

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 12, Issue 2

2016

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics,
Moscow Institute of Architecture (State Academy);
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,
107031, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko, Professor,
The First Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation, National Research
Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Executive Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.;
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University; 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI);
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University;
8 Suhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina; 1, Univerzitná,
Žilina, 010 26, Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering;
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Vladimir T. Erofeev, Professor
Ogarev Mordovia State University;
68 Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.;
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering;
1, Academicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics; 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University; 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University; 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering;
29, Toraiyrov str., Almaty, Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University; 29, Ul.
Politechnicheskaya, St. Petersburg,
195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Rashid A. Mangushev, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Iliyar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Anatoly V. Perelmuter, Professor
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education;
New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.
Trinity Industries, Inc.; 2525 Stemmons Freeway, Dallas, Texas 75207, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obratsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal

for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года. В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук. В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ). *Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science.* Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк). Партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН)* и *Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО)*.

Цели журнала – продемонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

– предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности опубликовать результаты своих исследований;

– привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;

– обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал IJCCSE»): с основной информацией о журнале, его целях и задачах, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей и пр.

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.rospr.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж, офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: kaytukov@raasn.ru; tkaytukov@gmail.com). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Volume 12, Issue 2

2016

TABLE OF CONTENTS (СОДЕРЖАНИЕ)

Напряженное состояние породного массива при воздействии полей влажности и температуры с учетом фазового перехода	<u>8</u>
<i>В.И. Андреев, А.С. Авершьев</i>	
Об одном примере расчета тонкой пластины на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов	<u>14</u>
<i>П.А. Акимов, О.А. Негрозов</i>	
Обзорно-аналитическое исследование нормативно-методической литературы в области мониторинга зданий и сооружений	<u>42</u>
<i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов</i>	
Сравнительный анализ методик численного моделирования динамики трехмерных систем «основание – арочная плотина – водохранилище» при сейсмических воздействиях	<u>65</u>
<i>А.М. Белостоцкий, Нгуен Тай Ханг Лыонг, Д.С. Дмитриев, С.В. Щербина</i>	
Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке.	
Часть 1: Верификация механической конечноэлементной модели	<u>75</u>
<i>Е.И. Бозняков, И.Н. Афанасьева, А.М. Белостоцкий</i>	
Численное моделирование развития плоской турбулентной стесненной струи во встречном потоке	<u>86</u>
<i>В.Н. Варпаев, И.Н. Ланцова</i>	
Учет нелинейной работы железобетона в ПК ЛИРА-САПР. Метод «Инженерная нелинейность»	<u>92</u>
<i>А.С. Городецкий, М.С. Барабаш</i>	
Оптимальный состав композита по критерию его прочности	<u>99</u>
<i>В.Т. Ерофеев, А.С. Тюряхин, И.В. Смирнов, И.Н. Максимова</i>	

- Исследование, поиск и расчет оптимального конструктивного решения с разработкой проекта навеса на действующей футбольном стадионе «Казань-Арена» для проведения Чемпионата мира по водным видам спорта в 2015 году** **112**
И.Л. Кузнецов, А.В. Исаев, Р.Р. Вахтель, Л.Р. Гимранов
- Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты** **118**
Л.С. Ляхович, А.П. Малиновский, Б.А. Тухфатуллин
- Спектральный метод граничных элементов и его применение для расчета конструкций: теоретические основы и перспективы развития** **126**
Ж.И. Мсхалая, П.А. Акимов
- Теоремы о взаимности мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии и их применение в задачах пластического деформирования круглых мембран и безмоментных оболочек при квазистатическом нагружении** **137**
А.В. Старов, С.Ю. Калашиников
- Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы** **147**
А.А. Черняев
- Численное решение задачи устойчивости панельного здания против прогрессирующего обрушения** **158**
Г.И. Шапиро, А.А. Гасанов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛЕЙ ВЛАЖНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ С УЧЕТОМ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

В.И. Андреев^{1,2}, А.С. Авершьев³

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² Научно-исследовательский институт строительной физики

Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ОАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королева», г. Королев, РОССИЯ

Аннотация: В статье смоделирован разрыв подземного трубопровода в условиях мерзлого грунта. Глинистый грунт увлажняется и нагревается поступившей влагой, в результате чего в нем возникает НДС, вызванное стесненным набуханием и температурным расширением. Задача рассмотрена в упругой постановке с учетом зависимости модуля упругости от влажности и температуры. Изучено напряженное состояние глинистого массива в условиях установившегося влажностного и температурного режима с учетом фазового перехода.

Ключевые слова: влагоперенос, влагоупругость, неоднородность, вынужденные деформации, набухание, фазовый переход

THE STRESS STATE IN THE ROCK MASS EXPOSURE TO MOISTURE AND TEMPERATURE FIELDS

Vladimir I. Andreyev^{1,2}, Anatoliy S. Avershyev³

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences,
Moscow, RUSSIA

³ JSC "Rocket and Space Corporation "Energia" after S.P. Korolev, Korolev, RUSSIA

Abstract: The paper is modeled rupture an underground pipeline in conditions the frozen soil. Clay soil is moistened and heated by received moisture, resulting in it there is the stress state due to straitened swelling and thermal expansion. The problem is considered in the elastic formulation considering the depending modulus of elasticity on humidity and temperature. Was studied the stress state of the clay array under steady humidity and temperature conditions taking into account the phase transition.

Keywords: moisture transfer; moisture elasticity; inhomogeneity; forced deformation; swelling; phase transition

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изменении величин влажности и температуры грунта в стесненном состоянии возникают вынужденные деформации. Это явление неоднозначно. При температуре выше 0°C влага находится в жидком состоянии, увеличение ее величины вызывает набухание. При

изменениях температуры ниже 0°C происходят фазовые переходы влаги, вызывая вынужденные объемные деформации вследствие разности плотностей льда и воды. Вместе с этим, механические характеристики глины имеют зависимости от температуры и влажности, тем самым вызывая неоднородность грунтового массива.

Для того, чтобы оценить влияние изменения величин твердой и жидкой фазы содержащейся в грунте влаги, а также явления фазового перехода на НДС, в работе предложено рассмотреть задачу о разрыве трубопровода в мерзлом грунте с последующим увлажнением и нагревом грунта жидкостью.

Подобные задачи рассматривались как в стационарной [1-3], так и в нестационарной постановке [4,5], но для случая талого грунта при постоянной температуре.

Здесь рассмотрено предельное влажностное и температурное состояние, соответствующее стационарному (установившемуся) процессу. Задача является несвязанной, т.е. НДС грунтового массива не оказывает влияния на поля влажности и температуры.

Вырезая из грунтового массива полый цилиндр, внешний радиус которого b намного превосходит радиус полости a , на основании результатов, приведенных в [2] будем полагать, что на внешней поверхности действует постоянное давление отпора грунта

$$p = \gamma_s H,$$

где γ_s – удельный вес грунта; H – глубина расположения отверстия.

2. ЗАДАЧИ ТЕПЛО- И ВЛАГОПЕРЕНОСА

Поля влажности и температуры описываются соответственно законами Фика и Фурье, являющимися составляющими системы уравнений тепломассопереноса. В общем случае они являются уравнениями параболического типа [7-9]:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = c_w \Delta w; \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \Delta t. \quad (1)$$

где c_w и a_T – соответственно, коэффициенты влаго- и температуропроводности, отвечающие за скорости протекания процессов.

В стационарной постановке, соответствующей рассматриваемой задаче, уравнения (1) примут вид:

$$\Delta w = 0; \quad \Delta t = 0. \quad (2)$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} r = a: \quad w = w_s; \quad t = t_{\max} \\ r = b: \quad w = w_0; \quad t = t_0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первое граничное условие означает, что на границе с трубой $r=a$ влажность и температура достигают предельных значений $w=w_s$ и $t=t_{\max}$ и остаются постоянными на протяжении всего процесса. Второе граничное условие означает, что на внешней границе рассматриваемого массива $r=b$ влажность и температура удерживаются на постоянном, естественном для мерзлой глины уровне $w = w_0$ и $t = t_0$.

Решение уравнений (2) с граничными условиями (3) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} w(\rho) &= \frac{w_0 \ln(\rho/\rho_a) - w_s \ln(\rho/\rho_b)}{\ln(\rho_b/\rho_a)}; \\ t(\rho) &= \frac{t_0 \ln(\rho/\rho_a) - t_{\max} \ln(\rho/\rho_b)}{\ln(\rho_b/\rho_a)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь $\rho = r/a$ – безразмерный радиус.

Оба поля (4) при масштабировании будут иметь одинаковое распределение (рис. 1).

В качестве исходных данных рассмотрены следующие условия: труба радиуса $a = 0,25$ м расположена в вечномерзлом глинистом грунте с влажностью $w = w_0 = 0,2$ и температурой $t = t_0 = -2^\circ \text{C}$. Глубина залегания трубы равна $H = 10$ м, внешний радиус рассматриваемого грунтового массива $b = 10a$.

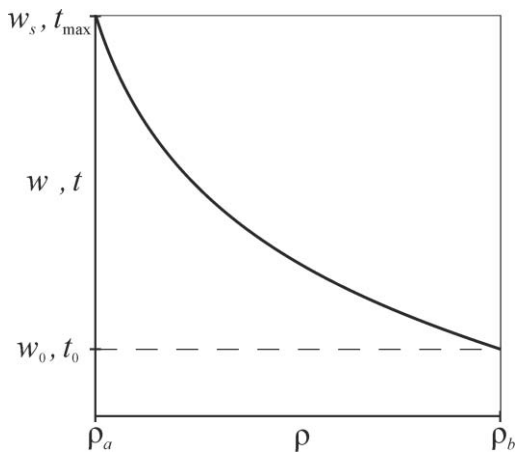


Рисунок 1. Распределение полей влажности и температуры.

В качестве грунта выбрана глина с характерными для нее физико-механическими характеристиками [10-12]: удельный вес $\gamma_s = 26,95 \text{ кН/м}^3$, влажность насыщенного грунта $w = w_s = 0,363$, пористость $n = 0,5$. Температура жидкости в трубе $t = t_{\text{max}} = 5^\circ\text{C}$. Зависимости модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν грунта от влажности и температуры ниже и выше 0°C различны. Поэтому для описания этих зависимостей удобно использовать дискретные модели:

$$E = \begin{cases} (374,88 w/w_s + 36,734) \times \\ \times \ln[(34,697 w/w_s + 30,493)|t/t_{\text{max}}| + \\ + (-0,8795 w/w_s + 1,934)] \text{ при } t < 0; & (5) \\ (21,619 + 1,739|t/t_{\text{max}}|)(w/w_s)^{-2,4} \text{ при } t \geq 0; \end{cases}$$

$$\nu = \begin{cases} 0,313 + 0,0872 \exp(-0,655|t/t_{\text{max}}|) \text{ при } t < 0; \\ 0,4 \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$

Графически зависимость (5) показана на рис. 2. Зависимость модуль упругости вдоль радиуса с учетом заданных полей влажности и температуры показана на рис. 3.

Как и в работах [1–5], будем считать, что при положительных температурах вынужденные деформации набухания линейно зависят от влажности:

$$\varepsilon_w = \beta(w - w_0) \quad \text{при } t \geq 0,$$

где $\beta = 0,6$ – коэффициент набухания.

При отрицательных температурах для определения вынужденных деформаций необходимо знать, какая доля от общей массы влаги приходится на твердую фазу. Введем понятие *относительный коэффициент льдистости* i , численно равный отношению массы льда m_i к общей массе жидкости m_w в грунте. В рассматриваемом диапазоне температур его можно аппроксимировать линейной функцией от температуры:

$$i = 0,75|t/t_{\text{max}}| \quad \text{при } -2^\circ\text{C} \leq t < 0.$$

Зная относительный коэффициент льдистости i , можно определить вынужденные деформации, возникшие вследствие фазового перехода влаги:

$$\varepsilon_g = \alpha n \frac{i w - i_0 w_0}{w_s} \quad \text{при } t < 0,$$

$$\alpha = (\gamma_w - \gamma_i) / \gamma_i = (1000 - 900) / 900 = 0,111;$$

где α – коэффициент осадки при фазовом переходе льда к воде; γ_w, γ_i – соответственно, плотности воды и льда, i_0 – относительный коэффициент льдистости при температуре t_0 . Величина $n i w / w_s$ соответствует объемной доле льда в грунте.

3. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Так как $a \ll b \ll H$, с определенной точностью можно рассматривать задачу как осесимметричную. В данной постановке получим задачу о плоском деформированном состоянии, разрешающее уравнение для радиальных напряжений которой имеет вид [6]:

Напряженное состояние породного массива при воздействии полей влажности и температуры с учетом фазового перехода

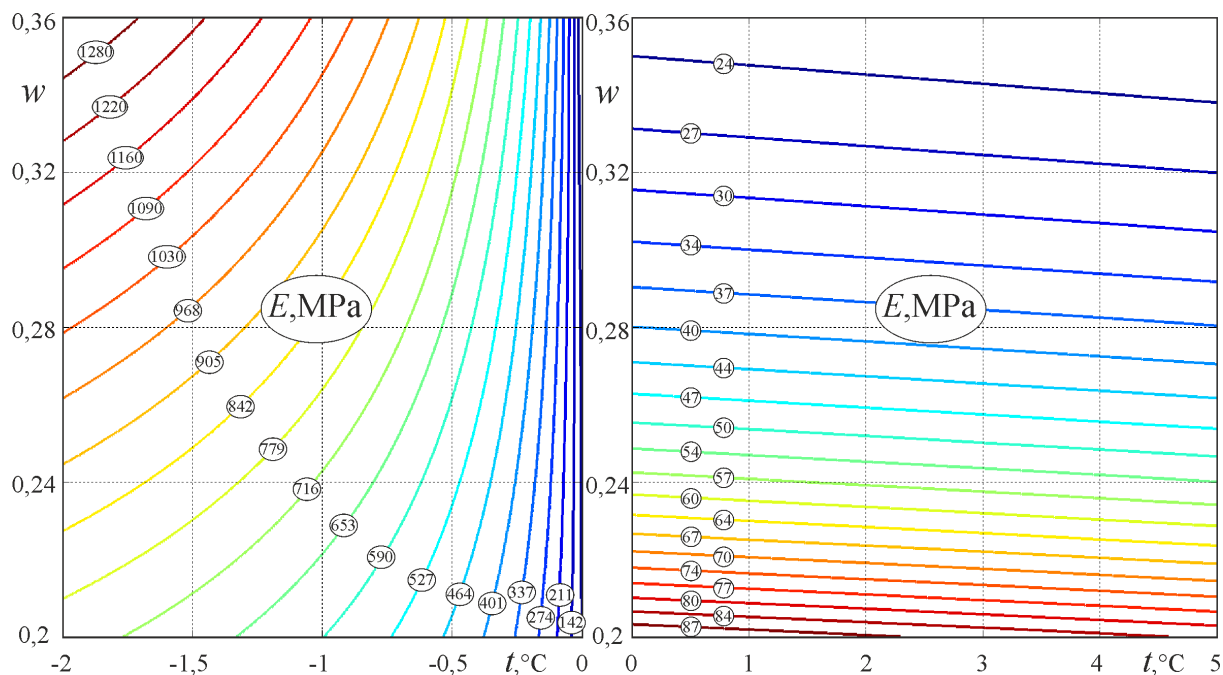


Рисунок 2. Изолинии модуля упругости в зависимости от влажности и температуры: а) ниже 0°C; б) выше 0°C.

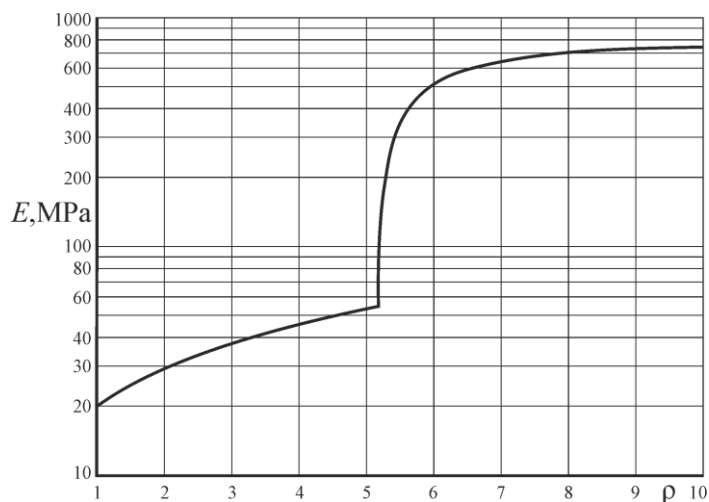


Рисунок 3. Изменение модуля упругости вдоль радиуса.

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E} - \frac{2\nu\nu'}{1-\nu^2} \right) \sigma_r' - \frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E'}{E} + \frac{(1+4\nu)\nu'}{1-\nu^2} \right] \sigma_r = \quad (6)$$

$$= - \frac{E}{r(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_w' (1+\nu) + \nu' \varepsilon_\theta \right].$$

Здесь штрих означает дифференцирование по радиусу. Модуль упругости материала трубы намного больше, чем модуль упругости грунта, поэтому с определенной степенью точности можно считать трубу абсолютно жесткой. В этом случае на внутренней поверхности массива $r = a$ радиальные перемещения будут равны нулю $u = 0$.

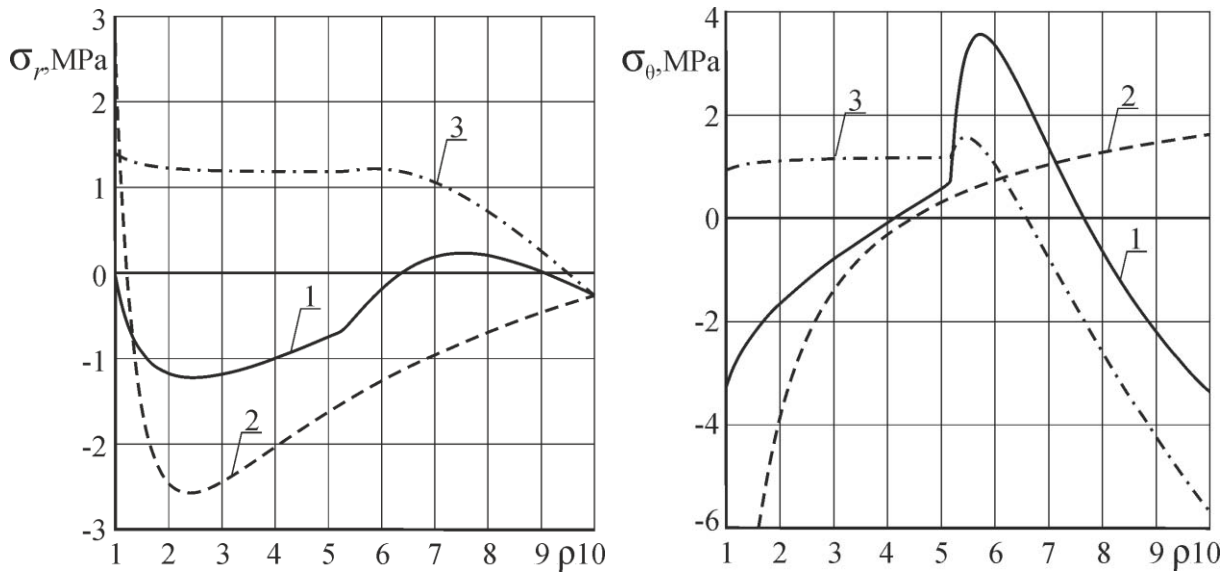


Рисунок 4. Распределение напряжений вдоль радиуса:

а) радиальные напряжения; б) кольцевые (окружные) напряжения.

1 – $w = w(\rho)$, $t = t(\rho)$; 2 – $w = w(\rho)$, $t = t_0 = const$; 3 – $w = w_0 = const$, $t = t(\rho)$.

На внешней поверхности $r = b$ на массив действует давление $p = \gamma_s H$, вызванное отпором грунта.

Запишем граничные условия для радиальных напряжений:

$$\begin{aligned}
 r = a: \quad & \sigma_r \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E} + \\
 & + r \sigma_r' \frac{1 - 2\nu^2}{E} + \varepsilon_w (1 + \nu) = 0; \\
 r = b: \quad & \sigma_r + \gamma_s H = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи численно реализовано в ПК Matlab. При решении использовался солвер *bvp4c*, предназначенный для решения краевых задач и основанный на трехэтапной формуле Лобатто (the three-stage Lobatto IIIa formula). Солвер работает так, что шаг интегрирования постоянно меняется в ходе решения для обеспечения наилучшей сходимости. Абсолютная точность невязки решения была выбрана 10^{-6} .

На рис. 4 приведены результаты расчета при воздействии на грунтовый массив влажности и температуры, а также для сравнения вари-

ант решения задачи без учета изменения температуры и, соответственно, без фазового перехода влаги и вариант решения без учета изменения влажности.

Из рис. 4,б (кривая 1) видно, что вследствие воздействия теплой влаги на мерзлый грунт внутри массива будут возникать высокие положительные напряжения σ_θ (до 3,5 МПа), что приведет к пучинистости, нарушению целостности грунтового массива и трещинообразованию.

При учете изменения только поля влажности (рис. 4.а,б кривые 2) или только поля температуры (рис. 4.а,б кривые 3) характер напряжений сильно отличается от напряжений, представленных на рис. 4.а,б (кривые 1), поэтому для точного описания напряженного состояния важно учитывать изменение обоих полей.

Особенностью задачи по сравнению с подобными работами [1–5] является рассмотрение механического поведения грунтового массива при отрицательных температурах, а также вынужденных деформаций, вызванных фазовым переходом влаги.

ЗАМЕЧАНИЕ

Выбранные свойства грунта не соответствуют глине какой-либо определенной местности. В работе принято допущение о том, что увеличение жидкой части влаги мерзлого грунта не вызывает вынужденных деформаций набухания. В мерзлом грунте вынужденные деформации происходят лишь вследствие фазового перехода влаги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** About Influence of Moisture on Stress State of Soil taking into account Inhomogeneity. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume. 9, Issue 3, 2013, pp. 14-20.
2. **Андреев В.И., Авершьев А.С.** Плоская неоднородная двумерная задача влагоупругости // Вестник ВолгГАСУ, вып. 37(56), 2014, с. 6-14.
3. **Андреев В.И., Авершьев А.С.** Осесимметричная задача влагоупругости в неоднородном сферическом массиве. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 46-54.
4. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** Nonstationary problem moisture elasticity for nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder. // *Transactions of International Conference on Fluid Structure Interaction 10 - 12 April, 2013.* WITpress, pp. 123-132.
5. **Андреев В.И., Авершьев А.С.** Влагоупругость неоднородного толстостенного полого шара при нестационарном влажностном режиме. // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* № 1, 2014, с. 30-37.
6. **Андреев В.И.** Механика неоднородных тел. - М.: Юрайт, 2015. – 255 с.
7. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
8. **Федосов С.В.** Тепломассоперенос в технологических процессах строительной индустрии: монография. – Иваново: ИПК «ПресСто», 2010. – 364 с.
9. **Тер-Мартirosян З.Г.** Механика грунтов. - М.: АСВ, 2005. - 488 с.
10. **Голли О.Р.** Использование закономерностей набухания глинистых грунтов в строительстве // *Реконструкция городов и геотехническое строительство,* № 8, 2004, с. 131-141.
11. **ОДН 218.046—01.** Проектирование нежестких дорожных одежд. 2000. - 93 с.
12. **Цытович Н.А.** Механика мерзлых грунтов. - М.: Высшая школа, 1973. – 448 с.

Андреев Владимир Игоревич, академик РААСН, доктор технических наук; заведующий кафедрой сопротивления материалов, ациональный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел.: +7(985)222-50-14, e-mail: asv@mgsu.ru

Авершьев Анатолий Сергеевич, старший научный сотрудник, ОАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва», Россия, 141070, г. Королёв, Московская область, ул. Ленина, 4а, тел.: +7(906)735-27-03, e-mail: fullbass-@mail.ru

Vladimir I. Andreev, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Sciences, Professor, Chief of Department of Strength of Materials; National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(985)222-50-14, e-mail: asv@mgsu.ru

Anatoliy S. Avershyev, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, JSC “Rocket and Space Corporation ”Energiа” after S.P. Korolev”, 4a, Str. Lenin, 141070 Korolev, Moscow Region, Russia, tel.: +7(906)735-27-03, e-mail: fullbass-@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П.А. Акимов^{1,2,3,4}, О.А. Негрозов^{1,3,4}

¹ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается решение тестовой задачи статического расчета тонкой пластины (модель Кирхгоффа) на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного и развитого в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова и М.Л. Мозгалевой.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты тонких пластин, модель Кирхгоффа, краевая задача

ABOUT ONE SAMPLE OF PLATE ANALYSIS BASED ON COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD

Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}, Oleg A. Negrozov^{1,2,4}

¹ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

² Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

³ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to one sample of plate analysis with the use of Kirchhoff model based on combined application of finite element method (FEM) and discrete-continual finite element method (DCFEM), proposed by Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov and Marina L. Mozgaleva.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, plate analysis, Kirchhoff model, boundary problem

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать пластину, физико-геометрические параметры (характеристики) которой на одной из ее частей кусочно-постоянны, вдоль некоторого направления (далее условно называемого «основное

направление»), тогда как вдоль другого направления физико-геометрические параметры конструкции на этой части могут изменяться произвольно. Пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы и т.д.) тонкой пластины,

нагруженной сосредоточенной силой, при этом края пластины, ориентированные перпендикулярно основному направлению, шарнирно закреплены (рис. 1.1). Основные обозначения, в том числе в части характерных геометрических размеров и нагрузок, показаны на рис. 1.1.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть Ω – область, занимаемая конструкцией (рис. 1.1),

$$\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \quad (2.1)$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}, \quad k = 1, 2; \quad (2.3)$$

$x_{2,1}^b = 0$; $x_{2,2}^b = l_{2,1}$; $x_{2,3}^b = l_{2,1} + l_{2,2} = l_2$ – координаты соответствующих граничных точек; Ω_1 и Ω_2 – подобласти области Ω .

Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [6], можем окаймить области Ω_1 и Ω_2 соответствующими расширенными ω_1 и ω_2 и перейти к расширенной области ω ,

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2, \quad \text{где } \Omega_1 \subset \omega_1, \quad \Omega_2 \subset \omega_2. \quad (2.4)$$

Пусть в пределах области ω_1 физико-геометрические параметры (характеристики) конструкции не зависят от переменной x_2 , отвечающей так называемому основному направлению [1-4,7-13,15-24], тогда как в пределах области ω_2 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно. Для расчета такого рода кон-

струкций целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ, причем в пределах ω_1 следует использовать дискретно-континуальную аппроксимирующую модель, а в пределах ω_2 – дискретную (конечноэлементную) модель.

Пусть $x_{1,i}^{dc}, i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}$ – координаты (по переменной x_1) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_1 ; $(N_1^{dc} - 1)$ – общее количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов в области ω_1 ; $x_{1,i}^{fe}, i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}$ и $x_{2,j}^{fe}, j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}$ – координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов конечных элементов в области ω_2 ; $(N_1^{fe} - 1)$ и $(N_2^{fe} - 1)$ – количество конечных элементов, на которые «разбивается» конструкция по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 (рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка (рис. 1.1)).

Для удобства алгоритмических построений будем применять двухиндексную систему нумерации узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_1 : имеем номер типа (k, i) , где k – номер подобласти, i – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего x_1).

Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_2 будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j) , где k – номер подобласти, i и j – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 и x_2).

Кроме того, будем полагать, для простоты, что схема дискретизации конструкции по направлению, отвечающему переменной x_1 , неизменна по всей области, т.е.

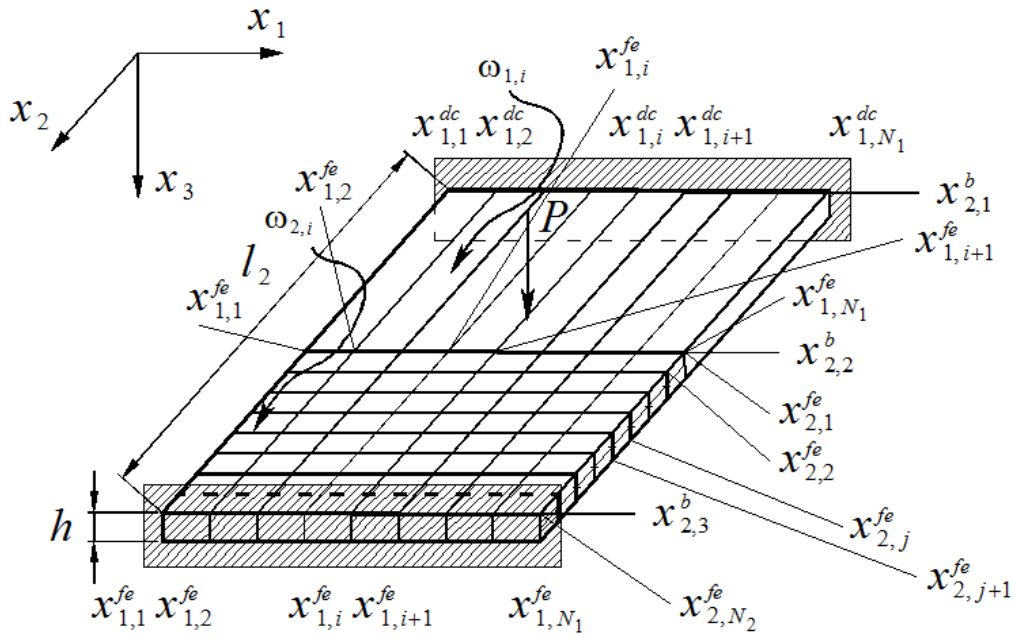


Рисунок 1.1. К постановке задачи.

$$N_1^{fe} = N_1^{dc} = N_1; \quad x_{1,i}^{fe} = x_{1,i}^{dc} = x_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (2.5)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ ω_i по формуле

Заметим, что при изложении аппроксимаций в рамках ДККЭ будем следовать системе обозначений, принятой в [3].

$$\theta_{1,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{1,i} \subset \Omega_1; \\ 0, & \omega_{1,i} \not\subset \Omega_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ.

Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси Ox_2) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси Ox_1) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_1 разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\omega_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \omega_{1,i};$$

$$\omega_{1,i} = \{(x_1, x_2): x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, x_{2,1}^b < x_2 < x_{2,2}^b\}, \quad (3.1)$$

Поэлементные функции цилиндрической жесткости пластины, коэффициента Пуассона материала пластины и коэффициенты отпора упругого основания (при наличии) определяются соответственно по формулам:

$$\bar{D}_{1,i} = \theta_{1,i} D_1; \quad \bar{\nu}_{1,i} = \theta_{1,i} \nu_1; \quad \bar{c}_{1,i} = \theta_{1,i} c_1, \quad (3.3)$$

где D_k , ν_k и c_k – соответственно цилиндрическая жесткость пластины, коэффициент Пуассона материала пластины и коэффициент отпора упругого основания (при наличии) на области Ω_k ;

$$D_k = \tilde{E}_k h_k^3 / [12(1 - \nu_k^2)]; \quad (3.4)$$

h_k – толщина пластины в области Ω_k ; \tilde{E}_k – модуль упругости материала пластины в области Ω_k .

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(x_1, x_2) = w_1(x_1, x_2); \quad (3.5)$$

$$y_i^{(1)} = y_i^{(1)}(x_1, x_2) = \partial_2^{i-1} w_1(x_1, x_2), \quad i = 2, 3, 4; \quad (3.6)$$

$$z_j^{(1)}(x_1, x_2) = \partial_1 y_j^{(1)}(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.7)$$

где w_1 – прогибы в области Ω_1 ;

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2; \quad (3.8)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются функции $y_j^{(1)}(x_1, x_2)$, $j = 1, 2, 3, 4$ и $z_j^{(1)}(x_1, x_2)$, $j = 1, 2, 3, 4$ (верхний индекс «(1)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_1), т.е. для произвольного $(1, i)$ -го узла это $y_j^{(1,i)}(x_2)$, $j = 1, 2, 3, 4$ и $z_j^{(1,i)}(x_2)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Поля $y_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ по неосновному направлению (вдоль x_1) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются кубическими полиномами. Определяющие выражения для полей $z_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ получаются посредством дифференцирования соответствующих формул.

Можно показать [3], что в рамках рассмотрения подобласти ω_1 , разрешающая система $8N_1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\bar{Y}_1(x_2) = A_1 \bar{Y}_1(x_2) + \bar{R}_1(x_2), \quad (3.9)$$

где

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1(x_2) = [(\bar{y}_{1,1})^T \quad (\bar{y}_{1,2})^T \quad (\bar{y}_{1,3})^T \quad (\bar{y}_{1,4})^T]^T; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1,j} &= \bar{y}_{1,j}(x_2) = \\ &= [(\bar{y}_{n,j}^{(1,1)})^T \quad (\bar{y}_{n,j}^{(1,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{y}_{n,j}^{(1,N_1)})^T]^T, \quad (3.11) \\ & \quad j = 1, 2, 3, 4; \end{aligned}$$

$$\bar{y}_{n,j}^{(1,i)} = [y_j^{(1,i)} \quad z_j^{(1,i)}]^T, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.12)$$

т.е. $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1(x_2)$ – $8N_1$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «1», следуя [3], соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_1); A_1 – матрица коэффициентов $8N_1$ -го порядка; $\bar{R}_1(x_2)$ – $8N_1$ -мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (3.9) может быть представлено в виде [3]:

$$\bar{Y}_1(x_2) = E_1(x_2) \bar{C}_1 + \bar{S}_1(x_2), \quad (3.13)$$

где $E_1(x_2) = \varepsilon_1(x_2 - x_{2,1}^b) - \varepsilon_1(x_2 - x_{2,2}^b)$;

$$\bar{S}_1(x_2) = \varepsilon_1(x_2) * \bar{R}_1(x_2); \quad (3.14)$$

$\varepsilon_1(x_2)$ – фундаментальная матрица-функция системы (3.9), определяемая согласно [3]; символ «*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций; \bar{C}_1 – $8N_1$ -мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

4. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ.

Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по обоим координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_2 разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega_2 = \bigcup_{i=1}^{M_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \omega_{2,i,j};$$

$$\omega_{2,i,j} = \{ (x_1, x_2) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \quad x_{2,j}^{fe} < x_2 < x_{2,j+1}^{fe} \}, \quad (4.1)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ ω_i по формуле

$$\theta_{2,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{2,i,j} \in \Omega_2; \\ 0, & \omega_{2,i,j} \notin \Omega_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Поэлементные функции цилиндрической жесткости пластины, коэффициента Пуассона материала пластины и коэффициенты отпора упругого основания (при наличии) определяются соответственно по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{2,i,j} &= \theta_{2,i,j} D_2; & \bar{\nu}_{2,i,j} &= \theta_{2,i,j} \nu_2; \\ \bar{c}_{2,i,j} &= \theta_{2,i,j} c_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В стандартном методе конечных элементов в качестве основных неизвестных в узлах конечных элементов принимаются прогиб пластины и производные от функции прогиба пластины по переменным x_1 и x_2 , т.е. соответственно функции

$$\begin{aligned} w_2(x_1, x_2) &= y_1^{(2)}(x_1, x_2); \\ \theta_{2,1}(x_1, x_2) &= \partial_2 w_2(x_1, x_2) = y_2^{(2)}(x_1, x_2); \\ \theta_{2,2}(x_1, x_2) &= -\partial_1 w_2(x_1, x_2) = -z_1^{(2)}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Очевидно, что при таком выборе, неизвестными в $(2, i, j)$ -м узле являются соответственно величины $y_1^{(2,i,j)}$, $y_2^{(2,i,j)}$ и $-z_1^{(2,i,j)}$.

Поле прогибов $w_2(x_1, x_2)$ в пределах конечного элемента $\omega_{2,i,j}$ можно, например, аппроксимировать полиномом вида

$$\begin{aligned} w_2(x_1, x_2) &= \alpha_1^{(2,i,j)} + \alpha_2^{(2,i,j)} x_1 + \alpha_3^{(2,i,j)} x_2 + \\ &+ \alpha_4^{(2,i,j)} x_1^2 + \alpha_5^{(2,i,j)} x_1 x_2 + \\ &+ \alpha_6^{(2,i,j)} x_2^2 + \alpha_7^{(2,i,j)} x_1^3 + \\ &+ \alpha_8^{(2,i,j)} x_1^2 x_2 + \alpha_9^{(2,i,j)} x_1 x_2^2 + \\ &+ \alpha_{10}^{(2,i,j)} x_2^3 + \alpha_{11}^{(2,i,j)} x_1^3 x_2 + \\ &+ \alpha_{12}^{(2,i,j)} x_1 x_2^3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\alpha_p^{(2,i,j)}$, $p = 1, 2, \dots, 12$ – коэффициенты полинома.

Иными словами, для определения функций формы по двенадцати параметрам удобно использовать полиномы, при этом в полном полиноме четвертой степени необходимо опустить часть членов. Следует отметить, что выражение (4.5) имеет определенные преимущества. В частности, вдоль любой линии $x_1 = const$ и $x_2 = const$ прогиб $w_2(x_1, x_2)$ будет изменяться по кубическому закону. Все внешние границы и границы между элементами состоят именно из таких линий. Поскольку полином третьей степени единственным образом определяется четырьмя постоянными, перемещения вдоль границы однозначно определяются значениями перемещений и углов наклона в узловых точках на концах этой границы. А так как для смежных элементов значения на концах границы одинаковы, вдоль любой границы между элементами функция $w_2(x_1, x_2)$ будет непрерывной. Вместе с тем, можно заметить, что градиент функции $w_2(x_1, x_2)$ по нормали к любой границе изменяется вдоль нее по кубическому закону (например $\partial_1 w_2(x_1, x_2)$ вдоль линии $x_1 = const$). Так как на линиях заданы только два значения угла наклона, то полином третьей степени определяется неоднозначно и в общем случае угол наклона может оказаться разрывным (т.е. не обеспечена непрерывность первых производных на границах между отдельными конечными элементами). Таким образом, соответствующие функции формы являются несогласованными (имеем так называемые несогласованные конечные элементы).

Для получения согласованного конечного элемента необходимо за основную неизвестную в узлах, помимо описанных ранее (4.4), взять смешанную производную

$$\tau^{(2)}(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 w_2(x_1, x_2) = z_2^{(2)}(x_1, x_2), \quad (4.6)$$

а вместо формулы (4.5) использовать выражение с 16-ю коэффициентами,

$$w_2(x_1, x_2) = \bar{w}_2(x_1, x_2) + \alpha_{13}^{(2,i,j)} x_1^3 x_2^2 + \alpha_{14}^{(2,i,j)} x_1^2 x_2^3 + \alpha_{15}^{(2,i,j)} x_1^2 x_2^2 + \alpha_{16}^{(2,i,j)} x_1^3 x_2^3, \quad (4.7)$$

где $\bar{w}_2(x_1, x_2)$ определяется по формуле (4.5); $\alpha_p^{(2,i,j)}$, $p=1, 2, \dots, 16$ – коэффициенты полинома.

Можно показать [5, 14], что в рамках рассмотрения подобласти Ω_2 , разрешающая система $4N_1N_2$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_2 \bar{Y}_2 = \bar{R}_2, \quad (4.8)$$

где

$$\bar{Y}_2 = [(\bar{y}_n^{(2,1,1)})^T \quad (\bar{y}_n^{(2,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{y}_n^{(2,N_1,1)})^T \quad \dots \\ (\bar{y}_n^{(2,1,2)})^T \quad (\bar{y}_n^{(2,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{y}_n^{(2,N_1,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (\bar{y}_n^{(2,1,N_2)})^T \quad (\bar{y}_n^{(2,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{y}_n^{(2,N_1,N_2)})^T]^T \quad (4.9)$$

– $3N_1N_2$ -мерный глобальный вектор неизвестных (нижний индекс «2», следуя [3], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. ω_2);

$$\bar{y}_n^{(2,i,j)} = [y_1^{(2,i,j)} \quad z_1^{(2,i,j)} \quad y_2^{(2,i,j)} \quad z_2^{(2,i,j)}]^T, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1, 2, \dots, N_2; \quad (4.10)$$

K_2 – глобальная матрица жесткости $4N_1N_2$ -го порядка; \bar{R}_2 – $4N_1N_2$ - мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок).

5. ПЕРЕХОД К ЕДИНОЙ (СВЯЗАННОЙ) МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Для всех узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область ω_2 , с индексами

$1 < j < N_2$ (т.е. $x_{2,2}^b < x_2 < x_{2,3}^b$) можем переписать систему уравнений (4.4), без учета соответствующих уравнения для узлов с индексами $j=1$ и $j=N_2$. Имеем $4N_1(N_2-2)$ уравнений:

$$\tilde{K}_2 \bar{Y}_2 = \tilde{R}_2, \quad (5.1)$$

где \tilde{K}_2 – «редуцированная» таким образом глобальная матрица жесткости размером $[4N_1(N_2-2)] \times [4N_1N_2]$; \tilde{R}_2 – $4N_1(N_2-2)$ - мерный «редуцированный» глобальный вектор правых частей.

Очевидно, можно записать следующие условия для всей области ω :

– в сечении $x_2 = x_{2,1}^b$ следует задать условия ($4N_1$ уравнений) шарнирного опирания вида:

$$y_1^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N_1; \quad (5.2)$$

$$z_1^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N_1; \quad (5.3)$$

$$y_3^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N_1; \quad (5.4)$$

$$z_3^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N_1. \quad (5.5)$$

– в сечении $x_2 = x_{2,2}^b$ (т.е. при $j=1$; здесь и ниже j – третий индекс в нумерации узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область ω_2) следует задать условия ($4N_1$ уравнений) идеального контакта вида:

$$y_1^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = y_1^{(2,i,j)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (5.6)$$

$$z_1^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = z_1^{(2,i,j)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (5.7)$$

$$y_2^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = y_2^{(2,i,j)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (5.8)$$

$$z_2^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = [\partial_1 y_2]^{(2,i,j)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (5.9)$$

$$M_2^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = M_2^{(2,i,j)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (5.10)$$

$$[\partial_1 M_2]^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = [\partial_1 M_2]^{(2,i,j)}, \quad (5.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1;$$

$$V_2^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = V_2^{(2,i,j)}, \quad (5.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1;$$

$$[\partial_1 V_2]^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = [\partial_1 V_2]^{(2,i,j)}, \quad (5.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1;$$

где $M_2^{(1,i)}(x_2)$, $V_2^{(1,i)}(x_2)$ и $[\partial_1 M_2]^{(1,i)}(x_2)$, $[\partial_1 V_2]^{(1,i)}(x_2)$ – соответственно приведенные к узлу $(1, i)$ функции изгибающих моментов и приведенных поперечных сил в пределах рассматриваемого дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{1,i}$ и производные от указанных функций по переменной x_1 ; $M_2^{(2,i,j)}$, $V_2^{(2,i,j)}$ и $[\partial_1 M_2]^{(2,i,j)}$, $[\partial_1 V_2]^{(2,i,j)}$ – соответственно приведенные к узлу $(2, i, j)$ значения изгибающего момента и приведенной поперечной силы $M_2^{(2)}$, $V_2^{(2)}$ и значения производных от функций изгибающих моментов и приведенных поперечных сил по переменной x_1 ;

$$y_1^{(2,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2; \quad (5.14)$$

$$z_1^{(2,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2; \quad (5.15)$$

$$[\partial_2^2 y_1]^{(2,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2; \quad (5.16)$$

$$[\partial_1 \partial_2^2 y_1]^{(2,i,j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2. \quad (5.17)$$

В общей сложности, обобщая (5.1)-(5.16) имеем

$$4N_1(N_2 - 2) + 4N_1 + 8N_1 + 4N_1 = 4N_1N_2 + 8N_1$$

уравнений, причем в качестве неизвестных в данном случае выступают $8N_1$ компонент вектора \bar{C}_1 (см. формулу (3.13)), а также $4N_1N_2$ значений компонент неизвестных в узлах конечноэлементной сетки, аппроксимирующей подобласть ω_2 (компоненты вектора \bar{Y}_2), т.е. общее количество неизвестных также составляет $4N_1N_2 + 8N_1$.

Заметим, что условия (5.14) и (5.15) являются кинематическими граничными

условиями и должны быть явно заданы, тогда как условия (5.16) и (5.17), напротив, в рамках метода конечных элементов не требуют непосредственного задания (естественные краевые условия учитываются автоматически) при формировании матрицы \tilde{K}_2 (в этом смысле можно считать, что матрица \tilde{K}_2 имеет размер $[4N_1N_2 - 6N_1] \times [4N_1N_2]$ и общее количество неизвестных вновь равно $4N_1N_2 - 6N_1 + 4N_1 + 8N_1 + 2N_1 = 4N_1N_2 + 8N_1$. Перепишем последовательно уравнения (5.2)-(5.17) в матрично-векторном виде, в том числе с учетом (3.13).

1. Рассмотрим уравнения (5.2)-(5.5). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_1^+ \bar{Y}_1(x_{2,1}^b + 0) = \bar{g}_1^+, \quad (5.18)$$

где B_1^+ – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 8N_1$, алгоритм формирования которой указан в таблице 5.1; \bar{g}_1^+ – $4N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_1^+ = 0. \quad (5.19)$$

Подставляя (3.13) в (5.18) будем иметь:

$$B_1^+ E_1(x_{2,1}^b + 0) \bar{C}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{2,1}^b + 0) \quad (5.20)$$

или

$$Q_1 \bar{C}_1 = \bar{G}_1, \quad (5.21)$$

где $Q_1 = B_1^+ E_1(x_{2,1}^b + 0)$;

$$\bar{G}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{2,1}^b + 0); \quad (5.22)$$

Q_1 – матрица размера $4N_1 \times 8N_1$; \bar{G}_1 – вектор размера $4N_1$.

2. Рассмотрим уравнения (5.4)-(5.7). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_2^- \bar{Y}_1(x_{2,2}^b - 0) = B_2^+ \bar{Y}_2, \quad (5.23)$$

Таблица 5.1. Алгоритм заполнения матрицы B_1^+ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(i, 2i-1), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.2)
2	$(N_1+i, 2i), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.3)
3	$(2N_1+i, 4N_1+2i-1), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.4)
4	$(3N_1+i, 4N_1+2i), i=1, 2, \dots, N_1$	1	(5.5)

Примечание: Все элементы матрицы B_1^+ не указанные в таблице равны нулю.

где B_2^- – матрица граничных условий размера $8N_1 \times 8N_1$, алгоритм формирования которой описан в Приложении 1 к настоящей статье; B_2^+ – матрица граничных условий размера $8N_1 \times 4N_1N_2$, формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с алгоритмом, описанным в Приложении 2 к настоящей статье.

Подставляя (3.13) в (5.23), получим:

$$B_2^- \bar{Y}_1 (x_{2,2}^b - 0) \bar{C}_1 - B_2^+ \bar{Y}_2 = -B_2^- \bar{S}_1 (x_{2,2}^b - 0) \quad (5.24)$$

$$\text{или} \quad Q_{2,1} \bar{C}_1 + Q_{2,2} \bar{Y}_2 = \bar{G}_2, \quad (5.25)$$

где $Q_{2,1} = B_2^- E_1 (x_{2,2}^b - 0)$;

$$Q_{2,2} = -B_2^+; \quad \bar{G}_2 = -B_2^- \bar{S}_1 (x_{2,2}^b - 0); \quad (5.26)$$

$Q_{2,1}$ – матрица размера $8N_1 \times 4N_1$; $Q_{2,2}$ – матрица размера $8N_1 \times 4N_1N_2$; \bar{G}_2 – вектор размера $8N_1$.

3. Рассмотрим уравнения (5.14)-(5.17). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_3^- \bar{Y}_2 = \bar{g}_3^-, \quad (5.27)$$

где B_3^- – матрица граничных условий размера $4N_1 \times 4N_1N_2$, алгоритм формирования которой указан в Приложении 3 к настоящей статье; \bar{g}_3^- – $4N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_3^- = 0. \quad (5.28)$$

Объединяя (5.21), (5.25), (5.1) и (5.27), получим систему $4N_1N_2 + 8N_1$ линейных алгебраических уравнений с $4N_1N_2 + 8N_1$ неизвестными:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \\ 0 & \tilde{K}_2 \\ 0 & B_3^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \tilde{R}_2 \\ \bar{g}_3^- \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

При составлении глобальной матрицы жесткости и глобального вектора правых частей, соответствующих подобласти Ω_2 можно сразу учесть граничные условия (5.27). Тогда систему (5.29) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \\ 0 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \tilde{R}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

где \tilde{K}_2 – соответствующая «редуцированная» глобальная матрица жесткости размером $[4N_1(N_2 - 1)] \times [4N_1N_2]$; \tilde{R}_2 – соответствующий $4N_1(N_2 - 1)$ -мерный «редуцированный» глобальный вектор правых частей.

После решения данной системы на основании известных формул дискретно-континуального метода конечных элементов [5,14] и метода конечных элементов [1-4,7-13,15-24] могут быть найдены искомые перемещения, изгибающие моменты, крутящие моменты и поперечные силы.

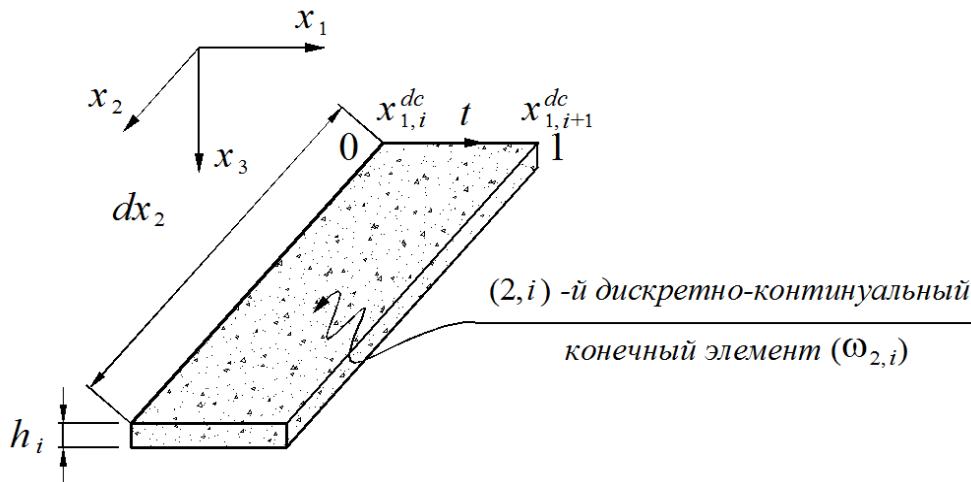


Рисунок П.1.1. Переход к локальной системе координат в сечении дискретно-континуального конечного элемента.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА
«ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»
В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-
КОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ
ВАРИАЦИЙ.**

П.1.1. Локальная система координат дискретно-континуального конечного элемента. Восполнение неизвестных на элементе. Рассмотрим произвольный \$(2,i,j)\$-й дискретно-континуальный конечный элемент (рис. П.1.1). В пределах дискретно-континуального конечного элемента (ДККЭ) вводится локальная координата \$t \in [0, 1]\$. Таким образом, переходим от исходной системы координат к элементной: \$(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)\$, т.е. выполняем локальную замену переменных внутри элемента. Здесь \$t\$ – локальная координата, введенная по направлению оси \$Ox_1\$ и связанная с ДККЭ:

$$t = (x_1 - x_{1,i})/h_i; \quad t \in [0, 1], \quad x_1 \in [x_{1,i}, x_{1,i+1}]. \quad (П.1.1)$$

Формула восполнения перемещений на элементе:

$$y_j^{(1)} = N_i(t) \bar{y}_j^{(1,i)}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{1,i}, \quad (П.1.2)$$

где

$$N_i = N_i(t) = [N_{i,1} \quad N_{i,2} \quad N_{i,3} \quad N_{i,4}] \quad (П.1.3)$$

– матрица функций формы («поперечных») по сечению ДККЭ с элементами

$$\begin{aligned} N_{i,1}(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3; \\ N_{i,2}(t) &= h_i(t - 2t^2 + t^3); \\ N_{i,3}(t) &= 3t^2 - 2t^3; \\ N_{i,4}(t) &= h_i(-t^2 + t^3); \end{aligned} \quad (П.1.4)$$

$$\bar{y}_j^{(1,i)} = \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2) = [(\bar{y}_{j,n}^{(1,i)})^T \quad (\bar{y}_{j,n}^{(1,i+1)})^T]^T, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (П.1.5)$$

П.1.2. Аппроксимация частных производных от основных неизвестных в пределах дискретно-континуального конечного элемента.

Выражения для частных производных от неизвестных функций по переменным \$x_1\$ и \$x_2\$ записываются следующим образом (ниже \$(x_1, x_2) \in \omega_{1,i}\$):

– частные производные первого порядка

$$[\partial_1 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = z_j^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) y_j^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.6})$$

$$[\partial_2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2 y_j^{(1,i)}(x_2) = N_i(t) y_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.7})$$

– частные производные второго порядка

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = \frac{1}{h_i^2} N''_i(t) y_j^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.8})$$

$$[\partial_1 \partial_2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = z_{j+1}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) \partial_2 y_j^{(1,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) y_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (\text{П.1.9})$$

$$[\partial_2^2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2^2 y_j^{(1,i)}(x_2) = N_i(t) y_{j+2}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (\text{П.1.10})$$

– частные производные третьего порядка

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1^2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = \frac{1}{h_i^3} N'''_i(t) y_j^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.11})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1 \partial_2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1 z_{j+1}^{(1)}](x_1, x_2) = \frac{1}{h_i^2} N''_i(t) \partial_2 y_j^{(1,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i^2} N''_i(t) y_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (\text{П.1.12})$$

$$[\partial_1 \partial_2^2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_2^2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = z_{j+2}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) \partial_2^2 y_j^{(1,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) y_{j+2}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (\text{П.1.13})$$

$$[\partial_2^3 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2^3 y_j^{(1,i)}(x_2) = N_i(t) y_{j+3}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1; \quad (\text{П.1.14})$$

$$\text{где } N'_i(t) = \frac{d}{dt} N_i(t) = [N'_{i,1} \quad N'_{i,2} \quad N'_{i,3} \quad N'_{i,4}]; \quad (\text{П.1.15})$$

$$N''_i(t) = \frac{d^2}{dt^2} N_i(t) = [N''_{i,1} \quad N''_{i,2} \quad N''_{i,3} \quad N''_{i,4}]; \quad (\text{П.1.16})$$

$$N'''_i(t) = \frac{d^3}{dt^3} N_i(t) = [N'''_{i,1} \quad N'''_{i,2} \quad N'''_{i,3} \quad N'''_{i,4}]; \quad (\text{П.1.17})$$

Производные от матрицы функций формы (П.1.3) находятся дифференцированием ее элементов (П.1.4), т.е.

$$N'_{i,1}(t) = 6t(t-1); \quad N'_{i,2}(t) = h_i(1-4t+3t^2); \quad N'_{i,3}(t) = 6t(1-t); \quad N'_{i,4}(t) = h_i t(3t-2); \quad (\text{П.1.18})$$

$$N''_{i,1}(t) = 6(2t-1); \quad N''_{i,2}(t) = 2h_i(3t-2); \quad N''_{i,3}(t) = 6(1-2t); \quad N''_{i,4}(t) = 2h_i(3t-1); \quad (\text{П.1.19})$$

$$N'''_{i,1}(t) = 12; \quad N'''_{i,2}(t) = 6h_i; \quad N'''_{i,3}(t) = -12; \quad N'''_{i,4}(t) = 6h_i. \quad (\text{П.1.20})$$

Следовательно, формулы для вычисления частных производных четвертого порядка имеют вид:

$$[\partial_1^4 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.21})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1^2 \partial_2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1^2 z_{j+1}^{(1)}](x_1, x_2) = \frac{1}{h_i^3} N'''_i(t) \partial_2 y_j^{(1,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i^3} N'''_i(t) y_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (\text{П.1.22})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1 \partial_2^2 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = [\partial_1 z_{j+2}^{(1)}](x_1, x_2) = \frac{1}{h_i^2} N''_i(t) \partial_2^2 y_j^{(1,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i^2} N''_i(t) y_{j+2}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (\text{П.1.23})$$

$$\begin{aligned}
 [\partial_1 \partial_2^3 y_j^{(1)}](x_1, x_2) &= [\partial_2^3 z_j^{(1)}](x_1, x_2) = \\
 &= z_{j+3}^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'_i(t) \partial_2^3 y_j^{(1,i)}(x_2) = \\
 &= \frac{1}{h_i} N'_i(t) y_{j+3}^{(1,i)}(x_2), \quad j = 1.
 \end{aligned}
 \tag{П.1.24}$$

П.1.3. Определение приведенных к узлам частных производных от основных неизвестных с учетом осреднения.

Очевидно, что приведенные к узлам значения частных производных от перемещений определяются с учетом соответствующих операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (П.1.6)-(П.1.14) и (П.1.21)-(П.1.24):

– частные производные первого порядка

$$[\partial_1 y_j^{(1)}]^{(i)} = z_j^{(1,i)}(x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.25}$$

$$[\partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = y_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3; \tag{П.1.26}$$

– частные производные второго порядка

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \left[\frac{\theta_{1,i-1}}{h_{i-1}^2} N''_{i-1}(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{1,i}}{h_i^2} N''_i(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j = 1, 2, 3; \tag{П.1.27}$$

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(1)} = \frac{\theta_{1,1}}{h_1^2} N''_1(0) \bar{y}_j^{(1,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.28}$$

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = \frac{\theta_{1,N_1-1}}{h_{N_1-1}^2} N''_{N_1-1}(1) \bar{y}_j^{(1,N_1-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.29}$$

$$[\partial_1 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = z_{j+1}^{(1,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.30}$$

$$[\partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = y_{j+2}^{(1,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.31}$$

– частные производные третьего порядка

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \left[\frac{\theta_{1,i-1}}{h_{i-1}^3} N'''_{i-1}(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{1,i}}{h_i^3} N'''_i(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.32}$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(1)} = \frac{\theta_{1,1}}{h_1^3} N'''_1(0) \bar{y}_j^{(1,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.33}$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = \frac{\theta_{1,N_1-1}}{h_{N_1-1}^3} N'''_{N_1-1}(1) \bar{y}_j^{(1,N_1-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.34}$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \left[\frac{\theta_{1,i-1}}{h_{i-1}^2} N''_{i-1}(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{1,i}}{h_i^2} N''_i(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, 3; \tag{П.1.35}$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(1)} = \frac{\theta_{1,1}}{h_1^2} N''_1(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \tag{П.1.36}$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = \frac{\theta_{1,N_1-1}}{h_{N_1-1}^2} N''_{N_1-1}(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,N_1-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.37}$$

$$[\partial_1 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = y_{j+2}^{(1,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.38}$$

$$[\partial_2^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = y_{j+3}^{(1,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \tag{П.1.39}$$

– частные производные четвертого порядка

$$[\partial_1^4 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \tag{П.1.40}$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \left[\frac{\theta_{1,i-1}}{h_{i-1}^3} N'''_{i-1}(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{1,i}}{h_i^3} N'''_i(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, 3; \tag{П.1.41}$$

Об одном примере расчета тонкой пластины на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(1)} = \frac{\theta_{1,1}}{h_1^3} N_1'''(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.42})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = \frac{\theta_{1,N_1-1}}{h_{N_1-1}^3} N_{N_1-1}'''(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,N_1-1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.43})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \left[\frac{\theta_{1,i-1}}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+2}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{1,i}}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+2}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad i=2, \dots, N_1-1, \quad j=1, 2; \quad (\text{П.1.44})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(1)} = \frac{\theta_{1,1}}{h_1^2} N_1''(0) \bar{y}_{j+2}^{(1,1)}(x_2), \quad j=1, 2; \quad (\text{П.1.45})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = \frac{\theta_{1,N_1-1}}{h_{N_1-1}^2} N_{N_1-1}''(1) \bar{y}_{j+2}^{(1,N_1-1)}(x_2), \quad j=1, 2; \quad (\text{П.1.46})$$

$$[\partial_1 \partial_2^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = z_{j+3}^{(1,i)}, \quad i=1, 2, \dots, N_1, \quad j=1; \quad (\text{П.1.47})$$

Рассмотрим важные частные случаи вышеприведенных формул. Поясним, что если $\theta_{1,i-1} = \theta_{1,i} = 0$, $i=2, 3, \dots, N_1-1$, то

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i=2, \dots, N-1, \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.48})$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i=2, \dots, N_1-1, \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.49})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i=2, \dots, N_1-1, \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.50})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i=2, \dots, N_1-1, \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.51})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = 0, \quad i=2, \dots, N_1-1, \quad j=1, 2. \quad (\text{П.1.52})$$

Очевидно, что если $\theta_{1,i-1} = \theta_{1,i} = 1$, $i=2, 3, \dots, N_1-1$, то вместо

формул (П.1.27), (П.1.32), (П.1.35), (П.1.41) и (П.1.44) будем иметь (ниже $i=2, \dots, N_1-1$):

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.53})$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.54})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.55})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.56})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+2}^{(1,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+2}^{(1,i)}(x_2) \right], \quad j=1, 2; \quad (\text{П.1.57})$$

В случае $\theta_{1,i-1} = 0$, $\theta_{1,i} = 1$, $i=2, 3, \dots, N_1-1$ (дискретно-континуальный элемент $\omega_{1,i-1}$ аппроксимирует «пустоту»), то вместо формул (П.1.27), (П.1.32), (П.1.35), (П.1.41) и (П.1.44) получим (ниже $i=2, \dots, N_1-1$):

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2), \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.58})$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^3} N_i''(0) \bar{y}_j^{(1,i)}(x_2), \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.59})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.60})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_{j+1}^{(1,i)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.61})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+2}^{(1,i)}(x_2), \quad j=1, 2. \quad (\text{П.1.62})$$

В случае $\theta_{1,i-1} = 1, \theta_{1,i} = 0, i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ (дискретно-континуальный элемент $\omega_{1,i-1}$ аппроксимирует «пустоту»), то вместо формул (П.1.27), (П.1.32), (П.1.35), (П.1.41) и (П.1.44) получим (ниже $i = 2, \dots, N_1 - 1$):

$$[\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.63})$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_j^{(1,i-1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3, 4; \quad (\text{П.1.64})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.65})$$

$$[\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_{j+1}^{(1,i-1)}(x_2), \quad j=1, 2, 3; \quad (\text{П.1.66})$$

$$[\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+2}^{(1,i-1)}(x_2), \quad j=1, 2. \quad (\text{П.1.67})$$

Если $\theta_{1,1} = 0$ (дискретно-континуальный элемент $\omega_{1,1}$ аппроксимирует «пустоту»), то вместо (П.1.28), (П.1.33), (П.1.36), (П.1.42) и (П.1.45) получим:

$$\begin{aligned} [\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(1)} &= 0, \quad [\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(1)} = 0, \\ [\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(1)} &= 0, \quad [\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(1)} = 0, \\ [\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(1)} &= 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (\text{П.1.68})$$

Если $\theta_{1,N_1-1} = 0$ (дискретно-континуальный элемент ω_{1,N_1-1} аппроксимирует «пустоту»), то вместо (П.1.29), (П.1.34), (П.1.37), (П.1.43) и (П.1.46) получим:

$$\begin{aligned} [\partial_1^2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} &= 0, \quad [\partial_1^3 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = 0, \\ [\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} &= 0, \quad [\partial_1^3 \partial_2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} = 0, \\ [\partial_1^2 \partial_2^2 y_j^{(1)}]^{(N_1)} &= 0, \quad j=1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (\text{П.1.69})$$

П.1.4. Аппроксимация изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил в пределах дискретно-континуального конечного элемента.

После определения (П.1.6)-(П.1.13) и (П.1.21)-(П.1.24) выражения для изгибающих моментов на элементе на основе известных соотношений в пределах элемента $\omega_{1,i}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1^{(1,i)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + \nu_{1,i} [\partial_2^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + \nu_{1,i} y_3^{(1)}(x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.1.70})$$

$$\begin{aligned} M_2^{(1,i)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ \nu_{1,i} [\partial_1^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_2^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ \nu_{1,i} [\partial_1 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + y_3^{(1)}(x_1, x_2) \}, \end{aligned} \quad (\text{П.1.71})$$

где $D_{1,i}$ и $\nu_{1,i}$ – соответственно значение цилиндрической жесткости и коэффициента Пуассона на дискретно-континуальном конечном элементе $\omega_{1,i}$.

Очевидно, в частности, что производная по переменной x_1 от функции (П.1.71) вычисляется по формуле

Об одном примере расчета тонкой пластины на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(1,i)}](x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ \nu_{1,i} [\partial_1^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_1 \partial_2^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ \nu_{1,i} [\partial_1^2 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + z_3^{(1)}(x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.72})$$

Поперечные силы в пределах элемента $\omega_{1,i}$, в свою очередь, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} Q_1^{(1,i)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_1 \partial_2^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1^2 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + z_3^{(1)}(x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.1.73})$$

$$\begin{aligned} Q_2^{(1,i)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_2 \partial_1^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_1^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + y_4^{(1)}(x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.74})$$

Крутящий момент в пределах элемента $\omega_{1,i}$ определяется выражением

$$\begin{aligned} H^{(1,i)}(x_1, x_2) &= M_{12}^{(1,i)}(x_1, x_2) = M_{21}^{(1,i)}(x_1, x_2) = \\ &= -D_{1,i} (1 - \nu_{1,i}) [\partial_1 \partial_2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) = \\ &= -D_{1,i} (1 - \nu_{1,i}) z_2^{(1)}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{П.1.75})$$

Приведенные поперечные силы в пределах элемента $\omega_{1,i}$, часто используемые при задании граничных условий, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1^{(1,i)}(x_1, x_2) &= -D_{1,i} \{ [\partial_1^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ (2 - \nu_{1,i}) [\partial_1 \partial_2^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ [\partial_1^2 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + (2 - \nu_{1,i}) z_3^{(1)}(x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.1.76})$$

$$\begin{aligned} V_2^{(1,i)}(x_1, x_2) &= -D_{1,i} \{ (2 - \nu_{1,i}) [\partial_2 \partial_1^2 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ [\partial_2^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ (2 - \nu_{1,i}) [\partial_1 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + y_4^{(1)}(x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.77})$$

Очевидно, в частности, что производная по переменной x_1 от функции (П.1.77) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(1,i)}](x_1, x_2) &= \\ &= -D_{1,i} \{ (2 - \nu_{1,i}) [\partial_2 \partial_1^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ [\partial_1 \partial_2^3 y_1^{(1)}](x_1, x_2) \} = \\ &= -D_{1,i} \{ (2 - \nu_{1,i}) [\partial_1^2 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + \partial_1 y_4^{(1)}(x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.78})$$

П.1.5. Определение приведенных к узлам значений изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил.

Приведем ниже формулы для определения изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил в узлах дискретно-континуальной модели:

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$)

$$\begin{aligned} [M_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) &= \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \\ &\times [\theta_{1,i-1} M_p^{(1,i-1)}(1, x_2) + \theta_{1,i} M_p^{(1,i)}(0, x_2)], \quad p = 1, 2; \end{aligned} \quad (\text{П.1.79})$$

$$\begin{aligned} [Q_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) &= \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \\ &\times [\theta_{1,i-1} Q_p^{(1,i-1)}(1, x_2) + \theta_{1,i} Q_p^{(1,i)}(0, x_2)], \quad p = 1, 2; \end{aligned} \quad (\text{П.1.80})$$

$$\begin{aligned} [H^{(1)}]^{(i)}(x_2) &= \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \\ &\times [\theta_{1,i-1} H^{(1,i-1)}(1, x_2) + \theta_{1,i} H^{(1,i)}(0, x_2)]; \end{aligned} \quad (\text{П.1.81})$$

$$\begin{aligned} [V_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) &= \frac{1}{\theta_{1,i-1} + \theta_{1,i}} \times \\ &\times [\theta_{1,i-1} V_p^{(1,i-1)}(1, x_2) + \theta_{1,i} V_p^{(1,i)}(0, x_2)], \quad p = 1, 2; \end{aligned} \quad (\text{П.1.82})$$

– граничные узлы ($i = 1$)

$$[M_p^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1} M_p^{(1,1)}(0, x_2), \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.83})$$

$$[Q_p^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1} Q_p^{(1,1)}(0, x_2), \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.84})$$

$$[H^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1}H^{(1,1)}(0, x_2); \quad (\text{П.1.85})$$

$$[V_p^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1}V_p^{(1,1)}(0, x_2), \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.86})$$

– граничный узел ($i = N_1$)

$$[M_p^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}M_p^{(1, N_1-1)}(1, x_2), \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.87})$$

$$[Q_p^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}Q_p^{(1, N_1-1)}(1, x_2), \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.88})$$

$$[H^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}H^{(1, N_1-1)}(1, x_2); \quad (\text{П.1.89})$$

$$[V_p^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}V_p^{(1, N_1-1)}(1, x_2), \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.1.90})$$

Поясним, что в частном случае $\theta_{1, i-1} = \theta_{1, i} = 0, i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ формулы (П.1.77)-(П.1.80) примут вид:

$$[M_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.91})$$

$$[Q_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.1.92})$$

$$[H^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0; \quad (\text{П.1.93})$$

$$[V_p^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0, \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.1.94})$$

Очевидно, в частности, справедливы следующие формулы для определения функций (П.1.72), (П.1.78) в узлах дискретно-континуальной модели:

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$)

$$[\partial_1 M_2^{(1)}]^{(i)}(x_2) = \frac{1}{\theta_{1, i-1} + \theta_{1, i}} \times \{ \theta_{1, i-1}[\partial_1 M_2^{(1, i-1)}](1, x_2) + \theta_{1, i}[\partial_1 M_2^{(1, i)}](0, x_2) \}; \quad (\text{П.1.95})$$

$$[\partial_1 V_2^{(1)}]^{(i)}(x_2) = \frac{1}{\theta_{1, i-1} + \theta_{1, i}} \times \{ \theta_{1, i-1}[\partial_1 V_2^{(1, i-1)}](1, x_2) + \theta_{1, i}[\partial_1 V_2^{(1, i)}](0, x_2) \}; \quad (\text{П.1.96})$$

– граничные узлы ($i = 1$)

$$[\partial_1 M_2^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1}[\partial_1 M_2^{(1,1)}](0, x_2); \quad (\text{П.1.97})$$

$$[\partial_1 V_2^{(1)}]^{(1)}(x_2) = \theta_{1,1}[\partial_1 V_2^{(1,1)}](0, x_2); \quad (\text{П.1.98})$$

– граничный узел ($i = N_1$)

$$[\partial_1 M_2^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}[\partial_1 M_2^{(1, N_1-1)}](1, x_2); \quad (\text{П.1.99})$$

$$[\partial_1 V_2^{(1)}]^{(N_1)}(x_2) = \theta_{1, N_1-1}[\partial_1 V_2^{(1, N_1-1)}](1, x_2). \quad (\text{П.1.100})$$

Поясним, что в частном случае $\theta_{1, i-1} = \theta_{1, i} = 0, i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ формулы (П.1.95) и (П.1.96) примут вид:

$$[\partial_1 M_2^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0; \quad (\text{П.1.101})$$

$$[\partial_1 V_2^{(1)}]^{(i)}(x_2) = 0. \quad (\text{П.1.102})$$

П.1.6. Алгоритм формирования матрицы граничных условий типа «идеальный контакт».

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_2^- при задании условий (5.23) описан ниже.

1. Условиям (5.6)-(5.9) соответствует задание части элементов матрицы B_2^- по формуле (ниже $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера)

$$(B_2^-)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 4N_1, \quad q = 1, 2, \dots, 4N_1, \quad (\text{П.1.103})$$

где $\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \quad (\text{П.1.104})$

2. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно задаются $s = 1, 2, 3, 4$. Для каждого фиксированного значения s выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются $i = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения i выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются $q=1, 2$. Для каждого фиксированного значения q выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(s-1). \quad (\text{П.1.105})$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{Y}_1 (см. (3.10)) задается

$$\bar{Y}_1 = \bar{e}_{j_g}, \quad (\text{П.1.106})$$

где элементы $8N_1$ вектора \bar{e}_{j_g} определяются по формуле

$$\{\bar{e}_{j_g}\}_k = \delta_{k,j_g}, \quad k=1, 2, \dots, 8N_1. \quad (\text{П.1.107})$$

2.1.1.1.3. В соответствии со структурой (3.10) вектора неизвестных по соответствующим формулам (П.1.79), (П.1.82), (П.1.83), (П.1.86), (П.1.87), (П.1.90), (П.1.91), (П.1.94), (П.1.95)-(П.1.101) определяются приведенные к узлу следующие величины:

$$\begin{aligned} & [M_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0), \quad [V_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0), \\ & [\partial_1 M_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0), \quad [\partial_1 V_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0). \end{aligned}$$

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_2^- определяются по формулам

$$(B_2^-)_{4N_1+i_g, j_g} = [M_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0); \quad (\text{П.1.108})$$

$$(B_2^-)_{5N_1+i_g, j_g} = [\partial_1 M_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0); \quad (\text{П.1.109})$$

$$(B_2^-)_{6N_1+i_g, j_g} = [V_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0); \quad (\text{П.1.110})$$

$$(B_2^-)_{7N_1+i_g, j_g} = [\partial_1 V_2^{(1)}]^{(i)}(x_{2,2}^b - 0). \quad (\text{П.1.111})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^- по формулам (П.1.108)-(П.1.111) соответствует заданию граничных условий (5.10)-(5.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ» В РАМКАХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ ВАРИАЦИЙ

П.2.1. Локальная система координат конечного элемента. Восполнение неизвестных на элементе.

Рассмотрим произвольный $(2, i, j)$ -й конечный элемент (рис. П.2.1). Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента:

$$\begin{aligned} (x_{1,i}^{dc}, x_{2,j}^{dc}) &\Rightarrow (0, 0); \quad (x_{1,i+1}^{dc}, x_{2,j}^{dc}) \Rightarrow (1, 0); \\ (x_{1,i}^{dc}, x_{2,j+1}^{dc}) &\Rightarrow (0, 1); \quad (x_{1,i+1}^{dc}, x_{2,j+1}^{dc}) \Rightarrow (1, 1). \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Пусть $\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T$ и $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$ – векторы координат произвольной точки элемента в локальной и исходной глобальной системах координат ($t_1 \in [0, 1]; t_2 \in [0, 1]$). Формула преобразования координат на элементе:

$$\bar{x}(t_1, t_2) = \bar{x}_n^{(1,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (\text{П.2.2})$$

где $\Delta_1 \bar{x}^{(2,i,j)} = \bar{x}_n^{(2,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(2,i,j)}$;

$$\Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j)} = \bar{x}_n^{(2,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(2,i,j)}$$

$$\Delta_{12} \bar{x}^{(2,i,j)} = \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(2,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j)}. \quad (\text{П.2.3})$$

Поясним, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_n^{(2,i,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j)} \\ x_2^{(i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(1,i+1,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j)} \\ x_2^{(i+1,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(2,i,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j+1)} \\ x_2^{(i,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j+1)} \\ x_2^{(i+1,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

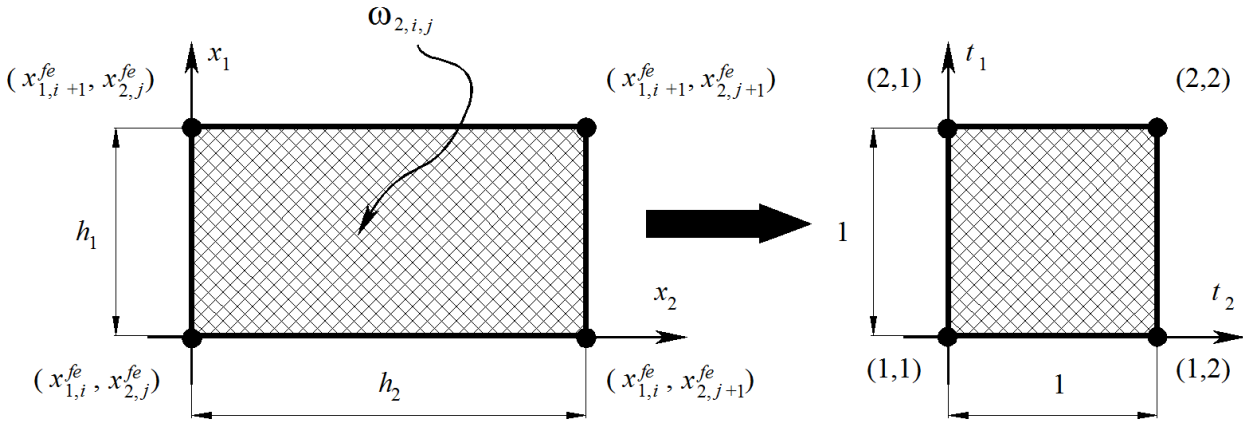


Рисунок П.2.1. Переход к локальной системе координат в сечении дискретно-континуального конечного элемента.

Здесь $\bar{x}_n^{(2,i,j)}$, $\bar{t}_n^{(2,i,j)}$ – векторы координат $(2, i, j)$ -го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно. Функциональная матрица $B(t_1, t_2)$ имеет вид:

$$B(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.5})$$

где $\beta_{p,q}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(i,j)}$, $p = 1, 2$; $q = 1, 2$;

$$\beta_{p,q}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2; \quad (\text{П.2.6})$$

$$\Delta_1 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j)} - x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.2.7})$$

$$\Delta_2 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i,j+1)} - x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2; \quad (\text{П.2.8})$$

$$\Delta_{12} x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j+1)} - x_p^{(i+1,j)} - \Delta_2 x_p^{(i,j)}, \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.2.9})$$

Формула вычисления определителя матрицы $B(t_1, t_2)$:

$$J_{i,j}(t_1, t_2) = \det[\Lambda_{i,j}(t_1, t_2)] = \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \quad (\text{П.2.10})$$

Матрица Якоби $\Lambda(t_1, t_2)$, определяемая формулой

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = B_{i,j}^{-1}(t_1, t_2), \quad (\text{П.2.11})$$

имеет вид

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \alpha_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.12})$$

где $\alpha_{1,1}^{(i,j)} = \alpha_{1,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}$;

$$\alpha_{1,2}^{(i,j)} = \alpha_{1,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \quad (\text{П.2.13})$$

$\alpha_{2,1}^{(i,j)} = \alpha_{2,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}$;

$$\alpha_{2,2}^{(i,j)} = \alpha_{2,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}. \quad (\text{П.2.14})$$

Вектор неизвестных в $(2, i, j)$ -м узле имеет вид (4.10). Вектор неизвестных во всех узлах элемента $(2, i, j)$ -го элемента

$$\bar{y}^{(2,i,j)} = [\beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)]^T (\bar{y}_n^{(2,i+1,j+1)})^T \quad (\text{П.2.15})$$

Формула восполнения неизвестных на элементе (ниже $(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}$), т.е. формула определения соответствующей вектор-функции неизвестных, имеет вид:

$$\bar{y}^{(2)}(x_1, x_2) = N_i(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}, \quad (\text{П.2.16})$$

Об одном примере расчета тонкой пластины на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

где

$$\bar{y}^{(2)}(x_1, x_2) = [y_1(x_1, x_2) \ z_1(x_1, x_2) \ y_2(x_1, x_2) \ z_2(x_1, x_2)]^T, \quad (\text{П.2.17})$$

$N_i(t_1, t_2)$ – матрица функций формы (см. формулы (П.1.4)),

$$N_i(t_1, t_2) = [N_{i,1,1}(t_1, t_2) \ N_{i,2,1}(t_1, t_2) \ N_{i,1,2}(t_1, t_2) \ N_{i,2,2}(t_1, t_2)]; \quad (\text{П.2.18})$$

$$N_{i,1,1}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N_{i,1}(t_1)N_{i,2}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.19})$$

$$N_{i,2,1}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N_{i,3}(t_1)N_{i,2}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.20})$$

$$N_{i,1,2}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N_{i,1}(t_1)N_{i,4}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.21})$$

$$N_{i,2,2}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N_{i,3}(t_1)N_{i,4}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.22})$$

П.2.2. Аппроксимация частных производных от вектор-функции основных неизвестных в пределах конечного элемента.

Очевидно, что частные производные первого порядка от вектор функции неизвестных (П.2.16) по переменным t_1 и t_2 определяются по следующим формулам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = N_i^{(1,0)}(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}; \quad (\text{П.2.23})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = N_i^{(0,1)}(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}, \quad (\text{П.2.24})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = N_i^{(2,0)}(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}; \quad (\text{П.2.25})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = N_i^{(1,1)}(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}; \quad (\text{П.2.26})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = N_i^{(0,2)}(t_1, t_2) \bar{y}^{(2,i,j)}; \quad (\text{П.2.27})$$

$$N_i^{(p,q)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial t_1^p \partial t_2^q} N_i(t_1, t_2); \quad (\text{П.2.28})$$

$$N_i^{(p,q)}(t_1, t_2) = [N_{i,1,1}^{(p,q)}(t_1, t_2) \ N_{i,2,1}^{(p,q)}(t_1, t_2) \ N_{i,1,2}^{(p,q)}(t_1, t_2) \ N_{i,2,2}^{(p,q)}(t_1, t_2)]; \quad (\text{П.2.29})$$

Имеем:

$$N_{i,1,1}^{(1,0)}(t_1, t_2) = [N'_{i,1}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N'_{i,1}(t_1)N_{i,2}(t_2) \ N'_{i,2}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N'_{i,2}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.30})$$

$$N_{i,2,1}^{(1,0)}(t_1, t_2) = [N'_{i,3}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N'_{i,3}(t_1)N_{i,2}(t_2) \ N'_{i,4}(t_1)N_{i,1}(t_2) \ N'_{i,4}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.31})$$

$$N_{i,1,2}^{(1,0)}(t_1, t_2) = [N'_{i,1}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N'_{i,1}(t_1)N_{i,4}(t_2) \ N'_{i,2}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N'_{i,2}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.32})$$

$$N_{i,2,2}^{(1,0)}(t_1, t_2) = [N'_{i,3}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N'_{i,3}(t_1)N_{i,4}(t_2) \ N'_{i,4}(t_1)N_{i,3}(t_2) \ N'_{i,4}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.33})$$

$$N_{i,1,1}^{(0,1)}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \ N_{i,1}(t_1)N'_{i,2}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N'_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.34})$$

$$N_{i,2,1}^{(0,1)}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \ N_{i,3}(t_1)N'_{i,2}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \ N_{i,4}(t_1)N'_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.35})$$

$$N_{i,1,2}^{(0,1)}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \ N_{i,1}(t_1)N'_{i,4}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \ N_{i,2}(t_1)N'_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.36})$$

$$N_{i,2,2}^{(0,1)}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N_{i,3}(t_1)N'_{i,4}(t_2) \\ N_{i,4}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N_{i,4}(t_1)N'_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.37})$$

$$N_{i,1,1}^{(2,0)}(t_1, t_2) = [N''_{i,1}(t_1)N_{i,1}(t_2) \quad N''_{i,1}(t_1)N_{i,2}(t_2) \\ N''_{i,2}(t_1)N_{i,1}(t_2) \quad N''_{i,2}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.38})$$

$$N_{i,2,1}^{(2,0)}(t_1, t_2) = [N''_{i,3}(t_1)N_{i,1}(t_2) \quad N''_{i,3}(t_1)N_{i,2}(t_2) \\ N''_{i,4}(t_1)N_{i,1}(t_2) \quad N''_{i,4}(t_1)N_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.39})$$

$$N_{i,1,2}^{(2,0)}(t_1, t_2) = [N''_{i,1}(t_1)N_{i,3}(t_2) \quad N''_{i,1}(t_1)N_{i,4}(t_2) \\ N''_{i,2}(t_1)N_{i,3}(t_2) \quad N''_{i,2}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.40})$$

$$N_{i,2,2}^{(2,0)}(t_1, t_2) = [N''_{i,3}(t_1)N_{i,3}(t_2) \quad N''_{i,3}(t_1)N_{i,4}(t_2) \\ N''_{i,4}(t_1)N_{i,3}(t_2) \quad N''_{i,4}(t_1)N_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.41})$$

$$N_{i,1,1}^{(1,1)}(t_1, t_2) = [N'_{i,1}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \quad N'_{i,1}(t_1)N'_{i,2}(t_2) \\ N'_{i,2}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \quad N'_{i,2}(t_1)N'_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.42})$$

$$N_{i,2,1}^{(1,1)}(t_1, t_2) = [N'_{i,3}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \quad N'_{i,3}(t_1)N'_{i,2}(t_2) \\ N'_{i,4}(t_1)N'_{i,1}(t_2) \quad N'_{i,4}(t_1)N'_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.43})$$

$$N_{i,1,2}^{(1,1)}(t_1, t_2) = [N'_{i,1}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N'_{i,1}(t_1)N'_{i,4}(t_2) \\ N'_{i,2}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N'_{i,2}(t_1)N'_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.44})$$

$$N_{i,2,2}^{(1,1)}(t_1, t_2) = [N'_{i,3}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N'_{i,3}(t_1)N'_{i,4}(t_2) \\ N'_{i,4}(t_1)N'_{i,3}(t_2) \quad N'_{i,4}(t_1)N'_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.45})$$

$$N_{i,1,1}^{(0,2)}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N''_{i,1}(t_2) \quad N_{i,1}(t_1)N''_{i,2}(t_2) \\ N_{i,2}(t_1)N''_{i,1}(t_2) \quad N_{i,2}(t_1)N''_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.46})$$

$$N_{i,2,1}^{(0,2)}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N''_{i,1}(t_2) \quad N_{i,3}(t_1)N''_{i,2}(t_2) \\ N_{i,4}(t_1)N''_{i,1}(t_2) \quad N_{i,4}(t_1)N''_{i,2}(t_2)]; \quad (\text{П.2.47})$$

$$N_{i,1,2}^{(0,2)}(t_1, t_2) = [N_{i,1}(t_1)N''_{i,3}(t_2) \quad N_{i,1}(t_1)N''_{i,4}(t_2) \\ N_{i,2}(t_1)N''_{i,3}(t_2) \quad N_{i,2}(t_1)N''_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.48})$$

$$N_{i,2,2}^{(0,2)}(t_1, t_2) = [N_{i,3}(t_1)N''_{i,3}(t_2) \quad N_{i,3}(t_1)N''_{i,4}(t_2) \\ N_{i,4}(t_1)N''_{i,3}(t_2) \quad N_{i,4}(t_1)N''_{i,4}(t_2)]; \quad (\text{П.2.49})$$

Формула определения частных производных от вектор функции неизвестных (П.2.16) по переменным x_1 и x_2 имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_p} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\ = \sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_q} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2), \quad p=1, 2. \quad (\text{П.2.50})$$

Рассмотрим теперь определение частных производных второго порядка по переменным x_1 и x_2 . Очевидно, что справедливы равенства

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right) = \\ = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \xi_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2);$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}} \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \eta_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \xi_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2); \\
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}} \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{q=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_2^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \eta_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2),
 \end{aligned}$$

где $\xi_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \alpha_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2)$;
 $\eta_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \alpha_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2)$. (П.2.51)

Таким образом, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \xi_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2); \quad (П.2.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \eta_{q_2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \xi_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2); \quad (П.2.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \\
 & = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t_2^2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \bar{y}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \eta_{q_2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \right\} \alpha_{q_1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2). \quad (П.2.54)
 \end{aligned}$$

П.2.4. Аппроксимация изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил в пределах конечного элемента.

Формулы для вычисления изгибающих моментов на элементе на основе известных соотношений в пределах элемента $\omega_{2,i,j}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ [\partial_1 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + \nu_{2,i,j} [\partial_2 y_2^{(1)}](x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.55})$$

$$\begin{aligned} M_2^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ \nu_{2,i,j} [\partial_1 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_2 y_2^{(1)}](x_1, x_2) \}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.56})$$

где $D_{2,i,j}$ и $\nu_{2,i,j}$ – соответственно значение цилиндрической жесткости и коэффициента Пуассона на конечном элементе $\omega_{2,i,j}$.

Очевидно, в частности, что производная по переменной x_1 от функции (П.2.55) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2,i,j)}](x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ \nu_{2,i,j} [\partial_1 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_2 z_2^{(1)}](x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.57})$$

Поперечные силы в пределах элемента $\omega_{2,i,j}$, в свою очередь, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} Q_1^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ [\partial_1^2 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_2 z_2^{(1)}](x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.58})$$

$$\begin{aligned} Q_2^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ [\partial_1 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + [\partial_2^2 y_2^{(1)}](x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.59})$$

Крутящий момент в пределах элемента $\omega_{2,i,j}$ определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} H^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= M_{12}^{(2,i,j)}(x_1, x_2) = \\ &= M_{21}^{(2,i,j)}(x_1, x_2) = -D_{2,i,j} (1 - \nu_{2,i,j}) z_2^{(1)}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{П.2.60})$$

Приведенные поперечные силы в пределах элемента $\omega_{2,i,j}$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= -D_{2,i,j} \{ [\partial_1^2 z_1^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ (2 - \nu_{2,i,j}) [\partial_2 z_2^{(1)}](x_1, x_2) \}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.61})$$

$$\begin{aligned} V_2^{(2,i,j)}(x_1, x_2) &= -D_{2,i,j} \{ (2 - \nu_{2,i,j}) [\partial_1 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ [\partial_2^2 y_2^{(1)}](x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.62})$$

Очевидно, в частности, что производная по переменной x_1 от функции (П.1.62) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2,i,j)}](x_1, x_2) &= \\ &= -D_{2,i,j} \{ (2 - \nu_{2,i,j}) [\partial_1^2 z_2^{(1)}](x_1, x_2) + \\ &+ \partial_1 \partial_2^2 y_2^{(1)}(x_1, x_2) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.63})$$

П.2.5. Определение приведенных к узлам значений изгибающих моментов, поперечных сил, крутящих моментов и приведенных поперечных сил с учетом осреднения.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_{2,i,j} &= \\ &= \mathfrak{G}_{2,i,j} (\theta_{2,i-1,j-1} + \theta_{2,i-1,j} + \theta_{2,i,j-1} + \theta_{2,i,j})^{-1}, \\ & \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \end{aligned} \quad (\text{П.2.64})$$

$$\chi_{2,1,j} = \mathfrak{G}_{2,1,j} (\theta_{2,1,j-1} + \theta_{2,1,j})^{-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \quad (\text{П.2.65})$$

$$\chi_{2,N_1,j} = \mathfrak{G}_{2,N_1,j} (\theta_{2,N_1-1,j-1} + \theta_{2,N_1-1,j})^{-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \quad (\text{П.2.66})$$

$$\chi_{2,i,1} = \mathfrak{G}_{2,i,1} (\theta_{2,i-1,1} + \theta_{2,i,1})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad (\text{П.2.67})$$

$$\chi_{2,i,N_2} = \mathcal{G}_{2,i,N_2} (\theta_{2,i-1,N_2-1} + \theta_{2,i,N_2-1})^{-1}, \quad (П.2.68)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$$

$$\chi_{2,1,1} = \mathcal{G}_{2,1,1} \theta_{2,1,1}^{-1}; \quad (П.2.69)$$

$$\chi_{2,N_1,1} = \mathcal{G}_{2,N_1,1} \theta_{2,N_1-1,1}^{-1}; \quad (П.2.70)$$

$$\chi_{2,1,N_2} = \mathcal{G}_{2,1,N_2} \theta_{2,1,N_2-1}^{-1}; \quad (П.2.71)$$

$$\chi_{2,N_1,N_2} = \mathcal{G}_{2,N_1,N_2} \theta_{2,N_1-1,N_2-1}^{-1}, \quad (П.2.72)$$

где

$$\mathcal{G}_{2,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1} + \theta_{2,i-1,j} + \theta_{2,i,j-1} + \theta_{2,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,j-1} + \theta_{2,i-1,j} + \theta_{2,i,j-1} + \theta_{2,i,j} = 0, \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \quad (П.2.73)$$

$$\mathcal{G}_{2,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,1,j-1} + \theta_{2,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,1,j-1} + \theta_{2,1,j} = 0, \end{cases} \quad (П.2.74)$$

$$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1;$$

$$\mathcal{G}_{2,N_1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,N_1-1,j-1} + \theta_{2,N_1-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,N_1-1,j-1} + \theta_{2,N_1-1,j} = 0, \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \quad (П.2.75)$$

$$\mathcal{G}_{2,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,1} + \theta_{2,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,1} + \theta_{2,i,1} = 0, \end{cases} \quad (П.2.76)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$$

$$\mathcal{G}_{2,i,N_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{2,i-1,N_2-1} + \theta_{2,i,N_2-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{2,i-1,N_2-1} + \theta_{2,i,N_2-1} = 0, \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad (П.2.77)$$

$$\mathcal{G}_{2,1,1} = \theta_{2,1,1}; \quad (П.2.78)$$

$$\mathcal{G}_{2,N_1,1} = \theta_{2,N_1-1,1}; \quad (П.2.79)$$

$$\mathcal{G}_{2,1,N_2} = \theta_{2,1,N_2-1}; \quad (П.2.80)$$

$$\mathcal{G}_{2,N_1,N_2} = \theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \quad (П.2.81)$$

Уточним, что в каждой из рассмотренных выше формул при $\mathcal{G}_{2,i,j} = 0$ будем иметь $\chi_{2,i,j} = 0$.

Приведем ниже формулы для определения изгибающих моментов, поперечных сил,

крутящих моментов и приведенных поперечных сил в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду $p = 1, 2$):

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$[M_p^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (M_p^{(2,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + M_p^{(2,i,j-1)}(0,1)\theta_{2,i,j-1} + M_p^{(2,i-1,j)}(1,0)\theta_{2,i-1,j} + M_p^{(2,i,j)}(0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (П.2.82)$$

$$[H^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (H^{(2,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + H^{(2,i,j-1)}(0,1)\theta_{2,i,j-1} + H^{(2,i-1,j)}(1,0)\theta_{2,i-1,j} + H^{(2,i,j)}(0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (П.2.83)$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (Q_p^{(2,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + Q_p^{(2,i,j-1)}(0,1)\theta_{2,i,j-1} + Q_p^{(2,i-1,j)}(1,0)\theta_{2,i-1,j} + Q_p^{(2,i,j)}(0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (П.2.84)$$

$$[V_p^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (V_p^{(2,i-1,j-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + V_p^{(2,i,j-1)}(0,1)\theta_{2,i,j-1} + V_p^{(2,i-1,j)}(1,0)\theta_{2,i-1,j} + V_p^{(2,i,j)}(0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (П.2.85)$$

– «левая вертикальная граница» ($i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$[M_p^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (M_p^{(2,1,j-1)}(0,1)\theta_{2,1,j-1} + M_p^{(2,1,j)}(0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (П.2.86)$$

$$[H^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (H^{(2,1,j-1)}(0,1)\theta_{2,1,j-1} + H^{(2,1,j)}(0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (П.2.87)$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (Q_p^{(2,1,j-1)}(0,1)\theta_{2,1,j-1} + Q_p^{(2,1,j)}(0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (П.2.88)$$

$$[V_p^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (V_p^{(2,1,j-1)}(0,1)\theta_{2,1,j-1} + V_p^{(2,1,j)}(0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (П.2.89)$$

– «правая вертикальная граница»
($i = N_1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$[M_p^{(2)}]^{(N_1, j)} = \chi_{2, N_1, j} (M_p^{(2, N_1-1, j-1)} (1, 1) \theta_{2, N_1-1, j-1} + M_p^{(2, N_1-1, j)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, j}); \quad (\text{П.2.90})$$

$$[H^{(2)}]^{(N_1, j)} = \chi_{2, N_1, j} (H^{(2, N_1-1, j-1)} (1, 1) \theta_{2, N_1-1, j-1} + H^{(2, N_1-1, j)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, j}); \quad (\text{П.2.91})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(N_1, j)} = \chi_{2, N_1, j} (Q_p^{(2, N_1-1, j-1)} (1, 1) \theta_{2, N_1-1, j-1} + Q_p^{(2, N_1-1, j)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, j}); \quad (\text{П.2.92})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(N_1, j)} = \chi_{2, N_1, j} (V_p^{(2, N_1-1, j-1)} (1, 1) \theta_{2, N_1-1, j-1} + V_p^{(2, N_1-1, j)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, j}); \quad (\text{П.2.93})$$

– «нижняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = 1$)

$$[M_p^{(2)}]^{(i, 1)} = \chi_{2, i, 1} (M_p^{(2, i-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, i-1, 1} + M_p^{(2, i, 1)} (0, 0) \theta_{2, i, 1}); \quad (\text{П.2.94})$$

$$[H^{(2)}]^{(i, 1)} = \chi_{2, i, 1} (H^{(2, i-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, i-1, 1} + H^{(2, i, 1)} (0, 0) \theta_{2, i, 1}); \quad (\text{П.2.95})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(i, 1)} = \chi_{2, i, 1} (Q_p^{(2, i-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, i-1, 1} + Q_p^{(2, i, 1)} (0, 0) \theta_{2, i, 1}); \quad (\text{П.2.96})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(i, 1)} = \chi_{2, i, 1} (V_p^{(2, i-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, i-1, 1} + V_p^{(2, i, 1)} (0, 0) \theta_{2, i, 1}); \quad (\text{П.2.97})$$

– «верхняя горизонтальная граница»
($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = N_2$)

$$[M_p^{(2)}]^{(i, N_2)} = \chi_{2, i, j} (M_p^{(2, i-1, N_2-1)} (1, 1) \theta_{2, i-1, N_2-1} + M_p^{(2, i, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, i, N_2-1}); \quad (\text{П.2.98})$$

$$[H^{(2)}]^{(i, N_2)} = \chi_{2, i, j} (H^{(2, i-1, N_2-1)} (1, 1) \theta_{2, i-1, N_2-1} + H^{(2, i, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, i, N_2-1}); \quad (\text{П.2.99})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(i, N_2)} = \chi_{2, i, j} (Q_p^{(2, i-1, N_2-1)} (1, 1) \theta_{2, i-1, N_2-1} + Q_p^{(2, i, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, i, N_2-1}); \quad (\text{П.2.100})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(i, N_2)} = \chi_{2, i, j} (V_p^{(2, i-1, N_2-1)} (1, 1) \theta_{2, i-1, N_2-1} + V_p^{(2, i, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, i, N_2-1}); \quad (\text{П.2.101})$$

– «угловые узлы границы»
в случае $i = 1; j = 1$ имеем:

$$[M_p^{(2)}]^{(1, 1)} = \chi_{2, 1, 1} M_p^{(2, 1, 1)} (0, 0) \theta_{2, 1, 1}; \quad (\text{П.2.102})$$

$$[H^{(2)}]^{(1, 1)} = \chi_{2, 1, 1} H^{(2, 1, 1)} (0, 0) \theta_{2, 1, 1}; \quad (\text{П.2.103})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(1, 1)} = \chi_{2, 1, 1} Q_p^{(2, 1, 1)} (0, 0) \theta_{2, 1, 1}; \quad (\text{П.2.104})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(1, 1)} = \chi_{2, 1, 1} V_p^{(2, 1, 1)} (0, 0) \theta_{2, 1, 1}; \quad (\text{П.2.105})$$

в случае $i = 1; j = N_2$ имеем:

$$[M_p^{(2)}]^{(1, N_2)} = \chi_{2, 1, N_2} M_p^{(2, 1, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, 1, N_2-1}; \quad (\text{П.2.106})$$

$$[H^{(2)}]^{(1, N_2)} = \chi_{2, 1, N_2} H^{(2, 1, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, 1, N_2-1}; \quad (\text{П.2.107})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(1, N_2)} = \chi_{2, 1, N_2} Q_p^{(2, 1, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, 1, N_2-1}; \quad (\text{П.2.108})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(1, N_2)} = \chi_{2, 1, N_2} V_p^{(2, 1, N_2-1)} (0, 1) \theta_{2, 1, N_2-1}; \quad (\text{П.2.109})$$

в случае $i = N_1; j = 1$ имеем:

$$[M_p^{(2)}]^{(N_1, 1)} = \chi_{2, N_1, 1} M_p^{(2, N_1-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, 1}; \quad (\text{П.2.110})$$

$$[H^{(2)}]^{(N_1, 1)} = \chi_{2, N_1, 1} H^{(2, N_1-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, 1}; \quad (\text{П.2.111})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(N_1, 1)} = \chi_{2, N_1, 1} Q_p^{(2, N_1-1, 1)} (1, 0) \theta_{2, N_1-1, 1}; \quad (\text{П.2.112})$$

Об одном примере расчета тонкой пластины на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

$$[V_p^{(2)}]^{(N_1,1)} = \chi_{2,N_1,1} V_p^{(2,N_1-1,1)}(1,0)\theta_{2,N_1-1,1}; \quad (\text{П.2.113})$$

$$[\partial_1 V_2^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} ([\partial_1 V_2^{(2,1,j-1)}](0,1)\theta_{2,1,j-1} + [\partial_1 V_2^{(2,1,j)}](0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (\text{П.2.121})$$

в случае $i = N_1$; $j = N_2$ имеем:

$$[M_p^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} M_p^{(2,N_1-1,N_2-1)}(1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \quad (\text{П.2.114})$$

$$[H^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} H^{(2,N_1-1,N_2-1)}\theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \quad (\text{П.2.115})$$

$$[Q_p^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} Q_p^{(2,N_1-1,N_2-1)}(1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \quad (\text{П.2.116})$$

$$[V_p^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} V_p^{(2,N_1-1,N_2-1)}(1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}. \quad (\text{П.2.117})$$

Очевидно, в частности, справедливы следующие формулы для определения функций (П.2.57), (П.2.63) в узлах дискретно-континуальной модели:

– внутренние узлы ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(i,j)} &= \\ &= \chi_{2,i,j} ([\partial_1 M_2^{(2,i-1,j-1)}](1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,i,j-1)}](0,1)\theta_{2,i,j-1} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,i-1,j)}](1,0)\theta_{2,i-1,j} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,i,j)}](0,0)\theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.118})$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2)}]^{(i,j)} &= \\ &= \chi_{2,i,j} ([\partial_1 V_2^{(2,i-1,j-1)}](1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + \\ &+ [\partial_1 V_2^{(2,i,j-1)}](0,1)\theta_{2,i,j-1} + \\ &+ [\partial_1 V_2^{(2,i-1,j)}](1,0)\theta_{2,i-1,j} + \\ &+ [\partial_1 V_2^{(2,i,j)}](0,0)\theta_{2,i,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.119})$$

– «левая вертикальная граница» ($i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(1,j)} &= \chi_{2,1,j} ([\partial_1 M_2^{(2,1,j-1)}](0,1)\theta_{2,1,j-1} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,1,j)}](0,0)\theta_{2,1,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.120})$$

– «правая вертикальная граница» ($i = N_1$; $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$)

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(N_1,j)} &= \\ &= \chi_{2,N_1,j} ([\partial_1 M_2^{(2,N_1-1,j-1)}](1,1)\theta_{2,N_1-1,j-1} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,N_1-1,j)}](1,0)\theta_{2,N_1-1,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.122})$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2)}]^{(N_1,j)} &= \\ &= \chi_{2,N_1,j} ([\partial_1 V_2^{(2,N_1-1,j-1)}](1,1)\theta_{2,N_1-1,j-1} + \\ &+ [\partial_1 V_2^{(2,N_1-1,j)}](1,0)\theta_{2,N_1-1,j}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.123})$$

– «нижняя горизонтальная граница» ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = 1$)

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(i,1)} &= \chi_{2,i,1} ([\partial_1 M_2^{(2,i-1,1)}](1,0)\theta_{2,i-1,1} + \\ &+ [\partial_1 M_2^{(2,i,1)}](0,0)\theta_{2,i,1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.124})$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2)}]^{(i,1)} &= \chi_{2,i,1} ([\partial_1 V_2^{(2,i-1,1)}](1,0)\theta_{2,i-1,1} + \\ &+ [\partial_1 V_2^{(2,i,1)}](0,0)\theta_{2,i,1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.125})$$

– «верхняя горизонтальная граница» ($i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$; $j = N_2$)

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(i,N_2)} &= \chi_{2,i,j} (M_2^{(2,i-1,N_2-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,N_2-1} + \\ &+ M_2^{(2,i,N_2-1)}(0,1)\theta_{2,i,N_2-1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.126})$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2)}]^{(i,N_2)} &= \chi_{2,i,j} (V_2^{(2,i-1,N_2-1)}(1,1)\theta_{2,i-1,N_2-1} + \\ &+ V_2^{(2,i,N_2-1)}(0,1)\theta_{2,i,N_2-1}); \end{aligned} \quad (\text{П.2.127})$$

– «угловые узлы границы» в случае $i = 1$; $j = 1$ имеем:

$$[\partial_1 M_2^{(2)}]^{(1,1)} = \chi_{2,1,1} [\partial_1 M_2^{(2,1,1)}](0,0)\theta_{2,1,1}; \quad (\text{П.2.128})$$

$$[\partial_1 V_2^{(2)}]^{(1,1)} = \chi_{2,1,1} [\partial_1 V_2^{(2,1,1)}](0,0)\theta_{2,1,1}; \quad (\text{П.2.129})$$

в случае $i = 1; j = N_2$ имеем:

$$[\partial_1 M_2^{(2)}]^{(1,N_2)} = \chi_{2,1,N_2} [\partial_1 M_2^{(2,1,N_2-1)}](0,1)\theta_{2,1,N_2-1}; \quad (\text{П.2.130})$$

$$[\partial_1 V_2^{(2)}]^{(1,N_2)} = \chi_{2,1,N_2} [\partial_1 V_2^{(2,1,N_2-1)}](0,1)\theta_{2,1,N_2-1}; \quad (\text{П.2.131})$$

в случае $i = N_1; j = 1$ имеем:

$$[\partial_1 M_2^{(2)}]^{(N_1,1)} = \chi_{2,N_1,1} [\partial_1 M_2^{(2,N_1-1,1)}](1,0)\theta_{2,N_1-1,1}; \quad (\text{П.2.132})$$

$$[\partial_1 V_2^{(2)}]^{(N_1,1)} = \chi_{2,N_1,1} [\partial_1 V_2^{(2,N_1-1,1)}](1,0)\theta_{2,N_1-1,1}; \quad (\text{П.2.133})$$

в случае $i = N_1; j = N_2$ имеем:

$$\begin{aligned} [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(N_1,N_2)} &= \\ &= \chi_{2,N_1,N_2} [\partial_1 M_2^{(2,N_1-1,N_2-1)}](1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \end{aligned} \quad (\text{П.2.134})$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 V_2^{(2)}]^{(N_1,N_2)} &= \\ &= \chi_{2,N_1,N_2} [\partial_1 V_2^{(2,N_1-1,N_2-1)}](1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.135})$$

П.1.4. Алгоритм формирования матрицы граничных условий типа «идеальный контакт».

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы B_2^- при задании условий (5.21) описан ниже.

1. Элементы матрицы B_2^- определяются по формуле

$$\begin{aligned} (B_2^+)_{p,q} &= \delta_{p,q}, \\ p &= 1, 2, \dots, 4N_1, \quad q = 1, 2, \dots, 4N_1N_2. \end{aligned} \quad (\text{П.2.136})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^- по формуле (П.2.136) соответствует заданию граничных условий (5.6)-(5.9).

2. Последовательно задаются $i_g = 1, 2, \dots, N_1$.

Для каждого фиксированного значения i_g выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются $j_1 = 1, 2, \dots, N_1$. Для каждого фиксированного значения j_1 выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются $j_2 = 1, 2, \dots, N_2$. Для каждого фиксированного значения j_2 выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно задаются $q = 1, 2, 3, 4$. Для каждого фиксированного значения s выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс j_g

$$j_g = q + 4(j_1 - 1) + 4N_1(j_2 - 1); \quad (\text{П.2.138})$$

2.1.2.1.2. В качестве вектора неизвестных \bar{Y}_2 (см. (4.9)) задается

$$\bar{Y}_2 = \bar{e}_{j_g}. \quad (\text{П.2.139})$$

где элементы $4N_1N_2$ вектора \bar{e}_{j_g} определяются по формуле

$$\{\bar{e}_{j_g}\}_k = \delta_{k,j_g}, \quad k = 1, 2, \dots, 4N_1N_2. \quad (\text{П.2.140})$$

2.1.2.1.3. В соответствии со структурой (4.9) вектора неизвестных по формулам (П.2.82), (П.2.85), (П.2.86), (П.2.89), (П.2.90), (П.2.93), (П.2.94), (П.2.97), (П.2.98), (П.2.101), (П.2.102), (П.2.105), (П.2.106), (П.2.109), (П.2.110), (П.2.113), (П.2.114), (П.2.117)-(П.2.135) определяются приведенные к узлу следующие величины:

$$[M_2^{(2)}]^{(i,j)}, [V_2^{(2)}]^{(i,j)}, [\partial_1 M_2^{(2)}]^{(i,j)}, [\partial_1 V_2^{(1)}]^{(i,j)}.$$

2.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы B_2^+ определяются по формулам

$$(B_2^+)_{4N_1+i_g, j_g} = [M_2^{(1)}]^{(j_1, j_2)}; \quad (\text{П.2.141})$$

$$(B_2^+)_{5N_1+i_g, j_g} = [\partial_1 M_2^{(1)}]^{(j_1, j_2)}; \quad (\text{П.2.142})$$

$$(B_2^+)_{6N_1+i_g, j_g} = [V_2^{(1)}]^{(j_1, j_2)}; \quad (\text{П.2.143})$$

$$(B_2^-)_{7N_1+i_g, j_g} = [\partial_1 V_2^{(1)}]^{(j_1, j_2)}. \quad (\text{П.2.144})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы B_2^+ по формулам (П.2.141)-(П.2.144) соответствует заданию граничных условий (5.10)-(5.13).

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. // Вестник МГСУ, №1, том 1, 2011, с. 11-16.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
3. **Акимов П.А., Сидоров В.Н.** Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 1: Системы первого порядка. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 1, 2011, pp. 39-46.
4. **Акимов П.А., Сидоров В.Н.** Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 2: Системы второго порядка. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 1, 2011, pp. 47-56.
5. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
6. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области: Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов

- тов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
 11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
 12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
 13. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
 14. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
 15. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // *Известия ВУЗов. Строительство*, №10, 2004, с. 8-14.
 16. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials* Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
 17. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
 18. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // *Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings* 1623, 3 (2014).
 19. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
 20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp. 2-7.
 21. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 89-94.
 22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 95-103.
 23. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of

Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, Vol. 91 (2014), pp.14-19.

24. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // Advanced Materials Research Vols. 250-253, 2011, pp. 3652-3655.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

ОБЗОРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАТИВНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ МОНИТОРИНГА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

А.М. Белостоцкий^{1,2,3}, П.А. Акимов^{1,2,3,4}

¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье приводится обзор нормативно-методической литературы в области мониторинга зданий и сооружений, в том числе рассмотрены вопросы развития соответствующего нормативно-методического обеспечения, современное состояние проблемы и указаны требования к организациям, выполняющим проектирование систем мониторинга инженерных сооружений.

Ключевые слова: мониторинг зданий и сооружений, нормативно-методическая литература, обзорно-аналитическое исследование

A REVIEW OF REGULATORY AND METHODOICAL LITERATURE ON STRUCTURAL HEALTH MONITORING

Alexander M. Belostotsky^{1,2,3}, Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StADyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to review of regulatory and methodological literature on structural health monitoring including problems of development of regulatory, state-of-the-art and requirements for organizations performing design of structural health monitoring systems.

Keywords: structural health monitoring, regulatory and methodological literature, review

Само понятие «мониторинг технического состояния зданий» появилось в профессиональной практике уже относительно давно [12]. Более того, в последние годы проблема мониторинга несущих конструкций уникальных зданий на стадиях их строительства и эксплуатации приобретает особое значение, важность которого уже признали проектировщики, строители и специалисты надзорных организаций. Тем не менее, единого мнения и алгоритма ее решения до сих пор не

выработано. Не секрет, хотя это и печально, что сегодня система мониторинга многих уже возведенных уникальных зданий существует лишь на бумаге, утвержденной Государственной Экспертизой (госэкспертизой). В настоящей статье рассматриваются вопросы развития нормативного обеспечения вопросов мониторинга зданий и сооружений в Российской Федерации, анализируется современное состояние вопроса, указываются перспективные направления развития.

1. РАЗВИТИЕ НОРМАТИВНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ МОНИТОРИНГА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

В соответствии с *Московскими городскими строительными нормами МГСН 2.07-97 «Основания, фундаменты и подземные сооружения»* [26] в процессе строительства нового здания и в начальный период эксплуатации существующих ответственных подземных и заглубленных сооружений обязательными являются натурные наблюдения (мониторинг) на строительной площадке, при этом в состав соответствующего проекта необходимо включать раздел «Система мониторинга на площадке», и к составлению этого раздела должны привлекаться *специализированные организации*. Мониторинг *следует проводить по специально разработанному проекту или программе*.

В 1998 году в рамках развития [26], а также других нормативных документов, по поручению Москомархитектуры (Правительство Москвы), были разработаны *Рекомендации по обследованию и мониторингу технического состояния эксплуатируемых зданий, расположенных вблизи нового строительства или реконструкции* [32]. Появление указанных рекомендаций было обусловлено актуальностью соответствующей проблематики для крупнейшего российского мегаполиса. Как показывает опыт, пренебрежение особыми условиями соответствующего строительства может приводить, например, к появлению в стенах ранее построенных зданий трещин, перекосов проемов и лестничных маршей, к сдвигу плит перекрытий, разрушению строительных конструкций, т.е., по существу, к нарушению нормальной эксплуатации зданий, а иногда даже к авариям. Опасность возникновения подобных явлений существенно возрастает в условиях плотной окружающей застройки и наличия сложных и неблагоприятных инженерно-геологических условий вследствие развития целого ряда негативных природных и техногенных процессов (здесь, в частности, име-

ются в виду эрозии, оползни, карстово-суффозионные явления, оседания земной поверхности, изменение гидрогеологических условий и связанное с ним подтопление или осушение застроенных территорий). Все перечисленное приводит к увеличению риска возникновения чрезвычайных ситуаций.

При намечаемом новом строительстве на застроенной территории должен быть решен вопрос об обследовании этих зданий в зоне влияния нового строительства. Поясняется [32], что рядом расположенным зданием считается существующее здание, находящееся в зоне влияния осадок фундаментов нового здания или в зоне влияния производства работ по строительству нового здания на деформации основания и конструкций существующего (зона влияния определяется в процессе проектирования).

В [32] отмечается необходимость комплексного мониторинга состояния окружающей среды на стадиях инженерно-геологических и экологических изысканий, строительства и эксплуатации зданий и сооружений.

Мониторинг эксплуатируемых зданий – это комплексная система, предназначенная для обеспечения надежности зданий и сооружений, находящихся в зоне влияния вновь строящихся объектов, и сохранения окружающей среды [32].

Цель мониторинга – оценка воздействия нового строительства или реконструкции на окружающие здания и сооружения, на атмосферную, геологическую и гидрогеологическую среду в период строительства и последующие годы эксплуатации, разработка прогноза изменений их состояния, своевременное выявление дефектов, предупреждение и устранение негативных процессов, уточнение результатов прогноза и актуализация (корректировка) проектных решений.

Задачи мониторинга – разработка решений по обеспечению сохранности и надежности эксплуатации существующих зданий и сооружений, недопущению негативных изменений окружающей среды, предупреждению и устранению дефектов конструкций, а так-

же осуществление контроля за выполнением принятых решений.

В процессе мониторинга должен рассматриваться весь комплекс статических, динамических и техногенных воздействий, приводящих к качественному и количественному изменению характеристик состояния эксплуатируемых зданий и сооружений под воздействием нового строительства или реконструкции, их пригодность к эксплуатации. В случае необходимости должны разрабатываться также конструктивные или другие меры защиты для обеспечения их эксплуатационной надежности [32].

Мониторинг является составной частью работ научно-технического сопровождения нового строительства или реконструкции объекта, которые должна осуществлять по техническому заданию заказчика *специализированная организация, занимающаяся вопросами геотехнических исследований, разработки проектных решений и технологии выполнения работ* [32].

По функциональному назначению мониторинг, следуя [32], включает следующие подразделы:

- *объектный*, включающий все виды наблюдений за состоянием оснований, фундаментов и несущих конструкций самого объекта нового строительства или реконструкции, окружающих его зданий и подземных сооружений, а также объектов инфраструктуры;
- *геолого-гидрологический*, включающий системы режимных наблюдений за изменением состояния грунтов, уровней и состава подземных вод и за развитием деструктивных процессов (эрозии, оползней, карстово-суффозионных явлений, оседания земной поверхности и др., а также за состоянием температурного, электрического и других физических полей);
- *эколого-биологический*, включающий системы наблюдений за изменением окружающей природной среды, радиационной обстановки и др.;

- *аналитический*, включающий анализ и оценку результатов наблюдений, выполнение расчетных прогнозов, сравнение прогнозируемых величин параметров с результатами измерений, разработку мероприятий по предупреждению или устранению негативных последствий вредных воздействий и недопущению увеличения интенсивности этих воздействий.

Дополнительно мониторинг включает следующие мероприятия [32]:

- разработка требований к объему и составу дополнительных инженерно-геологических изысканий, необходимых для выполнения расчетных прогнозов;
- разработка требований к техническому состоянию зданий и сооружений;
- разработка требований по величинам допустимых предельных и неравномерных деформаций зданий и сооружений;
- расчет действующих величин нагрузок на фундаменты, расчет фактического давления на грунт по подошве фундамента и сравнение его с расчетным сопротивлением грунта основания по [26,35];
- расчет нагрузок на свайные фундаменты по [26,33,36];
- сбор и анализ технических данных по конструкциям подземной и надземной частей зданий и сооружений;
- анализ проекта или технической документации по усилению оснований и фундаментов существующей застройки.

Методы и технические средства мониторинга назначаются в зависимости от уровня ответственности существующих сооружений, их конструктивных особенностей, способов возведения новых объектов, геологических и гидрогеологических условий площадки, плотности существующей застройки, эксплуатационных требований к сооружениям в соответствии с результатами геотехнического прогноза.

Осуществление мониторинга включает несколько этапов [32]:

- теоретические расчеты возможных деформаций грунтов оснований и фундаментов вновь строящегося объекта;
- оценка влияния нового строительства и производства работ на существующие здания и сооружения;
- разработка системы наблюдений для проверки в натуре действительного воздействия нового строительства на существующие здания и сооружения;
- установка приборов в натуре;
- осуществление мониторинга в ходе строительства, в первый и последующие годы эксплуатации до стабилизации процессов в основании.

В соответствии с [32] *мониторинг целесообразно осуществлять с использованием комплексной автоматизированной программы*, позволяющей оперативно выявлять все возникающие отклонения, устанавливать необходимые взаимосвязи и регулировать весь процесс в целом.

Общие требования к мониторингу [35]:

- при выборе системы наблюдений необходимо учитывать величины расчетных прогнозов скорости протекания процессов и их изменение во времени, продолжительность измерений, ошибки измерений за счет изменения погодных условий, а также влияния аномалий геофизических, температурных, электрических и других полей;
- точность систем наблюдений и методов контроля должны обеспечивать достоверность получаемой информации, результатов измерений и согласованность их с расчетными прогнозами, а также соответствовать требованиям к увязке между собой данных отдельных систем наблюдений в пространстве и во времени;
- при проведении длительных мониторинговых наблюдений необходимо обеспечивать при изменении внешних условий стабильность параметров измерительных устройств;
- используемые для наблюдений приборы и оборудование должны быть сертифициро-

ваны или проверены и аттестованы в соответствии с установленным порядком;

- выбор точек измерений необходимо производить согласно рекомендациям [14], причем на участках с наибольшей интенсивностью изменения наблюдаемых величин количество точек измерения должно быть увеличено, а частота наблюдений должна быть согласована со скоростью наблюдаемых процессов.

В результате проведения мониторинга должны быть определены условия, обеспечивающие выполнение основных эксплуатационных требований к объекту и окружающей среде в соответствии с [35,36,37,39-41]. Схема технологического процесса проведения операций мониторинга приведена на рис. 1 [32].

На стадии проектирования должны быть определены основные эксплуатационные требования к объектам, прогноз расчетных величин деформаций и усилий, программа наблюдений, а также разработаны системы наблюдений. На стадии строительства или реконструкции выполняются установка систем наблюдений и производство наблюдений.

При производстве наблюдений осуществляется сравнение расчетных и наблюдаемых величин деформаций и усилий и оценка принятых критериев выполнения эксплуатационных требований на основе результатов сравнения. В необходимых случаях производится корректировка критериев выполнения эксплуатационных требований, а также разработка дополнительных мероприятий по обеспечению эксплуатационной надежности расположенных вблизи строящегося или реконструируемого объекта зданий и сооружений. После выполнения дополнительных мероприятий производится проверка выполнения эксплуатационных требований за период наблюдений.

Вступление в действие **Федерального закона от 27.12.2002 №184-ФЗ «О техническом регулировании»** [46] привело к фактической отмене действовавших нормативных документов в области строительства, которые стали носить рекомендательный характер.

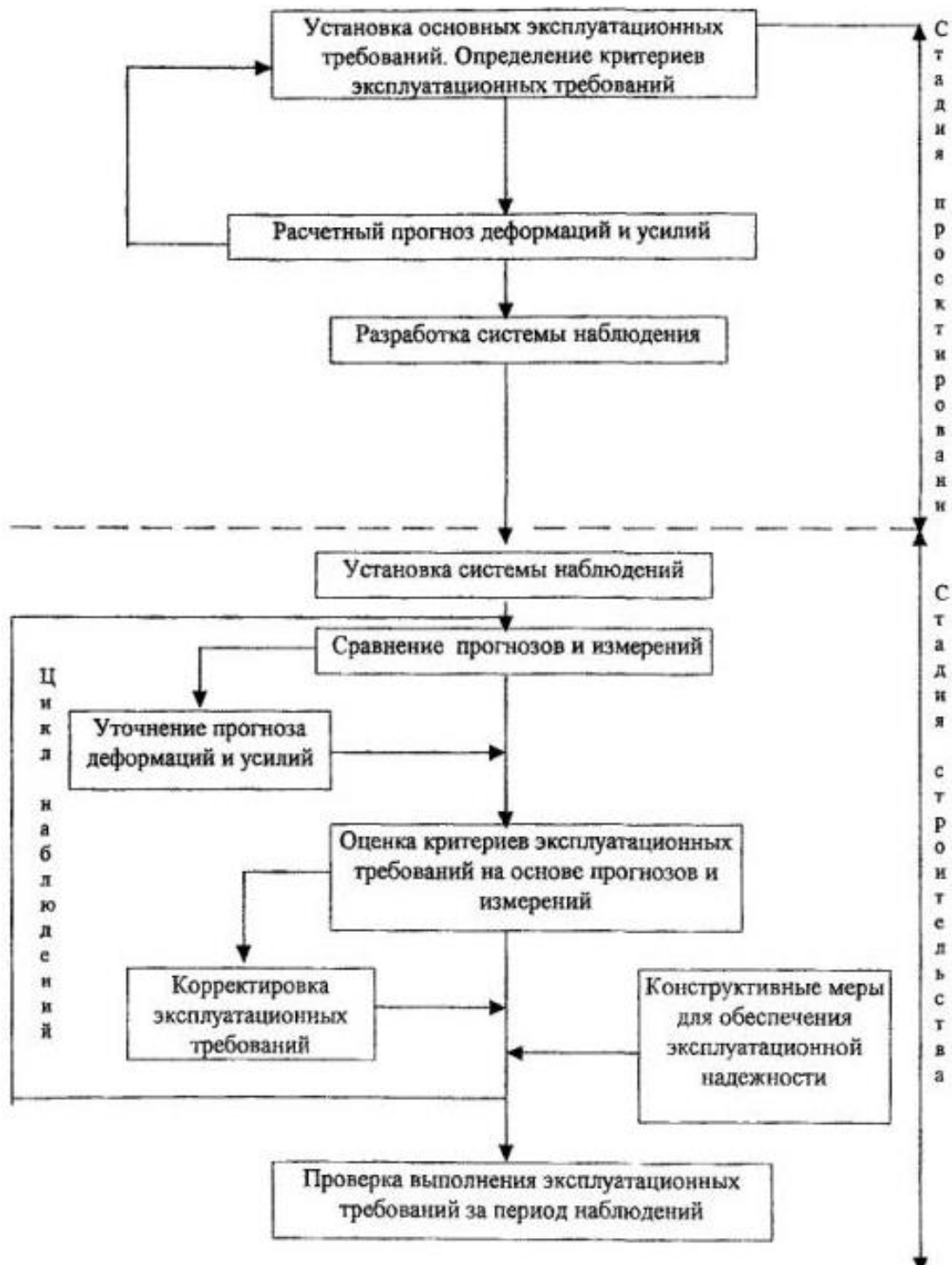


Рисунок 1. Схема технологического процесса проведения операций мониторинга [32].

Порядок обследования и мониторинга технического состояния зданий и сооружений в г. Москве был также регламентирован *Московскими городскими строительными нормами МГСН 2.10-04. «Предпроектные комплексные обследования и мониторинг*

зданий и сооружений для восстановления, реконструкции и капитального ремонта» [27]. Данные нормы не только регламентируют, в частности, порядок, объемы и качество работ по мониторингу технического состояния зданий и сооружений, но и опреде-

ляют форму представления соответствующих заключений и перечень соответствующих приложений, обосновывающих выводы заключений.

Нормы [27], разработанные для Москвы, распространяются, в том числе, на проведение перечисленных ниже работ (и не распространяются на виды мониторинга технического состояния, отличные от нижеперечисленных):

1. *Работы по общему мониторингу технического состояния зданий и сооружений города* для выявления объектов, изменивших свое напряженно-деформированное состояние (НДС) и требующих обследования технического состояния. Здесь, как правило, не проводят обследования технического состояния зданий и сооружений в полном объеме, а выполняют лишь визуальный осмотр конструкций с целью приблизительной оценки категории технического состояния, измеряют динамические параметры этих зданий и сооружений и составляют паспорт здания или сооружения [27].

2. *Работы по мониторингу технического состояния зданий и сооружений, попадающих в зону влияния строек и природно-техногенных воздействий*, для обеспечения безопасной эксплуатации этих объектов, при этом такой мониторинг планируется заранее до начала строительства или ожидаемого природно-техногенного воздействия. Реализация целей мониторинга здесь осуществляется за счет:

- определения абсолютных и относительных величин деформаций конструкций зданий и сооружений и сравнения их с расчетными и допустимыми значениями;
- выявления причин возникновения и степени опасности деформаций для нормальной эксплуатации объектов;
- принятию своевременных мер по борьбе с возникающими деформациями или по устранению их последствий;
- уточнения расчетных данных и физико-механических характеристик грунтов;

- уточнения расчетных схем для различных типов зданий, сооружений и коммуникаций;
- установления эффективности принимаемых профилактических и защитных мероприятий;
- уточнения закономерностей процесса сдвижения грунтовых пород и зависимостей его параметров от основных влияющих факторов.

3. *Работы по мониторингу технического состояния зданий и сооружений, находящихся в ограниченно работоспособном или аварийном состоянии*, для оценки их текущего технического состояния и проведения мероприятий по устранению аварийного состояния. Здесь контролируют процессы, протекающие в конструкциях объектов и грунте, до и во время их восстановления или усиления, при этом на каждой стадии такого мониторинга:

- определяют текущие динамические параметры объекта и сравнивают их с аналогичными, измеренными на предыдущем этапе;
- фиксируют степень изменения ранее выявленных дефектов и повреждений конструкций объекта и выявляют вновь появившиеся дефекты и повреждения;
- производят повторные, необходимые измерения деформаций, наклонов, прогибов и т.п. и сравнивают их с полученными на предыдущем этапе аналогичными величинами;
- анализируют полученную на этапе информацию и делают заключение о текущем техническом состоянии объекта.

4. *Работы по мониторингу технического состояния особых, в том числе высотных, зданий и сооружений* для контроля состояния несущих конструкций и предотвращения катастроф, связанных с их обрушением. Состав работ по данному виду мониторинга применительно к несущим конструкциям регламентируется индивидуальными программами проведения измерений и анализа состояния несущих конструкций в зависимости

от технического решения здания или сооружения, его деформационного состояния, ответственности и уникальности. Используются специальные методы раннего выявления и локализации мест изменения НДС конструкций с последующим традиционным обследованием технического состояния выявленных опасных участков конструкций.

Следует отметить, что в эксплуатируемом многофункциональном высотном здании [20] доступ к большей части несущих конструкций, как правило, существенно ограничен. В этой связи, очевидно, возникают определенные трудности контроля соответствующих конструкций с помощью традиционных методов визуального и инструментального исследований (по существу, эти методы [11,18,30] оказываются экономически мало пригодными в силу их чрезмерной трудоемкости и высокой стоимости выполнения большого объема обследований). Кроме того, если в зданиях меньшей этажности деформирование несущих конструкций обусловлено в основном неравномерностью просадок различных частей здания, то в высотных существенное влияние на НДС несущих конструкций оказывают наклоны и ветровые нагрузки, что создает большую рассеянность мест накопления деформационных повреждений в этих конструкциях [45].

Для осуществления контроля и ранней диагностики технического состояния несущих конструкций особого здания или сооружения предусматривается обязательная установка стационарной станции мониторинга технического состояния, которая должна обеспечивать в автоматизированном режиме (при проведении периодических измерений) выявление изменения НДС конструкций с локализацией их опасных участков и определение уровня наклонов здания или сооружения [27].

Периодичность измерений на стационарной станции мониторинга технического состояния определяется службой эксплуатации в зависимости от состояния конкретного объекта (срока эксплуатации, отступлений от

первоначального проекта, реальной ситуации на объекте, состояния и уровня внешних воздействий и т.д.), но не должна быть реже раза в год [27].

После выявления мест изменения НДС конструкций осуществляют обследования с помощью традиционных методов этих частей и по их результатам делают выводы о техническом состоянии конструкций, причинах изменения их НДС и необходимости принятия каких либо мер по восстановлению или усилению конструкций [27].

В качестве дополнительного элемента контроля аварийных ситуаций несущих конструкций особых зданий или сооружений, в основном связанных с динамическими перенапряжениями элементов несущих конструкций, устанавливаются датчики, настроенные на предельные значения деформаций и наклонов, подающие необходимые сигналы в диспетчерскую службу эксплуатации объекта и систему ГОЧС Москвы [27].

В [27] используются перечисленные ниже определения использовавшихся выше понятий. *Мониторинг технического состояния зданий и сооружений, попадающих в зону влияния строек и природно-техногенных воздействий* – система наблюдения и контроля, проводимая по определенной программе на объектах, попадающих в зону влияния строек и природно-техногенных воздействий, для контроля их технического состояния и своевременного принятия мер по устранению возникающих негативных факторов, ведущих к ухудшению этого состояния.

Мониторинг технического состояния зданий и сооружений, находящихся в ограниченно работоспособном или аварийном состоянии – система наблюдения и контроля, проводимая по определенной программе для отслеживания степени и скорости изменения технического состояния объекта и принятия, в случае необходимости, экстренных мер по предотвращению его обрушения, действующая до момента приведения объекта в работоспособное техническое состояние.

Мониторинг технического состояния особых зданий и сооружений – система наблюдения и контроля, проводимая по определенной программе для обеспечения их безопасного функционирования за счет своевременного обнаружения на ранней стадии негативного изменения НДС конструкций и грунтов оснований, которые могут повлечь переход объектов в ограниченно работоспособное или в аварийное состояние.

Отмечено [27], что *мониторинг технического состояния зданий и сооружений должен производиться специализированными организациями*, оснащенными современной приборной базой и имеющими в своем составе высококвалифицированных и опытных специалистов.

В результате проведения каждого этапа мониторинга должна быть получена информация достаточная для обоснованного заключения о текущем техническом состоянии здания или сооружения и выдачи краткосрочного прогноза о его состоянии на ближайший период. Первоначальным этапом всех видов мониторинга технического состояния зданий и сооружений (за исключением общего мониторинга технического состояния зданий и сооружений города) является обследование технического состояния этих зданий и сооружений (на этом этапе устанавливают категории технического состояния зданий и сооружений, фиксируют дефекты конструкций, за изменением состояния которых, а также возникновением новых дефектов и осуществляют наблюдения при мониторинге).

В *Московских городских строительных нормах МГСН 4.19-05 «Временные нормы и правила проектирования многофункциональных высотных зданий и зданий-комплексов»* [28], разработанном в соответствии с городской программой высотного строительства «Новое кольцо Москвы», были установлены нормы проектирования, экспертизы и разработки технических условий на отдельно стоящие или находящиеся в составе многофункциональных комплексов

здания высотой от 75 до 400 метров. Кроме в [28] был впервые предусмотрен и предложен ряд технических решений, направленных на организацию обязательной постоянной станции мониторинга деформационного состояния несущих конструкций высотных зданий. Зафиксированные изменения параметров деформационного состояния несущих конструкций объекта или отклонения его от вертикали на величину, превышающую установленный допуск, автоматически передаются в центр управления. Возрождение практики высотного строительства в Москве сопровождалось также принятием нормативных требований оснащения зданий датчиками инструментального контроля колебаний сейсмометрами [19].

Следует отметить, что с появлением [28] организация мониторинга стала обязательным этапом в высотном домостроении, а разработанные нормы в целом имели обязательный характер для применения организациями, частными лицами и объединениями.

В условиях, когда города и тем более мегаполисы начали переживать так называемый «строительный бум», а увеличение этажности зданий стало общемировой тенденцией, в Санкт-Петербурге появился документ *Территориальные строительные нормы: ТСН 31-332-2006 «Жилые и общественные высотные здания»* [42], регламентирующий проектирование высотных жилых и общественных зданий высотой до 150 метров (жилые здания высотой более 75 метров, общественные здания – более 50 метров), а также комплексов таких зданий, возводимых на территории г. Санкт-Петербурга. Данные нормы разработаны с учетом соответствующей нормативной литературы для г. Москвы, в частности [28]. В [42] отмечено, что при проектировании, строительстве и эксплуатации высотных зданий должны проводиться научно-техническое сопровождение, геотехнический мониторинг в том числе в части наблюдения за осадками строящегося здания и окружающей застройки, опасными инженерно-геологическими процессами с опреде-

лением предельных значений допускаемых перемещений) и мониторинг состояния основных несущих конструкций (во время строительства и эксплуатации). Также подчеркивается необходимость создания стационарных станций мониторинга деформационного состояния несущих конструкций высотных зданий, приводятся требования к точности средств измерения, причем сами соответствующие приборы и программы мониторинга назначаются для каждого здания индивидуально.

Оборудование стационарной станции мониторинга деформационного состояния несущих конструкций высотного здания должно предусматривать выявление мест накопления повреждений за счет анализа передаточных функций для различных частей здания и измерения наклонов здания.

Согласно [42], в рамках соответствующего проектного решения необходимо обеспечить оборудование мест установки измерительных пунктов станции для размещения приборов, измеряющих колебания конструкций (размером 500x500x500 миллиметров) на несущих конструкциях здания через каждые 5 этажей, начиная с нижнего подземного этажа, вблизи:

- центральной вертикальной оси здания, если оно имеет простую, симметричную форму в плане (параллелепипед, призма, цилиндр, конус);
- центральных вертикальных осей частей здания, на которое оно может быть подразделено, если имеет сложную форму в плане (в этом случае измерительные пункты должны располагаться на одном уровне по вертикали для всех частей здания, в связи с этим допускается уменьшение количества этажей между измерительными пунктами).

Отдельно должны быть оборудованы измерительные пункты станции для установки приборов, измеряющих наклоны здания. Эти пункты устанавливаются на самом нижнем подземном этаже здания в пяти точках для простых симметричных зданий (параллеле-

пипед, призма, цилиндр, пирамида, конус) и в пяти точках для каждой части сложного в плане здания [42].

Измерительные пункты станции для установки приборов, фиксирующих наклоны здания, располагаются симметрично по отношению к вертикальной оси здания на максимальном удалении от нее, но не ближе 2 метров от наружных стен, вдоль продольной и поперечной осей здания. Один измерительный пункт оборудуется в центре плана здания на пересечении его горизонтальных осей. Таким образом, вдоль каждой горизонтальной оси здания располагается три измерительных пункта.

Мониторинг осадочных явлений зданий должен проводиться снаружи здания не реже одного раза в год в течение 5 лет. Осадочные знаки (марки) размещаются по периметру здания с шагом 6-7 метров. Допустимые погрешности измерений составляют: для вертикальных перемещений – 1 миллиметр; для горизонтальных перемещений – 2 миллиметра; для кренов – $0.000055H$ (где H – высота зданий). Крены здания фиксируются по взаимно перпендикулярных направлениях.

В Технических рекомендациях *ТР 182-08 «Технические рекомендации по научно-техническому сопровождению и мониторингу строительства большепролетных, высотных и других уникальных зданий и сооружений»* [44] рассмотрена методология научно-технического сопровождения строительства (НТСС) и мониторинга особо ответственных конструкций, узлов, соединений при возведении уникальных объектов. Для этого предложен перечень процедур, направленных на организацию надлежащего качества работ на основе использования передовых технологий производства мониторинга для отслеживания технического состояния конструкций и их возможных деформаций. В числе приведенных в [44] терминов и определений следует отметить, перечисленные ниже.

Научно-техническое сопровождение строительства (НТСС) – комплекс работ научно-

методического, экспертно-контрольного, информационно-аналитического и организационно-правового характера, выполняемых для обеспечения качества и безопасности при строительстве и последующей эксплуатации зданий и сооружений.

Мониторинг в ходе строительства – систематическое и (или) периодическое слежение (наблюдение) за процессом строительства, деформациями конструкций или частей здания и объекта в целом, а также за состоянием грунтов, оснований и окружающей застройки в зоне строительства, своевременная фиксация и оценка отступлений от проекта, нормативных документов, прогнозирование взаимного влияния объекта и окружающей среды в будущем, обеспечение адекватной обратной связи для своевременного выявления фактических изменений, предупреждения негативных процессов и устранения их последствий.

Автоматизированная система (станция) мониторинга технического состояния несущих конструкций – совокупность технических и программных средств, связанных между собой проводными или беспроводными линиями связи, и позволяющая в режиме реального времени осуществлять сбор и обработку информации о различных параметрах строительных конструкций (геодезические, динамические, деформационные и др.) для оценки технического состояния объектов.

Математическая (компьютерная) модель зданий и сооружений – представление зданий и сооружений в виде конечноэлементной схемы для проведения численных расчетов для решения комплекса задач, возникающих при проектировании, строительстве и реконструкции зданий и сооружений, в том числе для определения рациональной структуры автоматизированной системы мониторинга и объективного анализа результатов.

В числе основных работ при проведении мониторинга указаны в том числе рассмотренные ниже [44].

1. *Геотехнический мониторинг*. Цели геотехнического мониторинга: своевременное

выявление и контроль над развитием отклонений в поведении грунтов основания, конструктивных элементов ограждений (креплений) котлована; контроль над состоянием конструкций строящегося здания и конструкций зданий, расположенных в зоне влияния нового строительства; корректировка или разработка специальных проектных решений при обнаружении отклонений от проекта, обеспечивающих сохранность природы и среды жизнедеятельности в период строительства и после его завершения.

Система геотехнического мониторинга за строительством объекта и прилегающего к нему подземного пространства, а также за зданиями и сооружениями, окружающими строительную площадку, разрабатывается в проекте строительства и должна включать несколько локальных подсистем наблюдений, частично контролируемых друг друга: визуальные наблюдения; геодезические инструментальные наблюдения; геофизические инструментальные наблюдения; инженерно-геологические исследования; наблюдения за изменением гидрогеологического режима подземных вод; наблюдения за состоянием окружающей среды. Для каждой локальной подсистемы создается рабочая программа, в которой отражается объем и состав работ с обоснованием перечня измеряемых параметров. Геотехнический мониторинг должен быть увязан с системами мониторинга строящихся подземных и надземных конструкций.

2. Систематическое наблюдение за техническим состоянием и деформациями здания в процессе строительства. Составление прогноза осадок и кренов фундаментов.

3. *Мониторинг несущих конструкций*, т.е. мониторинг особо ответственных конструкций, в том числе, измерение деформаций в процессе раскручивания или снятия опор большепролетных конструкций, наблюдение за общими деформациями здания и отдельных элементов и за трещинами, образовавшимися в процессе строительства [22].

Мониторинг несущих конструкций зданий и сооружений в процессе строительства ведет-

ся в соответствии с программой, разрабатываемой до начала строительных работ, организацией, проводящей мониторинг совместно с проектировщиком и при участии организации, осуществляющей НТСС.

В программе мониторинга должны быть указаны:

- наиболее ответственные конструкции, узлы и соединения, подлежащие мониторингу;
- параметры, требующие контроля и их расчетные (контрольные) значения, определяемые на основании нормативных документов, проекта и результатов математического (компьютерного) моделирования с использованием сертифицированных программных средств;
- состав работ и выбор системы наблюдения, методов и объемов контрольных операций;
- состав и описание оборудования и программного обеспечения для проведения работ.

В [44] также отмечено, что при выборе системы наблюдений необходимо учитывать цель мониторинга, а также скорость протекания процессов в конструкциях и их изменение во времени, продолжительность измерений, ошибки измерений, в том числе при изменении погодных условий, а также влияние помех и аномалий природно-техногенного характера.

К наиболее ответственным узлам и конструкциям относятся [44]:

- узлы и конструкции, выполняющие основную несущую функцию в здании или сооружении;
- узлы и конструкции, деформации или разрушение которых могут привести к прогрессирующему разрушению других узлов и конструкций здания (сооружения);
- конструкции или их элементы, деформации или разрушение которых могут привести к снижению безопасности здания и находящихся в нем людей;

- несущие опорные конструкции, воспринимающие вертикальные и горизонтальные нагрузки, и обеспечивающие изгибную, пространственную жесткость и устойчивость сооружения;
- в большепролетных зданиях – несущие конструкции, перекрывающие главные пролеты и опорные конструкции, несущие нагрузку от покрытий (перекрытий) здания.

Для мониторинга несущих конструкций во время строительства разрабатывается математическая (компьютерная) модель здания или сооружения с использованием сертифицированных программных средств для объективного анализа результатов и сравнения контролируемых параметров (передаточная функция, частоты, деформации, давление, крены и др.) с расчетными. В последующем эту математическую модель использует для анализа результатов мониторинга технического состояния несущих конструкций в период эксплуатации.

Если мониторинг зданий и сооружений проводят не с начала строительства, то в этом случае первоначальным этапом работы является обследование конструкций. На этом этапе устанавливают категории технического состояния конструкций зданий и сооружений, фиксируют дефекты, ведут наблюдения за изменением состояния конструкций и возникновением новых дефектов.

Состав мониторинга наиболее ответственных конструкций характеризуется в том числе следующими аспектами [44]:

- мониторинг контролирует и на ранней стадии обнаруживает опасные изменения НДС конструкций и оснований, которое может привести к ограничению работоспособности или аварии объекта, а полученные данные используются для разработки мероприятий по устранению негативных явлений, протекающих в конструкциях и грунте;
- состав работ по мониторингу технического состояния несущих конструкций зданий и сооружений определяется ин-

дивидуальными программами проведения измерений и анализа состояния несущих конструкций в зависимости от конструктивного решения объекта, его НДС, ответственности и уникальности;

- средства контроля устанавливаются в процессе возведения объекта в соответствии с заранее разработанным проектом автоматизированной стационарной системы (станции) мониторинга; в последующем автоматизированную станцию используют для мониторинга в период эксплуатации, причем для раннего выявления дефектов применяют специальные методы и средства контроля, для чего их устанавливают или в процессе возведения конструкций или после его завершения в зависимости от принятого метода слежения;
- в процессе строительства ведется наблюдение за состоянием несущих и ограждающих конструкций, фиксируется появление трещин, их направление, протяженность и величина раскрытия; на трещинах устанавливают маяки, результаты наблюдений систематически фиксируют;
- для ранней диагностики технического состояния и локализации мест изменения НДС в наиболее ответственных узлах конструкций объектов предусматривается геодезический контроль над осадками и кренами фундаментов и углов здания, прогибами фундаментных плит, большепролетных конструкций, над характером раскрытия трещин; интегральная оценка состояния конструкций производится путем динамических или статических испытаний; контроль за НДС конструкций может быть автоматизированным;
- динамические перенапряжения в несущих конструкциях фиксируются дополнительными датчиками, настроенными на предельные значения деформаций и наклонов.

Автоматизированная стационарная система мониторинга технического (деформационного) состояния несущих конструкций (далее СМДС) должна быть разработана на этапе проектирования уникального здания или сооружения, установлена во время его строительства и использоваться в период эксплуатации, причем соответствующий раздел проекта по СМДС должен содержать в текстовой части:

- основные сведения об объекте и наиболее ответственных узлах и конструкциях;
- основные сведения о нагрузках, воздействиях на объект и сведения о вероятных сценариях отказа объекта;
- результаты математического моделирования и инженерных расчетов вероятных сценариев отказа и параметров контроля НДС объекта;
- обоснование и перечень контролируемых параметров НДС несущих конструкций;
- описание состава и технических характеристик аппаратного и программного обеспечения;
- описание архитектуры построения системы, программного обеспечения и способов интеграции с другими автоматизированными системами объекта;
- описание алгоритма и критериев принятия управленческих решений по выбору сценариев реагирования; форма заключения по результатам мониторинга; сценарии реагирования, в том числе регламент взаимодействия со специализированными организациями, выполняющими инструментальное обследование отдельных элементов конструкций;
- обоснование затрат на создание автоматизированной системы мониторинга.

Кроме того, соответствующий раздел проекта по СМДС должен содержать в графической части:

- планы и разрезы, содержащие расположение точек замеров;
- графические результаты математического моделирования и инженерных расчетов

тов вероятных сценариев отказа и параметров контроля НДС объекта;

- графические материалы, описывающие работу программного обеспечения, архитектуру построения и принципы работы системы;
- иные графические материалы, выполняемые, если есть указание в задании на проектирование.

СМДС должна иметь следующую структуру:

- первичные датчики и оборудование;
- система сбора, управления и первичной обработки данных;
- математическая (компьютерная) модель объекта для комплексных инженерных расчетов определения вероятных сценариев отказов и параметров контроля НДС строительных конструкций объекта;
- комплекс специального программного обеспечения по обработке данных и отображению результатов мониторинга, оценке технического состояния (устойчивости, сейсмостойкости, остаточного ресурса и долговечности) и определению управляющих решений и рекомендаций по эффективной эксплуатации.

Первичные датчики и оборудование в зависимости от конкретной схемы системы мониторинга должны фиксировать следующие показатели:

- колебания строительных конструкций;
- измерения наклонов, прогибов и кренов строительных конструкций;
- измерения неравномерной и абсолютной осадки оснований зданий и сооружений;
- геометрические параметры здания с использованием автоматизированной высокоточной геодезической аппаратуры;
- деформации строительных конструкций (фундаментная плита, колонны, перекрытия, несущие стены);
- температурно-влажностный режим.

Система сбора, управления и первичной обработки данных должна обеспечивать централизованное управление, получение и обработку данных измерений по каналам проводной или беспроводной связи, хранение

результатов измерений, проверку работоспособности и калибровку первичных датчиков и оборудования.

Математическая (компьютерная) модель объекта должна быть разработана для объективного анализа результатов мониторинга деформационного состояния несущих конструкций, для проведения инженерных расчетов по оценке возникновения и развития дефектов в строительных конструкциях, в том числе и в различных кризисных ситуациях.

Математическая модель объекта мониторинга должна быть разработана независимо от разрабатываемой конструкторами расчетной модели объекта, другим программным комплексом и в ходе строительства уточняться при получении показаний датчиков системы мониторинга. Математическая модель объекта мониторинга (после всех уточнений) должна максимально соответствовать построенному объекту. Математическая модель используется на этапе строительства и эксплуатации для анализа результатов мониторинга, оценки и прогноза развития дефектов.

Комплекс специального программного обеспечения по обработке данных и отображению результатов мониторинга, оценке технического состояния (устойчивости, сейсмостойкости, остаточного ресурса и долговечности) и определению управляющих решений и рекомендаций по эффективной эксплуатации должен состоять из двух модулей:

- программный модуль (спецпроцессор) по интегрированной обработке разнородных измерений для определения технического состояния несущих конструкций, алгоритм работы которого должен быть основан на критериях сравнения измеренных значений с допустимыми, установленными специалистами применительно к зданию на начальной стадии эксплуатации системы мониторинга (после ввода объекта в эксплуатацию), причем в спецпроцессор должны быть заложены критерии для определения технического состояния несущих конструкций;

- программный модуль на базе современных геоинформационных систем для управления системой мониторинга, регулярной проверки работоспособности элементов системы мониторинга, прогноза и формирования перечня факторов, угрожающих безопасности объекта, анализа результатов мониторинга и формирования отчетных материалов для эксплуатационной службы объекта; программный комплекс должен обеспечивать возможность отображения на трехмерной модели объекта мест и динамики развития дефектов (в том числе и скрытых) и внешних факторов (например, зон образования карстовых явлений под фундаментом здания); программный комплекс должен быть открыт для интеграции с системами диспетчеризации и управления инженерным оборудованием для передачи в систему диспетчеризации информации об ухудшении технического состояния объекта.

4. Мониторинг состояния фасадных конструкций.

К фасадам высотных и уникальных зданий предъявляются особые требования по безопасности (в том числе в части пожарной безопасности) и надежности их эксплуатации. Фасадные конструкции испытывают значительные нагрузки (помимо собственного веса) от воздействия ветра, перепада температур, других климатических факторов. При мониторинге контролируется монтаж и состояние конструкций фасадов для обнаружения на ранней стадии дефектов, которые могут вызвать аварийную ситуацию.

В документе *Методическая документация в строительстве МДС 13-24.2010 «Рекомендации по правилам геотехнического сопровождения высотного строительства и прилегающего пространства»* [25] определяет процесс геотехнического сопровождения высотного строительства, как комплекс геологических, геодезических, экологических и других видов инженерных изысканий, при этом часть, посвященная произ-

водству инженерно-геодезического мониторинга, разработана с учетом документа *Методическая документация в строительстве МДС 13-22.2009 «Методика геодезического мониторинга технического состояния высотных и уникальных зданий и сооружений»* [24], учитывающего опыт уникального строительства в Москве. Согласно документу, геодезический мониторинг высотных строений должен фиксировать следующие виды деформаций [12]:

- деформации основания и фундаментов объекта (абсолютная осадка; средняя осадка; неравномерная осадка; относительная неравномерная осадка; крен фундамента; относительный прогиб; горизонтальные смещения (сдвиг));
- деформации надземной части объекта (отклонение от вертикали здания или отдельных строительных конструкций; сжатие или усадка колонн и бетонных конструкций; раскрытие трещин, динамика их развития).

Важным фактором является также отдельное наблюдение за деформациями для каждой части системы «фундамент – надземная часть», так как они подвергаются воздействию разных природных и техногенных факторов.

ГОСТ Р 53778-2010 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния» [17] был предназначен для применения в строительстве: при проведении обследований и мониторинга технического состояния зданий и сооружений, при разработке заданий на проектирование, обследование и мониторинг зданий и сооружений, а также при разработке проектной документации. Стандарт [17] был отмечен с 01 января 2014 года, а вместо него был введен *скорректированный ГОСТ 31937-2011 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния»* [15]. Данный документ, регламентируя требования к составу и выполнению работ, важных для контроля и повышения безопасности зданий или сооружений,

распространяется на обследование и мониторинг технического состояния рассматриваемых объектов, в том числе уникальных (высотных и большепролетных). Отмечается, что наблюдения за деформациями оснований зданий (сооружений) следует проводить в соответствии с *ГОСТ 24846-2012. Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений* [13], который с 2013 года используется в актуализированном виде. Укажем ниже определения, используемые в [15].

Общий мониторинг технического состояния зданий (сооружений) – система наблюдения и контроля, проводимая по определенной программе, утверждаемой заказчиком, для выявления объектов, на которых произошли значительные изменения НДС несущих конструкций или крена и для которых необходимо обследование их технического состояния (изменения НДС характеризуются изменением имеющихся и возникновением новых деформаций или определяются путем инструментальных измерений).

При общем мониторинге проводят визуальный осмотр конструкций в целях приблизительной оценки категории технического состояния, измеряют динамические параметры конкретных зданий или сооружений (предыдущие и текущие значения кренов объекта вдоль большой и малой осей; предыдущие и текущие значения периода и логарифмического декремента основного тона собственных колебаний вдоль большой, малой и вертикальной осей) и составляют паспорт здания или сооружения.

Мониторинг технического состояния зданий (сооружений), попадающих в зону влияния нового строительства, реконструкции или природно-техногенных воздействий – аналогично [27].

Мониторинг нового строительства или реконструкции объектов допускается осуществлять в соответствии с [29]. Для оценки зоны влияния динамических воздействий на окружающие здания и сооружения можно использовать нормативные документы

[15,38,43]. Наблюдения за деформациями оснований зданий (сооружений) проводят в соответствии с [14].

Определение точности измерения вертикальных и горизонтальных деформаций проводят в зависимости от ожидаемого расчетного значения перемещения. При отсутствии данных по расчетным значениям деформаций оснований и фундаментов допускается устанавливать класс точности измерений вертикальных и горизонтальных перемещений: I – для зданий (сооружений): уникальных, находящихся в эксплуатации более 50 лет, возводимых на скальных и полускальных грунтах; II – для зданий (сооружений), возводимых на песчаных, глинистых и других сжимаемых грунтах; III – для зданий (сооружений), возводимых на насыпных, просадочных, заторфованных и других сильно сжатых грунтах; IV – для земляных сооружений.

Предельные погрешности измерения крена в зависимости от высоты H здания (сооружения) не должны превышать следующих значений (в миллиметрах): для гражданских зданий (сооружений) – $0.0001H$; для промышленных зданий (сооружений) – $0.0005H$; для фундаментов под машины и агрегаты – $0.00001H$.

Мониторинг технического состояния зданий (сооружений), находящихся в ограниченно работоспособном или аварийном состоянии – аналогично [26].

Мониторинг технического состояния уникальных зданий (сооружений) – система наблюдения и контроля, проводимая по определенной программе для обеспечения безопасного функционирования уникальных зданий или сооружений за счет своевременного обнаружения на ранней стадии негативного изменения НДС конструкций и грунтов оснований или крена, которые могут повлечь за собой переход объектов в ограниченно работоспособное или в аварийное состояние (результаты мониторинга являются, таким образом, основой эксплуатационных работ на этих объектах).

Отмечается, что настройку соответствующей автоматизированной стационарной системы (станции) мониторинга проводят, как правило, с использованием заранее разработанной математической модели для проведения комплексных инженерных расчетов по оценке возникновения и развития дефектов в строительных конструкциях, в том числе и в кризисных ситуациях.

Система мониторинга технического состояния несущих конструкций – совокупность технических и программных средств, позволяющая осуществлять сбор и обработку информации о различных параметрах строительных конструкций (геодезические, динамические, деформационные и др.) с целью оценки технического состояния зданий и сооружений.

В настоящее время схема оценки технического состояния конструкций включает, как правило, сравнение динамических характеристик (формы колебаний конструкции и соответствующие собственные частоты), определенные численно (обычно методом конечных элементов с применением верифицированных программных комплексов (например, ANSYS, SIMULIA ABAQUS и др. [1]) и экспериментально (по измерениям ускорений колебаний с применением специализированного программного обеспечения). Анализ изменения состояний во времени позволяет выявить дефекты, зарождающиеся в конструкциях. Реализации подобной технологии может предусматривать, в частности, следующие основные этапы:

- информационное моделирование (англ. – Building Information Modeling (BIM));
- конечно-элементное моделирование (англ. – Finite Element Modeling (FEM));
- использование инструментария экспериментального динамического анализа – модальный анализ (англ. – Operational Modal Analysis (OMA)), анализ собственных частот, анализ гармонических колебаний и др.;

- идентификация математической модели объекта по результатам натурных измерений;
- анализ данных измерений и оценка остаточного ресурса конструкций.

Основной вопрос при построении системы мониторинга несущих конструкций – это вопрос о том, что нужно контролировать, какие параметры и элементы конструкций являются критическими и подлежащими автоматизированному контролю. Выбор оптимального состава конструктивных элементов и параметров контроля осуществляется экспертным путем индивидуально для каждого объекта, при этом необходимо учитывать такие факторы, как ответственность объекта, финансовые ограничения, местонахождение объекта, надежность проектных решений. Факторы местонахождения (климатические и инженерно-геологические условия нахождения объекта) и надежность проектных решений (использование сложных нетиповых конструктивных узлов, большепролетных пролетов и консолей, непробированных проектных решений и материалов и т.д.) определяют потенциальные угрозы, реализация которых может повлечь ухудшение состояния конструктивных элементов или их разрушение. В основе выбора контролируемых элементов и параметров должен лежать тщательный анализ конструктивных решений объекта, потенциальных угроз с применением результатов математического моделирования и инженерных расчетов возникновения и развития опасных факторов [44].

Система мониторинга инженерно-технического обеспечения – совокупность технических и программных средств, позволяющая осуществлять сбор и обработку информации о различных параметрах работы системы инженерно-технического обеспечения здания (сооружения) с целью контроля возникновения в ней дестабилизирующих факторов и передачи сообщений о возникновении или прогнозе аварийных ситуаций в единую систему оперативно-диспетчерского управления города.

В [15] перечислены общие правила проведения мониторинга технического состояния зданий и сооружений, среди которых можно выделить следующие:

- мониторинг технического состояния зданий и сооружений проводится в соответствии с предварительно разработанными программами (в каждой из которых, наряду с перечислением видов работ, устанавливают систему и периодичность наблюдений с учетом технического состояния объекта, а также общую продолжительность мониторинга) силами специализированных организаций, оснащенных современной приборной базой и имеющих в своем составе высококвалифицированных и опытных специалистов;
- для уникальных зданий и сооружений устанавливается постоянный режим мониторинга;
- мониторинг технического состояния зданий и сооружений проводят также в следующих случаях: по истечении нормативных сроков эксплуатации зданий и сооружений; при обнаружении значительных дефектов, повреждений и деформаций в процессе технического обслуживания, осуществляемого собственником здания (сооружения); по результатам последствий пожаров, стихийных бедствий, аварий, связанных с разрушением здания (сооружения); по инициативе собственника объекта; при изменении технологического назначения здания (сооружения); по предписанию органов, уполномоченных на ведение государственного строительного надзора.

2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

Следует отметить, что более чем десятилетний опыт высотного строительства с сопровождением его мониторингом, в том числе сейсмометрическим, обусловил корректи-

ровку нормативной литературы (ряд аварий ответственных сооружений, имевших место в последние годы, лишь подчеркнул актуальность данной проблемы [21]), однако неизменным оставалось требование проведения мониторинга ответственных сооружений на всех этапах, от проектирования до сноса (*Федеральный закон от 30.12.2009 №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений»* [48]).

Для реализации данного требования в части инструментального мониторинга конструкций и оснований зданий можно использовать четыре класса методик (четыре метода инструментального мониторинга) [31,45,46]:

- *геодезические измерения*: выполняются как с помощью традиционной нивелировки, так и с использованием современных цифровых датчиков, спутниковых GPS-технологий, возможно лазерное сканирование объекта (данные методики позволяют определять перемещение объекта (здания или отдельных его частей) в пространстве, в том числе измерять осадки и крены; получаемые данные соответствуют состоянию на момент измерений, т.е. при достаточно редких по времени замерах методики не дают подробной динамики поведения объекта);
- *инженерно-геологические наблюдения состояния грунтового массива в основании и в окрестности здания* – существует набор схем как разной трудоемкости и стоимости, так и разной разрешающей способности и информативности – от измерений в отдельных скважинах до межскважинного просвечивания (вплоть до получения трехмерного номографического изображения), причем в зависимости от выбора датчиков, можно вести мониторинг дифференциальных (послойных) или суммарных осадков грунтов основания, уровня воды, порового давления в породах (параметра, нередко используемого в расчетных обоснованиях зарубежными специалистами); помимо скважин, важную информацию получа-

ют при размещении под фундаментной плитой сети датчиков давления на грунт, в сваях – вертикальных нагрузок (наблюдения могут вестись непрерывно или достаточно часто по времени, т.е. есть возможность следить за особенностями динамики объекта);

- *измерения нагрузок и деформаций в конструкциях фундамента и надземной части* с использованием вибрационных датчиков напряжений, монтируемых по 1-, 2- и 3-м пространственным координатам (X , Y , Z) в точке и размещаемых в фундаментной плите, а также в стенах, пилонах и колонах здания (наблюдения могут вестись в автоматическом режиме и к тому же непрерывно);
- *динамические (сейсмометрические) методики*: могут выполняться различными измерительными устройствами – деформографами, наклономерами и сейсмометрами (велосиметрами, акселерометрами); схемы наблюдений разнообразны, включают варианты возбуждения колебаний здания как искусственными (удары, вибраторы), так и естественными (ветер, микросейсм) источниками (сейсмометрические измерения дают «мгновенную» картину состояния объекта, наблюдая которую во времени, можно получить разнообразную информацию об особенностях динамики сооружения).

Следует отметить, что если первые три из перечисленных типов наблюдений дают в основном «прямую» информацию (величины осадок, нагрузок и пр.), то регистрация колебаний требует, как достаточно сложной предварительной обработки, так и создания динамических моделей сооружения (при этом не требуются инструментальные воздействия и визуальный осмотр каждой конструкции). Проведенные эксперименты на реальных объектах подтвердили перспективность динамических методик, однако выявили и ряд проблем. Особенностью динамических методик является то, что схемы наблюдений могут быть достаточно простыми

(вплоть до одной точки). Кроме того, они дают возможность контролировать не только величины ускорений, но и позволяют судить о совместной работе здания и грунтов основания, в том числе выявить неизвестные ранее явления [45]. Вместе с тем, требования уже упоминавшегося ГОСТ Р 53778-2010 [17], предписывающие фиксировать значения (периода и логарифмического декремента) основного тона собственных колебаний «по трем осям жесткости здания», очевидно, вовсе не продвигают в понимании сути, возможностей и ограничений соответствующего динамического мониторинга.

Инструментальный мониторинг без опоры на сопоставления с набором адекватных математических «мониторинговых» моделей здания носит случайно-бессмысленный характер, не представляет практического интереса и, потому, уводит от осознания реальных проблем. Упомянутые «мониторинговые» модели (или одна параметризуемая) имеют ряд специфических отличий от расчетных моделей, используемых для обоснования проектных решений [2]:

- реализация не проектных, а фактических физико-механических свойств строительных материалов (металла, бетона, арматуры и др.) и геометрии конструкции;
- учет не нормативных, а фактических измеренных нагрузок и воздействий;
- включение в статическую и, в особенности, динамическую работу при слабых «фоновых» воздействиях номинально несущих конструкций (перегородок, фасадных и др.);
- работа ряда узлов и соединений по схемам, отличным от принятых в проекте (например, упругая заделка вместо шарнира);
- адаптируемость (калибруемость, «обучаемость») модели по данным инструментального мониторинга, в том числе, включение обнаруженных дефектов.

Только система инструментального мониторинга, построенная на основе анализа ре-

зультатов конечноэлементного моделирования в сопоставлении с данными измерений, позволит выполнить планирование мероприятий по подготовке и реагированию на изменения ответственных конструкций, сделать выводы о фактическом состоянии и возможности дальнейшей безопасной эксплуатации здания. Такие принципы заложены в основу расчетно-экспериментальной методики мониторинга несущих конструкций уникальных зданий и сооружений, предложенной в работах А.М. Белостоцкого и др. [2,3,6-10].

3. ТРЕБОВАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИЯМ, ВЫПОЛНЯЮЩИМ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ МОНИТОРИНГА ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

В соответствии с действующей нормативной базой [16,21] от организации, претендующей на выполнение проектирование систем мониторинга инженерных сооружений (СМИС), требуется наличие свидетельства о допуске к определенному виду работ; наличие лицензии на работу со сведениями, составляющими государственную тайну и наличие квалификационного аттестата и удостоверения государственного образца об обучении на каждого сотрудника.

Действительно, согласно п. 6.2.6 [16] квалификационные требования к организациям, осуществляющим работы по проектированию, вводу в действие и эксплуатации, техническому обслуживанию и ремонту СМИС должны включать:

- наличие свидетельства о допуске саморегулируемой организации по соответствующему виду работ;
- наличие квалифицированных специалистов, прошедших в установленном порядке подготовку (обучение) и имеющих свидетельство (удостоверение) о повышении квалификации по соответствующему виду работ;

- наличие лицензий на осуществление работ, связанных с использованием сведений, составляющих государственную тайну, сертификатов соответствия в случаях, предусмотренных действующим законодательством Российской Федерации.

Кроме того, организация должна располагать материально-техническими ресурсами для соответствующих работ.

Далее, в соответствии с п. 4.12 [16] проектирование и строительство СМИС должны осуществлять организации, имеющие свидетельства саморегулируемых организаций о допуске к работам в области мероприятий по гражданской обороне, мероприятий по предупреждению чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера. Специалисты указанных организаций должны иметь дипломы (свидетельства, удостоверения) государственного образца о специальной подготовке (повышении квалификации) по образовательным программам в данной области, включая СМИС.

И, наконец, в соответствии с [23] работы по проектированию, установке, приемке и эксплуатации взаимосвязанных систем безопасности, жизнеобеспечения и СМИС потенциально опасных объектов (ПОО), зданий и сооружений должны осуществляться только теми организациями, у которых имеется необходимое количество специалистов (не менее 5), прошедших обучение в специально создаваемом на базе Федерального центра науки и высоких технологий «Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций» (ФЦ ВНИИ ГОЧС) учебном центре и получившими соответствующие лицензии. ФЦ ВНИИ ГОЧС может предоставлять право на проведение учебных работ в области СМИС организациям и научным учреждениям, специализирующимся в области создания систем безопасности в чрезвычайных ситуациях, после проведения обучения и аттестации специалистов (преподавателей) из этих учреждений. В этом случае этим организациям выдаются соответ-

ствующие лицензии ФЦ ВНИИ ГОЧС на право проведения работ по обучению создания СМИС сроком на 1 год. По истечении указанного срока лицензии она может быть продлена ФЦ ВНИИ ГОЧС сроком на 1, 2 или 3 года.

Программы обучения специалистов в области создания взаимосвязанных систем безопасности, жизнеобеспечения и СМИС ПОО, зданий и сооружений составляются учебным центром ФЦ ВНИИ ГОЧС и утверждаются руководством Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий (МЧС России).

ФЦ ВНИИ ГОЧС или организации, специально уполномоченные для этого ФЦ ВНИИ ГОЧС, выдают юридическим и физическим лицам лицензии на проектирование, монтаж, эксплуатацию и модернизацию взаимосвязанных систем безопасности, жизнеобеспечения и СМИС ПОО, зданий и сооружений и ведут их реестровый учет. Лицензии на право проведения работ по проектированию, монтажу, эксплуатации и модернизации взаимосвязанных систем безопасности, жизнеобеспечения и СМИС ПОО, зданий и сооружений выдаются сроком на 1 год. По истечении указанного срока лицензии она может быть продлена ФЦ ВНИИ ГОЧС или организациями, специально уполномоченные для этого ФЦ ВНИИ ГОЧС, сроком на 1, 2 или 3 года. ФЦ ВНИИ ГОЧС ведет общий реестр выданных учебным центрам и юридическим лицам лицензий и организует их опубликование в специализированных изданиях.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской

Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов» и тема 7.1.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Белостоцкий А.М., Кайтуков Т.Б., Мозгалева М.Л. Сидоров В.Н.** Информатика и прикладная математика. – М.: АСВ, 2016. – 588 с.
2. **Белостоцкий А.М.** Математические модели в основе и составе систем мониторинга несущих конструкций высотных зданий. От профанации к реализации. // Высотные здания, 2014, №4, с. 102-107.
3. **Белостоцкий А.М.** Обрушения большепролетных зданий. Численное моделирование в строительно-технических экспертизах. // Высотные здания, 2014, №3, с. 106-109.
4. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А.** (ред). Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов. Том 1. К 25-летию Научно-исследовательского центра СтаДиО. – М.: АСВ, 2016. – 426 с.
5. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А.** (ред). Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов. Том 2. К 25-летию Научно-исследовательского центра СтаДиО. – М.: АСВ, 2016. – 594 с.
6. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.** Адаптируемые конечноэлементные модели основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Между-

- народный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 20-29.
7. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.** Математическое моделирование как основа мониторинга зданий и сооружений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 78-80
 8. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Аул А.А., Нагибович А.И.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 44-55.
 9. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Нагибович А.И., Петряшев Н.О., Петряшев С.О.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 4, 2012, pp. 29-44.
 10. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Новиков П.И., Островский К.И.** Адаптивные конечноэлементные модели в основе систем мониторинга несущих конструкций уникальных зданий. «Строительная механика и расчет сооружений» №6, 2014.
 11. **Бойко М.Д.** Техническое обслуживание и ремонт зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1993. – 207 с.
 12. **Вальков В.А.** Геодезические наблюдения за процессом деформирования высотных сооружений с использованием технологии наземного лазерного сканирования. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 25.00.32 – «Геодезия». – М.: ФГБОУ ВПО «Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. – 158 с.
 13. ГОСТ 24846-2012. Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений. Введ. 2013 – 07 – 01. – Москва: Межгос. Совет по стандартизации, метрологии и сертификации; Москва: Стандартинформ, 2014. – 18 с.
 14. ГОСТ 24846-81. Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений. – М., 2009.
 15. ГОСТ 31937-2011. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. Утв. Межгосударственной научно-технической комиссией по стандартизации, техническому нормированию и сертификации в строительстве, 2011. – 83 с.
 16. ГОСТ Р 22.1.12-2005 в ред. Изменения №1. Утв. Приказом Росстандарта. – М., 2011.
 17. ГОСТ Р 53778-2010. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. Утв. приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии, 2010. – 56 с.
 18. **Гурьев В.В., Дорофеев В.М.** Контроль устойчивости зданий. // *Строительство*, 2004, №10, с. 45-46.
 19. **Капустян Н.К., Климов А.Н., Антоновская Г.Н.** Высотные здания: опыт мониторинга и пути его использования при проектировании. // *Жилищное строительство*, 2013, №11, с. 6-12.
 20. **Катценбах Р., Шмит А., Рамм Х.** Основные принципы проектирования и мониторинга высотных зданий Франкфурта-на-Майне. Случаи из практики. // *Ре-*

- конструкция городов и геотехническое строительство, 2005, №9, с. 80-99.
21. **Коргин А.В., Ермаков В.А.** Автоматизированная актуализация МКЭ-модели сооружения в ходе мониторинга. // Механизация строительства, 2011, №7, с.2-4.
 22. Методика мониторинга несущих конструкций зданий и сооружений. Общие положения. – М.: МЧС России (аттестована Правительственной комиссией по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций и обеспечению пожарной безопасности. Протокол от 18.03.2009 №3).
 23. Методика оценки систем безопасности и жизнеобеспечения на потенциально опасных объектах, зданиях и сооружениях. Аттестована правительственной комиссией, 2003. – 26 с.
 24. Методическая документация в строительстве: МДС 13-22.2009. Методика геодезического мониторинга технического состояния высотных и уникальных зданий и сооружений. Утв. Департаментом градостроительной политики, развития и реконструкции города Москва, 2009. – 79 с.
 25. Методическая документация в строительстве: МДС 13-24.2010. Рекомендации по правилам геотехнического сопровождения высотного строительства и прилегающего пространства. Утв. Департаментом градостроительной политики, развития и реконструкции города Москва, 2010. – 47 с.
 26. Московские городские строительные нормы: МГСН 2.07-97 Основания, фундаменты и подземные сооружения. Утв. постановлением Правительства Москвы, 1998. – 114 с.
 27. Московские городские строительные нормы: МГСН 2.10-04. Предпроектные комплексные обследования и мониторинг зданий и сооружений для восстановления, реконструкции и капитального ремонта. Утв. постановлением Правительства Москвы, 2005. – 114 с.
 28. Московские городские строительные нормы: МГСН 4.19-05. Временные нормы и правила проектирования многофункциональных высотных зданий и зданий-комплексов. Утв. постановлением Правительства Москвы, 2005. – 150 с.
 29. МРДС 02-2008 Пособие по научно-техническому сопровождению и мониторингу строящихся зданий и сооружений, в том числе большепролетных, высотных и уникальных. Утв. Департамент градостроительной политики города Москвы, 2008. – 76 с.
 30. **Порывай Г.А., Датюк О.В.** Техническая эксплуатация зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.
 31. **Потапкин Е.В.** Мониторинг существующих зданий и возводимых объектов – единый механизм строительства. // Промышленное и гражданское строительство, 2006, № 12, с. 15-20.
 32. Рекомендации по обследованию и мониторингу технического состояния эксплуатируемых зданий, расположенных вблизи нового строительства или реконструкции. – М., 1998. – 94 с.
 33. Рекомендации по расчету, проектированию и устройству свайных фундаментов нового типа в г. Москве. – М., 1997.
 34. Савин С.Н. Динамический мониторинг строительных конструкций на примере пандуса киноконцертного зала «Пушкинский» в г. Москва. // Инженерно-строительный журнал, 2012, №7, с.58-62.
 35. СНиП 2.02.01-83*. Основания зданий и сооружений. – М., 1995.
 36. СНиП 2.02.03-85. Свайные фундаменты. – М., 1987.
 37. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. – М., 1989.
 38. СНиП 3.02.01-87 Земляные сооружения, основания и фундаменты. – М., 1988.
 39. СНиП II-22-81*. Каменные и армокаменные конструкции. – М., 2003.
 40. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции. – М., 1990.

41. СНиП II-25-80. Деревянные конструкции. – М., 1989.
42. Территориальные строительные нормы: ТСН 31-332-2006. Жилые и общественные высотные здания. Утв. Комитетом по строительству Правительства Санкт-Петербурга, 2005. – 37 с.
43. Территориальные строительные нормы: ТСН 50-304-2001 г. Москвы (МГСН 2.07-01) Основания, фундаменты и подземные сооружения. Утв. Правительством Москвы, 2003. – 56 с.
44. Технические рекомендации ТР 182-08. Технические рекомендации по научно-техническому сопровождению и мониторингу строительства большепролетных, высотных и других уникальных зданий и сооружений. – утв. директором ГУП «НИИМосстрой», 2008. – 26 с.
45. **Тимченко Р.А., Попов С.О., Кришко Д.А., Милько П.А.** Мониторинг состояния высотных зданий и сооружений. // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво), Вип.4(34), Т2, 2012, с. 71-75.
46. **Тимченко Р.А., Швец В.Б., Кришко Д.А., Шевчук АВ., Петрова Л.В.** Мониторинг геологической среды для объектов повышенного риска и инженерной сложности. // Вісник Криворізького технічного університету, 2009, Вип. 23, с. 206-209.
47. Федеральный закон от 27.12.2002 №184-ФЗ (ред. от 28.11.2015) «О техническом регулировании».
48. Федеральный закон от 30.12.2009 №384-ФЗ (ред. от 02.07.2013) «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений».
49. **Boldyrev G.G., Valeev D.N., Idrisov I.H., Krasnov G.I.** A System for Static Monitoring of Sports Center Structures. // Proceedings of the 7th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford, USA. Ed. Fu-Kuo Chang, Vol.1, 2009, pp. 374-382.
50. **Boldyrev G.G., Zhivaev A.A.** A System for Static and Dynamic Monitoring and Ice Sport Arena. // Proceed. of the 8th Internat. Workshop on Health Monitoring, Stanford, USA, Ed. Fu-Kuo Chang, Vol. 1, 2011, pp. 378-385.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики, научный руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc, Professor, Director of StaDyO Research & Engineering Center; Science Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДИК ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – АРОЧНАЯ ПЛОТИНА – ВОДОХРАНИЛИЩЕ» ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*А.М. Белостоцкий^{1,2,3}, Нгуен Тай Нанг Лонг¹, Д.С. Дмитриев²,
С.В. Щербина¹*

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: в статье представлена методика уточненного численного моделирования динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) трехмерной системы «основание - водохранилище – арочная плотина» при сейсмическом воздействии. На примере бенчмарка, который был представлен на семинаре по проблемам численного моделирования гидротехнических сооружений Международной комиссии по большим плотинам (ICOLD), приведено сопоставление полученных результатов с альтернативными моделями и численными методами.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, сейсмостойкость, напряженно-деформированное состояние, собственные частоты, колебание жидкости

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL SIMULATION METHODS OF DYNAMIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL SYSTEM «FOUNDATION – RESERVOIR – DAM» AT SEISMIC IMPACTS

*Alexander M. Belostotsky^{1,2}, Nguyen Tai Nang Luong¹, Dmitry S. Dmitriev²,
Sergey V. Scherbina¹*

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

³ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article presents a comparative analysis of solutions of problems on the verification methodology developed by the refined numerical simulation of the dynamic stress-strain state (SSS) of three-dimensional system of " foundation - reservoir - dam" at seismic impacts. The article also presents a comparison of the results with other numerical methods, on the example of the benchmark, which was presented at a seminar on the problems of numerical simulation of hydraulic structures of the International Commission on Large Dams (ICOLD).

Key words: math modeling, numerical methods, related production, finite element method, natural frequencies, seismic, strain-stress state, fluctuation of the fluid

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические расчеты связанных систем «гидротехническое сооружение – основание – водохранилище» берут свое начало с аналитического решения, полученного Вестергардом для гидродинамического давления идеальной несжимаемой жидкости на вертикальную стенку полубесконечного абсолютно жесткого резервуара при гармонической внешней нагрузке [11]. Историко-научный процесс последовательного уточнения и усложнения расчетных аналитических моделей для учета существенных факторов (поверхностные гравитационные волны, влияние донных наносов, податливость и геометрические формы сооружения, зарезонансная реакция и др.) подробно описан, в частности, в известных монографиях С.Г. Шульмана [9,10]. Рассмотренные постановки связанных динамических задач гидроупругости и полученные сложные и красивые аналитические решения, обладающие неоспоримой научной и практической ценностью, положены в основу нормативных методик учета влияния водохранилища на динамические характеристики и сейсмическую реакцию гидротехнических сооружений [7,8].

На сегодняшний день, для расчетной оценки динамического НДС связанных систем, в том числе гидротехнических сооружений, разработано и апробировано множество различных подходов и методов. В связи с ростом потребности в расчетах более сложных связанных задач, инженерные аналитические методы решения проблем данного типа уступают место современным численным методам динамического расчета. Но и среди численных методов имеются разные подходы в вопросе учета влияния жидкости на сооружение, что в свою очередь делает актуальной задачу сопоставления различных методов расчета связанных систем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Международная комиссия по большим пло-

тинам (ICOLD), начиная с 1991 г., раз в 2 года проводит международные семинары по вопросам численного моделирования плотин. Основными целями данных семинаров являются обмен опытом в области расчетного обоснования гидросооружений, интерпретация результатов различных расчетных методов, а также обсуждение их теоретической и практической значимости.

На 12-ом международном семинаре, прошедшем в Испании, в 2011 году, был опубликован бенчмарк «взаимодействие арочной плотины, водохранилища и основания при сейсмическом воздействии» [3]. В рамках этого бенчмарка, всем заинтересованным лицам, была предложена для расчетов конечноэлементная модель арочной плотины, с заданными свойствами материалов, граничными условиями и значением сейсмического воздействия, заданного трехкомпонентной акселерограммой. Расчеты можно было проводить в любом, доступном, участникам программном комплексе, а учет влияния жидкости задавать одним из трех предложенным способом:

1. базовым «инженерным» методом присоединенных масс, распределенных на напорной грани по Вестергарду [11];
2. с использованием акустических конечных элементов;
3. с использованием элементов жидкости с учетом поверхностных гравитационных волн.

Авторы статьи тоже выполнили ряд расчетных исследований по данному бенчмарку и провели сопоставление полученных результатов с данными других участников. На основании этого сопоставления была проведена верификация разработанной методики численного моделирования трехмерных динамических систем «основание – водохранилище – плотина» при сейсмических воздействиях.

3. УЧАСТНИКИ БЕНЧМАРКА И ОПИСАНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

В данном бенчмарке участвовали 12 коллективов ученых из 9 стран (Швейцарии, Гол-

ландии, Франции, Германии, Швеции, Италии, Ирана, Румынии и Австрии). Каждый участник имел возможность выбрать свой метод численного моделирования, программу и подход к учету взаимодействия жидкости-плотины-основания. На выбор было предложено два варианта конечноэлементной сетки: грубая и подробная. Граничные условия и свойства материалов принимались одинаковыми всеми участниками.

Авторами статьи для расчетов был выбран "тяжелый" верифицированный программный комплекс ANSYS Mechanical. Моделирование жидкости выполнялось 20-и узловыми акустическими элементами типа

FLUID220 (аналог FLUID30, но криволинейный с дополнительными промежуточными узлами на ребрах). Основание и плотина моделировались объемными 20-и узловыми элементами SOLID186. Конечноэлементная модель, используемая в расчетах, показана на рис.1. Ее размерность и свойства материалов представлены в таблицах 2 и 3.

В таблице 1 перечислены участники, используемые программные комплексы, тип конечноэлементной сетки и метод учета жидкости. Некоторые из участников предоставили результаты по нескольким подходам к моделированию, но для сравнения был использован только один из них.

Таблица 1. Участники, программные комплексы и подходы.

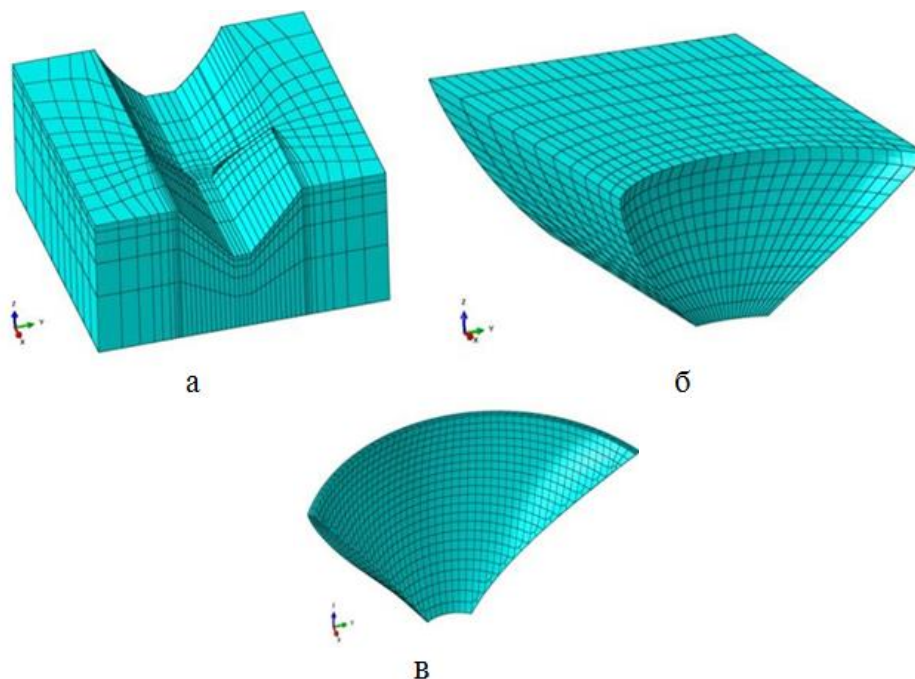
№	Участники	Программный комплекс	Модель жидкости	КЭ-модель
A	G. Maltidis	ABAQUS	Акустические элементы	Грубая
B	W.Kikstra, F. Sirumbal, G. Schreppers	DIANA	Акустические элементы	Грубая
C	G. Faggiani, P. Masarati	CANT-SD	Акустические элементы	Грубая
D	A. Tzenkov, A. Abiati, G. Gatto	DIANA	Акустические элементы	Грубая
E	M. Chambart	DIANA	Присоединенная масса (Westergaard)	Подробная
F	A. Popovici, C.Ilinca, R. Vârvorea	ABAQUS	Присоединенная масса (Westergaard)	Грубая
G	R. Malm, C. Pi Rito, C. Hassanzadeh, C. Rydell, T. Gasch	ABAQUS	Акустические элементы	Подробная
H	M. Brusin	FENASECCONIPP	Присоединенная масса (Westergaard)	Подробная
I	S. Shahriari	ANSYS	Присоединенная масса (Westergaard)	Грубая
J	A. Frigerio, G.Mazzà	COMSOL	Акустические элементы	Грубая
K	A.Diallo, E. Robbe	CODE_ASTER	Присоединенная масса (Westergaard)	Грубая
REF	M. Goldgruber	ABAQUS	Акустические элементы	Грубая
Авторы статьи	Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С., Нгуен Тай Нанг Льюнг, Щербина С.В.	ANSYS	Акустические элементы	Грубая

Все участники бенчмарка выполнили ряд расчетов и предоставили результаты, включающие в себя:

1. собственные частоты и формы колебаний системы;
2. перемещения и напряжения в характерных сечениях сооружения при статических нагрузках;

3. перемещения и напряжения в характерных сечениях сооружения при сейсмическом воздействии, заданном трехкомпонентной акселерограммой (рис.2).

По результатам всех участников для сопоставительного анализа и визуализации расчетных данных построены сводные графики.



*Рисунок 1. Конечноэлементная модель системы «основание – водохранилище – арочная плотина»
а) основание; б) водохранилище; в) плотина*

Таблица 2. Размерность «грубой» конечноэлементной модели.

Параметр расчетной модели	Арочная плотина	Основание	Водохранилище
Количество узлов:	13733	13298	12493
Количество элементов:	2736	2700	2640
Тип элементов	SOLID186	SOLID186	FLUID220

Таблица 3. Свойства материалов.

Элемент модели	Плотность (кг/м ³)	Коэффициент Пуассона	Модуль упругости (МПа)	Динамическая вязкость (Па·с)	Скорость звука в жидкости ν , м/с
Основание	0	0.2	25000	-	-
Плотина	2400	0.167	27000	-	-
Вода	1000	-	-	0.001	1450

Сравнительный анализ методик численного моделирования динамики трехмерных систем «основание – арочная плотина – водохранилище» при сейсмических воздействиях

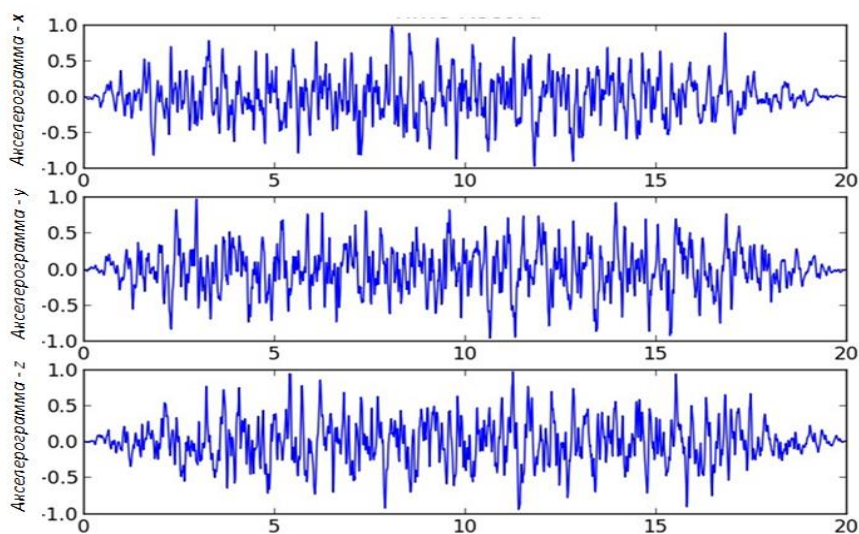


Рисунок 2. Трёхкомпонентная акселерограмма ($a_{max} \sim 0.1g$).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

Вычислены первые 10 собственных частот и форм системы "основание – водохранилище - арочная плотина" при полностью заполненном водохранилище. Для вычисления собственных частот и форм колебаний жидкости использовался редуцированный метод. Результаты представлены на рисунке 3 и в таблице 4. Первые две низшие частоты участников Н и I оказались ниже среднего значения 1,5 Гц, показанного дру-

гими участниками. Это, по мнению авторов, обусловлено использованием метода присоединенных масс. Стоит заметить, что участники, использовавшие программу DIANA (B, D и E), получили более высокие частоты, начиная с третьей. Это также относится к участнику K, который использовал программное обеспечение с открытым исходным кодом CODE_ASTER. Все остальные участники, включая авторов статьи, получили достаточно близкие собственные частоты в диапазоне первых 10 форм.

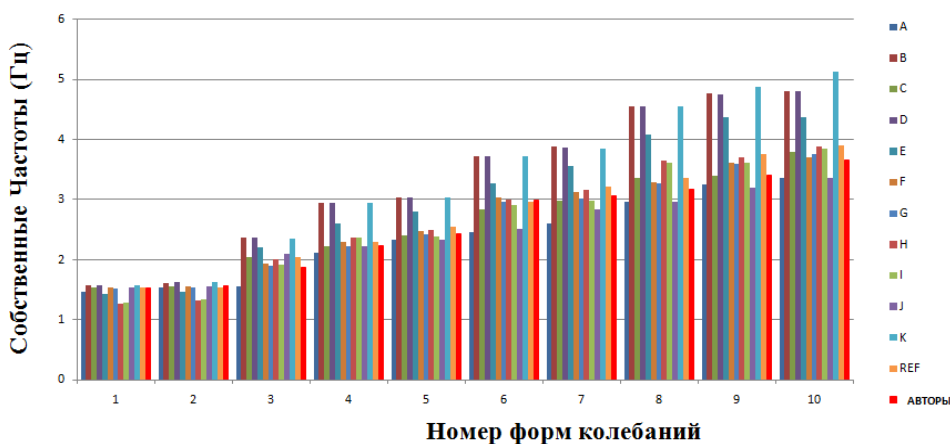
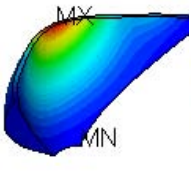
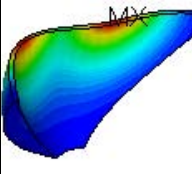
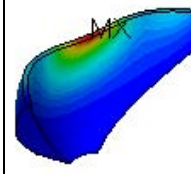
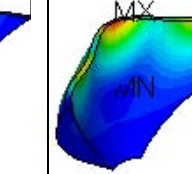
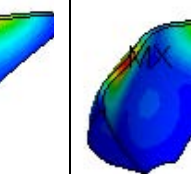
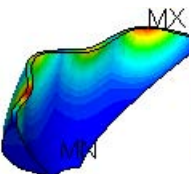
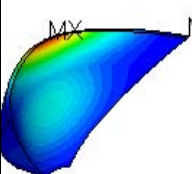
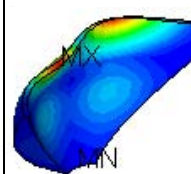
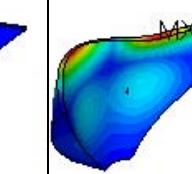
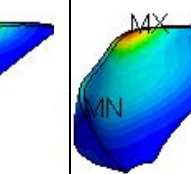


Рисунок 3. Низшие 10 собственных частот (коллективы участников A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, REF, АВТОРЫ)

Таблица 4. Низшие десять собственных частот и форм колебаний.

№п/п	1	2	3	4	5
Форма и частота, Гц	 1.53	 1.56	 1.87	 2.23	 2.43
№п/п	6	7	8	9	10
Форма и частота, Гц	 2.99	 3.06	 3.17	 3.40	 3.65

5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО НДС СИСТЕМЫ «ОСНОВАНИЕ – ВОДОХРАНИЛИЩЕ – АРОЧНАЯ ПЛОТИНА»

Статическая нагрузка включала собственный вес всех элементов системы и гидростатическое давление воды. В качестве результата статического расчета сопоставлялись перемещения гребня плотины в центральном сечении. Анализ статических перемещений показал подобие результатов у всех участников, кроме коллективов D, E, H и K. Увеличенные статические перемещения у коллективов участников D, H и K обусловлены, по мнению авторов, учетом этапности возведения.

Для решения задачи в динамической постановке решение СЛАУ выполнялось прямым разреженным методом (SPARSE). Интегрирование по времени проводилось методом Ньюмарка, шаг принимался равным 0.01с. Динамическое воздействие в виде акселерограмм прикладывалось как инерционные силы.

Сопоставление с результатами участников бенчмарка представлены на рис 4-9. Для лучшего восприятия результатов все участники разделены на 2 группы А-Е и F-K. На рис. 4 показаны горизонтальные перемещения центрального сечения арочной плотины от гид-

ростатической нагрузки с учетом собственного веса. На рис. 5-9 представлено сопоставление результатов от гидростатики (центральный график) и от сейсмической нагрузки (минимальные значения – левый график, максимальные значения – правый график).

Значения перемещений при динамическом воздействии варьируются в более широком диапазоне. Отдельно следует отметить результат коллектива G: он единственный использовал бесконечные элементы на вертикальной границе и прикладывал акселерограмму на нижней грани модели, что могло быть причиной получения завышенных, по сравнению с другими участниками, значений. Минимальные значения горизонтальных перемещений участника E, по мнению авторов статьи, объясняются использованием более высокого значения модуля упругости.

В бенчмарке сравнение гидростатических и динамических кольцевых и вертикальных напряжений выполнялось по характерным сечениям (центральное, левое и правое) для верхней и нижней граней арочной плотины. В данной статье представлены сопоставление результатов только для центрального сечения. Различие максимальных кольцевых напряжений при статической нагрузки у разных участников не превышает 0,5 МПа, при уровне напряжений 7 МПа.

Сравнительный анализ методик численного моделирования динамики трехмерных систем «основание – арочная плотина – водохранилище» при сейсмических воздействиях

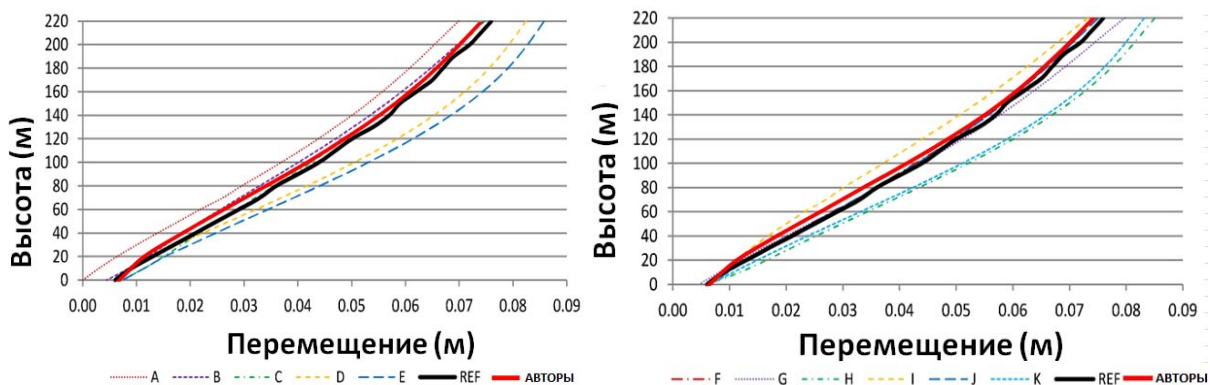


Рисунок 4. Горизонтальные перемещения центрального сечения арочной плотины (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической нагрузки, с учетом собственного веса.

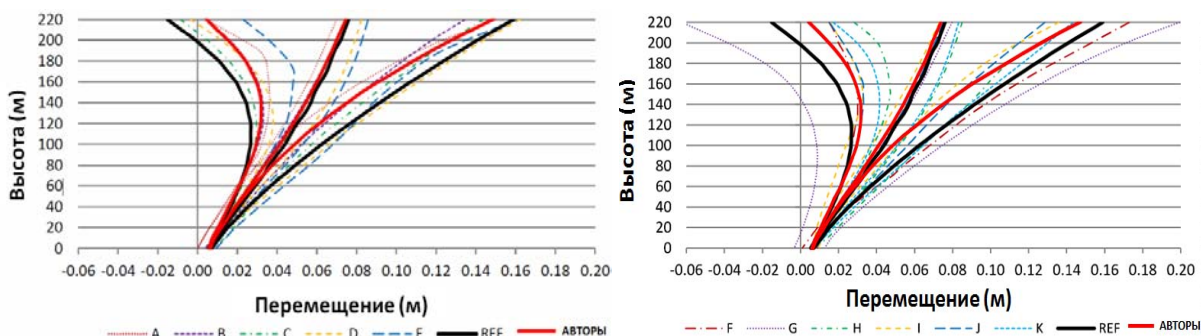


Рисунок 5. Горизонтальные перемещения центрального сечения арочной плотины с учетом собственного веса (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической и сейсмической (Min, Max) нагрузки.

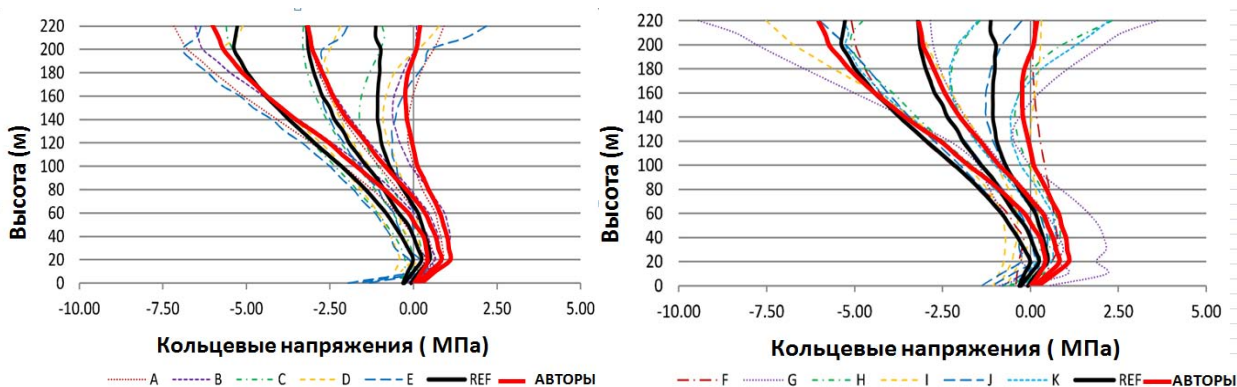


Рисунок 6. Кольцевые напряжения на нижней грани центрального сечения арочной плотины с учетом собственного веса (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической и сейсмической (Min, Max) нагрузки.

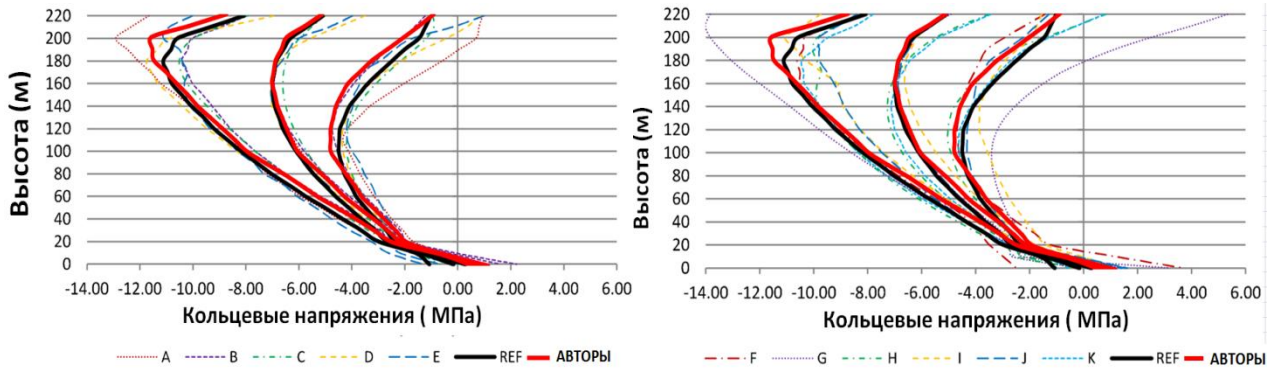


Рисунок 7. Кольцевые напряжения на верхней грани центрального сечения арочной плотины с учетом собственного веса (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической и сейсмической (Min, Max) нагрузки.

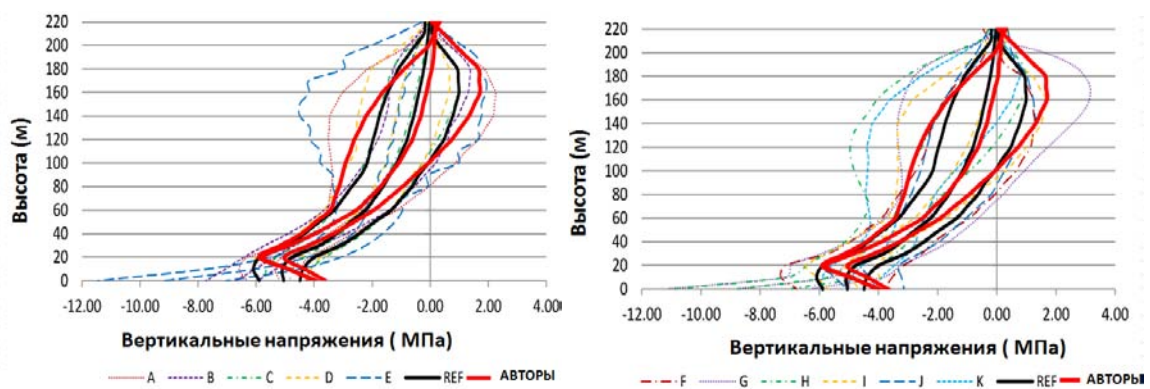


Рисунок 8. Вертикальные напряжения на нижней грани центрального сечения арочной плотины с учетом собственного веса (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической и сейсмической (Min, Max) нагрузки.

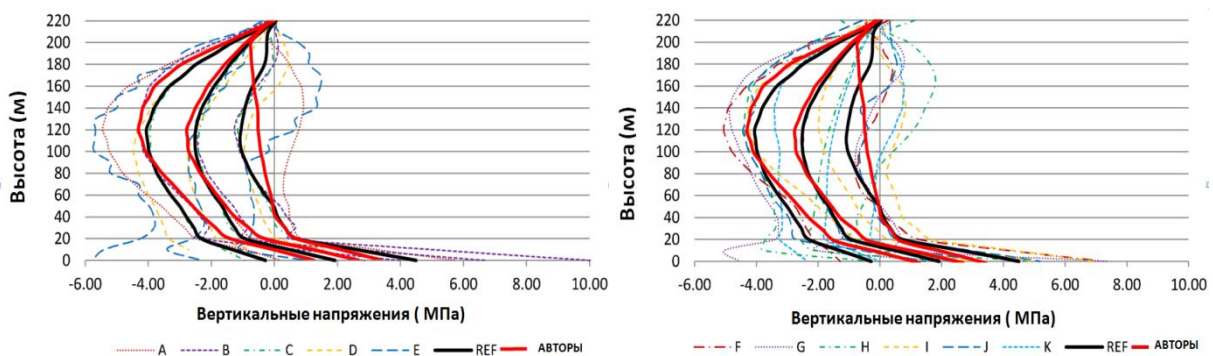


Рисунок 9. Вертикальные напряжения на верхней грани центрального сечения арочной плотины с учетом собственного веса (А-К, REF, АВТОРЫ) от гидростатической и сейсмической (Min, Max) нагрузки.

6. ВЫВОДЫ

1. Результаты расчетов показывают эффективность разработанной авторами методики численного моделирования динамических характеристик и НДС системы «арочная плотина – водохранилище – основание» с использованием акустических элементов жидкости, в частности, FLUID220 (FLUID30) в программном комплексе ANSYS Mechanical. Данная методика показала адекватные результаты, сопоставимые с данными других участников тестирования.
2. Анализ результатов участников бенчмарка [3] показал незначительное влияние размеров конечных элементов на низшие собственные частоты и формы колебаний, статические и сейсмические перемещения и напряжений в плотине.
3. Гибридный метод частотно-временной области (HFTD-метод) с применением частотно-зависимых свойств, таких как сжимаемость жидкости, неотражение и поглощение на границах, реализованный в программе DIANA, показал результаты, аналогичные результатам других участников. Это подтверждает как применимость этого сложного подхода, так и доказывает возможность использования менее сложных методов для решения поставленной задачи.
4. Результаты настоящего исследования показывают возможность применения разработанной методики для сейсмического анализа реальных трехмерных систем «плотина – водохранилище – основание» на значимых этапах их жизненного цикла.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фунда-

ментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.2 «Разработка, верификация и апробация адаптивной методики численного моделирования трехмерных динамических задач аэрогидроупругости в строительстве».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического динамического напряженно деформированного состояния пространственных систем «сооружение–основание–водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия закрытия швов и макротрещин. Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.07. МГУП, М., 1998. – 367с.
2. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Дмитриев Д.С., Усманов А.Р., Чужинов А.С., Щербина С.В.** Постановка, конечноэлементная аппроксимация и алгоритмы решения задач расчетного обоснования связанных систем «сооружение жидкость». // Строительная механика и расчет сооружений, 2014, №5, с. 21-27.
3. ICOLD, International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams. Theme A – Fluid Structure Interaction Arch Dam – Reservoir at Seismic loading. Graz University of Technology, 2013, pp.15-188.
4. **Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С., Нгуен Тай Ханг Лыонг.** Верификация методики численного моделирования динамического напряженно-деформированного состояния трехмерных систем «сооружение – жидкость». // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 4, 2015, pp. 124-132.

5. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Усманов А.Р., Щербина С.В., Мсхалая Ж.И.** О методах численного моделирования связанных систем «сооружение – жидкость». // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 4, 2014, pp. 54-75.
 6. **Parrinello F., Borino G.** Lagrangian finite element modelling of dam – fluid interaction: Accurate absorbing boundary conditions. // *Computers and Structures*, 85, 2007, pp. 932-943.
 7. СНиП 11-7-81*. Строительные нормы и правила, Глава 7. Строительство в сейсмических районах, Госстрой СССР. - М.: Стройиздат, 1982, - 49 с.
 8. Учет сейсмических воздействий при проектировании гидротехнических сооружений. (пособие к разделу 5: Гидротехнические сооружения СНиП II-7-81). П 17-85 – Л.: ВНИИГ, 1986. – 310с
 9. **Шульман С.Г.** Сейсмическое давление воды на гидротехнические сооружения. – Л.: Энергия, 1970. – 166 с.
 10. **Шульман С.Г.** Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. – М.: Энергия, 1980.–336с.
 11. **Westergaard H.M.** Water pressure on dams during earthquakes. // *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 1931, v. 57, N9, pp. 1303-1318.
- ковского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7 (499)183-59-94; e-mail: KafedraIPM@mgsu.ru.
- Дмитриев Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.
- Щербина Сергей Викторович, инженер Научно образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г.Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru.
- Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc, Professor, Director of StaDyO Research & Engineering Center; Science Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.
- Nguyen Tai Nang Luong, Ph.D Student, Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; tel./fax: +7 (499)183-59-94; e-mail: KafedraIPM@mgsu.ru.
- Dmitry S. Dmitriev, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 8th floor, 18, 3-ya Ulitsa Tverskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; tel. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.
- Sergey V. Scherbina, Engineer of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7(499)929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики, научный руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

Нгуен Тай Нанг Лыонг, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Национального Мос-

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК В ТРЕХМЕРНОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ. ЧАСТЬ 1. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

Е.И. Бозняков^{1,3}, И.Н. Афанасьева^{1,2,4}, А.М. Белостоцкий^{1,2,4}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ ООО «ПИК-Проект», г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Статья посвящена верификационным исследованиям методики численного моделирования внешнего обтекания тонкостенной упругой конструкции – цилиндрического пустого резервуара – в связанной постановке (Fluid-Structure Interaction, FSI). Обтекание происходит в турбулентном режиме при высоких числах Рейнольдса ($Re=1.2 \cdot 10^7$). В рамках первого этапа верификации представлены результаты расчетных исследований динамических характеристик – собственных частот и форм колебаний – в ПК ANSYS Mechanical в табличном и графическом виде. Исследована сеточная сходимость на разработанных параметризованных конечноэлементных моделях различной степени дискретизации, проведено сопоставление полученных численных результатов с «эталонными» данными источника. Для проведения основных расчетов в аэроупругой постановке в качестве базовой выбрана одна из рассматриваемых КЭ-моделей.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, турбулентное течение, численное моделирование, Fluid-Structure Interaction (FSI)

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION BETWEEN ELASTIC THIN-WALL STRUCTURE AND 3-D TRANSIENT FLOW. PART 1: VERIFICATION OF THE MECHANICAL FINITE ELEMENT MODEL

Evgeny I. Boznyakov^{1,3}, Irina N. Afanasyeva^{1,2,4}, Alexander M. Belostotsky^{1,2,4}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Research & Development Centre StaDyO Ltd, Moscow, RUSSIA

³ "PIK-Proekt" Ltd., Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: Present paper deals with the verification of a numerical technique of modeling fluid-structure interaction (FSI) problems. The configuration consists of incompressible viscous fluid around an elastic cylindrical wall-thin structure where the external flow is fully turbulent (Reynolds numbers $Re=1.2 \cdot 10^7$). Multivariate types of modal analysis were carried out using special software ANSYS Mechanical. Different types of grids were tested. Main results are showed in tables and plots. Based on the obtained results and comparison of them with reference data the main grid for future investigations of FSI problem was chosen.

Key words: aerohydroelasticity, aerohydrodynamics, turbulent flow, numerical simulation, Fluid-Structure Interaction (FSI)

1. ВВЕДЕНИЕ

Конструкции тонкостенных оболочек цилиндрической формы при определенном сочетании характерных геометрических параметров, физико-механических и динамических свойств системы и окружающей среды проявляют чувствительность к ветровым воздействиям. В результате подобного взаимодействия конструкции с ветровым потоком можно наблюдать такое аэроупругое явление, как *вихревой резонанс* (автоколебания тонкостенной цилиндрической оболочки при обтекании ее потоком воздуха с определённой скоростью).

Рассматривая диссипативную динамическую систему «поток-конструкция» с нелинейной обратной связью, стоит обратить внимание на спектр собственных частот и форм колебаний данной конструкции и основную частоту срыва вихрей, наблюдаемую при обтекании исследуемой системы. В случае близости частотных характеристик системы возникают значительные перемещения конструкции с возрастающей амплитудой колебаний, что приводит к изменению граничных условий.

Оценить в полной мере взаимное влияние реальных порывов ветра на рассматриваемое сооружение и деформированной конструкции на пространственно-временные характеристики потока возможно лишь с использованием современных численных моделей и методов, применяя связанные постановки для решения междисциплинарных задач.

Моделирование явлений аэроупругих колебаний и без того нетривиального с точки зрения аэродинамики цилиндрического тела требует от исследователей высокой квалификации и обоснованного применения существующих расчетных методики их программных реализаций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В развитие методики численного моделирования трехмерных динамических задач строительной аэрогидроупругости [4], а также для подробного изучения природы возникновения аэроупругих колебаний тонкостенных цилиндрических конструкций выбрана задача численного моделирования автоколебаний пустого силоса, возникающих при обтекании воздушным потоком. Выбор данного примера обоснован тем, что в октябре 2002 г. в порту Антверпена (Бельгия) во время шторма наблюдались автоколебания на нескольких пустых силосах из группы сорока цилиндров [1, 2].

Решение задачи определения динамической реакции сооружения и изменения пространственно-временных характеристик потока в результате их взаимодействия в связанной постановке следует разбить на 3 верификационных этапа. *Первый этап* – верификация конечно-элементной модели тонкостенного цилиндрического резервуара, основанная на проведении модального анализа и сопоставлении полученных результатов с данными натурных замеров и результатами альтернативных численных расчетов [1, 2]. *Второй этап* – верификация аэродинамической модели, основанная на численном решении уравнений несжимаемой ньютоновской жидкости Навье-Стокса с использованием модели турбулентности URANS SST и сопоставлении полученных результатов с данными альтернативных численных расчетов [1, 2]. *Третий этап* – верификация связанного аэроупругого расчета, который включает в себя вычисление пространственно-временных характеристик потока и напряженно-деформированного состояния конструкции во времени с применением технологии FSI (Fluid Structure Interaction) и сопоставлении полученных результатов с данными альтернативных численных расчетов [1, 2].

В качестве основного инструмента для проведения многовариантных расчетных верификационных и апробационных исследова-

ний выбран верифицированный в системе ПААСН универсальный ПК ANSYS Mechanical и ПК ANSYS CFD.

2,5 м и толщиной, уменьшающейся с высотой (рис. 2, табл. 1).

3. ОПИСАНИЕ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Геометрическая модель силоса.

Объектом исследования выбран один из сорока силосов, расположенных в пяти рядах по 8 в каждом, расстояние между которыми составляет 30 см (рис. 1). Цилиндрическая оболочка диаметром 5,5 м и высотой 25 м состоит из 10 алюминиевых листов высотой

КЭ-модели силоса

Параметризованная трехмерная оболочечная конечноэлементная (КЭ) модель силоса создавалась в препроцессоре ANSYS Mechanical с использованием четырехузлового пространственно-оболочечного конечного элемента *SHELL181*, реализующего теорию оболочек Миндлина-Рейсснера, с шестью степенями свободы, применение которого диктуется геометрией рассматриваемой конструкции.

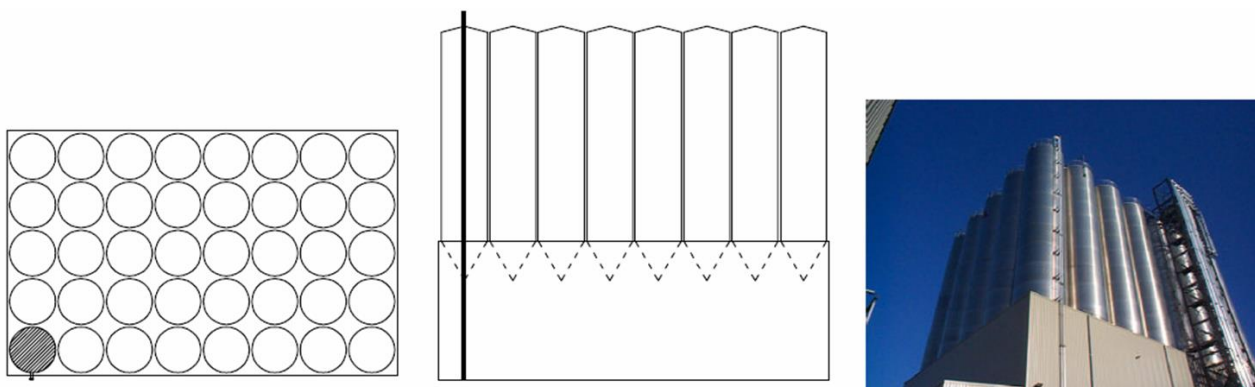


Рисунок 1. Группа силосов в порту Антверпена (Бельгия) в плане (слева), вид сбоку (в центре), изометрия (справа)

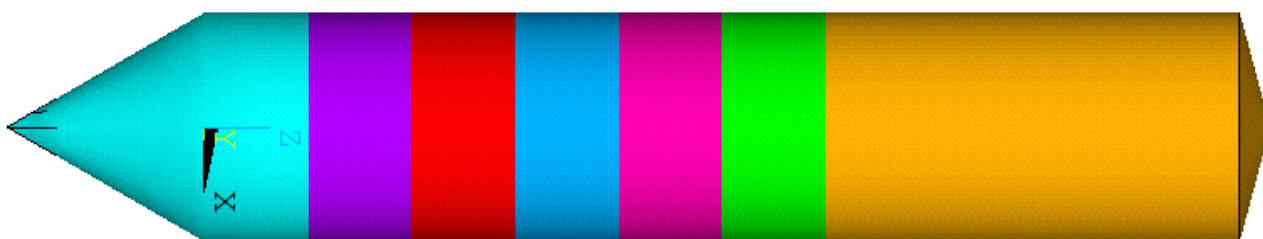


Рисунок 2. Геометрическая модель одиночного силоса (ANSYS Mechanical). Цветом отображены различные толщины оболочки

Таблица 1. Изменение толщины цилиндрической оболочки силоса по высоте

Высота, м	Толщина, мм	Цветовое соответствие (рис. 2)
0,0-2,5	10,5	(●)
2,5-5,0	9,0	(●)
5,0-7,5	8,5	(●)
7,5-10,0	7,5	(●)
10,0-12,5	7,0	(●)
12,5-15,0	6,5	(●)
15,0-25,0	6,0	(●)

В верхней и нижней части к цилиндру приварены конусы под углом 15° и 60° , соответственно. Перпендикулярные балки-опоры поддерживают нижнюю часть цилиндра и крепятся в четырех точках на окружности, для которых в КЭ-модели заданы соответствующие *граничные условия*: в четырех узлах ограничены все линейные ($UX=UY=UZ=0$) и угловые ($ROTX=ROTY=ROTZ=0$) перемещения в местах соединения силоса с опорными баками. Для исследования сеточной сходимости рассмотрены четыре варианта расчетной сетки

(рис. 3, табл. 2) с последовательно увеличивающимся числом элементов. В зонах оболочечного краевого эффекта (стыки «дно-стенка», «стенка-крышка») размер КЭ по высоте h_e выбирался из условия адекватного определения моментных составляющих:

$$h_e \leq 0,2\sqrt{R \cdot th} = 0,0257 \text{ м}, \quad (1)$$

где $R = 2,75, \text{ м}$ – радиус рассматриваемой модели; $th = 0,006 \text{ м}$ – толщина стенки.

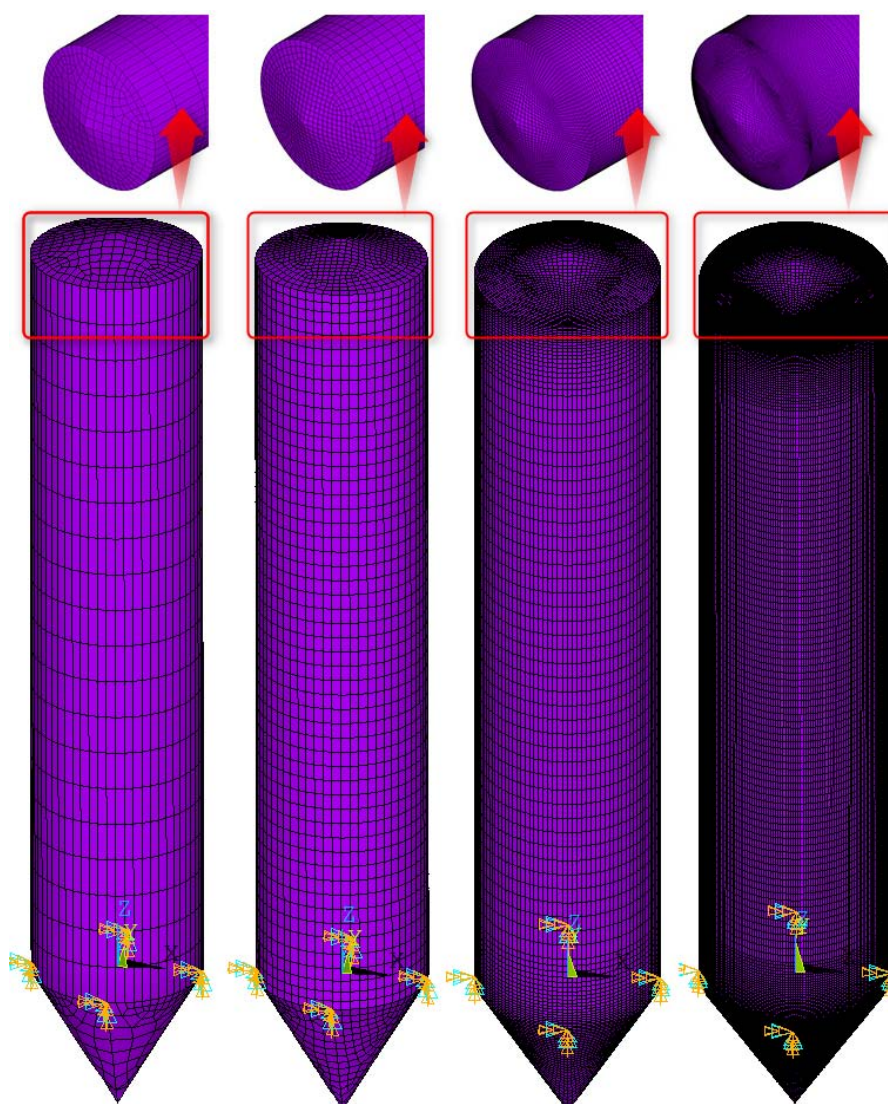


Рисунок 3. Оболочечные конечноэлементные модели одиночного силоса (ПК ANSYS Mechanical, КЭ SHELL181) с указанием граничных условий (слева направо – D1, M1, M2, M3).

Таблица 2. Характеристики КЭ-моделей.

Модель	Общее кол-во КЭ в модели	Общее кол-во узлов в модели	Кол-во КЭ по окружности в цилиндрической части	Кол-во КЭ по высоте	Отношение размера КЭ к рекомендуемому в зоне краевого эффекта
D1	1686	1680	60	20	48.64
M1	4142	4142	60	52	11.15
M2	15000	15002	120	80	2.23
M3	60000	60002	240	160	1.00

Параметры расчетов

Для расчетных моделей приняты следующие физико-механические характеристики: модуль упругости $E = 6,76 \cdot 10^4$ МПа, плотность $\rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, соответствующие материалу (алюминий), из которого выполнены конструктивные элементы силоса.

Модальный анализ проводился в ПК ANSYS Mechanical блочным методом Ланцоша 3. Решение СЛАУ выполнялось прямым разреженным методом (SPARSE).

Формы собственных колебаний охарактеризованы парой параметров (m, n) , где m – число полуволн в продольном (по высоте) направлении оболочки, n – число кольцевых волн оболочки. Данные натурных испытаний исследования взяты из электронного источника 1. Измерения колебаний проводились на угловом силосе, где была зафиксирована максимальная амплитуда колебаний при воздействии сильного ветра. Датчики были расположены в различных точках по высоте. Радиальное ускорение измерялось в 10 точках. Схема расположения датчиков (точек мониторинга) изображена на рисунке 4.

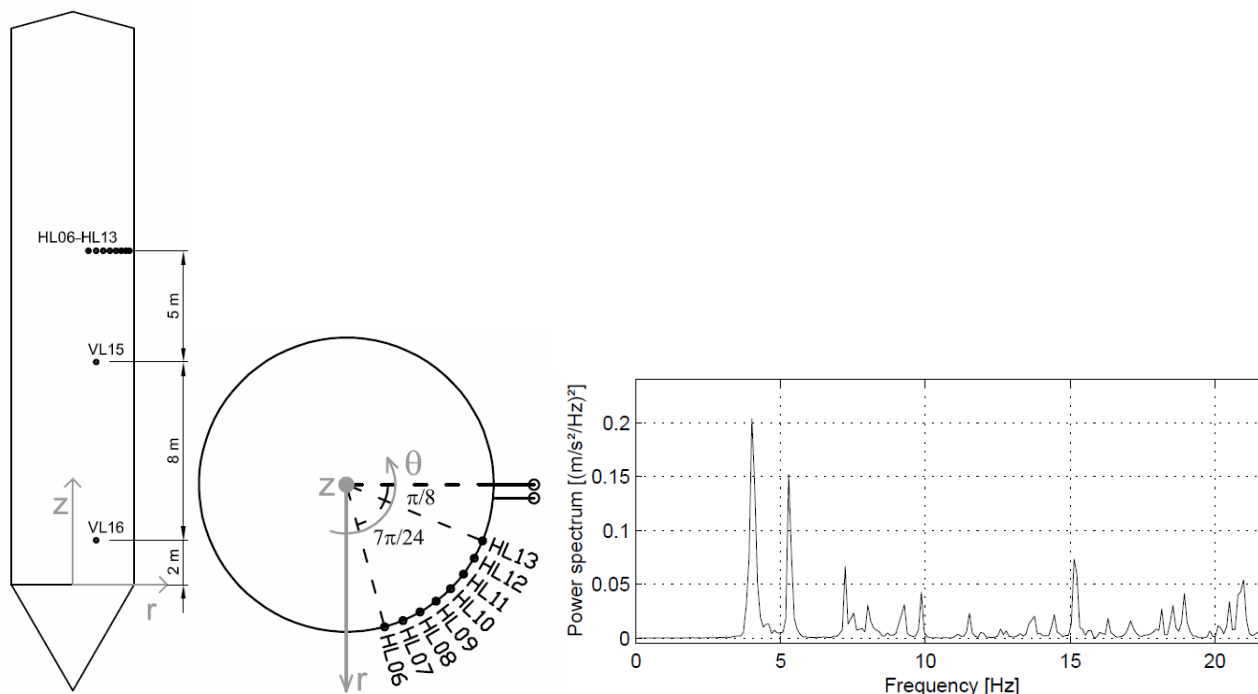


Рисунок 4. Схема расположения датчиков (точки мониторинга). Спектральная плотность ускорений цилиндрической оболочки в точке мониторинга HL09, $\text{м}^2/\text{Гц}^2$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В таблице 3 и на рисунках 4-6 представлены результаты численных расчетов: собственные частоты и формы колебаний одиночного силоса в сопоставлении с расчетными и экспериментальными «эталонными» данными [1, 2] и относительные погрешности, вычисляемые по формуле (2):

$$\varepsilon = \frac{|x_э - x_p|}{x_э} * 100\%, \quad (2)$$

где $x_э$ – «эталонные» данные [1, 2] и x_p – результаты численных расчетов, выполненных авторами настоящей статьи.

Сопоставление с экспериментом показывает ожидаемую картину малости погрешности для лучшей серии экспериментов. Расхождение убедительно объясняется погрешностями самого эксперимента (прежде всего несовершенством цилиндрической формы). В то же время выявлено "трогательная" близость результатов «эталонных» [1, 2] и настоящих расчетных исследований. Продемонстрирована сеточная сходимость собственных частот колебаний. Принимая во внимание результаты расчетных аэродинамических исследований [1, 2] и данные из нормативных источников [5], можно оценить характерную частоту срыва вихрей (f_{vs}) для конструкций цилиндрической формы:

$$f_{vs} = \frac{Sh \cdot U}{D} = 1.56 \dots 2.13 \text{ [Гц]}, \quad (3)$$

где: Sh – число Струхала, U – средняя скорость потока на характерной высоте [м/с], D – характерный размер, диаметр силоса [м].

Ближайшими к этим частотам, как показывают расчеты и экспериментальные данные, оказываются частоты собственных колебаний оболочки, соответствующие $m=1$, $n=3$ и $n=4$ ($f_{(1,3)}=4.06$ Гц, $f_{(1,4)}=4.00$ Гц). Влиянием других собственных форм ввиду их сильной частотной отстройки (ближайшая $f_{(1,5)}=5.50$ Гц) можно пренебречь.

Как показывают результаты настоящих численных исследований, согласующиеся с теориями оболочек и численных схем, для дальнейших аэроупругих расчетов достаточно принять самую «грубую» КЭ-модель DI .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящего, *первого этапа* расчетных исследований выполнено сопоставление вычисленных частот и форм собственных колебаний тонкостенного силоса с "эталонными" экспериментальными и расчетными данными [1, 2]. Продемонстрирована сеточная сходимость расчетных собственных частот колебаний. Сопоставление с экспериментом показывает ожидаемую картину малости погрешности для лучшей серии экспериментов. Расхождение объясняется погрешностями самого эксперимента (прежде всего несовершенством цилиндрической формы). Выявлена близость результатов "эталонных" [1, 2] и настоящих конечноэлементных расчетных исследований.

Для дальнейших аэроупругих расчетов в качестве базовой принимается "грубая" КЭ-модель DI , обеспечивающая как приемлемую точность, так и вычислительную экономичность, столь необходимую для нелинейных динамических связанных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Грант Президента РФ, договор №14.Z56.16.8493-МК) и за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.2 «Разработка, верификация и апробация адаптивной методики численного моделирования трехмерных динамических задач аэрогидроупругости в строительстве».

Таблица 3. Расчетные значения собственных частот колебаний одиночного стлоса (модели D1, M1, M2, M3 в сопоставлении с расчетными и экспериментальными "эталонными" данными [1, 2] и относительные погрешности (ε_p^* и $\varepsilon_{\omega}^{**}$, %)).

(m,n)	Расчет [1,2]		Эксперимент [1,2]		D1				M1				M2				M3			
	f, Гц	ε_p , %	f, Гц	ε_p , %	f, Гц	ε_p , %	ε_{ω} , %	$\varepsilon_{\omega}^{**}$, %	f, Гц	ε_p , %	ε_{ω} , %	$\varepsilon_{\omega}^{**}$, %	f, Гц	ε_p , %	ε_{ω} , %	$\varepsilon_{\omega}^{**}$, %	f, Гц	ε_p , %	ε_{ω} , %	$\varepsilon_{\omega}^{**}$, %
(1,2)	7.75	-	7.87	-	8.03	3.6	2.0	-	7.93	2.3	0.8	-	7.86	1.4	0.1	-	7.81	0.8	0.8	-
(1,3)	3.93	-	3.91; 4.49	-	4.06	3.3	3.8; 9.6	-	4.05	3.1	3.6; 9.8	-	4.01	2.0	2.6; 10.7	-	3.99	1.5	2.0; 11.1	-
(1,4)	3.93	-	3.91; 4.00; 4.08; 4.49	-	4.00	1.8	2.3; 0.0; 2.0; 10.9	-	4.00	1.8	2.3; 0.0; 2.0; 10.9	-	3.95	0.5	1.0; 1.3; 3.2; 12.0	-	3.93	0.0	0.5; 1.8; 3.7; 12.5	-
(1,5)	5.25	-	5.31; 5.34	-	5.50	4.8	3.6; 3.0	-	5.48	4.4	3.2; 2.6	-	5.36	2.1	0.9; 0.4	-	5.31	1.1	0.0; 0.6	-
(1,6)	7.37	-	7.07; 7.23; 7.49	-	7.72	4.7	9.2; 6; 8; 3.1	-	7.73	4.9	9.3; 6; 9; 3.2	-	7.46	1.2	5.5; 3.2; 0.4	-	7.40	0.4	4.7; 2.4; 1.2	-
(1,7)	9.72	-	9.84; 10.7	-	10.37	6.7	5.4; 3.1	-	10.38	6.8	5.5; 3.0	-	9.89	1.7	0.5; 7.6	-	9.77	0.5	0.7; 8.7	-
(1,8)	12.5	-	12.8	-	13.64	9.1	6.6	-	13.66	9.3	6.7	-	12.79	2.3	0.1	-	12.59	0.7	1.6	-
(1,9)	15.7	-	15.7	-	17.58	12.0	-	-	17.62	12.2	-	-	16.19	3.1	-	-	15.86	1.0	-	-
(1,10)	19.4	-	19.8	-	22.25	14.7	12.4	-	22.32	15.1	12.7	-	20.07	3.5	1.4	-	19.56	0.8	1.2	-
(2,3)	13.9	-	-	-	14.19	2.1	-	-	14.02	0.9	-	-	13.99	0.6	-	-	13.91	0.1	-	-
(2,4)	8.71	-	-	-	8.88	2.0	-	-	8.80	1.0	-	-	8.74	0.3	-	-	8.72	0.1	-	-
(2,5)	8.01	-	-	-	8.27	3.2	-	-	8.23	2.7	-	-	8.08	0.9	-	-	8.03	0.2	-	-
(2,6)	9.29	-	9.05; 9.25	-	9.72	4.6	7.4; 5.1	-	9.71	4.5	7.3; 5.0	-	9.40	1.2	3.9; 1.6	-	9.33	0.4	3.1; 0.9	-
(2,7)	11.5	-	11.1; 11.4	-	12.24	6.4	10.3; 7.4	-	12.23	6.3	10.2; 7.3	-	11.69	1.7	5.3; 2.5	-	11.55	0.4	4.1; 1.3	-
(2,8)	14.1	-	14.2	-	15.27	8.3	7.5	-	15.28	8.4	7.6	-	14.37	1.9	1.2	-	14.16	0.4	0.3	-
(2,9)	17.1	-	-	-	18.92	10.6	-	-	18.97	10.9	-	-	17.51	2.4	-	-	17.18	0.5	-	-
(2,10)	20.5	-	-	-	23.27	13.5	-	-	23.40	14.1	-	-	21.14	3.1	-	-	20.64	0.7	-	-
(3,4)	17.5	-	-	-	18.04	3.1	-	-	17.68	1.0	-	-	17.57	0.4	-	-	17.50	0.0	-	-
(3,5)	13.0	-	-	-	13.47	3.6	-	-	13.25	1.9	-	-	13.11	0.8	-	-	13.05	0.4	-	-
(3,6)	12.0	-	11.9; 12.0	-	12.55	4.6	5.5; 4.6	-	12.44	3.7	4.5; 3.7	-	12.13	1.1	1.9; 1.1	-	12.04	0.3	1.2; 0.3	-
(3,7)	13.6	-	13.6	-	14.53	6.8	6.8	-	14.45	6.3	6.3	-	13.77	1.3	1.3	-	13.63	0.2	0.2	-
(3,8)	16.1	-	15.9	-	17.42	8.2	9.6	-	17.37	7.9	9.2	-	16.38	1.7	3.0	-	16.15	0.3	1.6	-
(3,9)	19.0	-	19.0; 19.1	-	21.01	10.6	10.6; 10.0	-	21.00	10.5	10.5; 9.9	-	19.44	2.3	2.3; 0.4	-	19.08	0.4	0.4; 0.1	-
(4,5)	20.8	-	-	-	21.96	5.6	-	-	21.22	2.0	-	-	21.05	1.2	-	-	20.89	0.4	-	-
(4,6)	16.8	-	-	-	17.76	5.7	-	-	17.29	2.9	-	-	16.96	1.0	-	-	16.82	0.1	-	-
(4,7)	16.3	-	16.3; 16.5	-	17.40	6.7	6.7; 5.5	-	17.17	5.3	5.3; 4.1	-	16.55	1.5	1.5; 0.3	-	16.37	0.4	0.4; 0.8	-
(4,8)	18.3	-	-	-	19.88	8.6	-	-	19.74	7.9	-	-	18.65	1.9	-	-	18.38	0.4	-	-

где:

* ε_p – относительная погрешность полученных численных результатов расчета в сопоставлении с расчетными "эталонными" данными [1, 2];

** ε_{ω} – относительная погрешность полученных численных результатов расчета в сопоставлении с экспериментальными "эталонными" данными [1, 2].

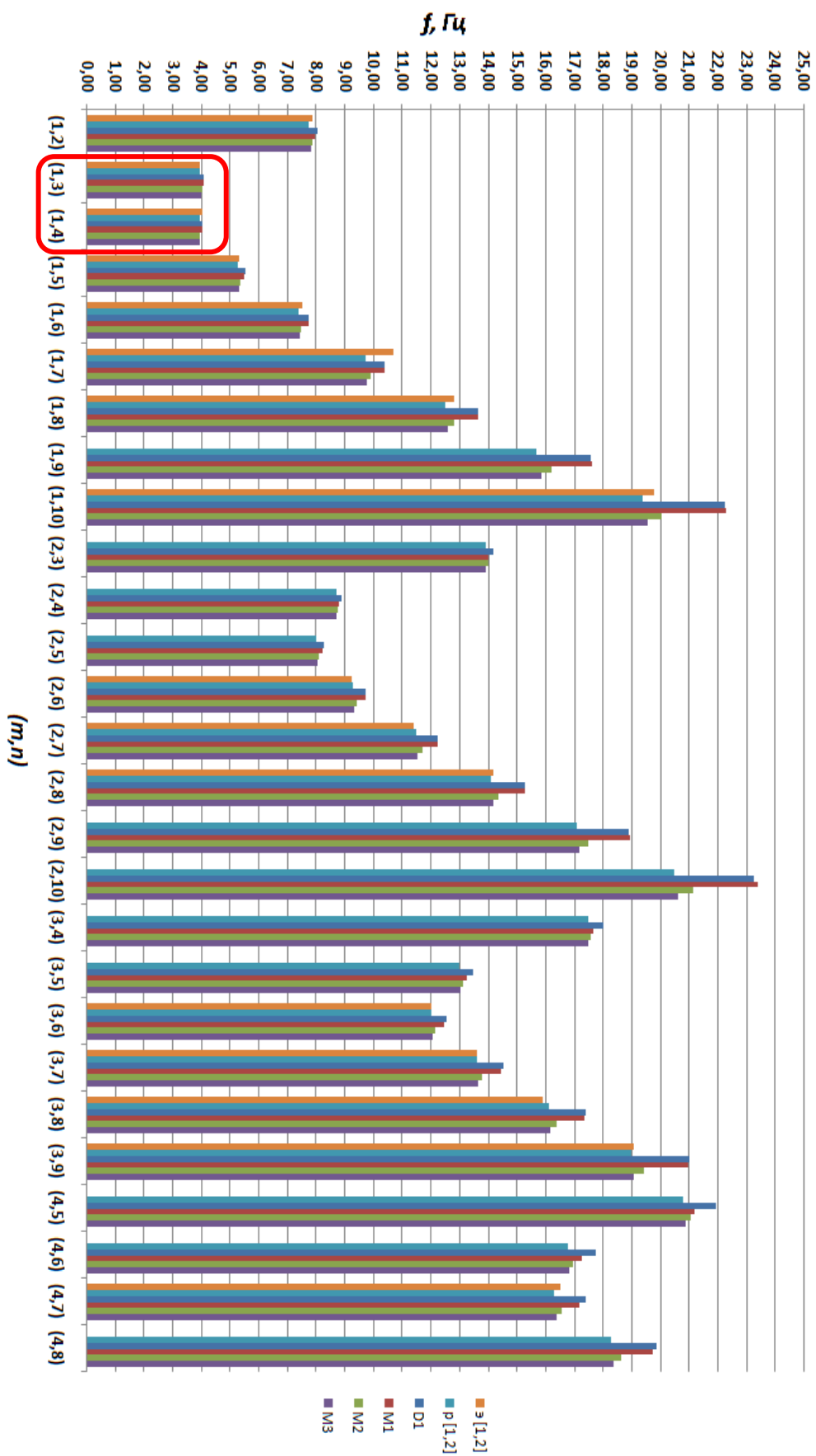


Рисунок 4. Частоты собственных колебаний одиночного стержня в зависимости от количества полуволи в продольном (m) направлении и колдыцевых волн (n) оболочке. Рыжий столбец "ε [1,2]" – результаты эксперимента [1, 2]; голубой столбец "p [1,2]" – результаты альтернативного численного расчета [1, 2]; синий, красный, зеленый и фиолетовый столбцы – численные результаты авторов статьи для моделей D1, M1, M2 и M3, соответственно

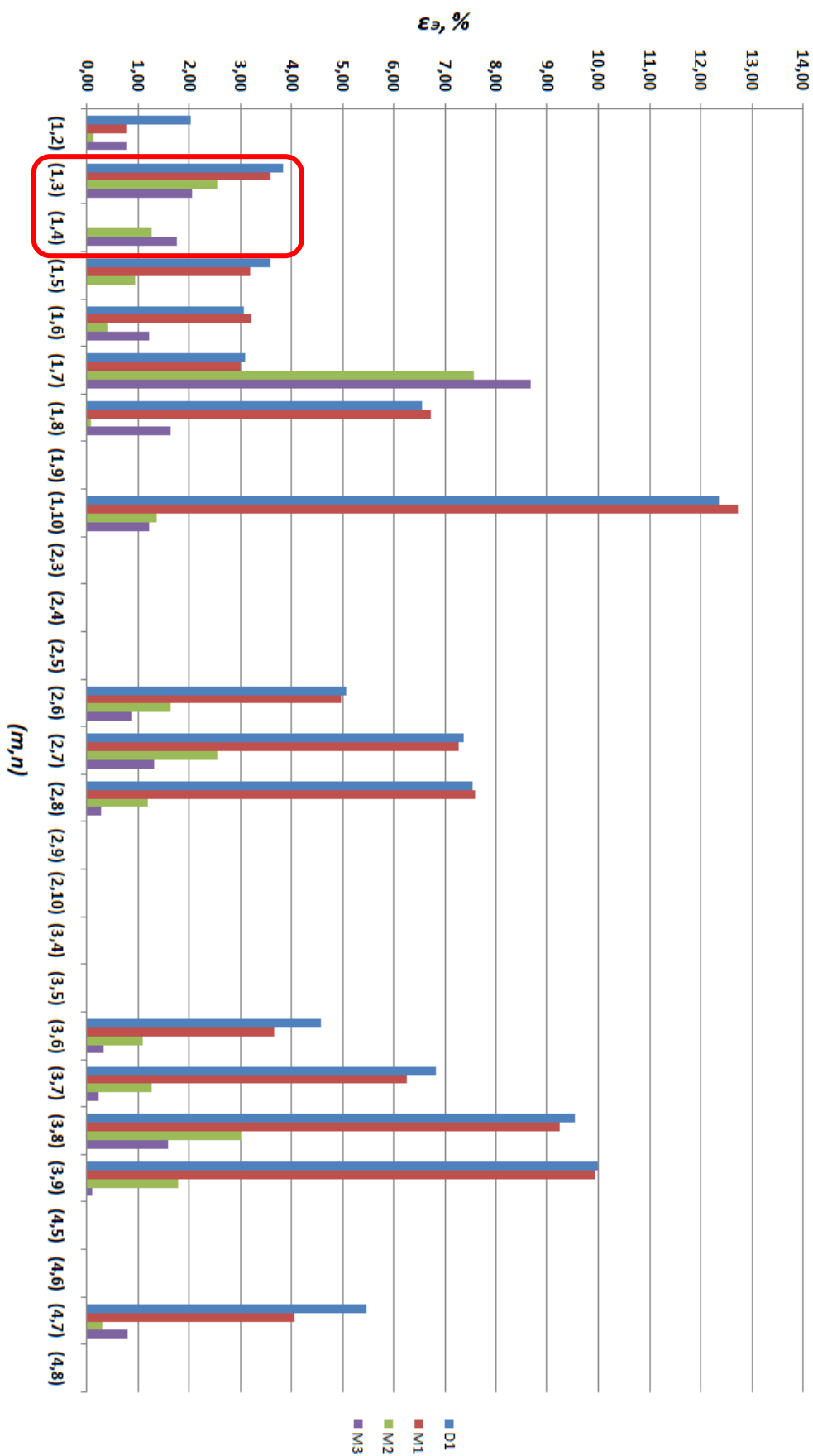


Рисунок 5. Относительная погрешность численных результатов расчетов (для моделей D1, M1, M2 и M3) в сопоставлении с "эталонными" экспериментальными данными [1, 2]

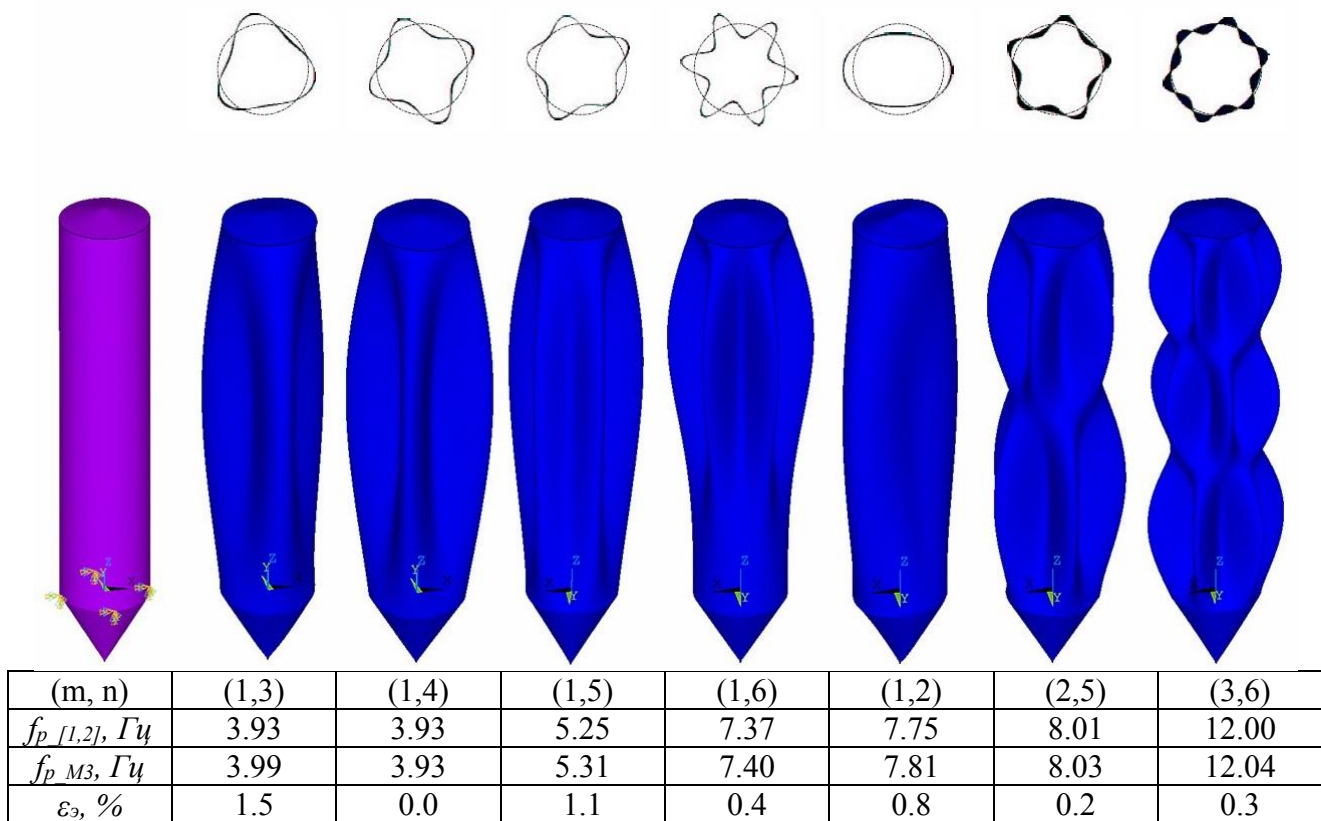


Рисунок 6. Формы и соответствующие им частоты собственных колебаний одиночного силоса с указанием относительной погрешности ε_3 . Сверху – результаты «эталонного» численного расчета [1, 2], снизу – численные результаты авторов статьи (КЭ-модель М3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dooms D., Degrande G., De Roeck G., Reynders E.** Wind induced vibration of thin-walled cylindrical structures.
2. **Dooms D.** Fluid structure interaction applied to flexible silo constructions, 2009.
3. **Mark T. Jones, Merrell L. Patrick.** The use of Lanczos’s method to solve the large generalized symmetric definite eigenvalue problem.
4. **Афанасьева И.Н.** Адаптивная методика численного моделирования трехмерных динамических задач строительной аэрогидроупругости. Дисс. на соиск. уч. степ. к.т.н., Москва, 2015.
5. Eurocode 1: Basis design and action on structures. Part 2–4: Wind action. ENV 1991-2-4, CEN, 1994.

Бозняков Евгений Игоревич, аспирант кафедры информатики и прикладной математики; Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; Национальный исследовательский университет Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, кандидат технических наук, ассистент кафедры информатики и прикладной математики, и.о. директора Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; Национальный исследовательский университет Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики, научный

Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке.
Часть 1: Верификация механической конечноэлементной модели

руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

Evgeny I. Boznyakov, Ph.D. Student, Department of Applied Mathematics and Computer Sciences; Research & Education Center of Computation Simulation; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, YaroslavskoeShosse, 129337, Moscow, Russia; tel./fax: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Irina N Afanasyeva, Ph.D., Applied Mathematics and Computer Sciences; Director of Research & Education Center of Computation Simulation; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, YaroslavskoeShosse, 129337, Moscow, Russia; tel./fax: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc, Professor, Director of StaDyO Research & Engineering Center; Science Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТЕСНЕННОЙ СТРУИ ВО ВСТРЕЧНОМ ПОТОКЕ

В.Н. Варпаев, И.Ю. Ланцова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача численного моделирования развития плоской турбулентной стесненной струи во встречном потоке, ее решение с помощью программного комплекса ANSYS CFX. Приводится сопоставление результатов численного расчета с экспериментом, а также сравнение численных расчетов для моделей RANS SST и LES.

Ключевые слова: численное моделирование, модель турбулентности, RANS SST, LES, программный комплекс ANSYS CFX

NUMERICAL SIMULATION OF FLAT TURBULENT TIGHTNESS JET IN OPPOSITE STREAM

Vladimir N. Varapaev, Irina U. Lantsova

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This article present numerical simulation result of flat turbulent tightness jet in opposite stream with ANSYS CFX. Numerical calculations and results of experiments are compared. Comparison of results are provided for two models of turbulence: RANS SST and LES.

Key words: computational fluid dynamics, turbulence model, RANS SST, LES, software package ANSYS CFX

1. ВВЕДЕНИЕ

В технических приложениях часто используются струи, развивающиеся во встречном потоке (завесы для отсекаания холодного воздуха, проникающего в помещения зданий, некоторые виды вентиляционных струй, камеры сгорания двигателей, камеры смешения в некоторых химических технологиях и энергетических агрегатах и т.п.). Экспериментальное исследование таких течений для плоского и осесимметричного случаев производилось в [1 - 5]. В [4] с помощью приближенного интегрального метода и некоторых

гипотез о характере течения, основанных на экспериментальных данных, получены приближенные аналитические выражения для основных характеристик осесимметричного течения в рамках пограничного слоя для случая $a \gg 1$, где a - геометрический параметр, характеризующий отношение размеров набегающего потока и направленной навстречу ему струи. В экспериментальных работах также, в основном, рассматривался случай больших значений a . Приведенное ниже исследование проводится для плоского случая при умеренных значениях $a = 10 \div 25$, при которых существенно стесненность струи

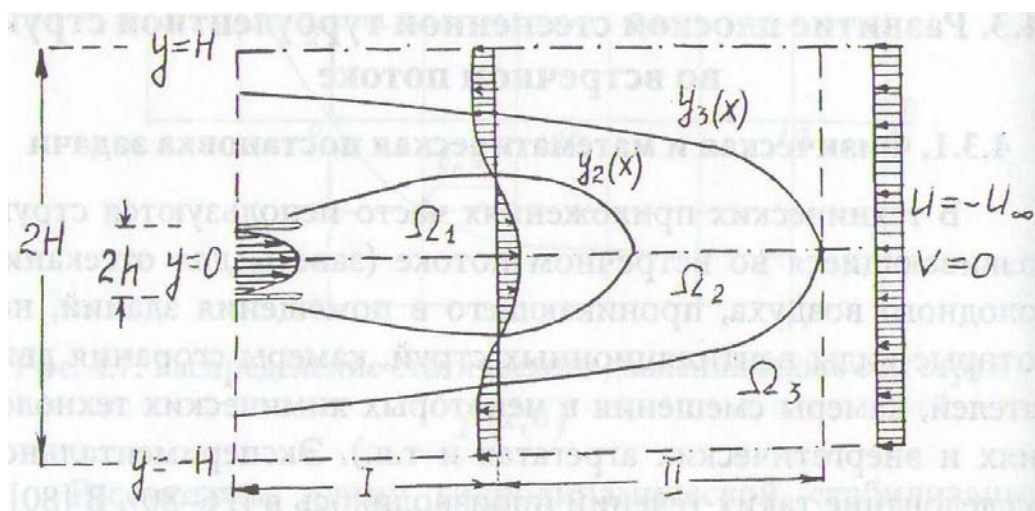


Рисунок 1. Схема струи, развивающейся во встречном потоке.

Расчеты проведены на основе нестационарной системы уравнений Навье-Стокса для турбулентного движения, реализованной с помощью модели турбулентности LES в комплексе ANSYS CFX. На основе законов сохранения получена аналитическая оценка области параметров, в которых существует решение задачи, и проведено сравнение результатов численного решения с имеющимися экспериментальными данными.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская турбулентная струя, вытекающая из щели высоты $2h$ и взаимодействующая со встречным равномерным потоком, имеющим скорость U_∞ . Решение ищется в области

$$\Omega = \{-B \leq x \leq L, -H \leq y \leq H\}.$$

Схема течения приведена на рис.1. Предполагается, что границы $y = \pm H$ являются линиями симметрии, на которых отсутствует протекание жидкости и трение и, следовательно, струя является частью многоструйной периодической системы. Пусть U_0 – средняя по расходу скорость струи на выходе

из щели. Определяющими параметрами задачи являются:

$$a = \frac{H}{h}, g = \frac{U_\infty}{U_0}.$$

Согласно опытным данным все течение можно условно разделить на три области (рис. 1): область Ω_1 внутри кривой $y_2(x)$, в которой поток струи сохраняет первоначальное направление; область взаимодействия струи со встречным потоком Ω_2 , расположенная между кривыми $y_2(x)$ и $y_3(x)$; область невозмущенного встречного потока Ω_3 , расположенная вне кривой $y_3(x)$.

Положение кривой $y_2(x)$ определяется из решения задачи точно: это изотаха скорости $U = 0$. Положение $y_3(x)$ определяется приближенно, с заданной точностью.

Поток в области Ω_3 считается невозмущенным в том смысле, что в каждом сечении $x = \text{const}$ профиль скорости является равномерным $U = U_*$, причем $U \neq U_\infty$. Как показали расчеты, решение в области Ω_3 достаточно хорошо описывается уравнением Бернулли:

$$p_* + \frac{\rho}{2} U_*^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \quad (1)$$

Эксперименты показывают, что область взаимодействия струи со встречным потоком можно по длине разбить на две зоны. В зоне 1 струя расширяется и давление в ней изменяется незначительно. В зоне 2 происходит торможение и разворот струи, статическое давление в ней сильно изменяется. Описание течения в зоне 2, а, следовательно, и общей задачи возможно только в рамках полной системы уравнений Навье-Стокса.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Расчеты производились с помощью программного комплекса ANSYS CFX. Так как рассматривается турбулентное течение, то были использованы модели турбулентности: RANS SST и LES. Вся расчетная область разбивалась на элементы с использованием ПК ANSYS Mechanical при помощи параметризованного макроса, написанного на внутреннем языке программирования APDL. При решении задач использовались неравномерные сетки со сгущением сетки в окрестности больших градиентов.

Задачи решались в половине области, приведенной на рисунке 1. Полагалось, что на границах $y = 0$ и $y = a$ выполняются условия симметрии.

При $x = L$ в набегающем потоке $u = -U_\infty$.

Так как в левом сечении области

$$\{ x = -B, 1 \leq y \leq a \}$$

возможно как вытекание воздуха, так и втекание за счет подсоса струей, то в этом сечении для стационарного случая задавались «мягкие» граничные условия.

Предполагалось, что в начальном сечении щели $x = -B$, $0 \leq y \leq 1$ для профиля скорости выполняется степенной закон [9] с максимальным значением скорости на оси щели, равной U_m . Показатель степени выбирается

в зависимости от числа Рейнольдса [9]. Граничные значения для $K_0(y)$ и $\varepsilon_0(y)$ в начальном сечении щели $x = -B$ должны быть заданы из экспериментальных данных или известных теоретических оценок для развитого течения в канале. В частности, были использованы соотношения, предложенные в [6].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ.

В расчетах исследовалось влияние геометрического параметра

$$a = \frac{H}{h},$$

характеризующего стесненность струи, и параметра

$$g = \frac{U_\infty}{U_0}$$

на характеристики течения. Рассматривались значения $a = 10; 25$ и $g = 0,1 \div 0,8$.

На рис.2 представлено сопоставление результатов численных расчетов для моделей SST и LES для $a = 25$ и $g = 0,4$. Так как модель LES показала хорошее сопоставление с экспериментом [3], в отличии от SST, то далее приводятся результаты только для модели LES.

На рисунках 3 и 4 приведены результаты расчетов векторных полей скорости для случаев $a=25$ и $a=10$ (большое стеснение струи), в момент времени $t=0.8$ сек.

Полагалось, что профиль скорости струи в щели за промежуток времени от $t=0$ до $t=0,01$ сек. изменялся от $u=0$ до степенного профиля в канале. Результаты показывают, что с уменьшением параметра g дальнобойность струи увеличивается, а область по y взаимодействия струи и внешнего потока растет. Эта область также растет при увеличении стесненности (случай $a=10$ на рисунке 4).

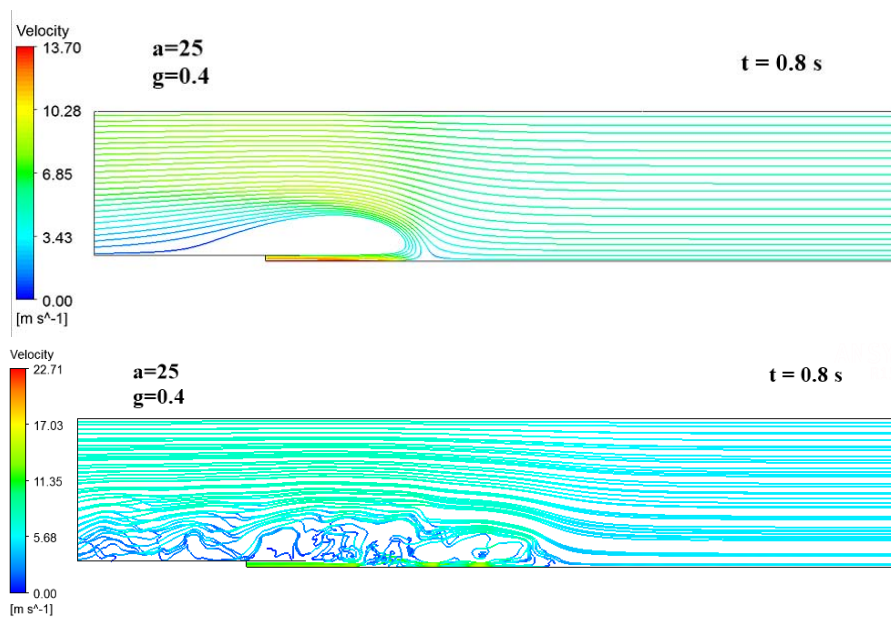


Рисунок 2. Сопоставление результатов. Линии тока при $t=0,8$ с (сверху – RANS SST, снизу – LES).

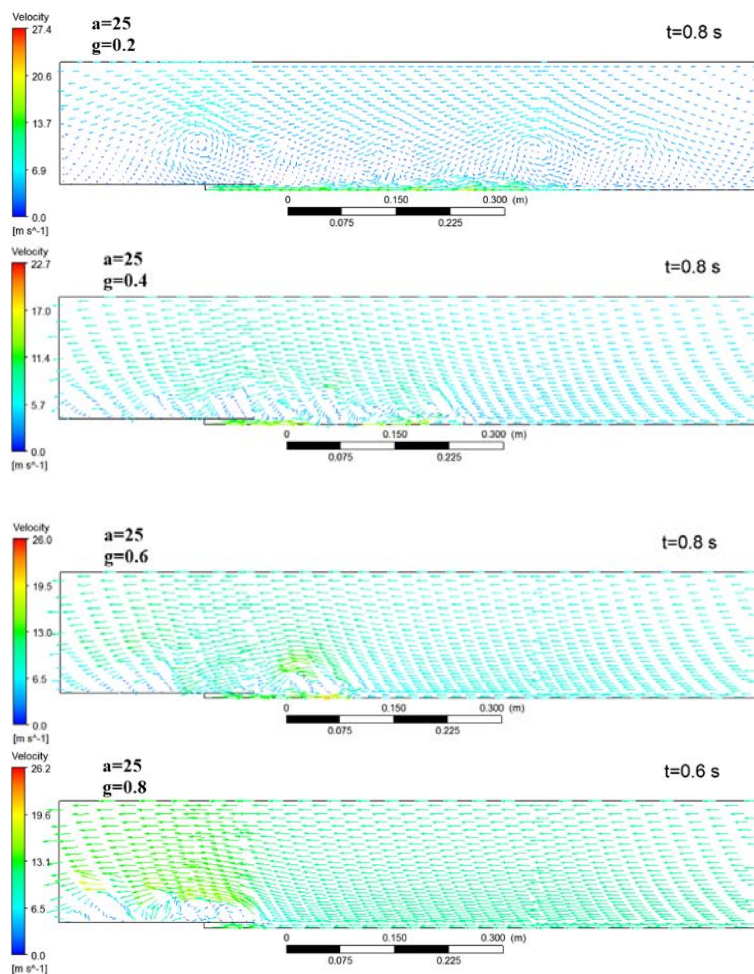


Рисунок 3. Векторные поля скорости при $a=25$ и различных значениях $g=0,2; 0,4; 0,6; 0,8$.

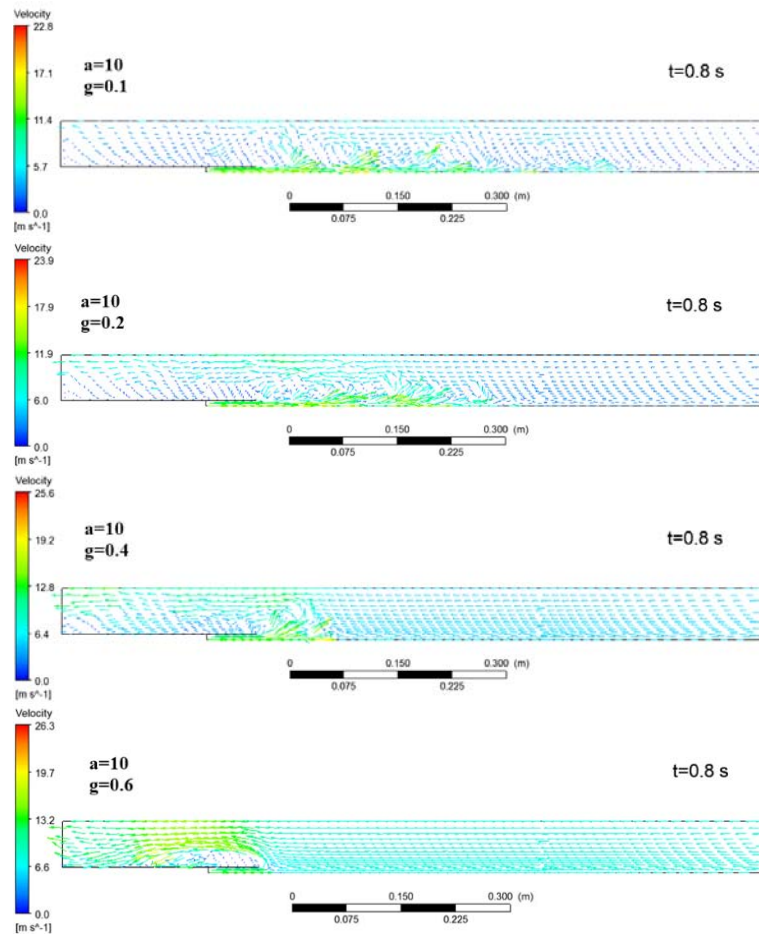


Рисунок 4. Векторные поля скорости при $a=10$ (большое стеснение струи).

В экспериментах [1-5] отмечалось, что течение в области взаимодействия струи и встречного имеет нестационарный характер: фото- и киносъемки показали, что дальнобойность струи непрерывно изменяется в среднем на 5-8%. Такое поведение потока можно объяснить с точки зрения теории гидродинамической устойчивости, так как граница между встречными потоками является неустойчивой, и здесь могут возникать нестационарные вихревые структуры. Некоторые из таких задач для закрученных потоков рассматривались, например, в [9,10].

С помощью результатов, приведенных на рисунках 3-4, можно приближенно определить дальнобойность струи для рассмотренных значений параметров.

Безразмерные значения дальнобойности, отнесенные к полуширине щели, из которой вытекает струя, для расчетов с помощью модели LES дают следующие результаты.

Для $a=10$: $L=71$ (при $g=0,1$); $L=40-50$ (при $g=0,2$); $L=16$ (при $g=0,4$); $L=1-2$ (при $g=0,6$).
Для $a=25$: $L=80-90$ (при $g=0,2$); $L=41-43$ (при $g=0,4$); $L=23-26$ (при $g=0,6$).

Для сравнения укажем, что в экспериментах [3] для случая $a=50$ и $g=0,32$ было получено, что дальнобойность примерно равна $L=70$. Это достаточно хорошо совпадает с численными результатами для $a=25$, так как случаи $a=25$ и $a=50$ соответствуют небольшой стесненности струи и соответствующие результаты должны быть достаточно близки.

Главное отличие рассматриваемого течения от обычной свободной струи заключается в том, что в области взаимодействия струи со встречным потоком по вертикали образуется висячая зона вихревого течения, размеры которой увеличиваются с ростом a и уменьшением g . Через эту зону осуществляется подсос воздуха струей на первоначальном этапе развития струи и потеря присоединенных

масс воздуха на заключительном этапе развития струи. С ростом величины a , т.е. с уменьшением стесненности, дальнобойность струи l увеличивается и растет вертикальный размер области взаимодействия струи со встречным потоком (область Ω_2 на рис.1). Уменьшение величины g , т.е. относительной скорости встречного потока также приводит к увеличению дальнобойности струи.

Анализ полученных численно гидродинамических полей показывает, что в области Ω_3 , которая расположена вне области взаимодействия струи с потоком, течение практически является безвихревым течением идеальной жидкости. Аналогичный результат был получен экспериментально в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Суй Х.Н.** Исследование развития круглой и плоской струи во встречном и спутном потоке. // Известия АН СССР, Сер. техн. и физ.-мат., 1961, т. 10, №3.
2. **Илизарова Л.И., Гиневский А.С.** Экспериментальное исследование струи во встречном потоке. // В кн.: Промышленная аэродинамика. – М.: Оборонгиз, 1962, Вып.23.
3. **Тимма Э.** Турбулентная круглая и плоские струи, развивающиеся во встречном потоке. // Известия АН ЭССР, 1962, т. 9, №4.
4. **Секундов А.Н.** Распространение турбулентной струи во встречном потоке. // В кн. Исследование турбулентных струй воздуха, плазмы и реального газа. Под ред. Г.Н. Абрамовича. – М.: Машиностроение, 1967.
5. **Кабаков Я.И., Расщупкин В.И.** Экспериментальное исследование следа за струей во встречном потоке. // Ученые записки ЦАГИ, том XIV, №3, 1983.
6. **Майорова А.И., Свириденков А.А., Ягодкин В.И.** Модели турбулентности, применяемые для расчетов течений в камерах сгорания. // В кн. Отрывные течения в камерах сгорания. Труды ЦИАМ, №1203, 1987, с. 5-13.
7. **Варапаев В.Н., Королев И.В.** Численное моделирование взаимодействия турбулентной струи и встречного потока. // Тезисы докладов Всесоюзного совещания «Нормирование ветровых нагрузок и расчет зданий, линий электропередачи и других сооружений на действие ветра». (Фрунзе, 1989). – М.: Информэнерго, 1989
8. **Варапаев В.Н., Китайцева Е.Х.** Математическое моделирование задач внутренней аэродинамики и теплообмена зданий. – М.: Издательство СГА, 2008. – 314 с.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. – М.: Мир, 1974. – 711с.
10. **Сидоров В.Н., Ахметов В.К.** Математическое моделирование в строительстве. – М.: АСВ, 2007. – 336 с.
11. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Развитие и устойчивость закрученных течений. // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1988, №4, с. 3–11

Варапаев Владимир Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./ факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: vnvarapaev@mail.ru.

Ланцова Ирина Юрьевна, магистрантка Института фундаментального образования, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ); Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./ факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: irina-lanzova@mail.ru.

Vladimir N. Varapaev, Dr.Sc., Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: vnvarapaev@mail.ru.

Irina U. Lantsova, Student, Engineer; Research & Educational Centre of Computers Simulation of Unique Buildings and Complexes; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: irina-lanzova@mail.ru.

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ РАБОТЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В ПК ЛИРА-САПР. МЕТОД «ИНЖЕНЕРНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ»

А.С. Городецкий^{1,2}, М.С. Барабаш^{1,3}

¹ООО «ЛИРА САПР», г. Киев, УКРАИНА

²Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, УКРАИНА

³Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: В статье рассматривается итерационный метод «инженерная нелинейность». Представленный метод позволяет определить реальные жесткостные характеристики сечения, которые могут быть пониженными в связи с появлением трещин, пластическими деформациями бетона и арматуры. Предлагаемый метод «инженерная нелинейность», с одной стороны, позволяет более точно учитывать распределение жесткостей, с другой стороны, по технологии практически аналогичен традиционным методам расчета в линейной постановке, т.е. позволяет выполнить расчет на все нагружения, получить расчетные сочетания усилий (PCY) и расчетные сочетания нагрузок (PCH), подбор арматуры.

Ключевые слова: жизненный цикл, компьютерное моделирование, численное моделирование, прочностной расчет, нелинейный расчет, устойчивость, напряженно - деформированное состояние, наукоемкие расчетно-теоретические исследования

NONLINEAR BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE IN LIRA-SAPR SOFTWARE. NONLINEAR ENGINEERING METHOD (NL ENGINEERING)

Aleksander S. Gorodetsky^{1,2}, Maria S. Barabash^{1,3}

¹“LIRA SAPR” Ltd, Kiev, UKRAINE

²Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev, UKRAINE

³National Aviation University, Kiev, UKRAINE

Abstract: In given article is considered iterative method “engineering nonlinearity”. Given method allows defining real characteristics of section stiffness that could be decreased owing to cracks occurrence, plastic deformations of concrete and reinforcement. Proposed method “engineering nonlinearity” allows on the one hand to take into account more exactly stiffness distribution, on the other hand is similar to traditional analysis methods into linear formulation, i.e. allows to perform analysis on all load-cases, obtain DCF and DCL, perform reinforcement selection.

Keywords: life cycle, computer modelling, numerical modelling, structural analysis, nonlinear analysis, stability, stress - strain state, computational researches

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ползучесть, трещины и другие специфические особенности железобетона обуславливают изменение жесткостных характеристик элементов уже на ранних этапах нагружения, включая и эксплуатационную стадию. Это

приводит к перераспределению усилий, значительному увеличению перемещений по сравнению с линейно-упругим расчетом. Нормативные документы ориентируют инженера на учет этих факторов. Так в Еврокоде и нормативах Российской Федерации рекомендуется проводить расчет с учетом фи-

зической нелинейности. Программный комплекс ЛИРА-САПР предоставляет возможность инженеру выполнять такие расчеты. Однако расчет конструкции с учетом физической нелинейности [2, 3, 6] в строгом математическом понимании этого процесса при использовании в массовых инженерных расчетах имеет ряд недостатков:

- такой расчет может быть выполнен только на одно нагружение и его нельзя использовать в РСУ или РСН;
- такой расчет требует больших ресурсозатрат – шаговый метод обуславливает необходимость многократного решения систем линеаризованных уравнений;
- такой расчет требует задания арматуры (диаметры и расположение) в каждом се-

чении стержня или пластинчатого элемента.

С другой стороны, нормативы Российской Федерации СП 52-103-2007, для учета этих факторов в инженерных расчетах, предлагают просто вводить понижающие коэффициенты на жесткость для изгибаемых элементов 0,3 и сжатых 0,6. Конечно, такое грубое предположение не учитывает, что снижение жесткости зависит от величины и характера напряженно-деформированного состояния сечения. О снижении жесткости растянутых элементов вообще ничего не говорится. Такой подход достаточно грубо оценивает действительную ситуацию. Это можно продемонстрировать на примере элементарной защемленной балки (рисунок 1).

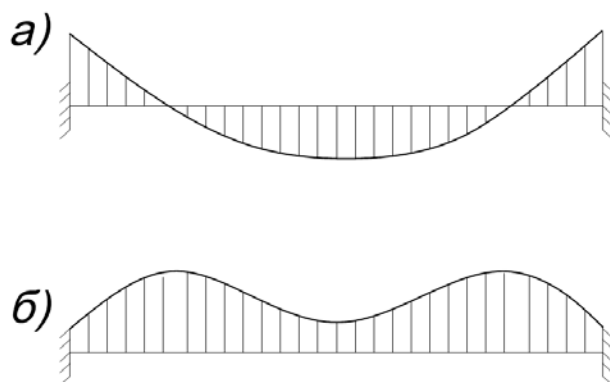


Рисунок 1. Напряженно-деформированное состояние (НДС) защемленной балки: а) эпюра моментов, б) соответствующая эпюра жесткостей.

В реальных расчетах ситуация еще более сложная: колонны зачастую испытывают значительные нормальные усилия: балки испытывают значительные изгибные усилия; в пластичных элементах как правило возникают соизмеримые мембранные и изгибные усилия.

Метод «Инженерная нелинейность» ориентирован на некоторое устранение этого несоответствия (некоторые идеи в этом направлении предлагались ранее [1]) и этот метод надо позиционировать как метод уточненного дифференцированного учета

снижения жесткостных характеристик железобетонных элементов.

КОНЦЕПЦИЯ МЕТОДА

Метод «Инженерная нелинейность» состоит в следующем:

1. Задается «определяющее нагружение», которое по мнению инженера в основном определяет напряженно-деформированное состояние конструкции (развитие трещин, пластические деформации бетона и арматуры) на протяжении жизненного цикла кон-

струкции. «Определяющее нагружение» может составляться на основании набора нагружений (собственный вес, полезные нагрузки и др.), которые задаются инженером для последующего традиционного расчета или назначается инженером на основе других предположений.

2. Производится расчет на «определяющее нагружение» в физически нелинейной постановке с одновременным подбором арматуры. Расчет выполняется итерационным методом и производится подбор арматуры.

3. В результате итерационного расчета на основе НДС каждого сечения стержня и КЭ пластинчатой конструкции определяются жесткостные характеристики.

4. Выполняется традиционный расчет конструкции, элементы которой имеют жесткостные характеристики определяемые в результате итерационного расчета. Традиционный расчет подразумевает расчет в линейно-упругой постановке на весь набор нагружений (собственный вес, полезная нагрузка, сейсмика и др.), составление РСУ или РСН, подбор или проверку сечений стержней же-

лезобетонных и стальных элементов, конструирование.

Наиболее ответственным и сложным в постановке и реализации является этап определения жесткостных характеристик сечений стержня и пластинчатого элемента [4,5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

На рисунке 2 представлено произвольное сечение стержня, на которое действует два момента M_x и M_y , нормальная сила N . Моменты действуют относительно главных осей сечения x и y . Нормальная сила приложена в точке C – пересечении геометрической оси стержня с плоскостью сечения. Требуется: определить жесткостные характеристики сечения, соответствующие секущим модулям деформаций бетона и арматуры.

Зависимость σ – ϵ для бетона представлена на рисунке 3, для арматуры – на рисунке 4.

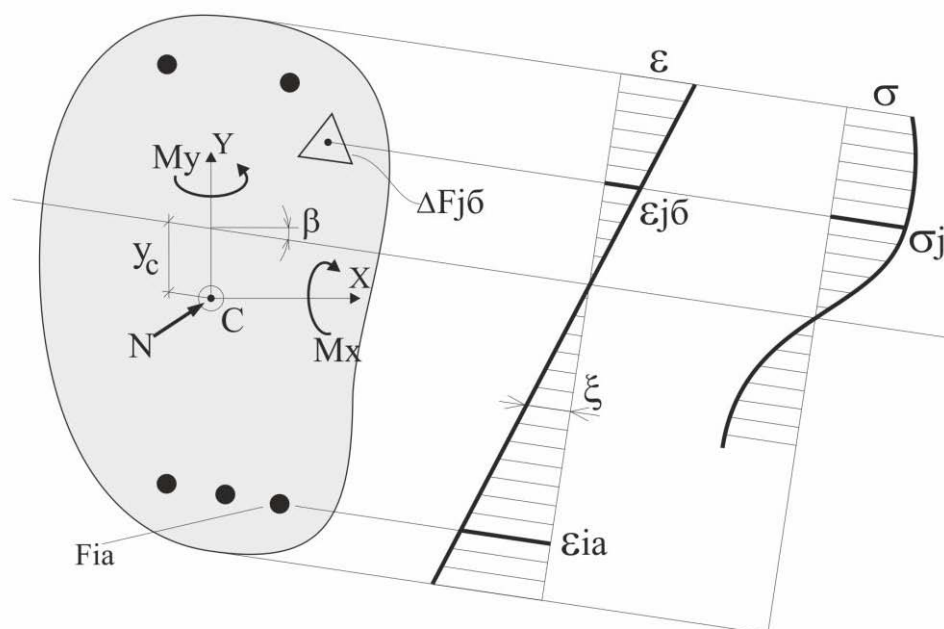


Рисунок 2. Напряженно-деформированное состояние сечения стержня.

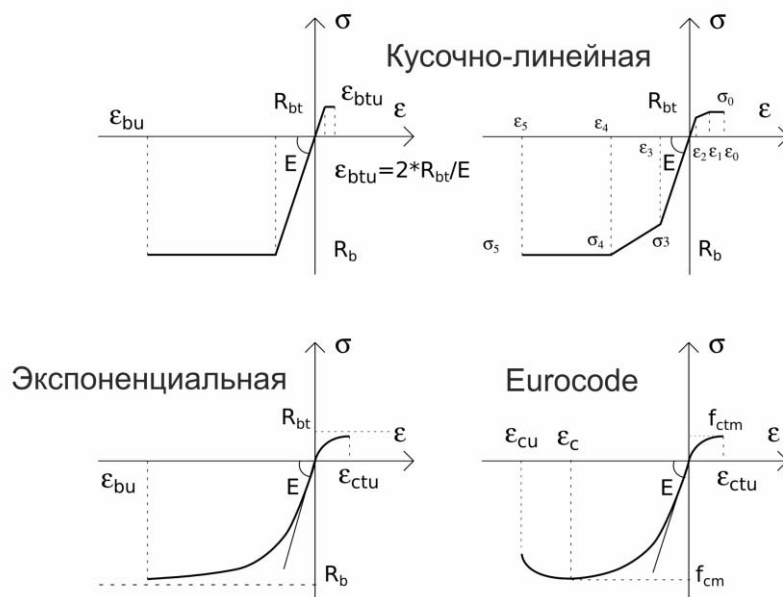


Рисунок 3. Зависимость напряжение-деформация для бетона.

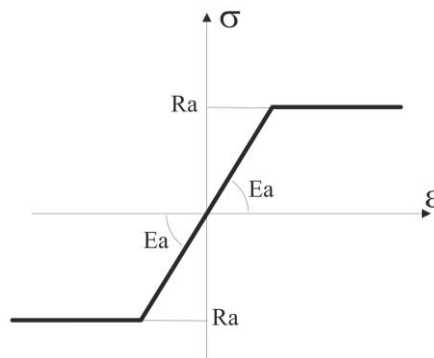


Рисунок 4. Зависимость напряжение-деформация для арматуры

Для определения НДС сечения необходимо найти положение нейтральной оси, которое характеризуется двумя величинами Y_c , β и кривизной сечения ξ (рисунок 2):

Y_c – смещение нейтральной оси;

β – угол поворота нейтральной оси;

ξ – кривизна сечения.

Решение задачи выполняется численным методом. В результате итерационного процесса определяются три неизвестных Y_c , β , ξ , которые находятся из трех уравнений равновесия:

$$\sum z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0.$$

$$\sum z = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\sigma} \cdot \sigma_{j\sigma}(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{ia} \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) + N = 0$$

$$\sum M_x = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\sigma} \cdot \sigma_{j\sigma}(y_c, \beta, \xi) y_j(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{ia} \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) y_{ia}(y_c, \beta, \xi) + M_x + N e_x = 0$$

$$\sum M_y = \sum_{j=1}^n \Delta F_{j\sigma} \cdot \sigma_{j\sigma}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_j(y_c, \beta, \xi) + \sum_{i=1}^m f_{ia} \sigma_{ia}(y_c, \beta, \xi) \cdot x_{ia}(y_c, \beta, \xi) + M_y + N e_y = 0$$

Жесткостные характеристики $E_{обF}$, $E_{обI_x}$, $E_{обI_y}$ определяются на основании зависимостей σ - ϵ для бетона и арматуры (рисунок 3, 4). Для бетона в определение входит только сжатая часть бетона с переменным по сечению секущим моделям деформации. Для каждого арматурного стержня также используется соответствующий модуль деформации.

$$E_{обF} = \sum_{j=1}^n E_{секj\delta} \Delta F_{j\delta} + \sum_{i=1}^m E_{секia} f_{ia}$$

$$E_{обI_x} = \sum_{j=1}^n E_{секj\delta} \Delta F_{j\delta} y_{j\delta}^2 + \sum_{i=1}^m E_{секia} f_{ia} y_{ia}^2$$

$$E_{обI_y} = \sum_{j=1}^n E_{секj\delta} \Delta F_{j\delta} x_{j\delta}^2 + \sum_{i=1}^m E_{секia} f_{ia} x_{ia}^2$$

Здесь $\Delta F_{j\delta}$, f_{ia} – элементарные участки, на которые расчленяется сечение бетона и площади отдельных стержней арматуры.

n – количество участков бетона, m – количество арматурных стержней.

$E_{секj\delta}$, $E_{секia}$ – секущие модули деформаций бетона и арматуры, которые определяются на основании зависимостей σ - ϵ (рисунок 2,3).

$x_{j\delta}$, $y_{j\delta}$, x_{ia} , y_{ia} – расстояние центра тяжести j -го участка бетона и i -го участка арматурного стержня до главных осей, положение которых (Y_c , β) определено в результате итерационного расчета.

Для бетона в определение входит только сжатая часть бетона с переменным по сечению секущим модулем деформации. Для каждого арматурного стержня также используется соответствующий секущий модуль деформации.

Матрица жесткости стержня, имеющего переменные по длине секущие жесткостные характеристики (рисунок 1) также строится численным методом (каждый стержень рассматривается как своеобразный супер элемент).

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Ниже приводятся результаты расчета рамы на основе инженерной нелинейности (рисунок 4).

В качестве определяющего нагружения была принята нагрузка $q=15$ т/п.м. на рисунке 6 приведены соответствующие жесткости для ригеля в – с и колонн а – в.

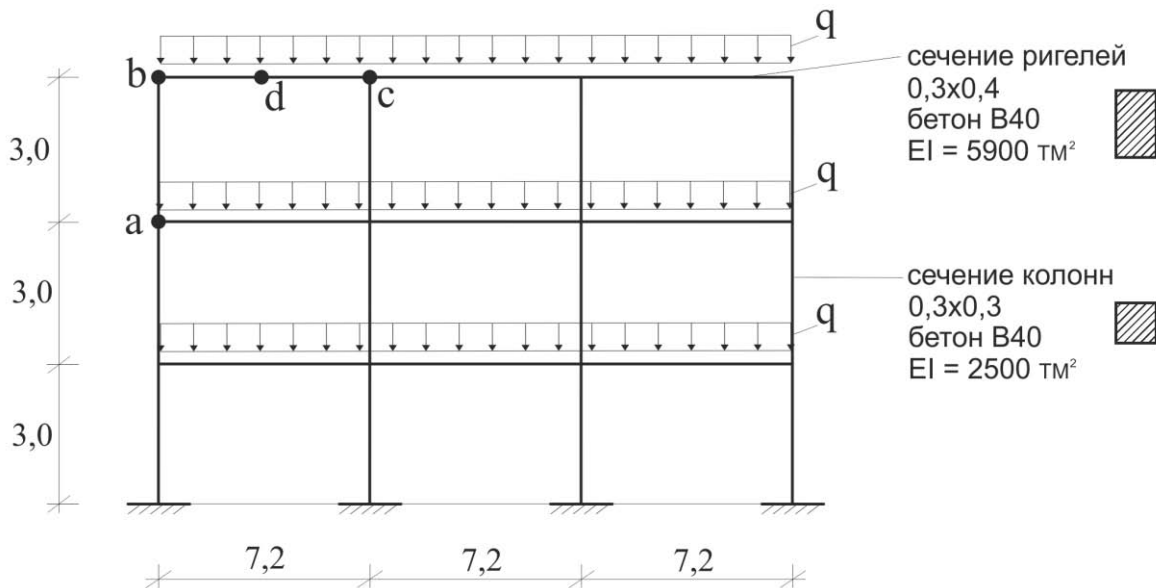


Рисунок 5. Расчетная схема исследуемой конструкции.

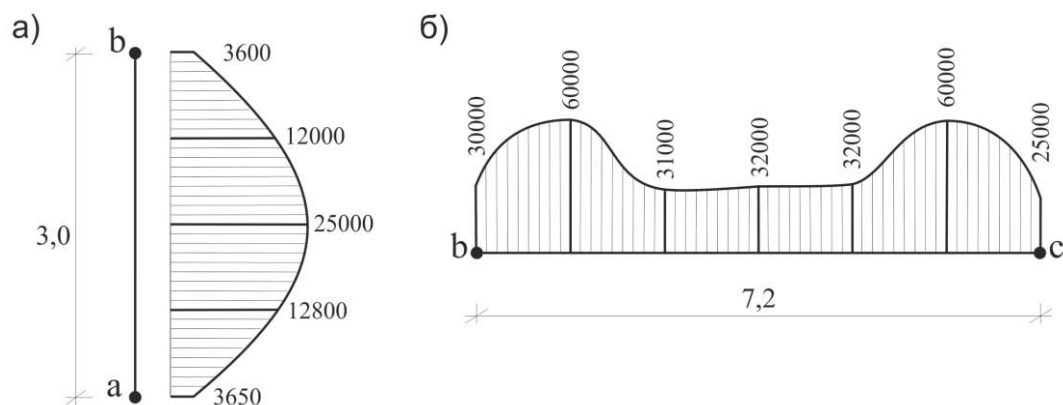


Рисунок 6. Эпюры жесткостей EI $тм^2$ полученных на основе расчета по методу «Инженерная нелинейность»: а) для колонны, б) для ригеля.

Анализируя эпюры жесткостных характеристик можно сделать вывод, что рекомендуемое нормативами снижение жесткостных характеристик для колонн на понижающий коэффициент 0,6 (в этом случае эпюра для колонн выглядела бы постоянной и равной $0,6 \times 2500 = 1500$ $тм^2$) и для ригелей 0,3 (в этом случае эпюра выглядела бы постоянной и

равной $0,3 \times 5900 = 1770$ $тм^2$) выглядит достаточно грубым приближением.

В таблице 1 приведены результаты линейно-упругого расчета рамы на нагрузку $q = 20$ т/п.м. с учетом дифференцированного распределения жесткостей для всех элементов, полученных на основе режима «Инженерная нелинейность».

Таблица 1. Результаты линейно-упругого расчета рамы.

Вид расчета	Значение параметров НДС	Статический расчет			Динамический расчет	
		Момент в ригеле «в – с» в узле «в» в тм	Момент в ригеле «в – с» в узле «d» в тм	Перемещение в узле «d» в тм	Частота ω в герцах	Период T в сек.
линейно-упругий расчет с начальными жесткостями		58,4	100,7	54,0	0,182	5,51
линейно-упругий расчет с жесткостями полученными на основе режима «Инженерная нелинейность»		74,3	84,5	113,0	0,158	6,32

Анализируя результаты расчета приведенные в таблице 1 можно сделать следующие выводы:

- получено некоторое перераспределение усилий – в менее нагруженном сечении «в» ригеля момент увеличился, в более нагруженном сечении «d» ригеля момент уменьшился;

- перемещение узла «d» увеличилось более чем в 2 раза;
- частота собственных колебаний (первая форма) уменьшилась, а период увеличился.

ВЫВОДЫ

В заключение еще раз следует отметить, что метод «Инженерная нелинейность» предназначен только для учета пониженной жесткости железобетонных конструкций в массовых инженерных расчетах и ни в коем случае не заменяет расчет с учетом физической нелинейности.

Метод «Инженерная нелинейность» реализован в программном комплексе ЛИРА-САПР. Таким образом, инженеры-проектировщики получили еще один инструмент, позволяющий учитывать в практических расчетах влияние пониженной жесткости железобетонных конструкций на НДС проектируемого сооружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондаренко В.М.** Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
2. **Барабаш М.С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства. – К.: «Сталь», 2014. – 301 с.
3. **Городецкий А.С., Здоренко В.С.** К расчету физически нелинейных плоских рамных систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 1969, №4, с. 61-68.
4. **Пикуль А.В., Городецкий Д.А.** Определение жесткостных характеристик сечения железобетонного стержня с учетом нелинейных свойств материала. // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов IV Международного симпозиума. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012, с. 228.
5. **Городецкий А.С., Барабаш М.С.** Учет нелинейной работы железобетонных конструкций в практических расчетах. // Строительство, материаловедение, машиностроение // Сб. научн. трудов. –

Дн-вск: ПГАСА, 2014. – Вып. 77. – С. 54–59.

6. **Городецкий А.С.** Компьютерное моделирование процесса нагружения железобетонных конструкций. Сборник научных трудов Луганского национального университета, серия «Технические науки» N49/52. – Л.: Издательство «ЛНАУ», 2004, с. 3-10.

Городецкий Александр Сергеевич – академик РААСН, академик Академии строительства Украины, заместитель директора ООО «ЛИРА САПР», доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий Киевского национального университета строительства и архитектуры, 03680, Украина, г. Киев, проспект Воздухофлотский, 31; тел: +38(044) 590 58 90; +38(050)3519661; e-mail: acegor@mail.ru, http: www.liraland.ru

Барабаш Мария Сергеевна – академик Академии строительства Украины, директор ООО «ЛИРА САПР», доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных технологий строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1; тел: +38(044) 590 58 87; +38 (095) 286-39-90; e-mail: bmari@ukr.net, http: www.liraland.ru

Aleksander S. Gorodetsky, Foreign Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Academician of the Academy of Construction of Ukraine, Deputy Director of "LIRA SAPR" Ltd, DSc (Eng.), doctor of technical sciences, Professor, Professor of Department of Information Technology, Kyiv National University of Construction and Architecture, 31, Povitroflotsky Avenue, 03680, Kiev, UKRAINE. phone: +38(044) 590 58 93; e-mail: acegor@mail.ru, http: www.liraland.ru

Maria S. Barabash – Academician of the Academy of Construction of Ukraine, the director of "LIRA SAPR" Ltd, DSc (Eng.), doctor of technical sciences, Associate Professor, Professor of Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE. phone: +38 (095) 286-39-90; e-mail: bmari@ukr.net. http: www.liraland.ru

ОПТИМАЛЬНЫЙ СОСТАВ КОМПОЗИТА ПО КРИТЕРИЮ ЕГО ПРОЧНОСТИ

В.Т. Ерофеев¹, А.С. Тюряхин¹, И.В. Смирнов¹, И.Н. Максимова²

¹ Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
г. Саранск, РОССИЯ

² Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза, РОССИЯ

Аннотация: На базе модели Хашина для представительной ячейки полидисперсного композита построены 2 двухсвязные модели: трехфазная структурная и двухфазная эффективная. Твердотельная фаза эффективной модели, а также фазы матрицы и наполнителя, представлены толстостенными сферами. Фаза порового включения заполнена идеальной жидкостью (под действием порового давления). Для трех сфер структурной модели, применив решение задачи Ламе, сначала записываются 2 условия совместности их перемещений, затем еще два условия эквивалентности названных моделей. Удовлетворяя этим условиям, выявляются поровое и контактное давления, а также эффективные модули: объемных K и сдвиговых G деформаций. В результате численного исследования полученного решения вскрыта экстремальная зависимость эффективной прочности композита от объемного состава матрицы и наполнителя. Тем самым выявлена возможность теоретического подбора оптимального состава компонентов композита по критерию какой-либо из теорий прочности.

Ключевые слова: представительная ячейка композита, структурная и эффективная модели, поровое включение, толстостенная сфера, модель Хашина, деформации и напряжения, контактное давление, эффективная прочность

THE OPTIMAL COMPOSITION OF THE COMPOSITE ACCORDING TO THE STRENGTH CRITERION

*Vladimir T. Erofeev¹, Alexander S. Turyakhin¹, Igor V. Smirmov¹,
Irina N. Maksimova²*

¹ National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, RUSSIA

² Penza State University of Architecture and Construction, Penza, RUSSIA

Abstract: On the basis of the Khashin model, we built a three-phase structural model and a two-phase effective model for the representative cell of the polydisperse composite. The solid-state phase of the effective model, the matrix phase and the filler phase of the structural model are presented as thick-walled spheres. The pore inclusion phase filled with perfect liquid (under the influence of pore pressure). By applying a solution of Lamé problem for the three spheres of the structural model, we recorded two deformation compatibility conditions and then two conditions for the equivalence of the two mentioned models. Having satisfied these conditions, we can determine pore and contact pressures and the effective modules of the composite deformation: volume (K) and shear (G). A numerical study of the obtained solution revealed the extreme dependence of the effective strength of the composite from the bulk composition of the matrix and the filler. Thus the possibility of a theoretical selection of the optimal composition of composite components on the criterion of any strength theories is revealed.

Keywords: representative of the composite cell, structural and effective model, pore inclusion, thick-walled sphere, the Hashin model, deformation and pressure.

1. ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

В монографии «Формирование структуры

композиционных материалов и их свойства» (Гусев Б. В. и др.) изложены основные подходы и методы нелинейной механики компо-

зитов. Там же обозначена и «главная проблема материаловедения, заключающаяся в предсказании эффективных физико-механических свойств идеализированной однородной среды через свойства компонентов и их геометрические характеристики» [6, с. 13]. При этом отмечается, что «теоретические исследования в этой области позволяют сократить до минимума проведение дорогостоящих экспериментальных работ» [6, с. 14]. Но, помимо поставленных выше проблем, существует обширная область и других задач, в которых для их разрешения достаточно методов линейной теории деформаций. Одному из таких подходов и посвящено настоящее исследование. При этом ставится узкая задача: по критерию эффективной прочности обосновать возможность теоретического способа подбора оптимального состава компонентов (матрицы и наполнителя) в трехфазной структуре композита.

В основу исследования положено решение задачи Ламе для толстостенной сферы [2, 9]. При этом целостная модель представительного объема (элемента, ячейки) зернистопористого композита рассматривается в двух частях, выражающих собой внешний и внутренний аспекты этой целостности (рис. 1). Внешний аспект представлен двухфазной эффективной моделью (рис. 1, а), внутренний аспект – трехфазной структурной (рис. 1, б). Эффективная модель включает в себя несущую фазу материала в виде толстостенной сферы диаметром $2b$ и фазу порового включения диаметром $2a$ в центре сферы (см. рис. 1, а). Идеализированная однородная среда несущей фазы характеризуется упругими параметрами $e=3K$ и $g=2G$, где K и G – модули объемной и сдвиговой упругости твердотельной среды несущей фазы. Фаза порового включения, в свою очередь, может быть представлена жидкой, газообразной или жидкостно-газовой средой. В данном исследовании рассмотрен только один (предельный) случай, в котором эта среда задана идеальной жидкостью.

Трехфазная схема структурной модели полу-

чается из двухфазной путем расчленения несущей фазы на две части с последующим размещением их объемов материалом двух фаз: матрицы и наполнителя (см. рис. 1, б). Однородную среду этих фаз будем характеризовать параметрами $e_m=3K_m$, $g_m=2G_m$, $e_n=3K_n$, $g_n=2G_n$. Здесь: K_m и G_m – модули материала матрицы, K_n и G_n – материала наполнителя.

Фазы матрицы и наполнителя разделены контактной поверхностью диаметром $2c$. Под действием внешнего давления q в точках этой поверхности возникает неизвестное контактное давление p_c . Другое неизвестное давление p появится в точках контакта наполнителя и шаровой поверхностью жидкостного включения. С определения величины давлений p и p_c начинается процесс исследования поставленной задачи.

2. ТРИ ЗАДАЧИ ЛАМЕ И ИНВЕРСИЯ, ОБЪЕДИНЯЮЩАЯ ИХ

Из рис. 1 следует, что и несущая фаза (см. рис. 1, а), и фазы матрицы и наполнителя (см. рис. 1, б) могут быть описаны решением одной и той же задачи Ламе [2, с. 255 – 259], представленным в трех вариантах (рис. 2). Эти варианты различны по своему содержанию, но они геометрически, статически и кинематически взаимно обусловлены целостностью исходной модели (см. рис. 1). Задача Ламе, для толстостенной сферы, нагруженной внешним и внутренним давлениями, на рис. 2 выделена в виде трех расчетных схем. Расчетные формулы этих схем имеют однообразную форму представления. Чтобы их различать, буквенные обозначения формул для схем матрицы (рис. 2, б) и наполнителя (рис. 2, в) будут снабжены индексами m и n соответственно.

Геометрическая взаимная связь представленных трех схем обусловлена радиусами a , b и c сфер одной и той же исходной модели (см. рис. 1 и 2). Если обозначим отношения радиусов

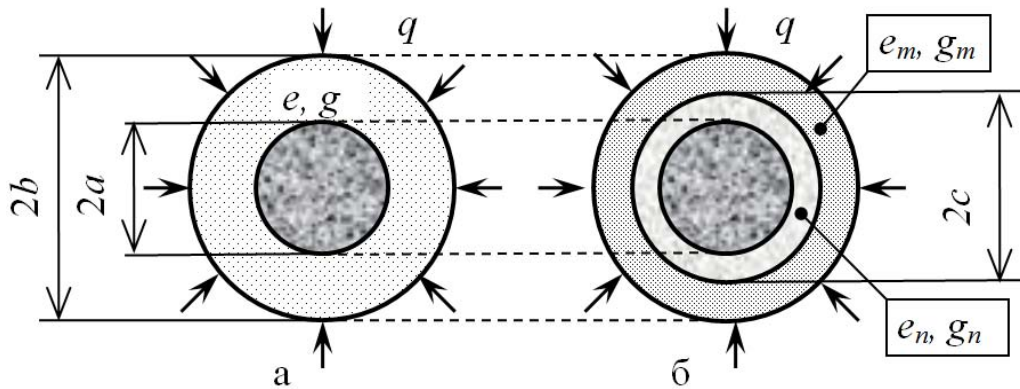


Рисунок 1. Целостная модель представительного объема композита, заданная в виде: а – двухфазной и б – трехфазной моделей.

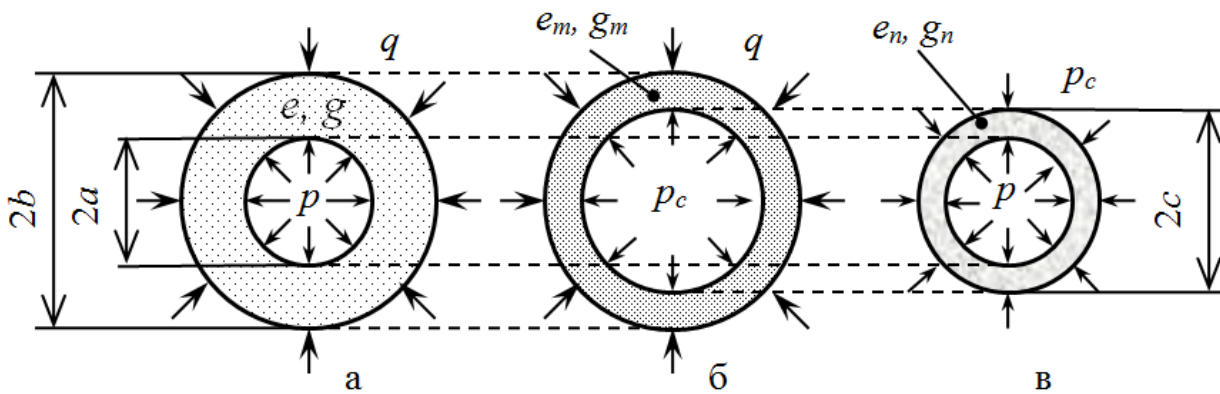


Рисунок 2. Расчетные схемы задачи Ламе для: а – несущей фазы; б – фазы матрицы; в – фазы наполнителя.

$$\omega = a/b, \omega_m = c/b \text{ и } \omega_n = a/c, \quad (1)$$

то относительные пустотности трех толстостенных сфер (см. рис. 2) будут соответственно равны:

$$w = \omega^3 = (a/b)^3, \\ m = \omega_m^3 = (c/b)^3 \text{ и } n = \omega_n^3 = (a/c)^3. \quad (2)$$

В таком случае параметры ω и w несущей фазы (см. рис. 1, а) играют роль коэффициентов геометрической структуры для представительной ячейки композита. При этом абсолютные размеры ее радиусов (a и b) могут быть различны. Но для всех них при равных значениях отношений ω будут одинаковыми не только параметры w , но и многие другие структурные параметры этих ячеек.

Именно это геометрическое свойство толстостенных сфер обуславливает теоретическую возможность построения модели гетерогенной среды с произвольной объемной долей наполнителя и включения, которая была предложена Хашиным [17]. Модель нашла применение, например, в работах [1, 7, 16] и во многих других исследованиях. В этой модели размеры ячеек произвольны. Но отношение радиусов ($\omega = a/b$) для каждой такой ячейки считается одинаковым независимо от ее размеров. Поэтому распределение размеров ячеек должно быть таким, чтобы весь объем был заполнен составными частицами с отношением $w = const$. В данном исследовании рассмотрению подлежит неоднородная гетерогенная среда, дискретные фазы которой отчетливо выражены (см. рис. 1). При этом в качестве базовой принята модель неоднородной среды, предложенная

Хашиным, поэтому отношения (1) и (2) во всех ячейках одинаковы.

Геометрическая связь, объединяющая три схемы задачи Ламе (см. рис. 2) в одну модель, проявляется еще и в том, что произведение относительных объемов «пустотностей» m и n (матрицы и наполнителя) равно величине w несущей фазы:

$$w = m \cdot n. \quad (3)$$

Математически это означает, что пористость w , играя роль коэффициента инверсии, позволяет определить радиус $R = \sqrt{w}$ окружности (или сферы), относительно которой параметры m и n обладают свойством инверсивной симметрии.

Кроме того, в геометрически взаимосвязанных сферах (см. рис. 2) аналогичными свойствами обладают и величины отношения давлений на наружных и внутренних поверхностях этих сфер:

$$k = q/p, \quad k_m = q/p_c, \quad k_n = p_c/p. \quad (4)$$

Непосредственно из этих выражений следует инверсивная зависимость статических величин (давлений):

$$k = k_m \cdot k_n. \quad (5)$$

Имея зависимости (3) и (5) можно с большой долей уверенности предположить, что свойством инверсии должны обладать и величины эффективных упругих и прочностных характеристик в рассматриваемой модели композита (см. рис. 1). Это существенно упрощает анализ и осмысление результатов численных исследований.

3. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Расчетная схема несущей фазы композита соответствует двухсвязной эффективной модели (см. рис. 1, а), подверженной действию наружного q и контактного (порового) дав-

лений p (см. рис.2, а). Решение задачи Ламе применительно к данной схеме представим в форме, принятой в работах [10 – 16]. При этом расчетные формулы имеют следующий вид для радиальных и тангенциальных: перемещений

$$u = \left(\frac{P}{e} + \frac{Q}{2g} \cdot \frac{\omega^3}{\rho^3} \right) \cdot r, \quad v = 0; \quad (6)$$

деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{P}{e} - \frac{Q}{g} \cdot \frac{\omega^3}{\rho^3}, \quad \varepsilon_t = \frac{P}{e} + \frac{Q}{2g} \cdot \frac{\omega^3}{\rho^3}; \quad (7)$$

и напряжений

$$\sigma_r = P - Q \cdot \frac{\omega^3}{\rho^3}, \quad \sigma_t = P + \frac{Q}{2} \cdot \frac{\omega^3}{\rho^3}. \quad (8)$$

В этих формулах введены обозначения:

$$P = \frac{wp - q}{V}, \quad Q = \frac{p - q}{V}, \quad (9)$$

$$e = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad g = \frac{E}{1 + \nu}; \quad (10)$$

где: $V = 1 - w$; r – радиальные координаты точек сферы, $\rho = r/b$ – безразмерные координаты тех же точек; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона однородного и изотропного материала несущей фазы композита.

Для расчетных схем матрицы и наполнителя формулы (6) – (10) сохраняют свою структуру, но отличаются тем, что буквенные обозначения в них снабжены индексами m (матрица) или n (наполнитель). Например, формула тангенциальных деформаций в матрице (см. рис. 2, б), согласно формулам (7) и (2) с добавлением индексов m , примет вид:

$$\varepsilon_{tm} = \frac{P_m}{e_m} + \frac{Q_m}{2g_m} \cdot \frac{\omega_m^3}{\rho_m^3}, \quad (11)$$

где

$$P_m = \frac{mp_c - q}{V_m}; \quad Q_m = \frac{p_c - q}{V_m};$$

$$e_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m}; \quad g_m = \frac{E_m}{1 + \nu_m}; \quad (12)$$

$V_m = 1 - m$; $\rho_m = r/b$ – безразмерные координаты; E_m и ν_m – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы.

Аналогичный вид примет и формула для тангенциальных деформаций в наполнителе (см. рис. 2, в):

$$\varepsilon_{tn} = \frac{P_n}{e_n} + \frac{Q_n}{2g_n} \cdot \frac{\omega_n^3}{\rho_n^3}, \quad (13)$$

где

$$P_n = \frac{np - p_c}{v_n}; \quad Q_n = \frac{p - p_c}{v_n};$$

$$e_n = \frac{E_n}{1 - 2\nu_n}; \quad g_n = \frac{E_n}{1 + \nu_n}, \quad (14)$$

$V_n = 1 - n$; $\rho_n = r/c$ – безразмерные координаты точек наполнителя; E_n и ν_n – модуль Юнга и коэффициент Пуассона наполнителя.

4. УСЛОВИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Задача по определению эффективных характеристик композита включает в себя два этапа. Сначала записываются условия совместности деформаций в точках двух контактных поверхностей структурной модели (см. рис. 1, б; 2, б и 2, в):

$$\varepsilon_{tm}(c) = \varepsilon_{tn}(c), \quad (15)$$

$$\varepsilon_{tn}(a) = 0. \quad (16)$$

Здесь: $\varepsilon_{tn}(a)$ – тангенциальная деформация наполнителя в точках его контакта с жидкостью, $\varepsilon_{tn}(c)$ и $\varepsilon_{tm}(c)$ – тангенциальные деформации наполнителя и матрицы в точках их смежной контактной поверхности. Удовлетворяя этим условиям, отыскиваются контактные давления p и p_c .

На втором этапе решения для двухсвязных моделей представительной ячейки композита (эффективной и структурной) записываются два условия эквивалентности этих моделей:

$$\varepsilon_t(a) = 0. \quad (17)$$

$$\varepsilon_t(b) = \varepsilon_{tm}(b). \quad (18)$$

Здесь: $\varepsilon_t(a)$ и $\varepsilon_t(b)$ – тангенциальные деформации эффективной двухсвязной модели в точках ее внутренней и внешней сферических поверхностей; $\varepsilon_{tm}(b)$ – тангенциальные деформации матрицы в точках ее наружной поверхности.

Удовлетворив эти условия, найдем эффективные модули композита ($e=3K$ и $g=2G$), а также их отношение $\eta=g/e$. В этом как раз и состоит достоинство двухсвязных эффективных моделей, нашедших применение в работах [10 – 16]. Данная модель возникла на основе обобщения опыта исследования односвязных эффективных моделей, нашедших применение в многочисленных публикациях, в том числе в монографиях [1, 4, 5, 7, 9 и др.]. Но односвязная модель, имея одну граничную поверхность, позволяет записать лишь одно условие эквивалентности (со структурной моделью), из которого можно определить только один эффективный параметр (объемный модуль K , как правило). Двухсвязная модель имеет две граничные поверхности, позволяющие записывать два условия эквивалентности и одновременно определять два упругих параметра (K и G).

Далее, продолжив выкладки, сначала запишем выражения деформаций в матрице. Согласно (11), в точках с координатой $r=c$ имеем:

$$\varepsilon_{tm}(c) = \frac{P_m}{e_m} + \frac{Q_m}{2g_m}. \quad (19)$$

Аналогично, в точках с координатой $r=b$ ($\rho_m=1$):

$$\varepsilon_{tm}(b) = \frac{P_m}{e_m} + \frac{mQ_m}{2g_m}. \quad (20)$$

Для наполнителя, согласно (13), выражения примут вид:

в точках при $r=a$ и $\rho_n=\omega_n$,

$$\varepsilon_{tn}(a) = \frac{P_n}{e_n} + \frac{Q_n}{2g_n}, \quad (21)$$

при $r=c$ ($\rho_n=1$)

$$\varepsilon_{tn}(c) = \frac{P_n}{e_n} + \frac{nQ_n}{2g_n}. \quad (22)$$

Выполнив подстановку выражений (19), (21) и (22) в условия совместности (15) и (16), получим систему двух уравнений с неизвестными контактными давлениями p и p_c :

$$\frac{P_n}{e_n} + \frac{Q_n}{2g_n} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{P_m}{e_m} + \frac{Q_m}{2g_m} = \frac{P_n}{e_n} + \frac{nQ_n}{2g_n}. \quad (24)$$

5. КОНТАКТНЫЕ ДАВЛЕНИЯ

Выполнив подстановку значений из выражений (14) в равенство (23), после упрощений найдем:

$$k_n = \frac{p_c}{p} = \frac{1+n \cdot 2\eta_n}{1+2\eta_n}, \quad (25)$$

где параметр $\eta_n = g_n/e_n$.

Из уравнения (24), с учетом (23) и (25), после несложных выкладок найдем второе отношение давлений:

$$k_m = k_m^* + \alpha V \frac{g_m}{g_n} \cdot \frac{1-k_n}{k_n(1+2\eta_m)}, \quad (26)$$

где: $V=(1-w)$ – относительный объем материала несущей фазы, $\alpha=V_m/V$ – относительный объем матрицы в объеме V , $\eta_m=g_m/e_m$ и

$$k_m^* = \frac{1 + m \cdot 2\eta_m}{1 + 2\eta_m}$$

– параметры матрицы. Зная величины

$$k_n = \frac{p_c}{p} \text{ и } k_m = \frac{q}{p_c},$$

легко найдем отношение $k = k_m k_n$ и контактные давления

$$p_c = \frac{q}{k_m} \quad \text{и} \quad p = \frac{p_c}{k_n}.$$

Поровое давление p можно выразить и непо-

средственно из условия (17). Удовлетворив это условие, согласно второй из формул (7), получим равенство, из которого найдем отношение, аналогичное по своей структуре отношению (25)

$$k = \frac{q}{p} = \frac{1+w \cdot 2\eta}{1+2\eta}. \quad (27)$$

Выражение обратное (27) имеет вид:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-k}{k-w}, \quad (28)$$

Отсюда следует, что при условии, что $w < k < 1$ отношение $\eta = g/e$ будет величиной всегда положительной. И наоборот, так как $\eta > 0$, то должно выполняться и упомянутое выше условие.

6. ЗАВИСИМОСТИ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ ОТ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛА КОМПОНЕНТОВ

Анализ формул (25) – (27) показывает, что значения отношений k_n , k_m и $k = k_m k_n$ зависят не от самих упругих параметров матрицы (e_m , g_m) и наполнителя (e_n , g_n), а только от величины их отношений $\eta_m = g_m/e_m$, $\eta_n = g_n/e_n$ и $\eta = g/e$. Но величина η , в свою очередь, для всех изотропных тел однозначно определяется величиной коэффициента Пуассона:

$$\eta = \frac{g}{e} = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}. \quad (29)$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$\nu = \frac{1-\eta}{2+\eta}. \quad (30)$$

Такое нелинейно однозначное соответствие функций $\nu(\eta)$ и $\eta(\nu)$ закономерно для всех однородных и изотропных твердых тел. Численные значения этих функций представлены в табл. 1.

Таблица 1. Взаимное соответствие значений функций $v(\eta)$ и $\eta(v)$.

v	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
η	1	0,857	0,727	0,609	0,5	0,4	0,308	0,222	0,143	0,069	0

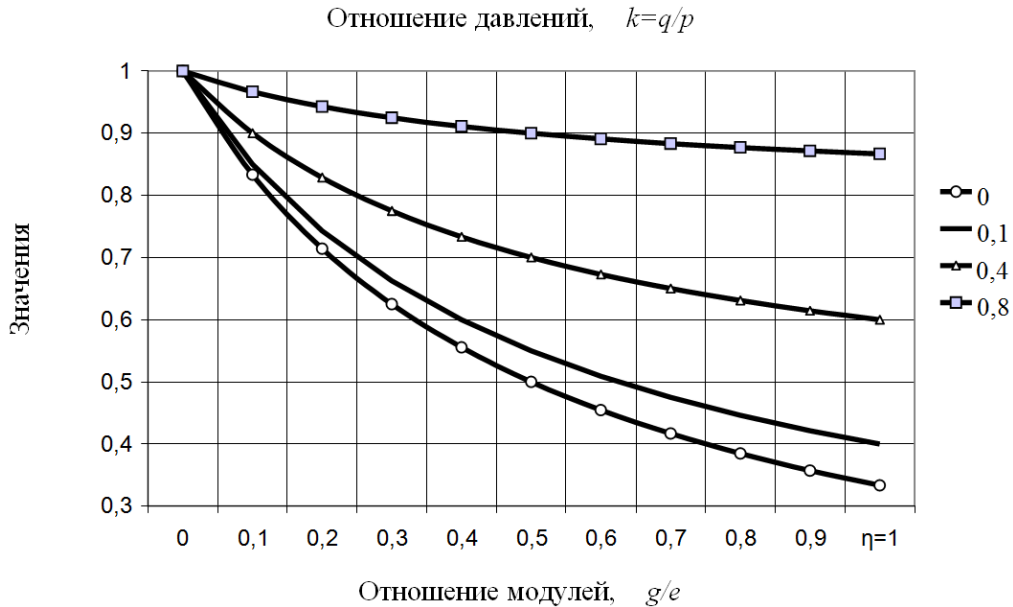


Рисунок 3. Зависимости величины $k=q/p$ от величины отношения $\eta=g/e$ для значений: $w=0; 0,1; 0,4$ и $0,8$.

Поэтому анализ формул (25) и (27) объединим и представим численное исследование только формулы (27) (см. рис. 3).

Анализ рис. 3 показывает, что в элементарной ячейке композита с жидким включением:
1) величина порового давления p изменяется в интервале значений

$$q < p < 3q, \quad (31)$$

где q – заданное внешнее давление;

2) нижний предел (давление $p_{min}=q$) теоретически возможен при значениях $\eta=0$, т. е. когда модуль сдвига отсутствует ($g=2G=0$). Такой предельный случай теоретически возможен при условии, что матрица и наполнитель вырождаются в жидкость;

3) верхний предел ($p_{max}=3q$) теоретически возникает при значениях $\eta=1$ и $w=0$. Второе условие означает, что шаровое каплевидное включение вырождено в точку (модель толстостенной сферы с «выколотой» точкой);

4) отношение $k=q/p$ имеет интервал значений:

$$w < k < 1.$$

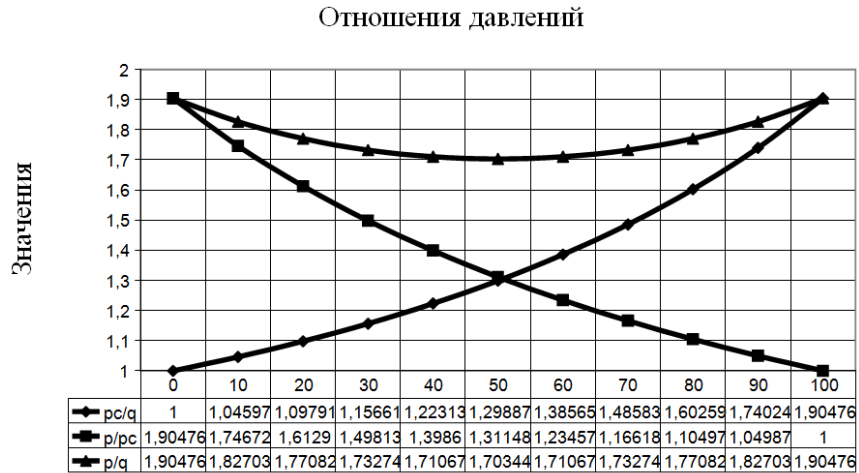
При этом, чем больше объем включения w , тем меньше интервал. Аналогичные интервалы для матрицы и наполнителя имеют вид:

$$m < k_m < 1, \quad n < k_n < 1$$

7. ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО СОДЕРЖАНИЯ МАТРИЦЫ НА ВЕЛИЧИНУ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ

Чтобы выявить зависимость величины контактных давлений p и p_c от процентного содержания матрицы в несущей фазе композита проведем численное исследование.

Пример 1. В элементарной ячейке композита (рис. 1) с объемной долей включения $w=5\%$ материал компонентов (матрицы и наполнителя) имеет: равные значения коэффициента Пуассона ($\nu_m=\nu_n=0,2$) и отношение модулей $G_m/G_n=0,1$. Выявим характер зависимостей давлений p и p_c от величины количественного содержания матрицы.



Объемная доля матрицы, α в %.

Рисунок 4. Зависимости величины давлений p и p_c (в долях от q) и отношения p/p_c от процентного содержания матрицы в объеме V при значении $w=5\%$.

Решение. Значению $\nu=0,2$, согласно (29), отвечает величина $\eta=0,5$. Результаты вычислений, выполненных по формулам (25), (26), с учетом исходных данных и отношений $p_c = q/k_m$, $p = p_c/k_n$, представим в виде табличных значений и графиков функций контактных давлений (рис. 4).

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, функция контактных давлений $p(\alpha)$ имеет экстремум (см. рис. 4). Во-вторых, заданное внешнее давление q и контактное давление p полностью определяют напряженное состояние эффективной модели (см. рис. 1, а и 2, а). И в-третьих, можно полагать, что в наиболее напряженных точках эффективной модели также должен иметь место экстремум в напряжениях при вариации количественного параметра матрицы ($\alpha=V_m/V$).

8. ЭФФЕКТИВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Для проверки высказанного предположения воспользуемся формулами эффективных напряжений (8) в композите:

$$\sigma_r = P - Q \frac{\omega^3}{\rho^3}, \quad \sigma_t = P + \frac{Q}{2} \frac{\omega^3}{\rho^3},$$

где $P = (wp - q)/V$ и $Q = (p - q)/V$.

Затем запишем их выражения в точках, имеющих координаты $\rho=\omega$:

$$\sigma_r(a) = P - Q = \sigma_3, \quad \sigma_t(a) = P + \frac{Q}{2} = \sigma_1.$$

Здесь, с учетом $k = q/p$, выражения (9) примут вид

$$P = -p \frac{k-w}{V} \quad \text{и} \quad Q = p \frac{1-k}{V};$$

σ_1 и σ_3 – главные напряжения в опасных точках ячейки композита.

И, наконец, запишем выражение для эквивалентных напряжений, соответствующих 3-й теории прочности [8]:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left(P + \frac{Q}{2} \right) - (P - Q) = \frac{3}{2} Q, \\ \sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{3}{2} p \frac{1-k}{V}. \quad (32)$$

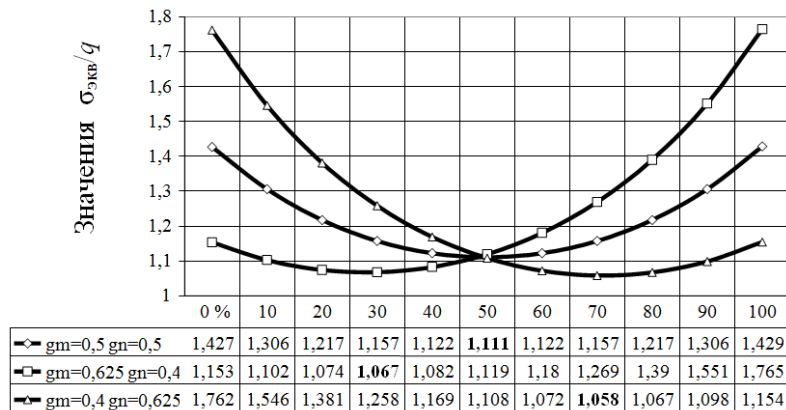
или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = q \cdot \varphi, \quad (33)$$

где

$$\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1/k-1}{V}. \quad (34)$$

Эквивалентные напряжения при $w=5\%$ и $G_m/G_n=0,1$



Параметр $\alpha = V_m/V, \%$

Рисунок 5. Графики функции $\sigma_{экв}(\alpha)$ в опасных точках эффективной модели для 3-х составов композита.

Здесь: k – отношение, определяемое произведением $k_m k_n$, в котором сомножители вычисляются по формулам (25) и (26).

Для иллюстрации характера зависимостей величины эквивалентных напряжений от величины параметра α рассмотрим еще один пример.

Пример 2. Выявим количественное содержание объема матрицы в объеме V несущей фазы композита (см. рис. 1), при котором эффективные эквивалентные напряжения достигают минимальных значений. Рассмотрим 3 пары материалов (матрицы и наполнителя), в которых их коэффициенты Пуассона равны: 1) $\nu_m = \nu_n = 0,2$; 2) $\nu_m = 0,143$ и $\nu_n = 0,25$; 3) $\nu_m = 0,25$ и $\nu_n = 0,143$.

Решение. Согласно формулам (29), (30) и табл. 1 значениям $\nu = 0,143, 0,2$ и $0,25$ соответствуют величины $\eta = 0,625, 0,5$ и $0,4$. Кроме того, для вычислений примем значения $w = 5\%$ и отношение модулей сдвига $G_m/G_n = 0,1$. С учетом этих данных и задаваясь значениями параметра α , произведем вычисления напряжений по формулам (32) – (34). Результаты вычислений представим в виде графиков функции $\sigma_{экв}(\alpha)$ (см. рис. 5). Анализ полученных результатов сводится к выводам.

1) Оптимальный количественный состав компонентов (матрицы и наполнителя) чув-

ствителен к величине их коэффициента Пуассона. При этом, если, например, этот коэффициент одинаков ($\nu_m = \nu_n = 0,2$), то оптимальным, по критерию прочности, будет их равный количественный состав. В случае значений $\nu_m = 0,143$ и $\nu_n = 0,25$ оптимальным будет состав из 30 % матрицы и 70 % наполнителя. А если $\nu_m = 0,25$ и $\nu_n = 0,143$, то наоборот, оптимальным будет состав из 70 % матрицы и 30 % наполнителя.

2) При малых отклонениях $\Delta\alpha$ ($\pm 20\%$) от величины α_0 напряжения $\sigma_{экв}(\alpha)$ изменяются незначительно (менее 10 %).

3) В случаях больших отклонений ($\Delta\alpha > \pm 20\%$) состава композита от величины оптимального его количественного состава внутренние давления в композите увеличиваются более интенсивно, возрастают эквивалентные напряжения и, как следствие, прочность композита снижается. При этом сферические ячейки композита будут более склонны к появлению микродефектов и к росту их числа.

9. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТА

При заданном давлении q для исследуемой эффективной модели (см. рис. 1, а) запишем условие прочности (по 3-й теории прочно-

сти) [8, с. 177 – 178], которое, с учетом выражений (33) и (34), примет следующий вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = q \cdot \varphi \leq R, \quad (35)$$

где R – расчетное сопротивление композита; φ – значения функция $\varphi(\alpha)$.

Этому условию придадим форму более удобную для анализа прочности применительно к заданной расчетной схеме композита (см. рис. 1 и 2) с различным количественным составом его компонентов. С этой целью, приравняв левую и правую части, получим:

$$q^*(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) = R, \quad (а)$$

где $q^*(\alpha)$ – предельные (разрушающие) давления, предшествующие исчерпанию прочности в опасных точках сферической ячейки (при заданном значении α). Однако, в случае оптимально подобранного состава, когда $\alpha = \alpha_0$, функция φ достигает минимума [$\varphi(\alpha_0) = \varphi_{\text{опт}}$]. При этом величина $q^*(\alpha_0) = q_{\text{max}} = q_{\text{опт}}$, т. е. будет наибольшей. Следовательно, при оптимальном составе выражение (а) примет вид:

$$q_{\text{опт}} \cdot \varphi_{\text{опт}} = R. \quad (б)$$

С учетом выражений (а) и (б) условие (35) представим развернутым неравенством:

$$\sigma_{\text{экв}} = q^*(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) \leq q_{\text{опт}} \cdot \varphi_{\text{опт}} = R. \quad (36)$$

Отсюда получим расчетную формулу для вычисления предельных (разрушающих) давлений:

$$q^*(\alpha) = q_{\text{опт}} \frac{\varphi_{\text{опт}}}{\varphi(\alpha)}. \quad (37)$$

Если в качестве предела прочности выбрана эффективная прочность ячейки композита в ее опасных точках, то давление $q_{\text{опт}}$ можно именовать оптимальной прочностью самой ячейки (и композита в целом). В таком случае отношение

$$s(\alpha) = \frac{q^*(\alpha)}{q_{\text{опт}}} = \frac{\varphi_{\text{опт}}}{\varphi(\alpha)}. \quad (38)$$

можно назвать функцией прочности, зависящей от объемного содержания (α) матрицы в композите. Эта функция дает нам расчетную эффективную прочность $q^*(\alpha)$ (в долях от величины $q_{\text{опт}}$).

Результаты вычислений, выполненных по формуле (38), представлены на рис. 6, на котором изображен вид функций эффективной прочности для трех композиционных материалов, рассмотренных в примере 2.

В монографии Бобрышева А. Н., Ерофеева В. Т. и Козомазова В. Н. [3] приведены экспериментально полученные кривые, отражающие зависимость прочности при одноосном сжатии полимерных композитов от объемного содержания наполнителя. Куполообразный вид этих кривых [3, с. 270] аналогичен кривым расчетной эффективной прочности, представленным на рис. 6. Этот факт может быть взят в качестве косвенного подтверждения адекватности настоящего исследования. Однако непосредственно совместить теорию с этими экспериментальными фактами нельзя по причине того, что при испытаниях образцов на прочность не зафиксировано значений упругих констант материала компонентов этих образцов. Предварительное определение этих констант – обязательное условие для теоретических вычислений.

С другой стороны в монографии утверждается [3, с. 270], что при любом отклонении $\Delta\alpha$ от оптимального значения α_0 «прочность композита понижается». И далее: «результат оптимальности наполнения, выраженный» параболической зависимостью, «имеет широкое экспериментальное подтверждение для различных композитов на основе полимерных, цементных и других связующих матричных материалов в виде экстремального изменения прочности с выраженным экстремумом-максимумом».

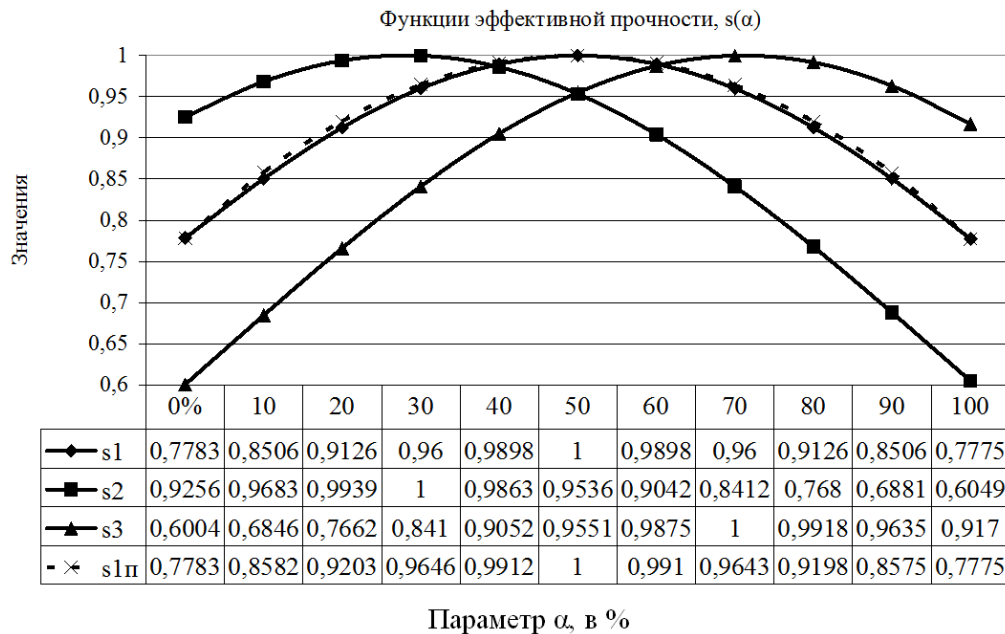


Рисунок 6. Графики функций $s(\alpha)$ для композитов, в которых: s_1 отвечает значениям $v_m=v_n=0,2$; s_2 – значениям $v_m=0,143$ и $v_n=0,25$; s_3 – значениям $v_m=0,25$ и $v_n=0,143$. Пунктиром выделена функция $s_{1π}$ – парабола, аппроксимирующая функцию s_1 .

Графики функций s_1 , s_2 и s_3 не есть параболы. Однако, например, аппроксимация функции s_1 параболой $s_{1π}$ (см. рис. 6, пунктирная кривая), показывает, что отличие этих функций от параболы незначительное (менее 2 %). На этом основании можно считать утверждение о «параболической зависимости» вполне обоснованным и практически приемлемым.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании выявлена возможность теоретического подбора оптимального количественного состава компонентов композита по критерию его эффективной прочности. Для иллюстрации метода подбора выбрана 3-я теория прочности. Но, при необходимости, в этом методе могут быть с успехом использованы и другие теории прочности.

Кроме того, данным методом можно определять оптимальный состав композита не только по критерию прочности в опасных точках эффективной модели (см. рис. 2, а), но и в

аналогичных точках матрицы (см. рис. 2, б) и наполнителя (см. рис. 2, в). При этом возникает вопрос: который же из трех вариантов более достоверен? Окончательный ответ в каждом конкретном случае может дать только результат адекватно поставленного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баничук Н.Б., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б.** Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
2. **Безухов Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
3. **Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.Н.** Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. – СПб.: Наука. 2012. – 176 с.
4. **Ванин Г.А.** Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 302 с.

5. **Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.** Композиционные материалы. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
6. **Гусев Б.В., Кондрашенко В.И., Маслов Б.П., Файвусович А.С.** Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. – М.: Научный мир, 2006. – 566 с.
7. **Кристенсен Р.М.** Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
8. **Тюряхин А.С., Черкасов В.Д., Манухов В.Ф.** Основы теоретической и прикладной механики деформируемого твердого тела. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. – 326 с.
9. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
10. **Соломатов В.И., Черкасов В.Д., Тюряхин А.С., Юркин Ю.В.** Объемные модули упругости двухсвязной модели композита. // Известия вузов. Строительство, 2001, № 4, с. 43-48.
11. **Ерофеев В.Т.** Каркасные строительные композиты. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук / Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева. Москва, 1993. 52 с.
12. **Тюряхин А.С., Черкасов В.Д., Юркин Ю.В., Соломатов В.И.** Модули упругости двухсвязной модели композитов. // Вестник Мордовского университета, 2000, №1-2, с. 135-139.
13. **Тюряхин А.С., Черкасов В.Д., Юркин Ю.В., Фомин Н.Е.** Эффективный модуль сдвига в двухсвязной модели композитов. // Вестник Мордовского университета, 2000, № 3-4, с. 127-130.
14. **Ерофеев В.Т., Твердохлебов Д.А., Тармосин К.В., Богатов А.Д., Леснов В.В., Коняшин А.А., Казначеев С.В.** Фурфуролацетоновые композиты каркасной структуры. – Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2008. – 220 с.
15. **Ерофеев В.Т., Баженов Ю.М., Калгин Ю.И.** Дорожные битумоминеральные материалы на основе модифицированных битумов (технология, свойства, долговечность). – Саранск : Изд-во Мордовского университета, 2009. – 276 с.
16. **Черкасов В.Д., Тюряхин А.С.** Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов : монография. – Саранск: Издательство Мордовского университета, 2009. – 108 с.
17. **Hashin Z.** The elastic moduli of heterogeneous materials // J. Appl. Mech. 1962. Vol. P. 143. (Имеется перевод: Прикладная механика. – М.: Мир, 1962, №1, с. 159-167).

Ерофеев Владимир Трофимович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, декан архитектурно-строительного факультета; Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева; 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7(8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; факс: +7 (8342) 47-29-13; e-mail: dep-general@adm.mrsu.ru

Тюряхин Алексей Сергеевич, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной механики; Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева; 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7(8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; факс: +7 (8342) 47-29-13; e-mail: dep-general@adm.mrsu.ru

Смирнов Игорь Витальевич, аспирант кафедры строительных материалов и технологий; Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева; 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68; тел. +7(8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; факс: +7 (8342) 47-29-13; e-mail: dep-general@adm.mrsu.ru

Максимова Ирина Николаевна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры управления качеством и технологии строительного производства; Пензенский государственный университет архитектуры и строительства; 440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28; тел.+7(8412)49-72-77(+11-10); факс: +7(8412) 49-72-77, +7(8412) 48-74-76; e-mail: office@pguas.ru

Vladimir T. Erofeev, Corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, professor, Dr.Sc., Dean of Faculty of Architecture and Civil Engineering; National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; Tel. +7 (8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; fax: +7 (8342)47-29-13; e-mail: dep-mail@adm.mrsu.ru.

Alexey S. Tukyakhin, Ph.D., Professor, Department of Applied Mechanics; National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; Tel. +7 (8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; fax: +7 (8342)47-29-13; e-mail: dep-mail@adm.mrsu.ru.

Igor V. Smirnov, Ph.D. Student, Department of Construction Materials and Technologies; National Research Ogarev Mordovia State University; 68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia; Tel. +7 (8342) 23-37-55; 29-05-45; 47-29-13; fax: +7 (8342)47-29-13; e-mail: dep-mail@adm.mrsu.ru.

Irina N. Maksimova, Ph.D., Professor, Department of Quality Management and Construction Engineering; Penza State University of Architecture and Construction; 28, Ul. Germana Titova, Penza, 440028, Russia; tel. +7(8412)49-72-77(+11-10); fax: +7(8412) 49-72-77, +7(8412) 48-74-76; e-mail: office@pguas.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ, ПОИСК И РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО КОНСТРУКТИВНОГО РЕШЕНИЯ С РАЗРАБОТКОЙ ПРОЕКТА НАВЕСА НА ДЕЙСТВУЮЩЕМ ФУТБОЛЬНОМ СТАДИОНЕ «КАЗАНЬ-АРЕНА» ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЧЕМПИОНАТА МИРА ПО ВОДНЫМ ВИДАМ СПОРТА В 2015 ГОДУ

И.Л. Кузнецов, А.В. Исаев, Р.Р. Вахтель, Л.Р. Гимранов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается решение задачи установки конструкций временного навеса, с площадью покрытия 75x88 метров, над действующим футбольным стадионом «Казань-Арена» вместимостью 45000 человек для проведения чемпионата мира по водным видам спорта в 2015 году.

Ключевые слова: временный навес, покрытие, стадион, ферма, башня

RESEARCH, SEARCH AND CALCULATION OF THE OPTIMAL CONSTRUCTIVE SOLUTION WITH DEVELOPMENT OF THE PROJECT OF THE CANOPY AT THE OPERATING FOOTBALL STADIUM "KAZAN-ARENA" FOR HOLDING THE WORLD CUP IN WATER SPORTS IN 2015

Ivan L. Kuznetsov, Aleksei V. Isaev, Roman R. Vakhtel, Linur R. Gimranov

Kazan state architectural and construction university, Kazan, RUSSIA

Abstract: In the present article the solution of a problem of installation of designs of a temporary canopy, with an area of covering of 75x88 m, over the operating football stadium "Kazan Arena" with a capacity of 45000 people for holding the World Cup in water sports in 2015 is considered.

Keywords: temporary canopy, covering, stadium, farm, tower

Для проведения чемпионата мира по плаванию дирекцией олимпийского комитета и FINA было принято решение об использовании существующего футбольного стадиона «Казань-Арена» вместимостью 45000 человек. Для этого на футбольном поле необходимо было установить два сборно-разборных плавательных бассейна, предназначенных соответственно, для проведения соревнований и тренировок (рис. 3, 4). Для соревновательного бассейна при этом должен был быть создан временный навес с площадью покрытия

75x88 метров, а также установлены с восточной и южной стороны дополнительные временные трибуны вместимостью 7000 человек. Рассматривались разные варианты навесов в том числе и иностранных фирм из Финляндии, Испании и Турции. От всех компаний поступило предложение создания навеса с использованием структурных металлических конструкций, опирающихся по четырем сторонам на вновь установленные опоры. С одной стороны достоинства структурных конструкций неоспоримы и сочетают в себе:

Исследование, поиск и расчет оптимального конструктивного решения с разработкой проекта навеса на действующей футбольном стадионе «Казань-Арена» для проведения Чемпионата мира по водным видам спорта в 2015 году

- равномерное распределение металла по покрытию,
- повышенная надежность;
- регулярность с максимальной унификацией стержней и т.д.

Однако достоинства обуславливают и существенные недостатки подобных конструкций:

- сложность узлов,
- значительные начальные напряжения;
- относительно высокая трудоемкость изготовления и монтажа.

Вместе с тем ставилась задача возведения навеса в сжатые сроки, а также сохранения газона футбольного поля, что обуславливает передачу минимальных усилий на основание. В целом примеры подобных навесов в проектах существуют. Но в предложениях иностранных строительных фирм, опорные стойки располагались между бассейном и зрителями, что, соответственно, мешало нормальному восприятию соревнований.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КГАСУ) предложил свой вариант навеса, который предусматривал установку 12-ти башен-колонн высотой 50 метров (с шагом 8 метров), за пределами устанавливаемых трибун, к которым крепятся фермы-стрелы длиной 75 метров с образованием консоли относительно колонн (рис. 1). Стрелы имеют шарнирное крепление к колоннам и удерживаются в проектном положении системой тяжей, закрепленных на вершине башни. По верхнему поясу ферм монтируются прогоны, которые являются основой для натяжения тента.

Для удержания системы с обратной стороны башня раскреплена 12 метровой распоркой, на которую замыкается тяж стойки и подкосом, обеспечивающих транзит усилий в опору башни и несущую балку косоура трибун. Выполненная конструктивная схема позволяет воспринимать и отрицательный и положительный опрокидывающие моменты. Данное предложение КГАСУ было принято за основу при разработке окончательного проекта при этом было проработано 2 варианта. Первый вариант предусматривал установку трибун из

вновь разработанных конструкций совместно работающих с конструкциями колонн и ферм, а второй вариант включал в себя несущий косоур для конструкции трибун, возводимых из сборно-разборных инвентарных конструкций фирмы «lauber», ускоряющий процесс возведения объекта.

Конструктивное решение трибунной части при этом сохраняло несущие элементы косоура и тяжей, что позволило использовать в качестве фундаментов обыкновенные железобетонные дорожные плиты размером 1.5x2 метра, которые одновременно служили и балластом на действие восходящих ветровых потоков и в то же время обеспечивали контактные давления под подошвой не более 1.5 кг/см², что требовалось для сохранения газона.

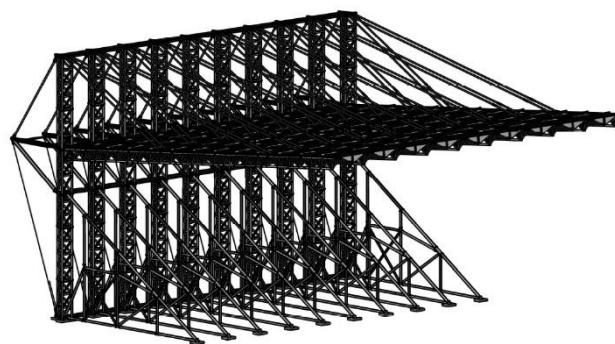


Рисунок 1. Идея конструктивного решения навеса над бассейном на стадионе «Казань-Арена».

Кажущаяся простота конструктивной формы навеса потребовала проведения комплекса исследовательских задач.

С одной стороны, конструкция должна быть легкой с низкими показателями стоимости металла в деле [1, 2].

С другой стороны - обеспечивать сжатые сроки строительства и запуска в эксплуатацию объекта в установленные сроки, а также отвечать противопожарным требованиям [3]. Всего было рассмотрено несколько десятков схем, относящихся к параметрическому анализу. В частности, рассматривались схемы опирания стрелы на трехпоясные ванта, по

результатам которых установлена неэффективная работа такой системы с позиции одновременного включения их в работу (рис. 2). Кроме того, подобная система приводила к сложности контроля усилий на стадии монтажа и эксплуатации за счет их прогрева, и, как следствие - к перенапряжению отдельных поясов вант.

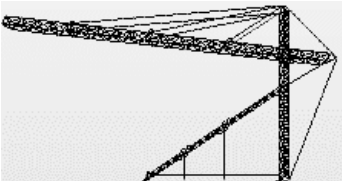
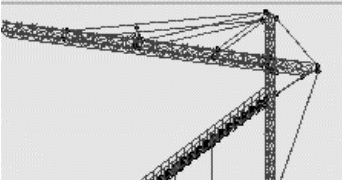
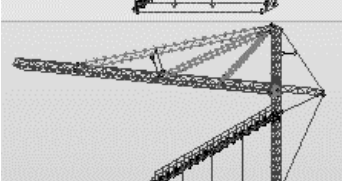
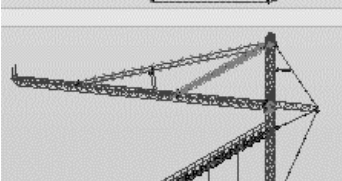

	Необоснованный расход стали на конструкцию стрелы и систему оттяжек	Вариативный параметр: высота башни и конструкция распорки
	Необоснованный расход стали на конструкцию распорки, а также стоимости изготовления распорки	
	Необоснованный расход стали на конструкцию распорки, а также стоимости изготовления распорки	
	Контактные давления на основание поля $> 2 \text{ кг/см}^2$	Наименьшая длина затяжек и опор трибуны части
	Неравномерность передачи нагрузок через стойки трибун	

Рисунок 2. Исследование и расчет несущей способности – поиск наилучшего конструктивного решения

Исходя из анализа статической работы одно и двух поясной системы, где варьируемым параметром была координата раскрепления стрелы, установлено фиксированное положение тяжей, обеспечивающих минимальное распределение усилий как в элементах фермы, так и в тяжах.

Отдельно разработана система натяжения тента, обеспечивающая оригинальный профиль покрытия и одновременно отвод атмосферных осадков за трибунную зону (рис. 6). Система натяжения представляет собой шток, устанавливаемый на прогоны и имеющий свободное перемещение по вертикали. Натяжение тента производится регулировкой штока, упирающегося в распределительный брус, обеспечивающий треугольную складку, способную воспринимать ветровую нагрузку, а также дает возможность регулировать температурные воздействия (рис. 5).

Возвращаясь к несущим конструкциям стоит отметить, что стальная конструкция фермы и башни разделены на монтажные единицы – секции, которые изготавливаются в заводских условиях. Объединение в конструктивные элементы (укрупнение) производится непосредственно на площадке строительства посредством болтовых соединений. Опорная башня-колонна, монтируется методом наращивания секций до отметки 24.1 м, после чего монтируется конструкция ферма-косоура трибун для обеспечения устойчивости всей конструкции. Далее наращивание башни-колонны производится до проектной отметки 50 метров после чего начинается монтаж всей фермы-стрелы путем закрепления опорного узла на отметке 32.7 метра и подъема фермы-стрелы поворотом вокруг шарниров опор в проектные положения с закреплением фермы-стрелы «навесу» системой тяжей.

Подобная схема монтажа потребовала бы работы одного крана грузоподъемностью не более 20 тонн. Однако, наличие стрелового крана, грузоподъемностью только 14 тонн, и второго не более 8 тонн, привело к поэтапному монтажу стрелы секциями. Тем не менее монтаж стрел был выполнен за 1 месяц. Особенностью монтажа стрел являлось то, что натяжение короткого тяжа осуществлялось на определенную величину. А именно, после установки первого тяжа в месте крепления короткого тяжа прогиб стрелы составлял 110 миллиметров, далее натяжкой талрепа ко-

Исследование, поиск и расчет оптимального конструктивного решения с разработкой проекта навеса на действующей футбольном стадионе «Казань-Арена» для проведения Чемпионата мира по водным видам спорта в 2015 году

роткого тѳа прогиб уменьшался до 60 миллиметров, при этом достигалась необходимая проектная величина натяжения второго тѳа. Стоит отметить, что в период эксплуатации навес дважды подвергался экстремальным ветровым нагрузкам.

В период монтажа несущих конструкций, а также установки сборных трибунных конструкций и бассейна, осуществлялся авторский надзор за выполнением работ, где в частности при монтаже трибун были выявлены и своевременно устранены недостатки стержневых элементов трибун.

Расход стали на конструкции навеса составил 75 кг/м^2 .

Изготовление стальных конструкций общей массой 500 тонн выполнено на заводе Ак-Барс Металл г. Набережные Челны за 4 месяца, а монтаж произведен в кратчайшие сроки, в режиме поступления конструкций на объект.

От начала проектирования до сдачи навеса в эксплуатацию потребовалось 9 месяцев.

Данная работа коллектива авторов была отмечена Дипломом РААСН за 2015 год, в области строительных наук.



Рисунок 3. Панорама (вид сверху) перекрытого футбольного поля на стадионе «Казань-Арена».



Рисунок 4. Общий вид основного и тренировочного бассейна на стадионе «Казань-Арена».



Рисунок 5. Монтаж стальных конструкций над стадионом «Казань-Арена» – подъем и монтаж тента (вид снизу).

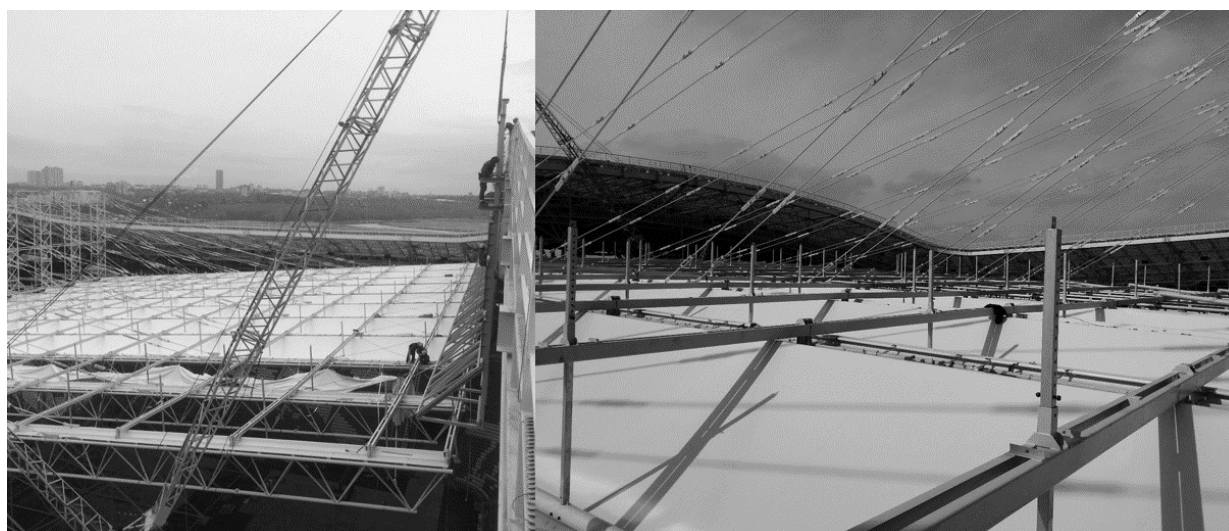


Рисунок 6. Монтаж стальных конструкций над стадионом «Казань-Арена» – завершение монтажа тента, общий вид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия».
2. СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции».
3. СНиП 21-01-97* «Пожарная безопасность зданий и сооружений», Госстрой России, М. – ГУП ЦПП, 2002 г.

Кузнецов Иван Леонидович, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра металлических конструкций и испытаний сооружений, 420043, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Зеленая, дом 1, e-mail: kuznetsov@kgasu.ru.

Исаев Алексей Викторович, доцент, кандидат технических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра металлических конструкций и испытаний сооружений, 420043, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Зеленая, дом 1, e-mail: aliswik@yandex.ru.

Исследование, поиск и расчет оптимального конструктивного решения с разработкой проекта навеса на действующей футбольном стадионе «Казань-Арена» для проведения Чемпионата мира по водным видам спорта в 2015 году

Вахтель Роман Ричардович, старший преподаватель, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра производственная безопасность и право, 420043, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Зеленая, дом 1, e-mail: v_roman@bk.ru.

Гимранов Линур Рафаилевич, старший преподаватель, кандидат технических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра металлических конструкций и испытаний сооружений, 420043, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Зеленая, дом 1, e-mail: leenur@mail.ru.

Ivan L. Kuznetsov, professor, Doctor of technical science, head of the department, Kazan state architectural and construction university, department of metal designs and tests of constructions, 420043, Russia, Republic of Tatarstan, Kazan, Zelyonaya St., house 1, e-mail: kuznetsov@kgasu.ru.

Aleksei V. Isaev, associate professor, candidate of technical science, Kazan state architectural and construction university, department of metal designs and tests of constructions, 420043, Russia, Republic of Tatarstan, Kazan, Zelyonaya St., house 1, e-mail: aliswik@yandex.ru.

Roman R. Vakhtel, senior lecturer, Kazan state architectural and construction university, department of metal designs and tests of constructions, 420043, Russia, Republic of Tatarstan, Kazan, Zelyonaya St., house 1, e-mail: v_roman@bk.ru.

Linur R. Gimranov, senior lecturer, candidate of technical science, Kazan state architectural and construction university, department of metal designs and tests of constructions, 420043, Russia, Republic of Tatarstan, Kazan, Zelyonaya St., house 1, e-mail: leenur@mail.ru.

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УСИЛЕНИЯ СТЕНКИ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО ПОПЕ-РЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Л.С. Ляхович, А.П. Малиновский, Б.А. Тухфатуллин

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

Аннотация: Ранее были сформулированы критерии минимальной материалоемкости проектируемых и усиливаемых стержней при различных ограничениях и типах поперечных сечений. В частности, были сформулированы критерии оптимального проектирования стержней двутаврового поперечного сечения и усиления их полок при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. Однако могут возникать ситуации (условия эксплуатации, технологические и другие), при которых усиление полок двутавра либо не удастся реализовать, либо оказывается недостаточным. В данной статье формулируется критерий оптимального усиления стенок стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты.

Ключевые слова: оптимизация, системы минимальной материалоемкости, устойчивость, критическая сила, частота собственных колебаний, формы потери устойчивости, формы собственных колебаний, напряжения, изгиб, двутавр

CRITERIA FOR OPTIMAL STRENGTHENING OF BAR FLANGE WITH I-TYPE CROSS-SECTION WITH STABILITY CONSTRAINTS OR WITH CONSTRAINTS ON THE VALUE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY

Leonid S. Lyakhovich, Anatoly P. Malinovsky, Boris A. Tukhfatullin

Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

Abstract: Previously, the minimum criteria for material consumption projected and amplified rods were formulated under various constraints and types of cross-sections. In particular, the criteria of optimal design of bars with I-type cross-section and criteria of bar flange strengthening with stability constraints on the value of the first natural frequency were formulated. However, there may be various situations (caused by operating, technological reasons etc.), in which the bar flange strengthening can't be implemented, or it is insufficient. The distinctive paper is devoted to formulation of criteria for optimal strengthening of bar flange with I-type cross-section with stability constraints on the value of the first natural frequency.

Keywords: optimization, system of minimum materials consumption, stability, critical load, natural frequency, buckling modes, stress, bending, bars, I-type cross-section

В [2] сформулированы критерии минимальной материалоемкости проектируемых стержней при различных ограничениях и типах поперечных сечений.

На протяжении жизненного цикла сооружения могут изменяться условия его эксплуатации. В частности может измениться нагрузка или характеристика динамических воздействий.

Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

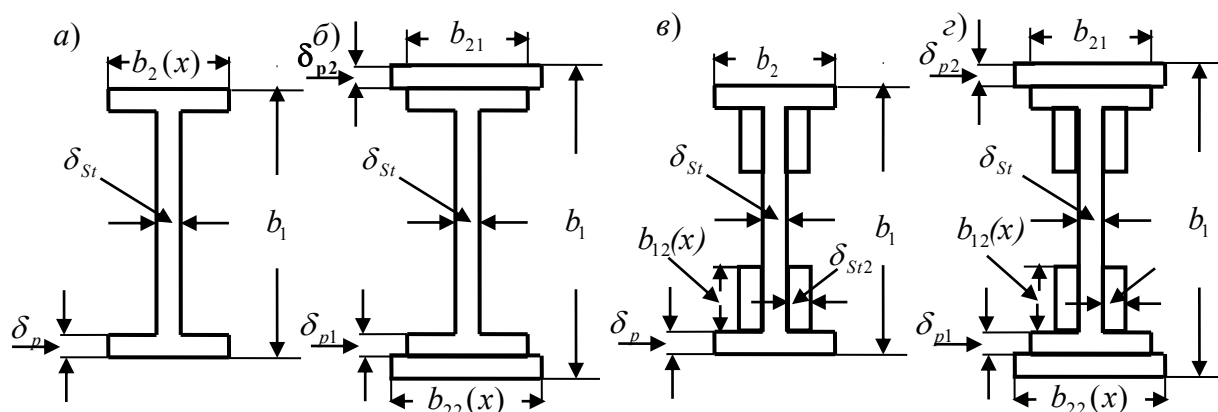


Рисунок 1. Примеры поперечных сечений стержней.

Эти обстоятельства приводят к необходимости усиления сооружения. В некоторых случаях оказывается достаточным выполнить усиление лишь некоторых элементов сооружения.

Довольно часто в качестве элементов сооружений проектируются стержни, у которых поперечное сечение составное в виде двутавра (рисунок 1-а). Если в процессе эксплуатации сооружения возникает необходимость в усилении такого стержня, то оно может быть реализовано, например усилением полки двутавра дополнительными полосами (рисунок 1-б). В [3] сформулирован критерий минимальной материалоемкости при усилении полки стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты.

В реальных ситуациях могут возникать обстоятельства (условия эксплуатации, технологические и другие), при которых усиление полки двутавра либо не удастся реализовать, либо оно оказывается недостаточным. В таких случаях иногда усиление может быть выполнено усилением стенки двутавра дополнительными полосами (рисунок 1-в). На рисунке 1-в b_2 , δ_p , δ_{st} соответственно ширина полки, ее толщина и толщина стенки усиливаемого двутавра. Толщина четырех дополнительных усиливающих листов δ_{st2} .

Высота каждого из них $b_{12}(x)$ может изменяться по длине стержня. Высота усиленного сечения b_1 .

В данной статье формулируется критерий оптимального усиления стенок стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты.

Ограничение по устойчивости имеет вид

$$P \leq P_{kp} \quad (1)$$

В (1) P действующая сила, а P_{kp} критическая усиленного стержня.

Ограничение на величину первой частоты собственных колебаний записывается в виде

$$\omega_0 \leq \omega_1 \quad (2)$$

В (2) ω_0 частота воздействий, а ω_1 первая частота собственных колебаний усиленного стержня.

Критерий оценивает оптимальность проекта по определению такого закона изменения высоты дополнительных листов $b_{12}(x)$, усиливающих стенку двутавра, при котором будут соблюдаться ограничения на величину критической силы или первой собственной частоты, а расход материала на усиление будет минимальным. Не варьируются высота

сечения b_1 , толщины полки δ_p , стенки δ_{st} и дополнительных полос δ_{st2} ($b_1 = \text{const}$, $\delta_p = \text{const}$, $\delta_{st} = \text{const}$, $\delta_{st2} = \text{const}$). Варьируется высота усиливающих листов $b_{12}(x)$. Функция цели (объем материала усиливающих листов) имеет вид

$$V = 4 \cdot \int_0^{\ell} \delta_{st2} \cdot b_{12}(x) \cdot dx \quad (3)$$

Выведем выражение критерия оптимальности усиления стенки при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний. При выводе критерия учтем, что собственная частота определяется с учетом влияния продольной силы. Функция цели записывается в виде (3), а ограничение имеет вид (2).

Как известно (например [4]) при выполнении (2) в виде равенства должно иметь место условие

$$\mathcal{E} = \int_0^{\ell} \left\{ EI(x) \cdot (v''_{\omega})^2 - P \cdot (v'_{\omega})^2 - (\omega_1)^2 \cdot [m(x) + \rho \cdot F(x)] \cdot (v_{\omega})^2 \right\} dx = 0 \quad (4)$$

В (4) \mathcal{E} приращение потенциальной энергии, $v_{\omega}(x)$ ординаты первой формы собственных колебаний, E модуль упругости материала,

$$I_1(x) = \left\{ b_1^3 \cdot b_2 - (b_2 - \delta_{st} - 2 \cdot \delta_{st2}) \cdot (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3 - 2 \cdot \delta_{st2} \cdot [b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x)]^3 \right\} \cdot \frac{1}{12} \quad (5)$$

момент инерции сечения относительно его главной горизонтальной оси, $m(x)$ интенсивность внешней массы, ρ значение удельной массы, $F(x)$ площадь сечения стержня.

$$F(x) = 2 \cdot b_2 \cdot \delta_p + (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \cdot \delta_{st} + 4 \cdot b_{12}(x) \cdot \delta_{st2} \quad (6)$$

Теперь, с учетом (3), (4), (5) и (6) задача сводится к отысканию минимума функционала

$$V_{0\omega} = \int_0^{\ell} \left\{ 4 \cdot b_{12}(x) \cdot \delta_{st2} - \lambda_{\omega 1} \cdot \left[\frac{E}{12} \cdot [b_1^3 \cdot b_2 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3 \cdot (b_2 - \delta_{st} - 2 \cdot \delta_{st2}) - 2 \cdot \delta_{st2} \cdot (b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x))^3] \cdot (v''_{\omega})^2 - P \cdot (v'_{\omega})^2 - (\omega_0)^2 \cdot [m(x) + \rho \cdot (2 \cdot b_2 \cdot \delta_p + (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \cdot \delta_{st} + 4 \cdot b_{12}(x) \cdot \delta_{st2})] \cdot (v_{\omega})^2 \right] \right\} dx \quad (7)$$

В (7) $\lambda_{\omega 1}$ множитель Лагранжа при решении задачи об условном экстремуме.

Минимум функционала (11) реализуется решением уравнения

$$\delta(V_{0\omega})_{b_{12}(x)} = 4 \cdot \delta_{st2} - \lambda_{\omega 1} \cdot \left\{ E \cdot [\delta_{st2} \cdot (b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x))^2] \cdot (v''_{\omega})^2 - 4 \cdot (\omega_0)^2 \cdot \delta_{st2} \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 \right\} = 0$$

или

$$E \cdot [b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x)]^2 \cdot (v''_{\omega})^2 - 4 \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 = \frac{4}{\lambda_{\omega}}.$$

С учетом (4) задача об экстремуме функционала (7) является изопериметрической. Следовательно, λ_{p1} постоянная величина.

Учитывая, что λ_{ω} постоянная величина, можем записать

$$E \cdot [b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x)]^2 \cdot (v''_{\omega})^2 - 4 \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 = \text{const} \quad (8)$$

Как известно нормальные напряжения в стержне при изгибе в волокне, отстоящем от

Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

нейтрального слоя на расстоянии y_s , определяются зависимостью

$$\sigma = \frac{M \cdot y_s}{I}.$$

Учитывая, что

$$M = -EI \cdot v'',$$

запишем

$$\sigma = -E \cdot y_s \cdot v''.$$

Выражение

$$b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}(x) = 2 \cdot y_s$$

это удвоенное расстояние от нейтрального слоя до края усиливающей полосы. Теперь (8) переписывается в виде

$$E \cdot 4 \cdot y_s^2 \cdot (v''_{\omega})^2 - 4 \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 = \text{const}$$

или

$$E^2 \cdot y_s^2 \cdot (v''_{\omega})^2 - E \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 = \text{const}.$$

Учитывая, что

$$\sigma_{S\omega}(x) = -E \cdot y_x \cdot v''_{\omega}$$

– напряжение в волокне двутавра по краю усиливающей полосы, запишем это уравнение в виде.

$$\sigma_{S\omega}^2(x) - E \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 = \text{const} \quad (9)$$

или

$$\bar{\sigma}_{S\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{S\omega}^2(x) - E \cdot (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2} = \text{const} \quad (10)$$

В (10) $\bar{\sigma}_{S\omega}(x)$ нормированное приведенное напряжение, а $\sigma_{S\omega}(x)$ нормальное напряжение в волокне двутавра по краю усиливающей полосы.

Таким образом, при усилении стенок стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их высотой $b_{12}(x)$, при ограничении величины первой частоты собственных колебаний минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к нормированным приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{S\omega}(x)$, возникающим при колебаниях по соответствующей собственной форме.

Критерий (10) может использоваться и при решении задачи об оптимальном усилении стенок стержней двутаврового сечения при ограничениях по устойчивости (1). В этом случае в (10) принимается $\omega_0 = 0$ и критерий принимает вид

$$\bar{\sigma}_{Sp}(x) = \text{const} \quad (11)$$

Таким образом, при усилении стенок стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их высотой $b_{12}(x)$, при ограничении по устойчивости минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к нормированным напряжениям $\bar{\sigma}_{Sp}(x)$, возникающим при потере устойчивости в волокнах стержня на краях усиливающих полос.

Анализ обоснования критериев (10) и (11) показывает, что они справедливы и при усилении стенки двутавра для сечений, у которых ранее были усилены полки (рисунок 1-г).

Оптимизация усиления стенок стержней двутаврового сечения может быть реализована различными методами. Использование критериев (10) и (11) для оценки близости полученных решений к минимально матери-

алоёмкому правомерно лишь тогда, когда ограничения (1) или (2) выполняются в виде равенств, а ограничение на высоту усиливающих листов

$$b_{12} \leq 0,5 \cdot (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \quad (12)$$

в виде неравенства. Ограничение (12) обеспечивает возможность размещения усиливающих листов на стенке двутавра.

В большинстве случаев решение, полученное на основе критериев (10) и (11) непосредственно применять нецелесообразно. Его прямое использование может привести к значительным отходам материала. Однако полученное решение может служить основой для создания более технологичных проектов и одновременно выполнять функцию оценки близости технологически приемлемого решения к минимально материалоёмкому.

Приведем пример, иллюстрирующий сформулированные критерии.

Пример. Рассматривается стержень двутаврового сечения (рис. 1-а). Размеры сечения $b_1 = 0,12$ м, $b_2 = 0,06$ м, $\delta_{st} = 0,01$ м, $\delta_p = 0,01$ м. Пролет стержня $\ell = 9$ м, модуль упругости материала стержня $E = 206000$ МПа. Удельная масса материала стержня $\rho = 7850$ кг/м³. Условия закрепления стержня приведены на рис. 2-а. Стержень сжимается силой и несет распределенную массу интенсивностью $m = 100$ кг/м. Расчет стержня на устойчивость, собственные колебания и оптимизацию усиления выполнялся на основе дискретной модели из $n = 20$ равных участков длиной $\Delta\ell = \ell/n$ каждый. Поэтому функция цели (3) и размеры высоты усиливающих полос принимают конечномерную форму

$$V = 4\delta_{st2}\Delta\ell \cdot \sum_{i=1}^{20} b_{12}[i],$$

а приведенные к узлам массы составят по 45 кг в каждом узле.

Критическая нагрузка рассматриваемого стержня без учета вибрационных воздействий $P_{kp} = 228832$ Н, а первая собственная частота без учета влияния продольной силы $\omega_1 = 16,86$. Решаются две задачи.

Задача 1. Требуется усилить стенку стержня двутаврового сечения (рисунок 1-в, $\delta_{st2} = 0,01$ м) таким образом, чтобы критическая сила усиленного стержня без учета вибрационных воздействий составила бы $P_{kp} = 300000$ Н, а расход материала был бы минимальным. Рассматривались два варианта усиления. В **первом варианте** варьируются размеры высоты полос $b_{12}[i]$ всех участков дискретной схемы. Непосредственное применение такого решения не технологично. Это решение может быть использовано и как ориентир для создания более технологичных проектов и как функция для оценки близости технологически приемлемых решений к минимально материалоёмкому.

Во **втором варианте** стенка усиливается сверху и снизу одинаковыми полосами постоянной высоты с каждой стороны стенки (рисунок 1-в). Варьируется величина $\bar{b}_{12}[1] = b_{12}[1] = b_{12}[2] = \dots = b_{12}[20]$. Оптимизация усиления в обоих вариантах выполнена методом случайного поиска. Результаты первого варианта приведены в столбце 3, а второго в столбце 2 таблицы 1. Оба эти варианта показаны на рисунке 2-б. Объем материала стержня второго варианта составляет $V = 0,027922$ м³, а усиливающих полос $V_p = 0,008122$ м³. Объем материала стержня в первом варианте составляет $V = 0,025908$ м³, что на 7,21% меньше чем во втором. Объем материала усиливающих полос в первом варианте составляет $V_p = 0,006107$ м³, что меньше чем во втором на 24,80%. Близость решения первого варианта к минимально материалоёмкому оценивается по критерию (10) близостью приведенного напряжения $\bar{\sigma}_{pt}[i]$ к единице. Значения $\bar{\sigma}_{1pt}[i]$ приведены в столбце 4 таблицы 1.

Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

Таблица 1. К решению задачи 1.

№ п/п	Высота усиливающей полосы $b_{12}[i]$, м		$\bar{\sigma}_{pr}[i]$
	2	3	
1	0,0226	0,028284	0,9994
2	0,0226	0,026034	1,0000
3	0,0226	0,021979	0,9992
4	0,0226	0,014815	0,9996
5	0,0226	0,002491	0,9985
6	0,0226	0,000040	0,3778
7	0,0226	0,000041	0,3739
8	0,0226	0,002456	0,9966
9	0,0226	0,014770	0,9994
10	0,0226	0,021944	0,9995
11	0,0226	0,026020	0,9999
12	0,0226	0,028285	0,9989
13	0,0226	0,029273	0,9997
14	0,0226	0,029282	0,9993
15	0,0226	0,028275	0,9996
16	0,0226	0,026034	0,9996
17	0,0226	0,021961	0,9994
18	0,0226	0,014798	0,9993
19	0,0226	0,002479	0,9973
20	0,0226	0,000043	0,3758
V	0,027922	0,025908	
e		7,21%	
V_p	0,008122	0,006107	
e_p		24,80%	

Таблица 2. К решению задачи 2.

№ п/п	Высота усиливающей полосы $b_{12}[i]$, м		$\bar{\sigma}_{or}[i]$
	2	3	
1	0,017489	0,028318	0,9997
2	0,017489	0,024458	1,0000
3	0,017489	0,018378	0,9992
4	0,017489	0,008581	0,9993
5	0,017489	0,000052	0,7423
6	0,017489	0,000023	0,2533
7	0,017489	0,000029	0,3556
8	0,017489	0,000374	0,9789
9	0,017489	0,009077	0,9995
10	0,017489	0,014780	0,9994
11	0,017489	0,018225	0,9994
12	0,017489	0,020169	0,9997
13	0,017489	0,021024	0,9995
14	0,017489	0,020938	0,9992
15	0,017489	0,019850	0,9996
16	0,017489	0,017530	0,9993
17	0,017489	0,013400	0,9994
18	0,017489	0,006526	0,9989
19	0,017489	0,000069	0,8159
20	0,017489	0,000026	0,2772
V	0,026096	0,024153	
e		7,45%	
V_p	0,006296	0,004353	
e_p		30,87%	

Во всех сечениях кроме трех (№№ 6, 7, 20) величины $\bar{\sigma}_{pr}[i]$ отличаются от единицы на доли %. В сечениях 6, 7, 20 высота дополнительных полос очень мала, то есть отмеченные сечения не нуждаются в усилении. Таким образом, полученное решение первого варианта достаточно близко к минимально материалоемкому.

Задача 2. Рассматривается приведенный в начале примера стержень, но находящийся под действием продольной силы $P=150000\text{Н}$. В этом случае первая собственная частота с учетом влияния продольной силы будет $\omega_1=9,9773$. Требуется уси-

лить стенку стержня двутаврового сечения (рисунок 1-в, $\delta_{s12}=0.01\text{м}$) таким образом, чтобы первая частота усиленного стержня с учетом влияния продольной силы была бы $\omega_1=13$, а расход материала был бы минимальным. Рассматривались два варианта усиления. В **первом варианте** варьируются размеры высоты полос $b_{12}[i]$ всех участков дискретной схемы. Во **втором варианте** стенка усиливается сверху и снизу одинаковыми полосами постоянной высоты с каждой стороны стенки (рисунок 1-в). Варьируется величина $\bar{b}_{12}[1]=b_{12}[1]=b_{12}[2]=\dots=b_{12}[20]$.

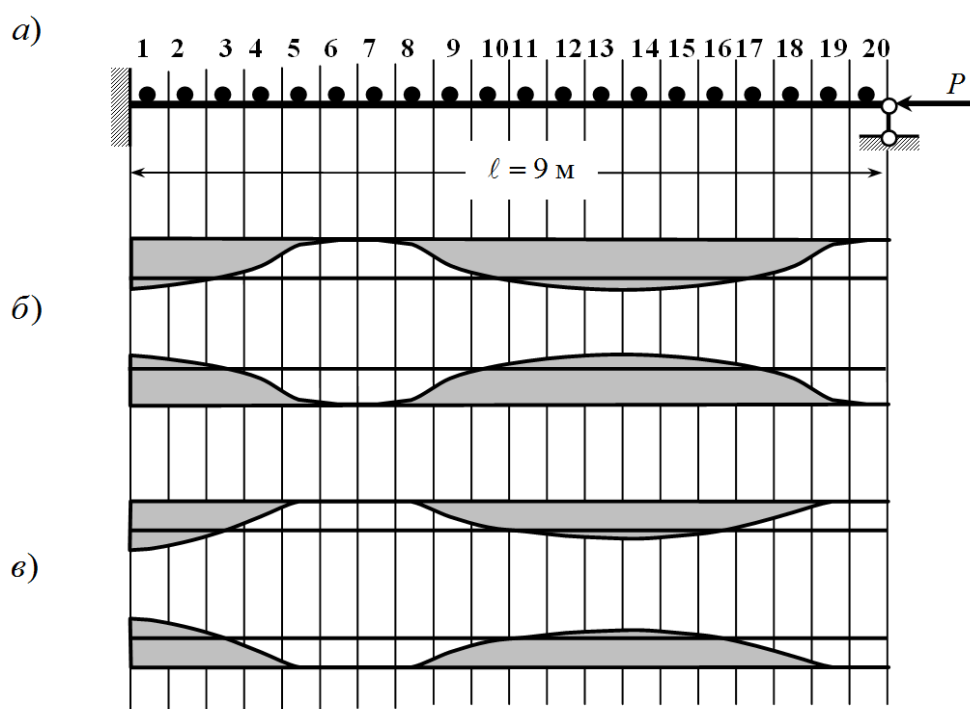


Рисунок 2. К примерам расчета.

Результаты первого варианта приведены в столбце 3, а второго в столбце 2 таблицы 2. Оба эти варианта показаны на рисунке 2-в. Объем материала стержня второго варианта составляет $V = 0,026096 \text{ м}^3$, а усиливающих полос $V_p = 0,006296 \text{ м}^3$. Объем материала стержня в первом варианте составляет $V = 0,024153 \text{ м}^3$, что на 7,45% меньше чем во втором. Объем материала усиливающих полос в первом варианте составляет $V_p = 0,004353 \text{ м}^3$, что меньше чем во втором на 30,87%. Близость решения первого варианта к минимально материалоемкому оценивается по критерию (11) близостью приведенного напряжения $\bar{\sigma}_{\alpha}[i]$ к единице. Значения $\bar{\sigma}_{\alpha}[i]$ приведены в столбце 4 таблицы 1. Во всех сечениях кроме пяти (№№ 5, 6, 7, 19, 20) величины $\bar{\sigma}_{\alpha}[i]$ отличаются от единицы на доли %. В сечениях 5, 6, 7, 19, 20 высота дополнительных полос очень мала, то есть отмеченные сечения не нуждаются в усилении. Таким образом, полученное решение первого варианта достаточно близко к минимально материалоемкому. Очевидно,

что в обеих задачах второй вариант более технологичен. Однако решение по первому варианту может позволить более уверенно обосновать преимущества второго варианта. Проблемы использования оптимальных решений в реальном проектировании рассматривались в частности в [2, 4, 6] и других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость упругих систем. – М. : Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – 372 с.
3. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П.** Критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. // Вестник ТГАСУ, 2015, №5, с. 41-50.

Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

4. **Ляхович Л.С., Тухфатуллин Б.А., Пугеева Л.Е., Григорьев А.И.** Использование методов оптимизации в задачах усиления конструкций. // Вестник ТГАСУ, 2015, №6, с. 51-70.
5. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1976. – 320 с.
6. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 14-23.

634003, Russia; tel. +7 (3822) 65-32-61, fax +7 (3822) 65-24-22, e-mail: dec_sf@mail.ru.

Boris A. Tukhfatullin, Ph.D., Associate Professor of Bridges and Structures on Roads; Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003, Russia; tel. +7 (3822) 65-32-61, fax +7 (3822) 65-24-22, e-mail: kaf_most@mail.ru.

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики; Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Сибирский федеральный округ, Томская область, г. Томск, пл. Соляная, д. 2; тел. +7 (3822) 65-32-61, факс +7 (3822) 65-24-22, e-mail: lsl@sibmail.com.

Малиновский Анатолий Павлович, доцент, кандидат технических наук, декан строительного факультета; Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Сибирский федеральный округ, Томская область, г. Томск, пл. Соляная, д. 2; тел. +7 (3822) 65-32-61, факс +7 (3822) 65-24-22, e-mail: dec_sf@mail.ru.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры мостов и сооружений на дорогах; Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Сибирский федеральный округ, Томская область, г. Томск, пл. Соляная, д. 2; тел. +7 (3822) 65-32-61, факс +7 (3822) 65-24-22, e-mail: kaf_most@mail.ru.

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Department of Structural Mechanics; Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003, Russia; tel. +7 (3822) 65-32-61, fax +7 (3822) 65-24-22, e-mail: lsl@sibmail.com.

Anatoly P. Malinovsky, Associate Professor, Ph.D., Dean of Faculty of Civil Engineering; Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya sq., Tomsk,

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

Ж.И. Мсхалая¹, П.А. Акимов^{1,2,3,4}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются теоретические основы спектрального метода граничных элементов (СМГЭ), затронуты вопросы, связанные с выводом и исследованием граничных интегральных уравнений на основе общих формулировок для систем эллиптических уравнений, обсуждаются результаты численных исследований СМГЭ на одномерных и двумерных примерах, излагаются проблемы аппроксимации и численного решения граничных уравнений, перспективы дальнейшего развития СМГЭ.

Ключевые слова: спектральный метод граничных элементов, расчеты строительных конструкций, краевая задача, ряды Фурье, регуляризация

SPECTRAL BOUNDARY ELEMENT METHOD THEORETICAL FOUNDATIONS, APPLICATION IN STRUCTURAL ANALYSIS AND FUTURE EVOLUTION

Zhiuli I. Mskhalaya¹, Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to theoretical foundations of so-called spectral boundary element method (SBEM). Problems dealing with construction of resultant system of boundary integral equations (with the use of corresponding basic formulations for system of elliptic equations) and its analysis. Results of numerical studies of SBEM for one-dimensional and two-dimensional samples, problems of approximation and numerical solution of boundary equations, future evolution of SBEM are under consideration as well.

Keywords: spectral boundary element method, structural analysis, boundary problem, Fourier analysis, regularization

ВВЕДЕНИЕ

Спектральный метод граничных элементов (СМГЭ) был предложен А.И. Цейтлиным и Л.Г. Петросяном в работах [16,17,20,21] для решения интегральных уравнений, связан-

ных с решением краевых задач для уравнения Лапласа и уравнения установившихся колебаний. По сути это способ решения краевых задач на основе использования функции Грина для прямоугольника (задача Дирихле), представленной тригонометрическими ряда-

ми. Численную реализацию этого способа авторы характеризовали как новый эффективный метод, названный СМГЭ. Метод назван спектральным, поскольку функция Грина представлена в виде разложения по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Основная идея представления ядра интегрального оператора (функции Грина) в виде разложения по собственным функциям на некоторой окаймляющей области новой не является. Этот результат встречается в публикациях, начиная с классической книги Р. Куранта и Д. Гильберта [3].

В работах [17,20] содержатся некоторые противоречия. В частности, для решения задач приводятся граничные интегральные уравнения второго рода, а реализуется решение задачи Дирихле, использующее решение в виде потенциала простого слоя, т.е. решается интегральное уравнение первого рода. При малом количестве точек аппроксимации такие уравнения решаются достаточно эффективно.

К характеристике СМГЭ, как эффективного метода, следует отнестись с большой осторожностью. Дело в том, что уже в общедоступной литературе по вычислительной математике [14,19] отмечено, что во многих случаях суммирование ряда Фурье является некорректной задачей и требуется какая-то регуляризация. Плохая сходимость ряда Фурье особенно проявляется при аппроксимации разрывных функций, интегральных уравнений второго рода. Таким образом, хорошо обусловленное уравнение является некорректным с точки зрения его формирования, а корректное уравнение с точки зрения его формирования приводит к некорректному уравнению.

Вместе с тем СМГЭ имеет и ряд существенных достоинств. При обычном подходе, где используется фундаментальная функция дифференциального оператора, в подынтегральных выражениях возникают неинтегрируемые в обычном смысле особенности, понимаемые либо в виде обобщенных функ-

ций, либо главного значения по Коши, либо с использованием формул типа Гаусса или какой-то другой регуляризации. При использовании СМГЭ сингулярные ядра, во всяком случае, в явном виде, отсутствуют, т.е. происходит естественная регуляризация за счет конечного числа членов ряда. Преимущество СМГЭ заключается также в простоте программной реализации, поскольку операции суммирования легко программируются, и при вычислении интегралов можно пользоваться простейшими формулами численного интегрирования (формула прямоугольников или формула трапеций). Эти достоинства позволяют, например, формально реализовать метод, приводящий к самоспряженным граничным уравнениям, что дает ряд выигрышей при численной реализации (симметричная система уравнений, возможность уменьшить ширину ленты системы и т.д.). Все это может привести к эффективности численных исследований, как конкретных задач, так и различных математических постановок, связанных с применением граничных интегральных уравнений.

Однако СМГЭ имеет ряд недостатков. Во-первых, это уже отмеченная ранее некорректность суммирования ряда Фурье. Во-вторых, собственные функции произвольного дифференциального оператора в явном виде неизвестны, в то время как фундаментальные функции для большинства операторов с постоянными коэффициентами известны. Этот недостаток ограничивает область применения метода. Например, даже для краевых задач теории упругости в прямоугольной области явный вид собственных функций неизвестен. Третий недостаток связан опять-таки с некорректностью суммирования тригонометрических рядов. В [14,19] рассматривалось явление Гиббса, показывающее, что при аппроксимации разрывной функции рядом Фурье в точках, близких к разрыву, наблюдается неустранимая с увеличением количества членов ряда погрешность, величиной 18%. Если учесть, что рассматриваемые в интегральных уравнениях

функции имеют скачок на границе, а краевые условия понимаются как след, то возникают существенные препятствия для численного решения и его анализа.

Разработан ряд методов устранения этих погрешностей и ускорения сходимости рядов Фурье, приводящих к существенной экономии вычислительной работы [3,11,12,18,19]. В работах А.Б. Золотова, М.Л. Мозгалевой и Ж.И. Мсхалая [4,5,7,9,15] предлагается использование σ -множителей Ланцоша при построении ядра интегрального оператора для решения задачи теории упругости, основанного на некоторой суперпозиции, использующей функцию Грина оператора Лапласа в форме разложения по собственным функциям.

При определении производных по СМГЭ или при использовании интегральных уравнений в самосопряженной постановке на границе области исследуемая функция может представлять собой в точках границы сосредоточенную на ней дельта-функцию, которая, естественно, не входит в след, но зато участвует в общем разложении и вносит погрешность вблизи границы. Устранение этой погрешности из общего разложения является важной задачей. Поэтому исследования в области численной реализации СМГЭ в большей степени связаны не с исследованием, как разбивать границу на элементы или аппроксимировать функцию в углах конструкции, а заключаются в определении погрешности аппроксимаций функций с особенностью рядами Фурье. При этом минимизация количества членов ряда крайне важна для сокращения вычислительной работы при формировании дискретного аналога интегральных уравнений.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (СМГЭ)

Задача Неймана для оператора Лапласа имеет вид

$$\begin{cases} Lu = \nabla^2 u = F, & x \in \Omega \\ lu = \frac{\partial u}{\partial \nu} = f, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad \text{где } \nabla^2 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; \quad (2.1)$$

∇^2 – оператор Лапласа; $\partial/\partial \nu$ – производная по нормали к границе области $\Gamma = \partial\Omega$; N – как и прежде, здесь и далее размерность пространства.

Краевыми задачами такого рода описываются: стационарное температурное поле, напряженное состояние при кручении стержня, прогиб мембраны, электростатическое поле, поле давления, поле потенциала скорости в гидродинамике и т.д. Кроме того, оператор этой задачи (оператор Лапласа) входит составной частью в другие задачи, определяющие состояние конструкций при стационарных и нестационарных воздействиях. С математической точки зрения он является простейшим качественным аналогом других задач и эквивалентным оператором в итерационных процессах.

Рассмотрим на стандартной области [4] вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = F, & x \in \omega \\ u = 0, & x \in \partial\omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{где } \omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}; \quad (2.3)$$

ω – стандартная область с границей $\partial\omega$; $x = (x_1, x_2)$ – используемые координаты.

Решение задачи (2.2) может быть представлено как

$$\begin{aligned} u &= L_{\omega}^{-1} F = \int_{\omega} G(x, y) F(y) dy = \\ &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} G(x_1, x_2, y_1, y_2) F(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $y = (y_1, y_2)$; $G(x, y)$ – функция Грина для задачи Дирихле.

Суть СМГЭ состоит в том, что функция Грина представляется в виде:

$$G(x, y) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(y), \quad (2.5)$$

где $k = (k_1, k_2)$; λ_k и φ_k – соответственно собственное значение и собственная функция задачи на стандартной области,

$$\lambda_k = \lambda_{k_1}^2 + \lambda_{k_2}^2; \quad \varphi_k(x) = \varphi_{k_1}(x_1) \varphi_{k_2}(x_2); \quad (2.6)$$

$$\lambda_{k_q} = k_q \pi x_q / l_q, \quad \varphi_{k_q}(x_q) = \sqrt{2/l_q} \sin(\lambda_{k_q} x_q), \\ q = 1, 2. \quad (2.7)$$

Исходная задача в расширенной области представима в виде [10]:

$$L_\omega u = F + \delta_\Gamma q + \delta'_\Gamma w, \quad (2.8)$$

где $q = \Delta u'$ и $w = \Delta u$ – соответственно скачки нормальной производной и самой функции u при переходе через границу $\Gamma = \partial\Omega$; δ_Γ и δ'_Γ – соответственно дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$ и нормальная производная. Для решения краевой задачи необходимо определять q или w . В частности, в случае второй краевой задачи целесообразно принять $w = 0$. Если, кроме того, $F = 0$ (что является непринципиальным упрощением), получим:

$$u(x) = L_\omega^{-1}(\delta_\Gamma q) = \int_\Gamma G(x, y) q(y) d\Gamma_y. \quad (2.9)$$

Как известно, функция q (плотность потенциала простого слоя) определяется из численного решения уравнения (ниже S – координата по границе)

$$\frac{1}{2} q(s_x) + \int_\Gamma G'_x(s_x, s_y) q(s_y) ds_y = f(s_x). \quad (2.10)$$

Эта схема соответствует непрямому методу решения граничных уравнений (метод компенсирующих нагрузок).

Главным препятствием реализации СМГЭ в теории упругости является отсутствие явных

выражений для вычисления собственных функций.

А.Б. Золотовым был предложен описанный ниже способ построения обратного оператора теории упругости с использованием собственных функций оператора Лапласа.

На стандартной прямоугольной области (2.3) ядро интегрального оператора ∇^{-4} имеет вид (рассматривается двумерный случай):

$$G_4(x, y) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x) \varphi_k(y), \quad (2.11)$$

Тогда ядро обратного оператора теории упругости

$$G(x, y) = \frac{1}{\mu_k} \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \times \\ \times \left\{ \varphi_k(x) E + \frac{\eta}{\lambda_k} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} [\partial_1 \quad \partial_2] \varphi_k(x) \right\}, \quad (2.12)$$

или $G(x, y) = \sum_k (A_k \varphi_k(x) + B_k \psi_k(x)) \varphi_k(y),$ (2.13)

где $\psi_k(x) = \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2);$ (2.14)

$$\psi_{k_q}(x_q) = \sqrt{2/l_q} \cos(\lambda_{k_q} x_q); \quad (2.15)$$

$$A_k = \frac{1}{\mu \lambda_k^2} \begin{bmatrix} \lambda_k - \eta \lambda_{k_1}^2 & 0 \\ 0 & \lambda_k - \eta \lambda_{k_2}^2 \end{bmatrix}; \quad (2.16)$$

$$B_k = \frac{\eta \lambda_{k_1} \lambda_{k_2}}{\mu \lambda_k^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Общий вид решения краевой задачи теории упругости имеет вид

$$u = L^{-1} F + L^{-1} \delta_\Gamma q - L^{-1} \ell^* (\delta_\Gamma w), \quad (2.18)$$

где оператор нормальных напряжений ℓ записывается так:

$$\ell = \mu \partial_\nu E + \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} [\partial_1 \quad \partial_2] + \\ + \mu \begin{bmatrix} v_1 \partial_1 & v_2 \partial_1 \\ v_1 \partial_2 & v_2 \partial_2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

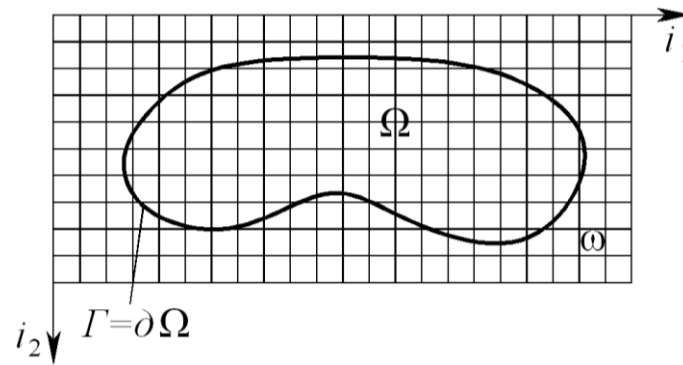


Рисунок 2.1. Аппроксимация стандартной области.

где $\partial_\nu = \nu_1 \partial_1 + \nu_2 \partial_2$. (2.20)

Рассмотрим вторую краевую задачу теории упругости с условием на границе

$$\ell u = f, \quad x \in \Gamma + 0. \quad (2.21)$$

Будем искать решение в виде потенциала простого слоя, положив $w = 0$ и для простоты $F = 0$. Тогда

$$u = L^{-1}(\delta_\Gamma q). \quad (2.22)$$

Подставляя u в (2.17), получим граничное условие:

$$\frac{1}{2}q + \ell \left(\int_\Gamma G(x, y)q(y) d\Gamma_y \right) = f, \quad (2.23)$$

которое решается численно.

Ядро интегрального оператора граничного уравнения вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \ell G = & \sum_k [C_{1k} \psi_{k_1}(x_1) \varphi_{k_2}(x_2) + C_{2k} \varphi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2)], \\ & \times \varphi_{k_1}(y_1) \varphi_{k_2}(y_2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $C_{1k} = \lambda_{k_1} R_1 A_k - \lambda_{k_2} R_2 B_k$; (2.25)

$$C_{2k} = \lambda_{k_2} R_2 A_k - \lambda_{k_1} R_1 B_k; \quad (2.26)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \nu_1(\lambda + 2\mu) & \nu_2 \mu \\ \nu_2 \lambda & \nu_1 \mu \end{bmatrix}; \quad (2.27)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \nu_2 \mu & \nu_1 \lambda \\ \nu_1 \mu & \nu_2(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Однако, учитывая, что производная потенциала простого слоя имеет скачок при переходе через границу, что, в свою очередь, приводит к плохой сходимости рядов, пользоваться формулой (2.24) без соответствующей регуляризации нецелесообразно. Правильнее при действии оператора ℓ на G пользоваться техникой дифференцирования со сглаживанием по Ланцошу.

Исходной краевой задаче для эллиптических уравнений на стандартной области (континуальный вариант) можно поставить в соответствие ее сеточную аппроксимацию (дискретный вариант). В простейшем случае стандартная область разбивается прямоугольной сеткой на элементы ω_i (рис. 2.1).

Вместо дифференциальных операторов вводятся следующие:

– разностные операторы

$$D_p \varphi = (\varphi(i_p + 1) - \varphi(i)) / h_p; \quad (2.29)$$

$$D_p^0 \varphi = (\varphi(i_p + 1) - \varphi(i_p - 1)) / (2h_p); \quad (2.30)$$

$$D_p^* \varphi = (\varphi(i_p - 1) - \varphi(i)) / h_p; \quad (2.31)$$

$$D_p^2 \varphi = (\varphi(i_p + 1) - 2\varphi(i_p) + \varphi(i_p - 1)) / h_p^2; \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 = \sum_{p=1}^N D_p^2; \quad (2.33)$$

– операторы осреднения

$$T_p \varphi = (\varphi(i_p + 1) + \varphi(i)) / 2 ;$$

$$T_p^* \varphi = (\varphi(i_p - 1) + \varphi(i)) / 2 . \quad (2.34)$$

Тогда исходный дискретный оператор второй краевой задачи теории упругости может быть представлен следующим образом:

$$(Lu)_p = D_p^* (\lambda_p + 2\mu_p) D_p u_p +$$

$$+ \sum_{q \neq p} [D_q^* \mu_q D_q u_q +$$

$$+ (D_p^* T_q^* \lambda_{pq} T_p D_q + D_q^* T_p^* \mu_{qp} T_q D_p) u_q],$$

$$q, p = 1, 2, \dots, N,$$

где $\mu_p = \left(\prod_{q \neq p} T_q^* \right) \mu_h ; \lambda_p = \left(\prod_{q \neq p} T_q^* \right) \lambda_h ;$

$$\mu_{pq} = \left(\prod_{r \neq p, r \neq q} T_r^* \right) \mu_h ; \lambda_{pq} = \left(\prod_{r \neq p, r \neq q} T_r^* \right) \lambda_h ;$$

$$\mu_h = \int_{\omega_i} \theta \mu dx ; \lambda_h = \int_{\omega_i} \theta \lambda dx . \quad (2.36)$$

Дискретный оператор теории упругости на стандартной области имеет следующий вид:

$$L = \mu_h \nabla^2 E + (\lambda_h + \mu_h) \begin{bmatrix} D_1^2 & D_1^0 D_2^0 \\ D_1^0 D_2^0 & D_2^2 \end{bmatrix} . \quad (2.37)$$

Ему соответствует обратный оператор

$$L^{-1} = \frac{1}{\mu} \left\{ \nabla^2 E - \frac{\lambda_h + \mu_h}{\lambda_h + 2\mu_h} \begin{bmatrix} D_1^2 & D_1^0 D_2^0 \\ D_1^0 D_2^0 & D_2^2 \end{bmatrix} \right\} B^{-1} ,$$

$$(2.38)$$

где

$$B = \nabla^4 - \frac{(\lambda_h + \mu_h)^2}{4\mu_h(\lambda_h + 2\mu_h)} D_1^2 D_2^2 \left[\tilde{\nabla}^2 + \frac{1}{4} \tilde{D}_1^2 \tilde{D}_2^2 \right] ;$$

$$(2.39)$$

$\tilde{\nabla}^2$, \tilde{D}_1^2 и \tilde{D}_2^2 – соответствующие «чистые» разности (без деления на шаг).

Действуя оператором L^{-1} на оператор исходной краевой задачи, получим дискретные граничные уравнения. Для построения оператора L^{-1} необходимо иметь оператор B^{-1} . Для

этого, в свою очередь, требуется разложение оператора D_p^2 (например, для задачи Дирихле) по собственным функциям, которое достаточно легко строится. Так, например, при единичном шаге собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = -4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(M+1)} \right) ;$$

$$\varphi_{kj} = \sqrt{\frac{2}{M+1}} \sin \left(\frac{k\pi j}{M+1} \right), \quad k, j = 1, 2, \dots, M .$$

$$(2.40)$$

Таким образом, в дискретном случае для построения обратных операторов теории упругости, применяется методика, аналогичная соответствующему непрерывному случаю. СМГЭ можно отнести к классу методов исключения. В этой связи здесь отпадают вопросы сходимости при суммировании. Кроме того, возможно суммирование по формулам быстрого преобразования Фурье, что приводит к резкому повышению скорости работы реализующего программного обеспечения.

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЫВОДОМ И ИССЛЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБЩИХ ФОРМУЛИРОВОК ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку краевая задача теории упругости отличается от более общей краевой задачи для эллиптической системы лишь набором коэффициентов, то в методическом плане было правильнее рассмотреть общий случай. В работе [15] приведены фундаментальные функции и их производные, построены и исследованы функции Грина. При этом особое внимание уделено выводу обратных операторов теории упругости, общих формул взаимодействия прямых и обратных операторов для различных видов задач теории упругости, представлены доказательства свойств

обратных операторов, необходимые для их численной реализации.

При построении решений предложенные формы обратных операторов должны иметь свойства левых обратных операторов, что и доказывается в [15]. В этих случаях операторы не всегда имеют симметричную структуру. Для двумерной задачи построен обратный оператор симметричной структуры и приведено соответствующее доказательство. Этот оператор на стандартной области имеет следующий мультипликативный вид:

$$L^{-1} = Q\tilde{V}^{-4}\gamma^{-1}Q^*, \quad (3.1)$$

при этом

$$QQ^* = Q^*Q = E, \quad (3.2)$$

где \tilde{V}^{-4} – оператор, обратный к оператору первой краевой задачи для бигармонического оператора в прямоугольной области ω ;

$$Q = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_1 \end{bmatrix}; \quad Q^* = -\begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_1 \end{bmatrix};$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Действие обратного оператора теории упругости на произвольную функцию связано с разложением в ряд Фурье и осуществляется по формуле:

$$\tilde{f}(x) = L^{-1}f = \int_{\omega} G(x, y)f(y)dy =$$

$$= \sum_k \frac{1}{\mu} \frac{1}{\lambda_k} \left[E + \frac{\eta}{\lambda_k} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \right] f_k \varphi_k(x), \quad (3.3)$$

$$\text{где } \tilde{f}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{f}_k = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1k} \\ \tilde{f}_{2k} \end{bmatrix};$$

$$f_k = \int_{\omega} f(x)\varphi_k(x)dx; \quad f(x) = \sum_k f_k \varphi_k(x); \quad (3.4)$$

f_k – коэффициент разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье.

При суммировании $L^{-1}f$ целесообразно пользоваться формулой

$$(L^{-1}f)(x) = \frac{1}{\mu} \sum_k \frac{1}{\lambda_k} f_k \varphi_k(x) +$$

$$+ \frac{\eta}{\mu} \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} f_k \varphi_k(x). \quad (3.5)$$

Таким образом, действие обратного оператора теории упругости на произвольную функцию сводится к разложению сначала в ряд Фурье, а затем к его суммированию с последующим дифференцированием (например, численным). Заметим, что при таком подходе удобно использовать формулы быстрого преобразования Фурье.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СМГЭ НА ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ ПРИМЕРАХ

Проводились численные исследования СМГЭ, связанные с изучением сходимости рядов Фурье к разрывным и обобщенным функциям и с построением различных алгоритмических и программных вариантов реализации СМГЭ для одномерных и двумерных задач [15].

В одномерном случае исследовались одномерные аналоги задач Дирихле и Неймана, велось как непосредственное суммирование рядов Фурье, так и с применением множителей Ланцоша. Численные исследования показали:

- решение задачи Дирихле эффективнее по точности и затратам времени ЭВМ при использовании потенциала двойного слоя, при этом производные от решения следует вычислять с применением множителей Ланцоша;
- решение задачи Неймана эффективнее при использовании потенциала простого слоя, при этом применение

множителей Ланцоша позволяет существенно уменьшить количество суммируемых функций.

Эти результаты подтверждаются исследованиями погрешности счета (проводилось сравнение с точными аналитическими решениями) в зависимости от числа членов ряда и применения множителей Ланцоша. В [15] показывается также, что множители Ланцоша, формулы дифференцирования по Ланцошу эквивалентны осреднению функцией Стеклова [8] с шагом, равным полупериоду наиболее высокочастотной собственной функции.

Двумерная задача исследовалась в треугольной области, равной половине квадратной, для уравнения Пуассона. Полученные решения также сравнивались с известными аналитическими и численными решениями. Изучались вопросы, связанные не только со сходимостью рядов, но и с выбором формул интегрирования на границе.

Рассмотрены варианты численной реализации для задач теории упругости, предусматривающие точное интегрирование на участках границы. Были получены, по сути, такие же результаты, как и для уравнения Пуассона.

Вообще для двумерных задач наблюдалось постоянное искажение результатов вблизи границы, которое не исчезало и не уменьшалось при увеличении количества членов ряда Фурье. Множители Ланцоша дают практический эффект в случаях, когда можно улучшить результат за счет увеличения количества членов ряда Фурье, так как их использование позволяет получить тот же результат при их меньшем количестве.

Проведенные исследования показали, что интегрирование вдоль границы по более точным формулам усложняет алгоритмическую реализацию, но не приводит к существенному повышению точности. Использование множителей Ланцоша и дифференцирования по Ланцошу, напротив, упрощает алгоритмическую реализацию и позволяет уменьшить число членов ряда в разложении.

Для получения более точных результатов на границе, по-видимому, следует построить

процедуру экстраполяции внутренних результатов на границу.

5. АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее существенной частью аппроксимации решения является дискретизация границы, нумерация неизвестных и составление общей матрицы для определения искомой плотности. Эта часть существенно различается для двумерной и трехмерной задач. Двумерный случай с позиции построения алгоритма существенно проще. Поскольку основной задачей работы [15] было изучение метода, а он, как оказалось, имеет ряд «подводных камней», то более эффективной и наглядной представлялась его апробация для двумерных конструкций, хотя все исходные формулы для двумерного и трехмерного случаев одинаковые.

При аппроксимации граница заменялась ломаной линией, в виде отрезков прямых, состоящих из M участков (рис. 5.1).

Для упрощения полагается, что $F = 0$. Определяется стандартная область (задается начало координат и величины l_1 и l_2). На каждом участке

$$q_j = const; \quad q_j = \{q_j^p\}, \quad p = 1, 2. \quad (5.1)$$

Далее интегрируем исходное граничное уравнение на каждом участке и получаем разрешающую блочную систему:

$$\frac{1}{2} q_i^p + \sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^2 a_{ij}^{pq} v_j^q = f_i^p, \quad (5.2)$$

$$\text{где } a_{ij}^{pq} = \frac{1}{h_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{s_j}^{s_{j+1}} T^{pq}(x, y) d\Gamma_x d\Gamma_y;$$

$$f_i^p = \frac{1}{h_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f^p(x) d\Gamma_x; \quad h_i = s_{i+1} - s_i. \quad (5.3)$$

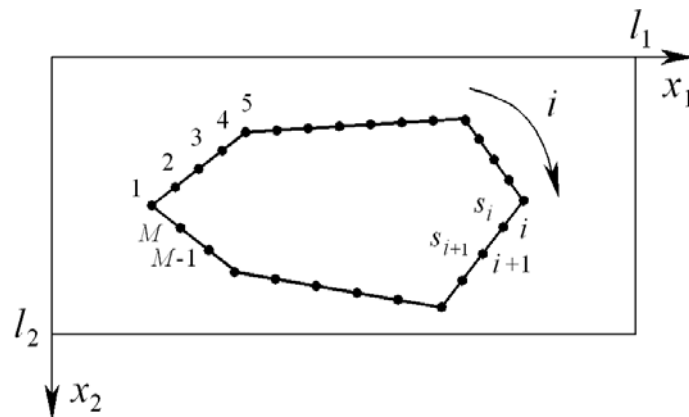


Рисунок 5.1. Аппроксимация границы исходной области.

или
$$\left(\frac{1}{2}E + A\right)\bar{v} = \bar{f}, \quad (5.4)$$

где $A = \{a_{ij}^{pq}\}$; $f = \{f^p\}$; $q = \{q^p\}$,
 $p, q = 1, 2. \quad (5.4)$

Вычисление коэффициентов a_{ij}^{pq} ведется в предположении, что функция (матрица) T кусочно-постоянна на отрезке. Тогда элементы матрицы A определяются по формуле:

$$a_{ij}^{pq} = h_i T^{pq}(\bar{x}_i, \bar{x}_j), \quad (5.5)$$

где \bar{x}_i и \bar{x}_j – координаты середин отрезков (s_i, s_{i+1}) и (s_j, s_{j+1}) .

В свою очередь, матрица $T(x, y)$ вычисляется с использованием дифференцирования по Ланцошу:

$$T(x, y) = R_1 D_1 G + R_2 D_2 G, \quad (5.6)$$

где D_1 и D_2 – операции центральных разностей с шагом, равным полупериоду самой высокочастотной функции разложения в ряд. После решения системы определяется решение (перемещение) по следующей формуле:

$$u(x) = \sum_{i=1}^M h_i G(x, y_i) q_i. \quad (5.7)$$

Напряжения и деформации вычисляются с использованием разностных формул диффе-

ренцирования $u(x)$ с тем же шагом, что и при вычислении $T(x, y)$.

6. ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ СМКЭ

Перспективы дальнейшего развития СМКЭ связаны, в частности, с реализацией в рамках дискретно-континуального метода граничных элементов (ДКМГЭ), предложенной в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова [1,2,5-7,9, 22,23]. ДКМГЭ применяется для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций с постоянством физико-геометрических параметров (характеристик) по некоторому координатному направлению, называемому далее основным направлением. Примерами таких объектов являются балки, балки-стенки, тонкостенные стержни, плиты, оболочки, длинные фундаменты, высотные и протяженные здания, плотины, трубопроводы, рельсы и т.д. [5,7-9]. ДКМГЭ относится к классу полуаналитических методов. Полуаналитические постановки являются современными математическими моделями, реализация которых в наши дни стала возможной вследствие существенного роста производительности компьютерной техники. В основе ДКМГЭ лежат граничные псевдодифференциальные уравнения. Соответствующие псевдодифференциальные операторы в общем случае аппроксимируются дискретно с привлечением ана-

лиза Фурье или вейвлет-анализа. Преимущества ДКМГЭ перед другими методами численного моделирования заключаются в двукратном понижении размерности задачи (дискретизации подвергается не вся расчетная область, а только граница ее поперечного сечения, т.е. решается, по сути, одномерная задача и задается лишь шаг по контуру), возможности проведения детального анализа отдельных напряженных зон, упрощенном этапе подготовки данных, алгоритмической простоте и высокой степени универсальности. Разработаны *два варианта ДКМГЭ – не прямой (НДКМГЭ) [1,23] и прямой (ПДКМГЭ) [6,22]*, при этом не прямой, как и в стандартном МГЭ, применяется несколько шире прямого. В частности, в [5,7-9] рассмотрены примеры постановок некоторых краевых задач в рамках ДКМГЭ, изложены различные способы их численной реализации и приведены актуальные примеры практических приложений.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Непрямой дискретно-континуальный метод граничных элементов для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций. // «НТТ – наука и техника транспорта», 2005, №4, с. 50-56.
2. **Акимов П.А., Золотов А.Б.** Дискретно-континуальный метод граничных элементов для расчета строительных конструкций. // Вестник МГСУ. Строительство: фундаментальные и прикладные исследования, №3, 2006, с. 19-28.
3. **Даревский В.М., Фридман А.З.** Аналитический метод расчета тонкостенных элементов конструкций с применением ЭВМ. – СНИО, Николаев. 1989 г. – 77 с.
4. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Прямой дискретно-континуальный метод граничных элементов для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций. // «НТТ – наука и техника транспорта», 2004, №3, с. 70-77.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и ана-

- литические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
10. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
 11. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
 12. **Крылов В.И., Кругликова Л.Г.** Справочная книга по численному гармоническому анализу. – Минск: Наука и техника, 1968. – 165 с.
 13. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. т.1. – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 476 с.
 14. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры. 1961. – 524 с.
 15. **Мсхалая Ж.И.** Применение спектрального метода граничных интегральных уравнений для расчета элементов строительных конструкций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1989. – 149 с.
 16. **Петросян Л.Г.** Методы граничных уравнений в задачах расчета конструкций на упругом основании. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1989. – 41 с.
 17. **Петросян Л.Г.** Спектральный метод граничных элементов. // Строительная механика и расчет сооружений. 1986, №4, с. 45-50.
 18. **Тихонов А.И.** Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. // ДАН СССР, 1964, №2, 156, с. 268-271.
 19. **Хемминг Р.В.** Численные методы. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
 20. **Цейтлин А.И., Петросян Л.Г.** Методы граничных элементов в строительной механике. – Ереван: Луйс, 1987 г. – 199 с.
 21. **Цейтлин А.И., Петросян Л.Г.** О некоторых обобщениях метода интегральных преобразований и их связи с методом граничных уравнений. // Строительная механика и расчет сооружений, 1984, №3.
 22. **Akimov P.A.** Correct Direct Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 395-396 (2013), pp. 529-532.
 23. **Akimov P.A.** Correct Indirect Discrete-Continual Boundary Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research Vols. 671-674 (2013), pp. 1614-1618.
-
- Мсхалая Жиули Ивлианович, доцент, кандидат технических наук; профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499) 183-59-94; факс +7 (499) 183-59-94; e-mail: KafedralPM@mgsu.ru.
- Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры информатики и прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Zhiuli I. Mskhalaya, Ph.D., Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone +7(499) 183-59-94; fax: +7 (499) 183-59-94; e-mail: KafedraIPM@mgsu.ru.
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ МОЩНОСТЕЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ И ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГЛЫХ МЕМБРАН И БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А.В. Старов, С.Ю. Калашников

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, г. Волгоград, РОССИЯ

Аннотация: Для круглых мембран и безмоментных оболочек при квазистатическом нагружении сформулированы теоремы о взаимности мощностей внешней нагрузки и мощностей диссипации энергии, аналогичные теореме о взаимности внешних и внутренних работ в упругих системах (теорема Бетти), позволяющие выполнять расчет подобных конструкций под действием распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки на действие «приведенной» или эквивалентной равномерно распределенной нагрузки. Получены аналитические решения с учетом упрочнения материала, которые могут использоваться для тестирования результатов, полученных в программных комплексах.

Ключевые слова: круглые мембраны и безмоментные оболочки, пластическое деформирование, осесимметричные нагрузки, физически и геометрически нелинейные задачи.

THEOREMS OF RECIPROCIITY OF POWERS OF EXTERNAL LOAD AND DISSIPATION OF THE ENERGIA AND THEIR APPLICATION IN PROBLEMS OF PLASTIC DEFORMATION FOR CIRCULAR MEMBRANES AND MEMBRANE SHELLS AT QUASISTATIC LOADING

Aleksandr V. Starov, Sergei .JU. Kalashnikov

Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Volgograd, RUSSIA

Abstract: The reciprocity theorems of external loading powers and energy dissipation powers for circular membranes and membrane shells at quasistatic loading are formulated, which are similar to the reciprocal theorems for elastic systems (Betti's theorem). The theorems allow calculating similar constructions under the axisymmetric loading distributed by any law on the action of the reduced or uniformly distributed loading. Analytical solutions considering material hardening are made which can be used for testing the results obtained from software suites.

Key words: circular membrane and membrane shells, plastic deformation, axisymmetric loadings, physically and geometrically non-linear problems.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Алгоритмы расчета пластин, круглых мембран и оболочек на основе метода предель-

ного равновесия и на основе баланса мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии разработаны и применяются достаточно давно[1-6]. Они позволяют получать при-

ближенное решение физически и геометрически нелинейных краевых задач, не рассматривая историю нагружения, как это делается в упруго пластической постановке, и, соответственно, избежать сложного численного анализа.

Целью настоящей статьи является совершенствование методов расчета круглых пластин и пологих оболочек вращения при квазистатическом действии нагрузки на основе безмоментной теории и выявление дополнительных возможностей применения метода баланса мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии.

Рассмотрим деформирование круглых мембран и безмоментных оболочек под действием распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки $P = P_0 \cdot \psi(\rho)$, где P_0 - максимальная интенсивность нагрузки.

Уравнения равновесия безмоментных оболочек в полярной системе координат с учетом допущений теории пологих оболочек [7] записываются в виде (1) или (1.1)

$$n_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho n_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho n_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right] = -P(\rho).$$

$$n_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho n_1) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho n_1 \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] = -P(\rho) + 2n\xi.$$

Граничные условия:

$$n_1(0) = n_2(0), \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Здесь вводятся безразмерные координаты и переменные:

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}$$

– радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности; $\bar{\rho}_0$ – радиус опорного контура; $2h$ - толщина;

$$w = \frac{2\bar{w}}{h}, \quad u = \frac{4\bar{u}\rho_0}{h^2}$$

– прогиб и радиальное перемещение;

$$n_i = \frac{\bar{N}_i}{2\sigma_s h}$$

– продольные усилия;

$$P = \frac{\bar{P}\bar{\rho}_0^2}{\sigma_s h^2}$$

– параметр внешней нагрузки; σ_s – предел текучести материала; $i = 1, 2$ – индексы радиального и окружного направления;

$$f = f(\rho), \quad \bar{f} = \bar{f}(\bar{\rho}), \quad f = 2\bar{f}/h, \quad f_0 = 2\bar{f}_0/h$$

– уравнение срединной поверхности в безразмерных и размерных координатах; \bar{f}_0 - стрела подъема;

$$\bar{f} = \sqrt{R^2 - \bar{\rho}^2} - \sqrt{R^2 - \bar{\rho}_0^2}$$

– уравнение срединной поверхности сферической оболочки;

$$\bar{f} = \bar{f}_0 \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{\rho}_0^2} \right)$$

– уравнение срединной поверхности параболической оболочки;

Теоремы о взаимности мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии и их применение в задачах пластического деформирования круглых мембран и безмоментных оболочек при квазистатическом нагружении

$$R = \frac{\bar{\rho}_0^2 + \bar{f}_0^2}{2\bar{f}_0}$$

– радиус кривизны сферической оболочки;

$$R = \frac{\bar{\rho}_0^2}{2\bar{f}_0}$$

– радиус кривизны параболической оболочки;

$$\xi = \frac{2(\bar{\rho}_0^2 + \bar{f}_0^2)}{Rh} = \frac{4\bar{f}_0}{h}$$

– параметр начальной кривизны сферической оболочки;

$$\xi = \frac{2\bar{\rho}_0^2}{Rh} = \frac{4\bar{f}_0}{h}$$

– параметр начальной кривизны параболической оболочки;

На размерность соответствующей величины указывает горизонтальная черта.

Выражения для деформаций срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \frac{h^2}{4\rho_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 - w \frac{\partial f^2}{\partial \rho^2} \right), \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{h^2}{4\rho_0^2} \left(\frac{u}{\rho} - w \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Мощность внешней нагрузки и мощность диссипации энергии в безразмерном виде

$$A = \int_0^1 P_0 \psi \dot{w} \rho d\rho, \quad D = \int_0^1 (\dot{\varepsilon}_1 n_1 + \dot{\varepsilon}_2 n_2) \rho d\rho, \quad (3)$$

где

$$A = \frac{2\bar{A}}{\sigma_s h^3}, \quad D = \frac{2\bar{D}}{\sigma_s h^3}, \quad \dot{\varepsilon}_1 = \frac{4\dot{\bar{\varepsilon}}_1 \bar{\rho}_0^2}{h^2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{4\dot{\bar{\varepsilon}}_2 \bar{\rho}_0^2}{h^2}$$

– безразмерные мощность внешней нагрузки, скорость диссипации и скорости деформаций срединной поверхности.

Используется поверхность текучести для безмоментных оболочек со сплошным однослойным сечением, построенная на основе условия пластичности Мизеса [8]:

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = n^2, \quad n = 1, \quad (4)$$

или поверхности нагружения, аналогичной поверхности текучести [8]:

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 = n^2 = \Phi^2(\varepsilon_i), \quad \Phi(\varepsilon_i) = 1 + \frac{E^k}{\sigma_s^0} \varepsilon_i, \quad (4.1)$$

где E^k – касательный модуль упрочнения, $\Phi(\varepsilon_i)$ – функция упрочнения, ε_i интенсивность деформаций.

Из первого уравнения (1) и (4) или (4.1) следует единственное решение

$$n_1 = n_2 = n = \Phi(\varepsilon_i),$$

тогда распределение перемещений можно представить в виде (5) или (5.1):

$$w = w_0 - \frac{P_0}{n} \int_0^\rho \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta + \xi \frac{\rho^2}{2}, \quad (5)$$

$$\frac{P_0}{n} = \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right)^{-1},$$

$$w = \frac{P_0}{n} \int_\rho^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta - \frac{\xi}{2} (1 - \rho^2). \quad (5.1)$$

Распределение перемещений и скоростей перемещений согласно (5)

$$w = \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \left[1 - \frac{\int_0^{\rho} \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta}{\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta} \right] - \frac{\xi}{2} (1 - \rho^2), \quad (6)$$

$$\dot{w} = \dot{w}_0 \left[1 - \frac{\int_0^{\rho} \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta}{\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta \right)^{-1} \right]. \quad (7)$$

Распределение скоростей перемещений согласно (5.1)

$$\dot{w} = \left(\frac{P_0}{n} \right) \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi \eta d\eta d\eta. \quad (8)$$

Рассмотрим два механизма деформирования, соответствующие нагрузкам $P_{0,i} \cdot \psi_i$, $i=1,2$. Мощность внешней нагрузки $P_{0,1}$ (3,5,7) на скоростях перемещений, соответствующих механизму ψ_2 (7) без учета упрочнения $n_{i=1} = n_{i=2} = n$

$$A = n \cdot \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \psi_1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_1 \eta d\eta d\eta \right)^{-1} \times \\ \times \dot{w}_0 \left[1 - \frac{\int_0^{\rho} \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_2 \eta d\eta d\eta}{\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_2 \eta d\eta d\eta} \right] \end{array} \right\} \eta d\eta. \quad (9)$$

Интегрируя (9) по частям, получим

$$A = \frac{n \cdot \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \dot{w}_0 \int_0^1 \left\{ \int_0^{\rho} \psi_1 \eta d\eta \cdot \int_0^{\rho} \psi_2 \eta d\eta \right\} \frac{d\eta}{\eta}}{\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_1 \eta d\eta d\eta \cdot \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_2 \eta d\eta d\eta}. \quad (10)$$

Последнее выражение не зависит от последовательности индексов 1 и 2. Таким образом, можно сформулировать теорему о взаимности мощностей внешней нагрузки, аналогичной теореме о взаимности работ в упругих системах [9].

Мощность внешней нагрузки, соответствующая механизму 1 на скоростях перемещений, соответствующих механизму 2 равна мощности внешней нагрузки, соответствующая механизму 2 на скоростях перемещений, соответствующих механизму 1.

Мощность диссипации энергии согласно (3) после интегрирования по частям может иметь вид (выражения эквивалентны)

$$\begin{aligned} D &= n \cdot \int_0^1 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + 2\xi \dot{w} \right) \rho d\rho, \\ D &= n \cdot \int_0^1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} - \xi \rho \right) \rho d\rho, \quad (11) \\ D &= -n \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} - 2\xi \right) \dot{w} \rho d\rho. \end{aligned}$$

Подставляя во вторую формулу (11) перемещения и скорости перемещений согласно (6) и (7), найдем, что $A = D$ и, соответственно

$$D = \frac{n \cdot \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \dot{w}_0 \int_0^1 \left\{ \int_0^{\rho} \psi_1 \eta d\eta \cdot \int_0^{\rho} \psi_2 \eta d\eta \right\} \frac{d\eta}{\eta}}{\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_1 \eta d\eta d\eta \cdot \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \psi_2 \eta d\eta d\eta}. \quad (12)$$

Вторая теорема формулируется аналогично.

Мощность диссипации энергии, соответствующая механизму 1 на скоростях перемещений, соответствующих механизму

Теоремы о взаимности мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии и их применение в задачах пластического деформирования круглых мембран и безмоментных оболочек при квазистатическом нагружении

2 равна мощности диссипации энергии, соответствующая механизму 2 на скоростях перемещений, соответствующих механизму 1.

Теоремы имеют другой вариант доказательства.

Мощность внешней нагрузки $P_{0,1}$ (3,5,8) на скоростях перемещений, соответствующих механизму ψ_2 (7) без учета упрочнения $n_{i=1} = n_{i=2} = n$

$$A = \int_0^1 P_{0,1} \cdot \left(\frac{P_{0,2}}{n} \right) \psi_1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi_2 \eta d\eta d\eta \right) \eta d\eta. \quad (13)$$

Мощность диссипации энергии согласно третьей формулы (11)

$$D = \int_0^1 P_{0,1} \cdot \left(\frac{P_{0,2}}{n} \right) \psi_1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi_2 \eta d\eta d\eta \right) \eta d\eta. \quad (14)$$

Таким образом, сразу получаем $A = D$.

Если $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то согласно (5), (10) и (12) для мощности внешней нагрузки и мощности диссипации энергии получим эквивалентные выражения:

$$A = P_0 \dot{w}_0 \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \cdot \left[\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right]^{-1} \frac{d\eta}{\eta}, \quad (15)$$

$$D = \frac{n \cdot \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \dot{w}_0 \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \cdot \frac{d\eta}{\eta}}{\left[\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi_2 \eta d\eta d\eta \right]^2}, \quad (15.1)$$

$$A = P_0 \dot{w}_0 \frac{\int_0^1 \psi \cdot \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \cdot \eta d\eta}{\left[\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right]}, \quad (16)$$

$$D = \frac{n \cdot \left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) \dot{w}_0 \int_0^1 \psi \cdot \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \cdot \eta d\eta}{\left[\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right]^2}. \quad (16.1)$$

На основании вышедоказанных теорем расчет круглых мембран и безмоментных оболочек под действием распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки $P = P_0 \cdot \psi(\rho)$ можно производить на действие «приведенной» (или эквивалентной) равномерно распределенной нагрузки

$$P^* = P_0 \frac{\int_0^1 \psi (1 - \eta^2) \eta d\eta}{\left[1 - \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right)^{-1} \right]}, \quad (17)$$

что значительно упрощает громоздкие математические выкладки.

Среднюю интенсивность деформаций по объему можно определить из равенства

$$\sigma_s \int_0^1 \int_{-h}^h \varepsilon_i dz d\rho = \frac{\sigma_s h^3}{2} \int_0^t D dt. \quad (18)$$

Тогда усредненная интенсивность деформаций согласно (15.1)

$$\varepsilon_i = \frac{h^2}{4\rho_0^2} (w_0 + \xi) w_0 \cdot \frac{I_1}{I_2}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_i = \beta (w_0 + \xi) w_0 \cdot \frac{I_1}{I_2}, \quad \beta = \frac{h^2}{4\rho_0^2},$$

где интегралы I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \frac{d\eta}{\eta}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta. \quad (20)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КРУГЛЫХ МЕМБРАН И БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Далее приводятся решения для круглых мембран и безмоментных оболочек на действие распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки с учетом упрочнения, которые также можно получить непосредственно из уравнений (1) - (1.1).

Нагрузка вида

$$P = P_0 \psi(\rho), \quad \psi(\rho) = \rho^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \infty).$$

$$w = w_0 (1 - \rho^{\alpha+2}) + \frac{\xi}{2} (\rho^2 - \rho^{\alpha+2}),$$

$$w_0 + \frac{\xi}{2} = \frac{P_0}{4n} \cdot \frac{4}{(\alpha + 2)^2}. \quad (21)$$

Эквивалентная равномерно распределенная нагрузка P^* и минимальное значение P_0^{\min} :

$$P^* = P_0 \cdot \frac{4}{(\alpha + 2)^2},$$

$$P_0^{\min} = 2n\xi \cdot \frac{(\alpha + 2)^2}{4}, \quad P^{*\min} = 2n\xi. \quad (22)$$

Нагрузка вида

$$P = P_0 \psi(\rho), \quad \psi(\rho) = (1 - \rho^\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \infty).$$

$$w = w_0 \left(1 - \frac{(\alpha + 2)^2}{(\alpha^2 + 4\alpha)} \rho^2 + \frac{4}{(\alpha^2 + 4\alpha)} \rho^{\alpha+2} \right) -$$

$$- \frac{4\xi}{2(\alpha^2 + 4\alpha)} (\rho^2 - \rho^{\alpha+2}),$$

$$w_0 + \frac{\xi}{2} = \frac{P_0}{4n} \cdot \frac{(\alpha^2 + 4\alpha)}{(\alpha + 2)^2}. \quad (23)$$

Эквивалентная равномерно распределенная нагрузка P^* и минимальное значение P_0^{\min} .

$$P^* = P_0 \cdot \frac{(\alpha^2 + 4\alpha)}{(\alpha + 2)^2},$$

$$P_0^{\min} = 2n\xi \cdot \frac{(\alpha + 2)^2}{(\alpha^2 + 4\alpha)}, \quad P^{*\min} = 2n\xi. \quad (24)$$

Нагрузка вида

$$P = P \psi(\rho), \quad \psi(\rho) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$\psi(\rho) = 1 \quad (a \leq \rho \leq b), \quad \psi(\rho) = 0 \quad (b \leq \rho \leq 1).$$

$$w = w_0 + \frac{\xi \rho^2}{2}, \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$w = w_0 - \frac{P}{4n} \left[(\rho^2 - a^2) - 2a^2 \ln \frac{\rho}{a} \right] +$$

$$+ \frac{\xi \rho^2}{2}, \quad (a \leq \rho \leq b),$$

$$w = w_0 - \frac{P}{4n} \left[(b^2 - a^2) - 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + \right. +$$

$$\left. + 2(b^2 - a^2) \ln \rho \right] +$$

$$+ \frac{\xi \rho^2}{2}, \quad (b \leq \rho \leq 1),$$

$$w_0 + \frac{\xi}{2} = \frac{P}{4n} \left[(b^2 - a^2) - 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right]. \quad (25)$$

Эквивалентная равномерно распределенная нагрузка P^* и минимальное значение P_0^{\min} :

$$P^* = P \cdot \left[(b^2 - a^2) - 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right],$$

$$P_0^{\min} = 2n\xi \cdot \left[(b^2 - a^2) - 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right]^{-1},$$

$$P^{*\min} = 2n\xi. \quad (26)$$

Нагрузка вида

$$P = P\psi(\rho), \psi(\rho) = 1 \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$\psi(\rho) = 0 \quad (a \leq \rho \leq b), \quad \psi(\rho) = 1 \quad (b \leq \rho \leq 1).$$

$$w = w_0 - \frac{P\rho^2}{4n} + \frac{\xi\rho^2}{2}, \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$w = w_0 - \frac{P}{4n} \left[a^2 + 2a^2 \ln \frac{\rho}{a} \right] + \frac{\xi\rho^2}{2}, \quad (a \leq \rho \leq b),$$

$$w = w_0 - \frac{P}{4n} \left[\begin{aligned} &-(b^2 - a^2) + \\ &+ 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) - \\ &- 2(b^2 - a^2) \ln \rho \end{aligned} \right] + \frac{\xi\rho^2}{2}, \quad (b \leq \rho \leq 1),$$

$$w_0 + \frac{\xi}{2} = \frac{P}{4n} \left[\begin{aligned} &1 - (b^2 - a^2) + \\ &+ 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \end{aligned} \right]. \quad (27)$$

Эквивалентная равномерно распределенная нагрузка P^* и минимальное значение P_0^{\min} :

$$P^* = P \cdot \left[1 - (b^2 - a^2) + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right],$$

$$P_0^{\min} = 2n\xi \cdot \left[1 - (b^2 - a^2) + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right]^{-1},$$

$$P^{*\min} = 2n\xi. \quad (28)$$

Для учета упрочнения необходимо вычислить соответствующие интегралы согласно (19). Нагрузка вида

$$P = P_0\psi(\rho), \quad \psi(\rho) = \rho^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \infty).$$

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2(\alpha+2)^3}, \quad (29)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta = \frac{1}{(\alpha+2)^2}.$$

Нагрузка вида

$$P = P_0\psi(\rho), \quad \psi(\rho) = (1 - \rho^\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \infty).$$

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \frac{d\eta}{\eta} = \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+4)} + \frac{1}{2(\alpha+2)^3} \right], \quad (30)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(\alpha+2)^2} \right].$$

Нагрузка вида

$$P = P\psi(\rho), \psi(\rho) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$\psi(\rho) = 1 \quad (a \leq \rho \leq b), \quad \psi(\rho) = 0 \quad (b \leq \rho \leq 1).$$

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \frac{d\eta}{\eta} = \left[\begin{aligned} &\frac{(b^4 - a^4)}{16} - \frac{a^2}{4}(b^2 - a^2) + \\ &+ \frac{a^4}{4}(\ln b - \ln a) - \frac{(b^2 - a^2)^2}{4} \ln b \end{aligned} \right], \quad (31)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta = \left[\frac{(b^2 - a^2)}{4} - \frac{1}{2}(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right].$$

Нагрузка вида

$$P = P\psi(\rho), \psi(\rho) = 1 \quad (0 \leq \rho \leq a),$$

$$\psi(\rho) = 0 \quad (a \leq \rho \leq b), \quad \psi(\rho) = 1 \quad (b \leq \rho \leq 1).$$

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^\rho \psi \eta d\eta \right]^2 \frac{d\eta}{\eta} =$$

$$= \left[\frac{1}{16} - \frac{(b^4 - a^4)}{16} + \frac{b^2}{4}(b^2 - a^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^4}{4}(\ln b - \ln a) - \frac{(b^2 - a^2)^2}{4} \ln b \right], \quad (32)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta =$$

$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{(b^2 - a^2)}{4} + \frac{1}{2}(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right].$$

Следует отметить, что по формулы (21, 23, 25, 27) могут быть также получены из условия баланса мощностей внешней нагрузки и диссипации энергии согласно (15-15.1) и (16-16.1).

В результате получим вторую формулу (5)

$$\left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) = \frac{P_0}{n} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right) = \frac{P_0}{n} \cdot I_2. \quad (33)$$

Алгоритм расчета по формулам (21, 23, 25, 27) достаточно простой. Параметры нагрузки и геометрические параметры приводятся к безразмерному виду. Определяется деформированное состояние и прогиб в центре. При необходимости могут быть построены графики зависимости нагрузка – прогиб. Поскольку все графики линейные, они не приводятся. Затем безразмерный прогиб приводится к размерной величине.

При учете упрочнения определяется интенсивность деформаций по формуле (19). Для этого необходимо вычислить интегралы (29) - (32), определить $n = \Phi(\varepsilon_i)$ в соответствии с (4.1), построить графики зависимости нагрузка – прогиб по формулам (21, 23, 25, 27), которые уже будут нелинейные. По графикам для безразмерных параметров нагруз-

ки определяется безразмерный прогиб, который приводится к размерному виду.

Можно не строить графики, организовав итерационный процесс. В соответствии с (33) (4.1) и (15)

$$\left(w_0 + \frac{\xi}{2} \right) = \frac{P_0}{\Phi(\varepsilon_i)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right) =$$

$$= P_0 \frac{I_2}{1 + \frac{E^k}{\sigma_s^0} \beta(w_0 + \xi) w_0 \cdot \frac{I_1}{I_2}}. \quad (34)$$

Тогда итерационный процесс, который быстро сходится (i – номер итерации):

$$w_0^{i+1} = \frac{P_0}{\Phi(\varepsilon_i)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \psi \eta d\eta d\eta \right) =$$

$$= P_0 \frac{I_2}{1 + \frac{E^k}{\sigma_s^0} \left(\frac{w_0^i + w_0^{i-1}}{2} + \xi \right) \cdot \frac{w_0^i + w_0^{i-1}}{2} \cdot \frac{I_1}{I_2}} - \frac{\xi}{2}. \quad (35)$$

Вопрос о том, насколько часто в реальной практике встречаются нагрузки, отличные от равномерно распределенного внутреннего давления, пока остается открытым и требует дополнительной дискуссии. Один пример можно привести: штамповка без матрицы через упругую прокладку.

При расчете оболочек с учетом моментного напряженного состояния на действие распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки (решение для пластин получено в [10-13]) при интенсивности нагрузки $P(\rho) < 2n\xi$, образуются жесткие зоны в центральной или при опорной части или одновременно. Решения данных задач в аналитическом виде для оболочек с шарнирно неподвижным опиранием и жестким защемлением края в связи с увеличением параметров оказалось слишком громоздким. Численное ре-

шение для оболочек (для пластин получено в [14-15]) в связи с необходимостью отслеживать положение подвижных жестких зон также значительно усложняется. На основании доказанных теорем, с учетом, что оболочка стремится к безмоментному напряженному состоянию, можно выполнять расчет, заменяя параметр начальной кривизны на «приведенный» или эквивалентный ξ_0^* .

Для нагрузок $P = P_0 \psi(\rho)$, $\xi^*(\rho) = \xi_0^* \cdot \psi(\rho)$

$$\xi_0^* = \xi \cdot \frac{(\alpha + 2)^2}{4}, \quad \psi(\rho) = \rho^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \infty), \quad (36)$$

$$\xi_0^* = \xi \cdot \frac{(\alpha + 2)^2}{(\alpha^2 + 4\alpha)}, \quad \psi(\rho) = (1 - \rho^\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \infty), \quad (37)$$

$$\xi_0^* = \xi \cdot \left[(b^2 - a^2) - 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right]^{-1},$$

$$\psi(\rho) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a), \quad \psi(\rho) = 1 \quad (a \leq \rho \leq b), \quad (38)$$

$$\psi(\rho) = 0 \quad (b \leq \rho \leq 1).$$

$$\xi_0^* = \xi \cdot \left[1 - (b^2 - a^2) + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right]^{-1},$$

$$\psi(\rho) = 1 \quad (0 \leq \rho \leq a), \quad \psi(\rho) = 0 \quad (a \leq \rho \leq b),$$

$$\psi(\rho) = 1 \quad (b \leq \rho \leq 1). \quad (39)$$

Решения статических и динамических задач пластических круглых пластин и оболочек на основе баланса мощностей диссипации энергии и внешней нагрузки или непосредственного интегрирования исходной системы нелинейных уравнений [16-17] достаточно сложны для численного анализа. На основании доказанных теорем можно выполнять статический расчет на действие «приведенной» или эквивалентной равномерно распределенной нагрузки, а в задачах динамики раскладывать нагрузку и параметр начальной кривизны по собственным векторам однородной системы дифференциальных уравнений.

ВЫВОДЫ

1. Сформулированы теоремы о взаимности мощностей внешней нагрузки и мощностей диссипации энергии, аналогичные теореме о взаимности внешних и внутренних работ в упругих системах (теорема Бетти [9]), позволяющие выполнять расчет круглых мембран и безмоментных оболочек под действием распределенной по любому закону осесимметричной нагрузки на действие «приведенной» или эквивалентной равномерно распределенной нагрузки.
2. Второе видимое применение доказанных теорем - возможность выполнять расчет, заменяя параметр начальной кривизны на «приведенный» или эквивалентный, что значительно упрощает аналитические и численные алгоритмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Безухов Н.Н.** Расчет за пределом упругости, несущая способность и предельное состояние сооружений. Строительная механика в СССР, 1917-1967. – М.: Стройиздат, 1969, с. 212-238.
2. **Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф.** Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. – М.: Стройиздат, 1972. – 191 с.
3. **Гвоздев А.А., Проценко А.М.** Перспективы приложения теории предельного равновесия для оболочек. // Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969 г.). – М.: Наука, 1970, с. 736-748.
4. **Ольшак В., Савчук А.** Неупругое поведение оболочек. – М.: Мир, 1969. – 144 с.
5. **Ольшак В., Мруз З., Пежина П.** Современное состояние теории пластичности. – М.: Мир, 1964. – 243 с.

6. **Ржаницын А.Р.** Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
7. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
8. **Ерхов М.И.** Теория идеально-пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
9. **Дарков А.В., Шапошников Н.Н.** Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
10. **Старов А.В.** Пластические деформации круглых пластинок с шарнирным опиранием под действием осесимметричной нагрузки. // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. 2012. Вып. 29 (48), с. 102-109.
11. **Старов А.В.** Большие прогибы жестко-пластических защемленных по контуру круглых пластинок под действием осесимметричной нагрузки. // Строит. механика инженерных конструкций и сооружений, 2011, №2, с. 9-15.
12. **Ерхов М.И., Старов А.В.** Большие прогибы круглых идеально пластических пластинок при локальном нагружении. // Строительная механика и расчет сооружений, 1988, №6, с. 15-20.
13. **Старов А.В.** Пластическое деформирование круглых пластинок с жестким защемлением края при локальном нагружении. // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура, 2013, Вып. 34 (53), с. 99-106.
14. **Старов А.В.** Большие прогибы жестко-пластических круглых пластинок с шарнирно неподвижным опиранием края. // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура, 2007, Вып. 8 (27), с. 48-54.
15. **Старов А.В.** Большие прогибы жестко-пластических пологих оболочек вращения с шарнирно неподвижным опиранием и жестким защемлением края. // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура, 2010, Вып. 20(39), с. 45-51.
16. **Старов А.В., Калашников С.Ю.** Динамика пластической круглой пластинки с шарнирно неподвижным опиранием. // Наука и образование: архитектура, градостроительство и строительство. Материалы международной конференции, посвященной 60 - летию образования вуза, 18-19 сентября 2012 г. - Волгоград, с. 304 -310.
17. **Старов А.В., Калашников С.Ю.** Полная система уравнений динамического ударного нагружения жесткопластических пологих оболочек вращения. // Наука и образование: архитектура, градостроительство и строительство. Материалы международной конференции, посвященной 60-летию образования вуза, 18 - 19 сентября 2012 г, Волгоград, с. 310-315.

Старов Александр Васильевич, доктор технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики, Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет (ВолгГАСУ). 400074, г. Волгоград, ул. Академическая – 1; e-mail: starov1954@mail.ru

Калашников Сергей Юрьевич, доктор технических наук, профессор, действительный член Международной академии наук высшей школы, ректор, Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет (ВолгГАСУ). 400074, Волгоград, ул. Академическая, 1; e-mail: info@vgasu.ru

Starov Aleksandr Vasil'evich, Doctor of Engineering Science, Docent, Docent of Structural Mechanics Department, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering (VSUACE). 1, Akademicheskaya St., Volgograd, 400074, Russian Federation; E-mail: starov1954@mail.ru

Kalashnikov Sergey Yur'evich, Doctor of Engineering Science, Professor, Academician of the International Higher Education Academy of Sciences, rector, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering (VSUACE). 1, Akademicheskaya St., Volgograd, 400074, Russian Federation; E-mail: info@vgasu.ru

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА И РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ ПО ВАРИАНТНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ПЛАСТИНАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИЛОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ ПЛАСТИН ПУТЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИХ ФОРМЫ

А.А. Черняев

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача вариантного проектирования пластинчато-стержневых силовых конструкций несущих панелей с двумя параллельными опорными направляющими (лонжеронами), когда задано ограничение на величину максимального прогиба элементов заполнения такой панели в виде упругих пластин. Путем геометрического моделирования формы области пластин с помощью конформных радиусов и использованием геометрических методов строительной механики строится алгоритм и разрабатывается программа для ЭВМ по подбору вариантов заполнения несущей панели пластинами различных форм обладающих равной жесткостью.

Ключевые слова: пластинчато-стержневые конструкции, вариантное проектирование, геометрическое моделирование, жесткость, максимальный прогиб, конформные радиусы, алгоритм, программа для ЭВМ

CONSTRUCTION OF ALGORITHMS AND DEVELOPMENT OF COMPUTER PROGRAMS IN DESIGN VARIANT PLATE-CORE POWER STRUCTURES OF CONDITIONS BY REINFORCEMENT PLATE GEOMETRIC MODELING FORM

Andrew A. Chernyev

Oryol State University of I.S. Turgenev, Oryol, RUSSIA

Abstract: In article consider the problem of the variant design, plate-rod power structures bearing panels with two parallel support rails (longerons) when set limit on the maximum deflection elements filling a panel in the form of elastic plates. By geometric form field plates simulations using conformal radii and the use of geometric methods in structural mechanics is constructed algorithm and developed a program for the selection of variants of a computer by filling the carrier panel plates of various forms have equal stiffness.

Keywords: plate-core design, the variant design, geometric modeling, stiffness, maximum deflection, conformal radii, algorithm, computer program

ВВЕДЕНИЕ

Вариантное проектирование является важным этапом в создании экономических конструкций, в том числе пластинчато-стержневых, где одним из основных критериев является условие жесткости. В настоящее время для расчета и моделирования силовых конструкций

используют различные, конечно-элементные, программы для ЭВМ, а для решения задач вариантного-проектирования и оптимизации – математические модели и алгоритмы на их основе [1]. Однако в решении задач, связанных с выбором формы, варьировании геометрических параметров элементов конструкции, их применение становится затруднительным. Как показали

исследования [2], для решения подобных задач могут быть успешно использованы геометрические методы строительной механики [3]. Сущность, которых заключается в том, что изменение искомым параметров напряженно-деформируемого состояния в двумерных задачах оценивается по некоторой геометрической характеристике плоской области (пластины, мембраны, поперечного сечения стержня и т.д.), служащей критерием «правильности» или «симметричности» ее формы и позволяющей сравнивать значения параметров напряженно-деформируемого состояния среди областей различных классов форм. Как показали исследования [4] в качестве такого критерия, возможно, использовать отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов областей.

1. КОНФОРМНЫЕ РАДИУСЫ

Конформные радиусы – это радиусы, получаемые при конформном отображении плоской области на внутренность и внешность круга [5]. Формулы для нахождения внутреннего \dot{r} и внешнего \bar{r} конформных радиусов для ряда односвязных областей с выпуклым контуром имеют вид [6, 7]:

– для круга радиуса a

$$\dot{r} = a, \bar{r} = a; \quad (1)$$

– для правильных n -угольников

$$\dot{r} = \frac{\tilde{A}(1-1/n)}{2^{1-\frac{2}{n}} \tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)} L, \quad (2)$$

$$\bar{r} = \frac{\tilde{A}(1+1/n)}{2^{1+\frac{2}{n}} \tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} L, \quad (3)$$

где n – число сторон; L – здесь и далее, периметр; $\Gamma(x)$ – здесь и далее, Г-функция (Гамма-функция);

– для произвольных треугольников с углами $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \cdot \rho, \quad (4)$$

$$\text{где } f(x) = \frac{1}{\tilde{A}(x)} \left\{ \frac{x^x}{(1-x)^{1-x}} \right\}^{1/2};$$

ρ – радиус описанного круга,

$$\bar{r} = A/\pi\dot{r}, \quad (5)$$

где A – площадь;

– для равнобедренных треугольников с $\alpha = \beta$ выражения (4) и (5) примет вид

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f^2(\alpha)f(\gamma) \cdot \rho; \quad (6)$$

$$\bar{r} = \frac{ctg\alpha \cdot h^2}{\pi\dot{r}}, \quad (7)$$

где α – равный угол при основании; h – высота;

– для прямоугольных треугольников с $\alpha = \pi/2$ выражение (5) примет вид

$$\bar{r} = \frac{\sin 2\alpha \cdot c^2}{4\pi\dot{r}}, \quad (8)$$

где α – угол при гипотенузе; c – гипотенуза;

– для ромбов с углом $\pi\alpha$

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tilde{A}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad (9)$$

Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы

$$\bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\tilde{A}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}L; \quad (10)$$

– для эллипсов с полуосями a и b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \bar{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \quad (11)$$

где $q = (a-b)^2 / (a+b)^2$,

$$\bar{r} = \frac{a+b}{2}; \quad (12)$$

– для прямоугольников со сторонами a и b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad (13)$$

где $q = e^{-\pi a/b}$,

$$\begin{cases} \frac{a}{\bar{r}} = \pi \cos^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \frac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \quad (14)$$

где α – аргумент комплексных чисел (точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника); $(-1)!! = 1$.

Подсчитанные по формулам (1)...(14) значения конформных радиусов и их отношения \dot{r}/\bar{r} в виде справочных таблиц и графики зависимости отношения \dot{r}/\bar{r} от характерного для каждой фигуры геометрического параметра приводятся в работе [8].

2. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИБА ПЛАСТИНОК С ОТНОШЕНИЕМ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Рассматриваются упругие изотропные тонкие пластины:

$$D_{\min}/8 \dots 10 < t < D_{\min}/80 \dots 100,$$

где t – толщина пластинки, D_{\min} – минимальный габаритный размер в плане;

$w_0 \leq t/2 \dots 5$, где w_0 – максимальный прогиб.

В работе [4] была установлена физико-математическая аналогия максимального прогиба w_0 при поперечном изгибе пластинок с отношением конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} , основанная на вариационном представлении собственного значения дифференциального уравнения свободных колебаний пластинок, конформном представлении внутренности ее области при отображении на единичный круг и математической аналогии задач свободных колебаний и поперечного изгиба пластинок:

$$w_0 \leq k \frac{\dot{r}}{\bar{r}} \cdot \frac{qA^2}{D}, \quad (15)$$

где k – числовая константа, зависящая от вида граничных условий и обращающая выражение (15) в равенство: для круглой пластинки в случае жесткого защемления ($k = 1,583 \cdot 10^{-3}$) и для правильной n -угольной пластинки с $n \rightarrow \infty$ в случае шарнирного опирания ($k = 6,180 \cdot 10^{-3}$); q – интенсивность равномерно распределенной по всей площади нагрузки; A – площадь пластинки; D – цилиндрическая жесткость.

Из выражения (15) следует, что при заданных параметрах q , A , D и граничных условиях пластинки отношение \dot{r}/\bar{r} выступает в качестве единственного аргумента, однозначно определяющего верхнюю оценку максимального прогиба пластинки. Другими словами, отношение конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} является геометрическим аналогом

максимального прогиба. Это означает, что, не решая известного дифференциального уравнения эллиптического типа четвертого порядка, описывающего задачу поперечного изгиба пластинок

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q,$$

а, рассматривая лишь геометрическую задачу, связанную с анализом изменения отношения \dot{r}/\bar{r} при изменении геометрических параметрах и формы пластинок, можно оценивать качественную и количественную стороны изменение максимального прогиба.

Как показали исследования [8] неравенство (15) позволяет получать приемлемые оценки лишь для пластинок по форме близкой к правильной, поэтому оно было заменено следующим выражением

$$w_0 = k_w \cdot \frac{qA^2}{D}, \quad (16)$$

где $k_w = f(\dot{r}/\bar{r})$ – функциональный коэффициент пропорциональности, зависящий кроме как от отношения \dot{r}/\bar{r} , определяющего «правильность» или «симметричность» пластинки, еще и от вида граничных условий; этот коэффициент представляет значение максимального прогиба в общем виде.

В работе [8] были построены графические зависимости « $k_w - \dot{r}/\bar{r}$ » (рисунок 1).

На рисунке 1 точкам 3, 4, 6, 16 соответствуют правильные 3-х, 4-х, 6-ти, 16-ти-угольные пластинки, точке 3' – равнобедренная прямоугольная треугольная пластинка, точке О – круглая пластинка. Кривая I кроме указанных форм пластинок, объединяет решения для всех многоугольных пластинок, стороны которых касаются вписанной окружности.

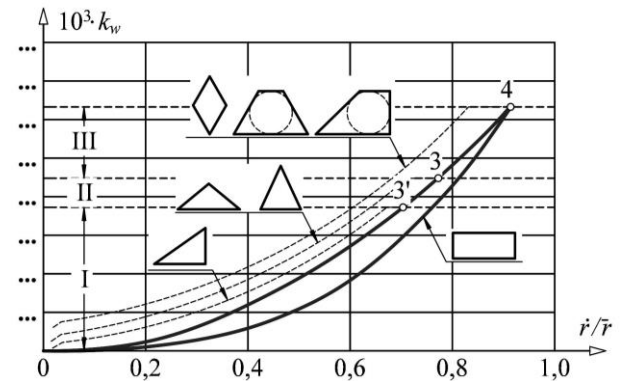


Рисунок 1. Графические зависимости «максимальный прогиб k_w – отношение конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} ».

3. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

В работе [2] было рассмотрено применение приведенных графических зависимостей « $k_w - \dot{r}/\bar{r}$ » (рисунок 1) к решению задачи вариантного проектирования пластинчато-стержневых силовых конструкций несущих панелей с двумя параллельными опорными направляющими (лонжеронами), когда задано ограничение на величину максимального прогиба элементов заполнения такой панели в виде упругих пластин (рисунок 2).

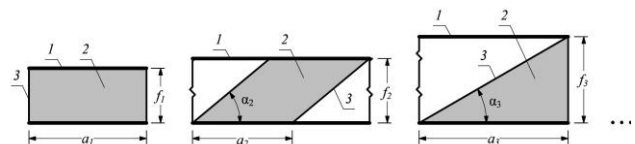


Рисунок 2. Несущая панель с двумя опорными параллельными направляющими 1 – стержень (лонжерон); 2 – пластинка; 3 – стержень (нервюр, стрингер)

Задача ставилась в следующей постановке. Задано ограничение на величину максимального прогиба пластин, требуется подобрать варианты заполнения несущей панели пластинками различных форм обладающих одинаковой заданной жесткостью. Прогиб задается в общем виде k_w из (16).

Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы

Поскольку отношение \dot{r}/\bar{r} характеризует форму пластинок, то решение поставленной задачи было предложено осуществлять в следующей последовательности.

3.1. Основной алгоритм

1. Для заданного значения прогиба k_w и случая граничных условий определяется отношение конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} для пластинок простых форм;
2. По полученным значениям отношения \dot{r}/\bar{r} определяются геометрические параметры, однозначно определяющие форму пластинок;
3. На основании изопериметрических свойств максимального прогиба [4] из пластинок простых форм с использованием геометрических преобразований строятся пластинки сложных форм (в их числе будем рассматривать параллелограммные [9] и трапециевидные [10]);
4. Полученные пластинки приводятся к равной (единичной) площади A .

Для реализации 1-го пункта в работе [2] получены приближенные аппроксимирующие функции в виде полиномов n -степени:

$$\dot{r}/\bar{r} = f(k_w) = a + b(k_w) + c(k_w)^2 + \dots + d(k_w)^n,$$

где $a, b, c, \dots, d, n = \text{const}$;

Для реализации 2-го пункта в работе [2] получены приближенные аппроксимирующие функции в виде полиномов n -степени:

$$\alpha(\lambda) = f(\dot{r}/\bar{r}) = a + b(\dot{r}/\bar{r}) + c(\dot{r}/\bar{r})^2 + \dots + (\dot{r}/\bar{r})^n$$

где α - то же что и в (4)-(10); $\lambda = a/b$, где a и b то же что и в (11)-(14).

3.2. Построение пластин сложных форм

Параллелограммных.

На основании изопериметрического свойства о двусторонней ограниченности значений максимального прогиба для параллелограммных пластинок значениями для ромбических и прямоугольных пластинок [4], рассмотрим получение семейства параллелограммных пластинок имеющих заданный

прогиб. Приведем прямоугольную и ромбическую пластинки, получаемые по выражениям (2), к одному основанию (рисунок 3).

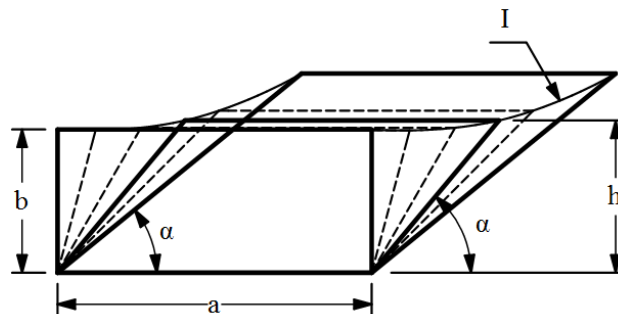


Рисунок 3. Получение семейства параллелограммных пластин, имеющих заданный прогиб k_w .

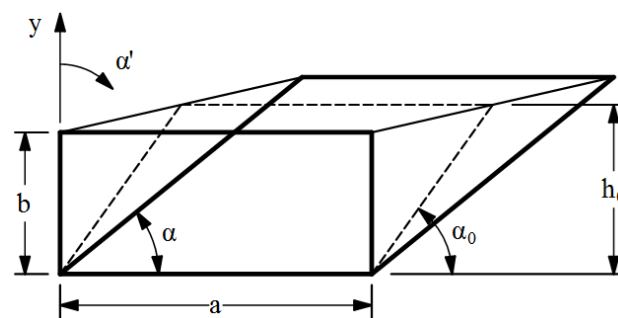


Рисунок 4. К определению угла α_0 .

Семейство параллелограммных пластинок имеющих заданный прогиб будет получаться путем движения вершин по некоторой кривой I на рисунке 3. Чтобы определить характер кривой I необходимо знать третью точку – параллелограммную пластинку, имеющую заданный прогиб. Для наиболее точного описания кривой I угол α_0 параллелограммной пластинки следует принять равным или близким к получаемому по выражению (рисунок 4):

$$\alpha_0 = \arctg\left(\frac{\sin \alpha + 1/\lambda}{\cos \alpha}\right), \quad (17)$$

где $\lambda = a/b$ – отношение сторон прямоугольной пластинки, а высоту h_0 следует подобрать, обеспечивающей заданный прогиб. Это удобно сделать с помощью программы «RRMaximalDeflectionPlateGraphic» [11] по

определению максимального прогиба пластин различной формы с помощью метода интерполяции по отношению конформных радиусов [12].

Для аналитического описания кривой I на рисунке 3 воспользуемся степенной аппроксимирующей функцией вида (рисунок 5):

$$y = y_{01} \left(\frac{\alpha'}{\alpha'_{01}} \right)^n, \quad n = \frac{\ln(y_2/y_{01})}{\ln(\alpha'_{01}/\alpha'_{02})}, \quad (18)$$

где y – искомая координата вершин параллелограммной пластинки, отсчитываемая от вершины прямоугольной пластинки (рисунок 4); y_{01} и y_{02} – то же, для параллелограммной пластинки с углом α_0 и высотой h_0 и для ромбической пластинки; α' – задаваемый угол параллелограммной пластинки, отсчитываемый от оси y (рисунок 4); α'_{01} и α'_{02} – то же, для параллелограммной пластинки с углом α_0 и высотой h_0 и для ромбической пластинки.

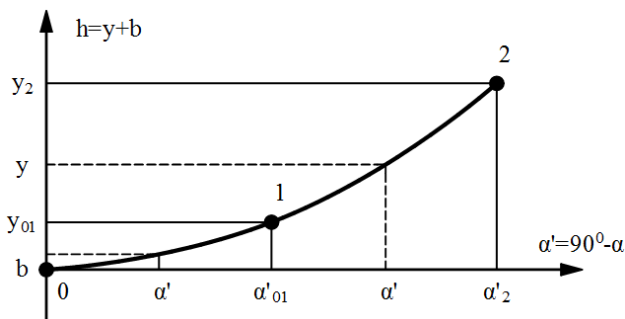


Рисунок 5. Аппроксимация кривой I на рисунке 3.

На рисунке 5 точке 0 соответствует прямоугольная пластинка, точке 1 – параллелограммная с углом α_0 и высотой h_0 , точке 2 – ромбическая.

Величины y_{01} , y_2 , α' , α'_{01} и α'_{02} в (18) определяются из выражений (рисунок 3, 4):

$$y_{01} = h_0 - b, \quad y_2 = a \cdot \sin \alpha - b, \quad (19)$$

$$\alpha' = 90 - \alpha, \quad \alpha'_{01} = 90 - \alpha_0, \quad \alpha'_{02} = 90 - \alpha, \quad (20)$$

где α – угол параллелограммной пластинки в выражении для α' и угол ромбической в выражении для y_2 и α'_{02} .

Высота h параллелограммной пластинки имеющей заданный прогиб при заданном угле α (рисунок 3) будет определяться из выражения:

$$h = y + b. \quad (21)$$

Трапецевидных.

На основании изопериметрического свойства о двусторонней ограниченности значений максимального прогиба для трапецевидных пластинок [4], аналогично получим выражения по определению семейств равнобедренных и прямоугольных трапецевидных пластинок имеющих заданный прогиб (рисунок 6...9).

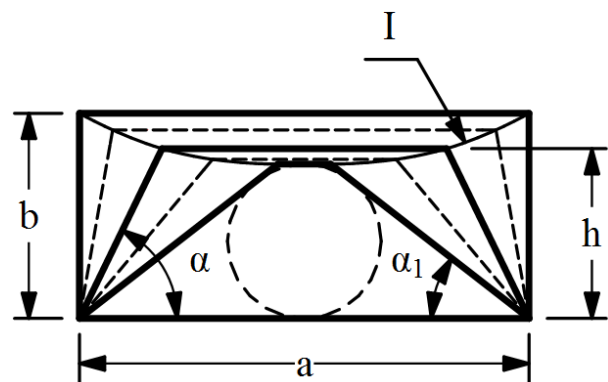


Рисунок 6. Получение семейства равнобедренных трапецевидных пластинок, имеющих заданный прогиб kw .

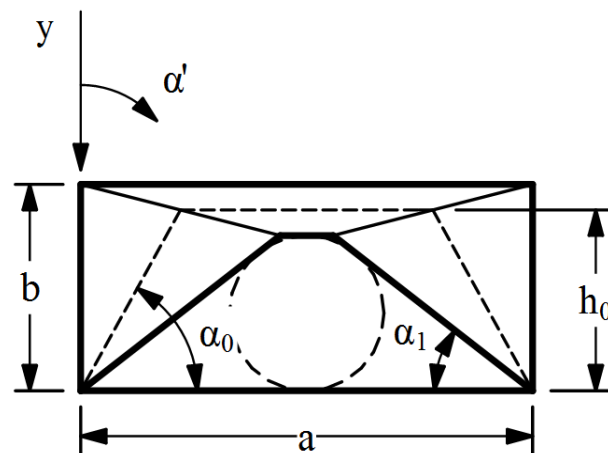


Рисунок 7. К определению угла α_0 .

Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы

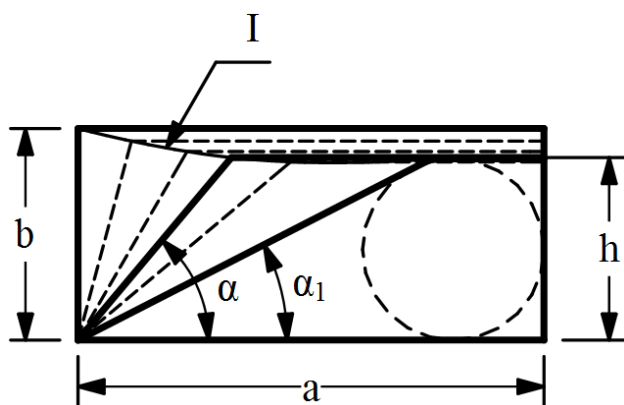


Рисунок 8. Получение семейства прямоугольных трапецевидных пластинок, имеющих заданный прогиб kw .

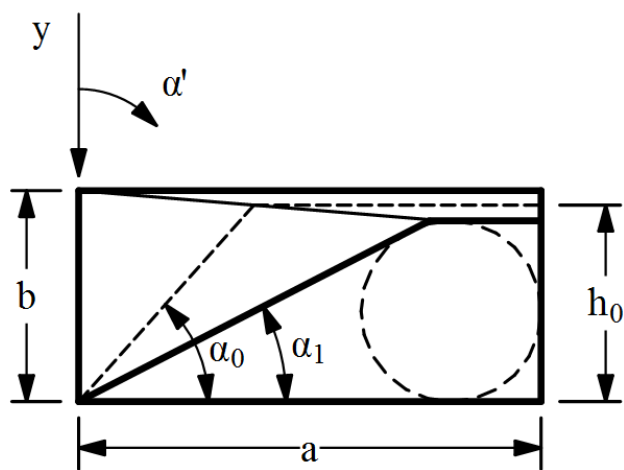


Рисунок 9. К определению угла α_0 .

Угол α_0 равнобедренной трапецевидной пластинки следует принять равным или близким к получаемому по выражению (рисунок 7):

$$\alpha_0 = \arctg \left(tg\alpha_1 + \frac{tg\alpha_1}{\lambda \cdot tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} \right). \quad (22)$$

Угол α_0 прямоугольной трапецевидной пластинки следует принять равным или близким к получаемому по выражению (рисунок 9):

$$\alpha_0 = \arctg \left(tg\alpha_1 + \frac{tg\alpha_1 \left(1 / tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + 1 \right)}{2\lambda} \right). \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) $\lambda = a/b$ – отношение сторон прямоугольной пластинки. Высоту h_0 следует подобрать из условия обеспечения заданного прогиба с помощью программы «RRMaximalDeflectionPlateGraphic» [11].

Кривые I на рисунках 6 и 8 будем описывать функцией (18). При этом y – определяемая координата вершин трапецевидных пластинок, отсчитываемая от вершины прямоугольной пластинки (рисунок 7, 9); y_{01} и y_{02} – координаты вершин для трапецевидных пластинок с углами α_0 и высотой h_0 , и для трапецевидных пластинок, стороны которых касаются вписанной окружности; α' – задаваемый угол трапецевидных пластинок, отсчитываемый от оси y (рисунок 7,9); α'_{01} и α'_{02} – углы для трапецевидных пластинок с углами α_0 и высотой h_0 , и для трапецевидных пластинок, стороны которых касаются вписанной окружности.

Величины y_{01} , y_2 , α' , α'_{01} и α'_{02} в (18) для равнобедренных трапецевидных пластинок определяются из выражений (рисунок 6,7):

$$y_{01} = b - h_0, \quad y_2 = b - a \cdot tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right), \quad (24)$$

$$\alpha' = 90 - \alpha, \quad \alpha'_{01} = 90 - \alpha_0, \quad \alpha'_{02} = 90 - \alpha_1. \quad (25)$$

Величины y_{01} , y_2 , α' , α'_{01} и α'_{02} в (18) для прямоугольных трапецевидных пластинок определяются из выражений (рисунок 8,9):

$$y_{01} = b - h_0, \quad y_2 = b - \frac{2a}{1 / tg\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + 1}, \quad (26)$$

$$\alpha' = 90 - \alpha, \quad \alpha'_{01} = 90 - \alpha_0,$$

$$\alpha'_2 = 90 - \alpha_1. \quad (27)$$

Высоты h трапециевидных пластинок имеющей заданный прогиб при заданных углах α (рисунок 6, 8) будут определяться из выражения:

$$h = b - y. \quad (28)$$

Для реализации 4-го пункта в работе [2] на основе справочных данных по геометрии плоских фигур были получены выражения

$$a = f(A),$$

где A – площадь пластины.

4. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Для реализации рассмотренного алгоритма на ЭВМ на языке Object Pascal в среде объектно-ориентированного программирования Delphi 7 [13], написан программный код и разработана компьютерная программа «RRGeomModelPlatsDesignRigidCond».

Программа предназначена для подбора вариантов заполнения пластинчато-стержневых несущих панелей с двумя параллельными опорными направляющими (лонжеронами), пластинами различных геометрических форм обладающих равной жесткостью.

Рассматриваются пластинки следующих форм: треугольные, ромбические, прямоугольные, параллелограммные и трапециевидные.

Граничные условия пластинок рассматривается либо с шарнирным опиранием по контуру, либо с жестким защемлением по контуру.

Прогиб задается в виде коэффициента пропорциональности k_w из (16) самостоятельным значением вручную, либо принадлежащим конкретной пластинке,

определяемый программой автоматически. В первом случае значение прогиба вводится в соответствующую в программе ячейку. Во втором случае для выбранной пластинки задаются геометрические параметры ее формы, и нажатием соответствующей кнопки выводится значение прогиба при заданных граничных условиях. В результате расчета программа выводит значения геометрических параметров форм пластинок, имеющих одинаковый заданный прогиб.

Предусмотрена возможность пересчета прогиба k_w в абсолютное значение w_0 , для чего необходимо задать толщину пластинок t (мм), интенсивность равномерно распределенной нагрузки q (кН/м²), коэффициент Пуассона ν и модуль упругости материала E (МПа).

Если в результате расчета значение прогиба превысит $1/2 \dots 1/5$ толщины, то программа выведет об этом сообщение, что будет означать, что пластины работают как гибкие. В программе предусмотрена вкладка «О программе», в которой приводятся основные сведения об ее работе.

Общий алгоритм работы программы представлен на рисунке 10. Экранное представление ее работы показано на рисунке 11.

ВЫВОДЫ

1. Построен алгоритм и разработка программы для ЭВМ для подбора вариантов заполнения пластинчато-стержневых несущих панелей с двумя параллельными опорными направляющими (лонжеронами), пластинами различных геометрических форм обладающих равной жесткостью путем геометрического моделирования их формы.
2. Разработанное программное обеспечение может быть использовано при вариантном проектировании пластинчато-стержневых силовых конструкций в строительстве и машиностроении.

Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы



Рисунок 10. Общий алгоритм программы «RRGeomModelPlatsDesignRigidCond».

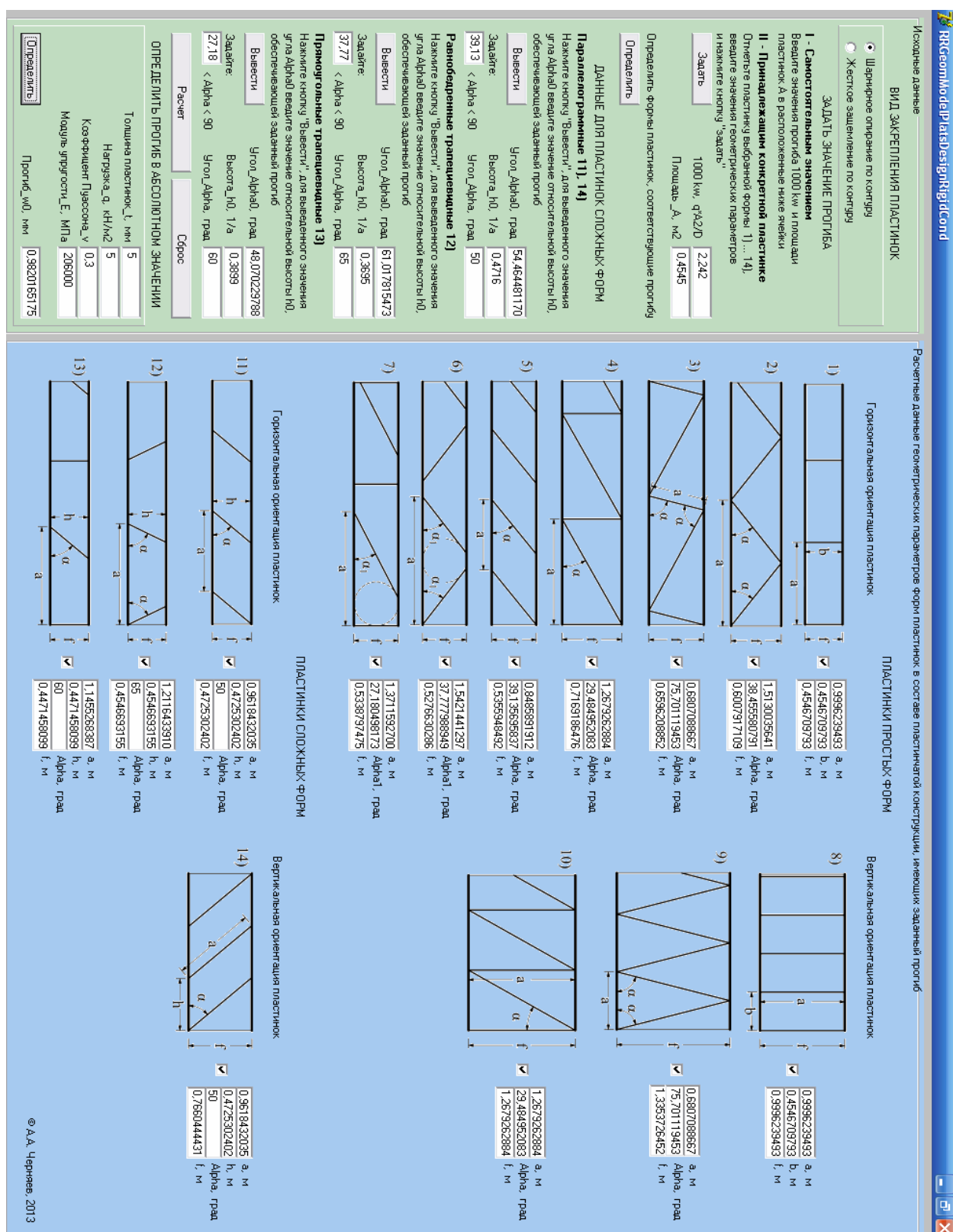


Рисунок 11. Экранное представление работы программы «RRGeomModelPlatsDesignRigidCond».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дмитриева Т.Л.** Адаптивные многоуровневые математические модели в численной оптимизации пластинчато-стержневых конструкций: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.13.18 / Т.Л. Дмитриева. – М., 2012. – 38 с.
2. **Черняев А.А.** Геометрическое моделирование пластинчатых конструкций из условия жесткости // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2012, Volume 8, Issue 4, pp. 66-77.
3. **Коробко А.В.** Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. – М.: АСВ, 1999. – 320 с.
4. **Коробко В.И., Черняев А.А.** Отношение конформных радиусов – новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач теории упругости // *Вестник отделения строительных наук РААСН*, 2012, Вып. 16, Т. 1, с. 149-161.
5. **Иванов В.И., Попов В.Ю.** Конформные отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
6. **Полиа Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
7. **Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В.** Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // *Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки*, 2005, №1, с. 32-38.
8. **Коробко В.И., Черняев А.А.** Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов // *Строительная механика и расчет сооружений*, 2011, №6, с. 16-22.
9. **Коробко А.В., Черняев А.А.** Определение максимального прогиба при поперечном изгибе параллелограммных пластинок с использованием отношения конформных радиусов // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2013, №2, с. 19-22.
10. **Черняев А.А.** К вопросу о расчете трапециевидных пластинок из условия жесткости // *Вестник гражданских инженеров*, 2013, №1(36), с. 37-42.
11. **Korobko A.V., Prokurov M.Yu., Chernyaev A.A.** Algorithm and computer program by calculation of plates from a rigidity condition at a cross bend / A.V. Korobko, A.A. Chernyaev, M.Yu. Prokurov // *Eastern European Scientific Journal*, 2013, No. 4, pp. 55–58.
12. **Черняев А.А.** Развитие метода интерполяции по отношению конформных радиусов для решения задач поперечного изгиба пластинок: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Орел, 2013. 211 с.
13. **Галисеев Г.В.** Программирование в среде Delphi 7. – М.: Вильямс, 2004. – 288 с.

Черняев Андрей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительства автомобильных дорог; Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева; Россия, 302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29, тел./факс: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru.

Andrew A. Chernyaev, Candidate of Technical Sciences, assistant Professor of Department Building highway Oryol state university of name I.S. Turgeneva, Russia, 302020, Oryol, Naugorskoye st., 29, Tel. (fax): 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПАНЕЛЬНОГО ЗДАНИЯ ПРОТИВ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ОБРУШЕНИЯ

Г.И. Шапиро, А.А. Гасанов

Московский научно-исследовательский проектный институт типологии, экспериментального проектирования,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Статья посвящена изучению сопротивления прогрессирующему обрушению панельного здания при локальном разрушении его несущих конструкций. Предложена модель панельного здания для расчета на устойчивость против прогрессирующего обрушения. Приведены результаты расчета панельного здания на устойчивость против прогрессирующего обрушения. Приведено сравнение полученных результатов, с результатами, полученными при использовании других существующих методик расчета.

Ключевые слова: панельное здание, локальное разрушение, прогрессирующее обрушение.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF STABILITY OF THE PREFABRICATED BUILDING AGAINST PROGRESSIVE COLLAPSE

Gennady I. Shapiro, Amar A. Gasanov

Moscow research Institute of topology and experimental design, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article is dedicated to the research of a prefabricated building resistance to progressive collapse. A model of a prefabricated building was proposed for the calculation of the resistance to progressive collapse. The results of calculation against progressive collapse were demonstrated. The obtained results were compared to the results of other calculation methods currently in use.

Keywords: panel building, local collapse, progressive collapse

Панельное домостроение в Российской Федерации имеет широкое распространение, что связано с обеспечением граждан доступным жильем. В нашей стране развитие панельного жилья началось в 50-е годы XX века. В настоящее время требования к панельным домам возросли, как к надежности; пожаробезопасности; архитектурной выразительности фасадов; решения первых нежилых этажей и пр.

Опыт проектирования и строительства панельных домов показал, что при эксплуатации панельных домов возможно возникновение запроектных аварийных воздействий, вызванных различными случайными факторами как природными, так и антропогенными, в том числе техногенными такими как: дли-

тельный пожар, незаконная перепланировка, ошибки в проекте, взрыв бытового газа, карстовый провал и пр. Такого рода, не предусмотренные проектом, аварийные воздействия могут привести к локальному разрушению несущих конструкций с последующим прогрессирующим обрушением здания или его частей. Существующая нормативная база, не входящая в перечень норм обязательных к выполнению в соответствии с Федеральным законом №384 [1] также не содержит конкретных требований по обеспечению устойчивости крупнопанельных жилых зданий против прогрессирующего обрушения.

В 80-90-х годах прошлого века были разработаны следующие нормативные документы,

связанные с проектированием крупнопанельных зданий:

- Пособие по проектированию жилых зданий. Вып. 3. Часть 1, 2. Конструкции жилых зданий (к СНиП 2.08.01-85). М., 1986 [2].
- Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий. М., 1999 [3].
- Рекомендации по защите жилых зданий стеновых конструктивных систем при чрезвычайных ситуациях. М., 2000 [4].

Данные нормативные документы содержат методику расчета панельных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения и основные конструктивные требования, предъявляемые к сборным элементам и связям между ними.

В соответствии с [2-4] методика расчета панельных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения базируется на нескольких гипотезах (гипотезы Ю.М. Стругацкого [5]). Идеи их базируются на физических свойствах растворных швов между сборными элементами, которые обязательны при расчетах панельных зданий:

- 1) Расслоение платформенных стыков, расположенных над локальным разрушением.
- 2) Конструкции этажей, расположенных над локальным разрушением, находятся в равных условиях: «Каждый этаж несет сам себя».
- 3) Обеспечение несущей способности и устойчивости отдельных конструктивных элементов, расположенных над локальным разрушением, приводит к защите от прогрессирующего обрушения всего здания в целом.
- 4) Описание четырех механизмов разрушения ячейки панельного здания (несколько его модулей) связанных с зоной локального разрушения (в рамках кинематического метода предельного равновесия).

Конструктивная схема здания должна обеспечивать его прочность и устойчивость при локальном разрушении его конструкций на время, требуемое для эвакуации людей. При

этом деформации и раскрытие трещин в конструктивных элементах не ограничиваются.

Основные средства защиты панельного здания от прогрессирующего обрушения – это применение рационального конструктивно-планировочного решения; обеспечение пластических деформаций в конструкциях и связях между ними при предельных нагрузках; обеспечение прочности и устойчивости конструкций, расположенных над локальным разрушением, а также связей между ними.

Расчет панельных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения выполняется на особое сочетание нагрузок и воздействий, включающее нормативные значения постоянных и длительных нагрузок, а также воздействие гипотетических локальных разрушений несущих конструкций. Расчетные характеристики сопротивления материалов определяются в соответствии с [2-4]. При этом учитываются такие факторы как заводское качество изготовления изделий, нарастание прочности бетона во времени, возможность использования арматуры за пределом текучести стали.

В случае выполнения условия пластичной работы конструкций при предельных нагрузках расчет рекомендуется выполнять кинематическим методом теории предельного равновесия. В этом случае алгоритм расчета сводится к решению следующих частных задач:

- Назначение схем расчетных локальных разрушений несущих конструкций здания;
- Анализ сопротивления прогрессирующему обрушению отдельных конструктивных элементов здания, потерявших опору в результате локального разрушения;
- Анализ возможных механизмов прогрессирующего обрушения при каждом из заданных расчетных локальных разрушений;
- Определение количества и мощности различного вида связей между конструктивными элементами, необходимых для обеспечения устойчивости конструкций против прогрессирующего обрушения.

- В качестве расчетной модели рекомендуется использовать пространственную систему, состоящую из пластин, соединенных между собой связями. При этом связи между пластинами могут отсутствовать по проекту. Собственно, в результате расчета необходимо получить рациональную систему связей, необходимую для предотвращения прогрессирующего обрушения панельного здания.

Расчетная модель должна включать конструктивные элементы, которые на этапе эксплуатации здания являются ненесущими, а при воздействии локального разрушения активно включаются в работу. К таким элементам относятся: наружные стеновые панели (в случае применения навесных панелей наружных стен), перегородки (из тяжелого бетона заводского изготовления), железобетонные ограждения балконов и лоджий, монтажные связи и пр.

Используя в качестве основных допущений гипотезы Ю.М. Стругацкого [5] и метод конечных элементов была построена численная модель одной ячейки панельного здания и проведены расчеты на устойчивость против прогрессирующего обрушения. Проведено сравнение результатов расчета с кинематическим методом предельного равновесия. [6].

При расчете кинематическим методом предельного равновесия были рассмотрены три механизма обрушения рассмотренной ячейки (рис. 1-3). В результате расчета получено, что по механизмам обрушения первого и третьего типа условие устойчивости против прогрессирующего обрушения выполнено, а по второму механизму условие нарушено. При увеличении проектного армирования плит перекрытия, условие устойчивости против прогрессирующего обрушения для механизма второго типа выполнено.

При расчете методом конечных элементов в расчетной модели конструктивные элементы и связи между ними моделировались с использованием физически нелинейных конечных элементов вида тонкая оболочка и пространственный стержень. В качестве основно-

го критерия обрушения при расчете было принято достижение относительных деформаций материала сечений предельных величин [7]. В результате расчета методом конечных элементов было получено, что при реализации механизмов прогрессирующего обрушения первого и третьего типов максимальные относительные деформации материала сечений не достигают предельных величин (рис. 4, 5). При реализации механизма прогрессирующего обрушения второго типа, максимальные значения относительных деформаций материала сечений достигают предельных величин и, как следствие, требуется дополнительное армирование сечений (рис. 6).

В результате проведенных расчетов получена сходимость результатов расчетов по двум методам. Однако примененные методы расчета панельного здания на устойчивость против прогрессирующего обрушения в [6] не охватывают всей проблемы расчета панельных зданий на устойчивость прогрессирующего обрушения.

В настоящее время существующие документы не охватывают вопрос общей устойчивости панельного здания при локальном разрушении его конструкций. Методика расчета, приведенная в [2-4] не позволяет учесть перераспределение усилий между конструкциями здания.

Расчетная модель, описанная в [2-4] не предполагает конкретных механизмов, позволяющих определить характер разрушения самого здания в целом при локальном разрушении его несущих конструкций.

Поэтому проведены исследования процесса прогрессирующего обрушения крупнопанельного здания на численной модели. Для построения модели был выбран жилой дом, в настоящее время разрабатываемый ОАО МНИИТЭП. Конструктивная система здания – перекрестно-стеновая с поперечными и продольными внутренними несущими стенами. Внутренние стены – сборные железобетонные стеновые панели вертикального и горизонтального формирования из бетона класса В22,5 толщиной 180 мм и 220 мм.

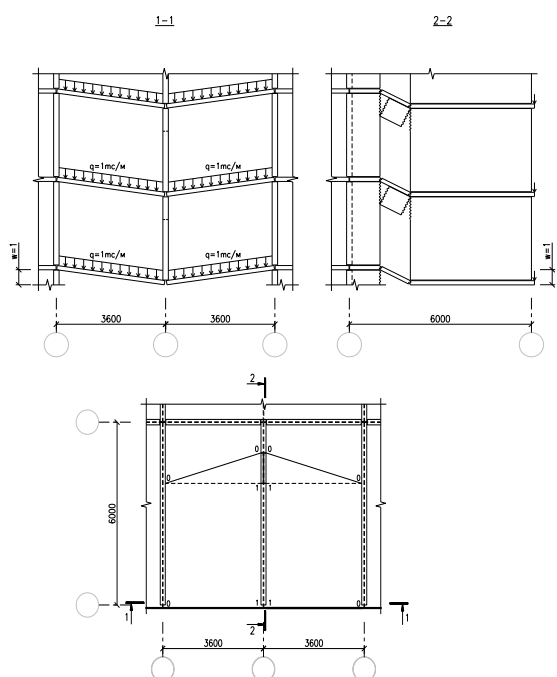


Рисунок 1. Механизм обрушения первого типа.

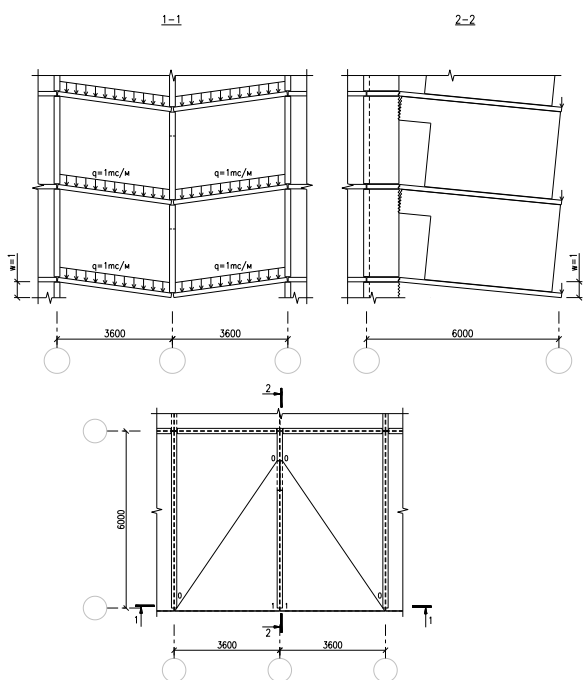


Рисунок 2. Механизм обрушения второго типа.

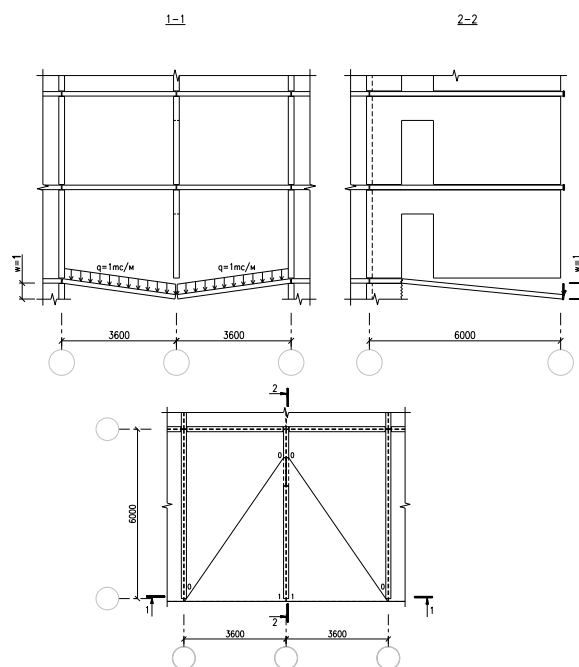


Рисунок 3. Механизм обрушения третьего типа.

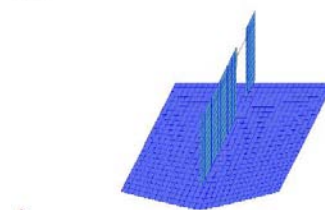


Рисунок 4. Механизм обрушения первого типа.

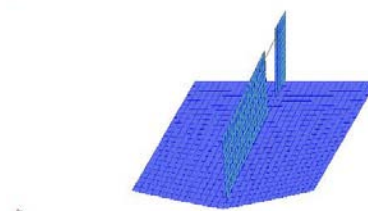


Рисунок 5. Механизм обрушения второго типа.

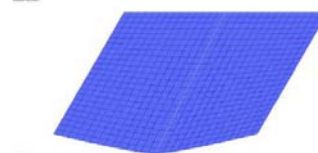


Рисунок 6. Механизм обрушения третьего типа.

Высота перемычек над проемами во внутренних стеновых панелях 560 мм. Перекрытие – плоские железобетонные плиты из бетона класса В20 толщиной 140 мм горизонтального формования. Наружные стены – навесные стеновые панели толщиной 350 и 390 мм из бетона класса В 22,5 с утеплителем из ПСБ толщиной 140 мм. Покрытие чердака – плоское с внутренним организованным водостоком. Перегородки высотой 2,62 м из тяжелого бетона класса В15. Горизонтальные стыки – платформенные на цементно-песчаном растворе М150, толщиной 10 и 20 мм. По верху внутренних стеновых панелей между собой и с наружными стеновыми панелями по проекту установлены монтажные связи в виде приваренных к закладным деталям стеновых панелей стальных пластин сечением 6x40 мм, 10x60 мм и стальных стержней сечением 12x12 мм. Между плитами перекрытия по проекту устанавливаются связи в виде приваренных к закладным деталям плит перекрытия стальных пластин сечением 6x40 мм, 6x60 мм и стальных стержней сечением 12x12 мм. Позже наружных стеновых панелей установлены связи в виде стальных пластин, приваренных к закладным деталям плит перекрытия и наружных панелей сечением 6x60 мм и 6x120 мм. На рис. 7 приведен план типового этажа 17-ти этажного жилого здания с техподпольем и чердаком.

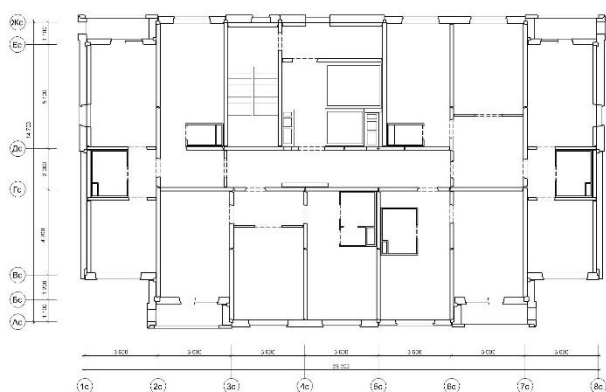


Рисунок 7. План типового этажа.

Расчетная модель здания была выполнена с использованием сертифицированного программного комплекса ЛИРА-САПР 2015.

В качестве расчетной схемы несущих конструкций панельного здания была принята система из пластин и стержней. Простенки внутренних стеновых панелей моделировались треугольными и четырехугольными пластинчатыми конечными элементами вида тонкая оболочка. Перемычки между простенками внутренних стеновых панелей моделировались физически нелинейными универсальными пространственными конечными элементами. При задании жесткостных параметров перемычкам учитывалось принятое по проекту армирование их сечений. Зависимости напряжений от деформаций в зависимости от класса бетона и стали арматуры перемычек принимались в соответствии с [7]. Предельные деформации и расчетные сопротивления материалов принимались в соответствии с [7].

Плиты перекрытия моделировались с использованием физически нелинейных треугольных и четырехугольных конечных элементов вида тонкая оболочка. При задании жесткостных параметров плитам перекрытия учитывалось принятое по проекту армирование их сечений. Зависимости напряжений от деформаций в зависимости от класса бетона и стали арматуры перемычек принимались в соответствии с [7]. Предельные деформации и расчетные сопротивления материалов принимались в соответствии с [7].

В соответствии с проектом наружные стеновые панели навесные и являются ненесущими. Однако, при локальном разрушении конструкций, наружные стеновые панели включаются в работу по предотвращению прогрессирующего обрушения. Простенки наружных стеновых панелей моделировались с использованием треугольных и четырехугольных пластинчатых конечных элементов вида тонкая оболочка. Перемычки между простенками наружных стеновых панелей моделировались физически нелинейными универсальными пространственными

конечными элементами. При задании жесткостных параметров перемычкам учитывалось принятое по проекту армирование их сечений. Зависимости напряжений от деформаций в зависимости от класса бетона и стали арматуры перемычек принимались в соответствии с [7]. Предельные деформации и расчетные сопротивления материалов принимались в соответствии с [7].

Стальные связи между сборными элементами моделировались с использованием двухузловых конечных элементов упругих связей с учетом предельных усилий. Данный конечный элемент позволяет моделировать работу стальной связи до ее «выключения» - момент достижения напряжений в сечении расчетного [2-4] значения сопротивления материала. При достижении предельного значения усилия элемент перестает воспринимать дальнейшие нагрузки и фиксирует предельное значение усилия в нем. При этом происходит перераспределение усилий на соседние конструктивные элементы и связи между ними.

Для моделирования работы платформенных стыков использовались конечные элементы упругих связей с учетом предельных усилий. Основное отличие данных конечных элементов от, например, широко применяемых для моделирования платформенных стыков зданий [8, 9] упругих связей – это возможность ограничивать предельное усилие, воспринимаемое элементом. В расчетной модели принималось, что предельное усилие, воспринимаемое элементом в вертикальном направлении при растяжении равно нулю, что позволяет моделировать возможное расслоение платформенных стыков при локальном разрушении конструкций. Жесткость элементов в вертикальном и горизонтальном направлениях определялась с учетом податливости платформенного стыка в соответствии с [2].

Узлы стыковки наружных стеновых панелей с перекрытиями и между собой моделировались с использованием двухузловых конечных элементов односторонней связи в узле. Данный конечный элемент позволяет моделировать контакт двух узлов при учете

начального зазора между ними. Зазоры между узлами расчетной модели соответствовали проектной толщине стыков. При задании жесткости конечного элемента учитывалась податливость узла в соответствии с [2].

Расчетная модель здания приведена на рис. 8. Фрагмент расчетной модели – типовой этаж с указанием узлов приведен на рис. 9. На рис. 10 приведены фрагменты расчетной модели – узлы 1, 2 и 3. На рис. 11-12 приведены фрагменты расчетной схемы: стены и перекрытие типового этажа.



Рисунок 8. Расчетная модель здания.

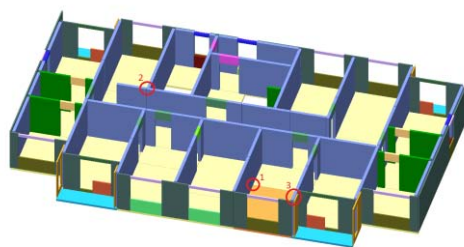
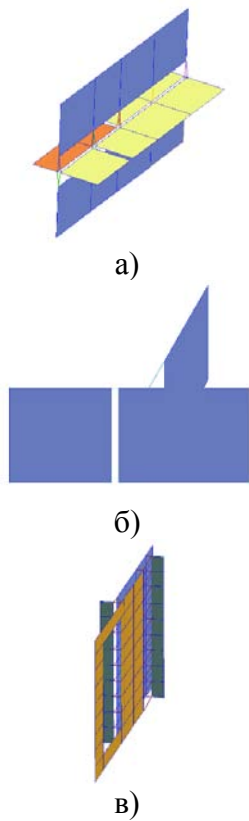


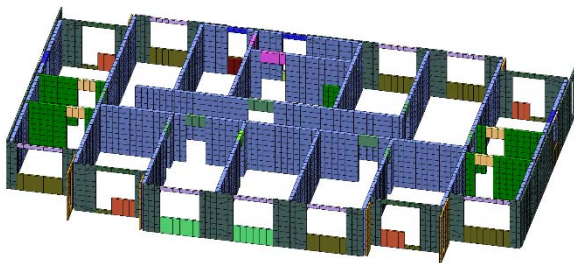
Рисунок 9. Фрагмент расчетной модели. Типовой этаж здания.

В виду особенностей реализации метода конечных элементов в ПК ЛИРА-САПР 2015 в узлах оболочечных конечных элементов пять степеней свободы. Для восприятия угла поворота в своей плоскости от стержневых конечных элементов, вводятся дополнительные стержневые элементы, которые заводятся на один узел в сетку оболочечных конечных элементов.

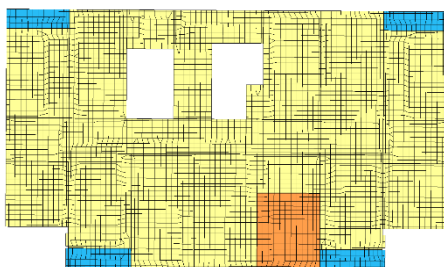
Расчет выполняется в две монтажные стадии. На первой монтажной стадии производится возведение всех конструкций здания, нагружение нагрузками, действующими на стадии эксплуатации здания.



*Рисунок 10. Фрагмент расчетной схемы.
Узлы 1 – 3.*



*Рисунок 11. Фрагмент расчетной схемы.
Стены типового этажа.*



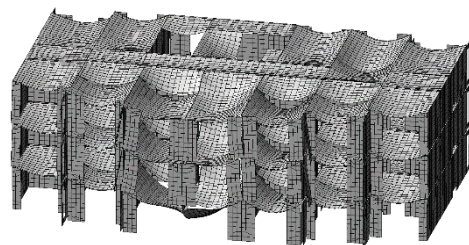
*Рисунок 12. Фрагмент расчетной схемы.
Перекрытие типового этажа.*

На второй монтажной стадии производится демонтаж конечных элементов, фактически являющихся локальным разрушением в здании. Локальное разрушение конструкций принято в виде удаления простенка одной из стен до дверного проема с примыкающими простенками наружных стеновых панелей на первом этаже. Расчетная модель жилого дома состоит из 275949 элементов. Расчет производился на вычислительной машине с четырехядерным процессором частотой 3,31 ГГц, оперативной памятью 4,0 Гб. Время проведения расчета составило 10987 минут.

В результате расчета получено напряженно-деформированное состояние конструкций, соответствующее стадии локального разрушения конструкций.

На рис. 13 показан фрагмент деформированной схемы здания (1-3 этажи) при локальном разрушении стены с примыкающими простенками наружных стеновых панелей на первом этаже. На рис. 14 показан фрагмент деформированной схемы здания – разрез по столбу, внизу которого произошло локальное разрушение. На рис. 15 на фрагменте расчетной схемы здания показаны усилия в стальных связях на втором этаже. На рис. 16 на фрагменте расчетной схемы здания показаны изгибающие моменты в перемычках второго этажа здания.

Полученная деформированная схема здания не соответствует ни одному из приведенных механизмов прогрессирующего обрушения, описанных в методике [2-4].



*Рисунок 13. Фрагмент расчетной схемы.
Этажи 1-3. Деформированная схема
при локальном разрушении.*

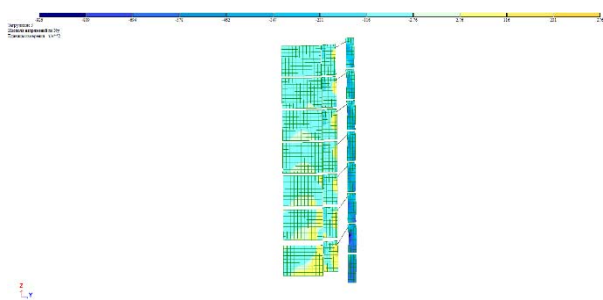


Рисунок 14. *Фрагмент расчетной схемы. Этажи 1-8. Деформированная схема. Изополю вертикальных напряжений при локальном разрушении.*

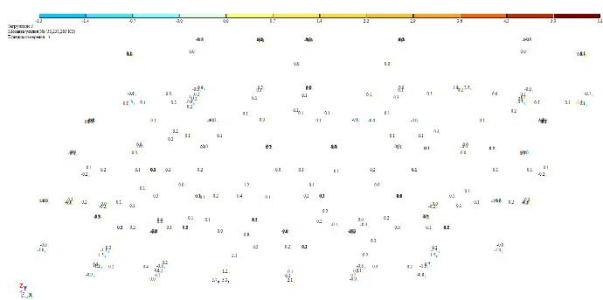


Рисунок 15. *Фрагмент расчетной схемы. Этаж 2. Усилия в стальных связях.*

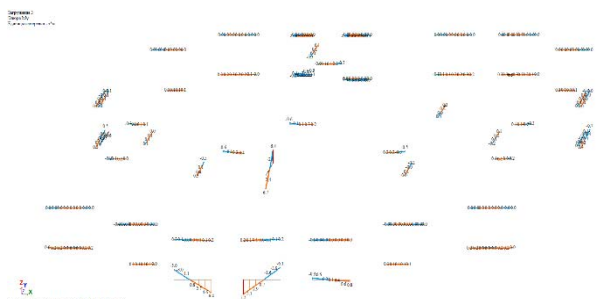


Рисунок 16. *Фрагмент расчетной схемы. Этаж 2. Изгибающие моменты в перемычках.*

Это связано, прежде всего, с тем, что предложенная модель позволяет получить результаты расчета в более общем случае без каких-либо допущений, как это делалось при использовании гипотез Ю.М. Стругацкого [5], конечно-элементных локальных модульных моделей. Кроме того, в модели изначально учтена работа стальных связей, установленных между сборными конструкциями по проекту, расчет выполняется в простран-

ственной постановке с учетом стадий эксплуатации здания.

В результате расчета получено, что расслоение платформенных стыков по высоте здания происходит неравномерно. Усилия в связях, расположенных над локальных разрушением, уменьшаются по высоте здания. Усилия в связях, расположенных в соседних ячейках с той, под которой произошло локальное разрушение конструкций, увеличились по сравнению со стадией, соответствующей нормальной эксплуатации здания. Усилия в перемычках стеновых панелей, расположенных над локальным разрушением, уменьшаются по высоте здания.

Итак, можно сделать вывод о том, что гипотеза Ю.М. Стругацкого [5] о расслоении платформенных стыков, расположенных над локальным разрушением, верна лишь частично. На этажах, начиная с 8-го, расслоения платформенных стыков не происходит.

Гипотеза о том, что «каждый этаж несет сам себя» частично верна. Поскольку получено, что усилия в конструктивных элементах и связях между ними изменяются (уменьшаются) по высоте здания. Однако эта гипотеза дает оценку сверху по достаточности принятых мероприятий по защите здания от прогрессирующего обрушения при локальном разрушении его конструкций.

В результате расчетов получено, что при локальном разрушении одной стены на первом этаже происходит изменение напряженного состояния всего здания в целом. При этом получено нарастание горизонтальных перемещений всего здания в сторону локального разрушения в три раза. Получено, что вертикальные напряжения в стеновых панелях перераспределились в сторону их увеличения на фасад в направлении локального разрушения. Вертикальные напряжения в стеновых панелях первого этажа, расположенных вокруг локального разрушения выросли. Соответственно выросли напряжения и в платформенных стыках. Вертикальные напряжения в сохранившемся простенке стены (локальное разрушение) первого этажа увеличились с 391 т/м² до 634 т/м². Очевидно, что гипотеза о до-

статочности обеспечения несущей способности отдельных конструктивных элементов, расположенных над локальным разрушением, для обеспечения устойчивости всего здания в целом верна отчасти. Эта гипотеза дает оценку снизу по достаточности принятых мероприятий по защите здания от прогрессирующего обрушения при локальном разрушении его конструкций. В методике, приведенной в [2-4] не предлагается проверка достаточности несущей способности вертикальных элементов, расположенных вокруг локального разрушения, не предлагается проверка прочности платформенных стыков. Очевидно, что столь значительное изменение напряженно-деформированного состояния здания: нарастание напряжений и горизонтальных деформаций здания, влияет на общую устойчивость здания. В результате локального разрушения расчетная схема изменяется и крайевые условия подлежат корректировке.

Нельзя не отметить, что в целом, применяемая в [2-4] методика расчета на устойчивость против прогрессирующего обрушения панельного здания дает оценки достаточности принятых мероприятий как снизу, так и сверху.

Предложенная модель для расчета сборного здания стеновой конструктивной схемы (панельного) близка к действительным конструктивным решениям и при расчете на прогрессирующее обрушение позволяет получить более точную оценку достаточности принятых в проекте мероприятий по защите зданий от прогрессирующего обрушения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный закон «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» №384-ФЗ.
2. Пособие по проектированию жилых зданий. Вып. 3. Часть 1, 2. Конструкции жилых зданий. (к СНиП 2.08.01-85) // ЦНИИЭПжилища. М., 1989.
3. Рекомендации по предотвращению прогрессирующих обрушений крупнопанельных зданий. МКА, М., 1999.
4. Рекомендации по защите жилых зданий стеновых конструктивных систем при чрезвычайных ситуациях МКА, М., 2000.
5. **Стругацкий Ю.М.** Обеспечение прочности панельных зданий при локальных разрушениях их несущих конструкций. В сб. «Исследования несущих бетонных и железобетонных конструкций сборных многоэтажных зданий», МНИИТЭП М., 1980.
6. **Зенин С.А, Шарипов Р.Ш, Кудинов О.В, Шапиро Г.И, Гасанов А.А.** Разработка основных положений по расчету конструктивных несущих систем крупнопанельных зданий с обеспеченной устойчивостью против прогрессирующего обрушения при локальных аварийных воздействиях. М., 2016 (в печати).
7. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения М., 2012.
8. **Шапиро Г.И., Гасанов А.А., Юрьев Р.В.** Расчет зданий и сооружений в МНИИТЭП / ПГС 2007 №6 М., 2007.
9. **Шапиро Г.И, Юрьев Р.В.** К вопросу о построении расчетной модели панельного здания / Промышленное и гражданское строительство, 2004, №12.

Шапиро Геннадий Исаакович, главный конструктор ОАО МНИИТЭП; 107031, Россия, Москва, ул. Петровка, д.15 стр.1; тел. +7(495) 276-00-33; факс: +7(495) 623-61-38; e-mail: g-shapiro@mail.ru

Гасанов Амар Амрович, главный инженер отдела главного конструктора ОАО МНИИТЭП, 107031, Россия, Москва, ул. Петровка, д.15 стр.1; тел. +7(495) 276-00-33; факс: +7(495) 623-61-38 e-mail: gasamar@yandex.ru

Shapiro Gennady Isaakovich, chief designer OJSC MNIITEP; 15, Ul. Petrovka, Moscow, 107031, Russia; tel. +7(495) 276-00-33; fax: +7(495) 623-61-38; e-mail: g-shapiro@mail.ru

Gasanov Amar Amrovich chief engineer, department of the chief designer OJSC MNIITEP; 15, Ul. Petrovka, Moscow, 107031, Russia; tel. +7(495) 276-00-33; fax: +7(495) 623-61-38; e-mail: gasamar@yandex.ru