of Temperature Field Distribution of the Foam Glass Batch in Terms of Thermal Treatment of Foam Glass <i>Sergey V. Fedosov, Maksim O. Bakanov</i>	<u>112</u>

Application of Rigid Links in Structural Design Models

119

Sergey Yu. Fialko

**Information about Competition for Grants of Ministry of Construction,
Housing and Utilities of the Russian Federation and Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences in the areas of Architecture,
Urban Planning and Construction in 2017**

138

DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-13-18

МАТЕРИАЛЬНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

М.С. Барабаш^{1,2}, А.В. Пикуль^{1,3}

¹ООО «ЛИРА САПР», г. Киев, УКРАИНА

²Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

³Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: Статья посвящена численному исследованию влияния материального демпфирования на несущие конструкции здания при динамических воздействиях. Предложена методика моделирования работы конструкции при динамическом воздействии во времени и при учете материального демпфирования. Приведено решение системы уравнений движения на основе метода Ньюмарка в матричном виде. Описан физический смысл материального демпфирования. Предложена методика учета разноматериальности частей конструкции. Приведен пример расчета здания совместно с грунтовым основанием, при учете сейсмических воздействий. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета с учетом и без учета материального демпфирования. Подтверждено значительное влияние учета демпфирования на НДС конструкции.

Ключевые слова: динамическое воздействие, численное моделирование, компьютерное моделирование, материальное демпфирование, ПК ЛИРА-САПР

MATERIAL DAMPING IN DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURES

Maria S. Barabash^{1,2}, Anatol V. Pikul^{1,3}

¹"LIRA SAPR" Ltd, Kiev, UKRAINE

²National Aviation University, Kiev, UKRAINE

³Kiev National University of Construction and Architecture, Kiev, UKRAINE

Abstract: The paper deals with numerical research as to how material damping influences the load-bearing structures in dynamic loads. Certain technique is suggested for modelling behaviour of structure in time history analysis with account of material damping. A set of motion equations is solved according to Newmark method as matrix. Physical meaning of material damping is described. The authors suggest the technique for account of different materials in parts of structure. The following example is provided: analysis of structure together with soil and with account of earthquake loads. Analysis results are compared (with and without account of material damping). Significant influence of damping on the stress-strain state of the structure is confirmed.

Keywords: dynamic load, numerical modelling, computer modelling, material damping, LIRA-SAPR

Для полного и достоверного описания напряженно-деформированного состояния любого здания, необходимо не только учесть абсолютно все факторы, описывающие реальный объект, такие как его геометрические параметры, физико-механические свойства материала, учесть формирование начальных напряжений и деформаций при возведении здания, но и с

высокой точностью определить внешние воздействия и их характер. К числу характерных примеров взаимодействия нагрузки с объектом относятся многие режимы динамического нагружения. В действующих нормативных документах принято, что сейсмическое ускорение фундаментов (и всего сооружения) и основания совпадает [3]. Однако,

инструментальные данные свидетельствуют, что ускорение фундаментов могут в несколько раз отличаться от ускорений грунтов основания. Это обстоятельство можно объяснить тем, что не вся энергия сейсмического возмущения от грунта основания передается на фундамент, т.е. передается некоторая часть возмущения из-за особенностей связей между фундаментом и основанием. «Потеря» (утечка) части этой энергии может происходить по ряду причин:

- из-за демпфирующего эффекта (естественного или инженерного искусственного) связей между фундаментом и основанием (в том числе из-за сейсмоизоляции);
- из-за «проскальзывания» горизонтальной сейсмической волны под фундаментом (при преодолении сил трения и специфики односторонних связей между фундаментом и основанием);
- из-за разброса жесткостей и величины масс в моделях здания (высотная и стилобатная части) [4].

Рассмотрим случай демпфирующего эффекта. При динамических воздействиях на конструкцию всегда присутствует фактор демпфирования. Демпфирование может обеспечиваться конструктивными устройствами – демпферами (гасителями колебаний). Но даже в случае если демпферы не устанавливаются, то фактор демпфирования все равно присутствует и обуславливается материальным демпфированием. Сама конструкция уже обладает свойством гашения колебаний, особенно если она достаточно массивная. Мощным гасителем колебаний является грунтовый массив, на котором возводится конструкция.

Предлагаемая методика заключается в следующем. Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции на динамические (сейсмика, вынужденные колебания и др.) воздействия рекомендуется производить её динамический

расчет во времени. Это позволяет задать нагружение зависимое от времени с помощью акселерограммы и проследить в каждый момент времени её напряженно деформированное состояние, а также проанализировать движение системы во времени.

Учет материального демпфирования при моделировании работы конструкции позволяет получить более адекватную картину НДС по сравнению с таким же расчетом без учета демпфирования.

Дифференциальное уравнение движения конструкции записывается в виде:

$$[K]\{U\} + [C]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{P(t)\}, \quad (1)$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы; $[C]$ – матрица демпфирования; $[M]$ – матрица масс, $\{U\}, \{\dot{U}\}, \{\ddot{U}\}$ – неизвестные вектора узловых перемещений, скоростей, ускорений; $\{P(t)\}$ – вектор узловых нагрузок.

Для решения дифференциальных уравнений движения системы существует ряд прямых и не прямых методов интегрирования во времени, например, метод Рунге-Кутты, метод Ньюмарка, метод Вильсона, метод центральных разностей и др.

Так, решение системы уравнений движения на основе метода Ньюмарка [1,2,4] в матричном виде выглядит следующим образом:

$$[A] = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{1}{\gamma \Delta t} [C] + [K], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \{B\}_{i+1} = & F(t_{i+1}) + \\ & + [M] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{U\}_i + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{U}\}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{U}\}_i \right) + \\ & + [C] \left(\frac{1}{\gamma \Delta} \{U\}_i + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \{\dot{U}\}_i + \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \Delta t \{\ddot{U}\}_i \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$[A]\{U\}_{i+1} = \{B\}_{i+1} \quad (4)$$

где $[A]$ - эффективная матрица жесткости, $\{B\}$ - эффективный вектор нагрузок, а α, β, γ - коэффициенты интегрирования.

Скорости и ускорения узлов системы вычисляются с помощью выражений:

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}_{i+1} = & \frac{1}{\gamma \Delta t} (\{U\}_{i+1} - \{U\}_i) + \\ & + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \{\dot{U}\}_i + \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) \Delta t \{\ddot{U}\}_i; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}_{i+1} = & \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\{U\}_{i+1} - \{U\}_i) - \\ & - \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{U}\}_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \{\ddot{U}\}_i; \end{aligned} \quad (6)$$

Разные материалы имеют разные свойства и дают разный вклад в гашение колебаний. Физический смысл материального демпфирования обуславливается переходом механической энергии в тепловую

происходит за счет микропластичности, а не вязкости как в жидкостях и газах.

Для учета разноматериальности частей конструкции для каждого элемента можно задать свои коэффициенты Рэлея, и таким образом сформировать комбинированную матрицу диссипации.

$$[C] = \beta[K] + \alpha[M]$$

Для определения коэффициентов Рэлея необходимо произвести модальный анализ конструкции (или ее части) и задать эмпирические коэффициенты демпфирования для материала при двух наименьших собственных частотах определить коэффициенты по формулам:

$$\alpha = \frac{2\xi_i \xi_j \omega_i \omega_j}{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}, \quad \beta = \frac{2\xi_i \xi_j}{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j},$$

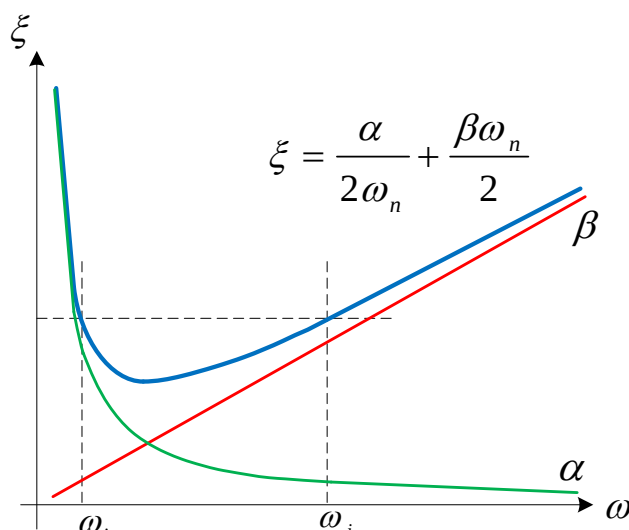


Рисунок 1. Зависимость коэффициента демпфирования от частоты по Рэлею.

Рассмотрим пример расчета здания совместно с грунтовым основанием, при учете сейсмических воздействий в плоской постановке (рис.2). Как уже говорилось, конструктивная безопасность включает в себя пространственное представление системы «наземная часть - фундамент - грунтовое основание». При этом система должна быть

законструирована таким образом, чтобы обладать способностью перераспределения усилий при разрушении отдельных конструктивных элементов и выведения из работы некоторых связей, т.е. чтобы локальные повреждения не вызывали глобального обрушения. Связи данной системы с основанием, т.е. источники

сейсмических воздействий, не должны передавать негативные воздействия от основания на фундамент здания (сооружения), или, по крайней мере, должны их уменьшать. Для наглядности влияния демпфирования выполним сравнение амплитудных значений

перемещений, скоростей и ускорений в уровнях этажей. Расчет выполнен в программном комплексе ЛИРА-САПР, в котором реализовано решение задачи на динамическое воздействие во времени на основе метода Ньюмарка [5].

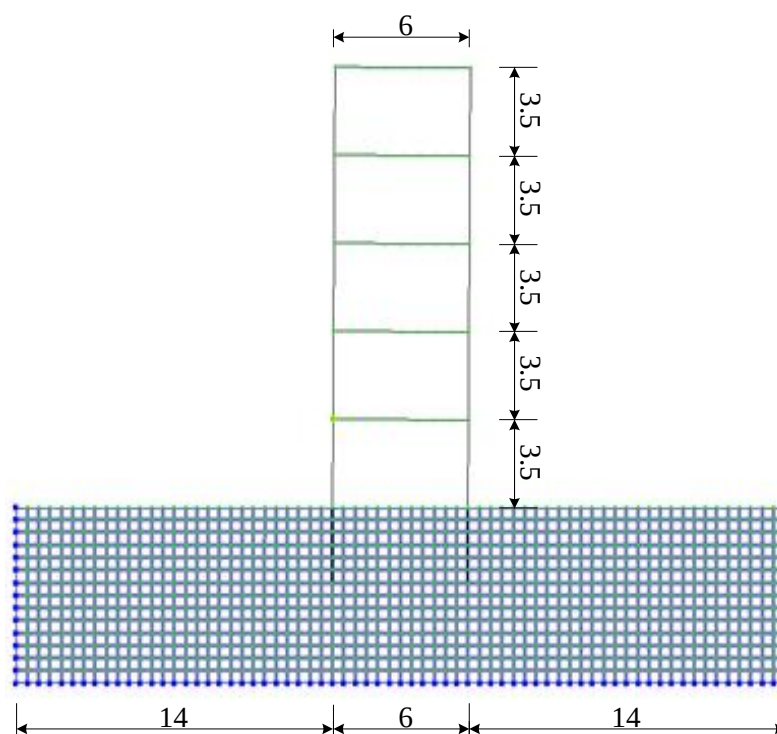


Рисунок 2. Расчетная схема тестовой задачи. Сечение ригелей 80х40 см, колонн 60х40 см. Материал — бетон, грунт — супесь.

Для учета демпфирования на основе модального анализа системы определим наименьшие собственные частоты, которые составляют 46,72 и 147,84 рад/с. Им

соответствуют коэффициенты Рэлея $\alpha = 3,55$ и $\beta = 0,000514$. В табл.1 приведены результаты расчета с учетом и без учета демпфирования.

Таблица 1. Результаты расчета с учетом и без учета демпфирования.

Этаж	Без демпфирования			С учетом демпфирования		
	Горизонтальное перемещение, мм	Скорость, мм/с	Ускорение, мм/с ²	Горизонтальное перемещение, мм	Скорость, мм/с	Ускорение, мм/с ²
1	21,97	23,91	146,3	18,52	4,78	26,63
2	50,98	52,03	303,79	43,4	11,76	57,09
3	80,72	80,67	462,2	68,92	18,89	91,50
4	110,54	109,23	623,04	94,52	26,07	126,47
5	140,31	137,7	785,9	120,15	33,22	161,74

Анализируя результаты, приведенные в таблице 1 можно сделать выводы, что учет демпфирования значительно влияет на НДС конструкции.

ВЫВОДЫ

Развитие и применение методов конструктивной сейсмобезопасности диктуется современной объективной необходимостью и объясняется требованиями повышения безопасности (живучести) строений, стремясь обойти сложности моделирования сейсмических воздействий и несовершенства теории и методов расчета.

Разработка новых методов численного моделирования с учетом перспективных разработок методов расчета на динамические воздействия, таких как учет нелинейных свойств материалов, учет материального демпфирования позволяет корректно провести численные эксперименты и разработать ряд конструктивных мероприятий по сейсмобезопасности зданий и сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пікуль А.В., Барабаш М.С. Проблеми моделювання динамічних впливів. Реалізація в ПК ЛІРА-САПР // Збірка тез доповідей міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 90-річчю з дня народження професора В.К. Єгупова «Проблеми теорії і практики сейсмостійкого будівництва» – Одеса: ОДАБА, 2016. – 124 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448с.
3. Назаров Ю.П. Расчетные модели сейсмических воздействий. – М.: Наука, 2012. – 414 с.

4. Барабаш М.С. Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства. – К.: Издательство «Сталь», 2014. – 301 с.
5. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 360 с.

REFERENCES

1. Pikul A.V., Barabash M.S. Problemy Modelirovaniya Dinamicheskikh Vozdejstvij. Realizacija v PK LIRA-SAPR [Problems of Modelling of Dynamic Impacts. Realization in Program System LIRA-SAPR]. Sbornik tezisov dokladov mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii, posvjashhennoj 90-letiju so dnja rozhdenija professora V.K. Egupov "Problemy teorii i praktiki sejsmostojkogo stroitel'stva", Odessa, ODABA, 2016, 124 pages.
2. Bate K., Wilson E. Chislennye Metody Analiza i Metod Konechnyh Jelementov [Numerical Methods of Analysis. Finite Element Method]. Moscow, 1982, 448 pages.
3. Nazarov Yu.P. Raschetnye Modeli Sejsmicheskikh Vozdejstvij [Computational Models of Seismic Impacts]. Moscow, Nauka, 2012, 414 pages.
4. Barabash M.S. Komp'juternoe modelirovanie processov zhiznennogo cikla ob#ektov stroitel'stva [Computer Modelling of Life-Cycle Process of Structures]. Kiev, "Stal" Publishing House, 2014, 301 pages.
5. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. Komp'juternye Modeli Konstrukcij [Computer Models of Structures]. Moscow, ASV Publishing House, 2009, 360 pages.

Барабаш Мария Сергеевна, академик Академии строительства Украины, директор ООО «ЛИРА САПР», доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий строительства Учебно-научного института Аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1; тел: +38 (095) 286-39-90; e-mail: bmari@ukr.net

Пикуль Анатолий Владимирович, инженер-аналитик
ООО «ЛИРА САПР», ассистент кафедры
металлических и деревянных конструкций Киевского
национального университета строительства и
архитектуры, 03037, Украина, г. Киев,
Воздухофлотский проспект, 31;
тел: +38(097)217-68-79
e-mail: Anatol.Pikul@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0002-1516-8266>

Maria S. Barabash, Academician of the Academy of
Construction of Ukraine, the director of “LIRA SAPR”
Ltd, DSc (Eng.), Associate Professor, Professor of
Department of Computer Technology Building, Institute
of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta
Komarova, 03058, Kiev, Ukraine;
phone: +38 (095) 286-39-90;
e-mail: bmari@ukr.net., <http://www.liraland.ru>

Anatol V. Pikul, Engineer-Analyst of “LIRA SAPR” Ltd,
assistant of Department of Metal and Wood Structures at
Kyiv National University of Construction and Architecture,
31, Povitroflotsky Avenue, Kyiv, 03037, Ukraine;
phone: +38(097)217-68-79
e-mail: Anatol.Pikul@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0002-1516-8266>

DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-19-33

О СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДАХ РЕДУЦИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ В РАМКАХ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.М. Белостоцкий^{1,2,3,4,5}, П.А. Акимов^{1,5,6}, Д.С. Дмитриев¹

¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

² Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

³ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

⁵ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии
архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящее время, как известно, имеется немало методов редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов (МКЭ), в том числе в части снижения порядков матрицы масс и матрицы жесткости конечноэлементной модели, для приведения, например, ее в соответствии с «мониторинговой» (или «тестовой») моделью объекта, степени свободы которой определяются местами установки акселерометров. В этом отношении в данной статье будут рассмотрены (с анализом преимуществ и недостатков каждого) следующие подходы: метод редуцирования по Гайяну, IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования и метод динамического редуцирования. Кроме того, описывается основанный на теории метода подконструкций так называемый статический метод конечных элементов для сейсмического расчета подземных сооружений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод суперэлементов, метод подконструкций, методы редуцирования, вычислительная размерность

ABOUT CONTEMPORARY APPROACHES TO REDUCTION OF COMPUTATIONAL DIMENSION OF PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS WITHIN FINITE ELEMENT METHOD

Alexander M. Belostotsky^{1,2,3,4,5}, Pavel A. Akimov^{1,5,6}, Dmitry S. Dmitriev¹

¹ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

² Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA

³ Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁴ Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

⁵ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁶ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: At present, as is known, there are many methods of reduction of computational dimension of problems of structural analysis within finite element method (FEM), including the reduction of the dimensions of the mass matrix and the stiffness matrix of the finite element model (to bring them, for example, in accordance with the “structural health monitoring” (or “test”) model of the object, which degrees of freedom are determined by the places of installation of accelerometers. In this respect, the following approaches are considered in this paper (with the corresponding analysis of the advantages and disadvantages): the Gaian reduction method, the IRS (Improved Reduced System) reduction method and the dynamic reduction method. In addition, the so-called static finite element method for seismic analysis of underground structures, based on the substructuring technique, is considered.

Keywords: finite element method, superelement method, substructuring method, reduction, computational dimension

1. ОБ АКТУАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РЕДУЦИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ЭТАПЕ МОНИТОРИНГА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Основной целью исследования колебаний строительных объектов в рамках мониторинга является верификация конечноэлементной модели объекта, оценка корректности прогнозного математического моделирования его поведения. Таким образом, на основе инструментальных измерений определяются собственные частоты и формы колебаний объекта. Вместе с тем, очевидно, что конечноэлементная модель объекта характеризуется существенно большим числом степеней свободы по сравнению с тем объемом данных, который может обеспечить сеть акселерометров. Для непосредственного сопоставления результатов соответствующих натуральных измерений и конечноэлементного расчета создается редуцированная тестовая модель, степени свободы которой полностью соответствуют местам установки акселерометров и измеряемым ими параметрам.

Создание такой тестовой модели позволяет решить сразу несколько задач. Прежде всего, соответствующие исследования, сами по себе, способствуют созданию качественной системы мониторинга объекта в части выбора мест расположения тестово-измерительных приборов и определения перечня величин, подлежащих измерению. Кроме того, после построения редуцированной матрицы масс непосредственно на объекте появляется возможность проверки выполнения условия ортогональности соответствующих форм колебаний. Наконец, именно наличие тестовой модели позволяет выполнять оценку точности используемой конечноэлементной модели в рамках действующей системы мониторинга. Для корректно-

го решения этих задач, разумеется, требуется корректная редукция матрицы масс и матрицы жесткости в соответствии с имеющимися степенями свободы тестовой модели.

В настоящее время используется немало различных подходов к редуцированию. В настоящей статье рассматриваются, в частности, метод редуцирования по Гайяну [11], IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования [15] и метод динамического редуцирования [16]. Следует отметить, что подходы к редуцированию различаются по точности, простоте применения и объему потребных вычислительных ресурсов. В последующих разделах достаточно кратко рассматриваются теоретические основы вышеуказанных методов и актуальные вопросы их практического использования.

2. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РЕДУЦИРОВАНИЯ МАТРИЦ

В основе всех методов редуцирования матриц (т.е. приведения их в соответствие с тестовой моделью) лежит следующая формула:

$$B = T^T A T, \quad (2.1)$$

где A – исходная матрица; B – соответствующая редуцированная матрица; T – матрица преобразования (редуцирования).

Основной сложностью процесса редуцирования является существенная разница между числом степеней свободы в исходной конечноэлементной модели и тестовой модели. Так, число степеней свободы в исходной конечноэлементной модели может достигать до нескольких миллионов неизвестных, тогда как сеть акселерометров (или иных измерительных приборов) на объекте составляет, как правило, несколько десятков или сотен единиц. Методы редуцирования должны позволять делать корректные оценки (на ос-

нове интерполяции) о движении всей конечноэлементной модели на основании ограниченного числа известных величин в местах установки акселерометров. В силу того, что соотношение между количеством интерполируемых и известных величин весьма значительно, для обеспечения адекватного редуцирования требуется высокоточная процедура интерполяции. По существу, именно характер и точность интерполяции значений для тех степеней свободы, которые не относятся к значениям, измеряемым инструментальным способом (т.е. являются вспомогательными степенями свободы и не относятся к степеням свободы тестовой модели (главным степеням свободы)), является важнейшими факторами, определяющими точность методов редуцирования, рассматриваемых ниже.

3. МЕТОД РЕДУЦИРОВАНИЯ ПО ГАЙЯНУ

Простейшим подходом к редуцированию является метод редуцирования по Гайяну (R.J. Guyan), предложенный в 1965 году [11]. Рассмотрим разрешающую систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов для задачи статического расчета объекта:

$$K\bar{U} = \bar{P}, \quad (3.1)$$

где $\bar{U}$ – вектор неизвестных; K – матрица жесткости; $\bar{P}$ – вектор нагрузок. В методе редуцирования по Гайяну полагается, что параметры интерполяции могут быть определены на основании следующего представления системы (3.1):

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_o \\ \bar{P}_a \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где составляющие, относящиеся к значениям, измеряемым сетью акселерометров, установленных на объекте, имеют нижний

индекс a , прочие, т.е. редуцируемые составляющие имеют индекс o .

Следует пояснить, что для наглядности через $\tilde{K}_{aa}$ обозначается именно составляющая исходной матрицы жесткости, а никак не редуцированная матрица жесткости.

Полагая, нагрузки, соответствующие редуцируемым степеням свободы, нулевыми (т.е. $\bar{P}_o = 0$), можем переписать (3.2) следующим образом:

$$\begin{cases} K_{oo}\bar{U}_o + K_{oa}\bar{U}_a = 0 \\ K_{ao}\bar{U}_o + \tilde{K}_{aa}\bar{U}_a = \bar{P}_a, \end{cases} \quad (3.3)$$

Следовательно, на основании первого уравнения из (3.3) будем иметь:

$$\bar{U}_o = -K_{oo}^{-1}K_{oa}\bar{U}_a. \quad (3.4)$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{oa} \\ E \end{bmatrix} \bar{U}_a, \quad (3.5)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

Равенство (2.5) также можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = T_{Guyan} \bar{U}_a, \quad (3.6)$$

$$T_{Guyan} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{oa} \\ E \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

– матрица редуцирования по Гайяну.

На основании матрицы (3.7) и исходных матрицы жесткости K и матрицы масс M могут быть построены соответственно редуцированная матрица жесткости K_{aa} и редуцированная матрица масс M_{aa} :

$$K_{aa} = T_{Guyan}^T K T_{Guyan}; \quad M_{aa} = T_{Guyan}^T M T_{Guyan}. \quad (3.8)$$

Заметим, что так как инерционные характеристики второстепенных степеней свободы полностью игнорируются, то метод редуцирования по Гайяну часто называют статической конденсацией.

4. IRS МЕТОД РЕДУЦИРОВАНИЯ

IRS метод редуцирования, разработанный Каллахан (J. O'Callahan) [15], представляет собой дальнейшее развитие методов редуцирования по сравнению с методом редуцирования по Гайяну. Здесь в частности, при построении матрицы редуцирования учитываются оценки первого порядка точности для массовых эффектов. Первый шаг в IRS методе совпадает с редуцированием по Гайяну (т.е. на первом шаге пренебрегают динамическими свойствами объекта). На втором шаге используется полученная выше статическая матрица редуцирования для оценки массовых эффектов редуцированных степеней свободы (т.е. для учета динамических свойств объекта).

Рассмотрим стандартную задачу определения собственных частот и форм колебаний объекта в рамках метода конечных элементов. Имеем обобщенную проблему собственных значений:

$$K\bar{\phi} = \lambda M\bar{\phi} \quad (4.1)$$

или тоже самое в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o \\ \bar{\phi}_a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & \tilde{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o \\ \bar{\phi}_a \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Следует пояснить, что через $\tilde{K}_{aa}$ и $\tilde{M}_{aa}$ аналогично предыдущему для наглядности обозначаются соответственно именно составляющая исходной матрицы жесткости и составляющая исходной матрицы масс, а никак не редуцированная матрица жесткости и не редуцированная матрица масс соответственно.

Следуя методу редуцирования Гайяна и используя соответственно соотношения (3.7), (3.8) и (4.1), получим:

$$K_{aa}\bar{\phi}_a = \lambda M_{aa}\bar{\phi}_a, \quad (4.3)$$

Необходимо отметить, что в силу использования формул метода редуцирования по Гайяну, частоты и формы собственных колебаний, соответствующие проблемам (4.1) и (4.3) не будут одинаковыми. Степень различия двух соответствующих решений зависит от степеней свободы тестовой модели.

Восстановление собственных форм колебаний исходной конечноэлементной системы в первом приближении может быть выполнено по формуле (см. соотношения (4.3), (3.6) и (3.7)):

$$\bar{\phi} = T_{Guyan}\bar{\phi}_a. \quad (4.4)$$

Основной особенностью IRS метода редуцирования является введение корректирующего члена при решении обобщенной проблемы собственных значений, аналогичного тому, что используется в методе редуцирования по Гайяну для статического расчета объекта. Соответствующий член, характеризующий влияние «инерционных сил», может быть построен на основе использования соотношений (3.2), (4.3) и (4.4):

$$K\bar{\phi} = \bar{P} = \tilde{\lambda} M\bar{\phi}, \quad (4.5)$$

Используя выкладки, аналогичные приведенным ранее при описании метода редуцирования по Гайяну, имеем следующее соотношение для динамического корректирующего члена:

$$\bar{\phi}^* = \tilde{\lambda} K^{-1} M T_{Guyan} \bar{\phi}_a, \quad (4.6)$$

Таким образом, уточненные собственные формы колебаний определяются следующим образом:

$$\bar{\phi} = T_{Guyan} \bar{\phi}_a + \tilde{\lambda} K^{-1} M T_{Guyan} \bar{\phi}_a. \quad (4.7)$$

Очевидно, что уравнение (4.3) может быть переписано в виде:

$$M_{aa}^{-1} K_{aa} \bar{\phi}_a = \lambda \bar{\phi}_a. \quad (4.8)$$

С учетом (4.8) можем переписать (4.7):

$$\bar{\phi} = T_{Guyan} \bar{\phi}_a + K^{-1} M T_{Guyan} M_{aa}^{-1} K_{aa} \bar{\phi}_a. \quad (4.9)$$

После переобозначений и несложных преобразований будем иметь следующую формулу для построения матрицы редуцирования в IRS методе:

$$T_{IRS} = \begin{bmatrix} G_{Guyan} + G_{IRS} \\ E \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка;

$$G_{Guyan} = -K_{oo}^{-1} K_{oa};$$

$$G_{IRS} = K_{oo}^{-1} (M_{oa} + M_{00} G_{Guyan}) M_{aa}^{-1} K_{aa} \bar{\phi}_a. \quad (4.11)$$

Матрица жесткости и матрица масс редуцируются в соответствии с тестовой моделью с использованием матрицы редуцирования (4.10) по следующим формулам:

$$K_{aa} = T_{IRS}^T K T_{IRS}; \quad M_{aa} = T_{IRS}^T M T_{IRS}. \quad (4.12)$$

5. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РЕДУЦИРОВАНИЯ

Еще одним усовершенствованием метода редуцирования по Гайяну является так называемый метод динамического редуцирования. Исходной постановкой в данном случае является обобщенная проблема собственных значений вида

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o^{(i)} \\ \bar{\phi}_a^{(i)} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & \tilde{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o^{(i)} \\ \bar{\phi}_a^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) может быть решено на основании подхода, аналогичного методу редуцирования по Гайяну, при этом строится матрица редуцирования, устанавливающая соответствие между редуцируемыми и нередуцируемыми степенями свободы. Вместе с тем, следует отметить, что такая матрица является индивидуальной для каждой собственной формы колебаний.

Альтернативный подход, предложенный М. Раз [16], заключается в использовании в (5.1) некоторой заданной (исследователем) величины Λ вместо соответствующего собственного значения. Матрица редуцирования в таком случае может быть сформирована посредством решения первого (из двух) матричных уравнений системы (5.1), т.е.

$$T_{Dyn Red} = \begin{bmatrix} -(K_{oo} - \Lambda M_{oo})^{-1} (K_{oa} - \Lambda M_{oa})^{-1} \\ E \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ

Разумеется, рассмотренные метод редуцирования по Гайяну, IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования и метод динамического редуцирования имеют как сильные, так и слабые стороны. Достаточно подробный анализ данного вопроса представлен, в частности, в [7,8]. Ниже дана соответствующая краткая характеристика каждого из рассмотренных методов.

Метод редуцирования по Гайяну. Основным преимуществом метода является вычислительная эффективность (с точки зрения объема вычислительной работы) и простота алгоритмической реализации. Данный метод входит в инструментарий стандартных средств многих универсальных и специализированных конечноэлементных программ

ных комплексов промышленного типа. Метод используется весьма продолжительное время, и получил заслуженное признание профессионального сообщества. В целом, метод является достаточно точным для большого количества объектов, однако, разумеется, при условии корректной установки сети акселерометров.

Основным недостатком метода является тот факт, что он не учитывает явные массовые эффекты редуцируемых степеней свободы. Это может повлечь за собой снижение точности в ситуациях когда число редуцируемых степеней свободы значительно, либо когда сеть акселерометров неудачно расположена, либо вообще непредставительна. Метод непригоден для использования при рассмотрении систем со значительным коэффициентом отношения массы к жесткости. В целом, метод является точным только в случае статических задач. Обобщение его на динамические задачи приводит к возникновению больших погрешностей вследствие полного пренебрежения инерционными силами во второстепенных степенях свободы. Метод используется в основном для исследования небольшого числа нижних тонов колебаний конструкций, так как только для них аппроксимация характера связи между главными и второстепенными степенями свободы, выраженная с помощью уравнений статики, близка к истинной [1].

IRS метод редуцирования. Метод несложен с точки зрения алгоритмической реализации, в том числе в составе универсальных и специализированных конечноэлементных программных комплексов промышленного типа [4,5]. В целом, метод точнее, чем метод редуцирования по Гайяну за счет введения поправки первого порядка, учитывающей массовые эффекты редуцируемых степеней свободы.

Тем не менее, метод может приводить к неточным результатам в случаях, когда формы колебаний редуцируемых степеней свободы (закрепленные при рассмотрении набора нередуцируемых степеней свободы) сближа-

ются с частотным диапазоном набора нередуцируемых степеней свободы [9]. Кроме того, очевидно, что для реализации метода требуются дополнительные вычислительные ресурсы. Метод все еще не столь широко используется как метод редуцирования по Гайяну, а если и используется, то с определенной настороженностью. Вместе с тем, разумеется имеется и положительный опыт апробации метода [21].

Метод динамического редуцирования. Основным преимуществом метода является явный учет массовых эффектов. Даже несмотря на то, что на исследователя возлагается задание значения для так называемого «эффективного собственного значения», следует подчеркнуть, что, по сути, любое такое сколь-либо обоснованное значение вероятно приводит к более эффективному процессу нежели использование метода редуцирования по Гайяну (в рамках которого полагается, что соответствующая величина собственного значения нулевая, вследствие чего массовые эффекты не учитываются при построении матрицы редуцирования).

Недостатки метода аналогичны недостаткам IRS метода редуцирования. Использование метода сопряжено со значительным объемом вычислительной работы и требует немалых усилий при внедрении в универсальные и специализированные конечноэлементные комплексы программ. Как уже отмечалось, исследователь должен задать величину «эффективного собственного значения», причем наилучшее решение этой задачи в общем случае весьма неочевидно. Ограничения по точности метода близки к соответствующим ограничениям для IRS метода редуцирования. Метод также все еще недостаточно широко используется в практических приложениях и требует особого внимания при применении.

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ

Матрица редуцирования (далее обобщенно обозначаемая T), построенная в каждом из рассмотренных выше методов, может использоваться для интерполяции («распространения») тестовых форм колебаний от мест установки акселерометров по всем степеням свободы конечноэлементной модели:

$$\bar{\phi} = T\bar{\phi}_a. \quad (7.1)$$

При проведении измерений очень часто возникает вопрос, что лучше: редуцировать матрицу масс и матрицу жесткости в соответствии со степенями свободы тестовой модели или же интерполировать формы колебаний по всем степеням свободы конечноэлементной модели. Если матрица редуцирования раз за разом используется для редуцирования и интерполяции, соответствующие численные результаты будут идентичными. В практических приложениях обычно более удобно проводить редукцию матрицы масс и матрицы жесткости до проведения измерений. С одной стороны это позволяет оценить адекватность сети акселерометров (в части соответствующих степеней свободы), а с другой стороны дает возможность значительно сократить объем хранимой на компьютере исследователя информации.

Следует отметить, что один из вариантов метода динамического редуцирования в ряде случаев оказывается исключительно эффективным для интерполирования форм. Верхняя половина формул (5.1) может быть переписана следующим образом:

$$\bar{\phi}_o^{(i)} = -(K_{oo} - \lambda_i M_{oo})^{-1} (K_{oa} - \lambda_i M_{oa}) \bar{\phi}_a^{(i)}. \quad (7.2)$$

Преимуществом такого подхода является непосредственное (явное) использование данных имеющихся измерений (частот и форм колебаний), а также матрицы масс и матрицы жесткости для конечноэлементной модели, что обеспечивает наилучшую оценку при ин-

терполировании тестовых форм колебаний по степеням свободы конечноэлементной модели. Данный метод может быть сопряжен со значительным объемом вычислений ввиду того, что выражение (6.2) должно быть вычислено для каждой формы колебаний. Вместе с тем, для многих практических приложений при наличии высокопроизводительной компьютерной техники такая проблема уже не является критичной. Метод динамического редуцирования для целого ряда задач позволил получить весьма качественную картину взаимно ортогональных результатов [3,6].

8. О СЕЙСМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОСНОВАННЫХ НА ТЕОРИИ МЕТОДА ПОДКОНСТРУКЦИЙ

8.1. Введение.

Как известно, подземные сооружения отличаются целый ряд характерных особенностей, среди которых, в частности, сложность возведения, высокая стоимость, продолжительный жизненный цикл и т.д. В случае разрушения таких объектов возникающие прямые и косвенные затраты будут существенно превышать аналогичные показатели для наземных сооружений [2,12,13,22]. Очевидно, что с учетом вышеизложенного сейсмический расчет подземных сооружений является исключительно важным этапом расчетного обоснования и проектирования безопасных и экономичных объектов.

По существу, в настоящее время существует два основных подхода к расчетному обоснованию подземных сооружений. Первый подход предусматривает динамический расчет связанной системы «сооружение – грунтовой массив», выполняемый, как правило, на основе метода конечных элементов (МКЭ) или метода конечных разностей (МКР). Важными этапами здесь является задание искусственных границ, динамические свой-

ства грунтов и ряд других вопросов, ограничивающих в силу сложности широкое применение подобного подхода в расчетной практике. Второй подход – это использование так называемых псевдостатических (квазистатических) методов [17-20], отличающихся относительной простотой и представляющих собой, по сути, статический анализ состояния подземного сооружения в условиях сейсмического воздействия (такой подход широко используется в инженерной практике и в нормативных документах ряда стран). Рассмотрим далее предложенный в [12] и применяемый для сейсмического расчета подземных сооружений так называемый статический метод конечных элементов, основанный на теории метода подконструкций, реализующий на определенном этапе значительное снижение вычислительной размерности исходной задачи.

8.2. Теоретические основы метода.

Динамическая связанная система «сооружение – грунтовый массив» может быть разделена на три подконструкции: подземное сооружение, ближняя зона грунтового массива и дальняя зона грунтового массива (рис. 8.1) [12].

С учетом характера декомпозиции системы «сооружение – грунтовый массив», представленной на рис. 1.1, можем записать следующие основные уравнения соответствующего контактного взаимодействия:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sn} \\ S_{ns} & S_{nn} & S_{nb} \\ & S_{bn} & S_{bb}^g + S_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_n \\ \bar{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^g \bar{u}_b^g \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

где S и $\bar{u}$ означают соответственно матрицу жесткости и вектор перемещений; нижние индексы s, n, b обозначают соответственно подземное сооружение, ближнюю зону грунтового массива и дальнюю зону грунтового массива; верхний индекс g обозначает извлеченный грунт.

Полагая, что извлеченный грунт – это конструкция, будем иметь следующее уравнение:

$$(S_{bb}^e + S_{bb}^g) \bar{u}_b^f = S_{bb}^g \bar{u}_b^g, \quad (8.2)$$

где верхние индексы e, f обозначают извлеченный грунт и свободное поле соответственно

С учетом (8.2) можем переписать (8.1) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sn} \\ S_{ns} & S_{nn} & S_{nb} \\ & S_{bn} & S_{bb}^g + S_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_n \\ \bar{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^e \bar{u}_b^f + S_{bb}^g \bar{u}_b^f \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

Динамическая матрица жесткости может быть определена следующим образом:

$$S = K + i\omega C - \omega^2 M, \quad (8.4)$$

где K, M, C обозначают соответственно матрицу жесткости, матрицу масс и матрицу демпфирования; ω – основная угловая (круговая) частота.

В целях упрощения можем переписать динамическую матрицу жесткости грунтового массива в (8.4) следующим образом [18,19]:

$$S_{bb}^g = K_{bb}^g + i\omega C_{bb}^g. \quad (8.5)$$

Для использования результатов определения сейсмического отклика свободного поля или результатов определения сейсмического отклика слоев грунта в целях определения сейсмического отклика подземного сооружения вводятся формулируемые ниже допущения.

Первое допущение: ускорения конструкции и ближней зоны грунтового массива такие же, как и у свободного поля в том же месте.

Второе допущение: скорости конструкции и ближней зоны грунтового массива такие же, как и у свободного поля в том же месте.

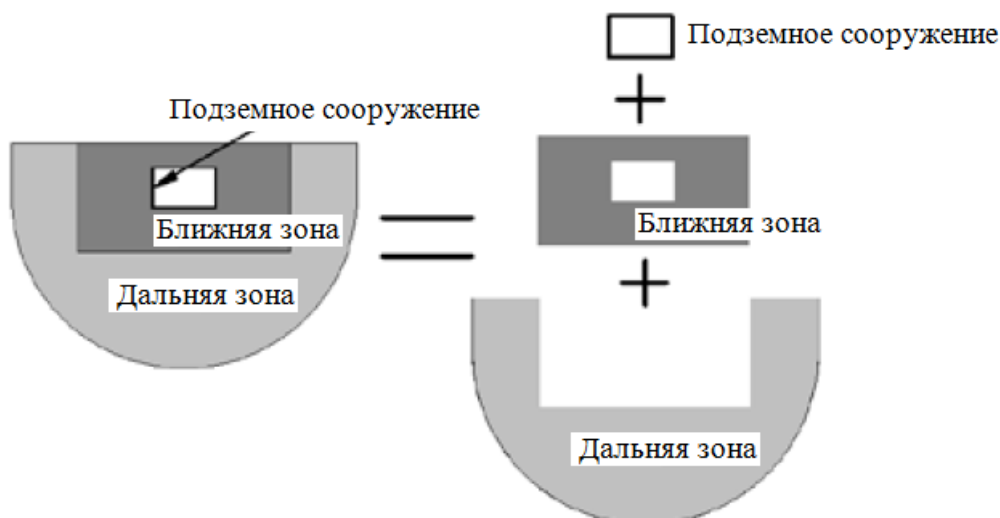


Рисунок 8.1. Выделение подконструкций в системе «сооружение – грунтовый массив».

Основной особенностью статического метода конечных элементов является то, что напряженное состояние с наибольшими внутренними усилиями в определенный момент времени в рамках динамического расчета подземного сооружения заменяется статическим расчетом, причем параметры этого расчета определяются с использованием метода деформаций свободного поля. Таким образом, оба введенных предположения призваны упростить использование результатов анализа сейсмического отклика свободного поля для приближенного нахождения сейсмического отклика подземного сооружения. Иными словами, сейсмический отклик подземного сооружения может быть найден на основе сейсмического отклика свободного поля.

Подставляя (8.4) и (8.5) в (8.3), с учетом допущений, получим (поясним, что левая часть уравнения (8.6) отражает реакцию связанной системы «сооружение – грунтовое основание», первое и второе слагаемое правой части, имеющие одинаковые знаки отражают внутренние усилия в подземном сооружении и ближней зоне грунтового массива (силы инерции, демпфирующие силы), третий член в правой части соответствует граничным условиям):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sn} & \\ K_{ns} & K_{nn} & K_{nb} \\ & K_{bn} & K_{bb}^g + K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s^f \\ \bar{u}_n^f \\ \bar{u}_b^f \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sn} & \\ M_{ns} & M_{nn} & M_{nb} \\ & M_{bn} & M_{bb}^g + M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{u}}_s^f \\ \ddot{\bar{u}}_n^f \\ \ddot{\bar{u}}_b^f \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sn} & \\ C_{ns} & C_{nn} & C_{nb} \\ & C_{bn} & C_{bb}^g + C_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_s^f \\ \dot{\bar{u}}_n^f \\ \dot{\bar{u}}_b^f \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{bb}^e \ddot{\bar{u}}_f^f + C_{bb}^e \dot{\bar{u}}_b^f + K_{bb}^e \bar{u}_b^f \end{bmatrix}. \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

8.3. Реализация метода.

На основании формулы (8.6) можем построить расчетную модель обобщенного статического метода конечных элементов, схематично показанную на рис. 8.2.

Здесь следует обратить внимание, что указанная модель включает две составляющие: внутренние усилия в сооружении и грунтовом массиве и граничные условия (граничные связи и граничные нагрузки).

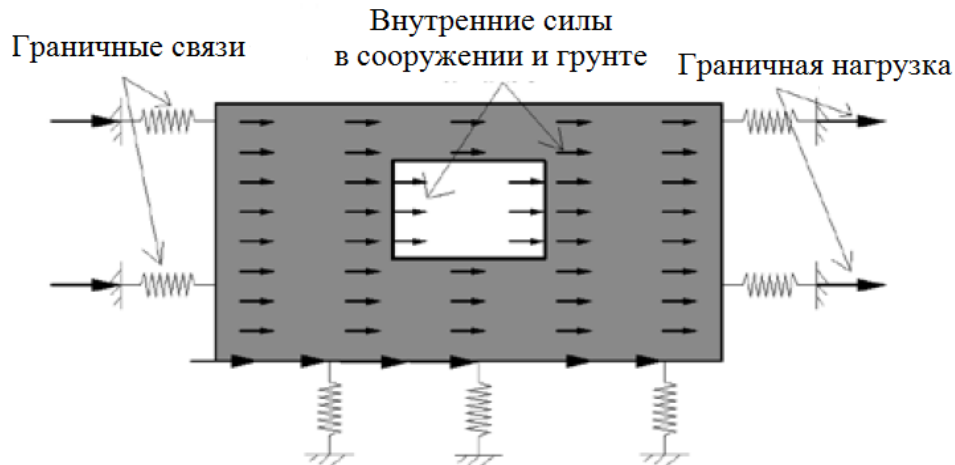


Рисунок 8.2. Обобщенная расчетная модель статического метода конечных элементов.

В соответствии с уравнением (8.6) внутренние усилия в сооружении и грунтовой массе включают, прежде всего, силы инерции и демпфирующие силы. Для решения задачи на данном этапе может быть использован метод ускорений отклика [14,17], однако боковые границы в виде закрепленных вертикальных роликовых опор и нижняя неподвижная закрепленная граница, используемые в рамках метода ускорений отклика, не могут отразить граничные условия, приведенные в (8.6). Таким образом, в [12] была предложена описанная ниже модификация граничных условий.

1. Граничные связи (K_{bb}^e).

Боковые и нижняя границы ограничены вязкоупругими границами. Используемые в рамках статического расчета граничные связи, наложенные пружинами, показаны на рис. 8.2. Значения коэффициентов отпора пружин согласуются с их жесткостью в рамках вязкоупругой границы [10] и определяются по формулам:

$$K_N = \frac{G}{2R}; \quad K_T = \frac{G}{R}, \quad (8.7)$$

где K_N и K_T – нормальный и тангенсальный коэффициенты отпора пружины; G – мо-

дуль сдвига; R – расстояние от подземного сооружения до точек границы.

2. Граничные нагрузки.

В соответствии с формулой (8.6) граничные нагрузки включают в себя следующие четыре составляющие: перемещения свободного поля $\bar{u}_b^f$, сила инерции на границе ближней зоны грунтового массива $M_{bb}^e \bar{u}_b^f$, демпфирующая сила ближней зоны грунтового массива $C_{bb}^e \bar{u}_b^f$ и эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля $K_{bb}^e \bar{u}_b^f$. Методы определения указанных нагрузок описаны ниже.

Перемещения свободного поля $\bar{u}_b^f$: перемещения свободного поля могут быть вычислены с помощью специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев (ProShake, EERA и др. [12]). Сила инерции на границе ближней зоны грунтового массива $M_{bb}^e \bar{u}_b^f$: ускорения свободного поля могут быть вычислены с помощью специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев, масса ближней зоны грунтового массива также может быть относительно легко найдена.



Рисунок 8.3. Расчетная модель статического метода конечных элементов.

Демпфирующая сила ближней зоны грунтового массива $C_{bb}^e \bar{u}_b^f$: на основе соотношения между демпфированием по Релею и коэффициентом демпфирования, граничная демпфирующая сила может быть получена по следующим формулам:

$$f_{ci} = c_i \dot{u}_i; \quad c_i = 2m_i w_i \xi_i; \quad \xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{w_i} + \alpha_1 w_i \right), \quad (8.8)$$

где f_{ci} – демпфирующая сила; c_i – коэффициент демпфирования; $\dot{u}_i$ – узловая скорость; m_i – назначенная узловая масса; w_i – частота; ξ_i – относительное демпфирование; α_0 и α_1 – два коэффициента демпфирования по Релею.

Эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля $K_{bb}^e \bar{u}_b^f$: нагрузка может соответствовать напряжениям в грунтовом массиве свободного поля в тех же самых местах (эти напряжения могут быть вычислены с привлечением специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев).

Таким образом, расчетная модель статического метода конечных элементов представлена на рис. 8.3.

На основании предыдущих рассуждений можно сформулировать следующие основные этапы статического метода конечных элементов.

1. Определение сдвиговых деформаций, ускорений, скоростей и перемещений для свободного поля в момент времени, когда относительное перемещение грунтового массива в зоне расположения подземного сооружения достигает максимального значения.
2. Определение силы инерции и параметров граничных условий (параметры пружин, сила инерции, демпфирующая сила, эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля).
3. Построение статической конечноэлементной модели, приложение нагрузок и связей, определенных на втором этапе в соответствии со схемой, показанной на рис. 8.3, последующее проведение статического расчета.

8.4. О верификации статического метода конечных элементов для решения задач сейсмического расчета подземных сооружений.

Результаты верификационных исследований статического метода конечных элементов для решения задач сейсмического расчета подземных сооружений, представленные в [12], показали хорошую согласованность с

результатами, найденными после проведения динамических конечноэлементных расчетов связанных систем «сооружение – грунтовый массив». Кроме того, было установлено, что статический метод конечных элементов в меньшей степени, чем традиционные псевдостатические методы, критически зависит от размера рассматриваемой области. Вместе с тем, боковая граница рассматриваемой области должна быть удалена от подземного сооружения на величину, составляющую более одной ширины подземного сооружения.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов», тема 7.1.2 «Разработка, верификация и апробация адаптивной методики численного моделирования трехмерных динамических задач аэрогидроупругости в строительстве».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Игнатьев В.А., Ромашкин В.Н.** Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций (Обзор). // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 2(38). www.vestnik.vgasu.ru.
2. **Akinola J.O.** Response Study of Underground Pipes Due to Varying Impact of Surface Accidental Explosions. // The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2012(17/A), pp. 113-124.
3. **Botos C.D., Flanigan C.** Improvement of the Centaur Modal Survey Test Correlation using Dynamic Expansion. // 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, February 3-6, 1997.
4. **Flanigan C.** Development of the IRS Component Dynamic Reduction Method for Substructure Analysis. // AIAA-91-1056, AIAA 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1991.
5. **Flanigan C.** Implementation of the IRS Dynamic Reduction Method in MSC/NASTRAN. // MSC/NASTRAN World Users Conference, Los Angeles, CA, 1990.
6. **Flanigan C., Freymiller J.** Using Dynamic Expansion to Improve Test Analysis Correlation. // 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, Hawaii, Jan. 31 -Feb. 3, 1994.
7. **Freed A.M., Flanigan C.C.** A Comparison of Test-Analysis Model Reduction Methods. // 8th International Modal Analysis Conference, January, 1990.
8. **Friswell M.I., Mottershead J.E.** Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995.
9. **Gordis J.H.** An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. // 10th International Modal Analysis Conference, 1992.
10. **Gu Y., Liu J.B., Du Y.X.** 3D Consistent Viscous-Spring Artificial Boundary and Viscous-Spring Boundary Element. // Engineering Mechanics, 2007, 24(12), pp. 31-37 (in Chinese).
11. **Guyan R.J.** Reduction of Stiffness and Mass Matrices. // AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, p. 380.

12. **Jia B., Li-ping J., Yong-qiang L.** Seismic Analysis of Underground Structures Based on the Static Finite Element Method. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, Vol. 21, Bund. 06, pp. 2307-2315.
13. **Kazuhiko K.** Seismic Design of Underground Structures. Japan, Kashima Publishing Company, 1994 (in Japanese).
14. **Liu J.B., Wang W.H., Zhang X.B.** et al. Research on Response Deformation Method in Seismic Analysis of Underground Structure. // *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, 32(1), pp. 161-167 (in Chinese).
15. **O'Callahan J.** A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model. // 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
16. **Paz M.** Dynamic Condensation. // *AIAA Journal*, 1984, pp. 724-727.
17. **Pezhman F., Soheil G.** A Numerical Study of Bearing Capacity Coefficients of Soil Beneath Foundation under Earthquake Load. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 17/A, pp. 13-22.
18. **Tateishi A.** A Study on Loading Method of Seismic Deformation Method. // *Journal of JSCE*, 1992, No. 441/I-18, pp. 157-166 (in Japanese).
19. **Tateishi A.** A Study on Seismic Analysis Methods in the Cross Section of Underground Structures Using Static Finite Element Method. // *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE*, 2005, 22(1), pp. 41-53.
20. The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. GB 50909-2014 code for seismic design of urban rail transit structures. Beijing: China Architecture and Building Press, 2014 (in Chinese).
21. **Tran M.K.** Evaluation of Reduced Model Concepts for the Ten Bay CSI Truss Modal Test. // 11th International Modal Analysis Conference, 1993.
22. **Wang J.N.** Seismic Design of Tunnels: A Simple State-of-the-art Design Approach. New York, Parsons Brinckerhoff Quade and Douglas Inc., 1993.
23. **Wolf J.P.** Dynamic Soil-structure Interaction. London, Prentice-Hall Inc., 1985.

REFERENCES

1. **Ignatiev V.A., Romashkin V.N.** Algebraicheskaja Problema Sobstvennyh Vektorov i Sobstvennyh Znachenij Vysokogo Porjadka v Zadachah Dinamiki i Ustojchivosti Konstrukcij (Obzor) [Algebraic Problem of Eigenvectors and Eigenvalues of High Order in Problems of Dynamics and Stability of Structures (Review)]. // *Internet-vestnik VolgGASU*. 2015. Vyp. 2(38). www.vestnik.vgasu.ru.
2. **Akinola J.O.** Response Study of Underground Pipes Due to Varying Impact of Surface Accidental Explosions. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2012(17/A), pp. 113-124.
3. **Botos C.D., Flanigan C.** Improvement of the Centaur Modal Survey Test Correlation using Dynamic Expansion. // 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, February 3-6, 1997.
4. **Flanigan C.** Development of the IRS Component Dynamic Reduction Method for Substructure Analysis. // AIAA-91-1056, AIAA 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1991.
5. **Flanigan C.** Implementation of the IRS Dynamic Reduction Method in MSC/NASTRAN. // MSC/NASTRAN World Users Conference, Los Angeles, CA, 1990.
6. **Flanigan C., Freymiller J.** Using Dynamic Expansion to Improve Test Analysis Correlation. // 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, Hawaii, Jan. 31 - Feb. 3, 1994.
7. **Freed A.M., Flanigan C.C.** A Comparison of Test-Analysis Model Reduction Meth-

- ods. // 8th International Modal Analysis Conference, January, 1990.
8. **Friswell M.I., Mottershead J.E.** Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995.
9. **Gordis J.H.** An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. // 10th International Modal Analysis Conference, 1992.
10. **Gu Y., Liu J.B., Du Y.X.** 3D Consistent Viscous-Spring Artificial Boundary and Viscous-Spring Boundary Element. // Engineering Mechanics, 2007, 24(12), pp. 31-37 (in Chinese).
11. **Guyan R.J.** Reduction of Stiffness and Mass Matrices. // AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, p. 380.
12. **Jia B., Li-ping J., Yong-qiang L.** Seismic Analysis of Underground Structures Based on the Static Finite Element Method. // The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2016, Vol. 21, Bund. 06, pp. 2307-2315.
13. **Kazuhiko K.** Seismic Design of Underground Structures. Japan, Kashima Publishing Company, 1994 (in Japanese).
14. **Liu J.B., Wang W.H., Zhang X.B.** et al. Research on Response Deformation Method in Seismic Analysis of Underground Structure. // Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(1), pp. 161-167 (in Chinese).
15. **O'Callahan J.** A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model. // 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
16. **Paz M.** Dynamic Condensation. // AIAA Journal, 1984, pp. 724-727.
17. **Pezhman F, Soheil G.** A Numerical Study of Bearing Capacity Coefficients of Soil Beneath Foundation under Earthquake Load. // The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 17/A, pp. 13-22.
18. **Tateishi A.** A Study on Loading Method of Seismic Deformation Method. // Journal of JSCE, 1992, No. 441/I-18, pp. 157-166 (in Japanese).
19. **Tateishi A.** A Study on Seismic Analysis Methods in the Cross Section of Underground Structures Using Static Finite Element Method. // Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE, 2005, 22(1), pp. 41-53.
20. The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. GB 50909-2014 code for seismic design of urban rail transit structures. Beijing: China Architecture and Building Press, 2014 (in Chinese).
21. **Tran M.K.** Evaluation of Reduced Model Concepts for the Ten Bay CSI Truss Modal Test. // 11th International Modal Analysis Conference, 1993.
22. **Wang J.N.** Seismic Design of Tunnels: A Simple State-of-the-art Design Approach. New York, Parsons Brinckerhoff Quade and Douglas Inc., 1993.
23. **Wolf J.P.** Dynamic Soil-structure Interaction. London, Prentice-Hall Inc., 1985.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения», Российский университет транспорта (МИИТ); профессор кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

О современных методах редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов

Дмитриев Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер-расчетчик Отдела расчетных исследований, ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Director of StaDyO Research & Engineering Center; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – MIIT); Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; office 810, 18, 3-ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Dmitry S. Dmitriev, Engineer, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 18, 3-ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ГРУНТОВЫХ МАССИВОВ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

А.С. Городецкий¹, А.В. Пикуль^{1,2}, Б.Ю. Писаревский¹

¹ООО «ЛИРА САПР», г. Киев, УКРАИНА

²Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: В статье рассматривается проблема анализа динамического взаимодействия «сооружение – грунт», а также моделирование безграничного грунтового полупространства. Описана методика новых конечных элементов, разработанных в ПК ЛИРА-САПР, моделирующих взаимодействие ограниченной части грунтового массива и остальной части полупространства. В основе данного элемента лежит метод масштабирования границы конечного элемента. Для верификации элементов решены две задачи. В первой задаче рассматривается ограниченный грунтовый массив с введением разработанных конечных элементов. Во второй задаче рассматриваются достаточно большой грунтовый массив, размеры которого обеспечивают отсутствие влияния граничных условий на прохождение волны (условно можно считать бесконечным полупространством). Разница в результатах составила 3 – 8%.

Ключевые слова: анализ динамического взаимодействия «сооружение – грунт», распространение волн в безграничной области, безграничная область, метод масштабирования границы конечного элемента

MODELLING OF SOIL BEHAVIOR IN DYNAMIC LOAD

Alexander S. Gorodetsky¹, Anatol V. Pikul^{1,2}, Bogdan Y. Pysarevskiy¹

¹“LIRA SAPR” Ltd, Kiev, UKRAINE

²Kiev National University of Construction and Architecture, Kiev, UKRAINE

Abstract: The paper focuses on simulation of dynamic “structure – soil” interaction and unbounded soil half-space. Principles for new finite elements developed in LIRA-SAPR software are described. These finite elements simulate the interaction between bounded domain of soil and the rest part of the half-space. The scaled boundary finite-element method governs these elements. To verify the elements, two problems are solved. The first problem considers the bounded soil where the developed boundary finite elements are introduced. The second problem considers the soil of a relatively large size. Boundary conditions do not influence the wave propagation (conditionally may be treated as unbounded half-space) due to dimensions of soil size. Results differ by 3-8%.

Keywords: dynamic interaction “structure – soil”, wave propagation in unbounded area, unbounded area, scaled boundary finite-element method

Практически все инженерные сооружения расположены на грунтовом основании. Расчет системы «надземное сооружение – фундаментные конструкции – грунтовое основание» становится нормой. Здесь можно выделить два класса задач со слабовыраженным размежеванием.

К первому классу можно отнести задачи, когда инженера интересует только НДС надземной конструкции. В этом случае влияние грунтового массива, как правило, моде-

лируется введение в расчетную схему коэффициентов постели.

Ко второму классу относятся задачи, где инженера в одинаковой мере интересует как НДС собственно конструкции, так и НДС грунтового массива. Этот класс задач очень широк, разнообразен и относится к числу наиболее сложных для расчета. В компьютерных моделях задач этого класса присутствует конечно-элементная модель грунтового

го массива. По сути, грунтовый массив – это полупространство.

Так как численное решение задач на основе МКЭ предусматривает рассмотрение ограниченной конечной области, то всегда возникает вопрос, как ограничить бесконечное полупространство грунтового массива. Если снизу на обозримом расстоянии имеется слой грунта, имеющий модель деформации (например, скала), значительно превышающий модуль вышележащих слоев, то вопрос об ограничении грунтового массива снизу решается сам собой. В противном случае, а также для ограничения грунтового массива с боковых сторон можно воспользоваться рекомендациями СП 22.13330.2011. «Основания зданий и сооружений» об определении величины сжимаемой толщи.

Здесь можно поступить следующим образом: определить по СП максимальную величину сжимаемой толщи $H_{\max}$ и назначить границы грунтового массива так, чтобы минимальное

расстояние от любой точки границы до ближайшего узла рассчитываемой конструкции было не меньше $H_{\max}$ сжимаемой толщи. Тип граничных условий в узлах конечно-элементной модели грунтового массива на его границе при статической нагрузке может быть принят в виде податливых связей [1, 2]. В случае динамических воздействий тип граничных условий должен обеспечивать гашение или прохождение волн. Идеи по построению таких условий рассматривались в [3, 4, 5, 6].

Метод SBFEM был предложен Джоном Вульфом [6]. В основе данного метода лежит переход от декартовой системы координат X, Y (в плоской задаче) к изопериметрическим координатам ξ, η (рис.1). Геометрия области описывается масштабированием границы безразмерной радиальной координатой ξ , которая начинается из центра масштабирования (точки O) до точки на границе. $\xi = 0$ в точке O и $\xi = 1$ на границе.

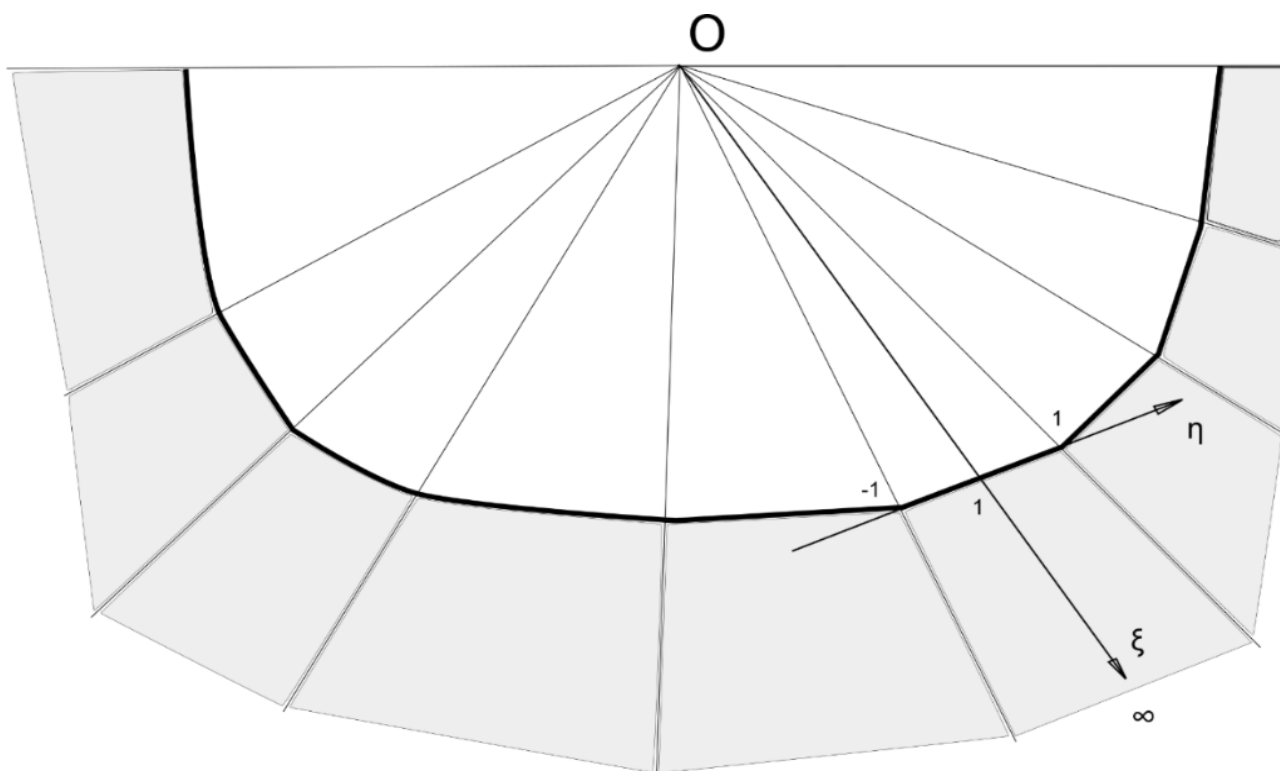


Рисунок 1. Изопериметрические координаты ξ, η .

Вдоль радиальной линии, проведенной от точки O к узлу на границе, вводится функция

узловых перемещений и записывается уравнение перемещений.

$$\begin{aligned}
 & [E^0] \xi^2 \{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + ([E^0] - [E^1] + \\
 & + [E^1]^T) \xi \{u(\xi)\}_{,\xi} - \\
 & - [E^2] \{u(\xi)\} + \omega^2 [M^0] \xi^2 \{u(\xi)\} = 0,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где $[E^0], [E^1], [E^2]$ и $[M^0]$ матрицы коэффициентов.

Существуют два основных метода динамического анализа взаимодействия грунта и конструкции. Прямой метод – самый простой способ для анализа. Что бы учесть бесконечность с достаточной точностью, неограниченную область отсекают достаточно

далеко от сооружения и накладывают приближенные граничные условия. Это приводит к увеличению количества степеней свободы, особенно в трехмерной задаче. Метод подсистем (рис. 2) является более точным по сравнению с прямым методом, поэтому моделируемая область может быть меньше, чем для прямого метода. В данном методе, как правило, точные граничные условия выражаются в матрице динамической жесткости $[S(t)^\infty]$.

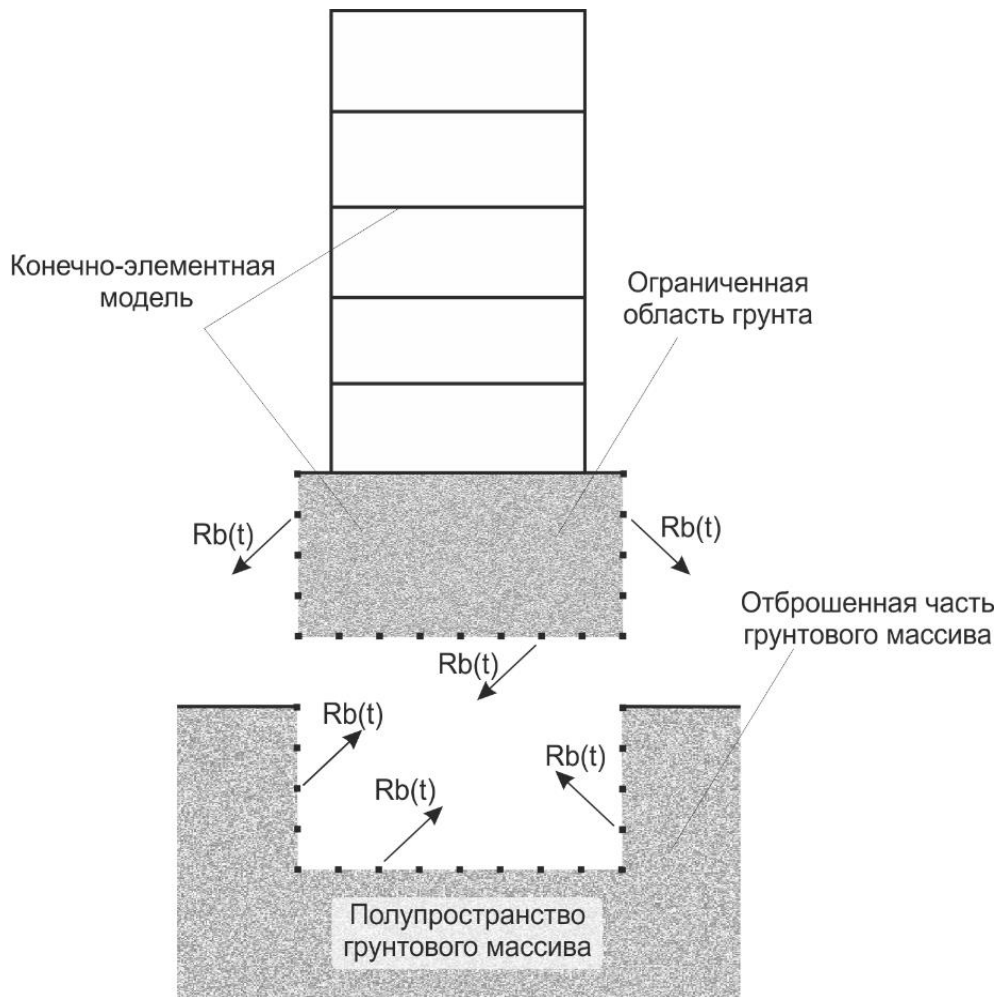


Рисунок 2. Взаимодействие отброшенной и ограниченной части грунтового массива.

Соединение между двумя частями грунтового массива обеспечивается вектором взаимодействия

$$\{R_b(t)\} = \int_0^t [M^\infty(\tau)] \{\dot{u}(t-\tau)\} d\tau, \quad (2)$$

где $[M^\infty(\tau)]$ – матрица отклика ускорений, которая определяется как

$$\begin{aligned} & \int_0^t [m^\infty(\tau - t)][m^\infty(\tau)]d\tau + \\ & + t \int_0^t [m^\infty(\tau)]d\tau + [e^1] \int_0^t \int_0^\tau [m^\infty(\tau)]dtd\tau \\ & + [e^1]^T \int_0^t \int_0^\tau [m^\infty(\tau)]dtd\tau - \\ & - \frac{t^3}{6} [e^2]H(t) - t[m^0]H(t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[m^\infty(\tau)]$ матрица отклика ускорений в преобразованных координатах; $[e^1], [e^2]$ и $[m^0]$ матрицы коэффициентов; $H(t)$ – функция Хевисайда.

На основании зависимостей (2, 3) в ПК ЛИ-РА-САПР реализованы элементы, моделирующие взаимодействие ограниченной части грунтового массива и остальной части полупространства: двух узловой для решения плоской задачи, трех- и четырехузловой для

решения пространственных задач. Для верификации такого элемента рассмотрим две задачи (рис. 3). В первой (рис. 3а) задаче рассматривается ограниченный грунтовый массив с введением на границе разработанных граничных конечных элементов. Во второй задаче (рис. 3б) рассмотрим достаточно большой грунтовый массив, размеры которого обеспечивают отсутствие влияния граничных условий на прохождение волны (условно можно считать бесконечным полупространством). В обеих задачах расчет производился на одинаковое динамическое воздействие $P(t) = P_0 \sin(\omega t) = 1975 \sin(20t)$.

На рис. 4 и 5 показаны графики перемещений во времени узла А.

Из графиков видно, что перемещение узла А в период воздействия возмущающей нагрузки практически совпадают.

Также сравним результаты перемещений узлов, лежащих на оси Х на глубине 1 метр и времени 0,75 секунды, а также на глубине 8 метров и времени 1,5 секунды. Графики начинаются относительно оси симметрии.

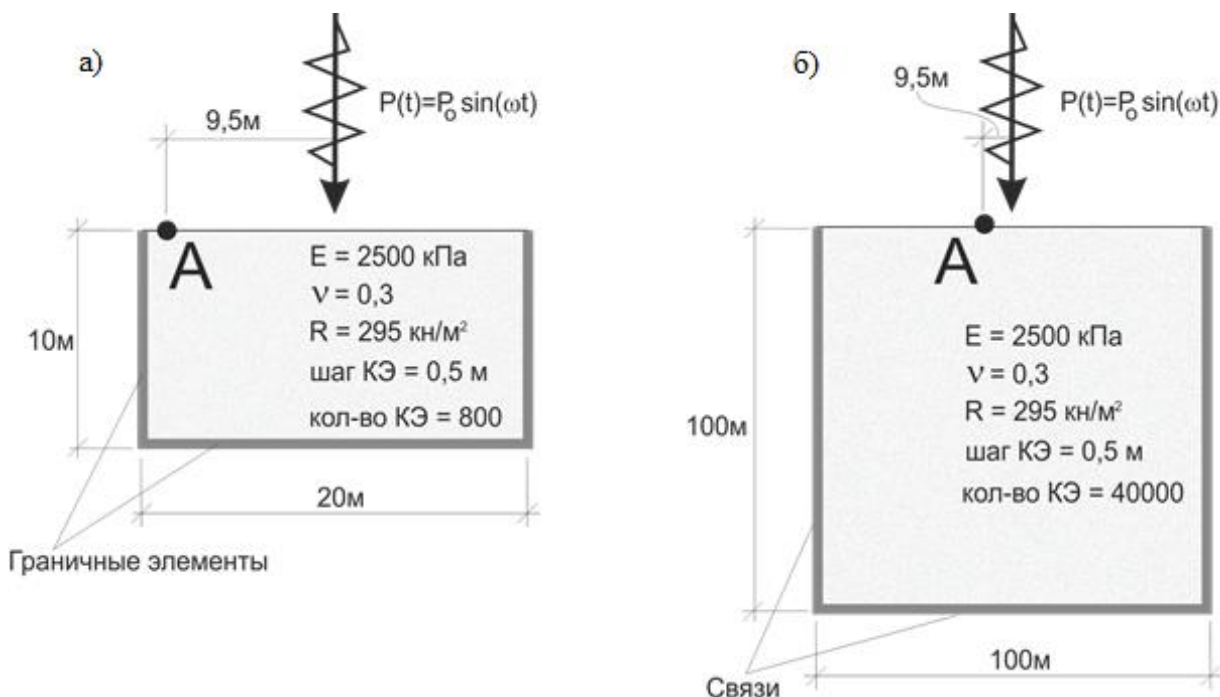


Рисунок 3. Верификация разработанного граничного элемента
(а) ограниченная часть грунтового массива (б) достаточно большой массив грунта.

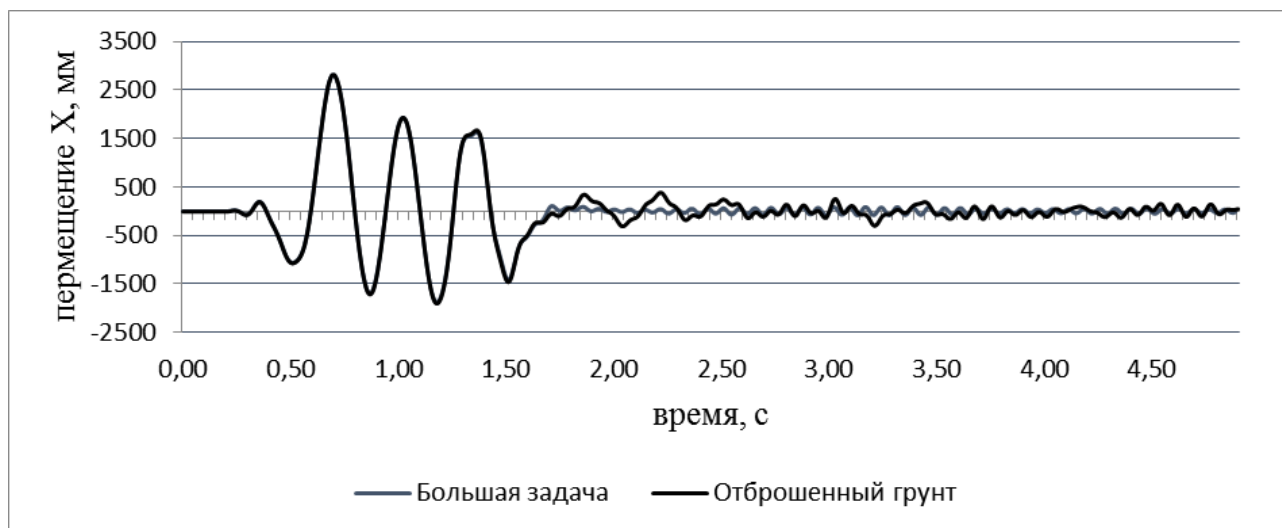


Рисунок 4. График перемещений $X(t)$ в узле А.

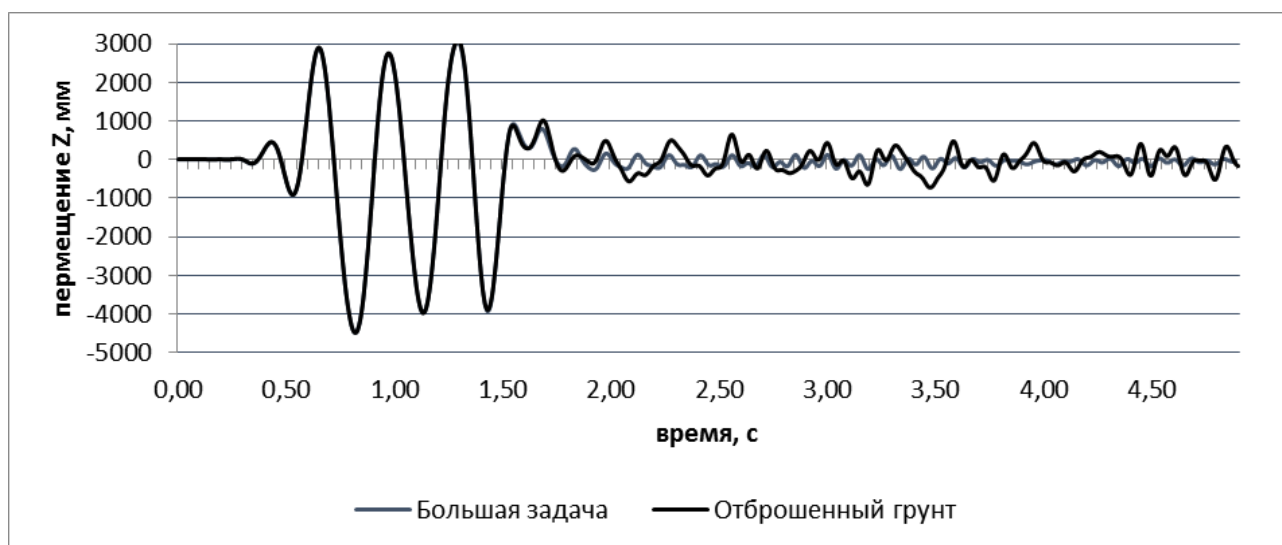


Рисунок 5. График перемещений $Z(t)$ в узле А.

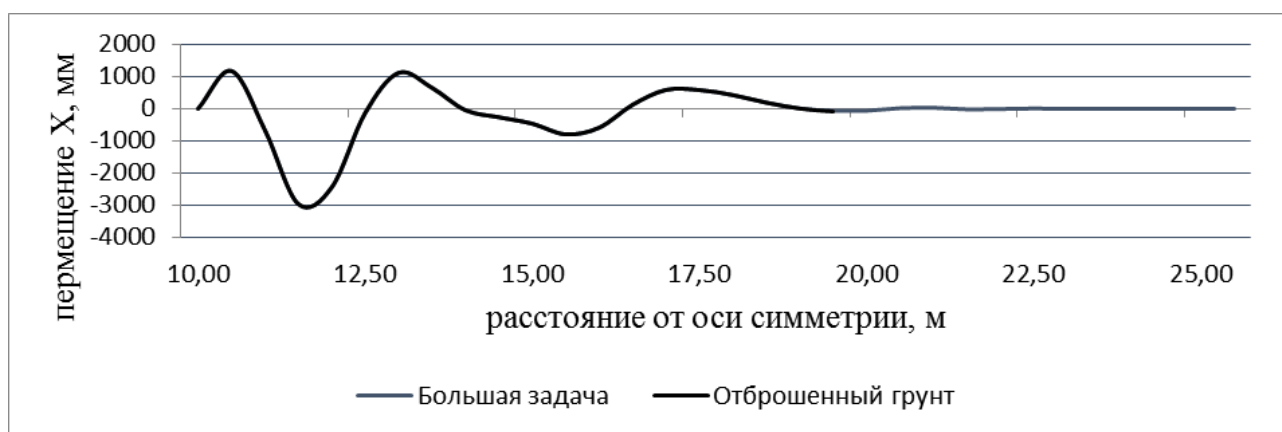


Рисунок 6. График перемещений X на глубине 1 метр в момент времени 0,75с.



Рисунок 7. График перемещений Z на глубине 1 метр в момент времени 0,75.

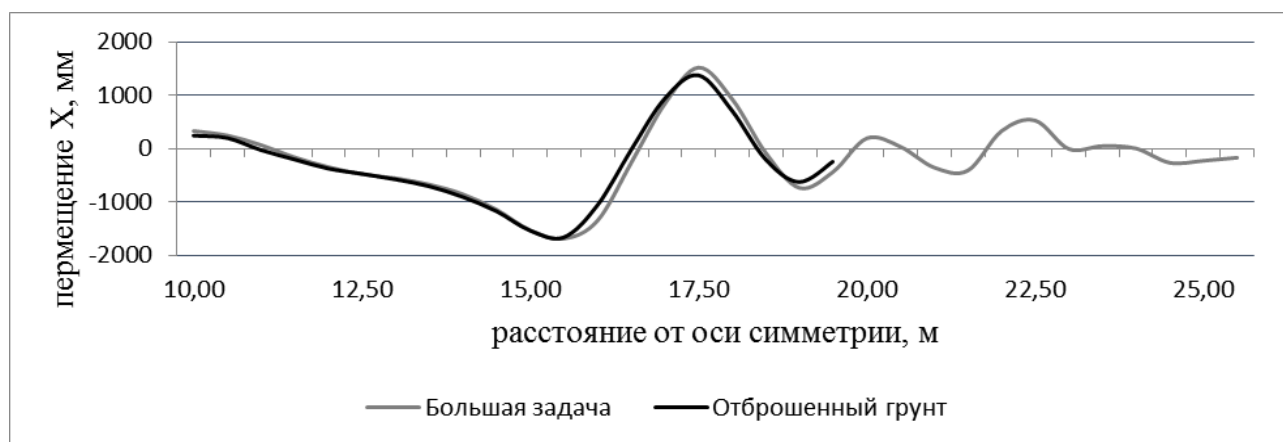


Рисунок 8. График перемещений X на глубине 8 метров в момент времени 1,5с.

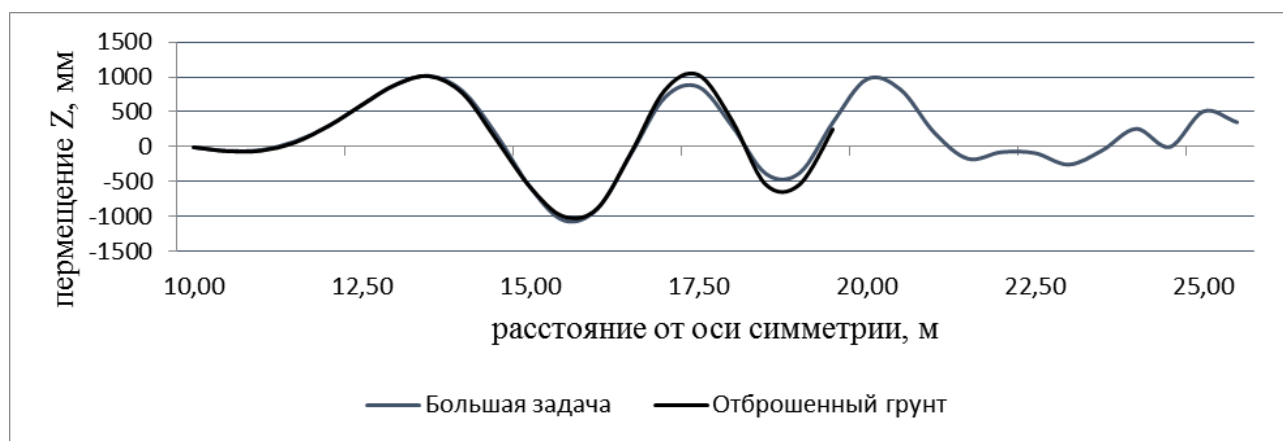


Рисунок 9. График перемещений Z на глубине 8 метров в момент времени 1,5с.

Сравнивая графики перемещений видим, что они практически совпадают. Разница в результатах составила 3 - 8%.

ВЫВОДЫ

Разработанные граничные конечные элементы позволяют моделировать полупростран-

ство грунтового массива на основе расчетных схем ограниченной размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сливкер В. И.** К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений, 1981, №1, с. 75-87.
2. **Здоренко В.С., Городецкий А.С., Елсукова В.И., Сливкер В.И.** Применение метода конечных элементов к расчету конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели. // Сопротивление материалов и теория сооружений, Вып. 27, Киев, Будівельник, 1975, с. 180-192.
3. **Бирбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость. – СПб.: Наука, 1998. – 255 с.
4. **Пикуль А.В., Барабаш М.С.** Проблемы моделирования динамических влияний. Реализация в ПК ЛИРА-САПР. // Збірка тез доповідей міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 90-річчю з дня народження професора В.К. Єгупова «Проблеми теорії і практики сейсмостійкого будівництва». – Одеса: ОДАБА, 2016. – 124 с.
5. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
6. **John P. Wolf.** The Scaled Boundary Finite Element Method. John Wiley and Sons, Chichester, England, 2003, 364 p.
2. **Zdorenko V.S., Gorodetsky A.S., El-sukova V.I., Slivker V.I.** Primenenie Metoda Konechnyh Jelementov k Raschetu Konstrukcij na Uprugom Osnovanii s Dvumja Kojefficientami Posteli [Application of the Finite Element Method to Analysis of Structures on Two-Parameter Elastic Foundation]. // Soprotivlenie materialov i teorija sooruzhenij, Vol. 27, Kiev, Budivel'nik, 1975, pp. 180-192.
3. **Birbraer A.N.** Raschet Konstrukcij na Sejsmostojkost' [Seismic Analysis of Structures]. Saint-Petersburg, Nauka, 1998, 255 pages.
4. **Pikul A.V., Barabash M.S.** Problemy Modelirovanija Dinamicheskikh Vozdejstvij. Realizacija v PK LIRA-SAPR [Problems of Modelling of Dynamic Impacts. Realization in Program System LIRA-SAPR]. Sbornik tezisov dokladov mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii, posvjashhennoj 90-letiju so dnja rozhdenija professora V.K. Egupov "Problemy teorii i praktiki sejsmostojkogo stroitel'stva", Odessa, ODABA, 2016, 124 pages.
5. **Bate K., Wilson E.** Chislennye Metody Analiza i Metod Konechnyh Jelementov [Numerical Methods of Analysis. Finite Element Method]. Moscow, 1982, 448 pages.
6. **John P. Wolf.** The Scaled Boundary Finite Element Method. John Wiley and Sons, Chichester, England, 2003, 364 p.

REFERENCES

1. **Slivker V.I.** K Voprosu o Naznachenii Harakteristik Dvuhparametrovogo Uprugogo Osnovanija [About Assignment of Parameters of Two-parameter Elastic Foundation]. // Stroitel'naja Mehanika i Raschet Sooruzhenij, 1981, No. 1, pp. 75-87.

Городецкий Александр Сергеевич, иностранный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе ООО «ЛИРА САПР», Украина, 04053 Киев, Кияновский переулок 7-а, тел.: +38 (050) 351 96 61; e-mail: info@liraland.com.ua

Пикуль Анатолий Владимирович, инженер-аналитик ООО «ЛИРА САПР», ассистент кафедры металлических и деревянных конструкций Киевского национального университета строительства и архитектуры, 03037, Украина, г. Киев, Воздухофлотский проспект, 31; тел: +38(097)217-68-79 e-mail: Anatol.Pikul@gmail.com <http://orcid.org/0000-0002-1516-8266>

Писаревский Богдан Юрьевич, инженер-программист
компании ООО «ЛИРА САПР», 04053, Украина, Киев,
пер. Кияновский, д.7-а,
тел./факс: +38 (044) 590 58 85,
e-mail: mikst1234@gmail.com

Alexander S. Gorodetsky, Foreign Member of the Russian
Academy of Architecture and Construction Sciences,
DSc, Professor, Deputy Director for Science of «LIRA
SAPR» Ltd, 7a, Kiyanovsky side street (pereulok), Kiev,
04053, Ukraine, phone: +38 (050) 351 96 61;
e-mail: info@liraland.com.ua

Anatol V. Pikul, Engineer-Analyst of «LIRA SAPR» Ltd,
assistant of Department of Metal and Wood Structures at
Kyiv National University of Construction and Archi-
tekture, 31, Povitroflotsky Avenue, Kyiv, 03037, Ukraine;
phone:+38(097)217-68-79;
e-mail: Anatol.Pikul@gmail.com
<http://orcid.org/0000-0002-1516-8266>

Bogdan Y. Pysarevskiy, software engineer «LIRA
SAPR» Ltd, 7a, Kiyanovsky side street (pereulok), Kiev,
04053, Ukraine; phone/fax: +38 (044) 590 58 85,
e-mail: mikst1234@gmail.com

DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ АВТОМАТИЗАЦИЯ ИНЖЕНЕРНОГО ОБСЛЕДОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков, И.Л. Тонков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

Аннотация: Инженерному обследованию строительных объектов присущи неклассические ситуации в постановке задач. Это связано с плохой формализуемостью сложной строительной системы, нестандартностью, противоречивостью описания ситуации, подчас сложностью точного измерения контролируемых величин, неточностью исполнительских действий и т.п. Т.е. принятие решения о техническом состоянии связано с решением задачи при весьма нечетких исходных данных, приблизительными «лингвистическими» характеристиками входных параметров (например, дефектов конструкции) и с нечеткостью формулировок категорий технического состояния. А поскольку в процесс подготовки решений включается человек, он не может не разбавить этот процесс заметной долей субъективности. Внедрение интеллектуальной автоматизации в виде экспертных систем в оценку технического состояния конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений, построенных на базе знаний в результате обобщения экспертных оценок, представляет собой переход на новый более качественный и экономически эффективный технологический уровень обследования строительных объектов. Возможно уже в ближайшем будущем, продукты интеллектуализации этапов инженерного обследования и мониторинга строительных объектов будут обязательными инструментами этой сферы деятельности, как неотъемлемая часть гарантии достоверности выдаваемых результатов.

Ключевые слова: строительная конструкция, категория технического состояния, интеллектуальная автоматизация, экспертная система.

INTELLECTUAL AUTOMATION OF ENGINEERING SURVEY OF BUILDING OBJECTS

Galina G. Kashevarova, Yuri L. Tonkov, Igor L. Tonkov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: The engineering survey of construction objects is characterized by nonclassical situations in setting tasks. The reasons for this are poor formalizability, complexity of the construction system, non-standard, contradictory description of the situation, the difficulty of accurately measuring controlled quantities, inaccurate performance, etc. Thus, the decision on the technical condition is associated with the solution of the problem with fuzzy initial data, approximate "linguistic" characteristics of the input parameters (for example, structural defects) and with the vagueness of formulations of categories of technical condition. Due to the fact that a person is included in the process of preparing decisions, he can not help but dilute this process with a noticeable share of subjectivity. The introduction of intelligent automation in the form of expert systems in assessing the technical condition of the structures of operated buildings and structures built on the basis of knowledge as a result of summarizing expert assessments represents a transition to a new, higher-quality and cost-effective technological level for survey of construction sites. Perhaps already in the near future, the products of intellectualization of the stages of engineering survey and monitoring of construction sites will be mandatory tools of this field of activity, as an integral part of guaranteeing the reliability of the issued results.

Keywords: Construction structure, category of technical condition, intellectual automation, expert system

ВВЕДЕНИЕ

Инженерному обследованию строительных объектов присущи неклассические ситуации в постановке задач. Это плохая формализуемость, нестандартность, противоречивость. С успехом такие проблемы могут решаться с помощью экспертных систем. Речь не идет о замене эксперта в его непосредственной деятельности, но экспертные системы способны расширить и усилить его профессиональные возможности.

Нами сформирована концепция совершенствования технологии принятия решений в инженерном обследовании эксплуатируемых зданий и сооружений (рис. 1). Она предусматривает введение дополнительного технологического уровня, включающего использование компьютерных средств обработки данных в виде интегрированной интеллектуальной высокотехнологичной системы.

Эта интегрированная система включает в себя несколько экспертных систем, способных работать как в отдельности, и как единое целое (рис. 2). При создании таких экспертных систем используются принципы и методы искусственного интеллекта.

Объектом управления такой интегрированной системы является *аналитический процесс* каждого этапа инженерного обследования строительного объекта. Активный элемент системы – человек, принимающий решения.

В настоящее время нами создана экспертная система определения категории технического состояния конструкций, некоторые принципы создания, диалога с пользователем и оформления результатов решений которой представлены в данной работе. Ведется разработка экспертной системы для обработки результатов лазерного сканирования, подключаемых к процессу обследования.



Рисунок 1. Связь ресурсов в технологии решения задач диагностики эксплуатируемых строительных объектов: А – существующий технологический уровень, Б – дополнительный концептуальный технологический уровень.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАЗРАБОТКИ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ОЦЕНКИ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

При обследовании любого строительного объекта *категория технического состояния* является главным критерием в принятии решения о степени аварийности или необходимости проведения мероприятий по приведению строительного объекта к дальнейшей безопасной эксплуатации. Экспертное заключение о техническом состоянии строительных конструкций требует глубоких высокоспециализированных, знаний в области строительства, и во многом зависит от опыта эксперта. «Переход» конструкции или строительного объекта из одного технического состояния в другое происходит не «скачкообразно», а через множество состояний, границы между которыми трудно распознаваемы. Сложная структура конструкций, многофакторность, неполная, иногда недостоверная и противоречивая информация, весьма короткая шкала [1], размытость границ между ними, увеличивает нежелательную «субъективность» эксперта и искажает выработку решений [2].



Рисунок 2. Структура интегрированной интеллектуальной системы инженерного обследования.

Специалисты-практики в сфере инженерного обследования строительных объектов, не имея четко определенной структуры решений поставленных задач, в первую очередь принимают во внимание объективные критерии, с которыми сопоставляют техническое состояние конструкции. При назначении категорий технического состояния они идут по пути заведомой перестраховки, что приводит к необоснованным затратам значительных средств на выполнение нерациональных или ненужных усилений, и часто упускают из вида опасные значения контролируемых параметров.

В процессе своей профессиональной деятельности мы часто сталкиваемся с техническими отчетами по результатам инженерного обследования, выполненными, очевидно, неопытными исполнителями. Решения, принятые на основании недостаточных знаний и опыта обследования, могут быть ошибочны и даже привести к ухудшению состояния конструкции [3]. Определенный вклад в это явление вносит то, что текущие нормативные стандарты содержат предписывающий

характер и малое число указаний относительно цели. И это далеко не полный перечень причин, придающих актуальность созданию экспертной системы оценки технического состояния [4].

РОЛЬ РЕПРЕЗЕНТАЦИИ ИНФОРМАЦИИ, ОНТОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И АППАРАТА ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В ПОСТРОЕНИИ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ

Архитектура экспертных систем [5] (рис. 3) с точки зрения входящих в нее программных модулей, является типовой для большинства проектов. Эти модули могут быть по-разному реализованы, но их состав и взаимодействие имеют четкое назначение. Поэтому при создании конкретной экспертной системы основные усилия сконцентрированы на создании специализированной **базы знаний**, а именно, на выборе моделей пред-

ставления знаний и **решателя (способов вывода решений)**

База знаний (БЗ) - основа любой экспертной системы. Знания – это сочетание теоретического понимания проблемы и эмпирических правил (эвристек) для ее решения.

Источниками знаний в технической диагностике конструкций зданий и сооружений при проектировании экспертной системы является обширная база практических и теоретических исследований, как отдельных авторов, так и научных коллективов [6-16].

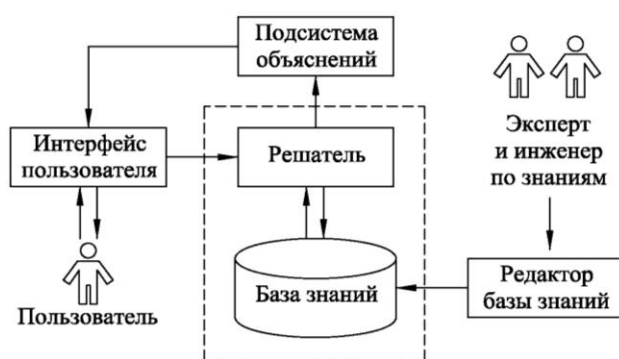


Рисунок 3. Архитектура экспертной системы.

Человек способен принимать решения в условиях неполной или нечеткой информации. Раскрытие и моделирование механизмов памяти человека - эксперта, обеспечивающих хранение огромного объема информации, приобретаемой в течение жизни, а также быстрое и точное воспроизведение необходимой информации при проведении обследования строительного объекта имеет большое практическое значение для построения ЭС.

Именно в этом контексте мы сталкиваемся с понятием «репрезентация информации» в памяти человека. Репрезентация – это представление познаваемого явления с помощью: символов, моделей, в том числе языковых, логических и математических. Естественные и искусственные языки – главные посредники, репрезентанты

Эндель Тульвинг, исследовавший проблемы памяти, выделил три основных вида памяти: эпизодическую, семантическую и процедурную [17]. Эпизодическая память хранит информацию о датированных во времени эпизодах или событиях. Семантическая память – это умственный тезаурус, который организует знания человека. Процедурная – низшая форма памяти сохраняет связи между стимулами и реакцией. Ее можно сравнить с тем, что называют ассоциативной памятью.

При построении БЗ ЭС особое внимание уделяется репрезентации семантических отношений, как предписанию о выполнении определенных операций, реализация которых позволяет проверять наличие того или иного отношения.

Согласно репрезентации семантических отношений, в данной работе сделано предположение, что знания о техническом состоянии конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений имеют две формы хранения в памяти опытного инженера-обследователя – декларативную и процессуальную [18].

Декларативная форма основана на предположении, что семантические отношения хранятся подобно понятиям, непосредственно в виде декларативной информации.

Фрагментарность и разрозненность декларативных знаний – одна из основных сложностей в оценке технического состояния строительной конструкции.

Процессуальной формой называют рассмотрение знаний в виде предписаний о выполнении определенных операций, реализация которых позволяет проверять наличие того или иного отношения или системных связей между объектами, процессами и понятиями.

Новые возможности для исследования и учета этих связей открылись благодаря современным технологиям обработки информации, которые используют идеи и методы искусственного интеллекта.

Несмотря на достаточно хорошую изученность, знания оценки технического состояния строительных конструкций недостаточно консолидированы и не располагают четкими

стратегиями принятия решений. Отсутствует рассмотрение технического состояния конструкций с позиций закономерностей системного целого и взаимодействия ее составляющих частей, не уделено внимание иерархическому учету влияющих факторов. Данный факт подчеркивает неготовность знаний из области диагностики строительных объектов к компьютерной реализации.

Организацию системы декларативных знаний о техническом состоянии конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений и целевое использование этих знаний в экспертных системах предлагается связать с **методикой построения онтологий** [19].

Онтология представляется как модель, описывающая совокупность понятий и отношений между ними. В отличие от знаний, перенесенных в алгоритмы, онтология обеспечивает их унифицированное и многократное использование разными группами исследователей или пользователей.

Интеграция моделей представления знаний в ЭС осуществляется на основе *онтологического анализа*, который направлен на исследование и интерпретацию системных связей в сложных предметных областях с применением методов и средств компьютерного моделирования. В нашем случае, это информация о конструкциях эксплуатируемых зданий и сооружений, которую можно разделить на классы по описанию контролируемых параметров и признаков, характеризующих состояние конструкций, выделив совокупности фундаментальных свойств и признаков конструкций для прогнозирования технического состояния этих классов.

Культура перехода от формально-математических моделей и методов к алгоритмам и данным складывалась на протяжении всей истории развития вычислительной техники, но проблемы отображения содержательно-описательных моделей и средств их исследования в информационные объекты и алгоритмы стали объектом изучения сравнительно недавно, и изучаются именно в искусственном интеллекте [20].

Техническое состояние строительной конструкции рассматривается как множество более мелких подмножеств, а признаки, факторы, аномалии и пр. – как элементы более высоких классов обобщений. Результат онтологического анализа – интерпретационная модель предметных знаний в виде *онтографа* (рис. 4, 5) с описаниями внутреннего содержимого используемых понятий. Под онтографом понимается графическое представление многоуровневой иерархической структуры (системы) понятий. *Понятия* или, по-другому, часто употребляемые в онтологическом анализе, *концепты*, символизируют классы и подклассы декларативных знаний с механизмом наследования признаков-атрибутов, где каждый элемент характеризуется отличительными и унаследованными от нижестоящего класса признаками [21]. Узлы (вершины) онтографа – понятия, соединяемые дугами, отображающими отношения между ними, как пути передачи и обработки информации.

Для компактного представления онтографа технического состояния конструкций предусматривается система обозначений и индексации, позволяющая его сжать до минимальных размеров (рис. 6). Обозначение каждого концепта отражает его роль в онтологии – класс (группу) признаков (обозначение буквой *y*) или конкретный контролируемый параметр (обозначение буквой *x*).

Основная цель применения онтологического анализа – снижение влияния интуиции экспертов-аналитиков на процесс конструирования декларативных знаний, включенных в оценку технического состояния конструкции, которая определяет последовательность получения этой оценки, в результате решения многоуровневой задачи. Выбор модели процессуальной (процедурной) формы базы знаний зависит от принимаемого в экспертной системе способа вывода решений. В построении современных экспертных систем высокую популярность приобрели такие способы вывода решений как нечеткая логика, искусственные нейронные сети и генети-

ческие алгоритмы [22, 23], моделью которых служит человеческое мышление.

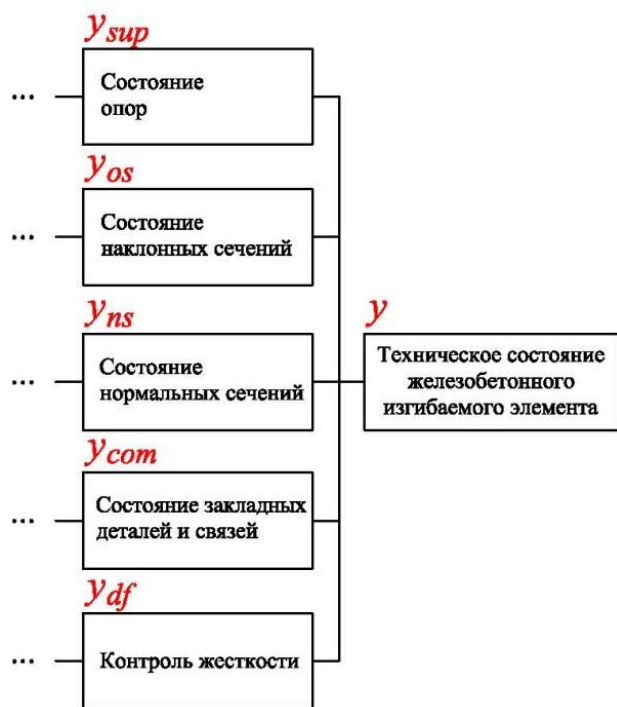


Рисунок 4. Фрагмент онтографа онтологии «Техническое состояние железобетонного изгибаемого элемента» с понятиями 1-го (категориального) уровня.



Рисунок 5. Фрагмент онтографа онтологии «Состояние нормальных сечений» (понятия категориального уровня).

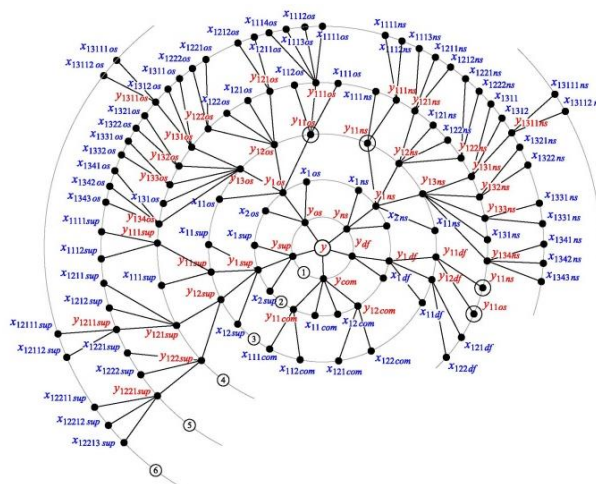


Рисунок 6. Общий вид индексированного онтографа онтологии «Техническое состояние железобетонной изгибаемой конструкции».

В ходе исследований установлено, что экспертную систему для определения категорий технического состояния строительных конструкций целесообразно строить при помощи аппарата теории нечетких множеств и нечеткой логики [24 – 25]. Имея возможности использовать нечеткие величины и лингвистические переменные, описывать простые отношения между переменными с помощью нечетких высказываний, а сложные – нечеткими алгоритмами, эти подходы позволяют описывать состояния строительной конструкции любой сложности.

Под лингвистической переменной понимается переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка, описываемая следующими пятью типами данных:

$$(x, T, X, G, M), \quad (1)$$

где x – имя переменной (заимствованное у соответствующего понятия онтологии); T – терм-множество (совокупность лингвистических оценок (термов) вида «высокий», «выше среднего» и др.), каждый элемент которого задается нечетким множеством на

универсальном множестве X ; G – синтаксические правила, порождающие названия термов; M – семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных семантическими правилами из G .

Несмотря на то, что результаты решений при этом являются приближенными, теоретическая основа указанных подходов в математическом смысле является достаточно точной и строгой. Процедурные знания, таких систем, представляются в виде продукционной модели, т.е. в форме правил вида:

Если <посылка правила>,
то <заключение правила>.

Например, зависимость $y_{121ns} = f(x_{1211ns}, x_{1212ns})$ содержит 16 правил, первые 4 из которых следующего вида:

Если $x_{1211ns} = \text{«высокий»}$ и $x_{1212ns} = \text{«высокий»}$,
то $y_{121ns} = \text{«высокий»}$,
или;
если $x_{1211ns} = \text{«высокий»}$ и $x_{1212ns} = \text{«выше среднего»}$, то $y_{121ns} = \text{«выше среднего»}$, или;
если $x_{1211ns} = \text{«высокий»}$ и $x_{1212ns} = \text{«ниже среднего»}$, то $y_{121ns} = \text{«ниже среднего»}$, или;
если $x_{1211ns} = \text{«высокий»}$ и $x_{1212ns} = \text{«низкий»}$,
то $y_{121ns} = \text{«ниже среднего»}$,
или...

Нечеткая логика позволяет технически реализовать лингвистические связки правил продукционной модели знаний при помощи математических операций. Нечеткие правила с логическими операциями «и» ($\wedge$) и «или» ($\vee$) заменяются на операции, соответственно, «минимума» и «максимума».

Решения задач по определению категории технического состояния отлично реализуется на алгоритме нечеткого логического вывода, т.е. аппроксимации зависимости $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Входы x_i ($i=1:n$) и выходы модели y представляются лингвистическими переменными [24, 25], заданными на соответствующих универсальных мно-

жествах $X_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$.

Терм множества, представляются в виде:

– для входной переменной x_i

$$T = \{t_i^1, \dots, t_i^{n_i}\} \quad (2)$$

– для выходной переменной y

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \quad (3)$$

где $\underline{x}_i$ и $\overline{x}_i$ – минимальное и максимальное значения входной переменной; $t_i^{n_i}$ – n -й лингвистический терм переменной x_i ;

c_1, c_2, c_3, c_4 – термы выходной переменной y , соответствующие категориям технических состояний: c_1 – нормативное, c_2 – работоспособное, c_3 – ограничено работоспособное, c_4 – аварийное техническое состояние, в соответствии с ГОСТ [1].

По итогам анализа применения известных алгоритмов нечеткого логического вывода в задачах определения категорий технического состояния конструкции был сделан выбор в пользу алгоритма Мамдани, получившего наибольшее практическое применение в моделировании нечетких систем. Предпочтение обусловлено пригодностью этого алгоритма в случаях сложного формирования выборки экспериментальных данных (например, отсутствием эффективной системы сбора информации), а также присущей этому алгоритму возможности интерпретации формируемого заключения.

Формирование базы знаний Мамдани, в которой все значения входных и выходной переменных заданы нечеткими множествами, не вызывает трудностей у эксперта (так как вопросы задаются на естественном языке) приводится к виду [24]:

$$\begin{aligned} (x_1 = t_{1j} \ominus x_2 = t_{2j} \ominus \dots \ominus x_j = t_{j,j}) \rightarrow \\ \ominus_j \dots \ominus_j x_n = t_{nj} \text{ с весом } w_j) \rightarrow \\ \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (4)$$

где t_{ij} – нечеткий терм, которым оценивается переменная x_i в j -м правиле; d_j – заключение j -го правила; m – количество правил в базе знаний; Θ_j – логическая операция, связывающая фрагменты антецедента (посылки) j -го правила (операция «и» или «или»); « $\rightarrow$ » – нечеткая импликация.

Обозначив $\mu(x_i)$ функцию принадлежности входа $x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ нечеткому терму t_{ij} , т. е.

$$t_{ij} = \int_{x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]} \mu_j(x_i) / x_i,$$

а $\mu_{s_j}(y)$ – функцию принадлежности выхода $y \in [\underline{y}, \bar{y}]$ нечеткому терму c_j , т. е.

$$c_j = \int_{y \in [\underline{y}, \bar{y}]} \mu_{s_j}(y) / y,$$

степень выполнения посылки j -го правила для текущего входного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ рассчитывается так:

$$\mu_j(X^*) = w_j(\mu_j(x_1^*)) \chi_j \mu_j(x_2^*) \chi_j \dots \chi_j \mu_j(x_n^*), \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где χ_j – обозначает t -норму, если в j -м правиле базы знаний используется логическая операция «и», т. е. при $\Theta = \langle \text{и} \rangle$, или s -норму при $\Theta = \langle \text{или} \rangle$. Треугольные нормы обычно реализуются операциями минимума (t -норма) и максимума (s -норма) [24]. Результат нечеткого вывода представляется в виде:

$$y^* = \left(\frac{\mu_1(X^*)}{c_1}, \frac{\mu_2(X^*)}{c_2}, \dots, \frac{\mu_m(X^*)}{c_m} \right). \quad (6)$$

В результате логического вывода по j -му правилу базы знаний получается нечеткое значение выходной переменной y :

$$c_j^* = \text{imp}(c_j, \mu_j(X^*)), \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где imp – импликация, реализуемая операцией минимума, т. е. срезанием функции принадлежности $\mu_{c_j}(y)$ по уровню $\mu_j(X^*)$. Математическая запись нечеткого значения выходной переменной y имеет вид:

$$c_j^* = \int_{y \in [\underline{y}, \bar{y}]} \min(\mu_j(X^*), \mu_{d_j}(y)) / y. \quad (8)$$

Результат логического вывода с учетом всех правил определяется агрегированием нечетких множеств:

$$y^* = \text{agg}(c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*), \quad (9)$$

где agg – агрегирование нечетких множеств, обычно реализуемое операцией максимума.

Через выполнение дефаззификации нечеткого множества y_{121ns} по методу центра тяжести, определяется четкое значение y_{121ns} выхода, соответствующее ее входным значениям:

Четкое значение выхода y , соответствующее входному вектору X^* , определяется через дефаззификацию нечеткого множества y .

С помощью функций принадлежности входов $\mu(x_i)$, на основании задаваемых четких значений, из универсальных множеств входных лингвистических переменных происходит определение степени уверенности в том, что выходная лингвистическая переменная принимает конкретное значение (рис. 7, 8). Эта степень уверенности определяется как ордината на графике.

Функции принадлежности, в некотором смысле, – это база данных, используемая для преобразования входной разнородной информации в формат последующего диалога с базой знаний. Выбор метода построения функций (прямого или косвенного) определяется соответствующей задачей, характером

неопределенности контролируемого параметра, фрагмента информации о конструкции, а также числом участников, задействованных в этом процессе (один эксперт или группа экспертов) [29, 30].

Для описания понятий и признаков, при отсутствии измеряемых свойств, таких как цвет бетона, звук бетона при простукивании, стадии коррозии арматуры (по внешним признакам) и т. п., применяются, как правило, *косвенные методы*. Они очень трудоемки в сравнении с прямыми методами, но имеют повышенную стойкость к неумышленным искажениям в информации, поступающей от экспертов [31]. Эффективный метод построения функций принадлежности для оценки качественных признаков технического состояния строительных конструкций (рис. 7) подробно представлен в работе [32].

При описании количественных контролируемых параметров предпочтение отдано треугольной и синглтонной функциям принадлежности (рис. 8), определяемых, как правило, *прямым методом*.

В результате проведенных исследований принято решение участки функций принадлежности термов, располагаемые между характерными точками описывать прямыми, для чего лучше всего подходят «классическая» треугольная функция и ее модифицированный вариант – треугольная «ломаная» функция принадлежности (рис. 9). Ее параметрическое описание имеет вид:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_1 \text{ или } x \geq c_2, \\ \frac{a_1 - x}{2(a_1 - a_2)}, & a_1 < x \leq a_2, \\ \frac{a_2 - x}{2(a_2 - b)} + 0,5, & a_2 < x \leq b, \\ \frac{x - b}{2(b - c_1)} + 1, & b < x \leq c_1, \\ \frac{x - c_1}{2(c_1 - c_2)} + 0,5, & c_1 < x < c_2. \end{cases} \quad (10)$$

Оценочные термы, характеризующие лишь

принадлежность присутствия или отсутствия признака технического состояния (каких немало в диагностике строительных конструкций), могут описывать только синглтонные функции принадлежности.

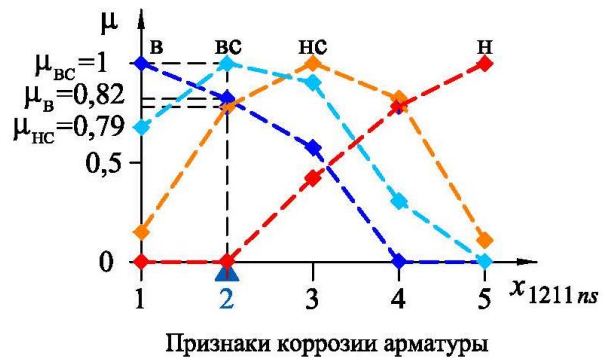


Рисунок 7. Графики функций принадлежности термов переменной x_{1211ns} «Результат освидетельствования коррозии арматуры» (в нормальных сечениях) с отображением степеней принадлежности к термам при входе, равном 2 (второй класс признаков повреждения коррозией).

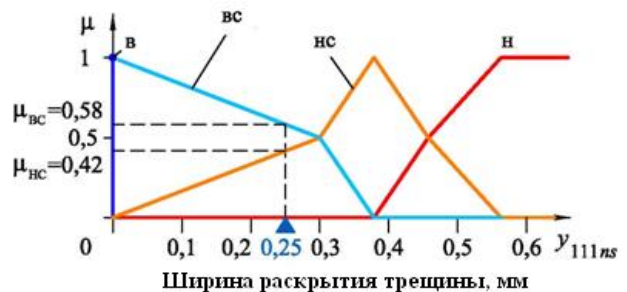


Рисунок 8. Графики функций принадлежности термов переменной y_{111ns} «Напряженное состояние продольной арматуры», автоматически определенных экспертной системой после получения запрашиваемой информации (класс арматуры – А400, расстояние между нормальными трещинами – 250 мм, величина предельно-допустимой ширины раскрытия трещины из условия сохранности арматуры – 0,3 мм): отображены степени принадлежности к термам при ширине раскрытия трещины равной 0,25 мм.

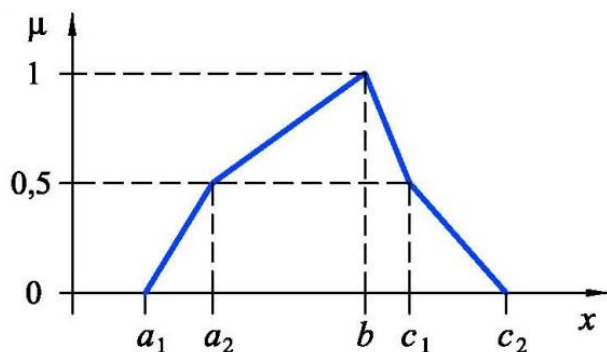


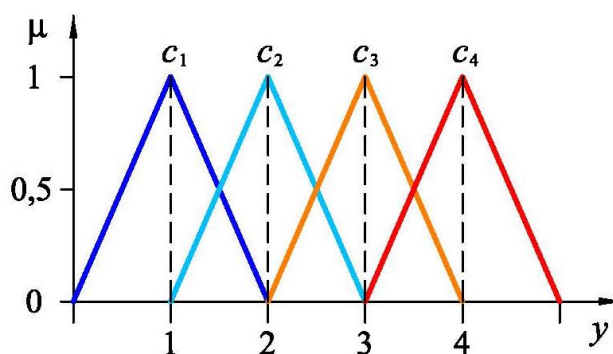
Рисунок 9. График «ломаной» треугольной функции принадлежности, используемой в описании лингвистических оценок (термов) контролируемых измеримых параметров технического состояния конструкций.

Получение решений возможно на любом этапе процедуры оценки технического состояния конструкции (от состояний отдельных деталей и материалов до определения технического состояния конструкции в целом). Категория технического состояния объекта определяется как класс с максимальной степенью принадлежности.

На любом этапе обработки информации по декларативной базе знаний может быть определено и четкое значение выхода (категории). Структура функций принадлежности выходной переменной $\mu_{c_i}(y)$ определяется часто используемым в моделировании нечетких систем типом нечетких чисел — *треугольными нечеткими числами* (см. рис. 10). **Треугольное нечеткое число** — это *унимодальное нечеткое число (L-R) типа*, называемое также тройкой (l, m, u) , $(l \leq m \leq u)$ действительных чисел, через которые его функция принадлежности μ_m определяется следующим образом [33]:

$$\mu_m(x) = \begin{cases} \frac{x-l}{m-l}, & \text{если } x \in [l, m], \\ \frac{x-u}{m-u}, & \text{если } x \in [m, u], \\ 0, & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (9)$$

Число m в тройке (l, m, u) называется *модой* или *четким значением нечеткого треугольного числа*. Числа l и u устанавливают степень размытости четкого числа. Так, например, мода нечеткого числа c_2 (рис. 10), характеризующего работоспособное техническое состояние, равна 2, а его размытость определяется числами 1 и 3 — модами нечетких чисел, характеризующих смежные категории технического состояния, соответственно, нормативное и ограниченно работоспособное.



Технические состояния

Рисунок 10. Нечеткие треугольные числа в описании результата оценки технического состояния строительных конструкций.

ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ С ЭКСПЕРТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Успешное тестирование при обработке результатов инженерного обследования конструкций промышленных объектов (рис. 11) прошла экспертная система оценки технического состояния железобетонных изгибаемых конструкций.

Экспертная система автоматически формирует программу проведения обследования, которая включает полный перечень вопросов и требуемых расчетов, необходимых для установления степени эксплуатационной пригодности конкретного типа конструкций, и в режиме диалога выдается пользователю.



Рисунок 11. Общий вид одной из железобетонных балок, техническое состояние которых оценивалось при помощи экспертной системы.

На начальном этапе работы экспертной системы, исходное состояние конструкции считается нормативным, т.е. все параметры в норме. По результатам ответов, пользователь может видеть изменение признаков и категории технического состояния. Для уточнения параметров повреждений, например, при наличии нормальных трещин в середине пролета балки, система запрашивает более подробную, детальную информацию (расстояние между трещинами, ширину раскрытия трещин, класс арматуры на уровне трещины и др.).

Результат оценки технического состояния конструкции, как на промежуточном этапе, так и в целом, пользователь может получать в виде гистограмм с группировкой признаков по категориям со значениями степеней принадлежности к категориям (от 0 до 1). Либо, что более удобно, в виде гистограмм оцениваемых критериев, представленных на непрерывной шкале категорий технических состояний с четкими значениями (от 1 до 4) категории технического состояния. На рис. 12 представлены результаты оценки категории технического состояния обследованной железобетонной балки, изображенной на рис. 11.

Визуализация результатов существенно повышает «прозрачность» принимаемых решений о степени аварийности, формирует понимание причин и рисков возможного изменения технического состояния конструкций, зданий или сооружений.

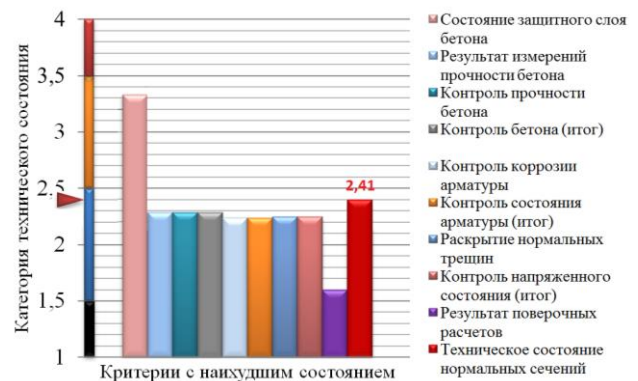


Рисунок 12. Пример отображения четких значений категории технического состояния обследованной железобетонной балки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интеллектуальная автоматизация в области инженерного обследования строительных объектов способна проверить не только собственные знания и предположения, но и наделяет решения прозрачностью, устанавливая контроль над исполнительскими действиями. Поэтому, наряду с совершенствованием нормативных основ, считаемым необходимым внедрение и, в дальнейшем обязательное, применение в этой сфере интеллектуальных систем.

Аппарат теории нечетких множеств, позволяет формализовать и обрабатывать самую разнородную информацию, содержащуюся в признаках технического состояния конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **ГОСТ 31937-2011.** Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. – М. ГУП МНИИТЭП, 2011. – 89 с.
2. **Соколов В.А.** Категории технического состояния строительных конструкций зданий при их диагностике вероятностными методами. // Фундаментальные исследования, 2014, №6-6, с. 1159-1164.
3. Рекомендации по натурным обследованиям железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1972. – 36 с.
4. **Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Фурсов М.Н.** Нечеткая экспертная система диагностики повреждений строительных конструкций. // Вестник Волжского регионального отделения РААСН: Сб. науч. тр. Вып. 17. – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2014, с. 167-173.
5. **Джарратано Д.** Экспертные системы: принципы разработки и программирование. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1152 с.
6. **Гроздов В.Т.** Дефекты строительных конструкций и их последствия. – СПб.: Общероссийский общественный фонд «Центр качества строительства», 2007. – 136 с.
7. **Гроздов В.Т.** Признаки аварийного состояния несущих конструкций зданий и сооружений. – СПб.: Издательский Дом KN+, 2000. – 39 с.
8. **Гучкин И.С.** Диагностика повреждений и восстановление эксплуатационных качеств конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2001. – 171 с.
9. **Дементьева М.Е.** Техническая эксплуатация зданий: оценка и обеспечение эксплуатационных свойств конструкций зданий. – М.: МГСУ, 2008. – 227 с.
10. **Добромыслов А.Н.** Диагностика повреждений зданий и инженерных сооружений. – М.: МГСУ, 2006. – 256 с.
11. **Добромыслов А.Н.** Оценка надежности зданий и сооружений по внешним признакам. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 66 с.
12. **Мальганов А.И., Плевков В.С.** Восстановление и усиление ограждающих строительных конструкций зданий и сооружений. – Томск: Печатная мануфактура, 2002. – 391 с.
13. **Прядко Н.В.** Обследование и реконструкция жилых зданий. – Макеевка: ДонНАСА, 2006. – 156 с.
14. Классификатор основных видов дефектов в строительстве и промышленности строительных материалов. Утвержден Главгосархстройнадзором России 17 ноября 1993 года. – 95 с.
15. Пособие по практическому выявлению пригодности к восстановлению поврежденных строительных конструкций зданий и сооружений и способам их оперативного усиления. – М.: ЦНИИпромзданий, 1996. – 99 с.
16. Рекомендации по обследованию и мониторингу технического состояния эксплуатируемых зданий, расположенных вблизи нового строительства или реконструкции. Приняты и введены в действие Указанием Москомархитектуры от 18 ноября 1998 года № 39.
17. **Кондаков И.М.** Психология. Иллюстрированный словарь. – СПб.: Прайм-ЕВРОЗНАК, 2007. – 783 с.
18. **Гаврилова Т.А., Червинская К.Р.** Извлечение и структурирование знаний для экспертных систем. – М: Радио и связь, 1992. – 200 с.
19. **Смирнов С.В.** Онтологический анализ: определения и алгоритмы. // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. III междунар. конф. Самара, 4-9 сентября 2001, Самара СНЦ РАН, 2001, с. 206-212.

20. **Смирнов С.В.** Онтологический анализ в системах компьютерного моделирования: Дис. ... докт. техн. наук. Рос. акад. наук, Ин-т пробл. упр. слож. системами. – Самара, 2002. – 348 с.
21. **Палагин А.В., Петренко Н.Г., Малахов К.С.** Методика проектирования онтологии ПдО. // Комп'ютерні засоби, мережі та системи, 2011, №10, с. 5-12.
22. **Zadeh L.A.** Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. // Communications of the ACM, Vol. 37, No. 3, 1994, pp. 77-84.
23. **Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М: Горячая линия – Телеком, 2008. – 452 с.
24. **Штовба С.Д.** Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 288 с.
25. **Ротштейн А.П.** Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы и нейронные сети. – Винница: Універсум-Вінниця, 1999. – 320 с.
26. **Zadeh L.A.** Fuzzy Sets. // Information and Control, No. 8(3), 1965, pp. 338-353.
27. **Zadeh L.A.** A Fussy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. // J. Cybern. Vol. 2, 1992, pp. 4-34.
28. **Zadeh L.A.** The Concept of Linguistic Variable and Approximate Reasoning. // Information Sciences, Vol. 8, 1974, pp. 199-249.
29. **Кашеварова Г.Г., Фурсов М.Н., Тонков Ю.Л.** О построении функций принадлежности нечеткого множества в контексте задачи диагностики повреждений железобетонных плит. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 93-101.
30. **Kashevarova G.G., Fursov M.N., Tonkov Y.L.** Membership functions of fuzzy sets in the diagnosis of structures pathology // Informatics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014), 16-17 Nov. 2014, Shenzhen, China / Taylor & Francis Group, A Balkema Book, 2015, pp. 261-264.
31. **Аверкин А.Н.** и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
32. **Тонков Ю.Л.** Выбор эффективного метода построения функций принадлежности для оценки качественных признаков технического состояния строительных конструкций. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика, 2016, №3, с. 126-146.
33. **Яхьяева Г.Э.** Нечеткие множества и нейронные сети. – М. Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **GOST 31937-2011.** Zdanija i sooruzhenija. Pravila obsledovanija i monitoringa tehničkog sostojanija [Buildings and Structures. Rules for Inspection and Monitoring of Technical Condition]. Moscow, GUP MNIITJeP, 2011, 89 pages
2. **Sokolov V.A.** Kategorii Tehničkog Sostojanija Stroitel'nyh Konstrukcij Zdanij pri ih Diagnostike Verojatnostnymi Metodami [Categories of Technical Condition of Structures of Buildings with their Diagnostics by Probabilistic Methods]. // Fundamental'nye issledovanija, 2014, No.6-6, pp. 1159-1164.
3. **Rekomendacii po Naturnym Obsledovanijam Zhelezobetonnyh Konstrukcij** [Recommendations for Field Inspections of Reinforced Concrete Structures]. Moscow, NIIZhB, 1972, 36 pages.

4. **Kashevarova G.G., Tonkov Ju.L., Fursov M.N.** Nechetkaja Jekspertnaja Sistema Diagnostiki Povrezhdenij Stroitel'nyh Konstrukcij [Fuzzy Expert System for Diagnosing Damage to Building Constructions]. // Vestnik Volzhskogo regional'nogo otdelenija RAASN: Sb. nauch. tr. Vyp. 17, Nizhnij Novgorod: NNGASU, 2014, pp. 167-173.
5. **Dzharratano D.** Jekspertnye Sistemy: Principy Razrabotki i Programirovanie [Expert Systems: Principles of Design and Programming]. Moscow, "Williams" Publishing House, 2006, 1152 pages.
6. **Grozdov V.T.** Defekty Stroitel'nyh Konstrukcij i ih Posledstvija [Defects of Building Structures and their Consequences]. Saint-Petersburg, All-Russian public fund, 2007, 136 pages.
7. **Grozdov V.T.** Priznaki Avarijnogo Sostojanija Nesushhih Konstrukcij Zdanij i Sooruzhenij [Signs of the Emergency Condition of Load-Bearing Structures of Buildings]. Saint-Petersburg, KN+ Publishing House, 2000, 39 pages.
8. **Guchkin I.S.** Diagnostika Povrezhdenij i Vosstanovlenie Jekspluatsionnyh Kachestv Konstrukcij [Diagnostics of Damages and Restoration of Operational Qualities of Structures]. Moscow, ASV Publishing House, 2001, 171 pages.
9. **Dementieva M.E.** Tehnicheskaja Jekspluatsija Zdanij: Ocenka i Obespechenie Jekspluatsionnyh Svoystv Konstrukcij Zdanij [Technical Maintenance of Buildings: Assessment and Maintenance of the Operational Properties of Building Structures]. Moscow, MGSU, 2008, 227 pages.
10. **Dobromyslov A.N.** Diagnostika Povrezhdenij Zdanij i Inzhenernyh Sooruzhenij [Diagnosis of Damage to Buildings and Engineering Structures]. Moscow, MGSU, 2006, 256 pages.
11. **Dobromyslov A.N.** Ocenka Nadezhnosti Zdanij i Sooruzhenij po Vneshnim Priznakam [Estimation of Reliability of Buildings and Structures by External Signs]. Moscow, ASV Publishing House, 2004, 66 pages.
12. **Mal'ganov A.I., Plevkov V.S.** Vosstanovlenie i usilenie ogradzhajushhih stroitel'nyh konstrukcij zdanij i sooruzhenij [Restoration and Strengthening of Enclosing Building Structures of Buildings and Constructions]. Tomsk, Pechatnaja manufaktura, 2002, 391 pages.
13. **Prjadko N.V.** Obsledovanie i Rekonstrukcija Zhilyh Zdanij [Survey and Reconstruction of Residential Buildings]. Makeevka, DonNASA, 2006, 156 pages.
14. Klassifikator Osnovnyh Vidov Defektov v Stroitel'stve i Promyshlennosti Stroitel'nyh Materialov [Classifier of the Main Types of Defects in the Construction Industry and Construction Materials]. Utverzhden Glavgosarhstrojnadzorom Rossii 17 nojabrja 1993 goda, 95 pages.
15. Posobie po Prakticheskomu Vyjavleniju Prigodnosti k Vosstanovleniju Povrezhdennyh Stroitel'nyh Konstrukcij Zdanij i Sooruzhenij i Sposobam ih Operativnogo Usilenija [A Manual on the Practical Identification of the Suitability for Restoration of Damaged Structures of Buildings and Methods of Their Operational Strengthening]. Moscow, CNIIPromzdanij, 1996, 99 pages.
16. Rekomendacii po Obsledovaniju i Monitoringu Tehnicheskogo Sostojanija Jekspluatiruemyh Zdanij, Raspolozhennyh Vblizi Novogo Stroitel'stva ili Rekonstrukcii [Recommendations for Inspection and Monitoring of Technical Condition of Exploited Buildings Located Near New Construction or Reconstruction]. Adopted and put into effect by the Guideline of Mosomarchitecture dated November 18, 1998 No. 39.
17. **Kondakov I.M.** Psihologija. Illjustrirovannyj slovar' [Psychology Illustrated Dictionary]. Saint-Petersburg, Prajm-EVROZNAK, 2007, 783 pages.

18. **Gavrilova T.A., Chervinskaja K.R.** Izvlechenie i Strukturirovanie Znanij Dlja Jekspertnyh System [Extracting and Structuring Knowledge for Expert Systems]. Moscow, Radio i svjaz, 1992, 200 pages.
19. **Smirnov S.V.** Ontologicheskij Analiz: Opredelenija i Algoritmy [Ontological Analysis: Definitions and Algorithms]. // Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah. Proceedings of the Third International Conference, Samara, 4-9 September, 2001, Samara SNC RAN, 2001, pp. 206-212.
20. **Smirnov S.V.** Ontologicheskij Analiz v Sistemah Komp'juternogo Modelirovanija [Ontological Analysis in Computer Modeling Systems]. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences. Institute for the management of complex systems of the Russian Academy of Sciences, Samara, 2002, 348 pages.
21. **Palagin A.V., Petrenko N.G., Malahov K.S.** Metodika proektirovanija ontologii PdO [Methodology of designing ontology PG]. // Komp'juterni zasobi, merezhi ta sistemi, 2011, No. 10, pp. 5-12.
22. **Zadeh L.A.** Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. // Communications of the ACM, Vol. 37, No. 3, 1994, pp. 77-84.
23. **Rutkovskaya D., Pilinsky M., Rutkovsky L.** Nejronnye Seti, Geneticheskie Algoritmy i Nechetkie Sistemy [Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems]. Moscow, Gorjachaja linija – Telekom, 2008, 452 pages.
24. **Shtovba S.D.** Proektirovanie Nechetkih Sistem Sredstvami MATLAB [Designing Fuzzy Systems by MATLAB]. Moscow, Gorjachaja linija-Telekom, 2007, 288 pages.
25. **Rotshtejn A.P.** Intellekturnye Tehnologii Identifikacii: Nechetkaja Logika, Geneticheskie Algoritmy i Nejronnye Seti [Intelligent Identification Technologies: Fuzzy Logic, Genetic Algorithms and Neural Networks]. – Vinnica: Universum-Vinnicja, 1999, 320 pages.
26. **Zadeh L.A.** Fuzzy Sets. // Information and Control, No. 8(3), 1965, pp. 338-353.
27. **Zadeh L.A.** A Fussy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. // J. Cybern. Vol. 2, 1992, pp. 4-34.
28. **Zadeh L.A.** The Concept of Linguistic Variable and Approximate Reasoning. // Information Sciences, Vol. 8, 1974, pp. 199-249.
29. **Kashevarova G.G., Fursov M.N., Tonkov Yu.L.** O Postroenii Funkcij Prinadlezhnosti Nechetkogo Mnozhestva v Kontekste Zadachi Diagnostiki Povrezhdenij Zhelezobetonnyh Plit [About Construction of the Functions of the Fuzzy Set Belonging in the Context of the Problem of Damage Diagnostics of Reinforced Concrete Slabs]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 93-101.
30. **Kashevarova G.G., Fursov M.N., Tonkov Y.L.** Membership functions of fuzzy sets in the diagnosis of structures pathology // Informatics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014), 16-17 Nov. 2014, Shenzhen, China / Taylor & Francis Group, A Balkema Book, 2015, pp. 261-264.
31. **Averkin A.N.** et. al. Nechetkie Mnozhestva v Modeljah Upravlenija i Iskusstvennogo Intellekta [Fuzzy Sets in Management Models and Artificial Intelligence]. Under the editorship of D.A. Pospelov. Moscow, Nauka, 1986, 312 pages.
32. **Tonkov Yu.L.** Vybory Jefferktivnogo Metoda Postroenija Funkcij Prinadlezhnosti Dlja Ocenki Kachestvennyh Priznakov Tehnicheskogo Sostojanija Stroitel'nyh Konstrukcij [Choosing an Effective Method for Constructing Accessories Functions for the Evaluation of Qualitative Signs of the Technical Condition of Building Structures]. // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Prikladnaja

jekologija. Urbanistika, 2016, No. 3, pp. 126-146.

33. **Jahjaeva G.E.** Nechetkie mnozhestva i nejronnye seti [Fuzzy Sets and Neural Networks]. Moscow, Internet-University of Information Technologies; BINOM. Laboratory of Knowledge, 2006, 316 pages.

Кашеварова Галина Геннадьевна, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета; Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109; тел. +7(342) 219-83-61, e-mail: ggkash@mail.ru.

Тонков Юрий Леонидович, старший преподаватель кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета; 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109; тел. +7(342) 219-83-93, e-mail: 95081@mail.ru.

Тонков Игорь Леонидович, доцент кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета; 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109; тел. +7(342) 219-83-93, e-mail: 73266@mail.ru.

Galina G. Kashevarova, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of department "Building constructions and computational mechanics", Perm National Research Polytechnic University; Russia, 614010, Perm, ul. Kuibyshev, 109; tel. +7 (342) 219-83-61, e-mail: ggkash@mail.ru.

Yuri L. Tonkov, Senior Lecturer, Department "Building constructions and computational mechanics", Perm National Research Polytechnic University; 614010, Russia, Perm, ul. Kuibyshev, 109; tel. +7 (342) 219-83-93, e-mail: 95081@mail.ru.

Yuri L. Tonkov, PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department "Building constructions and computational mechanics", Perm National Research Polytechnic University; 614010, Russia, Perm, ul. Kuibyshev, 109; tel. +7 (342) 219-83-93, e-mail: 73266@mail.ru.

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОГО КОРРОЗИОННО ПОВРЕЖДЕННОГО СОСТАВНОГО ЭЛЕМЕНТА В ЗОНЕ КОНТАКТА

В.И. Колчунов, М.С. Губанова

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, РОССИЯ

Аннотация: На основе деформационных зависимостей железобетона при сложном напряженном состоянии предложена расчетная модель деформирования плосконапряженного коррозионно поврежденного составного элемента в зоне контакта. Физические уравнения записанные в виде соотношения между конечными приращениями напряжений и деформаций плосконапряженного коррозионно поврежденного железобетонного элемента с пересекающимися трещинами. Полученные коэффициенты матрицы податливости плосконапряженного элемента учитывают длительное деформирование, коррозионные повреждения и сосредоточенный сдвиг при образовании пересекающихся трещин в зоне контакта составного элемента. С использованием полученных деформационных зависимостей дан пример расчета железобетонной балки составного сечения и приведены результаты сопоставления расчета с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: железобетон, плосконапряженный элемент, коррозия, контакт двух бетонов, схема пересекающихся трещин

RELATIONSHIPS BETWEEN DEFORMATIONS AND STRESSES AT CONTACT ZONE OF FLAT-STRESSED COMPOSITE ELEMENT, WHICH WAS SUBJECTED CORROSION DAMAGES

Vitaly I. Kolchunov, Maria S. Gubanova

Southwest State University, Kursk, RUSSIA

Abstract: A computational model of deformation of a flat-stressed reinforced-concrete composite element in the contact zone is proposed. Deformation equations takes the form of the relationships between the final increments of stresses and deformations for a corrosion-damaged reinforced concrete element with intersecting cracks. Coefficients of flexibility matrix of the element are obtained. These coefficients take into account the long-term deformation, corrosion damages and concentrated shear, when intersecting cracks appear in the contact zone of the composite element. The solution to reinforced-concrete beam of composite section is given. The computational results are compared with the experimental data for such structures.

Keywords: reinforced-concrete, flat-stressed element, corrosion, composite construction, intersecting cracks

Введение. Несмотря на достаточно широкое рассмотрение в строительстве составных в том числе железобетонных конструкций [1-4], далеко не все особенности их напряженно-деформированного состояния достаточно изучены. Отсутствуют деформационные зависимости для определения деформаций сдвига в характерном плосконапряженном железобетонном элементе, моделирующем

зону контакта двух брусьев коррозионно поврежденной составной конструкции. В работе построена расчетная модель длительного деформирования коррозионно поврежденного составного железобетонного элемента в зоне контакта двух брусьев составной конструкции, позволяющая определить деформированное состояние таких конструкций при плоском напряженном состоянии.

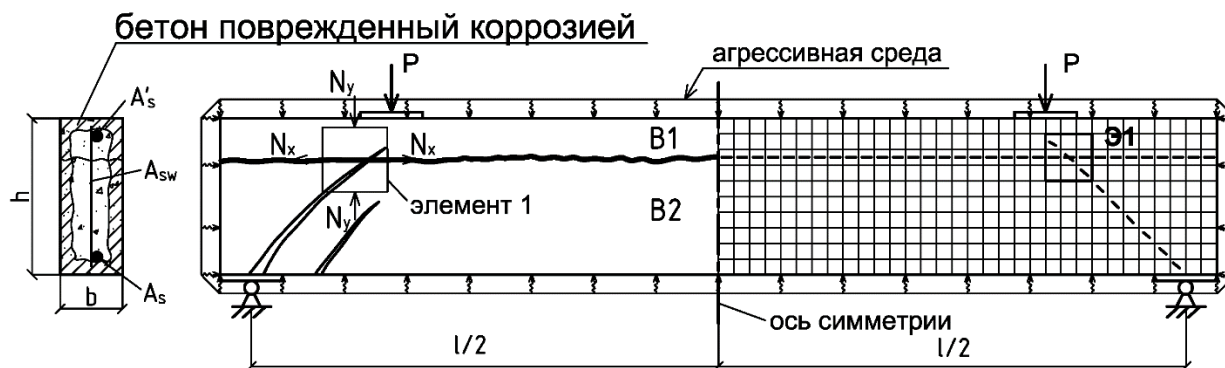


Рисунок 1. Заданная (а) и конечноэлементная расчетная (б) схема коррозионно повреждаемой железобетонной составной конструкции (балки-стенки).

ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Рассмотрим составную конструкцию, состоящую из двух брусьев B1 и B2 сопряженных между собой швом их контакта, который пересекает поперечная арматура A_{sw} (рис. 1). Балка нагружена внешней нагрузкой в виде сосредоточенных сил P и воздействием агрессивной среды вызывающий ее коррозию.

Выделим в зоне контакта двух бетонов характерный элемент единичных размеров Э1 напряженное состояние которого во времени определяется приложенными к нему нормальными N_x , N_y , и сдвигающими N_{xy} усилиями. Связь между нормальными и сдвигающими усилиями и деформациями характерного элемента следуя [5] записывается в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где ε_x , ε_y , γ_{xy} – относительные деформации, N_x , N_y , N_{xy} – нормальные и сдвигающие усилия в характерном плосконапряженном элементе единичных размеров, C_{ij} – коэффициенты матрицы податливости железобетона.

Зависимости деформационной модели [6] справедливы при всех значениях углов наклона трещины в характерном элементе кроме углов $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ (рис. 2). Поскольку значения относительного сдвига арматуры γ_{sxy} и сдвигающих усилий N_{xy} в этих

случаях будут равны нулю. В связи с этим для построения деформационных зависимостей в рассматриваемом характерном элементе Э1 пересекаемом горизонтальной трещиной вдоль шва контакта двух брусьев повернем координатные оси элемента x и y на угол $\theta = 45^\circ$ используя формулы преобразования относительных усилий и деформаций при повороте координатных осей (рис. 2):

$$\begin{aligned} N_{x'} &= N_x \cos^2 \theta + N_y \sin^2 \theta + 2N_{xy} \cos \theta \sin \theta; \\ N_{y'} &= N_x \sin^2 \theta + N_y \cos^2 \theta - 2N_{xy} \cos \theta \sin \theta; \\ N_{x'y'} &= -N_x \cos \theta \sin \theta + N_y \cos \theta \sin \theta + N_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta; \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta; \\ \gamma_{x'y'} &= -2\varepsilon_x \cos \theta \sin \theta + 2\varepsilon_y \cos \theta \sin \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

В рассматриваемом характерном элементе трещины разрывают бетон по двум направлениям шва контакта и по направлению главных растягивающих усилий в результате бетон теряет способность самостоятельно воспринимать усилия.

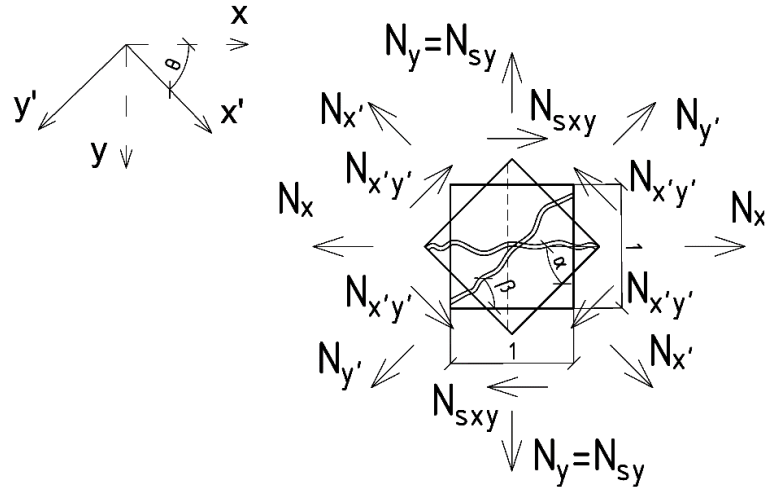


Рисунок 2. Схема характерного плосконапряженного железобетонного элемента с трещинами в зоне контакта.

В этом случае сохраняются лишь некоторые бетонные связи между краями трещин и остается способность бетона на участках между трещинами сопротивляться тангенциальным перемещениям арматурных стержней, пересекающих трещину.

При образовании продольной трещины в шве контакта двух бетонов и трещины от главных растягивающих усилий все действующие в характерном элементе усилия предаются на арматуру. В ней возникают нормальные и касательные усилия (рис. 2). Для определения этих напряжений спроецируем все силы, приложенные к граням элемента на оси x' и y' :

$$\begin{aligned}
 x': & \sigma_x' h (\cos \alpha + \sin(\beta + \alpha)) + \tau_{x'y'} h (\cos(\beta + \alpha) + \sin \alpha) = \\
 = & \sigma_{sy} f_{sy} \cos \alpha - \tau_{sxy} f_{sy} \cos \alpha + N_{3x'y'} \sin \alpha + N_{3x'} \cos \alpha - \\
 - & N_{3y'x'} \cos(\beta + \alpha) + N_{3y'} \sin(\beta + \alpha); \\
 y': & \sigma_y' h (\cos(\beta + \alpha) + \sin \alpha) + \tau_{x'y'} h (\cos \alpha + \sin(\beta + \alpha)) = \\
 = & \sigma_{sy} f_{sy} \sin \alpha + \tau_{sxy} f_{sy} \sin \alpha - N_{3x'y'} \cos \alpha + N_{3x'} \sin \alpha + \\
 + & N_{3y'x'} \sin(\beta + \alpha) + N_{3y'} \cos(\beta + \alpha).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим α , β – углы наклона трещины вдоль шва контакта двух брусьев и трещины от главных растягивающих усилий, соответственно, к оси x , h – толщина характерного элемента, f_{sy}^* – площадь арматуры по направлению оси y , приходящейся на единицу длины характерного элемента с учетом повреждения ее коррозией, μ_{sy}^* – коэффициент армирования для арматуры направления y ($\mu_{sy}^* = f_{sy}^*/h$).

ЗАЦЕПЛЕНИЕ БЕРЕГОВ ТРЕЩИН ЧЕРЕЗ БЕТОННЫЕ СВЯЗИ

Согласно [6], представляя связи зацепления равномерно распределенными по длине участков трещин, можно определить погонные силы зацепления возникающие в трещинах по формулам:

$$\begin{aligned}
 N_{3x'y'} &= h E_{3x'y'} \Delta_{x'y'} / l_T, \\
 N_{3y'x'} &= h E_{3y'x'} \Delta_{y'x'} / l_T, \\
 N_{3x'} &= h E_{3x'} a_{x'} / l_T, \\
 N_{3y'} &= h E_{3y'} a_{y'} / l_T,
 \end{aligned} \quad (5)$$

где ширина раскрытия трещины a и взаимный сдвиг Δ ее берегов для трещины в зоне контакта двух брусьев и трещины от главных растягивающих усилий, соответственно, принимаем равными:

$$\begin{aligned} a_{x'y'} &= 2(u_{y'1} \cos \alpha + u_{x'1} \sin \alpha), \\ \Delta_{x'y'} &= 2(u_{y'1} \sin \alpha - u_{x'1} \cos \alpha), \\ a_{y'x'} &= 2(u_{y'2} \cos(\beta + \alpha) + \\ &\quad u_{x'2} \sin(\beta + \alpha)), \\ \Delta_{y'x'} &= 2(u_{y'2} \sin(\beta + \alpha) - \\ &\quad u_{x'2} \cos(\beta + \alpha)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_{y'1} &= \varepsilon_{sy'} 0,5l / \sin 2\alpha, \\ u_{x'1} &= \varepsilon_{sx'} 0,5l / \sin 2\alpha, \\ u_{y'2} &= \varepsilon_{sy'} 0,5l / \sin(\beta + \alpha) + \alpha, \\ u_{x'2} &= \varepsilon_{sx'} 0,5l / \sin(\beta + \alpha) + \alpha. \end{aligned}$$

После подстановки выражений (6) в уравнения (5) получим:

где

$$\begin{aligned} N_{3x'y'} &= -(hE_{3x'y'} \varepsilon_{sx'} \cos \alpha - hE_{3x'y'} \varepsilon_{sy'} \sin \alpha) / \sin 2\alpha, \\ N_{3y'x'} &= -(hE_{3y'x'} \varepsilon_{sx'} \cos \alpha(\beta + \alpha) - hE_{3y'x'} \varepsilon_{sy'} \sin(\beta + \alpha)) / \sin(\beta + 2\alpha), \\ N_{3x'} &= (hE_{3x'} \varepsilon_{sy'} \cos \alpha + hE_{3x'} \varepsilon_{sx'} \sin \alpha) / \sin 2\alpha, \\ N_{3y'} &= (hE_{3y'} \varepsilon_{sy'} \cos(\beta + \alpha) + hE_{3y'} \varepsilon_{sx'} \sin(\beta + \alpha)) / \sin(\beta + 2\alpha), \end{aligned} \quad (7)$$

где $E_{3x'y'}$, $E_{3y'x'}$, $E_{3x'}$, $E_{3y'}$ – секущие модули деформаций связей зацепления, определяемые согласно критерию прочности [6]. В первом приближении можно принять $E_{3x'y'} = E_{3x'}$, $E_{3y'x'} = E_{3y'}$.

Предложенное в [7] слагаемые для определения значения сдвигающей силы после образования трещин, учитывающем «нагельный» эффект в поперечной арматуре и возникающие по берегам шва сдвига силы зацепления в общем виде можно записать так:

$$T = Q_{s,tot} + Q_{3n}, \quad (8)$$

где $Q_{s,tot}$ – суммарная поперечная сила, представляющая собой «нагельный» эффект в арматуре равна:

$$Q_{s,tot} = Q_{s,\Delta} + Q_{s,Rbt} + Q_{s,\Delta v}, \quad (9)$$

$Q_{s,\Delta}$ – составляющие поперечной силы в арматурном стержне от перемещения Δ :

$$Q_{s,\Delta} = 12EI\Delta / (2\bar{t}_0 + t_0)^3, \quad (10)$$

$\bar{t}_0$ – расстояние до точки заделки арматурного стержня, t_0 – толщина шва сдвига.

Составляющая поперечной силы в арматурном стержне от усилий отрыва в бетоне равна:

$$Q_{s,Rbt} = 0,8R_{bt}b(l_1/2 - l). \quad (11)$$

Составляющая поперечной силы в арматурном стержне от поворота арматурного стержня в точках заделки стержня $Q_{s,\Delta v}$, в рассматриваемом конечном элементе не учитывается поскольку соблюдается условие $l_1 > 10d$.

Используя выражение (8) и зависимости (9-11) несложно определить в относительных значениях (φ) долю усилий зацепления Q_{3n} по отношению к полному значению сдвигающей силы T :

$$\varphi = (T - Q_{s,tot})100/T. \quad (12)$$

Используя гипотезу об инвариантности функции повреждений, описывающей дефицит текущего значения исследуемого фактора неравновесного силового сопротивления бетона, по отношению ко всем физико-механическим характеристикам силового сопротивления бетона [8] по аналогии с формулой (8) можно записать выражение для значений модуля упругости:

$$E_b = E_{s,tot} + E_{3n}, \quad (13)$$

следовательно, значения модуля зацепления определим согласно формуле:

$$E_{zn} = E_b \varphi. \quad (14)$$

НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В АРМАТУРНОМ СТЕРЖНЕ

Полагая что в рассматриваемом элементе трещина в шве контакта двух брусьев имеет постоянный угол наклона трещины $\alpha=45^\circ$, приняв это условие и подставив в систему уравнений (4) выражение (7) выразим напряжения в арматуре τ_{sy} и σ_{sy} , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{sy} &= A1\sigma_{x'} + A2\sigma_{y'} + A3\tau_{x'y'} \\ \tau_{sy} &= B1\sigma_{x'} + B2\sigma_{y'} + B3\tau_{x'y'} \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты уравнений определяются по формулам

$$\begin{aligned} A1 &= (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'} + (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'y'} + \\ &+ (\sqrt{2}(\sin 3\beta - 2\sin(3\beta/2)^2 - 2\sin(\beta/2)^2 + \sin \beta + 2)/4E'_{sy}\mu(2\sin(\beta)^2 - \\ &- 2))E_{3y'} + (\sqrt{2}(\sin 3\beta - 2\sin(3\beta/2)^2 - 2\sin(\beta/2)^2 + \sin \beta + \\ &+ 2)/4E'_{sy}\mu(2\sin(\beta)^2 - 2))E_{3y'x'} - (\sqrt{2}(\sin(\pi/4 + 3\beta) - 4\sin(\beta)^2 - \\ &- 4\sin(\beta/2)^2 + \sqrt{2}\sin(\pi/4 + \beta) + 6)/8\mu(\sin(\beta)^2 - 1), \\ A2 &= (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)N_{3x'} + (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'y'} + \\ &+ (-2\sqrt{2}\cos \beta^2 - 2\sqrt{2}\cos \beta \sin \beta /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'} + \\ &+ (2\sqrt{2}\cos \beta \sin \beta - 2\sqrt{2}\cos \beta^2 + 2\sqrt{2} /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'x'} + \\ &+ (\cos \beta - \sin \beta + 1)/2\mu, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A3 &= (\cos \beta + 1)/\mu, \\ B1 &= (\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)N_{3x'} + (\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'y'} + \\ &+ (-\sqrt{2}(\cos 2\beta - \sin 2\beta) /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'} + \\ &+ (-\sqrt{2}(\cos 2\beta - \sin 2\beta) /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'x'} + \\ &- (\sqrt{2}(\sqrt{2}E'_{sy}/2 + E'_{sy} \sin(\frac{\pi}{4} + 2\beta) + \sqrt{2}E'_{sy} \cos \beta) /4E'_{sy}\mu \cos \beta) \\ B2 &= (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'} + (-\sqrt{2}/4E'_{sy}\mu)E_{3x'y'} + \\ &+ (2\sqrt{2}(\cos \beta^2 + 2\sqrt{2}\cos \beta \sin \beta - 2\sqrt{2}) /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'} + \\ &+ (2\sqrt{2}(\cos \beta^2 + 2\sqrt{2}\cos \beta \sin \beta) /4E'_{sy}\mu \cos \beta)E_{3y'x'} + \\ &+ (2E'_{sy} \cos \beta^2 + 2E'_{sy} \cos \beta - 2E'_{sy} \cos \beta \sin \beta) /4E'_{sy}\mu \cos \beta) \\ B3 &= \sin \beta / \mu, \end{aligned}$$

где l_{crc} – размер зоны относительных взаимных смещений бетона и арматуры в зоне прилегающей к трещине [9];

$$E'_{sy} = E_s / \psi_{st}, \quad (17)$$

E_s – модуль упругости арматуры, ψ_{st} – коэффициент усреднения В. И. Мурашева [10].

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМЕ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ, НЕОДНОРОДНОСТИ И АНИЗОТРОПИИ

Поскольку при пересекающихся трещинах бетон теряет способность характеризовать де-

формации элемента по какому-либо направлению, следовательно, средние деформации арматуры совпадают с общими деформациями элемента с трещинами, для рассматриваемого характерного элемента в осях x' и y' деформации составят:

$$\Delta \varepsilon_{x'} = \Delta \varepsilon_{sx'}; \quad \Delta \varepsilon_{y'} = \Delta \varepsilon_{sy'}; \quad \Delta \gamma_{x'y'} = \Delta \gamma_{sx'y'} \quad (18)$$

Учитывая связи осевых u_{sy} и тангенциальных перемещений v_{sy} арматурного стержня и перемещений в направлении осей x' и y' , следуя [6] можно записать:

$$\begin{aligned} u_{sy} &= u_{x'} \cos \alpha + u_{y'} \sin \alpha, \\ v_{sy} &= u_{y'} \cos \alpha - u_{x'} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (19)$$

где u_{sy} , $u_{sx'}$ и u_{sy} можно определить в виде функции от средних деформаций арматуры ε_s и бетона ε_b на участках между трещинами (принимая $\varepsilon_b \approx 0$):

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \varepsilon_{sx'} 0,5 l_T / \sin 2\alpha, \\ u_{y'} &= \varepsilon_{sy'} 0,5 l_T / \sin 2\alpha, \\ u_{sy} &= \varepsilon_{sy} 0,5 l_T / \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (20)$$

значения v_{sy} выразим в виде функции от τ_{sy} :

$$v_{sy} = \eta_{\tau y} 0,5 l_T \tau_{sy} / E'_{sy} \sin 2\alpha. \quad (21)$$

Подставив функции (20) и (21) в зависимости (19) и пользуясь соотношением $\varepsilon_{sy} = \sigma_{sy} / E_s^k$ выразим перемещения вдоль осей x' и y' . В итоге получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sx'} &= \sqrt{2}/2 (\sigma_{sy} / E_s^k + \eta_{\tau y} \tau_{sy} / E'_{sy}), \\ \varepsilon_{sy'} &= \sqrt{2}/2 (\frac{\sigma_{sy}}{E_s^k} - \eta_{\tau y} \tau_{sy} / E'_{sy}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$E_s^k = E_s v_s^k / \psi_s^k, \quad (23)$$

v_s^k – коэффициент упругости, который характеризует отношение упругих деформаций арматуры к общим деформациям арматуры, $\eta_{\tau y}$ – коэффициент, учитывающий повышенную податливость арматурных стержней тангенциальным смещениям. В бетоне у границы трещины в первом приближении согласно [6] можно принять равным 16.

Подставляя в (22) значения напряжения в арматуре τ_{sy} и σ_{sy} вычисляем по формулам (15) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sx'} &= (\sqrt{2}(E'_{sy} A1 - \eta_{\tau y} E_s^k B1) / 2E_s^k E'_{sy}) \sigma_{x'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A2 - \eta_{\tau y} E_s^k B2) / 2E_s^k E'_{sy}) \sigma_{y'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A3 - \eta_{\tau y} E_s^k B3) / 2E_s^k E'_{sy}) \tau_{x'y'}, \\ \varepsilon_{sy'} &= (\sqrt{2}(E'_{sy} A1 + \eta_{\tau y} E_s^k B1) / 2E_s^k E'_{sy}) \sigma_{x'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A2 + \eta_{\tau y} E_s^k B2) / 2E_s^k E'_{sy}) \sigma_{y'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A3 + \eta_{\tau y} E_s^k B3) / 2E_s^k E'_{sy}) \tau_{x'y'}. \end{aligned} \quad (24)$$

Зависимости (24) для двух последовательно расположенных ступеней нагрузки $i+1$ и i можно записать в приращениях напряжений и деформаций арматуры. В итоге получим:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{sx'} &= (\sqrt{2}(E'_{sy} A1 - \eta_{\tau y} E_s^k B1) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \sigma_{x'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A2 - \eta_{\tau y} E_s^k B2) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \sigma_{y'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A3 - \eta_{\tau y} E_s^k B3) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \tau_{x'y'}, \\ \Delta \varepsilon_{sy'} &= (\sqrt{2}(E'_{sy} A1 + \eta_{\tau y} E_s^k B1) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \sigma_{x'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A2 + \eta_{\tau y} E_s^k B2) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \sigma_{y'} + \\ &+ (\sqrt{2}(E'_{sy} A3 + \eta_{\tau y} E_s^k B3) / 2E_s^k E'_{sy}) \Delta \tau_{x'y'}. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& + (\sqrt{2}(E'_{sy}A2 + \eta_{\tau y}E_s^k B2)/2E_s^k E'_{sy})\Delta\sigma_{y'} \\
& + (\sqrt{2}(E'_{sy}A3 + \eta_{\tau y}E_s^k B3) \\
& \quad /2E_s^k E'_{sy})\Delta\tau_{x'y'}.
\end{aligned}$$

Для получения полной системы физических уравнений определим угол сдвига $\Delta\gamma_{x'y'}$ используя формулы преобразования относительных деформаций и напряжений при обратном повороте координатных осей:

$$\begin{aligned}
\Delta\epsilon_y &= \Delta\sigma_y/E_s^k \\
&= \Delta\epsilon_{sx'} \sin^2 \alpha
\end{aligned} \quad (26)$$

$$+ \Delta\epsilon_{sy'} \cos^2 \alpha + \Delta\gamma_{sx'y'} \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_y &= \Delta\sigma_{x'} \sin^2 \alpha \\
&+ \Delta\sigma_{y'} \cos^2 \alpha + 2\Delta\tau_{x'y'} \cos \alpha \sin \alpha.
\end{aligned} \quad (27)$$

Подставив в уравнение (26) значения $\Delta\epsilon_{sx'}$ и $\Delta\epsilon_{sy'}$ из уравнения (25) и $\Delta\sigma_y$ из уравнения (27) получим искомое значение угла сдвига в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_{sx'y'} &= -((\sqrt{2}A1 - 1)/E_s^k)\Delta\sigma_{x'} \\
&\quad - ((\sqrt{2}A2 - 1) \\
&\quad \quad /E_s^k)\Delta\sigma_{y'} - \\
&\quad - ((\sqrt{2}A3 - 2)/E_s^k).
\end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражения (25), (28), в выражения для деформаций (18) приходим к следующей системе физических соотношений в приращениях:

$$\begin{cases}
\Delta\epsilon_{x'} = C_{11} \Delta\sigma_{x'} + C_{12} \Delta\sigma_{y'} + C_{13} \Delta\tau_{x'y'} \\
\Delta\epsilon_{y'} = C_{21} \Delta\sigma_{x'} + C_{22} \Delta\sigma_{y'} + C_{23} \Delta\tau_{x'y'} \\
\Delta\gamma_{x'y'} = C_{31} \Delta\sigma_{x'} + C_{32} \Delta\sigma_{y'} + C_{33} \Delta\tau_{x'y'}
\end{cases} \quad (29)$$

Здесь коэффициенты матрицы податливости $[C_{ij}]$ плоского элемента на приращениях напряжений и деформаций определяются из выражений:

$$\begin{cases}
C_{11} = \frac{\sqrt{2}(A1E'_{sy} - B1E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{12} = \frac{\sqrt{2}(A2E'_{sy} - B2E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{13} = \frac{\sqrt{2}(A3E'_{sy} - B3E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{21} = \frac{\sqrt{2}(A1E'_{sy} + B1E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{22} = \frac{\sqrt{2}(A2E'_{sy} + B2E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{23} = \frac{\sqrt{2}(A3E'_{sy} + B3E_s^k \eta)}{2E_s^k E'_{sy}}; \\
C_{31} = -\frac{\sqrt{2}A1 - 1}{E_s^k}; \\
C_{32} = -\frac{\sqrt{2}A2 - 1}{E_s^k}; \\
C_{33} = -\frac{\sqrt{2}A3 - 2}{E_s^k}.
\end{cases} \quad (30)$$

ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ КОРРОЗИОННО ПОВРЕЖДЕННОГО ЭЛЕМЕНТА В ПРИРАЩЕНИЯХ

Представленные аналитические зависимости позволяют построить матрицу податливости $[\bar{C}_{ij}]$ коррозионно поврежденного длительно деформируемого железобетонного элемента. Изменение во времени деформативных свойств нейтрализованного агрессивной средой бетона при формировании матрицы $[\bar{C}_{ij}]$ можно учитывать изменением касательного модуля упругости во времени:

$$\begin{aligned}
E_{zn}^*(t) &= E_b^*(t)\varphi, \\
E_{znt}^*(t) &= E_b^*(t)\varphi,
\end{aligned} \quad (31)$$

где $E_b^*(t)$ – зависимость изменения модуля деформаций бетона от времени вследствие воздействия агрессивной среды.

Для учета влияния агрессивной среды на арматурный стержень необходимо определить

за какой промежуток время агрессивная среда достигает арматурного стержня после начала контакта элемента с агрессивной средой. Обозначим τ – время нейтрализации защитного слоя бетона. Тогда коррозионные потери сечения арматурного стержня за время воздействия агрессивной среды при формировании матрицы податливости $[\bar{C}_{ij}]$ можно учесть снижением коэффициента армирования $\mu(t-\tau)$ вследствие уменьшения площади сечения рабочего стержня арматуры по формуле:

$$\mu_s(t-\tau) = f_s(t-\tau)/h, \quad (32)$$

где $f_s(t-\tau)$ – площадь арматуры у направления приходящаяся на единицу длины характерного элемента в зависимости от времени воздействия агрессивной среды

$$f_s(t-\tau) = 0,25\pi(d - 2\delta_k(t-\tau))^2, \quad (33)$$

d – диаметр неповрежденного арматурного стержня, $d-2\delta_k(t-\tau)$ – диаметр неповрежденного коррозией арматурного стержня во времени, δ_k – глубина нейтрализации арматурного стержня во времени, h – толщина характерного железобетонного элемента.

Нарушение сцепления корродирующей арматуры с бетоном между трещинами за счет появления продуктов коррозии стали характеризуется изменением коэффициента сцепления ψ_s^k . Изменение во времени касательного коэффициента сцепления арматуры с бетоном $\psi_s^k(t-\tau)$, как некоторого аналога коэффициента ψ_s В.И. Мурашева, определяется в виде функций от средних деформаций арматуры на участках между трещинами. В первом приближении можно принять, что в результате воздействия агрессивной среды при увеличении глубины коррозии арматуры $\delta_k(t-\tau)$ значения коэффициента сцепления $\psi_s^k(t-\tau)$ снижаются пропорционально значениям глубины коррозии арматуры.

Тогда касательный модуль деформации арматуры и средний модуль деформаций арматуры в коррозионно поврежденном элементе

с трещинами можно соответственно определить по формулам:

$$E_s^k(t-\tau) = E_s \cdot \nu_s^k / \psi_s^k(t-\tau), \quad (34)$$

$$E'_{sy}(t-\tau) = E_s / \psi_s(t-\tau), \quad (35)$$

где E_s – модуль упругости неповрежденной коррозией арматуры, ν_s^k – коэффициент упругости, характеризует отношение упругих деформаций арматуры к общим деформациям арматуры.

Используя зависимости (31) – (35) коэффициенты матрицы податливости для коррозионно поврежденного железобетона с трещинами на приращениях напряжений и деформаций записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{11}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A1E'_{sy}(t-\tau) - B1E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{12}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A2E'_{sy}(t-\tau) - B2E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{13}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A3E'_{sy}(t-\tau) - B3E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{21}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A1E'_{sy}(t-\tau) + B1E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{22}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A2E'_{sy}(t-\tau) + B2E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{23}^k(t) &= \frac{\sqrt{2}(A3E'_{sy}(t-\tau) + B3E_s^k(t-\tau)\eta)}{2E_s^k(t-\tau)E'_{sy}(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{13}^k(t) &= -\frac{\sqrt{2}A1 - 1}{E_s^k(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{13}^k(t) &= -\frac{\sqrt{2}A2 - 1}{E_s^k(t-\tau)}; \\ \bar{C}_{33}^k(t) &= -\frac{\sqrt{2}A3 - 2}{E_s^k(t-\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ПРИМЕР РАСЧЕТА

С использованием построенных зависимостей выполнен расчет железобетонной балки

составного сечения нагруженной двумя симметрично расположенными в приопорных зонах сосредоточенными силами (см. рис. 1). Пролет балки $l=1,5$ м, сечение балки 250×100 мм, сечение верхнего бруса 50×100 мм, нижнего – 200×100 мм. Армирование составной балки принято плоским каркасом с шагом поперечной арматуры 100 мм в приопорной зоне 20 мм. Диаметр поперечной арматуры 6 мм класса А300. Продольная арматура в нижней зоне сечения балки принята диаметром 6 мм класса А400. Верхний брус балки выполнен из бетона В30, нижний из бетона В20.

Для расчетного анализа был принят характерный элемент Э1 расположенный на границе контакта двух бетонов в зоне пересечения наклонной трещиной. Прочностные и дефор-

мативные характеристики бетона для характерного элемента Э1 и размеры этого элемента в зоне контакта назначены в соответствии с рекомендациями [11].

Результаты расчета представлены в виде критерия прочности коррозионно поврежденного характерного элемента Э1 в форме соотношений [13] (рис. 3), позволяющего определить усилие образования продольной трещины в зоне контакта двух бетонов, а так относительные деформации сдвига характерного элемента Э1 в зависимости от нагрузки (рис. 4). Здесь же приведены значения нагрузок образования трещины вдоль шва контакта $\bar{P}_{crc}^*$ и трещины по направлению главных растягивающих усилий для поврежденного коррозией конструкции балки ($\bar{P}_{crc}^*$).

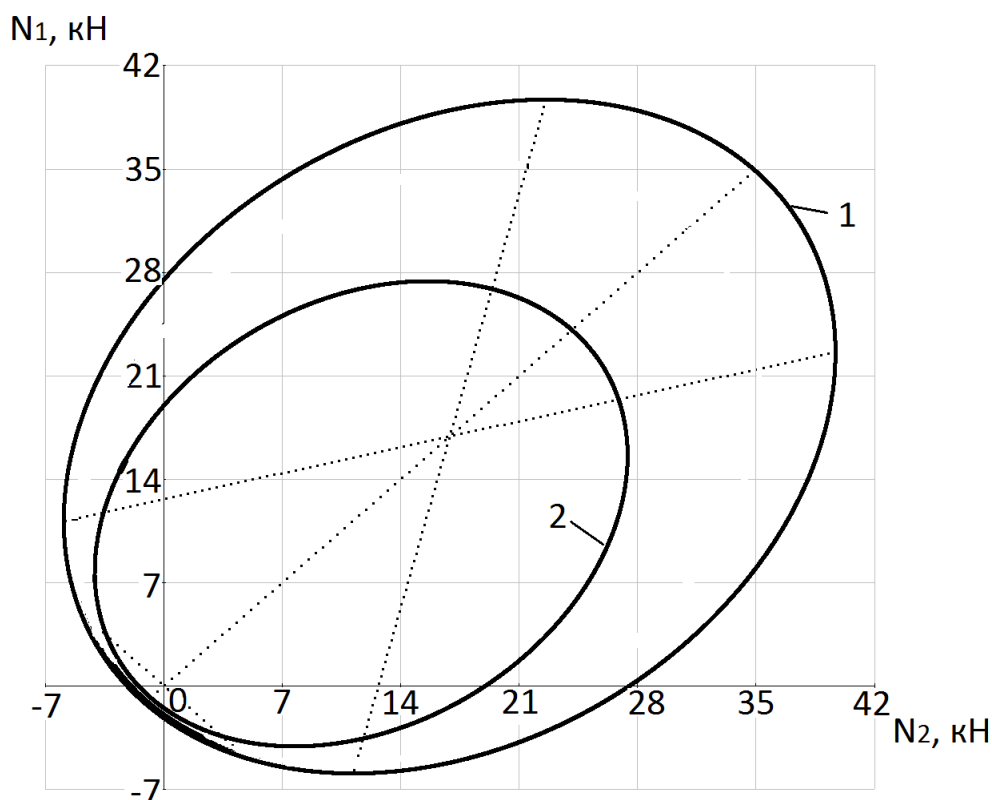


Рисунок 3. Критерий трещиностойкости характерного плосконапряженного элемента в зоне контакта: 1 – для нового бетона ($t=0$); 2 – для бетона, находящегося под воздействием агрессивной среды ($t=900$).

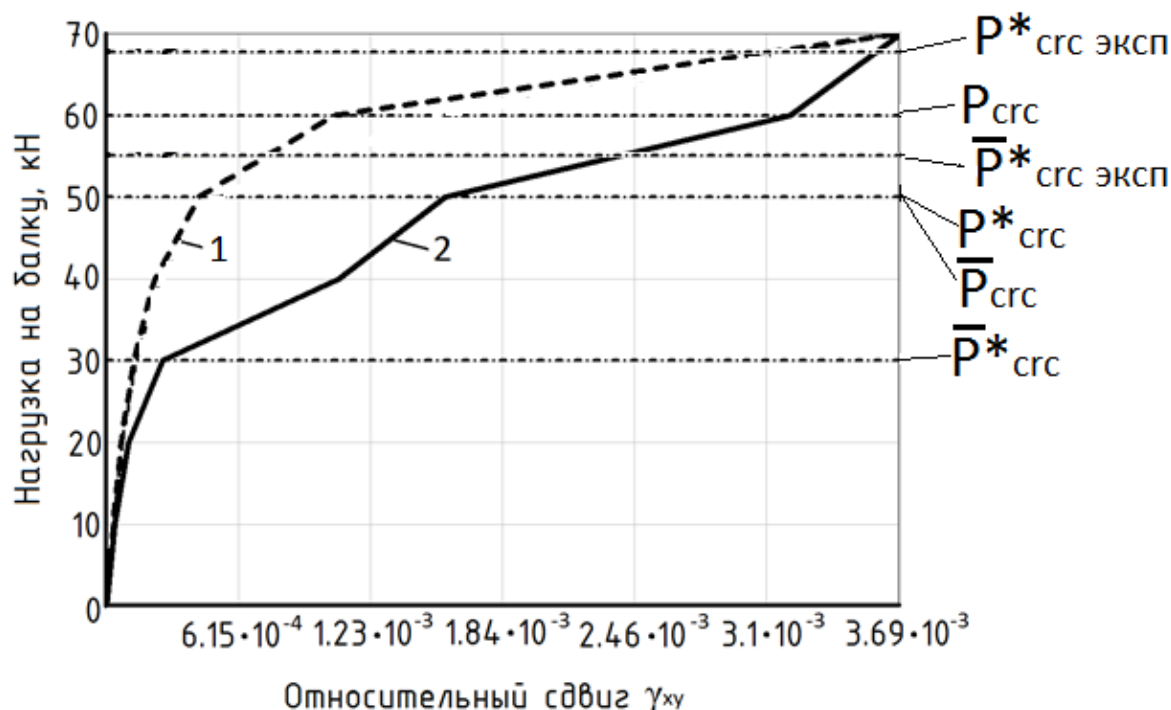


Рисунок 4. График изменения относительного сдвига от нагрузки: 1 – для нового бетона ($t=0$); 2 – для бетона, находящегося под воздействием агрессивной среды ($t=900$).

ВЫВОДЫ

Построенная расчетная модель длительного деформирования плосконапряженного коррозионно повреждаемого железобетонного элемента в зоне контакта двух бетонов позволяет определить напряженно-деформированной состояние составной железобетонной плосконапряженной конструкции, работающей с трещинами в зоне контакта двух брусьев при длительном деформировании с учетом коррозии бетона и арматуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баширов Х.З., Колчунов Вл.И., Федоров В.С., Яковенко И.А.** Железобетонные составные конструкции зданий и сооружений – М.: АСВ, 2017. – 248 с.
2. **Федоров В.С., Баширов Х.З., Колчунов Вл.И.** Элементы теории расчета железобетонных составных конструкций.

// Academia. Архитектура и строительство, 2014, №2, с. 116-118.

3. **Колчунов Вл.И.** Жесткость железобетонных составных конструкций при наличии различных трещин // Строительство и реконструкция, 2015, №5(61), с. 17-24.
4. **Колчунов В. И., Губанова М.С., Карпенко Д.В.** Расчетная модель длительного деформирования плосконапряженного коррозионно поврежденного железобетонного элемента в зоне контакта двух бетонов. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2017, №1, с.49-57.
5. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н., Петров А.Н., Палювина С.Н.** Модель деформирования железобетона в приращенных и расчет балок-стенок и изгибаемых плит с трещинами. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. – 156 с.
6. **Карпенко Н.И.** Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 205 с.

7. **Колчунов В.И., Панченко Л.А.** Расчет составных тонкостенных конструкций. – М.: АСВ, 1999. – 281с.
8. **Бондаренко, В.М.** Силовое деформирование, коррозионные повреждения и энергосоппротивление железобетона. – Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2016. – 67с.
9. **Бондаренко В.М., Колчунов Вл.И.** Расчетные модели сопротивления железобетона. – М.: АСВ, 2004. – 471 с.
10. **Мурашев В.И.** Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. – М.: АСВ, 1950. – 472 с.
11. **Горностаев И.С., Ключева Н.В., Колчунов В.И., Яковенко И.А.** Деформативность железобетонных составных конструкций с наклонными трещинами. // Строительная механика и расчет сооружений, 2014, №5(256), с. 60-66.
12. **Ключева Н.В., Карпенко Д.В., Кащавцев А.А.** Методика экспериментальных исследований прочности и трещиностойкости по наклонным сечениям нагруженных и коррозионно поврежденных железобетонных составных конструкций. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015, №5, с.77-80.
13. **Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.** Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат. 1974. – 316 с.
3. **Kolchunov V.I.** Zhestkost' Zhelezobetonnih Sostavnyh Konstrukcij pri Nalichii Razlichnyh Treshhin [Rigidity of Reinforced Concrete Composite Structures in the Presence of Various Cracks]. // Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2015, No. 5(61), pp. 17-24.
4. **Kolchunov V.I., Gubanova M.S., Karpenko D.V.** Raschetnaja Model' Dlitel'nogo Deformirovanija Ploskonaprjazhennogo Korrozionno Povrezhdenного Zhelezobetonного Elementa v Zone Kontakta Dvuh Betonov [Computational Model of Long-Term Deformation of a Flattened Corrosion-Damaged Reinforced Concrete Element in the Contact Zone of Two Concrete]. // Stroitel'naja mehanika inženernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2017, No. 1, pp. 49-57.
5. **Karpenko N.I., Karpenko S.N., Petrov A.N., Paljuvina S.N.** Model' de-formirovanija zhelezobetona v prirashhenijah i raschet balok-stenok i izgibaemyh plit s treshhinami [Model of Deformation of Reinforced Concrete in Increments and Analysis of Deep Beams and Bending Slabs with Cracks]. Petrozavodsk, PetrGU, 2013, 156 pages.
6. **Karpenko N.I.** Teorija deformirovanija zhelezobetona s treshhinami [Theory of Deformation of Reinforced Concrete with Cracks]. Moscow, Strojizdat, 1976, 205 pages.
7. **Kolchunov V.I., Panchenko L.A.** Raschet Sostavnyh Tonkostennyh Konstrukcij [Analysis of Composite Thin-Wall Structures]. Moscow, ASV Publishing House, 1999, 281 pages.
8. **Bondarenko V.M.** Silovoe Deformirovanie, Korrozionnye Povrezhdenija i Jenergosoprotivlenie Zhelezobetona [Power Deformation, Corrosion Damage and Energy Resistance of Reinforced Concrete]. Kursk, South-West State University, 2016, 67 pages.

REFERENCES

1. **Bashirov H.Z., Kolchunov V.I., Fedorov V.S., Yakovenko I.A.** Zhelezobetonnye Sostavnye Konstrukcii Zdanij i Sooruzhenij [Reinforced Concrete Composite Structures of Buildings]. Moscow, ASV Publishing House, 2017, 248 pages.
2. **Fedorov V.S., Bashirov H.Z., Kolchunov V.I.** Jelementy Teorii Rascheta Zhelezobetonnih Sostavnyh Konstrukcij [Elements of Theory of Analysis of Reinforced Concrete Composite Structures]. // Academia.

9. **Bondarenko V.M., Kolchunov V.I.** Raschetnye modeli soprotivlenija zhelezobetona [Computational Models of Resistance of Reinforced Concrete]. Moscow, ASV Publishing House, 2004, 471 pages.
10. **Murashev V.I.** Treshhinoustojchivost', zhestkost' i prochnost' zhelezobetona [Fracture Resistance, Stiffness and Strength of Reinforced Concrete]. Moscow, ASV Publishing House, 1950, 472 pages.
11. **Gornostaev I.S., Klueva N.V., Kolchunov V.I., Yakovenko I.A.** Deformativnost' Zhelezobetonnyh Sostavnyh Konstrukcij s Naklonnymi Treshhinami [Deformability of Reinforced Concrete Composite Structures with Inclined Cracks]. // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2014, No. 5(256), pp. 60-66.
12. **Klueva N.V., Karpenko D.V., Kashhavcev A.A.** Metodika Jeksperimental'nyh Issledovanij Prochnosti i Treshhinostojkosti po Naklonnym Sechenijam Nagruzhennyh i Korrozionno Povrezhdennyh Zhelezobetonnyh Sostavnyh Konstrukcij [Method of Experimental Studies of Durability and Crack-Resistance on Sloping Sections of Loaded and Corrosion-Damaged Reinforced Concrete Constructions]. // Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2015, No. 5, pp. 77-80.
13. **Geniev G.A., Kissuk V.N., Tupin G.A.** Teorija plastichnosti betona i zhelezobetona [Theory of Plasticity of Concrete and Reinforced Concrete]. Moscow, Strojizdat. 1974, 316 pages.

тел. +7(4712) 22-24-61; факс +7(4712) 50-48-00;
e-mail: yz_swsu@mail.ru.

Vitaly I. Kolchunov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr.Sc., Head of Department of Unique Buildings and Structures; Southwest State University; office 705, 94, 50 let Oktyabrya, Kursk, Russia;
tel. +7(4712) 22-24-61; fax: +7(4712) 50-48-00;
e-mail: yz_swsu@mail.ru.

Maria S. Gubanova, Southwest State University; office 705, 94, 50 let Oktyabrya, Kursk, Russia;
tel. +7(4712) 22-24-61; fax: +7(4712) 50-48-00;
e-mail: yz_swsu@mail.ru.

Колчунов Виталий Иванович, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет; Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, ауд. 705;
тел. +7(4712) 22-24-61; факс +7(4712) 50-48-00
e-mail: yz_swsu@mail.ru.

Губанова Мария Сергеевна, Юго-Западный государственный университет; Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, ауд. 705;

NUMERICAL AND ASYMPTOTIC MODELING OF A FILTRATION PROBLEM WITH THE INITIAL DEPOSIT

Ludmila I. Kuzmina¹, Yuri V. Osipov², Yuri P. Galaguz²

¹ National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA

² National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The study of filtration as one of the problems of underground hydromechanics is necessary for the design and construction of tunnels, underground and hydraulic structures. Deep bed filtration of suspension in a porous medium with variable porosity and permeability and with an initial deposit is considered. An asymptotic solution to a model with small limit deposit is constructed; the asymptotics is compared with numerical calculation.

Keywords: filtration problem, suspension, filtration coefficient, size-exclusion particle capture, asymptotic solution, numerical calculation

ЧИСЛЕННОЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРВОНАЧАЛЬНЫМ ОСАДКОМ

Л.И. Кузьмина¹, Ю.В. Осипов², Ю.П. Галагуз²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Исследование фильтрации как одной из задач подземной гидромеханики необходимо при проектировании и строительстве туннелей, подземных и гидротехнических сооружений. Рассматривается модель фильтрации суспензии в пористой среде с переменными пористостью и проницаемостью и с первоначальным осадком. Строится асимптотическое решение при малом предельном осадке, асимптотика сравнивается с численным расчетом задачи.

Ключевые слова: суспензия, пористая среда, коэффициент фильтрации, геометрический механизм захвата частиц, асимптотика, численное решение

1. INTRODUCTION

Filtration problems are essential in the design and construction of tunnels, underground and hydraulic structures, as well as for the concreting of friable rocks. During the filtration of the suspension in the porous medium some of the fine particles pass through the pores, and part of them is stuck in a porous medium and forms a deposit [1-4]. Different physical models are used for description of the filtration depending on the properties of the suspension and the porous medium and the nature of their interaction [5-12]. In this paper the filtration of a suspension in a porous medium with an initial deposit is consid-

ered. This is a step of a periodic process, accompanied by the accumulation of the deposit. Filtration of the suspension (forward flow) is replaced by the filter wash with clean water (back flow), then the suspension enters the filter again and displaces water, etc. [13, 14]. Mechanical and geometric size-exclusion model of particle retention assumes that the suspended particles of the suspension pass freely through the large pores and get stuck at the inlets of pores smaller than the particle size. In contrast to the standard models, we assume that the porosity and permeability of the porous medium change with the increase of the deposit. With the increase of deposit the number of free small

pores decreases and deposit accumulation slows down. After a long-term filtration all the small pores are clogged and the suspended particles pass freely through the porous medium without retention.

Concentrations of suspended and retained particles of the suspension satisfy a quasi-linear hyperbolic system of two differential equations in partial derivatives. The first equation is the equation of mass transfer of suspension particles, the second kinetic equation describes the deposit growth in porous media [15]. The conditions at the filter inlet and at the initial time determine the unique solution to the problem. Exact and asymptotic solutions of the filtration problems for a variety of filter coefficients and boundary conditions are obtained in [15-19].

The outline of the paper is as follows. Section 2 presents the mathematical model of deep bed filtration with the initial deposit. In Section 3 a global asymptotic solution is constructed for a small limit deposit. The asymptotics of the boundary line of two phases, which is a mobile concentration front of suspended particles, is determined. Section 4 presents numerical calculations and the comparison of the asymptotic and numerical solutions. The results are summarized in Section 5.

2. THE MATHEMATICAL MODEL

A system for one-dimensional model of deep bed filtration of suspension in a porous medium with variable porosity $g(S)$ and permeability $f(S)$ consists of two equations

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Here $\Lambda(S)$ is the filtration coefficient; $g(S)$, $f(S)$, $\Lambda(S)$ are the smooth non-negative functions.

It is assumed that the suspension with constant concentration of the suspended particles is injected at the filter inlet $x = 0$. At the initial time $t = 0$ there are no suspended particles in the porous medium and the concentration of the retained particles $s_0(x)$ is distributed unevenly over the filter. Appropriate initial and boundary conditions are

$$C|_{x=0} = 1; \quad (3)$$

$$C|_{t=0} = 0; \quad S|_{t=0} = s_0(x). \quad (4)$$

Conditions (3) and (4) determine a unique solution in the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$.

The concentration front of the suspended particles moves in porous media with the velocity

$$v(x) = \frac{f(s_0(x))}{g(s_0(x))} \quad (5)$$

along the characteristic Γ , given by the equation

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x(0) = 0. \quad (6)$$

The boundary Γ of the two phases satisfies the equation

$$t_r(x) = \int_0^x \frac{g(s_0(y))}{f(s_0(y))} dy. \quad (7)$$

Since the conditions (3) and (4) have not been agreed at the origin, according to the theory of characteristics [20] on the boundary Γ the solution C has a strong discontinuity; and the solution S has a weak discontinuity (the break of the derivative). Behind the concentration front in Ω_s the solution is positive $C > 0$, $S > 0$; ahead of the front in Ω_w the solution $C = 0$, $S = s_0(x)$. On the concentration front $\Gamma = \{t = t_r(x), 0 \leq x \leq 1\}$ the retained particles concentration

$$S|_{t=t_\Gamma(x)} = s_0(x). \quad (8)$$

In Ω_S the solution of the Goursat problem (1) – (3) (8) coincides with the solution of the original problem (1) – (4).

The system (1), (2) with constant coefficients

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \lambda C, \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

has a two-phase boundary line $t = x$. The conditions (3) and (4) determine an exact solution

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \begin{cases} e^{-\lambda x}, & t \geq x; \\ 0, & t < x; \end{cases} \\ S(x, t) &= \begin{cases} \lambda(t - x)e^{-\lambda x} + s_0(x), & t \geq x; \\ s_0(x), & t < x. \end{cases} \end{aligned}$$

In general, the problem (1) – (4) does not have an analytic solution. Below an asymptotics is constructed, and the results of numerical simulation are provided.

3. ASYMPTOTIC SOLUTION FOR A SMALL LIMIT DEPOSIT

Let the filtration coefficient $\Lambda(S) > 0$ for $0 \leq S < S_M$ and $\Lambda(S_M) = 0$. In this case, the concentration of the retained particles $S(x, t)$ does not exceed the limit value S_M . The blocking filtration coefficient has the form

$$\Lambda(S) = \lambda(S_M - S) + \lambda_2(S_M - S)^2 + O(S_M - S)^3. \quad (9)$$

Let

$$\begin{aligned} g(S) &= g_0 + g_1 S + O(S^2); \\ f(S) &= f_0 + f_1 S + O(S^2). \end{aligned} \quad (10)$$

The asymptotic solution for a small limit deposit S_M is constructed in the form

$$\begin{aligned} C &= 1 + S_M c_1 + O(S_M^2); \\ S &= S_M s_1 + S_M^2 s_2 + O(S_M^3). \end{aligned} \quad (11)$$

Substituting the expansions (10), (11) in equations (1), (2) and equating terms with the same powers of S_M , we obtain a system of recurrent equations

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = \lambda(1 - s_1); \quad (12)$$

$$g_0 \frac{\partial c_1}{\partial t} + f_0 \frac{\partial c_1}{\partial x} + g_1 \frac{\partial s_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial t} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} = \lambda(1 - s_1)c_1 - \lambda s_2 + \lambda_2(1 - s_1)^2. \quad (14)$$

Using the inequality $s_0(x) \leq S_M$ the condition (8) can be written as

$$S|_{t=t_\Gamma(x)} = S_M q(x), \quad 0 \leq q(x) \leq 1. \quad (15)$$

Conditions defining the unique solution of the system (12)-(14) follow from (3), (15):

$$s_1|_{t=t_\Gamma(x)} = q(x); \quad (16)$$

$$c_1|_{x=0} = 0; \quad (17)$$

$$s_2|_{t=t_\Gamma(x)} = 0. \quad (18)$$

The asymptotics of the two phase boundary line Γ can be obtained by expanding the integrand in (7) in a series of powers of S_M

$$\begin{aligned} \frac{g(q(y)S_M)}{f(q(y)S_M)} &= \frac{g_0 + g_1 q(y)S_M + O(S_M^2)}{f_0 + f_1 q(y)S_M + O(S_M^2)} = \\ &= \frac{g_0}{f_0} + \frac{g_1 f_0 - g_0 f_1}{f_0^2} q(y)S_M + O(S_M^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Substitution of the expansion (19) into the integral (7) gives

$$t_{\Gamma}(x) = \alpha x + \beta S_M \int_0^x q(y) dy + O(S_M^2), \quad (20)$$

where $\alpha = g_0 / f_0$, $\beta = (g_1 f_0 - g_0 f_1) / f_0^2$.

The solution of the equation (12), (16)

$$s_1 = 1 - (1 - q(x)) e^{-\lambda(t-t_{\Gamma}(x))}. \quad (21)$$

After the substitution of (21) into (13) the solution of (13) can be written in the form

$$c_1 = e^{-\lambda t} u(x). \quad (22)$$

The function $u(x)$ satisfies the equation

$$u' - \lambda \alpha u + e^{\lambda t_{\Gamma}(x)} K(x) = 0, \quad u(0) = 0, \quad (23)$$

$$K(x) = \frac{(g_1 + 1 - \alpha f_1) \lambda (1 - q(x)) + f_1 q'(x)}{f_0}.$$

From (20) the function

$$u = -e^{\lambda t_{\Gamma}(x)} \int_0^x K(y) dy \quad (24)$$

is the solution of (23) with an accuracy $O(S_M)$.

From (24), (22)

$$c_1 = -e^{-\lambda(t-t_{\Gamma}(x))} \int_0^x K(y) dy. \quad (25)$$

Substitution of the solutions (21) and (25) into equation (14) gives with an accuracy $O(S_M)$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} = -\lambda s_2 + (1 - q(x)) e^{-2\lambda(t-t_{\Gamma}(x))} \cdot \left(-\lambda \int_0^x K(y) dy + \lambda_2 (1 - q(x)) \right). \quad (26)$$

The solution of (26) with the condition (18)

$$s_2 = \left(e^{-\lambda(t-t_{\Gamma}(x))} - e^{-2\lambda(t-t_{\Gamma}(x))} \right) (1 - q(x)) \cdot \left(-\int_0^x K(y) dy + \frac{\lambda_2}{\lambda} (1 - q(x)) \right). \quad (27)$$

The functions (21), (25), (27) are the main terms of the asymptotic expansions (11). These expansions exactly satisfy the conditions (3) and (4); equation (1) is satisfied with accuracy $O(S_M^2)$, equation (2) - with accuracy $O(S_M^3)$.

4. NUMERICAL MODELING

The numerical calculation is performed by finite difference method for explicit TVD-scheme with superbee limiter function [21] for

$$\begin{aligned} g(S) &= 1 + 3S, \quad f(S) = 1 + 2S, \\ s_0(x) &= q(x) S_M, \quad q(x) = 0.5(1 - x), \\ S_M &= 0.5, \quad S_M = 0.1, \\ \lambda &= \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

The following figures illustrate the asymptotics (dashed line) and the numerical solution (solid line).

The figures show the break of suspended particles concentration $C(x, t)$ and the loss of smoothness of retained particles concentration $S(x, t)$ on the two-phase boundary Γ .

5. CONCLUSION

The filtration problem with the initial deposit is a generalization of deep bed filtration of the suspension in a porous medium with size-exclusion particle retention mechanism [15]. For a uniformly distributed initial deposit $s_0(x) = s_0 = \text{const}$ the substitution $\tilde{S} = S - s_0$ reduces the problem to the standard model. In case of the uneven initial deposit $s_0(x)$ the global asymptotic solution is constructed for a small limit deposit S_M .

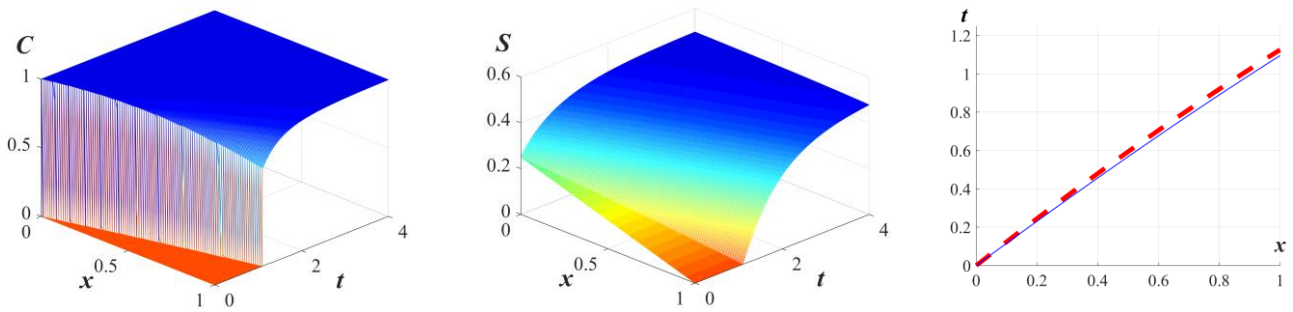


Figure 1. 3-D graphs of concentrations and the boundary of the two phases for $S_M = 0.5$.

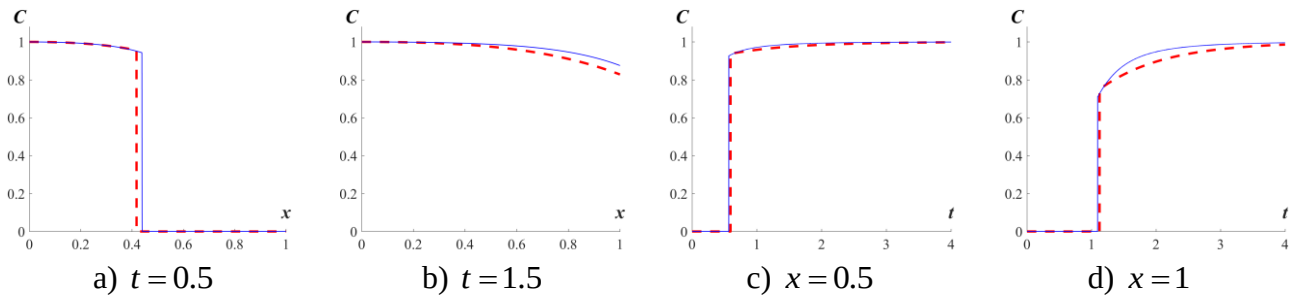


Figure 2. Graphs of the suspended particles concentration for $S_M = 0.5$.

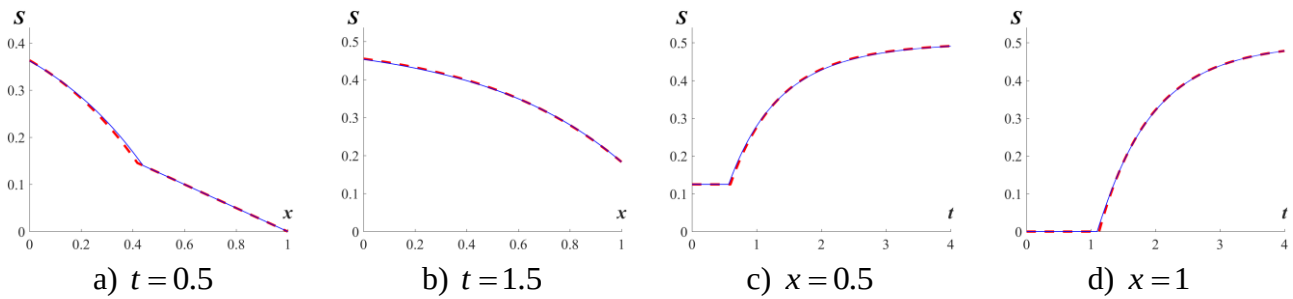


Figure 3. Graphs of the retained particles concentration for $S_M = 0.5$.

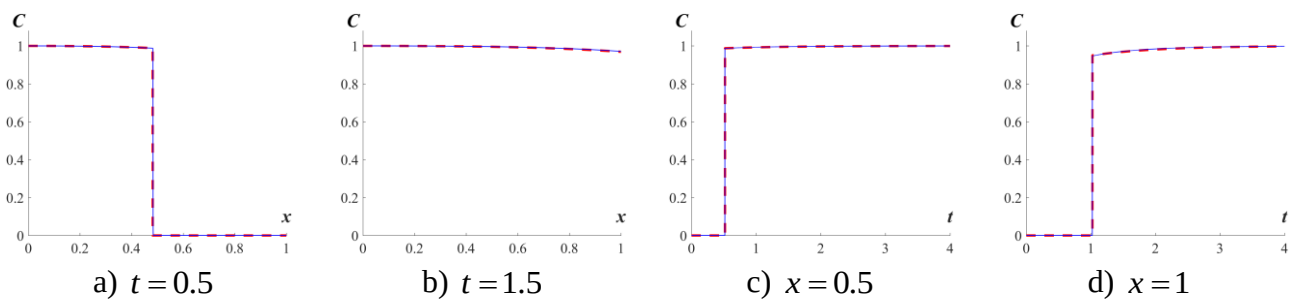


Figure 4. Graphs of the suspended particles concentration for $S_M = 0.1$.

The asymptotics is compared with a numerical solution of the problem. Figures 1 – 3 show that the asymptotics gives good approximation of the solution for relatively large limit deposit

$S_M = 0.5$; with decreasing limit deposit an asymptotic approximation error tends to zero rapidly (see fig. 4, 5).

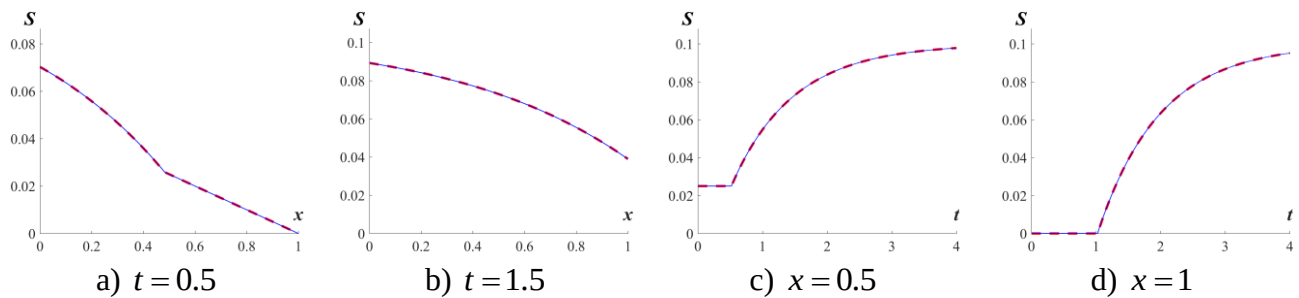


Figure 5. Graphs of the retained particles concentration for $S_M = 0.1$.

The asymptotic and numerical modeling can be used in the planning and analysis of experimental studies [22].

REFERENCES

1. **Khilar K., Fogler S.** Migration of Fines in Porous Media, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
2. **Tien C.** Principles of Filtration, Elsevier, Oxford, 2012.
3. **Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.** Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
4. **Bedrikovetsky P.** Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery with Applications to ex-USSR Oil and Gas Fields, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
5. **Logan D.J.** Transport Modelling in Hydrogeochemical Systems, Springer, N.Y., 2001.
6. **Mays D., Hunt J.R.** Hydrodynamic Aspects of Particle Clogging in Porous Media. // Environmental Science & Technology, 39, 2005, pp. 577–584.
7. **Domga R., Tchatchueng J.B., Togue-Kamga F., Noubactep C.** Discussing Porosity Loss of FeO Packed Water Filters at Ground Level. // Chemical Engineering Journal, 263 (2015) 127–134.
8. **Jegatheesan V., Vigneswaran S.** Deep Bed Filtration: Mathematical Models and Observations. // Critical Reviews in Environmental Science & Technology, 35(6), 2005, pp. 515-569.
9. **Tien C., Ramarao B.V.** Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols. 2nd ed. Elsevier, Amsterdam, 2007.
10. **Chrysikopoulos C.V., Syngouna V.I.** Effect of Gravity on Colloid Transport Through Water-Saturated Columns Packed with Glass Heads: Modeling and Experiments. // Environmental Science & Technology, 48, 2014, pp. 6805–6813.
11. **Payatakes A.S., Rajgopalan R., Tien C.** Application of Porous Medium Models to the Study of Deep bed Filtration. // Canadian Journal of Chemical Engineering, 52, 1974, pp. 727-731.
12. **Santos A., Araujo J.A.** Modeling Deep Bed Filtration Considering Limited Particle Retention. // Transport in Porous Media, 108(3), 2015, pp. 697-712.
13. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Filtration of Forward and Back Flow of Suspension in Porous Media. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 12(3), 2016, pp. 145-150.
14. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction. // Procedia Engineering, 153, 2016, pp. 157-161.
15. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media. // Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013, pp. 1-9.
16. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P.** Flow of Suspensions Through Porous Media – Application to Deep Filtration. // Journal of Industrial & Engineering Chemistry, 62(8), 1970, pp. 8-35.

17. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 41(5), 2007, pp. 556-564.
18. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic Model for Deep Bed Filtration. // *Chemical Engineering Journal*, 258, 2014, pp. 374-385.
19. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic Solution for Deep Bed filtration with small deposit, *Procedia Engineering*, 111 (2015) 491-494.
20. **Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.** Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
21. **Toro E.F.** Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, 3 ed., Springer, Dordrecht, 2009.
22. **Bedrikovetsky P.G., Marchesin D., Checaira F., Serra A.L., Resende E.** Characterization of Deep Bed Filtration System from Laboratory Pressure Drop Measurements. // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 32(3), 2001, pp. 167-177.

Кузьмина Людмила Ивановна, доцент, кандидат физико-математических наук, Департамент прикладной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, тел. +7(495) 772-95-90 *15219; e-mail: lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович, доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499) 183-59-94; e-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Галагуз Юрий Петрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499) 183-59-94; e-mail: yuri.galaguz@gmail.com.

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20, tel. +7(495) 77295 90 * 15219, e-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl'skoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994, e-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Yuri P. Galaguz, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl'skoe Shosse, 26, tel. +7 (499) 1835994, e-mail: yuri.galaguz@gmail.com.

DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-77-85

ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Р.Л. Лейбов

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассмотрены особенности оценивания матричных параметров кусочно-непрерывной модели по переходным процессам нелинейной модели объекта управления методом случайного поиска. Определен один из диапазонов возможного использования кусочно-непрерывной модели нелинейного объекта. Приведены результаты применения предлагаемого подхода при создании кусочно-непрерывной модели авиационного газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: нелинейный объект, кусочно-непрерывная модель, переходные процессы нелинейной модели, метод случайного поиска, диапазон возможного использования кусочно-непрерывной модели

NONLINEAR PLANT PIECEWISE-CONTINUOUS MODEL MATRIX PARAMETERS ESTIMATION

Roman L. Leibov

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
Moscow Aviation Institute (National Research University) , Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper presents a nonlinear plant piecewise-continuous model matrix parameters estimation technique using nonlinear model time responses and random search method. One of piecewise-continuous model application areas is defined. The results of proposed approach application for aircraft turbofan engine piecewise-continuous model formation are presented.

Keywords: Nonlinear plant, piecewise-continuous model, nonlinear model time responses, random search method, piecewise-continuous model application area

1. ВВЕДЕНИЕ

Для разработки алгоритмов управления, алгоритмов обнаружения, локализации, конкретизации и парирования отказов систем автоматического управления (САУ), а также для оценивания робастности этих систем и их алгоритмов используются линейные модели нелинейных объектов управления. Матричные параметры линейных моделей оцениваются по переходным процессам нелинейных моделей объектов управления. Несколько линейных моделей, матричные параметры которых должны оцениваться и сменяться друг

другом согласованно, составляют кусочно-линейную модель нелинейного объекта. Кусочно-непрерывная модель позволяет построить кусочно-линейную модель, состоящую из произвольного числа согласованных друг с другом линейных моделей. Точность такой кусочно-линейной модели может быть максимально приближена к точности кусочно-непрерывной модели. В данной работе рассматриваются структура, особенности оценивания матричных параметров и один из диапазонов возможного использования кусочно-непрерывной модели нелинейного объекта управления.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ, ЛИНЕЙНАЯ И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Нелинейная модель объекта управления, имеет вид [1], [2], [3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p, \mathbf{w}^p). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}^p$ — вектор состояния, $\mathbf{u}^p$ — вектор управления, $\mathbf{w}^p$ — вектор внешних воздействий, а $\mathbf{f}$ — нелинейная вещественная векторная функция. Координаты вектора состояния (переменные состояния) такого объекта управления, например авиационного газотурбинного двигателя (ГТД), это частоты вращения роторов, температуры и давления в различных сечениях проточной части двигателя. Координаты вектора управления (переменные управления) — это расход топлива, изменяемые геометрические характеристики проточной части двигателя, в частности, площадь критического сечения реактивного сопла и углы поворота направляющих аппаратов вентилятора и компрессора. Координаты вектора внешних воздействий (переменные внешних воздействий) это угол отклонения рычага управления двигателем (управляющее воздействие), а также высота и скорость полета (переменные внешних условий). Постоянные управляющее воздействие и внешние условия, входящие в вектор $\mathbf{s}\mathbf{w}$, определяют установившийся режим работы двигателя (рабочую точку), которому соответствуют вектор установившихся значений переменных управления $\mathbf{s}\mathbf{u}$ и вектор установившихся значений переменных состояния $\mathbf{s}\mathbf{x}$.

В небольшой окрестности произвольного r -ого установившегося режима нелинейный объект управления можно [1], [2], [3] приближенно описать с помощью линейной модели в нормированных отклонениях от установившихся значений

$$\dot{\mathbf{x}}^n = {}^r\mathbf{A}(\mathbf{x}^n - {}^r_s\mathbf{x}^n) + {}^r\mathbf{B}(\mathbf{u}^n - {}^r_s\mathbf{u}^n), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}^n$ — n -мерный вектор нормированных переменных состояния, а $\mathbf{u}^n$ — m -мерный вектор нормированных переменных управления

$$x_i^n = \frac{x_i}{\max_s |x_i|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$u_i^n = \frac{u_i}{\max_s |u_i|}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

${}^r\mathbf{A}$, ${}^r\mathbf{B}$ — матрицы динамической линейной модели для r -ого установившегося режима; ${}^r\mathbf{A}$, ${}^r\mathbf{B}$, $r = 1, 2, \dots, R$ матрицы динамической кусочно-линейной модели; ${}^r_s\mathbf{u}^n$, ${}^r_s\mathbf{x}^n$, $r = 1, 2, \dots, R$ вектора статических характеристики объекта управления.

Пусть у кусочно-непрерывной модели вектора нормированных установившихся значений переменных управления $\mathbf{s}\mathbf{u}^n$ и переменных состояния $\mathbf{s}\mathbf{x}^n$, а также матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются следующим образом

$$\mathbf{s}\mathbf{u}^n = {}^r_s\mathbf{u}^n + \theta({}^{r+1}_s\mathbf{u}^n - {}^r_s\mathbf{u}^n), \quad r = 1, \dots, R-1, \quad (5)$$

$$\mathbf{s}\mathbf{x}^n = {}^r_s\mathbf{x}^n + \theta({}^{r+1}_s\mathbf{x}^n - {}^r_s\mathbf{x}^n), \quad r = 1, \dots, R-1, \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = {}^r\mathbf{A} + \theta({}^{r+1}\mathbf{A} - {}^r\mathbf{A}), \quad r = 1, \dots, R-1, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = {}^r\mathbf{B} + \theta({}^{r+1}\mathbf{B} - {}^r\mathbf{B}), \quad r = 1, \dots, R-1, \quad (8)$$

где $0 \leq \theta < 1$, поскольку

$$\theta = \frac{\|\mathbf{x}^n\| - \|{}^r_s\mathbf{x}^n\|}{\|{}^{r+1}_s\mathbf{x}^n\| - \|{}^r_s\mathbf{x}^n\|},$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}^R_s\mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|{}^{r+1}_s\mathbf{x}^n\|}{\|{}^r_s\mathbf{x}^n\|}, \quad r = 1,$$

$$\frac{\|{}^r_s\mathbf{x}^n\|}{\|{}^R_s\mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}^R_s\mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|{}^{r+1}_s\mathbf{x}^n\|}{\|{}^R_s\mathbf{x}^n\|}, \quad r = 2, \dots, R-2,$$

$$\frac{\|{}^r_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}^R_s \mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}, \quad r = R-1. \quad (9)$$

3. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЦ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Для оценивания матриц кусочно-непрерывной модели, соответствующей R соседним установившимся режимам, для которых известны вектора нормированных установившихся значений переменных управления и переменных состояния

$${}^r_s \mathbf{u}^n, {}^r_s \mathbf{x}^n, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

используются переходные процессы нелинейной модели объекта, то есть наборы значений нормированного вектора состояния

$${}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_k), \quad k = 0, \dots, N,$$

а также нормированного вектора управления

$${}^{\text{НЛ}} \mathbf{u}^n(t_k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$, причем $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, где Δt это шаг дискретности.

Переходные процессы для переменных управления в разомкнутой системе управления представляют собой несколько последовательных ступенчатых воздействий, включающих в себя линейные функции времени, наклоны которых примерно соответствует переходным процессам в замкнутой системе управления. Эти линейные функции соединяют значения, соответствующие нескольким соседним установившимся режимам.

Оценивание матриц кусочно-непрерывной модели может быть сведено к задаче нелинейного программирования вида

$$\begin{aligned} & {}^r \mathbf{A}, {}^r \mathbf{B}, \quad r = 1, 2, \dots, R: \\ \min & \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\mathbf{x}^n(t_k) - {}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_k)]^T {}_x \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N [{}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_k) - {}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_0)]^T {}_x \mathbf{W}(t_k)}}} \right. \\ & \left. \frac{[{}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_k) - \mathbf{x}^n(t_k)]}{[{}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_k) - {}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_0)]} \right\} \\ & \mathbf{x}^n(t_{k+1}) = \mathbf{x}^n(t_k) + \\ & \Delta t \mathbf{A} [\mathbf{x}^n(t_k) - {}_s \mathbf{x}^n] + \Delta t \mathbf{B} [{}^{\text{НЛ}} \mathbf{u}^n(t_k) - {}_s \mathbf{u}^n], \\ & {}_s \mathbf{u}^n = {}^r_s \mathbf{u}^n + \theta ({}^{r+1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n), \\ & {}_s \mathbf{x}^n = {}^r_s \mathbf{x}^n + \theta ({}^{r+1}_s \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n), \\ & \mathbf{A} = {}^r \mathbf{A} + \theta ({}^{r+1} \mathbf{A} - {}^r \mathbf{A}), \\ & \mathbf{B} = {}^r \mathbf{B} + \theta ({}^{r+1} \mathbf{B} - {}^r \mathbf{B}), \\ & \theta = \frac{\|\mathbf{x}^n\| - \|{}_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}^{r+1}_s \mathbf{x}^n\| - \|{}_s \mathbf{x}^n\|}, \\ & \frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|{}^{r+1}_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}, \quad r = 1, \\ & \frac{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|{}^{r+1}_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}, \quad r = 2, \dots, R-2, \\ & \frac{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}^n\|}{\|{}_s \mathbf{x}^n\|}, \quad r = R-1, \\ & k = 0, 1, \dots, N-1 \}. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь ${}_x \mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы, а начальное значение вектора состояния кусочно-непрерывной модели

$$\mathbf{x}^n(t_0) = {}^{\text{НЛ}} \mathbf{x}^n(t_0).$$

Задача нелинейного программирования решается методом случайного поиска. В качестве начального приближения используются матрицы кусочно-линейной

модели [1]. Случайный поиск осуществляется в диапазоне ± 0.1 от начального значения каждого из элементов матриц ${}^r\mathbf{A}, {}^r\mathbf{B}$, $r=1,2,\dots,R$.

Ошибки кусочно-непрерывной модели рассчитываются по каждой из переменных состояния

$${}_i\Delta_\infty = \max_{k=1,\dots,N} |x_i^n(t_k) - {}^{\text{НЛ}}x_i^n(t_k)|, \quad i=1,\dots,n. \quad (11)$$

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦ КУСОЧНО- НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для определения матриц кусочно-непрерывной модели по переходным процессам нелинейной модели двухвального двухконтурного турбореактивного авиационного ГТД в разомкнутой САУ. Переходные процессы нелинейной модели начинаются на установившемся режиме, соответствующем максимальному режиму работы при значении угла отклонения рычага управления двигателем $\alpha_{\text{руд}} = 68^\circ$, а затем соответствуют переходным процессам для переменных управления в разомкнутой системе, которые представляют собой несколько последовательных ступенчатых воздействий. Каждое из этих воздействий соответствует изменению значения угла отклонения рычага управления двигателем $\alpha_{\text{руд}} = 60^\circ$, $\alpha_{\text{руд}} = 50^\circ$, $\alpha_{\text{руд}} = 40^\circ$, $\alpha_{\text{руд}} = 30^\circ$, $\alpha_{\text{руд}} = 25^\circ$.

В рассматриваемом примере высота и скорость полета равны нулю. Четыре переменные управления ($m=4$) соответствуют расходу топлива в основной камере сгорания $G_{\text{то}}$, площади критического сечения реактивного сопла $F_{\text{кр}}$, углу поворота направляющих аппаратов вентилятора $\varphi_{\text{нав}}$ и углу поворота направляющих аппаратов компрессора $\varphi_{\text{нак}}$.

Пять переменных состояния объекта управления ($n=5$) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя $n_{\text{в}}$, частоте вращения компрессора двигателя $n_{\text{к}}$, давлению торможения за компрессором $P_{\text{к}}^*$, давлению торможения за турбиной $P_{\text{т}}^*$ и температуре торможения за турбиной $T_{\text{т}}^*$.

Вектора нормированных установившихся значений управления и состояния для перечисленных выше режимов

$$\begin{aligned} {}^6_s\mathbf{u}^n &= [1, 0.4515, 0, 0]^T, \\ {}^6_s\mathbf{x}^n &= [1, 1, 1, 1]^T, \\ {}^5_s\mathbf{u}^n &= [0.9442, 0.4441, -0.0893, 0]^T, \\ {}^5_s\mathbf{x}^n &= [0.9741, 0.9834, 0.9656, 0.9783, 0.9790]^T, \\ {}^4_s\mathbf{u}^n &= [0.7713, 0.4441, -0.3741, 0]^T, \\ {}^4_s\mathbf{x}^n &= [0.9176, 0.9414, 0.8355, 0.8618, 0.9225]^T, \\ {}^3_s\mathbf{u}^n &= [0.5724, 0.4441, -0.7402, -0.1072]^T, \\ {}^3_s\mathbf{x}^n &= [0.8449, 0.8991, 0.6724, 0.7125, 0.8507]^T, \\ {}^2_s\mathbf{u}^n &= [0.2880, 0.4441, -1, -0.2264]^T, \\ {}^2_s\mathbf{x}^n &= [0.7231, 0.8399, 0.4505, 0.4787, 0.6900]^T, \\ {}^1_s\mathbf{u}^n &= [0.1864, 0.4441, -1, -0.4019]^T, \\ {}^1_s\mathbf{x}^n &= [0.6202, 0.7929, 0.3348, 0.3788, 0.6114]^T. \end{aligned}$$

Матрицы кусочно-непрерывной модели, соответствующие рассматриваемым соседним установившимся режимам, оцениваются с помощью (10) методом случайного поиска

$${}^6_s\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.8208 & 1.1770 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0697 & -1.6507 & 0 & 0 & 0 \\ 9.7385 & 11.5191 & -20.1171 & -13.1868 & 0 \\ 9.6711 & 3.5115 & -5.5917 & -19.3568 & 0 \\ 2.9867 & -6.8163 & -3.4159 & -3.1171 & -30.0422 \end{bmatrix},$$

$${}^6\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.6093 & 0.8201 & -0.1387 & 0.1788 \\ 0.4454 & 0.5736 & -0.0387 & -0.2204 \\ 10.8333 & -40.9063 & 2.6207 & 1.7204 \\ 7.1854 & -39.0036 & 2.1503 & 0.5060 \\ 16.0831 & 3.7726 & -0.8053 & -1.2318 \end{bmatrix},$$

$${}^5\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.0989 & 1.0320 \\ 0.1873 & -1.8560 \\ 9.7914 & 11.5725 \\ 9.7835 & 3.6756 \\ 2.8621 & -6.9600 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20.0301 & -13.1503 & 0 \\ -5.5720 & -19.2893 & 0 \\ -3.4286 & -3.2235 & -29.9508 \end{bmatrix},$$

$${}^5\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5647 & 2.2715 & -0.4239 & 0.2514 \\ 0.6004 & 0.5737 & 0.1194 & -0.2008 \\ 14.2718 & -47.2595 & 2.2365 & -1.5488 \\ 9.2314 & -44.3070 & 2.4864 & -2.1365 \\ 17.9006 & 1.8247 & -0.4124 & -1.6880 \end{bmatrix},$$

$${}^4\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.6270 & 1.2922 \\ 0.0649 & -2.0180 \\ 11.2399 & 12.6572 \\ 10.4333 & 4.6735 \\ 2.8845 & -6.9473 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -19.7169 & -11.5759 & 0 \\ -5.0344 & -18.7211 & 0 \\ -3.4493 & -3.2843 & -29.9813 \end{bmatrix},$$

$${}^4\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5052 & 0.9260 & -0.0118 & 0.1786 \\ 0.5892 & 0.5448 & -0.0591 & -0.2817 \\ 13.7952 & -31.6776 & 1.7159 & 3.6744 \\ 11.4705 & -32.1760 & 1.7430 & 2.3281 \\ 16.7038 & -3.8779 & 0.9959 & 2.3086 \end{bmatrix},$$

$${}^3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.3519 & 1.7300 \\ 0.1079 & -2.8400 \\ 13.2768 & 14.6302 \\ 9.7373 & 4.2626 \\ 2.8276 & -3.5453 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18.6061 & -10.3892 & 0 \\ -4.2626 & -15.6408 & 0 \\ -3.5453 & -3.2605 & -30.0025 \end{bmatrix},$$

$${}^3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5980 & 1.8505 & -0.1297 & 0.1247 \\ 0.7252 & -0.1001 & -0.1947 & -0.3271 \\ 13.2790 & -20.5240 & 0.0531 & 1.8069 \\ 9.1333 & -19.3408 & -0.2446 & 1.4193 \\ 25.5911 & -9.0120 & -1.0117 & -3.2289 \end{bmatrix},$$

$${}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.7279 & 1.9401 \\ 0.5693 & -2.5114 \\ 12.8263 & 14.9954 \\ 11.4961 & 6.4707 \\ 2.8544 & -6.8024 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18.7520 & -11.9884 & 0 \\ -4.5819 & -17.7373 & 0 \\ -3.4658 & -3.2515 & -29.9919 \end{bmatrix},$$

$${}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.9329 & 0.4549 & 0.1908 & 0.0990 \\ 0.5745 & -0.0184 & -0.1399 & -0.1354 \\ 11.4558 & -10.6185 & -0.1116 & 2.1666 \\ 6.7190 & -12.0750 & -0.2529 & 1.0489 \\ 32.4494 & -3.5233 & 2.0774 & -2.2863 \end{bmatrix},$$

$${}^1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.9944 & 0.9354 \\ 1.2707 & -2.6249 \\ 12.5384 & 14.7670 \\ 11.4520 & 6.6307 \\ 2.0775 & -7.2209 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18.6298 & -11.9759 & 0 \\ -4.5503 & -17.6851 & 0 \\ -4.9486 & -3.4682 & -29.4721 \end{bmatrix},$$

$${}^1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.7743 & 1.1148 & -0.2212 & -0.0727 \\ 1.4304 & -0.5693 & 0.2746 & -0.0064 \\ 14.3639 & -10.6913 & -2.1411 & 1.2968 \\ 8.7236 & -12.4513 & -0.8109 & 0.8420 \\ 38.9908 & -2.4710 & -0.1666 & 1.5486 \end{bmatrix}.$$

При оценивании $k=1,...,2001$, $\Delta t=0.025$, а весовые матрицы единичные.

На рис. 1 показаны переходные процессы в разомкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной модели и кусочно-непрерывной модели, которая описывает нелинейный объект в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

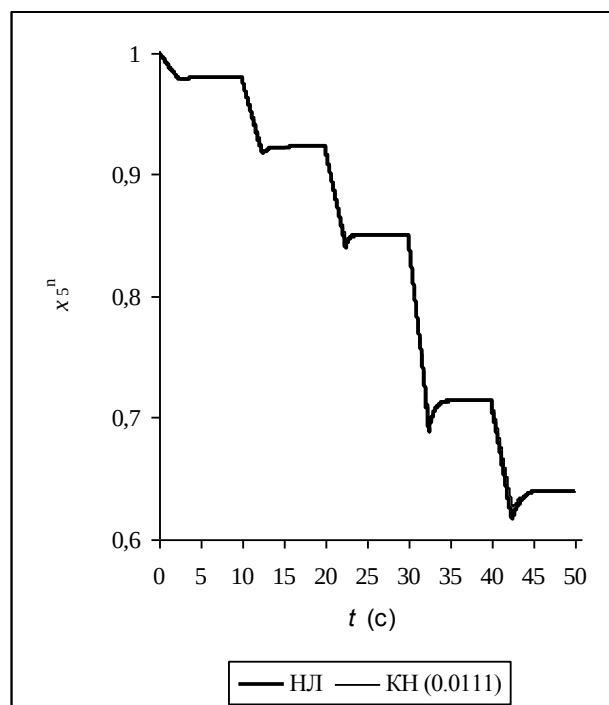


Рисунок 1. Переходные процессы в разомкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели, которая описывает нелинейный объект в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

Ошибки нормированных переменных состояния x_1^n , x_2^n , x_3^n , x_4^n и x_5^n кусочно-непрерывной модели в разомкнутой САУ 0.0108, 0.0026, 0.0057, 0.0111.

На рис. 2, 3, 4, 5, 6 показаны переходные процессы в замкнутой САУ нормированных переменных состояния x_1^n , x_2^n , x_3^n , x_4^n и x_5^n нелинейной и кусочно-непрерывной моделей при изменении значения угла отклонения рычага управления двигателем от $\alpha_{руд} = 68^\circ$ до $\alpha_{руд} = 25^\circ$, а затем от $\alpha_{руд} = 25^\circ$ до $\alpha_{руд} = 68^\circ$.

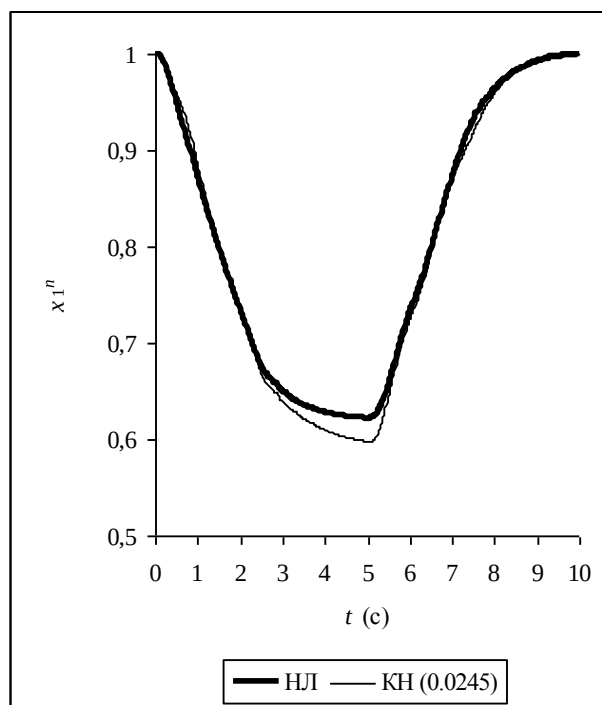


Рисунок 2. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

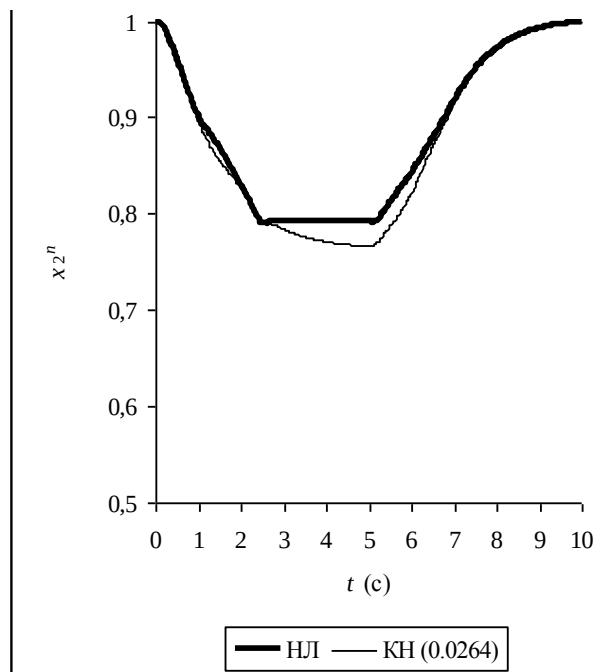


Рисунок 3. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния

x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

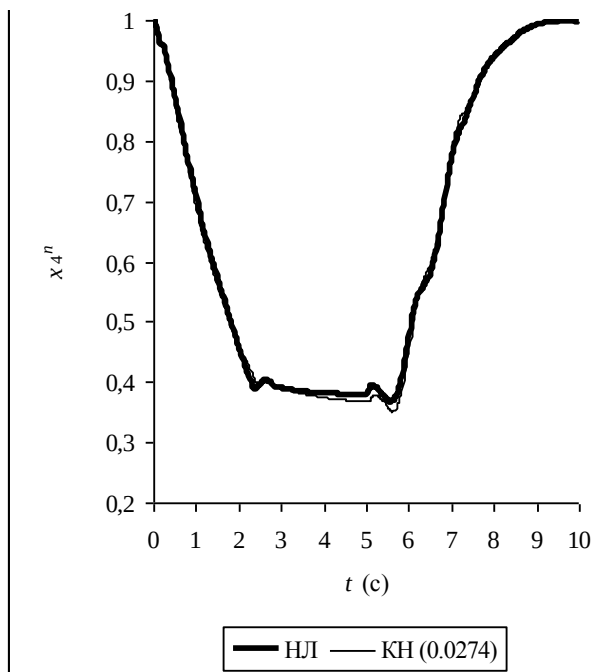


Рисунок 5. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния

x_4^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

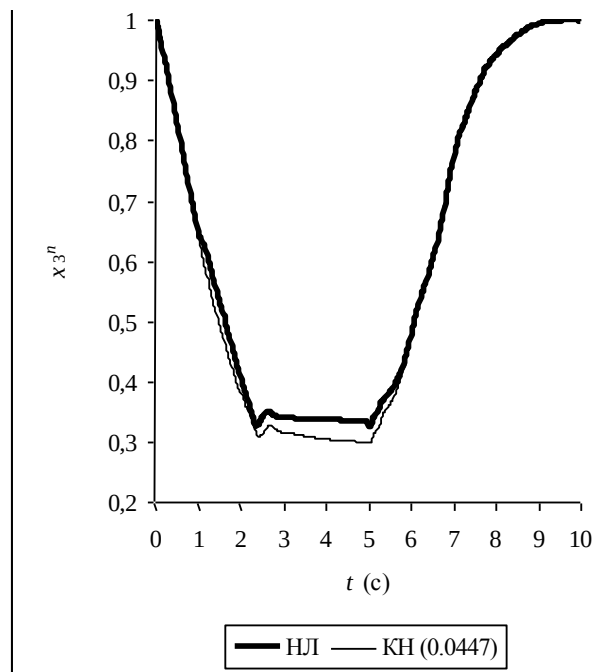


Рисунок 4. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

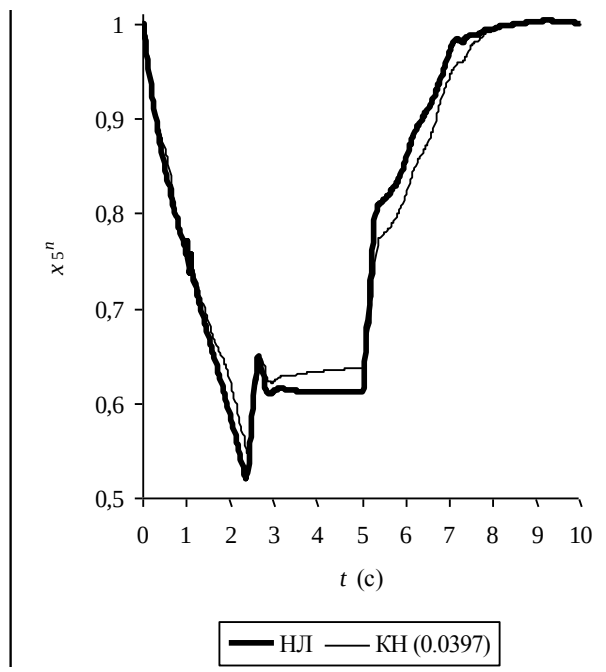


Рисунок 6. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-непрерывной (КН) модели в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

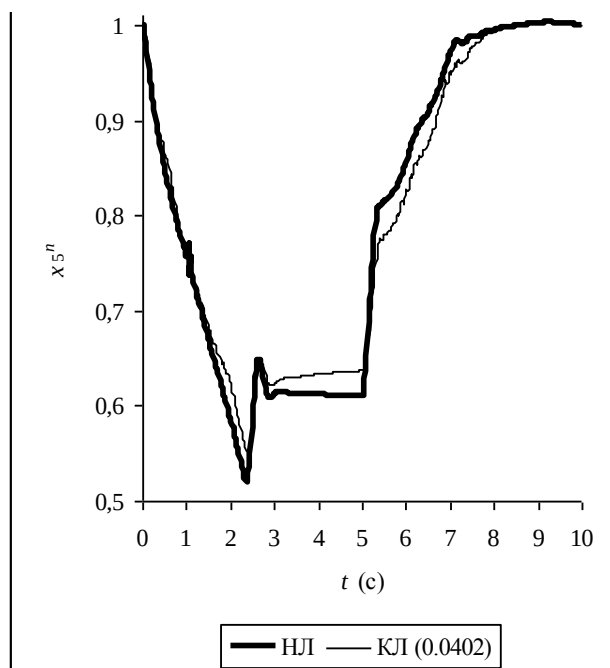


Рисунок 7. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели, полученной из кусочно-непрерывной модели через каждые 0.1 с, в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

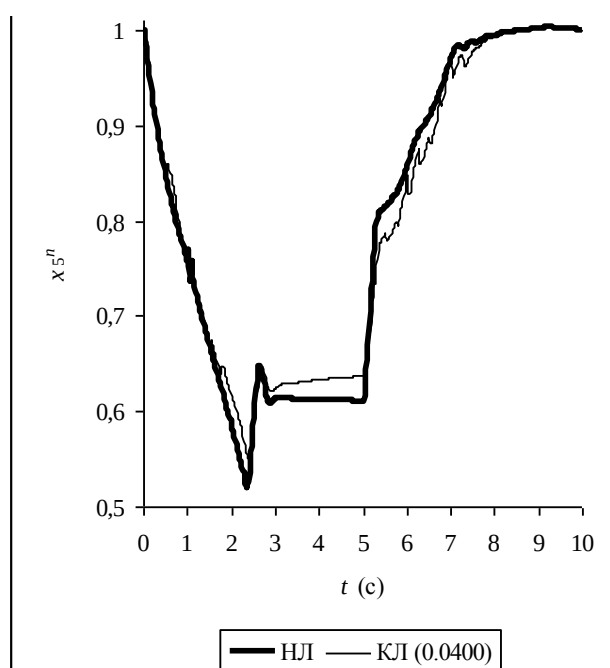


Рисунок 8. Переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели, полученной из кусочно-непрерывной модели через каждые 0.400 с, в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

кусочно-линейной (КЛ) модели, полученной из кусочно-непрерывной модели через каждые 0.25 с, в окрестностях пяти соседних установившихся режимов.

На рис. 7, 8 показаны переходные процессы в замкнутой САУ нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной модели и кусочно-линейной модели, полученной из кусочно-непрерывной модели.

Для получения кусочно-линейных моделей из кусочно-непрерывной модели через каждые 0.1 с и 0.25 с фиксируются вектора нормированных установившихся значений переменных управления u^n и переменных состояния sx^n , а также матрицы **A** и **B** кусочно-непрерывной модели. При увеличении этого интервала ошибки нормированной переменной состояния x_5^n кусочно-линейной модели растут и становятся неприемлемыми. Ошибки других нормированных переменных состояния кусочно-линейной модели растут гораздо медленнее.

Ошибки кусочно-непрерывной и кусочно-линейной моделей по каждой из переменных состояния рассчитываются с помощью (11).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика оценивания матричных параметров кусочно-непрерывной модели нелинейного объекта управления.

В качестве исходных данных для оценивания матриц кусочно-непрерывной модели с помощью алгоритма случайного поиска, используются переходные процессы переменных управления и переменных состояния нелинейной модели объекта.

Результаты данной работы могут быть применены при разработке алгоритмов управления нелинейными объектами, которые приближенно описываются с помощью кусочно-непрерывных и кусочно-

линейных моделей, а также алгоритмов обнаружения отказов датчиков и исполнительных устройств в их САУ.

Engineering, 2015, Volume 11, Issue 2, pp. 107-130.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лейбов Р.Л.** Прикладные методы теории управления. – М.: АСВ, 2014. – 192 с.
2. **Лейбов Р.Л.** Методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2013, Volume 9, Issue 4, pp. 186-198.
3. **Лейбов Р.Л.** Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2015, Volume 11, Issue 2, pp. 107-130.

Лейбов Роман Львович, кафедра прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; кафедра систем автоматического управления летательных аппаратов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, тел./факс +7(499)183-59-94; e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

Roman L. Leibov, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Highway, 129337, Moscow, RUSSIA; Department of Control Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe Highway, 125993, Moscow, RUSSIA, tel./fax +7(499)183-59-94; e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

REFERENCES

1. **Leibov R.L.** Prikladnye Metody Teorii Upravlenija [Applied Methods of Control Theory]. Moscow, ASV Publishing House, 2014, 192 pages.
2. **Leibov R.L.** Metodika Postroenija Kusochno-Linejnoj Modeli Nelinejnogo Objekta [Method of Construction of Piecewise Linear Model of Nonlinear Object]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2013, Volume 9, Issue 4, pp. 186-198.
3. **Leibov R.L.** Ispol'zovanie Bilinejnoj Modeli dlja Uluchshenija Svoystv Kusochno-Linejnoj Modeli Nelinejnogo Objekta Upravlenija [Use of a Bilinear Model to Improve the Properties of a Piecewise Linear Model of a Nonlinear Control Object]. // International Journal for Computational Civil and Structural

DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-86-102

ГОТОВЫ ЛИ МЫ ПЕРЕЙТИ К НЕЛИНЕЙНОМУ АНАЛИЗУ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ?

А.В. Перельмутер^{1,2}, В.В. Тур²

¹ НП ООО SCAD Soft, г. Киев, УКРАИНА

² Брестский государственный технический университет, г. Брест, БЕЛАРУСЬ

Аннотация: Указывается на декларативность нормативных требований относительно обязательности выполнения нелинейных расчетов объектов строительства. Приводится перечень проблем, отсутствие решения которых мешает полноценному использованию нелинейного анализа в проектировании. Утверждается, что на настоящем этапе нелинейные расчеты можно рассматривать лишь как некоторый дополнительный инструмент, который используют в тех случаях, когда применение простых стандартных методов расчета сечений является недостаточным.

Ключевые слова: нелинейный анализ, конструктивная система, формат безопасности, надежность

WHETHER WE ARE READY TO PROCEED TO A NONLINEAR ANALYSIS AT DESIGNING?

Anatoly V. Perelmuter¹, Victor V. Tur²

¹ SCAD Soft Ltd., Kyiv, UKRAINE

² Brest State Technical University (BSTU), Brest, BELARUS

Abstract: Despite of the fact that in recent years the non-linear analysis is considered as an advanced method of structural analysis, the basic requirements, which are associated with this method in actual Design Codes, are often vague and declarative without clear comments. The main problems, which must be solved for implementation of the non-linear analysis in practical design, are discussed. It was shown, that currently non-linear analysis can be considered as an additional tool, which is utilizing for limit states checking in special cases, for example, checking of the structural robustness in accidental design situation.

Keywords: non-linear analysis, structural system, safety format, reliability

ВВЕДЕНИЕ

Вся логика развития строительной науки и в особенности таких ее разделов как строительная механика (теория сооружений) и теория конструктивных форм, ведут к тому, что необходим учет факторов, позволяющих физически более точно определять напряженное и деформированное состояние конструктивного элемента, работающего в составе конструктивной системы. И в качестве одного из актуальных направлений исследований выдвигается проблема учета при выполнении расчетных процедур нелинейного поведения конструктивного комплекса.

Необходимость расчета конструкций на устойчивость и стремление полнее использовать возможности конструкционных материалов потребовало учета конечных перемещений и перехода к общим нелинейным зависимостям напряжений от деформаций. К этому же ведет проектирование по методу предельных состояний (*англ. Limit States Design*), поскольку именно в окрестности предельного состояния реализуется нелинейное поведение конструкций. Приступая к рассмотрению проблемы применения нелинейного анализа при проектировании конструктивных систем, введем некоторые ограничения. Во-первых, в настоя-

щей статье не будут критически рассмотрены особенности организации собственно расчетных процедур в конечно-элементных комплексах, декларирующих возможности выполнения нелинейного анализа. Хотя опосредованно, нам придется обращаться к необходимости оценивания статистических параметров ошибки моделирования для конкретного вычислительного инструмента, что непосредственно связано с принятой расчетной стратегией и уровнями аппроксимаций.

Во-вторых, обширная национальная и зарубежная литература, посвященная нелинейным проблемам строительной механики (см., например, [2, 5, 20, 9, 11, 22, 23, 24, 25, 27]), рассматривает в основном способы определения напряженно-деформированного состояния для нелинейных задач, и мало освещает вопрос о месте нелинейного анализа в процессе реального проектирования строительных конструкций, практически не затрагивая вопросы использования результатов нелинейного анализа. Изучение публикаций, относящихся к проблеме, даёт основание утверждать, что термин «**нелинейный анализ**» (англ. *Non-linear Analysis*) применяется различными авторами для обозначения двух типов задач. К задачам *первого типа* может быть отнесен нелинейный конечно-элементный анализ отдельных конструктивных элементов и простейших конструктивных систем (неразрезных балок, плоских простых рам и т.д.), в рамках которого предпринимается попытка физического моделирования поведения конструкции под нагрузкой с учетом трещинообразования, совместной работы арматуры с бетоном, нелинейных аппроксимаций диаграмм деформирования для материалов и т.д. Для этих целей применяют мощные («тяжеловесные») вычислительные комплексы, оснащенные библиотеками специальных конечных элементов. В данном случае нелинейный анализ рассматривается, главным образом, как дополнительный исследовательский инструмент, позволяющий с определенными допущениями выполнять численный эксперимент

при решении задач локального сопротивления в узлах, контактных задач и т.д., при отсутствии обоснованных аналитических моделей. Говорить о применении нелинейного анализа в описанной (как правило 3-D) постановке к реальному проектированию, по крайней мере, преждевременно.

К задачам *второго типа* можно отнести нелинейный конечно-элементный анализ идеализированных конструктивных систем, когда, например, моделирование выполняется на уровне стержневой аппроксимации.

Такой анализ ближе к практическому проектированию и позволяет оптимизировать решения для сложных статически неопределимых конструктивных систем, выполнить проверки живучести конструктивных систем в особых расчетных ситуациях, а также произвести оценивание технического состояния существующих конструкций. В данном случае моделирование нелинейной работы связывают, как правило, с врезкой различных типов пластических шарниров с заданными свойствами.

Таким образом, обращаясь к вопросам проектирования, в данной статье рассматриваются задачи, относящиеся, главным образом, ко *второму типу*.

Вместе с тем среди специалистов различного уровня бытует иллюзия полной готовности перехода к «нелинейному проектированию». Это мнение базируется на некотором локальном анализе проектной ситуации и не рассматривает в полной мере весь круг возникающих здесь вопросов.

ДЕКЛАРАЦИЯ ИЛИ ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ

Отсутствие комплексного подхода к проблеме привело к тому, что в последние годы декларативные требования относительно применения нелинейного анализа поведения конструкций все чаще включаются в нормы проектирования строительных конструкций. Вот типичные примеры:

«5.1.2 Расчет бетонных и железобетонных конструкций (линейных, плоскостных, пространственных, массивных) по предельным состояниям первой и второй групп производят по напряжениям, усилиям, деформациям и перемещениям, вычисленным от внешних воздействий в конструкциях и образуемых ими системах зданий и сооружений с учетом физической нелинейности (неупругих деформаций бетона и арматуры), возможного образования трещин и в необходимых случаях - анизотропии, накопления повреждений и геометрической нелинейности (влияние деформаций на изменение усилий в конструкциях)» [32].

«Стальные конструкции следует, как правило, рассчитывать как единые пространственные системы с учетом факторов, определяющих напряженное и деформированное состояние, особенности взаимодействия элементов конструкций между собой и основанием, геометрической и физической нелинейности, свойств материалов и грунтов» [29].

К сожалению, нормы проектирования, которые декларируют необходимость выполнения нелинейных расчетов, не содержат указаний, как по их выполнению, так и трактовке полученных результатов расчета.

И абсолютно не ясно, о каком расчете идет речь. Ведь все проектные расчеты представляют собой двухэтапную процедуру:

- определение напряженно-деформированного состояния
- проверка прочности и устойчивости элементов конструкции.

Нормы не говорят, к какому этапу расчета относится «нелинейное требование». Правила, содержащиеся в нормах проектирования конструкций, базируются, главным образом, на классических процедурах, использующих линейно-упругий анализ для определения эффектов воздействий с последующей проверкой отдельных критических сечений с использованием глубоко нелинейных моделей сопротивления. И если речь идет только

о втором этапе расчетной процедуры, то и делать ничего не следует.

Если же речь идет о первом этапе, то остается не ясным как использовать его результаты при проверке прочности и устойчивости элементов конструкции, применять ли те же коэффициенты, которые используются по результатам линейного анализа или же вводить другие (какие?) и т.п. При этом обязательным условием остается обеспечение требуемого уровня надежности, установленного действующими нормами. Таким образом, формат безопасности при выполнении нелинейных расчетов становится одной из важнейших проблем, которой, хотя бы в общих чертах, коснемся далее.

В принципе, при применении нелинейного анализа мы не можем однозначно выделить два названных этапа¹. Так, применительно к железобетонным конструкциям предлагалось рассмотрение объединенного предмета под названием «нелинейная механика железобетона».

Например, остается не совсем ясным вопрос о применимости к результатам расчета по деформированной схеме такого, например, понятия, как коэффициент продольного изгиба φ , используемый при проверке устойчивости сжатых стальных стержней. Ведь при определении коэффициента φ уже один раз использовался расчет по деформированной схеме.

ГОТОВНОСТЬ НОРМАТИВНОЙ БАЗЫ

Внедрение нелинейных расчетов в практику проектирования стало возможным с одной стороны, благодаря интенсивному развитию компьютерной техники, а с другой — в результате разработки программных продуктов, реализующих нелинейные расчетные процедуры. Но при этом проектировщик

¹ Заметим, что в некоторых задачах рассматривающих только геометрическую нелинейность такая возможность сохраняется.

натывается на ряд противоречий и первым (не всегда замечаемым) в этом ряду стоит правило применения метода расчетных предельных состояний в форме метода частных коэффициентов надежности [17, 6], значения которых обоснованы сегодня линейным вероятностным анализом. При этом критерии проверок предельного состояния, сформулированные в терминах предельных усилий, могут оказаться неприменимым, когда отсутствует пропорциональность между воздействиями (нагрузками) на систему и эффектами воздействий.

В соответствии с EN 1990 [18] требования надежности при проверках предельных состояний обеспечиваются при применении следующих методов:

- полностью вероятностного метода, в соответствии с общим форматом безопасности;
- полувероятностного метода частных коэффициентов;
- расчетами, подкрепляемыми результатами испытаний.

В рамках вероятностного подхода функция плотности распределения вероятности сопротивления $r(r)$ формулируется с использованием нелинейных моделей с учетом статистической изменчивости характеристик свойств материалов, геометрических характеристик, ошибки моделирования модели сопротивления и т.д. Безопасность оценивают опираясь на нормируемое целевое значение индекса надежности или связанной с ним вероятности отказа, значения которых содержатся в EN 1990.

Следует отметить, что вероятностное моделирование хотя и позволяет напрямую получить расчетное значение сопротивления, но является трудоемкой процедурой, требующей не только существенных затрат времени, но и соответствующей подготовки специалистов.

Полностью вероятностный подход, более детально рассмотренный, например, в наших работах [34, 13], применяется для калибровки значений частных коэффициентов, ис-

пользуемых при практическом проектировании. В большинстве случаев при нелинейных расчетах для упрощения и без того сложной процедуры используют т.н. раздельную калибровку частных коэффициентов для сопротивлений и для воздействий (при принятых коэффициентах чувствительности при одностороннем оценивании согласно ISO 2394).

Вместе с тем, как показано в [11], может оказаться неприемлемым раздельное рассмотрение моделей неопределенности воздействий и неопределенности сопротивления конструкции (рис. 1). Кроме того и сама процедура вероятностного оценивания имеет ряд неопределенностей, требующих отдельного детального обсуждения.

Поэтому практически во всех актуальных нормах проектирования для проверок предельных состояний применяют полувероятностный метод частных коэффициентов. Так, в соответствии с п.6.1(1)P EN 1990 [6] *«метод частных коэффициентов следует применять для подтверждения того, что во всех соответствующих расчетных ситуациях ни одно из значимых предельных состояний не будет превышено, если в расчетных моделях воздействий (эффектов воздействий) и моделях сопротивлений приняты расчетные значения базисных переменных»*.

Очевидно не требует дополнительного обсуждения тот факт, что нелинейный анализ, базирующийся на применении **расчетных** значений прочностных и деформационных характеристик свойств материалов (как базисных переменных модели сопротивления), представленных экстремально низкими значениями, соответствующими назначенным нормами квантилям, которые не отражают реальных свойств материалов, в ряде случаев приводит не только к нереалистичным перераспределениям эффектов воздействий, но и формам разрушения. Кроме того, применение т.н. *«расчетных»* диаграмм деформирования материалов (с *расчетными* значениями прочностей и относительных деформаций в параметрических точках) ведет к существен-

ному искажению матрицы жесткостей конечно-элементной модели в процессе реализации итерационной процедуры нелинейного анализа. Учитывая это обстоятельство европейские нормы [18] ограничивают прямое применение метода частных коэффициентов при выполнении нелинейных расчетов.

Так, в разделе 6.2 EN 1990 содержится следующая запись: "для нелинейных расчетов и расчетов на усталость при циклических нагружениях следует применять подробные правила, изложенные в соответствующих частях EN 1991-EN 1999". Применительно к проектированию железобетонных конструкций в EN 1992 [26] (п.5.7.4 (3) Р) данное требование расширено до... общей формулировки вида: "при выполнении нелинейных расчетов следует использовать характеристики материалов, которые позволяют наиболее реально отображать жесткостные характеристики конструкции, но учитывают погрешности (неопределенности) расчетной модели, описывающей разрушение».

Представленное требование, имеющее значение «принципа» (обозначено литерой Р), приводит, по-существу, к оцениванию средних сопротивлений, выраженных в терминах воздействий с последующим делением на некоторый глобальный частный коэффициент безопасности, учитывающий погрешности модели сопротивления. Следует отметить, что в целом ряде предварительных версий EN 1992 (EC2) условия метода частных коэффициентов были записаны отдельно для проверок, основанных на расчетах критических сечений (традиционная форма) и нелинейных расчетов конструкций (при оценивании т.н. *глобального сопротивления*).

В окончательной версии EN 1992 термин «глобальное сопротивление» обозначен только общей записью в тексте, цитированном выше. Однако в версии **fib** Model Code 2010 [10] данный термин используется по-прежнему, применительно к выполнению нелинейных расчетов. В соответствии с [13] термин «глобальное сопротивление (англ. *global resistance*)» используется для оценива-

ния конструктивной системы на уровне более высоком, чем отдельные сечения. По сути метод глобального сопротивления является полувероятностным методом частных коэффициентов и может быть записан в форме детерминистического неравенства вида:

$$E(\sum \gamma_G G_k + \sum \gamma_Q Q_k) \leq \frac{R(f_{ym}, f_{cm}, a_{nom})}{\gamma_{GL}} \quad (1)$$

где $R(\dots)$ – среднее значение сопротивления, выраженное в терминах прямого/непрямого воздействия и получаемое из результата нелинейного расчёта; γ_{GL} – глобальный коэффициент безопасности.

В изложении EN 1992 и кодекса-образца **fib** Model Code 2010 правая часть неравенства (1) представлена следующим образом:

$$R_d = \frac{r(f_m, \dots, a_d)}{\gamma_R \cdot \gamma_{Rd}} \quad (2)$$

На первый взгляд запись вида (2) вполне логична и не вызывает отторжения. Однако, при ближайшем рассмотрении пояснений к (2), приведенных в [24], возникает вначале недоумение, а, затем и возмущение. Проблема кроется в совершенно формальном подходе принятом при калибровке частного коэффициента безопасности с целью получения некоего единого значения независимо от формы разрушения элемента. (кстати, нечто подобное нам уже предлагалось в виде единых коэффициентов $\dots = 1.35$ и 1.5 для постоянных и переменных воздействий независимо от вида конструкций).

Детально данный вид калибровок критически рассмотрен в публикациях [28,29]. Для того, чтобы получить единое значение глобального коэффициента ($\gamma_{GL} = \gamma_{Rd} \cdot \gamma_R$) независимо от формы разрушения железобетонного элемента (по растянутой арматуре или сжатому бетону) авторы [27] вводят в MC2010 некую формальную величину «средней» прочности бетона, полностью ли-

шенную какого-либо (а в первую очередь — статистического) смысла : $f_{cm} \cong 0,85 f_{ck}$ (!).

Это означает, что **среднее** значение прочности бетона на 15% ниже его **5% -ной квантили**, соответствующей характеристической прочности. Но и при таком подходе *MC2010* — это единственный документ, предлагающий для обеспечения установленного формата безопасности применять к результатам нелинейного анализа единый глобальный коэффициент $\gamma_{GL}=1.27$. Необходимо подчеркнуть, что данный коэффициент получен, главным образом, для изгиба железобетонного элемента, учитывает изменчивость характеристик свойств материалов при постоянном значении коэффициента $\gamma_R=1.1$, описывающего неопределенности расчетной модели сопротивления.

Более привлекательным с методических позиций выглядит **метод оценивания коэффициента вариаций сопротивления** (т.н. **ECOV-method**), предложенный в работах проф. М. Holický и включенный в [10]. Метод базируется на утверждении о том, что сопротивление подчиняется некоторой функции плотности распределения вероятности, из которой коэффициент вариаций может быть определен, опираясь на его средние и характеристические значения. Принимая согласно [10, 13] логнормальное распределение, коэффициент вариаций сопротивления определяют:

$$V_R = \frac{1}{1,65} \ln\left(\frac{R_m}{R_k}\right) \quad (3)$$

При установленном значении коэффициента вариаций сопротивления определяют значение глобального коэффициента:

$$\gamma_{GL} = \exp(\alpha_R \beta \cdot V_R) \quad (4)$$

Расчетное значение сопротивления в терминах воздействий определяют:

$$R_d = \frac{R_m}{\gamma_R} \quad (5)$$

Ключевой процедурой метода является расчет среднего и характеристического значений сопротивления. Предлагается для их установления выполнять два независимых нелинейных расчета с использованием средних и характеристических значений свойств материалов:

$$R_m = r(f_{cm}, f_{ym}, \dots, a_d) \quad (6)$$

$$R_k = r(f_{ck}, f_{yk}, \dots, a_d) \quad (7)$$

Следует отметить, что в последние годы предложено ряд модификаций ECOV-метода [10, 13], которые несколько снижают его неопределенности без изменения базовой концепции.

Все представленные методы калибровок глобального коэффициента имеют общий недостаток: при калибровках не учитываются *a-priori* неизвестные неопределенности как модели сопротивления (при этом следует иметь ввиду, что для различных комплексов эти неопределенности будут отличаться), так и неопределенности модели эффектов воздействий несмотря на то, что они имеют фундаментальное значение.

Кроме того, допущение о том, что сопротивление железобетонного элемента подчиняется логнормальному (LN) распределению, скорее не отвергается, чем принимается научным сообществом. Однако, эта базовая гипотеза неоднократно подвергалась критике. Так, например, в работе [12] показано, что даже при анализе простых моделей сопротивления для железобетонных конструкций, имеющих одну преобладающую форму разрушения (например, при изгибе или осевом сжатии) фактическая функция плотности распределения вероятности сопротивления практически всегда отличается от принятой теоретической и зависит от «входных» параметров конструкции. (Следует отметить, что при подобных оцениваниях практически ни-

когда не вспоминают о различиях между теорией вероятностей и математической статистикой.) Вместе с тем, концепция ECOV-метода близка к вероятностному формату, т.к. оценивание, базирующееся на средних и характеристических значениях, относительно устойчивы. При этом обязательным условием является установление ошибки моделирования для применяемого вычислительного комплекса на фоне опытных данных, полученных для широкого спектра применя-

емых конструкций. Как показано в [13], даже при применении одинаковых аналитических описаний диаграмм деформирования материалов, близких процедурах моделирования сопротивления сечений, два широко применяемых конечно-элементных комплекса, декларирующих возможность выполнения нелинейных расчетов, дают по ECOV-методу значения глобального коэффициента, отличающиеся до 40%(!).

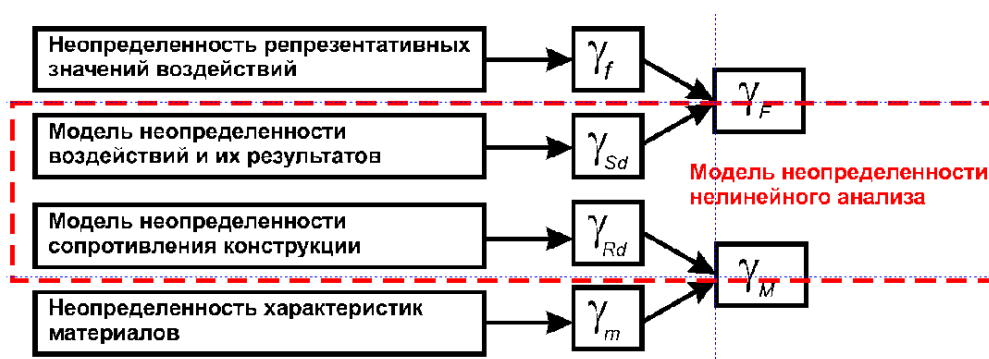


Рисунок 1. Система частных коэффициентов по EN 1990 и необходимость ее изменения.

Нужно помнить, что нормы проектирования представляют собой взаимоувязанный комплекс документов, в котором присутствует множество компромиссов, и этот комплекс создавался и отлаживался в эпоху линейного анализа. Поэтому существенное изменение такой основополагающей концепции как переход к нелинейному анализу в проектировании нельзя рассматривать изолированно. Так, например, внутри упомянутого комплекса документов некоторые нормативные документы устанавливают правила требующие именно линейного подхода к решению задачи. Одним из основных здесь являются динамические расчеты, тесно привязанные к таким понятиям линейной динамики сооружений, как частоты и формы собственных колебаний системы. Для нелинейной системы исчезает само понятие отдельных форм собственных колебаний и все основанные на этом рекомендации (имеющие в виду процедуру разложения движений по формам свободных колебаний системы), теряют свой

смысл. Как было показано выше, на данное обстоятельство обращает внимание п.6.2 [6]. Альтернативный подход, пригодный для учета нелинейных эффектов, иногда (хотя и редко) присутствует в нормах, как, например, прямой динамический расчет по инструментальным или синтезированным акселерограммам, но чаще всего о нем не только не упоминается, а он попросту никак не разработан. Типичными здесь могут быть расчеты на действие ветровых пульсаций в нормах по нагрузкам и воздействиям [30], или расчет фундаментов под машины с динамическими нагрузками в соответствующем нормативном документе [31].

Еще одной проблемой, которая никак не решается в нелинейном расчете является проблема выбора невыгодных комбинаций нагрузок (воздействий или эффектов от воздействий). В натуре практически отсутствуют сооружения, работающие только на один вариант нагружения. Обычно необходимо предусмотреть возможность появления с раз-

личной вероятностью многих переменных нагрузок и, следовательно, требуется каким-то образом определить их расчетную комбинацию.

Эта задача имеет решение при линейном подходе к расчету, когда можно воспользоваться принципом суперпозиции. Если же ориентироваться на нелинейный анализ, то одновременно следует указать для какой комбинации нагрузок следует выполнять проверки прочности и устойчивости, поскольку перебор всех мыслимых комбинаций, необходимость в котором возникает при отсутствии суперпозиции, может оказаться реально невыполнимым. Такого типа указания в нормативных документах чаще всего отсутствуют.

Одновременно следует сказать, что поиск невыгодной комбинации воздействий (эффектов воздействий) основан не только на использовании принципа суперпозиций, но и на том, что критерий поиска (например, максимальное напряжение) является выпуклой функцией параметров нагружения. Здесь редко возникают сомнения, поскольку большинство из используемых критериев являются линейными.

Однако свойство выпуклости выполняется не во всех случаях. Если в качестве критерияльной функции принимается несущая способность элемента с учетом всех нормативных требований (прочность, устойчивость, жесткость), то исследование ее выпуклости необходимо провести весьма тщательно. В частности, стоит убедиться, что область несущей способности рассматриваемого элемента является выпуклой, поскольку детальный анализ свидетельствует о достаточно часто встречающейся ситуации отсутствия выпуклости этой области [8].

Достаточно представительный пример представлен на рис. 2.

Наконец, следует упомянуть, что нелинейный анализ может быть связан с отсутствием однозначности решения (например, возможность реализации более чем одного состояния устойчивого равновесия, к которым можно прийти, используя различные истории нагружения).

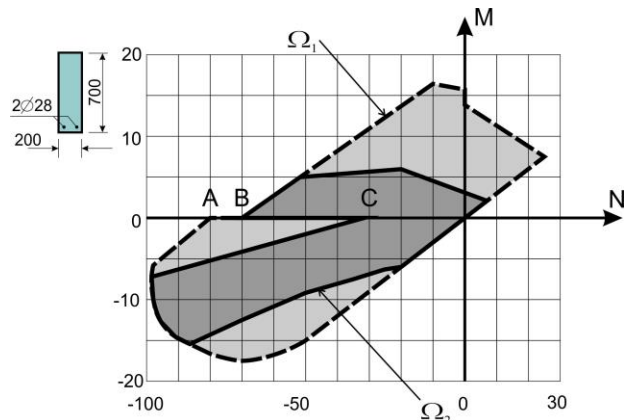


Рисунок 2. Область несущей способности: Ω_1 - без ограничения ширины раскрытия трещин; Ω_2 - при запрете образования трещин.

Возникает вопрос о каком-то нормировании тех историй нагружения (например, только пропорциональные нагружения), которые надлежит проверить для обеспечения надежности системы.

Вопрос об истории нагружения возникает еще по одному поводу: нормативные документы по проектированию железобетонных конструкций [32] ориентированы на выполнение критерия предельной деформации, и эти критерии для одноосного напряженного состояния приведены.

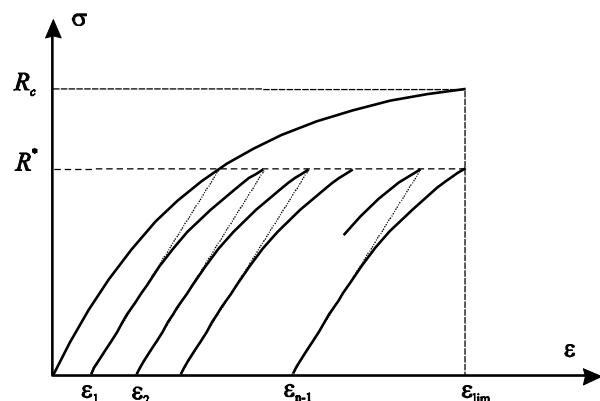


Рисунок 3. Накопление пластической деформации.

Но нет ответа на вопрос о том, как быть в условиях многократного нагружения, когда на каждом его цикле предельная деформация не достигается, но накопленная остаточная

Таблица 1. Некоторые особенности решаемых задач.

Особенность	Линейные задачи	Нелинейные задачи
1	2	3
Зависимость перемещений от нагрузки	Перемещения линейно зависят от приложенной нагрузки	Зависимость перемещений от нагрузки нелинейная
Связь между напряжением и относительной деформацией материала	Принимается линейная зависимость между напряжением и относительной деформацией	В задачах, где рассматривается физическая нелинейность, зависимость «напряжение – относительная деформация» может являться нелинейной функцией напряжения, деформации и/или времени
Величина перемещения	Изменение в геометрии благодаря смещению считается малым, и игнорируются при проверке равновесия	Перемещения могут быть не малыми и для проверки равновесия необходимо использовать геометрию деформированного состояния
Свойства материала	Линейные упругие свойства материала обычно просто определяются.	Нелинейные свойства материала часто неизвестны, что может потребовать проведения дополнительного экспериментального исследования
Обратимость	Все деформации полностью обратимы и исчезают при разгрузке системы	После снятия нагрузки состояние системы может отличаться от исходного
Граничные условия	Граничные условия в течение расчета остаются неизменными	Граничные условия могут изменяться, например, меняются площадки контакта.
Поведение нагрузки	Направление действия нагрузок остается неизменным	При больших перемещениях и/или больших углах поворота направление действия нагрузки может следовать за искажением формы
Последовательность приложения нагрузок	Последовательность приложения нагрузок не важна, заключительное состояние от нее не зависит	Состояние конструкции может зависеть от последовательности приложения нагрузок
Комбинирование результатов	Результаты расчета на разные нагрузки допускают сложение или умножение на некоторые коэффициенты, с целью объединения расчетных состояний	Разложение задачи на составляющие воздействия и последующее объединение результатов невозможно
Исходное напряженно-деформированное состояние	Исходное напряженно-деформированное состояние несущественно	Исходное напряженно-деформированное состояние обычно требуется задать, в особенности для нелинейности, связанной с поведением материала

1	2	3
Расчетные сочетания воздействий (эффектов воздействий)	Все переменные нагрузки входят в расчетное сочетание с полным (комбинационным) значением или же не учитываются вообще	Возможной является ситуация, когда расчетному сочетанию нагрузок соответствует их частичные (неполные) значения

пластическая компонента деформаций может достигнуть этот предел [16] за n повторений, где n зависит от относительного уровня нагружения $\eta = R^* / R_c$ (см рис. 3).

Очевидно, что здесь следует переходить к трансформированной диаграмме работы бетона. При этом следует учесть, что по некоторым сведениям (см., например, [19]), когда $\eta \geq 0,85$ наблюдается неограниченный рост неупругих деформаций и, следовательно, вообще нельзя удовлетворить требования по ограничению деформации бетона, если только не рассматривается случай небольшого числа циклов нагружения.

Получается, что кроме всего прочего следует задавать и ожидаемое число циклов нагружения, но эти сведения обычно отсутствуют, и нормы игнорируют любые более сложные программы.

ГОТОВНОСТЬ КАДРОВ

Не следует забывать и о том, что нелинейный анализ является более затратным и требует привлечения для его выполнения специалистов более высокой квалификации.

В частности, эти специалисты должны четко понимать те различия, которые существуют между линейным и нелинейным анализом задачи, и знать ответы, на возникающие здесь вопросы. Такие вопросы связаны с целым рядом особенностей нелинейных задач, и многие из них непривычны для специалистов, чье становление происходило под влиянием линейных решений. Некоторые (далеко не все) из указанных особенностей указаны в таблице 1.

К сожалению, опыт общения с пользователями программных систем говорит о том, что они недостаточно подготовлены к грамотному выполнению нелинейных расчетов. И здесь дело не только в недостатке образования. (к слову, по утверждению Ж.Ж. Руссо «ещё никакое образование не делало человека образованным») Ведь проектирование, в отличие от изобретательства, строится на использовании предшествующего опыта. Проектировщик всегда стремится использовать этот опыт, который увеличивает его уверенность в правильности принимаемых решений. А в рассматриваемом случае, опыт, основанный на линейных расчетах, нуждается, как минимум, в детальном анализе возможности его использования.

Ведь если в пользу результатов линейного расчета может говорить многолетний опыт его удачного применения, то переход к нелинейному расчету в какой-то мере перечеркивает этот опыт, и заменить его могут лишь хорошо проведенные исследования. К сожалению, детальность и глубина проработки таких исследований во многих случаях оставляют желать лучшего.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НАУЧНОГО ОБОСНОВАНИЯ

Как следует из представленного краткого обсуждения проблемы, практически ни в одном нормативном документе мы не находим более-менее подробных правил выполнения нелинейного анализа, а тем более трактовки результатов расчетов с учетом требований надежности, принятых при традиционном

проектировании. Сформулированные положения с одной стороны просто допускают применение нелинейного анализа, но с другой - требуют сохранения общего формата безопасности, установленного ИСО 2394 и развитого в соответствующих нормах проектирования конструкций.

Здесь, нам кажется, следует сделать ещё одну оговорку: действующие нормы рассматривают, главным образом, проектирование сечений или отдельных элементов и практически не содержат правил проектирования конструктивных систем, к которым собственно и применим нелинейный анализ.

Очевидно, что создание нормативного документа, содержащего требования к проектированию на основе нелинейного анализа, является сложной и трудоёмкой работой, требующей солидного научного обоснования как в части применяемых расчетных моделей, так и правил обеспечения требуемого уровня надежности.

Очевидно, что в «массовом» практическом проектировании не следует ожидать в обозримом будущем применения нелинейных вероятностных расчетов, а базовым подходом останется метод частных коэффициентов. В данном случае калибровки частных коэффициентов должны основываться исключительно на совместном учете неопределенностей моделей сопротивлений и моделей воздействий (применительно к нелинейному анализу, и, неопределенностей моделирования эффектов воздействий). При этом, статистические параметры ошибки моделирования для нелинейных моделей сопротивления, применяемых в различных вычислительных комплексах, могут быть установлены только на фоне результатов экспериментальных исследований, хотя бы простейших, но конструктивных систем. Для этого могут быть применены как существующие базы данных, так и выполнены дополнительные испытания.

Как следует из предварительного анализа [34], даже при прочих равных условиях (одинаковые аналитические описания диа-

грамм деформирования материалов, равное количество арматуры, размеры сечений) различие в значениях коэффициентов вариаций сопротивления, полученные при выполнении нелинейного анализа (по *ECOV*-методу) с использованием двух широко известных КЭ комплексов, декларирующих выполнение нелинейного анализа составило до 40%. Это связано с тем, что каждый из примененных комплексов имеет свою ошибку моделирования, статистические параметры которой, зачастую, не известны даже разработчику комплекса.

Сама по себе процедура калибровки частных коэффициентов для нелинейного анализа на основе вероятностного подхода является предметом отдельного рассмотрения и требует на начальных этапах выработки некоторых научно-обоснованных (хотя бы на национальном уровне) соглашений, например, установление согласованных критериев наступления –идентификации предельного состояния при нелинейном анализе, устранение несоответствий в статистических моделях, применяемых при оценивании воздействий и сопротивлений.

Процедура нормирования воздействий, выполняемая на основе статистического оценивания выборок результатов наблюдений за определенной период отнесения – общеизвестна. Только вряд ли кто-либо даже из составителей норм может достоверно назвать какую обеспеченность имеет принятая из некоторой условной (*best of fits*) функции распределения 98%- квантиль, обозначенная как характеристическое значение воздействия.

Безусловно, требуют и дальнейшего совершенствования модели сопротивления. Применительно к железобетону - это переход от довольно подробно разработанной традиционной деформационной модели сечений к блочной модели для конструктивного элемента. Такой переход требует, в частности, продолжения сопутствующих исследований в области совместной работы армирующих элементов и бетона при различных видах нагружения. Связанным вопросом является

моделирование параметров пластических шарниров, а в случае плоских плит – линейных пластических шарниров.

ЧТО МОЖНО ДЕЛАТЬ СЕГОДНЯ

Означает ли сказанное выше призыв к отказу от нелинейного анализа? Конечно, нет. Практика иногда демонстрирует применение нелинейного анализа уже сегодня, не говоря уже о том, что имеется целый ряд объектов, где без геометрически нелинейного расчета попросту нельзя обойтись (вантовые покрытия, мачтовые сооружения и т.п.). Для строго оговоренных случаев нормы рекомендуют использование и некоторых приемов физически нелинейного расчета, таких, как частичное перераспределение внутренних усилий за счет пластических деформаций или же оценка предельного равновесия (см., например, п. 5.6 в [7]).

Но в более широком контексте нелинейный анализ выступает в роли вспомогательного инструмента, дополняющего и уточняющего результаты линейного расчета. Достаточно типичным является пример, представленный в работе [21], где описываются приемы нелинейного анализа работы фундаментной плиты и элементов междуэтажных перекрытий высотного комплекса «Федерация» ММДЦ «Москва-Сити» (рис. 4).

Авторы указывают, что предварительно были выполнены все расчеты, основанные на линейном подходе, в ходе которых были выявлены особенности работы конструкции и отлажена конечно-элементная модель объекта. И лишь затем проводились уточнения работы рассматриваемых фрагментов с учетом нелинейного поведения железобетона, эти уточнения касались проверки прогибов и ширины раскрытия трещин.



Рисунок 4. Высотный комплекс «Федерация».

Характерной является формулировка, приведенная в [15], где указывается, что линейный расчет остается самым популярным, а о нелинейном расчете сказано: «Этот метод может оказаться полезным при оценке прочности уже готовой конструкции или в случае, если необходимо убедиться в надежности многократно используемых однотипных конструкций».

ВЫВОДЫ

1. На настоящем этапе нелинейные расчеты следует рассматривать как некоторый более совершенный, но дополнительный инструмент, который используют в тех случаях, когда применение простых стандартных методов расчета сечений является недостаточным и не дает пол-

ный информации о поведении конструктивной системы.

2. Возможно следует иметь нормативное требование, регулирующее те случаи, когда дополнительный нелинейный анализ является обязательным. При этом следует указать на возможность или невозможность его выполнения применительно к некоторой части расчетной схемы (например, проверке плит перекрытия).
3. Важнейшей проблемой при выполнении нелинейных расчетов является обеспечение требуемого общего формата надежности в соответствии с действующими нормами. Существующие методы, основанные на применении глобального коэффициента безопасности к среднему значению сопротивления в терминах воздействия, несовершенны и действуют на уровне предложений не включенных в нормы проектирования. Необходимо разработать обоснованные методы калибровки частных коэффициентов для нелинейного анализа с учетом неопределенностей как моделей сопротивления, так и воздействий (эффектов воздействий). Статистические параметры для описания ошибки моделирования сопротивления наиболее широко применяемых КЭ комплексов следует установить на фоне результатов испытаний конструктивных систем и их фрагментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Antman S.S.** Nonlinear Problems of Elasticity. New York, Springer-Verlag Inc, 2004, 835 pages.
2. **Becker A.A.** Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks. Glasgow, NAFEMS, 2001, 170 pages.
3. **Bertagnoli G, Giordanol.** etc. Safety format for the non-linear analysis of Concrete Structures. // Studies and Researches, Vol. 25, Polytechnico di Milano, Italy, 2004.
4. **Cervenka V.** (Editor). SARA – Structural Analysis and Reliability Assessment. User's manual. Cervenka consulting, Prague, 2003, 128 pages.
5. **Crisfield M.A.** Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: Essentials; Vol. 2: Advanced Topics. Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 1998, 345 pages & 494 pages.
6. EN 1990:2002. Basis of Structural Design. Brussels, CEN, 2011.
7. EN 1992:2004. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General – Common Rules for Building and Civil Engineering Structures. Brussels, CEN, Dec. 2004.
8. **Gavrilenko I.S., Girenko S.V., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A., Yurchenko V.V.** Load-bearing capacity region as an interactive tool of analysis in SCAD Office. // Proceeding of the METNET Seminar 2017 in Cottbus. Hämeenlinna, Häme University of Applied Sciences (HAMK), 2017.
9. **Hinton E.** Introduction to Non-linear Finite Element Analysis. East Kilbridge, NAFEMS, 1992, 220 pages.
10. Model Code 2010, First Complete Draft, Vol. 1, Vol. 2 – fib, 2010 – CH – 1015 – 293 pages.
11. **Schlune H.** Safety Evaluation of Concrete Structures with Nonlinear Analysis. Gothenburg, Chalmers University of Technology, 2011, 45 pages.
12. **Schlune H., Plos M.** etc. Safety Format for the non-linear analysis of Concrete Structures. Engineering Structures, Elsevier, vol. 33, №8, August 2011.
13. **Tur V., Nadolski V.** A First Attempt to Determine the Partial Factor According to Eurocodes for Verification of the ULS of Steel Elements for conditions of the Republic Belarus. // Journal of Sustainable Architecture and Civil Engineering, №1/14(2016), pp. 44-50.

14. **Walraven J.** (Editor). “*fib Model Code for Concrete Structures 2010*”, September 2013, ISBN: 978-3-433-03061-5.
15. **Биби Э.В., Нараянан Р.С.** Руководство для проектировщиков к Еврокоду 2: Проектирование железобетонных конструкций. – М.: МГСУ, 2012. – 292 с.
16. **Гениев Г.А., Мамаева Г.В.** О физическом моделировании процесса деформирования бетона. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2002, №1, с. 23-26.
17. **ГОСТ 27751-2014.** Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2015.
18. **Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.** Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
19. **Ерышев В.А., Тишин Д.С.** Диаграммы деформирования бетона при немногих повторных нагружениях. // Известия вузов. Строительство, 2005, №10, с. 109-114.
20. **Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Галишникова В.В., Онищенко Е.В.** Нелинейная строительная механика стержневых систем. Электрон. изд. сетевого доступа. Волгоград: ВолгГАСУ, 2014. – 97 с.
21. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н., Травуш В.И.** О методах расчета высотных зданий и сооружений из монолитного железобетона на основе послойной детализации. // Современное промышленное и гражданское строительство, 2011, том. 7, №3, с. 147-163.
22. **Клованич С.Ф., Малышко Л.** Нелинейные модели материалов в строительной механике. – Одесса: ОНМУ, 2017. – 125 с.
23. **Лукаш П.А.** Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
24. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
25. **Петров В.В.** Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
26. Проектирование конструкций из бетона. Общие правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1 (EC2) (IDT: EN 1992-1-1:2004: Design of Concrete Structures. General rules and rules for buildings), 276 pages.
27. **Рудых О.Л., Соколов Г.П., Пахомов В.Л.** Введение в нелинейную строительную механику. – М.: Издательство АСВ, 1998. – 103 с.
28. **Cervenka V.** Reliability – Based Non-linear Analysis According to fib Model Code 2010. // Structures Concrete, Journal of fib, Vol. 14., March 2013, ISSN 1464-4177, pp. 19-28.
29. **СП 16.13330.2011.** Стальные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. – М.: 2011.
30. **СП 20.13330.2016.** Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-858. – М.: 2016.
31. **СП 26.13330.2012.** Фундаменты машин с динамическими нагрузками. Актуализированная редакция СНиП 2.02.05-87. – М.: 2012.
32. **СП 63.13330.2012.** Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (с Изменениями №1, 2).
33. **Стриклин Дж., Хайслер В.** Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и/или геометрией. // Ракетная техника и космонавтика, 1973, №3, с. 46-56.
34. **Тур В.В., Тур А.В.** Формат безопасности при выполнении нелинейных расчётов. // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР): Сборник статей Международной научно-технической

конференции, Брест, 30-31 марта 2017 г. – Брест: БрГТУ, 2017, с. 243-260.

35. **Тяпин А.Г.** Различия в нормативных подходах к расчету на сейсмические воздействия гражданских сооружений и сооружений АЭС. Часть IV. Нелинейный расчет. // Сейсмостойкое строительство и безопасность сооружений, 2015, №3, с. 17-20.

REFERENCES

1. **Antman S.S.** Nonlinear Problems of Elasticity. New York, Springer-Verlag Inc, 2004, 835 pages.
2. **Becker A.A.** Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks. Glasgow, NAFEMS, 2001, 170 pages.
3. **Bertagnoli G, Giordanol.** etc. Safety format for the non-linear analysis of Concrete Structures. // Studies and Researches, Vol. 25, Polytechnico di Milano, Italy, 2004.
4. **Cervenka V.** (Editor). SARA – Structural Analysis and Reliability Assessment. User's manual. Cervenka consulting, Prague, 2003, 128 pages.
5. **Crisfield M.A.** Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: Essentials; Vol. 2: Advanced Topics. Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 1998, 345 pages & 494 pages.
6. EN 1990:2002. Basis of Structural Design. Brussels, CEN, 2011.
7. EN 1992:2004. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General – Common Rules for Building and Civil Engineering Structures. Brussels, CEN, Dec. 2004.
8. **Gavrilenko I.S., Girenko S.V., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A., Yurchenko V.V.** Load-bearing capacity region as an interactive tool of analysis in SCAD Office. // Proceeding of the METNET Seminar 2017 in Cottbus. Hämeenlinna, Häme University of Applied Sciences (HAMK), 2017.
9. **Hinton E.** Introduction to Non-linear Finite Element Analysis. East Kilbridge, NAFEMS, 1992, 220 pages.
10. Model Code 2010, First Complete Draft, Vol. 1, Vol. 2 – fib, 2010 – CH – 1015 – 293 pages.
11. **Schlune H.** Safety Evaluation of Concrete Structures with Nonlinear Analysis. Gothenburg, Chalmers University of Technology, 2011, 45 pages.
12. **Schlune H., Plos M.** etc. Safety Format for the non-linear analysis of Concrete Structures. Engineering Structures, Elsevier, vol. 33, №8, August 2011.
13. **Tur V., Nadolski V.** A First Attempt to Determine the Partial Factor According to Eurocodes for Verification of the ULS of Steel Elements for conditions of the Republic Belarus. // Journal of Sustainable Architecture and Civil Engineering, №1/14(2016), pp. 44-50.
14. **Walraven J.** (Editor). “*fib* Model Code for Concrete Structures 2010”, September 2013, ISBN: 978-3-433-03061-5.
15. **Bibi Je.V., Narayanan R.S.** Rukovodstvo dlja proektirovshhikov k Evrokodu 2: Proektirovanie zhelezobetonnykh konstrukcij [Guide for Designers to Eurocode 2: Design of Reinforced Concrete Structures]. Moscow, MGSU, 2012, 292 pages.
16. **Geniev G.A., Mamaeva G.V.** O Fizicheskom Modelirovanii Processa Deformirovaniya Betona [On the Physical Modeling of the Process of Deformation of Concrete]. // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij, 2002, No. 1, pp. 23-26.
17. **GOST 27751-2014.** Nadezhnost' Stroitel'nyh Konstrukcij i Osnovanij. Osnovnye Polozhenija [Reliability of Building Structures and Foundations. Basic Provisions]. Moscow, Standartinform, 2015.
18. **Grigoljuk Je.I., Shalashilin V.I.** Problemy Nelinejnogo Deformirovaniya [Problems of Nonlinear Deformation]. Moscow, Nauka, 1988, 232 pages.
19. **Eryshev V.A., Tishin D.S.** Diagrammy Deformirovaniya Betona pri Nemnogih

- Povtornyh Nagruzhenijah [Concrete Deformation Diagrams with Few Repeated Loads]. // *Izvestija vuzov. Stroitel'stvo*, 2005, No. 10, pp. 109-114.
20. **Ignatiev V.A., Ignatiev A.V., Galishnikova V.V., Onishhenko E.V.** Nelinejnaja Stroitel'naja Mehanika Sterzhnevnyh Sistem [Nonlinear Structural Mechanics of Rod Systems]. Electronic edition of network access. Volgograd, VolgGASU, 2014, 97 pages.
 21. **Karpenko N.I., Karpenko S.N., Travush V.I.** O Metodah Rascheta Vysotnyh Zdanij i Sooruzhenij iz Monolitnogo Zhelezobetona na Osnove Poslojnoj Detalizacii [On the Methods for Analysis of High-Rise Buildings and Structures from Monolithic Reinforced Concrete on the Basis of Layered Detailing]. // *Sovremennoe promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2011, Vol. 7, No. 3, pp. 147-163.
 22. **Klovanych S.F., Malyshko L.** Nelinejnye Modeli Materialov v Stroitel'noj Mehanike [Nonlinear Models of Materials in Structural Mechanics]. Odessa, ONMU, 2017, 125 pages.
 23. **Lukash P.A.** Osnovy Nelinejnoj Stroitel'noj Mehaniki [Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics]. Moscow, Strojizdat, 1978, 204 pages.
 24. **Oden J.** Konechnye Jelementy v Nelinejnoj Mehanike Sploshnyh Sred [Finite Elements in the Nonlinear Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Mir, 1976, 464 pages.
 25. **Petrov V.V.** Nelinejnaja Inkremental'naja Stroitel'naja Mehanika [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Infra-Inzhenerija, 2014, 480 pages.
 26. Proektirovanie Konstrukcij iz Betona. Obshhie Pravila Dlja Zdanij [Design of Concrete Structures. General Rules for Buildings]: TKP EN 1992-1-1 (EC2) (IDT: EN 1992-1-1:2004: Design of Concrete Structures. General rules and rules for buildings), 276 pages.
 27. **Rudyh O.L., Sokolov G.P., Pahomov V.L.** Vvedenie v Nelinejnuju Stroitel'nuju Mehaniku [Introduction to Nonlinear Structural Mechanics]. Moscow, ASV Publishing House, 1998, 103 pages.
 28. **Cervenka V.** Reliability – Based Non-linear Analysis According to fib Model Code 2010. // *Structures Concrete, Journal of fib*, Vol. 14., March 2013, ISSN 1464-4177, pp. 19-28.
 29. **SP 16.13330.2011.** Stal'nye Konstrukcii. Osnovnye Polozhenija. Aktualizirovannaja redakcija SNIIP II-23-81* [Steel Structures. Basic provisions. Updated Version of SNIIP II-23-81*]. Moscow, 2011.
 30. **SP 20.13330.2016.** Nagruzki i Vozdejstviya. Aktualizirovannaja Redakcija SNIIP 2.01.07-858 [Loads and Impacts. Updated Version of SNIIP 2.01.07-858]. Moscow, 2016.
 31. **SP 26.13330.2012.** Fundamenty Mashin s Dinamicheskimi Nagruzkami. Aktualizirovannaja redakcija SNIIP 2.02.05-87 [Foundations of Machines with Dynamic Loads. Updated Version of SNIIP 2.02.05-87]. Moscow, 2012.
 32. **SP 63.13330.2012.** Betonnye i Zhelezobetonnye Konstrukcii. Osnovnye Polozhenija. Aktualizirovannaja Redakcija SNIIP 52-01-2003 (s Izmenenijami No. 1, 2). [Concrete and Reinforced Concrete Structures. Basic Provisions. The updated version of SNIIP 52-01-2003 (with Modifications No. 1, 2).
 33. **Striklin J., Haysler V.** Ocenka Metodov Reshenija Zadach Stroitel'noj Mehaniki, Nelinejnost' Kotoryh Svjazana so Svoystvami Materiala i/ili Geometriej [Estimation of Methods for Solving the Problems of Structural Mechanics, the Nonlinearity of Which is Related to the Properties of the Material and / or Geometry]. // *Raketnaja tehnika i kosmonavtika*, 1973, No. 3, pp. 46-56.
 34. **Tur V.V., Tur A.V.** Format Bezopasnosti pri Vypolnenii Nelinejnyh Raschjotov [The Safety Format for Performing Non-linear Analysis]. // *Teorija i praktika issledovanij i proektirovanija v stroitel'stve s prime-*

neniem sistem avtomatizirovannogo proektirovanija (SAPR). Proceedings of International Scientific Conference, Brest, 30-31 March 2017. Brest, BrGTU, 2017, pp. 243-260.

35. **Tjapin A.G.** Razlichija v Normativnyh Podhodah k Raschetu na Sejsmicheskie Vozdejstviya Grazhdanskih Sooruzhenij i Sooruzhenij AJeS. Chast' IV. Nelinejnyj raschet [Differences in Regulatory Approaches to the Analysis of Seismic Impacts of Civil Structures and Structures of Nuclear Power Plants. Part IV. Non-linear Analysis]. // Sejsmostojkoe stroitel'stvo i bezopasnost' sooruzhenij, 2015, No. 3, pp. 17-20.

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук; НПО СКАД Софт; 03037, Украина, г. Киев, ул. Просвещения (Освиты), 3а, к. 1,2; тел.: +38 044 249 71 93 (91), +38 044 248 71 00, +38 044 248 80 60; e-mail: avp@scadsoft.com.

Тур Виктор Владимирович, профессор, доктор технических наук, кафедра технологии бетона и строительных материалов, Брестский государственный технический университет; 224017, Республика Беларусь, г. Брест, ул. Московская, д. 267; тел. 375 162 42-33-93; факс +375 162 42-21-27; e-mail: profturvic@gmail.com.

Anatolii V. Perelmuter, Foreign member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Doctor of Science, Professor; SCAD Soft Ltd; office 1,2, 3a Osvity street, Kiev, 03037, Ukraine; tel.: +38 044 249 71 93 (91), +38 044 248 71 00, +38 044 248 80 60; e-mail: avp@scadsoft.com.

Victor V. Tur, Professor, Doctor of Science, Department of Concrete and Building Materials Technology, Brest State Technical University; 267, Moskovskaya Str., Brest, 224017, Belarus; tel. 375 162 42-33-93; fax +375 162 42-21-27; e-mail: profturvic@gmail.com.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ МЕТОДОМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

В.В. Петров

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, РОССИЯ

Аннотация: Предложен алгоритм применения метода наискорейшего спуска к решению задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Для применения этого метода нелинейные операторы описываются последовательностью линейных операторов в инкрементальной форме, а сложный линейный неограниченный оператор в соответствии с идеей Л.В. Канторовича ограничивается более простым линейным неограниченным оператором.

Ключевые слова: нелинейная строительная механика, метод последовательных нагружений, метод наискорейшего спуска

SOLUTION OF NON-LINEAR PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS BY METHOD OF STEEPEST DESCENT

Vladilen V.Petrov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, RUSSIA

Abstract: The algorithm of application of the method of steepest descent to the solution of problems of structural mechanics and solid mechanics, described by nonlinear differential equations. For application of this method to nonlinear operators are described by a sequence of linear operators in incremental form, unlimited and complex linear operator, in line with the idea of L. V. Kantorovich is limited to a simple linear unbounded operator.

Keywords: nonlinear structural mechanics, the method of successive loadings, the method of steepest descent

В настоящее время, как в отечественной, так и в зарубежной практике широкое применение находят приближенные и численные методы решения задач строительной механики. Построение замкнутого аналитического решения для большинства задач не представляется возможным, проведение экспериментальных исследований требует много времени и средств.

Для более полного использования резервных возможностей материала конструкций усложняют расчетные схемы и математические модели, описывающие напряженно-деформированное состояние конструкций. Чаще всего такое усложнение приводит к

моделям, описываемым нелинейными дифференциальными уравнениями. Выделяют геометрическую, физическую и конструктивную нелинейность. При решении ряда задач, например при исследовании устойчивости тонкостенных конструкций, принцип малости перемещений и углов поворота становится неприемлемым. Необходимо учитывать нелинейные члены в соотношениях между деформациями и перемещениями, при этом формируется *геометрически нелинейная задача*. Если не справедлив закон Гука, связывающий напряжения и деформации, то их приходится связывать нелинейными соотношениями и возникает *физически нели-*

нелинейная задача. В случае нелинейных граничных условий возникает *конструктивная нелинейность*. Нелинейные зависимости могут появляться при учете влияния рабочих (агрессивных в отношении материала конструкций) сред. Взаимодействие с агрессивной внешней средой вызывает коррозионное поражение материала и возникает задача определения срока работоспособности конструкции. Задачи подобного рода можно отнести к задачам с наведенной неоднородностью свойств.

Нелинейные задачи имеют принципиальные отличия от линейных задач. Так в нелинейных задачах энергия деформации уже не является квадратичной функцией, кроме того, не справедлив принцип суперпозиции и основанные на этом принципе классические теоремы механики.

Для приближенного решения граничных задач математического анализа применяются методы, основанные на различных идеях. Одним из таких методов решения является метод наискорейшего спуска. Метод наискорейшего спуска первоначально рассматривался как вариационный метод решения линейных функциональных уравнений. Схема метода следующая: строится последовательность приближений к минимуму функционала такого рода, что переход от одного приближения к следующему осуществляется по направлению наискорейшего убывания функционала. Отсюда происходит и название метода. Доказан ряд теорем [1] о сходимости метода для линейных функциональных уравнений со скоростью геометрической прогрессии.

Идея метода восходит к Коши. Первоначально он рассматривался как вариационный метод решения функциональных уравнений и нахождения собственных чисел линейных операторов. В общем случае метод наискорейшего спуска для квадратичных функционалов разработан Л.В. Канторовичем [2]. Принципиальное отличие метода наименьшего спуска от прямых вариационных методов заключается в том, что последователь-

ные приближения получаются не в априорно выбранной форме, а в форме определяемой самой задачей.

Рассмотрим возможность применения идеи метода наискорейшего спуска к решению задач строительной механики и механики деформируемого тела, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Для применения этого метода необходимо чтобы, во-первых, задача описывалась ограниченным линейным оператором и, во-вторых, этот оператор должен быть ограниченным.

При решении краевых задач с учетом нелинейной связи между напряжениями и деформациями в материале конструкции (физическая нелинейность) или допущением перемещений, сопоставимых с толщиной конструкции (геометрическая нелинейность), одним из методов является метод последовательных нагружений или его обобщение – метод последовательного возмущения параметров. Подробное изложение этих методов для решения разнообразных задач нелинейной механики пластинок и оболочек можно найти в работе [3].

Совокупность уравнений нелинейной механики твердого деформируемого тела вместе с соответствующими граничными условиями запишем в виде операторного уравнения:

$$A(u, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0 \quad (1)$$

где A – нелинейный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H , u – искомый элемент этого функционального пространства. Оператор A задан на некотором множестве функций $D(A)$, обладающих следующими свойствами: функции и их первые производные абсолютно непрерывны в области Ω (Ω – конечная область пространства координат, занятая пластинкой или оболочкой), на границе области Γ функции удовлетворяют заданным граничным условиям. Оператор A будем называть оператором данной краевой задачи, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ –

параметры модели, учитывающие влияние и воздействия различной природы на решение задачи, в том числе и на физико-механические свойства материала конструкции в период эксплуатации. Параметры α_k могут иметь различную природу, среди этих параметров имеются геометрические, физические и, в том числе, параметры внешнего воздействия.

Если малое изменение параметра α_k вызывает малые изменения элемента u , то такой параметр будем называть ведущим. В возмущенном состоянии уравнение (1) запишем в следующем виде

$$A(u + \Delta u, \alpha_1, \dots, \alpha_k + \Delta \alpha_k, \dots, \alpha_m) = 0 \quad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1) получим

$$A(u + \Delta u) - A(u) = A'(u) \Delta u + O(\|\Delta u\|) \quad (3)$$

Первое слагаемое этого равенства есть линейная функция от Δu , аппроксимирующая функцию $A(u + \Delta u) - A(u)$ с точностью до величин порядка малости высшего, чем $\|\Delta u\|$. Произведение $A'(u) \Delta u$ называется дифференциалом Гато нелинейного оператора A , а $A'(u)$ называется производной Гато нелинейного оператора A в точке u . Линейная функция от Δu может быть получена по формуле

$$A'(u) \Delta u = \left. \frac{d}{d\lambda} A(u + \lambda \Delta u) \right|_{\lambda=0} \quad (4)$$

Если за ведущий параметр принят параметр внешней нагрузки α_k , то инкрементальное уравнение на j -ом этапе изменения ведущего параметра будет иметь вид:

$$A'(u_{j-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \Delta u_j = \Delta \alpha_{k,j} \quad (5)$$

где $j=1, 2, \dots, N$ – номер этапа возмущения, а левая часть уравнения представляет собой дифференциал Гато нелинейного оператора A . Элемент u_{j-1} известен из решений на предыдущих этапах решения и вычисляется по формуле

$$u_{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \Delta u_k.$$

Рекуррентное уравнение (5) было названо в [4] уравнением метода последовательных нагружений. В процессе реализации процедуры последовательных возмущений параметров накапливаются погрешности порядка нормы приращения элемента u . Эту погрешность можно регулировать, изменяя величину приращения ведущего параметра.

Процесс деформирования с позиций инкрементального подхода описывается последовательностью состояний равновесия $S_0, S_1, \dots, S_n$. В исходном состоянии S_0 модель характеризуется начальными параметрами физико-механических свойств. S_n – конечное состояние, при котором требуется определить напряженно-деформированное состояние рассматриваемой модели конструктивного элемента, или решить другие задачи. S_k – произвольное промежуточное равновесное состояние. Считается, что в этом состоянии известны все параметры внешнего и внутреннего процесса: уровень приложенных нагрузок, уровень деградации физико-механических свойств материала конструкции, тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещения во всех точках конструкции. Полагаем, что параметры процесса известны не только в состоянии равновесия S_j , но и во всех пройденных за историю процесса деформирования состояниях $S_1, \dots, S_{j-1}$. Каждое из состояний называется шагом процесса деформирования.

При $j=1$ уравнение (3) вырождается в уравнение соответствующей линейной теории. Присваивая j последовательные значения $1, 2, 3, \dots, N$ мы будем перемещаться вдоль ве-

дущего параметра, решая при этом поставленную нелинейную задачу.

В общем случае, возмущая одновременно или последовательно несколько параметров, получим рекуррентное инкрементальное уравнение

$$A'(u_{j-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \Delta u_j + \sum_m \frac{\partial A}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_{m,j} = 0, \quad (6)$$

которое было названо нами [5] уравнением метода последовательного возмущения параметров.

Так как уравнение (6) линейное, то при его решении можно применять принцип суперпозиции и менять ведущий параметр. В уравнении (6) содержится ряд методов решения нелинейных задач расчета балок, пластин и оболочек: метод последовательного изменения жесткости, метод последовательного изменения кривизны, метод последовательного изменения области интегрирования, метод последовательного наращивания ребер, метод последовательного нагревания, метод последовательного изменения неоднородности и ряд других в зависимости от набора параметров α_k в (6). Некоторые из этих методов рассматривались рядом авторов как самостоятельные, но по своей сути это один инкрементальный метод.

В зависимости от поставленной задачи уравнение (2.5) позволяет применять различные стратегии. Например, сначала за ведущий параметр принимается внешняя нагрузка, и конструкция последовательно нагружается до заданной величины поперечной нагрузки. Затем ведущим параметром становится температура, и напряженная конструкция последовательно нагревается до заданной температуры. Затем изучается взаимодействие нагруженной и нагретой конструкции с агрессивной внешней средой (последовательное изменение неоднородности) и так далее. Возможен и другой набор стратегий. При изменении каждого из ведущих параметров решается нелинейная задача. Для повышения точности решения разработан [6]

двухшаговый метод последовательного возмущения параметров позволяющий существенно повысить точность решения и сократить число этапов нагружения. Таким образом, представление нелинейного оператора A в инкрементальной форме позволяет устранить первое препятствие для использования метода наискорейшего спуска.

Л.В. Канторовичу принадлежит идея B – ограниченных операторов, которая состоит в том, что сложный линейный неограниченный оператор $L \triangleright$ можно ограничить простым линейным неограниченным оператором B . Л.В. Канторовичем доказана теорема: если оператор L положительно определен и B – ограничен

$$m(Bu, u) \leq (Lu, u) \leq M(Bu, u), \quad (7)$$

$$0 < m \leq M < +\infty,$$

то имеет место B -сходимость процесса наискорейшего спуска к решению исходного уравнения с быстротой геометрической прогрессии. Эта теорема доказана для случая когда рассматриваемая задача описывается линейными дифференциальными уравнениями. Здесь и далее используется принятое обозначение скалярного произведения функций в виде $(\dots, \dots)$.

В соответствии с теоремой необходимо построить симметричный, положительно полуограниченный оператор B родственного оператору L

$$(Bu, u) \geq (u, u) \quad (8)$$

Область определения оператора B должна совпадать с областью определения оператора L , кроме того должно выполняться неравенство (7). При решении задач строительной механики B -ограниченность оператора L обеспечивается, если упругая система, описываемая оператором B оказывается мажорантой, является более жесткой по сравнению с исходной, описываемой оператором L [8]. Поэтому оператор B для конкретной за-

дачи можно построить исходя из инженерных соображений, а быстрота сходимости метода будет зависеть от его удачного выбора.

Последовательность решения уравнения (5) методом наискорейшего спуска состоит из следующих этапов.

Нулевое приближение (направление наискорейшего спуска) ищется как решение уравнения

$$Bu_0 = b \quad (9)$$

Первое приближение строится в виде

$$u_1 = u_0 - \varepsilon_1 z_1 \quad (10)$$

где z_1 является решением уравнения

$$Bz_1 = Lu_0 - b \quad (11)$$

правая часть этого уравнения представляет собой невязку решения исходного уравнения

$$Lu_0 = b.$$

Величина спуска ε_1 определяется по следующей формуле

$$\varepsilon_1 = \frac{(Bz_1, z_1)}{(Lz_1, z_1)} \quad (12)$$

Повторяя этот процесс, получим

$$u_n = u_{n-1} - \varepsilon_n z_n \quad (13)$$

где z_n представляет собой решение уравнения

$$Bz_n = Lu_{n-1} - b \quad (14)$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{(Bz_n, z_n)}{(Lz_n, z_n)} \quad (15)$$

Если на каждом j -ом этапе последовательно нагружения принять в этой схеме реализации метода наискорейшего спуска в качестве линейного B -ограниченного оператора L дифференциальный оператор $A'(u_{j-1})$, то в результате последовательного наращивания числа этапов нагружения получим решение нелинейной задачи.

В работе [6] идея метода наискорейшего спуска обсуждалась для решения геометрически нелинейных задач, здесь будем рассматривать физически нелинейные задачи. Методику решения продемонстрируем на самой простой задаче – изгиб балки из нелинейно-деформируемого материала. Логика рассуждений при решении более сложных задач физически нелинейной теории пластин и оболочек сохраняется.

Нелинейное дифференциальное уравнение изгиба балки из нелинейно-деформируемого материала имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(J_c(W) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q(x). \quad (16)$$

где $W(x)$ – прогиб балки, $q(x)$ – заданная поперечная нагрузка, а переменная по длине балки жесткость вычисляется по формуле:

$$J_c(W) = \int_{-h/2}^{h/2} E_c(\varepsilon_i) z^2 b(z) dz. \quad (17)$$

Здесь E_c – секущий модуль, h – высота балки, $b(z)$ – переменная ширина поперечного сечения балки. Соответствующие граничные условия формулируются через прогиб балки так, как это принято в сопротивлении материалов.

При справедливости гипотезы плоских сечений интенсивность деформаций зависит от величины прогиба

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x = -z \frac{d^2 W}{dx^2}.$$

Так как секущий модуль является нелинейной функцией интенсивности деформаций, то переменная жесткость балки будет нелинейной функцией прогиба, вид которой зависит от способа аппроксимации диаграммы деформирования.

Инкрементальное дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид [3]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(J_k^{(j-1)}(x) \frac{d^2 \Delta w_j}{dx^2} \right) = \Delta q_j(x). \quad (18)$$

где j – номер последовательного нагружения, переменная по длине балки жесткость $J_k^{(j-1)}(x)$ вычисляется по формуле:

$$J_k^{(j-1)}(x) = \int_{-h/2}^{h/2} E_k^{(j-1)}(x, z) z^2 b(z) dz \quad (19)$$

здесь $E_k^{(j-1)}$ – касательный модуль, вычисление которого не вызывает затруднений, так как он зависит от величины известного из предыдущих этапов нагружения, накопленного прогиба балки W_{j-1} . Граничные условия формулируются через приращения прогиба балки Δw_j .

На каждом этапе нагружения уравнение (18) будем решать методом наискорейшего спуска. В соответствии с этим методом построим нулевое приближение, как решение задачи изгиба балки постоянной фиктивной жесткости. Фиктивную жесткость определим, заменив переменную жесткость $J_k^{(j-1)}(x)$ некоторой постоянной жесткостью $J_k^{*(j-1)}$, величина которой определяется из условия B -ограниченности дифференциального оператора уравнения (18). В этом случае балка, имеющая фиктивную жесткость, по сравнению с исходной балкой будет более жесткой.

Учитывая, что в каждой точке балки $E_c > E_k$ и, следовательно $J_c > J_k$, в качестве одного из возможных вариантов фиктивную жесткость $J_c^{*(j-1)}$ определим как осредненную по длине балки l жесткость следующим образом

$$J_c^{*(j-1)} = \frac{1}{l} \int_0^l J_c^{(j-1)} dx.$$

Можно использовать выражения

$$J_c^{*(j-1)} = J_{c, \max}^{(j-1)} \quad \text{или} \quad J^* = EJ_0.$$

Это отразится на скорости сходимости метода наискорейшего спуска.

Следовательно, в пределах этапа нагружения (далее индекс j опускаем) нулевое приближение есть решение дифференциального уравнения

$$J^* \frac{d^4 \Delta w_0}{dx^4} = \Delta q(x), \quad (20)$$

решение которого не представляет труда.

Далее определяем невязку решения $F(x)$, подставляя найденное нулевое приближение в уравнение (18). Получим

$$F_0(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(J_k(x) \frac{d^2 \Delta w_0}{dx^2} \right) - \Delta q(x) \quad (21)$$

Первое приближение строится в виде

$$\Delta w_1 = \Delta w_0 - \varepsilon_1 z_1 \quad (22)$$

где z_1 определяется из уравнения

$$J^* \frac{d^4 z_1}{dx^4} = F_0(x), \quad (23)$$

решение которого также не представляет труда.

Величина спуска ε_1 определяется следующим уравнением

$$\varepsilon_1 = \frac{(Bz_1, z_1)}{(Lz_1, z_1)}, \quad (24)$$

где соответствующие скалярные произведения определяются формулами

$$\begin{aligned} (Bz_1, z_1) &= J^* \int_0^l z_1 \frac{d^4 z_1}{dx^4} dx, \\ (Lz_1, z_1) &= \int_0^l z_1 \frac{d^2}{dx^2} \left(J_k(x) \frac{d^2 z_1}{dx^2} \right) dz. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее итерационный процесс повторяется.

$$\Delta w_n = \Delta w_{n-1} - \varepsilon_n z_n \quad (26)$$

где z_n есть решение уравнения

$$J^* \frac{d^4 z_n}{dx^4} = F_{n-1}(x) \quad (27)$$

где правую часть уравнения вычисляется по формуле

$$F_{n-1}(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(J_k(x) \frac{d^2 \Delta w_{n-1}}{dx^2} \right) - \Delta q(x), \quad (28)$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{(Bz_n, z_n)}{(Lz_n, z_n)}.$$

Следует обратить внимание на то, что здесь последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей.

Процесс решения следует начинать с аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования материала балки подходящим аналитическим выражением и определения аналитических выражений E_c и E_k .

Если в интересующем нас диапазоне деформаций экспериментальная диаграмма деформирования может быть представлена в виде

$$\sigma_i = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3, \quad (29)$$

В этом случае секущий и касательный модули принимают вид:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = E - m \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 z^2, \\ E_k &= \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = E - 3m \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 z^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Жесткостные параметры балки постоянной ширины $b = \text{const}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} J_c(x) &= EJ_0 - \frac{mbh^5}{80} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2, \\ J_k(x) &= EJ_0 - \frac{3mbh^5}{80} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где J_0 – осевой момент инерции поперечного сечения балки. Подставляя (31) в (18), получим инкрементальное уравнение изгиба балки:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\left[EJ_0 - \frac{3mbh^5}{80} \left(\frac{d^2 W_{j-1}}{dx^2} \right)^2 \right] \frac{d^2 \Delta w_j}{dx^2} \right) &= \\ &= \Delta q_j(x). \end{aligned} \quad (32)$$

В результате на каждом этапе нагружения имеем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Оператор L в схеме применения метода наискорейшего спуска в данном случае имеет вид

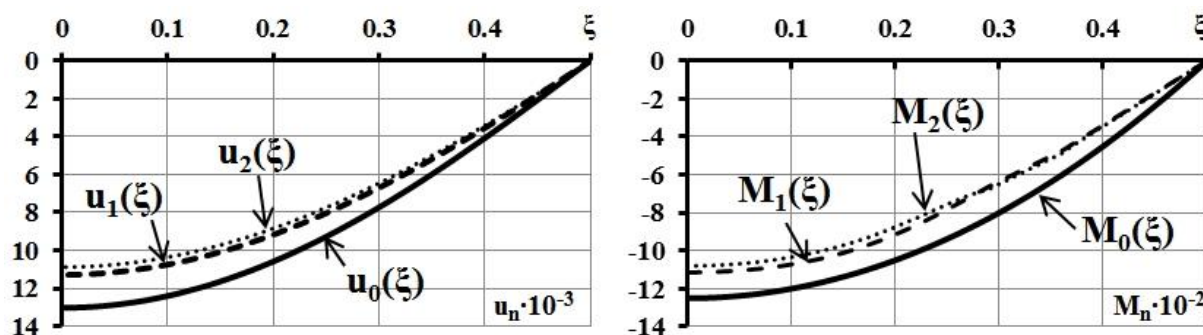


Рисунок 1. Иллюстрация скорости сходимости метода наискорейшего спуска.

$$L = A'(W_{j-1}) =$$

$$= EJ_0 \frac{d^4}{dx^4} - \frac{3mbh^5}{80} \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(\frac{d^2 W_{j-1}}{dx^2} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \right], \quad (33)$$

а оператор B , ограничивающий оператор L , имеет вид

$$B = J_c^{*(j-1)} \frac{d^4}{dx^4},$$

где осредненная жесткость определяется по формуле

$$J_c^{*(j-1)} = EJ_0 - \frac{mbh^5}{80} \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{d^2 W_{j-1}}{dx^2} \right)^2 dx \quad (34)$$

Для иллюстрации скорости сходимости метода наискорейшего спуска на рис. 1 в безразмерной форме приведены результаты расчета балки из нелинейно деформируемого материала, полученные после десяти последовательных нагружений равномерно распределенной нагрузкой. При действии этой суммарной нагрузки максимальная интенсивность деформаций составляла порядка 2,5%.

Таким образом, совместное применение метода последовательных нагружений и метода B -ограниченных операторов позволяет использовать для решения нелинейных задач строительной механики эффективный метод наискорейшего спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
2. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. // ДАН СССР 48, №7, 1945; Функциональный анализ и прикладная математика. УМН 3, №6, 1948.
3. Петров В.В. Нелинейная икрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
4. Петров В.В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах. // Научные доклады высшей школы. Строительство, 1959, №1, с. 27-35.
5. Овчинников И.Г., Петров В.В. Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. // Строительная механика и расчёт сооружений, 1982, №2, с. 13-18.
6. Петров В.В. Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики твердого деформируемого тела. //Сб. Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред, Саратов, 2001, с. 6-12.
7. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории

пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во СГУ, 1975. – 115 с.

8. **Деркачев А.А.** Общая теория метода мажорантной упругой системы. – Душанбе, 1963.

REFERENCES

1. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Funkcional'nyj Analiz [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977.
2. **Kantorovich L.V.** Ob Odnom Jeffektivnom Metode Reshenija Jekstremal'nyh Zadach Dlja Kvadraticnogo Funkcionala [About Effective Method for Solving Extremal Problems for a Quadratic Functional]. // DAN SSSR 48, No. 7, 1945; Funkcional'nyj analiz i prikladnaja matematika. UMN 3, No.6, 1948.
3. **Petrov V.V.** Nelinejnaja Inkremental'naja Stroitel'naja Mehanika [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Infra-Inzhenerija, 2014, 480 pages.
4. **Petrov V.V.** K raschetu pologih obolochek pri konechnyh progibah [To the Analysis of Shallow Shells at Finite Deflections]. // Nauchnye doklady vysshej shkoly. Stroitel'stvo, 1959, No. 1, pp. 27-35.
5. **Ovchinnikov I.G., Petrov V.V.** Opredelenie Dolgovechnosti Jelementov Konstrukcij, Vzaimodejstvujushhih s Agressivnoj Sredoj [Determination of the Durability of Structural Elements Interacting with an Aggressive Medium]. // Stroitel'naja mehanika i raschjot sooruzhenij, 1982, No. 2, pp. 13-18.
6. **Petrov V.V.** Dvuhshagovyj Metod Posledovatel'nogo Vozmushhenija Parametrov i ego Primenenie k Resheniju nelinejnyh zadach mehaniki Tverdogo Deformiruemogo Tela [Two-Step Method of Sequential Perturbation of Parameters and its Application to Solving Nonlinear Problems of Mechanics of a Solid

Deformable Body]. // Proceedings, Problemy prochnosti jelementov konstrukcij pod dejstviem nagruzok i rabochih sred, Saratov, 2001, pp. 6-12.

7. **Petrov V.V.** Metod Posledovatel'nyh Nagruzhenij v Nelinejnoj Teorii Plastinok i Obolochek [The Method of Successive Loading in the Nonlinear Theory of Plates and Shells]. Saratov, Saratov State University, 1975, 115 pages.
8. **Derkachev A.A.** Obshhaja Teorija Metoda Mazhorantnoj Uprugoj Sistemy [The General Theory of the Method of the Majorant Elastic System]. Dushanbe, 1963.

Петров Владилен Васильевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой Теории сооружений и строительных конструкций, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, 77; тел. +7(8452)99-86-03; факс +7(8452)99-88-10; e-mail: vvp@sstu.ru

Vladilen V. Petrov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr.Sc., Head of Department of Theory of Structures, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 77 Politechnicheskaya street, Saratov, Russia, 410054; tel. +7(8452)99-86-03; fax +7(8452)99-88-10; e-mail: vvp@sstu.ru.

MODELING OF TEMPERATURE FIELD DISTRIBUTION OF THE FOAM GLASS BATCH IN TERMS OF THERMAL TREATMENT OF FOAM GLASS

Sergey V. Fedosov¹, Maksim O. Bakanov²

¹ Ivanovo State Polytechnical University, Ivanovo, RUSSIA

² Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Ivanovo, RUSSIA

Abstract: Applications of foam glass is currently quite wide. This material is applied directly to construction and other human activities. Recent years the attention of scientists aimed at modeling the thermal processes in the production of foamed glass. Appear works in which the developed mathematical model allows to predict the distribution of temperature fields in the foam glass material at various stages of heat treatment of the material. The emergence of these models reveals a number of promising directions in the improvement of technology of producing foamed glass. Within the phenomenological formulation of the problem it is necessary to consider three-dimensional temperature field in the charge of foam-glass and inside the metal mold for foaming. It is necessary to consider the nonstationarity of the process and dynamics of change in macrovisiontm values. It is also worth noting that in the conditions of heat treatment of charge materials occurs difficult the heat transfer. The distribution of temperature fields in the foam glass material is from near-surface regions of the charge to the center. The first objective of the study is to find and describe the distribution of temperature fields in the volume of the foam glass of the charge to reflect changes in microphysically parameters in foam glass batch due to the gradual formation of porosity of the material of the charge from the periphery to the center. The second task is to find conditions for the uniform formation of the pore volume of the material. The paper presents a boundary-value problem of heat transfer in foam glass material for the metal mold on the x coordinate. This illustration of temperature field distribution inside the metal mold for foaming.

Keywords: foam glass, heat treatment regime, a mathematical model of heat transfer, temperature field

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПЕНОСТЕКЛЬНОЙ ШИХТЫ В УСЛОВИЯХ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЕНОСТЕКЛА

С.В. Федосов¹, М.О. Баканов²

¹ Ивановский государственный политехнический университет, г. Иваново, РОССИЯ

² Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, г. Иваново, РОССИЯ

Аннотация: Область применения пеностекла в настоящее время достаточно широка. Данный материал применяется как непосредственно для строительства, так и в других областях человеческой деятельности. Последние годы внимание ученых направлено на моделирование термических процессов при получении пеностекла. Появляются работы в которых, разработанные математические модели позволяют прогнозировать распределение температурных полей в пеностекльной шихте на различных стадиях термической обработки материала. Появление данных моделей открывает ряд перспективных направлений при усовершенствовании технологии получения пеностекла. В рамках феноменологической постановки задачи необходимо рассматривать трехмерные температурные поля как внутри самой пеностекльной шихты, так и внутри металлической формы для вспенивания. Необходимо учитывать нестационарность процесса по времени и динамику изменения макрофизических величин. Так же стоит отметить, что в условиях термической обработки материала шихты происходит сложный теплообмен. Распределение температурных полей по пеностекльной шихте проходит от приповерхностных областей шихты к центру. Первая задача исследования состоит в том, чтобы найти и описать распределение температурных полей в объеме пеностекльной шихты с учетом изменения макрофизических параметров

в пеностеклянной шихты вследствие постепенного формирования пористости материала шихты от периферии к центру. Вторая задача состоит в том, чтобы найти условия для равномерного формирования пор по объему материала. В работе представлена краевая задача теплопереноса в пеностеклянной шихте для металлической формы по координате x . Даны иллюстрации распределения температурных полей внутри металлической формы для вспенивания.

Ключевые слова: пеностекло, режим термической обработки, математическая модель теплопереноса, температурные поля

1. INTRODUCTION

Currently, the scope of the foam glass use is rather broad. This material is involved in construction as well as other spheres of human activity. Scientists and engineers face a wide range of challenges the most pressing of which are the following:

- 1) optimization of the foam glass batch composition [5-9];
- 2) selection of the most efficient gas-forming agents to achieve an equally distributed porous structure of the material;
- 3) development of economically viable and energy efficient technologies for the foam-glass batch foaming and annealing [15];
- 4) modeling of heat treatment for the foam glass batch at all stages of the process aimed at obtaining the necessary material [1, 3, 4, 12, 13].

The recent years saw an increased attention of scientists to the model of thermal processes when obtaining foam glass. The papers are being published showing the developed mathematical models which allow predicting the distribution of thermal fields in the foam glass batch at different stages of the heat treatment for the material. These models open a range of promising directions in improving the technology of foam glass obtaining:

- 1) mathematical model of the glass foaming process [3];
- 2) mathematical model of the foam glass annealing [1];
- 3) mathematical model of the dynamics in the formation of the foam glass porous structure [13];
- 4) mathematical model of the processes for the foam glass batch heating [4];

- 5) mathematical model of the most appropriate foam glass batch compositions [7,15].

Undoubtedly, the presented directions of research in the mathematical models of heat treatment for the foam glass batch allow describing certain aspects of the above-mentioned process to a certain degree and predicting some of the end physical parameters of the material. The process of obtaining foam glass consists of several stages thus requiring development of universal mathematical tools which give the opportunity to plan and predict some of the physical parameters of the material.

2. STATEMENT OF THE RESEARCH TASK

Within the framework of the phenomenological task statement, it is necessary to account for three-dimensional thermal fields both inside the foam glass batch itself and inside the metal mould for foaming. The process instability over time and the dynamics of changes in macrophysical values must be taken into account. A complex heat exchange which takes place under conditions of heat treatment for the batch material is also worth noting.

The theoretical basis for modeling heat treatment processes, for developing engineering methods for their calculation and optimization is represented by the heat transfer theory, considering the interrelationship and interdependence between the thermal characteristics of the treated material and the source of high temperature.

The physical nature of the process must also be taken into account as thermal characteristics are directly dependent on other physical parameters

that change over time and under the influence of temperature changes. Definitely, we cannot ignore the fact that, before exposure to the necessary temperatures, the foam-glass batch has a porous structure where pores take the form of microspaces unfilled with crushed glass or a gas-forming agent. Another important fact is that the heat transfer in the crushed foam glass batch takes place in the following ways: by heat conductivity through the solid and gaseous phase, namely, heat conductivity through the solid and gaseous phase, successively or simultaneously, and by radiation between the surfaces of solid particles.

The foam glass batch placed in a metal mould for the purpose of foaming is represented by a chaotic structure which causes certain difficulties in mathematical description that is why this model must be replaced by a well-ordered one which would reflect all the major peculiarities of the basic structure.

It is also necessary to describe processes which occur during gradual heating of the foam glass batch.

Moisture present in the foam glass batch starts evaporating and moving from the foam glass batch to the furnace chamber for foaming. When the values of temperature in the furnace chamber are close to those when the glass starts melting, the surface layers are the first to start melting as they directly contact with metal faces of the mould for foaming, somewhat later the layer heated due to convection starts melting as well. Surface melting of the foam glass batch is taking place – the central areas of the material are not heated yet (due to low heat conductivity of the surrounding material). Consequently, sources of gas formation do not function in these pores, while the batch material surrounding the center is already foaming and here the increase in the pore radius is continuing. Thus, in terms of pore formation, the batch material is created inhomogeneously which affects the quality of the final product thermophysical properties.

If the time of the foam glass batch exposure to heat for the purpose of foaming is insufficient

for the glass to melt all over the material, centers of the foam glass batch do not have enough time to melt and therefore remain non-porous. If the foaming time considerably exceeds the melting time of the glass, fusing of the surface layers in the foam glass batch is taking place, since the sources of gas formation through heating are completely burned while the glass viscosity decreases and the surface tension does not give the opportunity to retain the isolated gaseous phase in the formed pore areas, thus the phase is transferred to the foaming furnace chamber, at the same time the central part of the foam glass batch becomes more porous than in the surface layers of the batch.

Therefore we assume that the distribution of thermal fields in the foam glass batch is taking place in the direction from surface areas of the batch to its center. The primary task of the research consists in finding and describing the distribution of thermal fields in the foam glass batch considering changes in the heat conductivity coefficient for the foam glass batch due to gradual formation of pores in the material from the periphery to the center – $a(t,x,y,z)$. This task can be solved in two ways:

1. development of a mathematical model for the thermal field distribution taking into account and obtaining theoretical dependence of the heat conductivity coefficient changes on time and coordinates under certain initial and boundary conditions.
2. development of a mathematical model for the thermal field distribution in case of computer simulation for the heat conductivity coefficient $a(t,x,y,z)$ changes depending on time and coordinates under certain initial and boundary conditions.

The second task is to find conditions which would ensure equal formation of pores throughout the material. For example, such conditions can be created with different technical means and technologies allowing to influence the foam glass batch in real time, e. g. use of vibration platforms or ultrasound exposure, as well as the use of powders with

different gas formation properties (activity), a combination of the above-mentioned or other influences is also possible.

The complexity of accounting for all the factors stated above during development of a unified mathematical description leads to the need for creating simplified (approximate) mathematical models of heat transfer. Owing to this, there is a generally accepted approach where the solution to the task of conjugate heat transfer inside a solid body and in the boundary layer of the heat carrier is replaced by the solution to the boundary-value problem of the interrelated substance transfer within the material where the heat carrier impact is taken into account through the values determined by the heat transfer laws under boundary conditions.

The system of differential transfer equations along with the initial and boundary conditions represents a mathematical model of the real process. The solution for this system allows to see the overall picture of the heat and moisture distribution in the body over time and to analyze the process kinetics and dynamics.

The use of computer developments enables us to reduce a non-linear problem to a linear one. Using the zonal calculation method proposed by S. P. Rudobashta [11] and the method of "microprocesses", introduced by S. V. Fedosov [14], while dividing the entire process into n elementary microprocesses, thermal and physical phase parameters being regarded as constant within each of them, the nonlinear problem of heat and mass transfer can be reduced to a combination of n linear problems. It is worth noting that this method yields good results on condition that the numerical calculation is used jointly with the Laplace integral transformation method [2]. This is associated with the fact that sufficiently accurate results are achieved in the field of large Fourier numbers when only several of the first terms in the Fourier series are used. When the Fourier number (of the time for the process execution) decreases, the number of Fourier components to be taken into account in order to ensure the established accuracy of calculations

increases. Nevertheless, modern IT technology is able to meet this challenge. Moreover, the Laplace transformation gives the opportunity to present the solution in two formats: with $Fo > 0.1$ and $Fo \ll 0.1$, it is this fact that provides for the advantage of the transformation mentioned above.

Fig. 1 shows a scheme of the "metal mould – foam glass batch" system.

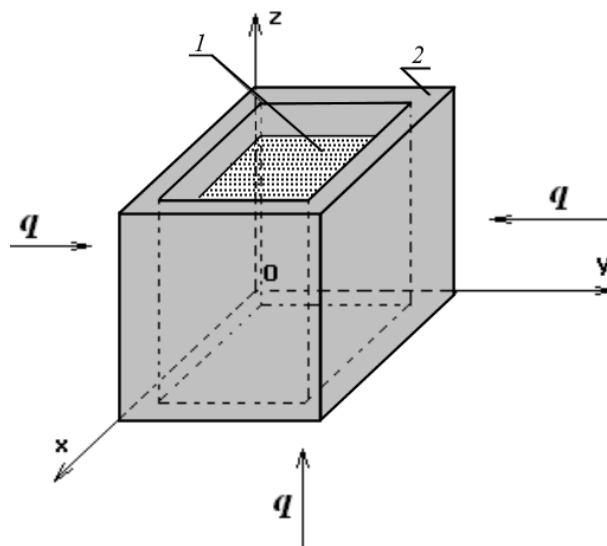


Figure 1. Model of the "metal mould – foam glass batch" system 1 – metal mould; 2 – foam glass batch.

In general, the boundary value problems of substance heat and mass transfer can be represented by nonlinear nonhomogeneous differential equations of parabolic type in partial differential coefficients:

– boundary value problem of thermal conductivity:

$$\rho(u, t) \cdot c(u, t) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(u, t) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right], \quad (1)$$

where $\rho(u, t)$, $c(u, t)$, $\lambda(u, t)$ are thermophysical properties of the foam glass charge material (density, heat capacity, thermal conductivity) generally depending on the moisture content and temperature.

– initial condition:

$$t(x, \tau)|_{\tau=0} = t_0(x) \quad (2)$$

– boundary conditions:

$$t(x, \tau)|_{x=0} = f_n(\tau) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (4)$$

The initial condition (2) shows that there is a general temperature distribution along the coordinate in the foam glass charge material at a time point taken as a reference point.

The boundary condition (3) shows the fact that temperatures of the metal and foam glass charge material are the same in the contact zone of the metal foaming mold and foam glass charge material walls, from which the x coordinate is measured. The condition (4) shows that problem can be considered as symmetric.

At the first stages of modeling, it is necessary to define boundary conditions and solve a plane problem for one of the coordinates. Figure 2 shows the boundary value problem of heat transfer in a foam glass charge material for a metal mold along the x coordinate.

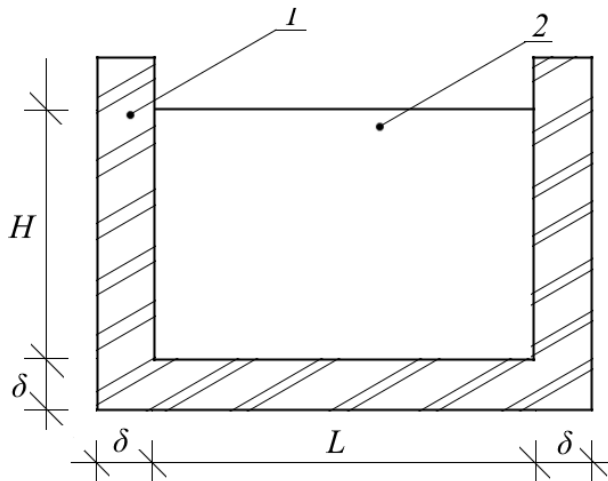


Figure 2. Foam glass charge material (2) – metal mold (1) model.

Under these conditions, the boundary value problem of heat transfer in a foam-glass charge material for a metal mold is as follows:

$$\rho c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \tau > 0; 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (5)$$

$$t(x, \tau)|_{\tau=0} = t_0(x) \quad (6)$$

$$t(x, \tau)|_{x=0} = t_n \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (8)$$

where ρ , c , λ are density, thermal capacity and thermal conductivity of the foam glass charge material, respectively.

Let's enter dimensionless variables:

$$T(\bar{x}, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_n - t_0}; Fo = \frac{a \tau}{(L/2)^2}; \bar{x} = \frac{x}{(L/2)} \quad (9)$$

And then the problem (5)-(8) will be as follows:

$$\frac{\partial T(\bar{x}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}^2}; Fo > 0; 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (10)$$

$$T(\bar{x}, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_n - t_0} = T_0(\bar{x}) \quad (11)$$

$$T(\bar{x}, Fo)|_{\bar{x}=0} = \frac{t_n - t_0}{t_n - t_0} = 1 \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (13)$$

3. STUDY RESULTS

Now we give the final solution of the boundary value problem in the field of originals, omitting simple but cumbersome transformations:

$$T(\bar{x}, Fo) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \bar{x} \right] \cdot \exp \left[-\frac{\pi^2}{4} (2n-1)^2 Fo \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \bar{x} \right] \cdot \int_0^1 T_0(\xi) \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \xi \right] d\xi \cdot \exp \left[-\frac{\pi^2}{4} (2n-1)^2 Fo \right] \quad (14)$$

The expression (14) calculation results are shown in Fig. 3 in the form of curves presenting the change of dimensionless temperatures along the dimensionless coordinate depending on the dimensionless process time.

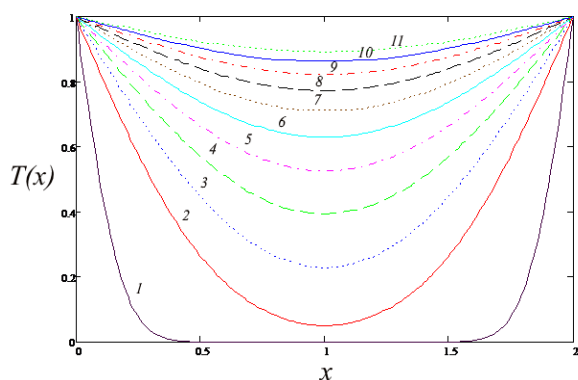


Figure 3. Expression (6) calculation presentation Fo : 1) 0.01; 2) 0.1; 3) 0.2; 4) 0.3; 5) 0.4; 6) 0.5; 7) 0.6; 8) 0.7; 9) 0.8; 10) 0.9 11) 1.

The curves in Fig. 3 present the dynamics of the dimensionless temperature fields in the space of the foam glass charge material (in accordance with Fig. 2, the coordinate origin, $\bar{x}=0$, is positioned at the left wall plane of the metal mold, and $\bar{x}=L$ is the right wall plane of the metal mold).

It is notable how the symmetrical heating of the foam glass charge material flows: prior to achievement of a value around 0.15 by the Fourier criterion, there is a gradually tapering zone between the walls of the metal foaming mold with conserved initial temperature of the foam glass charge material. Then, the

temperature curves are joined and, when $Fo \geq 1.0$, the zone between the metal mold walls is practically uniformly heated.

4. KEY FINDINGS

Thus, the set of equations (5-8) with initial (2) and boundary (3-4) conditions is called the boundary value problem of heat transfer and, in general terms, determines the behavior of the considered system "metal form - foam glass charge material".

To verify the model for adequacy, it is necessary to develop an algorithm for its implementation to real physical phenomena.

REFERENCES

1. **Alexeyev S.V., Shutov A.I.** Specifics of the Heating Processes During Foam Glass Annealing. // "Issledovatel", 2002, No. 4.
2. **Belyayev N.M., Ryadno A.A.** Methods of the Heat Conductivity Theory: Teaching Aid for Higher Educational establishments. Part 2. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982, 304 pages.
3. **Gorodov R.V., Kuzmin A.V.** Evaluation of the Convection Component in the Course of Batch Heating for the Foam Glass Production. // Journal of Tomsk Polytechnic University, 2008, Vol. 313, No. 4, pp. 18-22.
4. **Dyomin A.M.** Integrated Mathematical Model of the Raw Material Heat Treatment to Obtain Foam Glass. // Journal of Civil Engineers, 2013, No. 5, pp. 280-287.
5. **Ketov A.A., Pizanov I.S., Saulin D.V.** Experience of Foam Glass Material Production of Crushed Glass. // Construction Materials, 2007, No. 3, pp. 70-72.
6. **Lotov V.A., Krivepkova Ye.V.** Kinetics of the Porous Structure Formation in the Foam Glass. //Glass and Ceramics, No. 3, 2002.

7. **Navlova, N. A., Pavlov, I. V., Iavlov, V. F.** et al. Stabilization of the Industrial Raw Material Composition for the Purpose of Obtaining Foamed Silicates // *Construction Materials*, 2001, No. 6, pp. 14-15.
 8. **Kazmina O.V., Kuznetsova N.A., Vereshchagin V.I.** Obtaining Foam Glass on the Basis of Bottom Ash Waste for Thermal Power Plants. // *Journal of Tomsk Polytechnic University*, 2011, Vol. 319, No. 3, pp. 52-56.
 9. **Popov N.A., Elinson M.P., Shtein Ya.Sh.** Fundamental Properties of Artificial Porous Aggregates and Lightweight Concretes on the Basis of Porous Aggregates and Their Use in Construction. Moscow, Publishing House of the Literature on Construction, 1966, pp. 17-25.
 10. **Rudobashta S.P.** Heat Technology. Moscow, Kolos Publ., 2010, 600 pages.
 11. **Rudobashta S.P.** Mass Transfer in Solid Phase Systems. Moscow, 1980, 248 pages.
 12. **Fedosov S.V., Bakanov M.O.** Foam Glass: Production Specifics, Heat Transfer and Gas Formation Simulation. // *Academia. Architecture and Construction*, №1, 2015, pp. 108-113.
 13. **Fedosov S.V., Bakanov M.O., Volkov A.V.** et al. Mathematical Model of the Pore Formation Dynamics Owing to Heat Treatment of the Foam Glass Batch. // *Journal of Higher Educational Establishments. Chemistry and Chemical Technology*, 2014, Vol. 57, Ed. 3, pp. 73-79.
 14. **Fedosov S.V.** Heat Treatment Processes for Disperse Materials with Phase and Thermal Transformations. Dissertation for a Doctor's of Engineering Science Degree. Leningrad, 1987, 350 pages.
 15. **Tsyrempilov A.D., Alexeyev Yu.S.** Energy Saving in the Foam Glass Production. // *Construction Materials*, 1998, No. 3, pp. 20-21.
- (РААЧН), профессор, доктор технических наук, президент Ивановского государственного политехнического университета; 153037, Россия, Центральный федеральный округ, Ивановская область, г. Иваново, ул. 8 Марта, дом 20; тел. +7(4932) 32-85-40; факс +7(4932) 37-19-42; e-mail: fedosov-academic53@mail.ru.
- Баканов Максим Олегович, кандидат технических наук, начальник кафедры, Ивановская пожарно-спасательная академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий; 153040, Россия, Ивановская область, г. Иваново, Строителей пр-кт, 33; тел. +7(4932)34-37-09; e-mail: mask-13@mail.ru.
- Sergey V. Fedosov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Science (RAACS), president of the Ivanovo state Polytechnic University; Ivanovo State Polytechnical University; 20, Ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; tel. + 7(4932) 32-85-40; fax +7(4932) 37-19-42; e-mail: fedosov-academic53@mail.ru.
- Maxim O. Bakanov, Candidate of technical Sciences, Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters; 33, Prospekt Stroiteley, Ivanovo, 153040, Russia; tel. +7(4932)34-37-09; e-mail: mask-13@mail.ru.

Федосов Сергей Викторович, академик Российской академии архитектуры и строительных наук

APPLICATION OF RIGID LINKS IN STRUCTURAL DESIGN MODELS

Sergey Yu. Fialko

Cracow University of Technology, Cracow, POLAND

Abstract: A special finite element modelling rigid links is proposed for the linear static and buckling analysis. Unlike the classical approach based on the theorems of rigid body kinematics, the proposed approach preserves the similarity between the adjacency graph for a sparse matrix and the adjacency graph for nodes of the finite element model, which allows applying sparse direct solvers more effectively. Besides, the proposed approach allows significantly reducing the number of nonzero entries in the factored stiffness matrix in comparison with the classical one, which greatly reduces the duration of the solution. For buckling problems of structures containing rigid bodies, this approach gives correct results. Several examples demonstrate its efficiency.

Keywords: finite element method, rigid bodies, rigid links, buckling analysis, multistory buildings

ПРИМЕНЕНИЕ ЖЕСТКИХ ВСТАВОК В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ КОНСТРУКЦИЙ

С.Ю. Фиалко

Краковский политехнический университет им. Тадеуша Костюшко, г. Краков, ПОЛЬША

Аннотация: В настоящей статье предлагается специализированный подход к моделированию жестких вставок в рамках метода конечных элементов (МКЭ) при решении линейных статических задач и задач анализа устойчивости конструкций. В отличие от известного классического подхода, основанного на теоремах кинематики твердого тела, предлагаемый подход сохраняет сходство между графом смежности для разреженной матрицы и графом смежности для узлов конечноэлементной модели, что позволяет более эффективно применять прямые решатели для разреженных матриц. Кроме того, предлагаемый подход позволяет значительно уменьшить количество ненулевых записей в факторизованной матрице жесткости по сравнению с соответствующим классическим, что значительно сокращает объем вычислительной работы и соответственно время счета. Для задач расчета конструкций, содержащих абсолютно твердые (недеформируемые) тела, на устойчивость предлагаемый подход также позволяет получить корректные результаты. Несколько примеров демонстрируют эффективность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: метод конечных элементов, абсолютно твердые тела, жесткие вставки, анализ устойчивости конструкций, многоэтажные здания

1. INTRODUCTION

Rigid links are widely used in structural design models. A rigid link usually refers to a kinematic relationship between the selected nodes of the finite element model, when the stiffness values of the structural elements connecting them are considered to be many times larger than those of other elements due to a number of considerations.

Let several nodes $S_1, S_2, \dots, S_n$ be connected by rigid links with a node M . The node M is a master node, and the nodes $S_i, i \in [1, n]$ are slave nodes (Fig. 1).

Then on the basis of the theorem of rigid body kinematics

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{Si} \\ \boldsymbol{\theta}_{Si} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M + \boldsymbol{\theta}_M \times \mathbf{p}_{M-Si} \\ \boldsymbol{\theta}_M \end{pmatrix}, \quad i \in [1, n], \quad (1)$$

where $\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{S_i}$ are vectors of translational displacements of the nodes M, S_i respectively, θ_M, θ_{S_i} are vectors of rotation angles, $\mathbf{p}_{M-S_i}$ is a radius-vector connecting the node M with a node S_i .

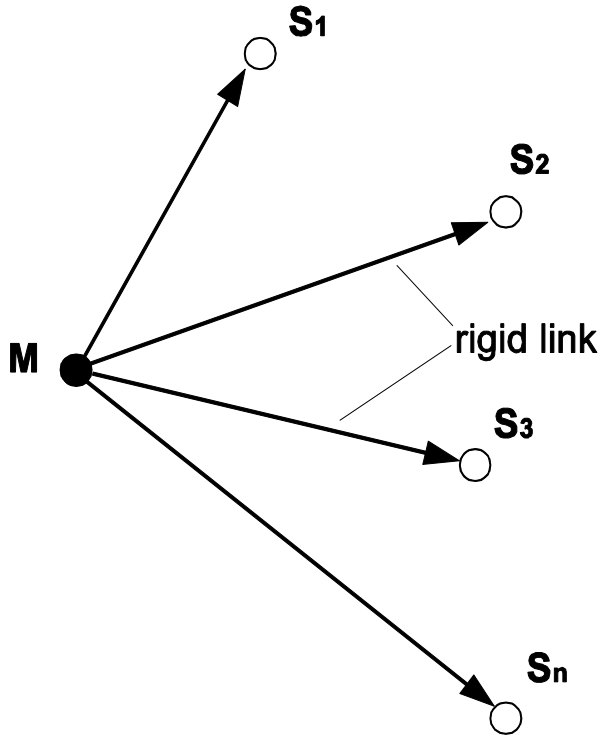


Figure 1. Model of a rigid body consisting of a system of rigid links. M is a master node, S is a slave node.

Thus, displacements and rotation angles of all nodes S_i , $i \in [1, n]$, are expressed through the respective displacements and rotation angles of the node M.

A set of nodes $M \cup S_i$, $i \in [1, n]$ and a set of rigid links $\{M, S_i\}$, $i \in [1, n]$, each of which connects the node M to a node S_i , $i \in [1, n]$, form a rigid body.

In some cases, the binding of the node S_i to the node M does not take place for all degrees of freedom, but only for some of them. The displacements of unbound degrees of freedom of all slave nodes are independent variables, and all displacements of bound degrees of freedom are expressed through the displacements and rotation angles of the master node. In this case,

a rigid body is not formed, and an incomplete binding takes place.

In many FEA software, the use of rigid links leads to the fact that the slave nodes with the bound degrees of freedom obtain numbers of the corresponding equations of the master node.

Let us consider an example presented in Fig. 2. The equilibrium equation of a finite element with rigid links imposed on its nodes is transformed as follows:

$$\mathbf{Q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{Q}_e \tilde{\mathbf{q}}_e = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{r}_e, \quad (2)$$

where

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ip} & \mathbf{K}_{iq} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jp} & \mathbf{K}_{jq} \\ \mathbf{K}_{pi} & \mathbf{K}_{pj} & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pq} \\ \mathbf{K}_{qi} & \mathbf{K}_{qj} & \mathbf{K}_{qp} & \mathbf{K}_{qq} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{i,M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{p,M_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{q,M_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_i \\ \bar{\mathbf{U}}_j \\ \bar{\mathbf{U}}_p \\ \bar{\mathbf{U}}_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{Q}_e \tilde{\mathbf{q}}_e,$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{M_1} \\ \bar{\mathbf{U}}_{M_2} \\ \bar{\mathbf{U}}_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_i \\ \bar{\mathbf{R}}_j \\ \bar{\mathbf{R}}_p \\ \bar{\mathbf{R}}_q \end{pmatrix},$$

$\mathbf{K}_{mn}$ – block of the stiffness matrix corresponding to the nodes m, n, $\bar{\mathbf{U}}_m^T = (\mathbf{u}_m \ \theta_m)$, $\bar{\mathbf{R}}_m^T = (\bar{\mathbf{F}}_m \ \bar{\mathbf{M}}_m)$, $\mathbf{u}_m, \theta_m$ – vectors of the translational displacements and rotation angles in the node m, $\bar{\mathbf{F}}_m, \bar{\mathbf{M}}_m$ – total force and total moment in the node m,

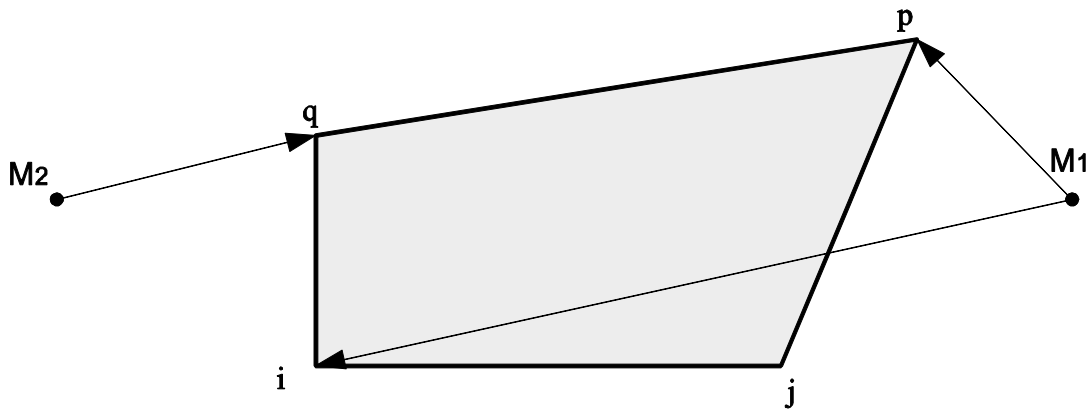


Figure 2. Four-node shell finite element with imposed rigid links. M_1 , M_2 are master nodes.

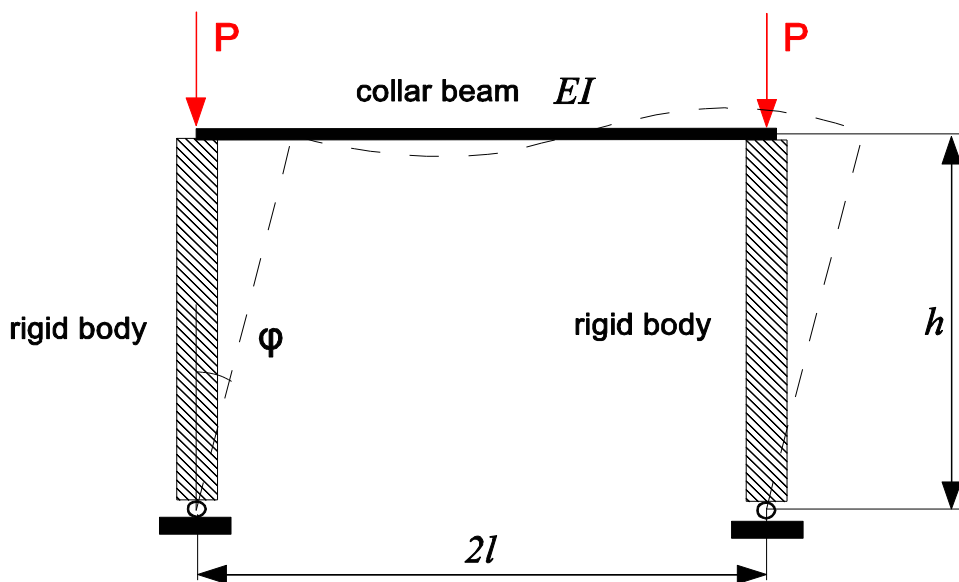


Figure 3. Design model of a plane frame with rigid columns. Dashed line shows the buckling mode.

$$\tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{q}}_e = \tilde{\mathbf{r}}_e, \quad (3)$$

$$\mathbf{C}_{m,M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F}_{M,m} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{M,m} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y \\ -\rho_z & 0 & \rho_x \\ \rho_y & -\rho_x & 0 \end{pmatrix},$$

ρ_x , ρ_y , ρ_z – components of a vector connecting the master node M with the slave node m .

In the result of the transformation the expression (2) becomes

where $\tilde{\mathbf{r}}_e = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{r}_e$ – the result of the parallel transfer of the forces from the slave nodes to the respective master nodes. Let's call this approach method "A".

Typical examples of the use of rigid links are given in Fig. 3 – 6. Fig. 3 shows a design model of a plane frame with infinitely rigid columns. It turned out that many of the FEA software solve the buckling problem for systems with rigid links incorrectly 1. We shall return to this problem later.

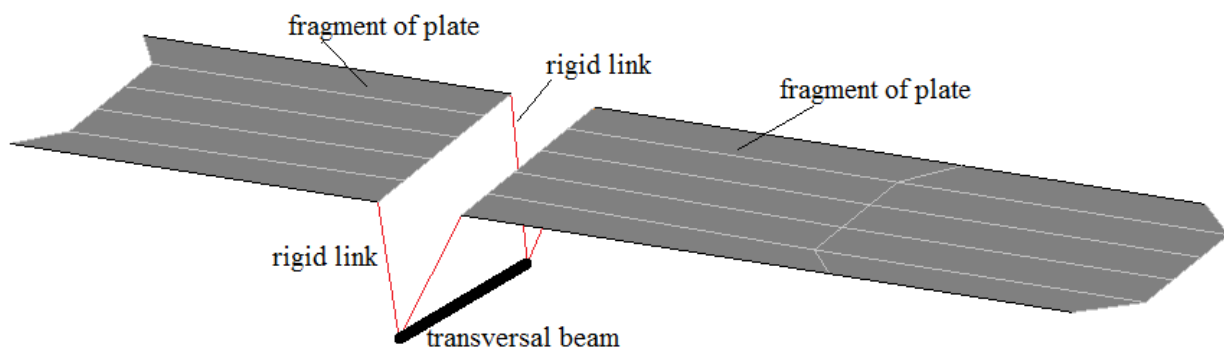


Figure 4. Attachment of bearing slabs of the bridge span to the transverse beam at the junction of two spans.

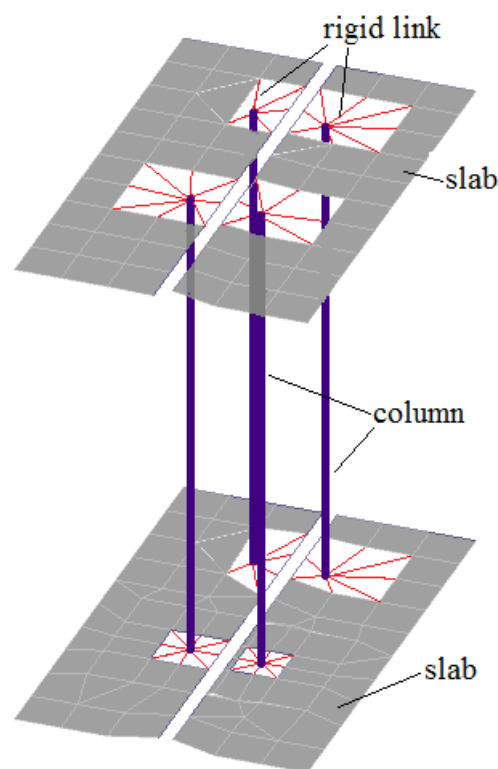


Figure 5. Connection of columns with floor slabs. Rigid links form a rigid body in order to prevent an unrestricted increase of bending moments and transverse forces in the slab with the mesh refinement.

Fig. 4 shows a fragment of the span structure of the bridge. A detailed modeling of some joints and connections often turns out to be unnecessary. However, in order to create a design model that adequately reflects the behavior of the structure, it is necessary to impose a series of rigid links on the nodes.

Fig. 5 shows a fragment of the connection of columns with floor slabs where the columns are modelled by bars and the slabs – by flat shell finite elements.

When the Kirchhoff – Love theory of thin shells is used, bending moments tend to infinity at the point of application of the concentrated force – column reaction directed along its axis.

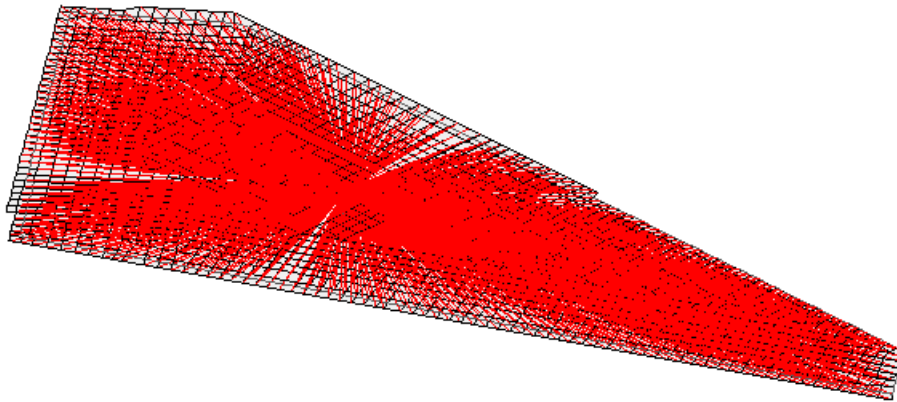


Figure 6. Imposed rigid links make the floor slab of a high-rise building rigid in its plane, however, the bending stiffness value remains finite.

In order to justify this fact, simply select a circular plate in the vicinity of the column-to-slab junction point and apply the known solution of the problem of a circular plate subjected to a concentrated force applied at its center 2. It is known that for such a problem the radial bending moment in the center of the plate has a logarithmic singularity.

It follows that in the process of mesh refinement there is an unlimited increase in the values of bending moments in the shell in a column-to-slab junction point 1. In order to study the stress-strain state in the vicinity of this point, you should separately consider this joint using a 3D model for both the column and the slab. It is impossible to solve this problem within the thin shell theory. Therefore in order to avoid singularity in the solution, various approaches are used.

One of them lies in imposing rigid links on the adjacent nodes, the column-to-slab joint being the master node. Thus, a rigid body is formed, the size of which according to the Saint-Venant's principle is about two cross-sectional heights, and the area adjacent to a singular point is excluded from the stress analysis. It should be noted that when the Mindlin-Reissner shell theory is used, this peculiarity remains.

The seismic codes in many cases suggest using design models with floor slabs rigid in their plane, their bending stiffness having a finite

value. Implementation of such a design model is achieved by imposing links rigid only in the plane of the floor slab (Fig. 6).

A peculiarity of this problem is a large number of rigid links meeting in each master node. At the same time, the binding of distant nodes takes place. When the "A" method is used, it leads to a significant increase in the number of nonzero entries in the factored stiffness matrix, despite the fact that the number of equations decreases when the rigid links are imposed.

Even when the dimension of the problem is relatively small, the duration of the solution increases significantly. The following example confirms this.

The drawback of the "A" method is also the lack of similarity between the adjacency graph for nodes of the finite element model and the adjacency graph for a sparse matrix.

Many finite element solvers use this similarity, which enables to reorder the adjacency graph for nodes, and then to use the fact that each node of the finite element model contains a group of equations which forms a dense submatrix in the sparse matrix 3, 4, 5. The reordering of the nodal adjacency graph is carried out several times faster than that of the adjacency graph for the sparse matrix, and when a coarser graph is used, the number of fill-in usually turns out to be somewhat smaller, than in the case of a more detailed graph 7.

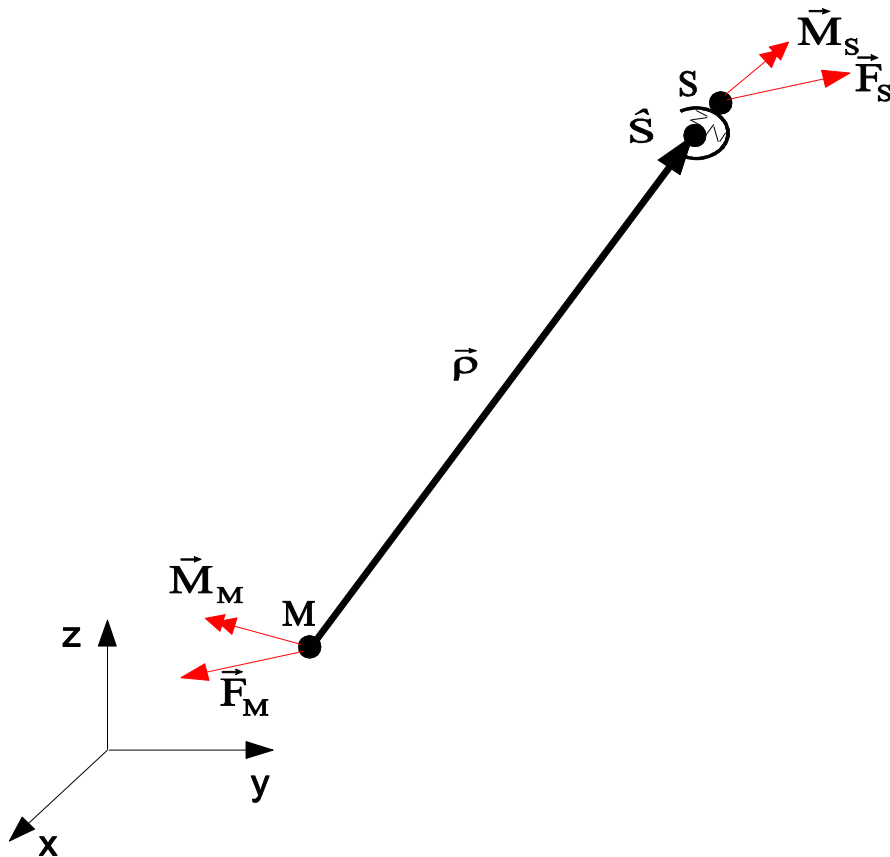


Figure 7. Rlink finite element modelling a rigid link.

Moreover, the initial division of the sparse matrix into dense submatrices enables to optimize the procedure of their combining into larger blocks, which simplifies the use of high-performance procedures for dense matrices and improves their performance.

It should also be noted that the implementation of the "A" method is rather difficult, because the load and displacement vectors, as well as the stiffness matrix of the finite element have to be converted in accordance with the expressions (1) - (3) in different program modules usually developed by different programmers.

This paper proposes a two-node finite element which models a rigid link and preserves the similarity between the nodal adjacency graph and the adjacency graph for the sparse matrix which enables to apply the above-mentioned high-performance finite element solvers to such models without any changes. This approach, which we will call the "B" method, is much easier to implement than the "A" method

because the imposition of rigid links comes down to simply adding the appropriate finite elements to the design model.

2. LINEAR STATICS

Fig. 7 shows the proposed Rlink finite element modelling a rigid link.

The element has two nodes – M (master) and S (slave), connected by a rigid link. The intermediate node $\hat{S}$ with the same coordinates as the node S is entered.

Displacements of nodes S, $\hat{S}$ are combined for the bound degrees of freedom. The penalty function method is applied for this purpose. The displacements of all nodes are represented in the global coordinate system OXYZ. The vectors of total forces and total moments $\vec{F}_M, \vec{M}_M, \vec{F}_S, \vec{M}_S$ are applied in the nodes M and S respectively.

The principle of virtual works is used to obtain the stiffness matrix of the Rlink finite element:

$$\delta(\bar{\mathbf{U}}_{\hat{S}} - \bar{\mathbf{U}}_S)^T \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{U}}_{\hat{S}} - \bar{\mathbf{U}}_S) - \delta\bar{\mathbf{U}}_M^T \bar{\mathbf{R}}_M - \delta\bar{\mathbf{U}}_S^T \bar{\mathbf{R}}_S = 0, \quad (4)$$

where

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_x & & & & & \\ & \gamma_y & & & & \\ & & \gamma_z & & & \\ & & & \gamma_{Rx} & & \\ & & & & \gamma_{Ry} & \\ & & & & & \gamma_{Rz} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{U}}_S^T = (\mathbf{u}_S \quad \boldsymbol{\theta}_S), \quad \bar{\mathbf{U}}_M^T = (\mathbf{u}_M \quad \boldsymbol{\theta}_M)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_S^T = (\bar{\mathbf{F}}_S \quad \bar{\mathbf{M}}_S), \quad \bar{\mathbf{R}}_M^T = (\bar{\mathbf{F}}_M \quad \bar{\mathbf{M}}_M)$$

$\mathbf{u}_M, \boldsymbol{\theta}_M, \mathbf{u}_S, \boldsymbol{\theta}_S$ – vectors of displacements and rotation angles in the nodes M and S respectively, $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{Rx}, \gamma_{Ry}, \gamma_{Rz}$ – penalty parameters for displacements in the directions OX, OY, OZ and rotation angles relative to the axes OX, OY, OZ. If the given degree of freedom is not related to the displacements or rotations of the node M, the corresponding penalty parameter is equal to zero.

The matrix $\mathbf{\Gamma}$ is diagonal and is presented for a spatial design model with 6 degrees of freedom in a node – 3 displacements and 3 rotation angles. The first term in (4) represents the virtual work of the elastic links with the rigidity 2γ on the difference of the displacements of the nodes S and $\hat{S}$, where γ takes the values of one of the diagonal elements of the matrix $\mathbf{\Gamma}$ depending on the degree of freedom this displacement corresponds to. The greater the value of γ , the less the difference between the displacements (rotations) of the nodes S and $\hat{S}$. The remaining terms in (4) represent the virtual work of the external forces applied to the nodes M and S.

Let us eliminate the displacements $\bar{\mathbf{U}}_S^T$ from (4) using the relations (1):

$$\bar{\mathbf{U}}_{\hat{S}} = \mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M, \quad \mathbf{C}_{M\hat{S}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F}_{M\hat{S}} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{M\hat{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y \\ -\rho_z & 0 & \rho_x \\ \rho_y & -\rho_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where ρ_x, ρ_y, ρ_z – projections of the vector $\bar{\rho}$ onto the axes of the global coordinate system. Substitute (5) into (4):

$$\delta(\mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M - \bar{\mathbf{U}}_S)^T \mathbf{\Gamma}(\mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M - \bar{\mathbf{U}}_S) - \delta\bar{\mathbf{U}}_M^T \bar{\mathbf{R}}_M - \delta\bar{\mathbf{U}}_S^T \bar{\mathbf{R}}_S = 0$$

or

$$\delta\bar{\mathbf{U}}_M^T (\mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M - \mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{R}}_M) + \delta\bar{\mathbf{U}}_S^T (-\mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M + \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{R}}_S) = 0.$$

Taking into account the independence of variations $\delta\bar{\mathbf{U}}_M^T, \delta\bar{\mathbf{U}}_S^T$ we obtain:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M - \mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{R}}_M = 0 \\ -\mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} \bar{\mathbf{U}}_M + \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}_S - \bar{\mathbf{R}}_S = 0 \end{cases}$$

then the equilibrium equation of the Rlink element is as follows:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{r}_e, \quad (6)$$

where

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} & -\mathbf{C}_{M\hat{S}}^T \mathbf{\Gamma} \\ -\mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{M\hat{S}} & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_M \\ \bar{\mathbf{U}}_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_e = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_M \\ \bar{\mathbf{R}}_S \end{pmatrix} \quad (7)$$

and $\mathbf{K}_e$ is the stiffness matrix of the Rlink element.

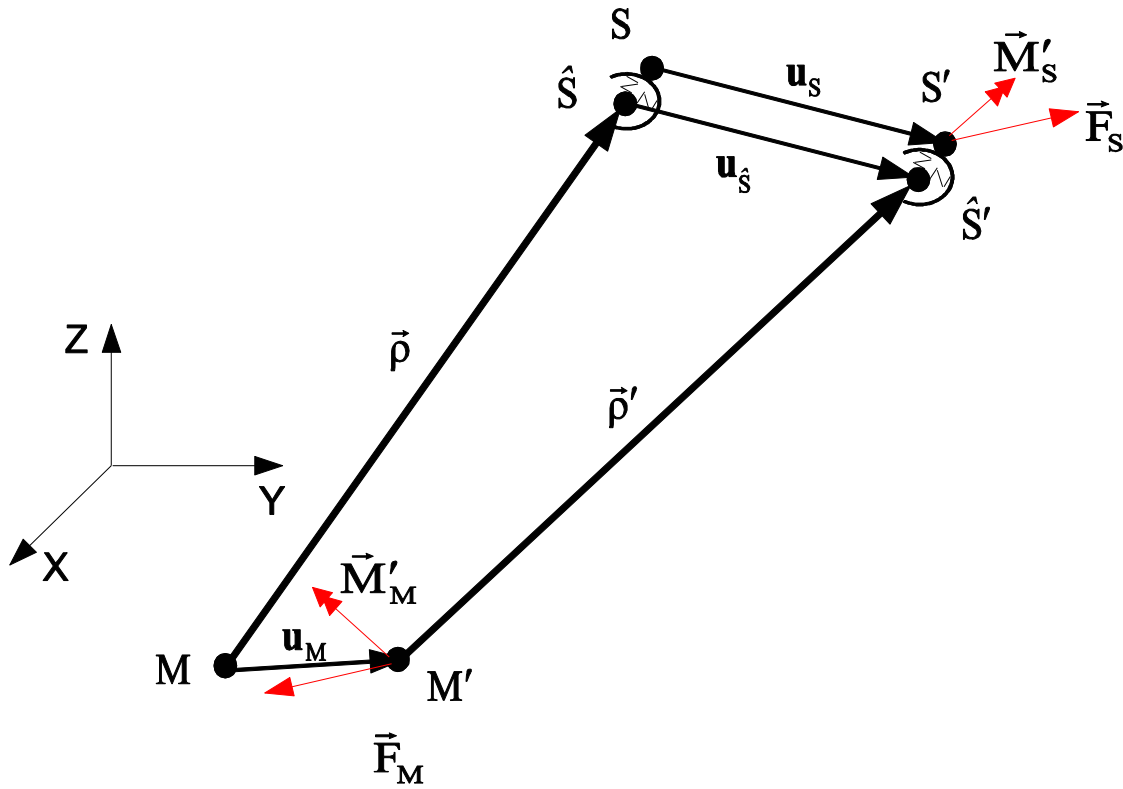


Figure 8. Buckling of the Rlink element.

3. BUCKLING

According to the Euler stability criterion the possibility of the existence of the deflected equilibrium state of the Rlink element is looked for, and the load does not change upon the transition to the deflected state. The minimum value of the load parameter, at which the existence of an adjacent equilibrium state becomes possible for the first time, is called critical.

The buckling of the Rlink element is shown in Fig. 8.

The points $M, \hat{S}, S$ correspond to the initial state. The vectors of total forces and total moments $\vec{F}_M, \vec{M}_M, \vec{F}_S, \vec{M}_S$, applied to the nodes M, S , are obtained from the solution of the pre-buckling problem. It is assumed that the displacements and the rotation angles are so small in comparison with the geometric dimensions of the structure that the difference of

the deformed state in comparison with the initial one can be neglected.

The position of the nodes $M', \hat{S}', S'$ defines the deflected state of the Rlink element. The vectors of total forces and moments applied at the nodes M, S , move to the nodes M', S' during buckling and $\vec{u}_M, \vec{u}_{\hat{S}}, \vec{u}_S$ are the respective displacements of the nodes $M, \hat{S}, S$ at buckling. Since the initial buckling is considered, the vectors of total forces and moments $\vec{F}_M, \vec{M}_M, \vec{F}_S, \vec{M}_S$ remain the same as in the pre-buckling state. The values of total moments change in the result of the parallel transfer of the total force vectors $\vec{F}_M, \vec{F}_S$ from the points M, S to M', S' :

$$\vec{M}_M' = \vec{M}_M + \vec{u}_M \times \vec{F}_M \quad (8)$$

$$\vec{M}_S' = \vec{M}_S + \vec{u}_S \times \vec{F}_S. \quad (9)$$

Since each link connecting the points $\hat{S}'$ and S' works independently of the others, it follows

from the condition of their equilibrium that the vectors of total forces and moments $\vec{F}_S, \vec{M}_S$ can be transferred to the node $\hat{S}'$. Then (9) takes the form

$$\vec{M}'_S = \vec{M}_S + \mathbf{u}_S \times \vec{F}_S. \quad (10)$$

In the case of partial binding for unbound degrees of freedom, it follows from the solution of the static problem that the corresponding forces or moments in the nodes M, S are equal to zero. Therefore, expressions (8) - (10) remain in force.

Applying the principle of virtual works and accepting the deflections during buckling as the virtual displacements, we obtain:

$$\delta(\vec{U}_{\hat{S}} - \vec{U}_S)^T \Gamma(\vec{U}_{\hat{S}} - \vec{U}_S) - \delta\vec{U}_M^T \vec{R}_M - \delta\vec{U}_{\hat{S}}^T \vec{R}_S = 0, \quad (11)$$

where the first term is the work of internal forces of the Rlink element on virtual displacements during buckling and the two last terms are the work of external forces.

Let

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta(\vec{U}_{\hat{S}} - \vec{U}_S)^T \Gamma(\vec{U}_{\hat{S}} - \vec{U}_S), \\ \delta W &= -\delta\vec{U}_M^T \vec{R}_M - \delta\vec{U}_{\hat{S}}^T \vec{R}_S, \end{aligned} \quad (12)$$

where Π in the potential energy accumulated in the elastic links, W is the change in the potential of the external forces. It follows from the previous section that

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e, \quad (13)$$

$$\delta W = -\delta(\mathbf{u}_M \quad \boldsymbol{\theta}_M) \begin{pmatrix} \vec{F}_M \\ \vec{M}'_M \end{pmatrix} - \delta(\mathbf{u}_{\hat{S}} \quad \boldsymbol{\theta}_{\hat{S}}) \begin{pmatrix} \vec{F}_S \\ \vec{M}'_S \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Substituting (1), (8), (10) into (14), we derive:

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta(\mathbf{u}_M \quad \boldsymbol{\theta}_M) \begin{pmatrix} \vec{F}_M \\ \vec{M}_M + \mathbf{u}_M \times \vec{F}_M \end{pmatrix} - \\ &- \delta(\mathbf{u}_M + \boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho} \quad \boldsymbol{\theta}_M) \begin{pmatrix} \vec{F}_S \\ \vec{M}_S + \mathbf{u}_{\hat{S}} \times \vec{F}_S \end{pmatrix} = \\ &= -\delta\mathbf{u}_M \begin{pmatrix} \vec{F}_M + \vec{F}_S \\ \underbrace{\vec{M}_M + \vec{M}_S + \vec{\rho} \times \vec{F}_S}_{=0} \end{pmatrix} - \\ &- \delta\boldsymbol{\theta}_M \begin{pmatrix} \vec{M}_M + \vec{M}_S + \vec{\rho} \times \vec{F}_S \\ \underbrace{\vec{M}_M + \vec{M}_S + \vec{\rho} \times \vec{F}_S}_{=0} \end{pmatrix} - \\ &- \delta\boldsymbol{\theta}_M (\mathbf{u}_M \times \vec{F}_M) - \delta\boldsymbol{\theta}_M (\mathbf{u}_{\hat{S}} \times \vec{F}_S), \end{aligned} \quad (15)$$

Here we use

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho}) \vec{F}_S &= (\delta\boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho}) \vec{F}_S = \\ &= -(\vec{\rho} \times \delta\boldsymbol{\theta}_M) \vec{F}_S = (\vec{\rho} \times \vec{F}_S) \delta\boldsymbol{\theta}_M = \delta\boldsymbol{\theta}_M (\vec{\rho} \times \vec{F}_S) \end{aligned} \quad (16)$$

The first two terms of (15) are the equilibrium equations in the pre-buckling state, therefore they are identically equal to zero. The remaining terms of the expression (15) will be as follows:

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta\boldsymbol{\theta}_M (\mathbf{u}_M \times \vec{F}_M) - \\ &- \delta\boldsymbol{\theta}_M \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_{\hat{S}} \times \vec{F}_S - \frac{1}{2} \vec{F}_S \times \mathbf{u}_{\hat{S}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Substitute (1) into (17):

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta\boldsymbol{\theta}_M (\mathbf{u}_M \times \vec{F}_M) - \\ &- \delta\boldsymbol{\theta}_M \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u}_M + \boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho}) \times \vec{F}_S - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \vec{F}_S \times (\mathbf{u}_M + \boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho}) \right] = \\ &= -\delta\boldsymbol{\theta}_M \left[\mathbf{u}_M \times \begin{pmatrix} \vec{F}_M + \vec{F}_S \\ \underbrace{\vec{M}_M + \vec{M}_S + \vec{\rho} \times \vec{F}_S}_{=0} \end{pmatrix} \right] - \\ &- \delta\boldsymbol{\theta}_M \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_M \times \vec{\rho} \times \vec{F}_S + \boldsymbol{\theta}_M \times \vec{F}_S \times \vec{\rho}) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Calculating the double cross product, we obtain:

$$\mathbf{\theta}_M \times \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{F}}_S = \mathbf{\Omega} \mathbf{\theta}_M, \quad (19)$$

$$\mathbf{\theta}_M \times \bar{\mathbf{F}}_S \times \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\theta}_M, \quad (20)$$

where

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -\rho_y F_S^y - \rho_z F_S^z & \rho_x F_S^y & \rho_x F_S^z \\ \rho_y F_S^x & -\rho_x F_S^x - \rho_z F_S^z & \rho_y F_S^z \\ \rho_z F_S^x & \rho_z F_S^y & -\rho_x F_S^x - \rho_y F_S^y \end{pmatrix} \quad (21)$$

Finally,

$$\delta W = -\delta \mathbf{\theta}_M \left[\frac{1}{2} (\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^T) \mathbf{\theta}_M \right] \quad (22)$$

Substituting (13) and (22) into (12), and then (12) into (11), we obtain

$$\delta \mathbf{q}_e [(\mathbf{K}_e - \lambda \mathbf{G}_e) \mathbf{q}_e] = 0, \quad (23)$$

where $\mathbf{G}_e$ – geometric stiffness matrix of the Rlink element:

$$\mathbf{G}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{\theta}_M \\ \mathbf{u}_S \\ \mathbf{\theta}_S \end{pmatrix}. \quad (24)$$

It is assumed that all loads applied to the structure increase in proportion to the parameter λ , and $\lambda=1$ for the given load value.

In the case of a rigid body, shown in Fig. 1, stiffness matrices (geometric stiffness matrices) are generated for the respective Rlink elements.

4. PENALTY PARAMETERS

A wide scatter of the stiffness values for different degrees of freedom is typical for the

problems of structural mechanics. For example, the tension-compression stiffness of a plane frame element is several orders of magnitude greater than its bending stiffness.

Therefore, the penalty parameter (stiffness of links between the nodes S and $\hat{S}$) should be taken separately for each degree of freedom. In addition, if the stiffness values are too large, it can lead to the ill-conditioning of the global stiffness matrix and the loss of accuracy.

The following algorithm is used for the optimal choice of penalty parameters. First, the diagonal DiagRL of the stiffness matrix is obtained for a model that does not contain any Rlink elements. Then, the equation number eqn_M is defined for each degree of freedom dof of the node M, and the corresponding element on the main diagonal is $D_M[dof] = \text{DiagRL}[eqn_M]$, where $dof \in [x, y, z, RX, RY, RZ]$ are the degrees of freedom corresponding to the translational displacements and the rotation angles of the node M. The same is done for the node S: $D_S[dof] = \text{DiagRL}[eqn_S]$, where eqn_S is the equation number corresponding to the degree of freedom dof in the node S. We accept $\gamma_{dof} = \text{GAM} \cdot \max\{D_M[dof], D_S[dof]\}$, where $\text{GAM} \in [100 \div 10000]$. If there is no binding for the degree of freedom dof, the corresponding $\gamma_{dof} = 0$.

This algorithm enables to flexibly determine the penalty parameters for each degree of freedom. We will provide the solution of the model problem shown in Fig. 9.

Here, $EI = 0.2 \text{ MNm}^2$, $a = 1 \text{ m}$, $l = 9 \text{ m}$, $M = 0.001 \text{ MNm}$. The exact solution of this problem is: $\tilde{w}_A = 0.0475 \text{ m}$, $\tilde{\varphi}_A = 0.005$, where $\tilde{w}_A, \tilde{\varphi}_A$ are the vertical displacement and the rotation angle in the point A. Table 1 provides the values of w_A, φ_A , obtained by the finite element method using the Rlink element and a conventional element of the plane frame with the large finite stiffness EI' modelling a rigid body.

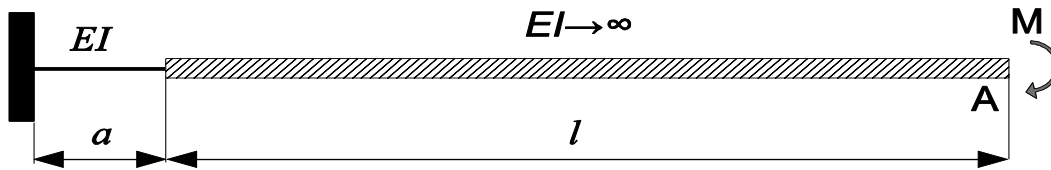


Figure 9. Model problem.

Table 1. Values of the vertical displacement w_A and the rotation angle φ_A in the point A.

Rlink element				Plane frame element with the large finite stiffness EI'			
GAM	w_A , m	φ_A	Err, %	EI'/EI	w_A , m	φ_A	Err, %
10	$4.750000 \cdot 10^{-2}$	$5.125000 \cdot 10^{-3}$	2.5	10	$6.775000 \cdot 10^{-2}$	$9.500000 \cdot 10^{-3}$	90
100	$4.750000 \cdot 10^{-2}$	$5.012500 \cdot 10^{-3}$	0.25	100	$4.952500 \cdot 10^{-2}$	$5.450000 \cdot 10^{-3}$	9
1000	$4.750000 \cdot 10^{-2}$	$5.001250 \cdot 10^{-3}$	0.025	1000	$4.770250 \cdot 10^{-2}$	$5.045000 \cdot 10^{-3}$	0.9
10000	$4.750000 \cdot 10^{-2}$	$5.000125 \cdot 10^{-3}$	<0.01	10000	$4.752020 \cdot 10^{-2}$	$5.004500 \cdot 10^{-3}$	0.09

The Err column provides

$$\text{Err} = 100 \cdot \max \left\{ \left| \frac{w_A - \tilde{w}_A}{w_A} \right|, \left| \frac{\varphi_A - \tilde{\varphi}_A}{\varphi_A} \right| \right\}.$$

When the Rlink element is used, the error is less than 1% even if $GAM = 100$, and when $GAM = 1000$, it is less than 0.1%. When a rigid body is modelled by a plane frame element with the large finite stiffness, in order to achieve an error of less than 0.1%, it is necessary to increase the stiffness by 4 orders of magnitude in comparison with the stiffness of finite elements connected to this rigid body.

Thus, the proposed approach enables to obtain sufficient accuracy for engineering calculations at rather small values of the penalty parameters, which provides insignificant deterioration of conditioning of a global stiffness matrix when using Rlink elements.

The following model problem is given in the Figure 10.

Table 2 compares the number of nonzero entries in the factored stiffness matrix given in megabytes (MB), and the duration of factoring for methods "A" and "B".

The problem is solved on a computer with a 4-core processor Intel® Core™ i7-2760QM CPU

2.4/3.4 GHz, RAM DDR3 8 GB, OS Windows 7 (64 bit) Professional, SP1. A sparse direct solver 8 parallelized by us on the basis of multithreading is used. The values of the maximum displacements for both methods are given in Table 3. METIS reordering 7 is used. Here u , v , w are displacements along the axes OX , OY , OZ respectively. When the method «B» is used, the stiffness values are summed for all Rlink elements meeting in the master node. In order to limit the increase of the respective coefficients in the global stiffness matrix, the penalty parameter for all rigid links which make up each rigid body is corrected as follows:

$$\begin{aligned} GAM &= \\ &= (GamMax - GamMin) \cdot \exp(-N_{legs}/400) + \\ &+ GamMin, \end{aligned} \quad (25)$$

where N_{legs} is the number of Rlink elements which make up this rigid body, and the parameters $GamMax$, $GamMin$ are taken as $GamMax = 10\,000$, $GamMin = 100$ by default. Thus, the GAM value always lies between $GamMax$, $GamMin$, and when the number of rigid links is small, GAM is close in value to $GamMax$ which provides a high accuracy of the

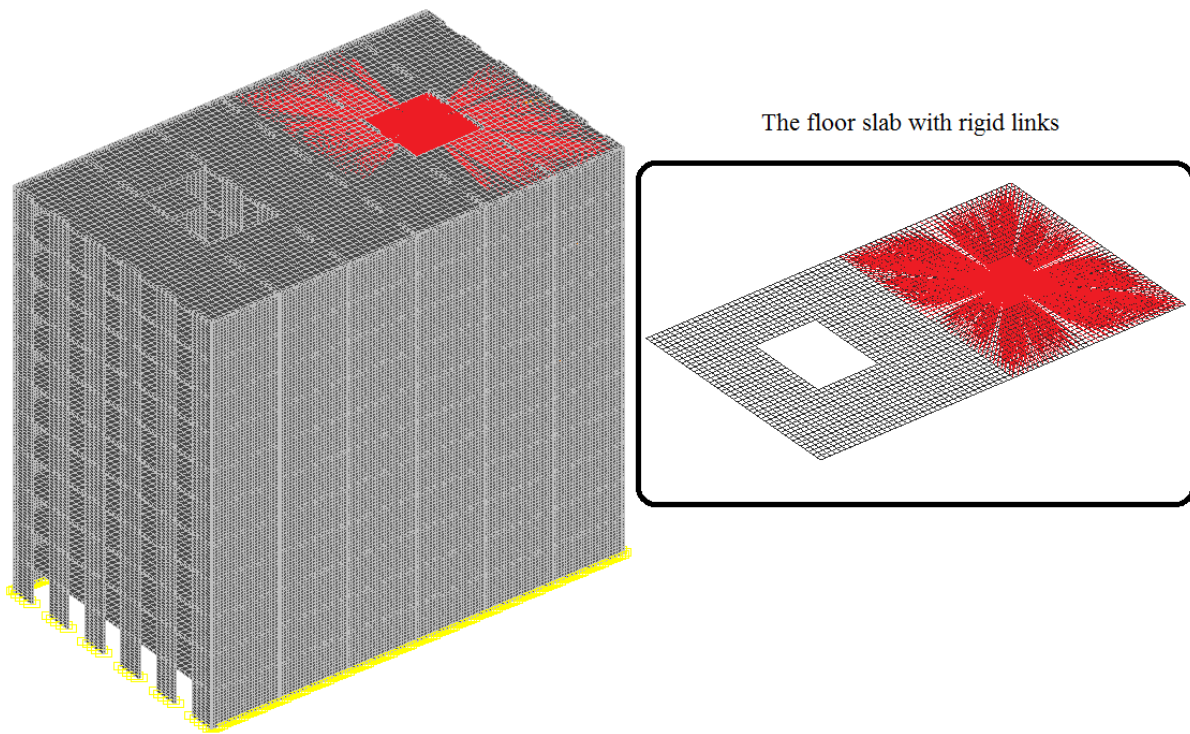


Figure 10. Design model of a multistory building (94 362 nodes, 91 811 finite elements). Half of each floor slab is modelled by a rigid body.

Table 2. Comparison of efficiency of methods «A» and «B».

Modeling of rigid links	Number of equations	Size of the factored stiffness matrix, MB	Duration of factoring, s
Method «A»	467 292	2 154	195
Method «B»	563 256	1 304	13

Table 3. Maximum displacements u , v , w , obtained by methods «A» and «B».

Modeling of rigid links	$\max\{u\}$, m	$\max\{v\}$, m	$\max\{w\}$, m
Method «A»	$3.295530 \cdot 10^{-4}$	$7.439050 \cdot 10^{-5}$	$6.451711 \cdot 10^{-5}$
Method «B»	$3.295534 \cdot 10^{-4}$	$7.439049 \cdot 10^{-5}$	$6.451719 \cdot 10^{-5}$

approximation of a rigid body, and when the number of rigid links is large, the GAM value approaches GamMin, reducing the probability of the accuracy loss of the solution due to ill-conditioning of the stiffness matrix.

The values of maximum displacements obtained by using two different models of rigid links differ from the 6th significant digit. Therefore, we can assume that the results of these two calculations are practically the same. However, the «B» method provided approximately a two-fold decrease in the number of nonzero entries

in the factored stiffness matrix which led to a reduction of the duration of factoring performed on 4 threads by 15 times.

The results given in this section were obtained with the help of the research software developed by the author.

5. NUMERICAL RESULTS

This section describes typical problems of structural mechanics containing rigid links.

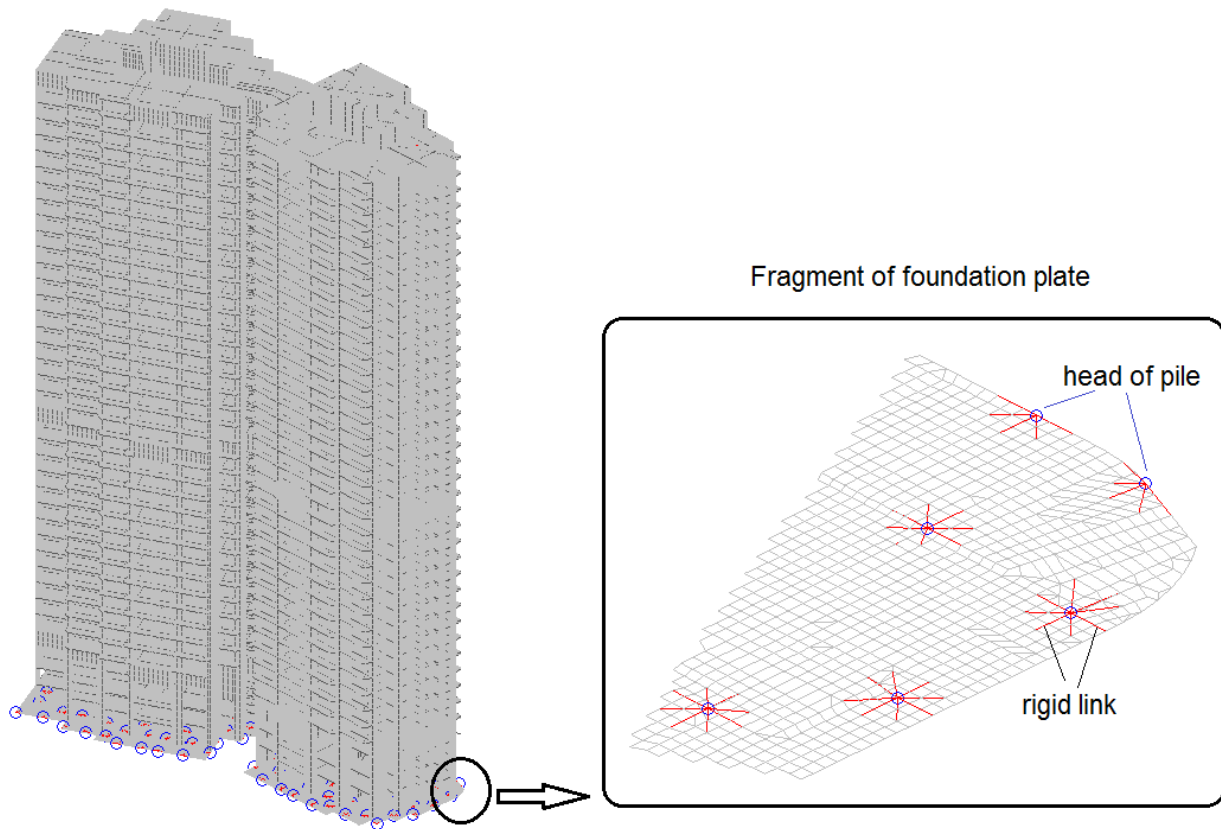


Figure 11. Design model of a multistory building (4 805 610 equations) and a fragment of the foundation plate.

The main attention is paid to the accuracy of the numerical solution estimated as follows:

$$\begin{aligned} err &= \|\hat{\mathbf{b}}_i - \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}}_i\|_2 / \|\hat{\mathbf{b}}_i\|_2, \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{x}}_i, \quad \hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}_i \quad i \in [1, nrhs], \end{aligned} \quad (26)$$

where $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ are respectively the right-hand side vector, the solution vector, the stiffness matrix of a system of linear algebraic finite-element equations, the diagonal of this stiffness matrix, i is the right-hand side number, $nrhs$ is the number of right-hand sides, err is the error measure. When determining $\|\cdot\|_2$, the dot product of the right-hand side vector $\mathbf{b}_i$ and the residual vector $\hat{\mathbf{b}}_i - \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}}_i$ is calculated. Since the components of these vectors are values of different dimension (forces and moments of

forces), their scaling by a diagonal of the stiffness matrix is carried out.

Example 1. A design model of a multistory building taken from the SCAD Soft¹ collection is considered. The dimension of the problem is 4 805 610 equations. The Rlink elements are used in the junctions of the pile heads with the foundation plate to avoid the transfer of concentrated forces to the foundation plate (Fig. 11).

PARFES 5, 6 was used to solve a system of linear algebraic equations with a sparse stiffness matrix $\mathbf{K}$. Despite the fact that the dimension of the design model is large, the accuracy of the solution, shown in Table 4, turned out to be high.

¹ SCAD Soft (www.scadsoft.com) – Software Company, developer of the SCAD finite element modeling software suite, which is used for structural analysis and design, is certified according to building regulations of the CIS countries, and is one of the most popular software applications of the industry in the area.

Table 4. Error of the solution of the system of linear algebraic equations for the design model given in the example 1.

Load case	1	2	3	4	5	6	7	8
err	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$5.3 \cdot 10^{-8}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$

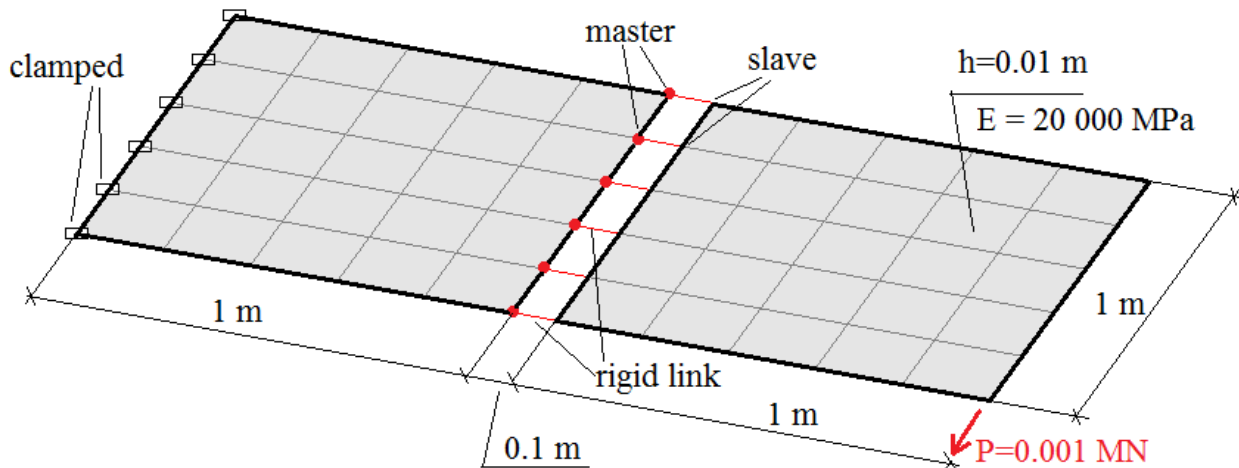


Figure 12. Two plates connected by rigid links.

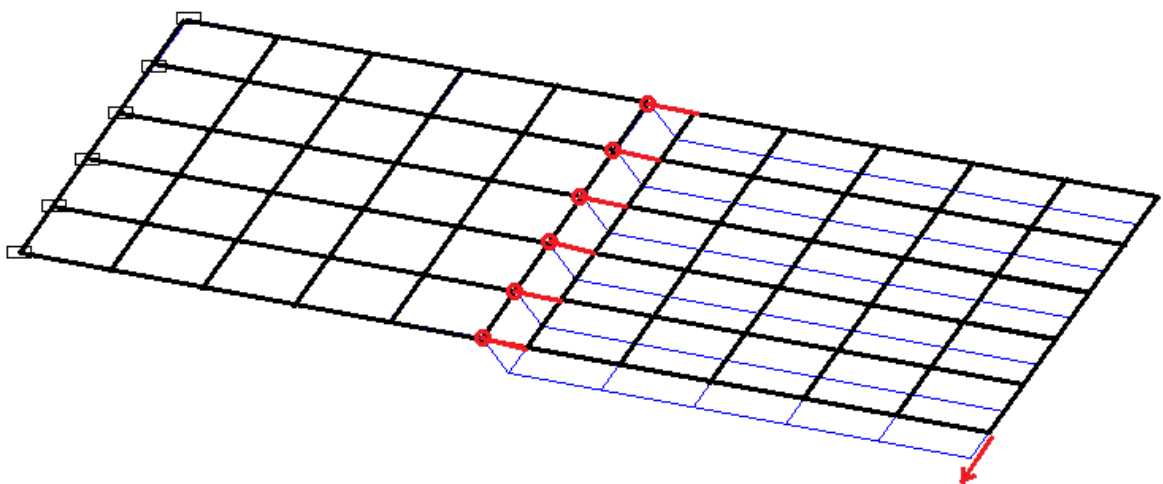


Figure 13. Displacements of the structure. Finite element MITC4.

Example 2. Two plates connected by rigid links are considered (Fig. 12). The displacements of this structure under the action of a concentrated force P acting in the plane of the plates are analyzed. The flat shell finite element MITC4 [11], as well as the quadrilateral finite element Q4 [11], are used.

The peculiarity of this problem is the fact that the finite element MITC4 does not have stiffness preventing the rotation relative to the normal to the middle surface (drilling rotation). Therefore, the global stiffness matrix contains

zero rows and columns on the degrees of freedom corresponding to the drilling rotation.

The approach applied in 13, which lies in adding a small fictitious rigidity used when there is a difference between the average rotation angle of the finite element relative to the normal and the rotation angle in the current node, leads to the fact that the structure shown in Fig. 12 is close to a geometrically unstable one (Fig. 13).

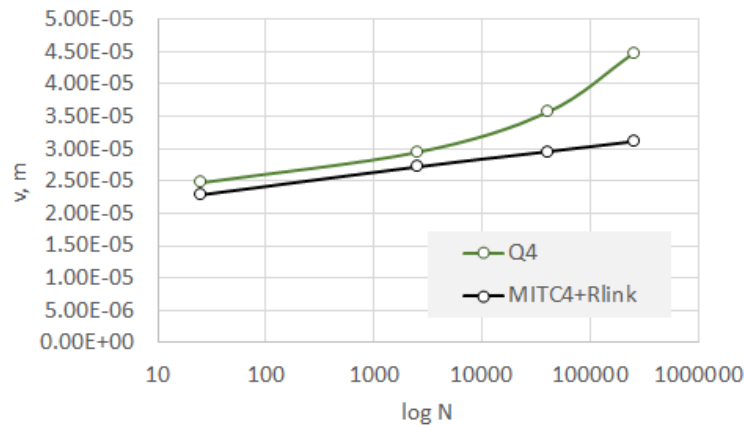


Figure 14. Dependence of the displacement v , m on the number of mesh points N .

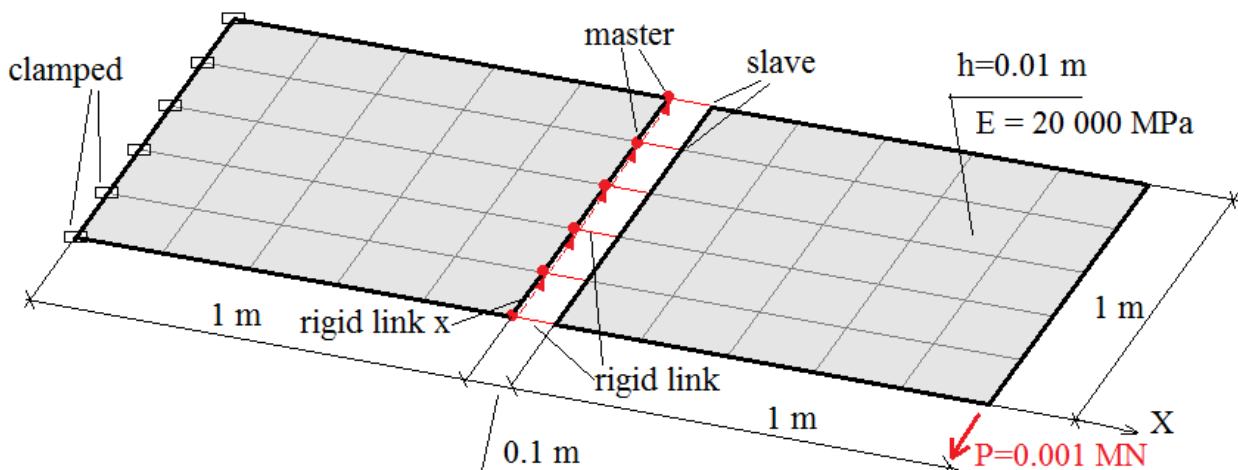


Figure 15. "Rigid link" connects a master node (indicated by a red dot) with a slave node in all degrees of freedom. "Rigid link x" binds only the displacement u along the OX axis, and the arrow is directed to the slave node.

When the finite elements Q4 11 are used (their bending stress-strain state is given in 9, and the membrane stress-strain state is given in 10), the finite rigidities are on the "drilling rotation" degrees of freedom, therefore, the conditioning of the global stiffness matrix is much better, than in the MITC4 element. The experience of using the Q4 element in Robot 14, and in the author's research software has shown that the solution accuracy is satisfactory when coarse meshes are used in the model problems testing the torsion of a column connected to a floor slab, and bending of a deep beam under the action of concentrated bending moments in the corners 10. However, at an unlimited refinement of the mesh, the above stiffness values tend to zero 1 therefore, the results obtained for the

considered problem should be treated with caution.

Q4-curve in Fig. 14 shows this. Here v is the displacement of the node in which the force is applied in the direction of its action, N is the number of mesh points. The design models with meshes 5×5 , 50×50 , 200×200 and 500×500 are considered. Beginning with a mesh 50×50 an intensive increase of displacement is observed. The results obtained for the case when the Rlink finite element was used («B» method) coincide with the results of the «A» method up to 4 significant digits at $GAM = 10000$.

In order to use the MITC4 elements, we must modify the design model. One possible solution is shown in Figure 15, the rigid links "rigid link x", binding only the translational displacements

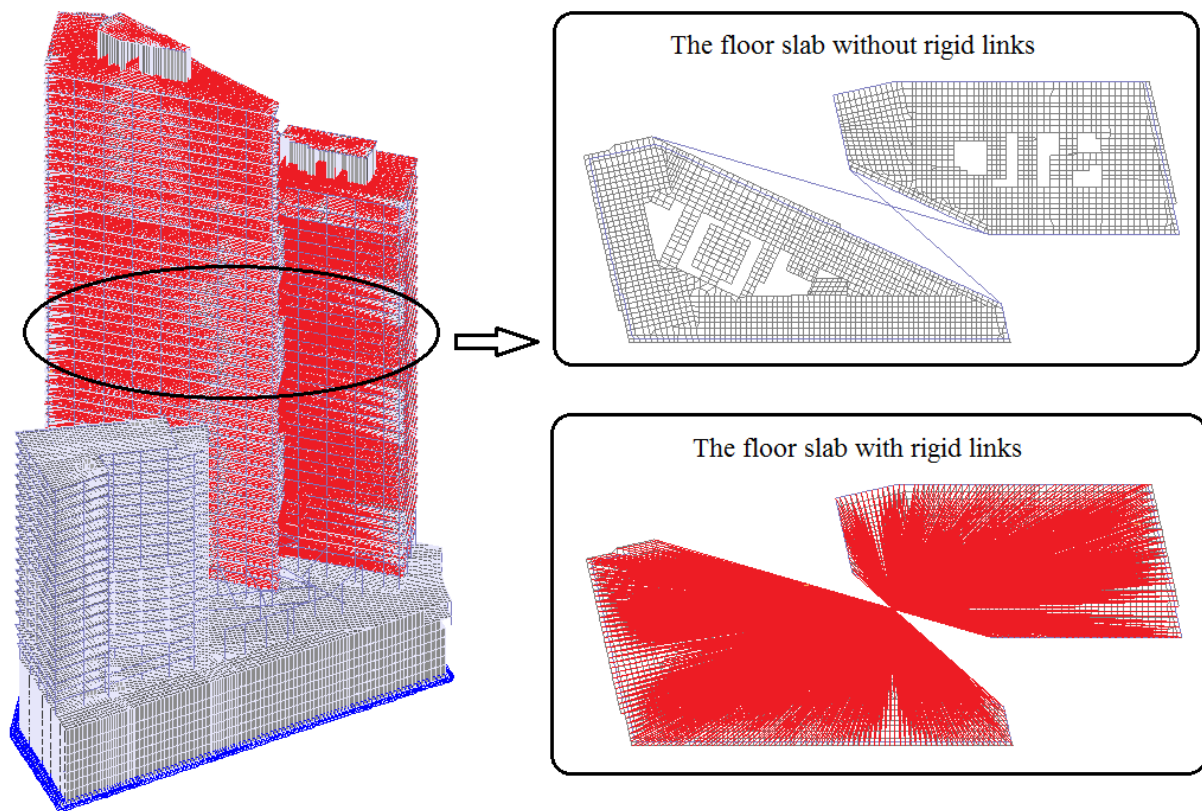


Figure 16. Design model of a high-rise building (1 275 162 equations) and a fragment of a floor slab. Rigid links are used for modeling floor slabs as a rigid body in the plane of the slab.

u in the direction of the OX axis, are added in addition to the previously used rigid links “rigid link” connecting plates in all degrees of freedom. The master nodes are indicated by red dots.

The “rigid link x ” elements bind displacements u of two consecutive nodes. Thus, a “rigid angle” is formed in each master node, which involves the tension-compression and shear stiffness when this node is subjected to torsion relative to the normal.

The curve MITC4+Rlink presents the behavior of such model in Fig. 14. Unlike the previous design model which used the Q4 elements, displacement values v of the given design model do not diverge with the mesh refinement.

Thus, the advantage of the first model that uses Q4 elements is the absence of additional “rigid link x ” elements and a good conditionality of the system of linear algebraic equations. However, this design model enables to obtain acceptable results only on coarse meshes. The numerical solution diverges when the mesh is refined.

An undisputed advantage of the second design model is the convergence of the numerical solution. When the meshes are coarse, both models give similar results.

Example 3. The design model of a high-rise building (Fig. 16) taken from the SCAD Soft collection is considered. The dimension of the problem is 1 275 162 equations.

This building was erected in Moscow, so it was necessary to perform its strength analysis according to the requirements of the Moscow urban construction design code MGSN 4.19-05, which prescribes a seismic analysis for a 5- and 6-point earthquake. The floor slabs are considered as rigid bodies in their plane and their bending stiffness is assumed to be finite. In accordance with these requirements, the design model involves rigid links (Fig. 13), which restrict only horizontal translational displacements.

Table 5. Error of the solution of the system of linear algebraic equations by PARFES 5, 6 and multifrontal method BSMFM 3, 4.

Load case	Error at the solution by PARFES	Error at the solution by BSMFM
1	9.819427e-007	5.839926e-009
2	1.340733e-006	3.692731e-009
3	1.125980e-005	1.818273e-008
4	8.232009e-006	2.611328e-008
5	9.872282e-006	1.815249e-008
6	7.377167e-006	3.395874e-008
7	3.511916e-007	7.428898e-010
8	2.993076e-007	2.887699e-010
9	3.884085e-006	4.464822e-008
10	4.262448e-006	4.017364e-008

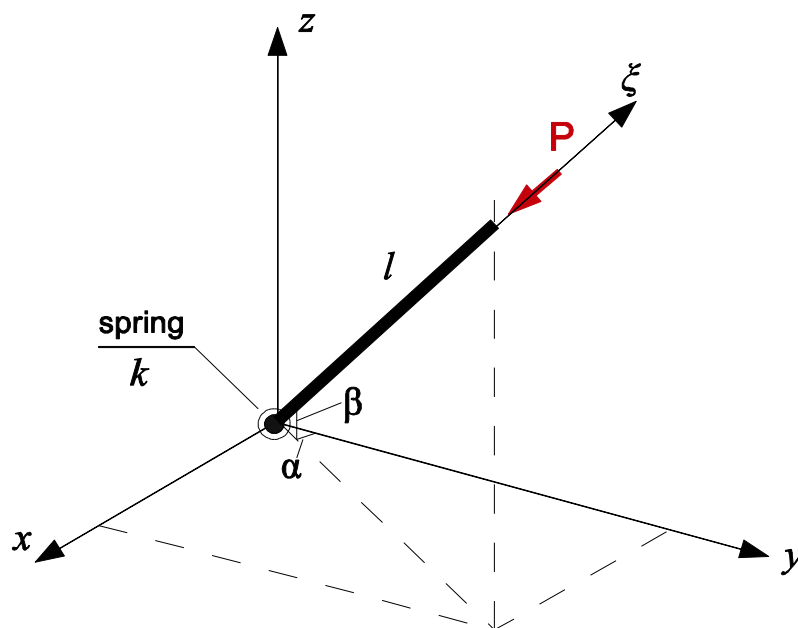


Figure 17. Hinged rigid rod under the action of an axial compressive force.

Multiple rigid links are intersected in the same master node, so the stiffness in the master node is accumulated during assembling when a method “B” is applied. The strategy for selecting the penalty parameter GAM is described in Section 4, expression (25), and is applied here. The solution error for the first ten load cases is given in Table 5. It should be noted that the multifrontal method BSMFM 3, 4 has proved to be more resistant to ill-conditioning than PARFES 5, 6 for the considered problem. It is probably due to the fact that the multifrontal method does not assemble a

stiffness matrix entirely, and the assembly and decomposition are performed simultaneously. The METIS reordering 7 is used for both PARFES and BSMFM methods. The default values of GamMax and GamMin (10 000 and 100) are applied.

Example 4. A rigid rod of the length l , inclined to the OY axis at an angle α and to the XOY plane at an angle β , is considered. The rod has a spherical hinge support prohibiting translational displacements, in which each elastic spring of stiffness k works at the rotation angles of the rod

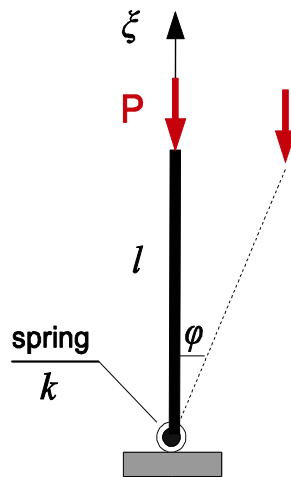


Figure 18. Transition of a rod to the deflected state during buckling.

at its deviation from the equilibrium position. The axial compressive force P is applied to the free end.

Figure 18 presents a drawing of a plane passing through the axis of the rod in the pre-buckling state and the axis of the rod in the deflected state caused by buckling.

Equilibrium condition of the rod in the deflected state: $k\varphi - \lambda_{cr}Pl\varphi = 0$, from where it follows that the parameter of the critical force is $\lambda_{cr} = Pl/k$. Accepting $l = 1$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $k = 1$ MN·m, $P = 1$ MN, we obtain $\lambda_{cr} = 1$. The rotation of the rod on the angles α and β does not affect the value of the critical force, however, it leads to the fact that the matrix Ω does not contain any zero entries. It enables to perform the testing in the most general form.

When using the finite element method, the rigid rod is modelled by the Rlink element and the springs are modeled by the elastic supports, working only at the rotation angles. Since the problem is spatial, we have obtained two mutually orthogonal buckling modes with multiple values of the critical force parameter $\lambda_{cr,1} = \lambda_{cr,2} = 1$, which correspond to the above exact solution.

Example 5. The problem shown in Fig. 3 is considered. The exact value of the critical force is 1:

$$P_{cr} = \frac{3EI}{lh}.$$

The following values are accepted: $l = 1$ m, $h = 1.5$ m, $E = 200000000$ kN/m², $I = 8.3333 \cdot 10^{-6}$ m⁴. The corresponding exact value of the critical force is $P_{cr} = 3333.32$ kN.

In the finite element model, the collar beam is divided into 10 finite elements of the plane frame, and the columns are modelled by the Rlink elements and $P_{cr} = 3333.31$. If the collar beam is modelled by a single finite element of the plane frame, then $P_{cr} = 3332.15$ kN.

6. CONCLUSION

The proposed method of modeling rigid links has proved to be effective for solving the static and buckling problems of structures the design models of which contain rigid bodies (14, 15).

ACKNOWLEDGMENTS

The preparation of this work was supported by SCAD Soft IT company.

REFERENCES

1. **Perelmuter A.V., Slivker V.I.** Numerical Structural Analysis. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
2. **Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.** Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1959.
3. **Fialko S.** A Sparse Shared-Memory Multifrontal Solver in SCAD Software. // in: Proceedings of International Multiconference on Computer Science and Information Technology; October 20-22, 2007, Wisła, Poland, 3 (2008), ISSN 1896-7094, ISBN 978-83-60810-14-9, IEEE Catalog Number CFP0864E-CDR, pp. 277-283, 2008.
4. **Fialko S.** The Block Substructure Multifrontal Method for Solution of Large Finite Element Equation SETS. // Technical Transactions 1-NP (8), 2009, pp. 175-188 (in Polish).
5. **Fialko S.** PARFES: A Method for Solving Finite Element Linear Equations on Multi-core Computers. // Advances in Engineering software, 40(12), 2010, pp. 1256-1265.
6. **Fialko S.** Parallel Direct Solver for Solving Systems of Linear Equations Resulting from Finite Element Method on Multi-Core Desktops and Workstations. // Computers and Mathematics with Applications, 70, 2015, pp. 2968-2987.
7. **Karypis G., Kumar V.A.** Fast and High Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs. Technical Report TR 95-035, Department of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis, 1995.
8. **George A., Liu J.W.H.** Computer solution of sparse positive definite systems, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1981.
9. **Katili I.** A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields – Part II: An extended DKQ Element for Thick-Plate Bending Analysis. // Int. J. Num. Meth. Eng., 36, 1993, pp. 1885-1908.
10. **Ibrahimbegovic A., Taylor R.L., Wilson E.L.** A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degree of Freedom. // Int. J. Num. Meth. Eng., 30, 1990, pp. 445-457.
11. **Fialko S.Yu., Ankyanec E.K.** Vibrations of Thin Cylindrical Shells with Non-Stiff Connection Between Ribs and Paneling. In book: Shell Structures: Theory and Applications (Edited by: W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak). Taylor & Francis Group, London, 2006, pp. 315-317.
12. **Bathe K.J.** Finite Element Procedures. New Jersey, Prentice Hall, 1996.
13. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 2: Solid Mechanics, Butterworth – Heinemann. 2000.
14. URL: <http://www.robobat.pl/oprogramowanie/konstrukcje/autodesk-robot-structural-analysis.html> (last access – 8.07.2014).
15. URL: <http://www.scadsoft.com> (last access – 15.07.2014).

Sergey Yu. Fialko, Professor, Dr.Sc., Department of Physics, Mathematics and Applied Computer Science, Cracow University of Technology; 24, ul. Warszawska, Kraków 31-155, Poland; tel. +48 12 628 20 00; fax +48 12 628 20 71; e-mail: sergiy.fialko@gmail.com

Фиалко Сергей Юрьевич, профессор, доктор технических наук, кафедра физики, математики и прикладных компьютерных наук, Краковский политехнический университет; 24, ul. Warszawska, Kraków 31-155, Poland; тел. +48 12 628 20 00; факс +48 12 628 20 71; e-mail: sergiy.fialko@gmail.com



**ИНФОРМАЦИЯ О КОНКУРСНОМ ОТБОРЕ ТЕМ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
МИНИСТЕРСТВА СТРОИТЕЛЬСТВА
И ЖИЛИЩНО-КОММУНАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ И РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК В 2017 ГОДУ**

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Российская академия архитектуры и строительных наук» (далее – РААСН), по поручению Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации (далее – Минстрой России) (приказ Минстроя России от 12 декабря 2014 г. №863/пр, приказ Минстроя России от 29 августа 2017 года №1177/пр) и в соответствии с решениями президиума РААСН (постановление президиума РААСН от 14 июня 2017 года №7, постановление президиума РААСН от 18 августа 2017 года №9), объявляет конкурсный отбор тем фундаментальных научных исследований (ФНИ) Минстроя России и РААСН в области архитектуры, градостроительства и строительных наук (далее – конкурсный отбор ФНИ Минстроя России и РААСН) на 2018 год.

Конкурс Минстроя России и РААСН проводится по двум номинациям:

- для членов, советников и почетных членов РААСН, работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений;
- для молодых ученых и специалистов в возрасте до 35 лет (в конкурсе имеют право участвовать персонально ученые и специалисты (или коллективы исследователей) – советники РААСН, работники РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений, которым на момент окончания срока подачи заявки не исполнилось 35 лет).

Начало разработки и продолжительность представляемых на конкурс тем ФНИ:

Начало разработки представляемых на конкурс тем ФНИ – I квартал 2018 года, продолжительность – от одного до двух лет. Начало разработки представляемых на конкурс тем ФНИ для молодых ученых и специалистов – I квартал 2018 года, продолжительность – до девяти месяцев.

Условия конкурса:

Лица (граждане Российской Федерации), желающие участвовать в конкурсе, должны представить заявку (в том числе электронную версию заявки на CD и/или DVD диске) по адресу: 107031, Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1, в соответствующее отделение РААСН (архитектура, градостроительство, строительные науки) с пометкой: «На конкурсный отбор

фундаментальных научных исследований для членов, советников и почетных членов РААСН, работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений» или «На конкурсный отбор фундаментальных научных исследований для молодых ученых и специалистов» в виде следующих документов:

1. Заявка на участие в конкурсном отборе на выполнение фундаментальных научных исследований Минстрою России и РААСН;
1. Анкетные данные участника (участников) конкурсного отбора на выполнение фундаментальных научных исследований Минстрою России и РААСН (для работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений не требуются);
2. Дополнительные материалы:
 - Сведения для формирования индикативного рейтинга заявки на выполнение фундаментального научного исследования;
 - Список публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных «Сеть науки» (Web of Science), изданных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие публикации за указанный период отсутствуют);
 - Список публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных Scopus, изданных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие публикации за указанный период отсутствуют);
 - Список публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных Russian Science Citation Index (RSCI), изданных в период с 01.01.2016 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие публикации за указанный период отсутствуют);
 - Список публикаций в научных журналах, входящих в перечень, утвержденный Высшей аттестационной комиссией (ВАК) при Министерстве образования и науки Российской Федерации, изданных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие публикации за указанный период отсутствуют);
 - Список зарегистрированных патентов в Российской Федерации, полученных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие патенты за указанный период отсутствуют);
 - Список результатов интеллектуальной деятельности (включая секреты производства (ноу-хау), программы для ЭВМ, базы данных, изобретения, полезные модели, промышленные образцы), в том числе имеющих правовую охрану в Российской Федерации, созданных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие результаты интеллектуальной деятельности за указанный период отсутствуют);

- Список зарегистрированных патентов за рубежом (в том числе в странах СНГ), полученных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (в случае непредоставления данного списка считается, что соответствующие патенты за указанный период отсутствуют);
- Смета расходов на выполнение заявляемого фундаментального научного исследования (рекомендуется к представлению).

В конкурсе могут участвовать отдельные исследователи или исследовательские коллективы. Заявки от организаций не принимаются. Срок окончания подачи заявок на конкурс – до 15 часов 00 минут 10 октября 2017 года (вторник) включительно (в том числе и для почтовых отправлений). Заявки, поступившие позже указанного срока, не рассматриваются. Мотивы отклонения поступивших заявок заявителям не сообщаются. Президиум РААСН оставляет за собой право определять количество тем фундаментальных научных исследований по объявленным номинациям, устанавливать объемы финансирования ФНИ в зависимости от содержания и количества поданных на конкурс заявок. Результаты конкурсного отбора на выполнение ФНИ Минстроя России и РААСН будут опубликованы на сайте РААСН (www.raasn.ru).

Контактная информация:

Отделение архитектуры РААСН:

Тел.: +7(495) 629-14-95, 625-76-84;

E-mail: oarch@raasn.ru

Отделение градостроительства РААСН:

Тел.: +7(495) 625-79-75, 629-65-26;

E-mail: grado@raasn.ru

Отделение строительных наук РААСН:

Тел.: +7(495) 650-77-83, 625-73-16;

e-mail: osn@raasn.ru

Информационное обеспечение и регламентирующие документы (размещены на официальном интернет-сайте РААСН):

1. Приказ Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 12 декабря 2014 г. №863/пр «Об утверждении Положения о проведении конкурсного отбора тем на выполнение фундаментальных научных исследований и о порядке формирования плана фундаментальных научных исследований и государственных заданий федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук»;
2. Приказ Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 29 августа 2017 г. №1177/пр «Об утверждении Тематических направлений и разделов научных исследований, предложенных на конкурсный отбор тем фундаментальных научных исследований Минстроя России и РААСН на 2018 год»;
3. Форма заявки на участие в конкурсном отборе ФНИ Минстроя России и РААСН;
4. Форма анкетных данных участника (участников) конкурсного отбора ФНИ Минстроя России и РААСН (для работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений не требуются);

5. Показатели индикативного рейтинга заявки на выполнение фундаментального научного исследования, утвержденные постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
6. Рекомендации по реализации Положения о проведении конкурсного отбора тем фундаментальных научных исследований и о порядке формирования плана фундаментальных научных исследований и проектов государственных заданий федеральным государственным бюджетным учреждением «Российская академия архитектуры и строительных наук» в 2017 году, утвержденные постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
7. Рекомендуемая форма представления списка публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных «Сеть науки» (Web of Science), подготовленных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 1-доп.-WoS-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
8. Рекомендуемая форма представления списка публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных Scopus, подготовленных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 2-доп.-Scopus-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
9. Рекомендуемая форма представления списка публикаций в научных журналах, входящих в перечень, утвержденный Высшей аттестационной комиссией (ВАК) при Министерстве образования и науки Российской Федерации, подготовленных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 3-доп.-ВАК-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
10. Рекомендуемая форма представления списка результатов интеллектуальной деятельности, полученных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 4-доп.-РИД-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
11. Рекомендуемая форма представления списка монографий, их переводов и научных статей, имеющих международный книжный индекс ISBN, подготовленных в период с 01.08.2015 по 31.07.2017 под редакцией, при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 5-доп.-МОН-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
12. Рекомендуемая форма представления списка публикаций в научных журналах, индексируемых в базе данных Russian Science Citation Index (RSCI), подготовленных в период с 01.01.2016 по 31.07.2017 при авторстве или соавторстве научного руководителя или исполнителей заявляемого фундаментального научного исследования (Форма 6-доп.-RSCI-2017), утвержденная постановлением президиума Российской академии архитектуры и строительных наук от 14 июня 2017 года №7;
13. Перечень Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой сте-

пени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (по состоянию на 26 июля 2017 г.);

14. Решение пленума Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации от 15 июня 2017 г. №1-пл/1 (в том числе Приложение №1);
15. Информация об изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (по состоянию на 19 июня 2017 г.);
16. Информация о научных изданиях индексируемых в системе Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science (Список журналов RSCI);
17. Информационное сообщение о Конкурсном отборе тем фундаментальных научных исследований (ФНИ) Минстроя России и РААСН в области архитектуры, градостроительства и строительных наук в 2018 году.