

***International Journal for  
Computational Civil and Structural Engineering***  
*Volume 11, Issue 4* *2015*

---

**EXECUTIVE EDITOR**

**Vladimir I. Travush**, Professor,  
Vice-President of Russian Academy  
of Architecture and Construction Sciences  
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

**EDITOR-IN-CHIEF**

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Advanced Mathematics  
and Structural Mechanics  
Moscow Institute of Architecture (State Academy)  
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,  
107031, Russia

**EDITORIAL DIRECTOR**

**Valery I. Telichenko**, Professor,  
The First Vice-President of Russian Academy  
of Architecture and Construction Sciences  
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

**MANAGING EDITOR**

**Nadezhda S. Nikitina**, Professor  
Director of ASV Publishing House  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**TECHNICAL EDITOR**

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation, National Research  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**ASSOCIATE EDITORS**

**Pavel A. Akimov**, Professor  
Executive Scientific Secretary of Russian Academy  
of Architecture and Construction Sciences;  
Head of Department of Applied Mathematics  
and Computer Science, National Research  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Scientific Research Center "STADYO"  
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Lomonosov Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Saint Petersburg State Polytechnical University  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

## **ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS**

**Robert M. Aloyan**, Professor  
Ivanovo State Polytechnical  
University, 20, Ulitsa 8 Marta,  
Ivanovo, 153037, Russia

**Vladimir I. Andreev**, Professor  
National Research Moscow State  
University of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,  
129337, Russia

**Mukhtaritdin M. Batdalov**, Professor  
Makhachkala Branch of Moscow  
Automobile and Road State  
Technical University (MADI),  
1. Imam Shamil Avenue,  
Makhachkala, Russia

**Klaus-Jürgen Bathe**, Professor  
Massachusetts Institute  
of Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Alexander T. Bekker**, Professor  
Far Eastern Federal University,  
8 Suhanova Street, Vladivostok,  
690950, Russia

**Jan Buynak**, Professor  
University of Žilina,  
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,  
Slovakia

**Evgeniy M. Chernishov**, Professor  
Voronezh State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,  
394006, Russia

**Victor S. Fedorov**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Sergiy Yu. Fialko**, Professor,  
Cracow University of Technology  
24, Warszawska Street, Kraków,  
31-155, Poland

**Alexander S. Gorodetsky**, Professor  
LIRA SAPR Ltd.,  
Office 212, 7a Kiyanovsky side street  
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

**Vyatcheslav A. Ilyichev**, Professor  
Russian Academy of Architecture  
and Construction Sciences,  
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,  
Moscow, 107031, Russia

**Marek Iwański**, Professor,  
Kielce University of Technology,  
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego  
Kielce, 25 – 314, Poland

**Sergey Yu. Kalashnikov**, Professor  
Volgograd State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
1, Academicheskaya Street,  
Volgograd, 400074, Russia

**Nikolay I. Karpenko**, Professor  
Research Institute of Building  
Physics, 21, Locomotive Travel,  
Moscow, 127238, Russia

**Vladimir V. Karpov**, Professor  
Saint Petersburg State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,  
Saint Petersburg, 190005, Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Perm National Research Polytechnic  
University, 29 Komsomolsky pros.,  
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

**Vitaly I. Kolchunov**, Professor  
Southwest State University, 94, 50 let  
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

**Markus König**, Professor  
Ruhr-Universität Bochum  
150, Universitätsstraße, Bochum,  
44801, Germany

**Sergey B. Kositsin**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Amirlan A. Kusainov**, Professor  
Kazakh Leading Academy of  
Architecture and Civil Engineering  
29, Toraigyrov str., Almaty, Almaty,  
050043, Republic of Kazakhstan

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mechanics  
of the Russian Academy of Sciences,  
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,  
119526, Russia

**Vladimir V. Lalin**, Professor  
Saint Petersburg State Polytechnical  
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,  
St. Petersburg, 195251, Russia

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,  
Russia

**Rashid A. Mangushev**, Professor  
Saint Petersburg State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,  
Saint Petersburg, 190005, Russia

**Iliyar T. Mirsayapov**, Professor  
Kazan State University  
of Architecture and Engineering,  
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,  
Republic of Tatarstan, Russia

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
National Research Moscow State  
University of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,  
129337, Russia

**Nikolai P. Osmolovskii**, Professor  
Kazimierz Pulaski University  
of Technology and Humanities  
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,  
26-600, Radom, Poland

**Alexey N. Petrov**, Professor  
Petrozavodsk State University,  
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,  
185910, Republic of Karelia, Russia

**Vladilen V. Petrov**, Professor  
Yuri Gagarin State Technical  
University of Saratov  
77 Politechnicheskaya Street,  
Saratov, 410054, Russia

**Jerzy Z. Piotrowski**, Professor  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,  
Kielce, 25 – 314, Poland

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing, China

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Eun Chul Shin**, Professor  
Incheon National University,  
(Songdo-dong)119 Academy-ro,  
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

**D.V. Singh**, Professor  
Vice-Chairman all India Council  
for Technical Education,  
New Delhi, India

**Wacław Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Tadatsugu Tanaka**, Professor  
Tokyo University, 7-3-1 Hongo,  
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wrocław University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wrocław, Poland

**Askar Zhussupbekov**, Professor  
Eurasian National University,  
5, Munaipassov street, Astana,  
010000, Kazakhstan

## **INVITED REVIEWERS**

**Akimbek A. Abdikalikov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov  
34 Maldybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

**Vadim K. Akhmetov**, Professor, Dr.Sc.  
National Research Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

**Ján Čelko**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Stanislaw Jemioło**, Professor, Dr.Sc.,  
Warsaw University of Technology  
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

**Konstantin I. Khenokh**, Ing.  
General Dynamics C4 Systems,  
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

**Christian Koch**, Dr.-Ing.  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Gaik A. Manuylov**, Professor, PhD  
Moscow State University of Railway Engineering,  
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

**Alexander S. Noskov**, Professor, Dr.Sc.  
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin  
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

**Nelli N. Rogacheva**, Professor, Dr.Sc.  
National Research Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

**Grzegorz Świt**, Professor, Dr.hab. Inż.,  
Kielce University of Technology,  
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

**Josef Vičan**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Artur Zbiciak**, Associate Professor  
Warsaw University of Technology  
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов /АСВ/ (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26) и Издательство Begell House Inc. (79 Madison Avenue, New-York, USA / Издательский дом Бегелл, 79, Мадисон авеню, г. Нью-Йорк, США). Партнером издания выступает Российская академия архитектуры и строительных наук /РААСН/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on CD or DVD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

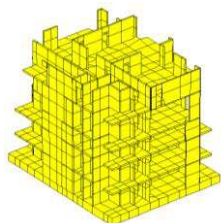


Figure 1.

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies to Editor-in-Chief** by traditional post. The en-

velope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on CD or DVD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or DVD with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Advanced Mathematics  
and Structural Mechanics,  
Moscow Institute of Architecture  
(State Academy), 11/4, Building 4,  
Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031,  
Russia; *e-mail*: sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
National Research Moscow State University of  
Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail*: niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Advanced Mathematics and Structural Mechanics, Moscow Institute of Architecture (State Academy), 11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031, Russia, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском (английском) языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском (русском) языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на CD-диске или DVD-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на CD или DVD) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

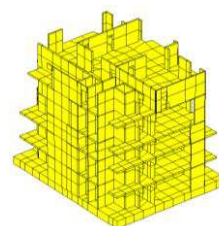


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на CD или DVD) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата A4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На CD или DVD необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

- **Главный редактор**  
советник РААСН, профессор,  
доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
Московский архитектурный институт  
(государственная академия),  
кафедра высшей математики  
и строительной механики,  
107031, Россия, г. Москва,  
ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4.  
*e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*
- **Технический редактор**  
советник РААСН, доцент,  
кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
Национальный исследовательский  
Московский государственный  
строительный университет, Научно-  
образовательный центр компьютерного  
моделирования уникальных зданий,  
сооружений и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail: niccm@mgsu.ru*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

<sup>1)</sup> Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Московский архитектурный институт (государственная академия), кафедра высшей математики и строительной механики, 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4;  
*e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*

<sup>2)</sup> Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: pavel.akimov@gmail.com*

<sup>3)</sup> Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: niccm@mgsu.ru*

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 11, Issue 4*

*2015*

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов</b>	<b><u>14</u></b>
<i>П.А. Акимов, О.А. Негрозов</i>	
<b>Влияние геометрического дефекта купольной части защитной оболочки атомного реактора ВВЭР – 1000 на динамические характеристики с учетом статистического анализа</b>	<b><u>29</u></b>
<i>П.И. Андреева, М.И. Андреев, О.В. Мкртычев, О.А. Ковальчук, Г.Э. Шаблинский</i>	
<b>Структурный анализ процесса пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния</b>	<b><u>36</u></b>
<i>О.В. Кабанцев</i>	
<b>Определение прочности и ориентация площадок разрушения бетона при различных видах объемного напряженного состояния</b>	<b><u>52</u></b>
<i>Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко</i>	
<b>Влияние возраста на физико-механические и реологические характеристики высокопрочного сталефибробетона</b>	<b><u>62</u></b>
<i>Н.И. Карпенко, А.В. Мишина, В.И. Травуш</i>	
<b>Определение деформативности и прочности муфтовых соединений арматуры</b>	<b><u>70</u></b>
<i>С.Н. Карпенко, В.И. Травуш, И.Г. Чепизубов</i>	
<b>Определение технического состояния наклонных сечений железобетонных конструкций в экспертной системе с нечетким логическим выводом</b>	<b><u>77</u></b>
<i>Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков</i>	
<b>Онтологический анализ нечеткой базы знаний в системе поддержки принятия решений о техническом состоянии изгибаемых железобетонных конструкций</b>	<b><u>86</u></b>
<i>Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков</i>	
<b>Об одном численном методе локализации при решении задач расчета конструкций</b>	<b><u>98</u></b>
<i>М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов</i>	

<b>Натурно-расчетное определение динамического модуля упругости грунта основания сооружений</b>	<b><u>116</u></b>
<i>Е.Ю. Сергеевцев, С.В. Щербина, С.А. Павлющик</i>	
<b>Верификация методики численного моделирования динамического напряженно-деформированного состояния трехмерных систем «сооружение – жидкость»</b>	<b><u>124</u></b>
<i>А.М. Белостоцкий, Д.С. Дмитриев, Нгуен Тай Ханг Лыонг</i>	
<b>Численное моделирование трубопроводных систем высокого и сверхвысокого давления</b>	<b><u>133</u></b>
<i>А.М. Белостоцкий, А.А. Аул, В.А. Слуцкий, Н.А. Андронов</i>	
<b>О созыве очередного Общего собрания членов Российской академии архитектуры и строительных наук</b>	<b><u>156</u></b>
<b>Информация о конкурсе на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук за 2015 год</b>	<b><u>158</u></b>

# ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА БАЛКИ-СТЕНКИ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*П.А. Акимов<sup>1,2,3</sup>, О.А. Негрозов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** В настоящей статье рассматривается решение тестовой задачи статического расчета балки-стенки (расчетная модель – двумерная (плоская) задача теории упругости) на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного и развитого в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова и М.Л. Мозгалевой.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, краевая задача, балка-стенка, двумерная задача теории упругости

# ABOUT ONE SAMPLE OF DEEP BEAM ANALYSIS BASED ON COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD

*Pavel A. Akimov<sup>1,2,3</sup>, Oleg A. Negrozov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The distinctive paper is devoted to one sample of deep beam static analysis based on combined application of finite element method (FEM) and discrete-continual finite element method (DCFEM), proposed by Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov and Marina L. Mozgaleva. Two-dimensional theory of elasticity is used as corresponding design model.

**Keywords:** discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, boundary problem, deep beam, two-dimensional theory of elasticity

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения и перемещения) балки-стенки, нагруженной сосредоточенной силой, при этом боковые (торцевые) вертикальные грани конструкции шарнирно закреплены (рис. 1.1). Основные обозначения, в том числе в части характерных геометриче-

ских размеров и нагрузок, показаны на рис. 1.1.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Пусть  $\Omega$  – область, занимаемая конструкцией (рис. 1.1),

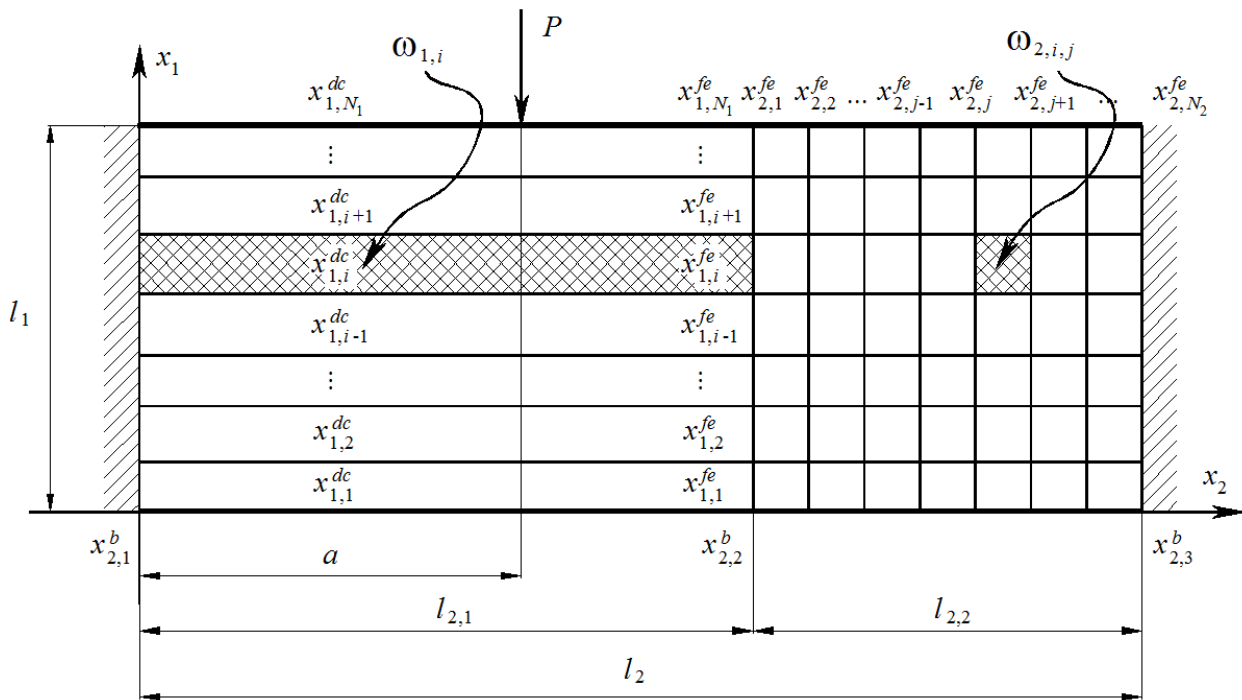


Рис. 1.1. К постановке задачи.

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \quad (1.1)$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (1.2)$$

где

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}, \quad k = 1, 2; \quad (1.3)$$

$x_{2,1}^b = 0$ ;  $x_{2,2}^b = l_{2,1}$ ;  $x_{2,3}^b = l_{2,1} + l_{2,2} = l_2$  – координаты соответствующих граничных точек;  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – подобласти области  $\Omega$ .

Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [10,20], можем окаймить области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответствующими расширенными  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и перейти к рассмотрению расширенной области  $\omega$ ,

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2, \quad \text{где } \Omega_1 \subset \omega_1, \quad \Omega_2 \subset \omega_2. \quad (1.4)$$

Пусть в пределах области  $\omega_1$  физико-геометрические параметры (характеристики)

конструкции не зависят от переменной  $x_2$ , отвечающей так называемому основному направлению [1-8,11-16,19,21-25], тогда как в пределах области  $\omega_2$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно. Для расчета такого рода конструкций целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ, причем в пределах  $\omega_1$  следует использовать дискретно-континуальную аппроксимирующую модель, а в пределах  $\omega_2$  – дискретную (конечноэлементную) модель.

Пусть  $x_{1,i}^{dc}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}$  – координаты (по переменной  $x_1$ ) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области  $\omega_1$ ;  $(N_1^{dc} - 1)$  – общее количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов в области  $\omega_1$ ;  $x_{1,i}^{fe}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1^{fe}$  и  $x_{2,j}^{fe}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2^{fe}$  – координаты (соответственно по переменным  $x_1$  и  $x_2$ ) узлов конечных элементов в области  $\omega_2$ ;  $(N_1^{fe} - 1)$  и

$(N_2^{fe} - 1)$  – количество конечных элементов, на которые «разбивается» конструкция по направлениям, соответствующим переменным  $x_1$  и  $x_2$  (рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка (рис. 1)).

Для удобства алгоритмических построений будем применять двухиндексную систему нумерации узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области  $\omega_1$ : имеем номер типа  $(k, i)$ , где  $k$  – номер подобласти,  $i$  – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего переменной  $x_1$ ).

Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области  $\omega_2$  будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа  $(k, i, j)$ , где  $k$  – номер подобласти,  $i$  и  $j$  – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих  $x_1$  и  $x_2$ ).

Кроме того, будем полагать, для простоты, что схема дискретизации конструкции по направлению, отвечающему переменной  $x_1$ , неизменна по всей области, т.е.

$$N_1^{fe} = N_1^{dc} = N_1; \quad x_{1,i}^{fe} = x_{1,i}^{dc} = x_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (1.5)$$

Заметим, что при изложении аппроксимаций в рамках ДККЭ будем следовать системе обозначений, принятой в [1].

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси  $Ox_2$ ) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси  $Ox_1$ ) производится конечноэле-

ментная аппроксимация. Таким образом, область  $\omega_1$  разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\omega_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \omega_{1,i}; \quad \omega_{1,i} = \{(x_1, x_2): x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \quad x_{2,1}^b < x_2 < x_{2,2}^b\}; \quad (2.1)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ  $\omega_i$  по формуле

$$\theta_{1,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{1,i} \subset \Omega_1; \\ 0, & \omega_{1,i} \not\subset \Omega_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе), очевидно, определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{1,i} = \theta_{1,i} \lambda; \quad \bar{\mu}_{1,i} = \theta_{1,i} \mu. \quad (2.3)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений  $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$  и их производные  $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}$  по переменной  $x_2$  (верхний индекс «(1)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е.  $\omega_1$ ), т.е. для  $(1, i)$ -го узла это  $u_1^{(1,i)}, u_2^{(1,i)}$  и  $v_1^{(1,i)}, v_2^{(1,i)}$ .

Поля  $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$  и  $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}$  по неосновному направлению (вдоль  $x_1$ ) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются линейно.

Можно показать [1], что в рамках рассмотрения подобласти  $\omega_1$ , разрешающая система  $4N_1$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\bar{U}'_1(x_2) = A_1 \bar{U}_1(x_2) + \bar{R}_1(x_2), \quad (2.4)$$

где  $\bar{U}_1 = \bar{U}_1(x_2) = [(\bar{u}_1)^T \quad (\bar{v}_1)^T]^T \quad (2.5)$

Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

–  $4N_1$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «1», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е.  $\omega_1$ );

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_2) = [(\bar{u}_n^{(1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(1,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(1,N_1)})^T]^T; \quad (2.6)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1(x_2) = [(\bar{v}_n^{(1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1)})^T]^T; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^{(1,i)} = \bar{u}_n^{(1,i)}(x_2) &= [u_1^{(1,i)} \quad u_2^{(1,i)}]^T; \\ \bar{v}_n^{(1,i)} = \bar{v}_n^{(1,i)}(x_2) &= [v_1^{(1,i)} \quad v_2^{(1,i)}]^T; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$A_1$  – матрица коэффициентов  $4N_1$ -го порядка;  $\bar{R}_1(x_2)$  –  $4N_1$ -мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (2.3) может быть представлено в виде [1]:

$$\bar{U}_1(x_2) = E_1(x_2)\bar{C}_1 + \bar{S}_1(x_2), \quad (2.9)$$

где  $E_1(x_2) = \varepsilon_1(x_2 - x_{2,1}^b) - \varepsilon_1(x_2 - x_{2,2}^b)$ ;

$$\bar{S}_1(x_2) = \varepsilon_1(x_2) * \bar{R}_1(x_2); \quad (2.10)$$

$\varepsilon_1(x_2)$  – фундаментальная матрица-функция системы (2.4), определяемая согласно [1]; символ «\*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций;  $\bar{C}_1$  –  $4N_1$ -мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по обоим координатным направлениям (вдоль осей  $0x_1$  и  $0x_2$ ) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область  $\omega_2$  разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \omega_{2,i,j}; \\ \omega_{2,i,j} &= \{(x_1, x_2): \\ & x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \quad x_{2,j}^{fe} < x_2 < x_{2,j+1}^{fe}\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

определяя характеристическую функцию ДККЭ  $\omega_i$  по формуле

$$\theta_{2,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{2,i,j} \subset \Omega_2; \\ 0, & \omega_{2,i,j} \not\subset \Omega_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе), очевидно, определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{2,i,j} = \theta_{2,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{2,i,j} = \theta_{2,i,j} \mu. \quad (3.3)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений  $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$  (верхний индекс «(2)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е.  $\omega_2$ ), т.е. для  $(2, i, j)$ -го узла это  $u_1^{(2,i,j)}, u_2^{(2,i,j)}$ .

Поля  $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$  по обоим координатным направлениям (вдоль осей  $0x_1$  и  $0x_2$ ) в пределах каждого конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные четырехузловые конечные элементы двумерной задачи теории упругости (в перемещениях) [9,18]).

Можно показать [9,18], что в рамках рассмотрения подобласти  $\Omega_2$ , разрешающая система  $2N_1N_2$  линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_2 \bar{U}_2 = \bar{R}_2, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 = & \\ = & [ (\bar{u}_n^{(2,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(2,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(2,N_1,1)})^T \quad \dots \\ & (\bar{u}_n^{(2,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(2,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(2,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \dots \quad (\bar{u}_n^{(2,1,N_2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(2,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(2,N_1,N_2)})^T ]^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

–  $4N_1$ -мерный глобальный вектор неизвестных (нижний индекс «2», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е.  $\omega_2$ );

$$\bar{u}_n^{(2,i,j)} = [ u_1^{(2,i,j)} \quad u_2^{(2,i,j)} ]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad (3.6)$$

$K_2$  – глобальная матрица жесткости  $2N_1N_2$ -го порядка;  $\bar{R}_2$  –  $2N_1N_2$ - мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок).

#### 4. ПЕРЕХОД К ЕДИНОЙ (СВЯЗАННОЙ) МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Для всех узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область  $\omega_2$ , с индексами  $1 < j < N_2$  (т.е.  $x_{2,2}^b < x_2 < x_{2,3}^b$ ) можем переписать систему уравнений (3.2), без учета соответствующих уравнения для узлов с индексами  $j=1$  и  $j=N_2$ . Имеем  $2N_1(N_2 - 2)$  уравнений:

$$\tilde{K}_2 \bar{U}_2 = \tilde{R}_2, \quad (4.1)$$

где  $\tilde{K}_2$  – «редуцированная» таким образом глобальная матрица жесткости размером  $[2N_1(N_2 - 2)] \times [2N_1N_2]$ ;  $\tilde{R}_2$  –  $2N_1(N_2 - 2)$ - мерный «редуцированный» глобальный вектор правых частей.

Очевидно, можно записать следующие условия для всей области  $\omega$ :

– в сечении  $x_2 = x_{2,1}^b$  следует задать условия ( $2N_1$  уравнений) шарнирного опирания вида:

$$u_1^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (4.2)$$

$$u_2^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (4.3)$$

– в сечении  $x_2 = x_{2,2}^b$  (т.е. при  $j=1$ ; здесь и ниже  $j$  – третий индекс в нумерации узлов конечноэлементной сетки, аппроксимирующей область  $\omega_2$ ) следует задать условия ( $4N_1$  уравнений) идеального контакта вида:

$$u_1^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = u_1^{(2,i,j)}(x_{2,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \quad (4.4)$$

$$u_2^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = u_2^{(2,i,j)}(x_{2,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \quad (4.5)$$

$$\sigma_{1,2}^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = \sigma_{1,2}^{(2,i,j)}(x_{2,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1; \quad (4.6)$$

$$\sigma_{2,2}^{(1,i)}(x_{2,2}^b - 0) = \sigma_{2,2}^{(2,i,j)}(x_{2,2}^b + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, \quad (4.7)$$

где  $\sigma_{1,2}^{(1,i)}(x_2)$  и  $\sigma_{2,2}^{(1,i)}(x_2)$  – соответственно приведенные к узлу  $(1, i)$  функции компонент напряжений  $\sigma_{1,2}(x_2)$  и  $\sigma_{2,2}(x_2)$  в пределах рассматриваемого дискретно-континуального конечного элемента  $\omega_{1,i}$ ;  $\sigma_{1,2}^{(2,i,j)}$  и  $\sigma_{2,2}^{(2,i,j)}$  – соответственно приведенные к узлу  $(2, i, j)$  значения компонент напряжений  $\sigma_{1,2}$  и  $\sigma_{2,2}$ ;

– в сечении  $x_2 = x_{2,3}^b$  (т.е. при  $j=N_2$ ) следует задать условия ( $2N_1$  уравнений) шарнирного опирания вида:

$$u_1^{(2,i,j)}(x_{2,3}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2; \quad (4.8)$$

$$u_2^{(2,i,j)}(x_{2,3}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = N_2. \quad (4.9)$$

В общей сложности, обобщая (4.1)-(4.9) имеем

$$2N_1(N_2 - 2) + 2N_1 + 4N_1 + 2N_1 = 2N_1N_2 + 4N_1$$

уравнений, причем в качестве неизвестных в данном случае выступают  $4N_1$  компонент вектора  $\bar{C}_1$  (см. формулу (2.9)), а также  $2N_1N_2$  значений компонент перемещений в узлах конечноэлементной сетки, аппроксимирующей подобласть  $\omega_2$  ( $u_1^{(2,i,j)}, u_2^{(2,i,j)}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$ ), т.е. общее количество неизвестных также составляет  $2N_1N_2 + 4N_1$ .

Перепишем последовательно уравнения (4.2)-(4.9) в матрично-векторном виде, в том числе с учетом (2.9).

1. Рассмотрим уравнения (4.2)-(4.3). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) = \bar{g}_1^+, \quad (4.10)$$

где  $B_1^+$  – матрица граничных условий размера  $2N_1 \times 4N_1$ , алгоритм формирования которой указан в таблице 4.1;  $\bar{g}_1^+$  –  $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_1^+ = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя (2.9) в (4.12) будем иметь:

$$B_1^+ E_1(x_{2,1}^b + 0) \bar{C}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{2,1}^b + 0) \quad (4.12)$$

$$\text{или} \quad Q_1 \bar{C}_1 = \bar{G}_1, \quad (4.13)$$

где  $Q_1 = B_1^+ E_1(x_{2,1}^b + 0)$ ;

$$\bar{G}_1 = \bar{g}_1^+ - B_1^+ \bar{S}_1(x_{2,1}^b + 0); \quad (4.14)$$

$Q_1$  – матрица размера  $2N_1 \times 4N_1$ ;  $\bar{G}_1$  – вектор размера  $2N_1$ .

2. Рассмотрим уравнения (4.4)-(4.7). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_2^- \bar{U}_1(x_{2,2}^b - 0) = B_2^+ \bar{U}_2(x_{2,2}^b + 0), \quad (4.15)$$

где  $B_2^-$  – матрица граничных условий размера  $4N_1 \times 4N_1$ , алгоритм формирования которой указан в таблице 4.2;  $B_2^+$  – матрица граничных условий размера  $4N_1 \times 2N_1N_2$ , формируемая на основе метода базисных вариаций в соответствии с алгоритмом, описанным в Приложении к настоящей статье. Подставляя (2.9) в (4.15), получим:

$$B_2^- E_1(x_{2,2}^b - 0) \bar{C}_1 - B_2^+ \bar{U}_2(x_{2,2}^b + 0) = -B_2^- \bar{S}_1(x_{2,2}^b - 0) \quad (4.16)$$

$$\text{или} \quad Q_{2,1} \bar{C}_1 + Q_{2,2} \bar{U}_2 = \bar{G}_2, \quad (4.17)$$

где  $Q_{2,1} = B_2^- E_1(x_{2,2}^b - 0)$ ;  $Q_{2,2} = -B_2^+$ ;

$$\bar{G}_2 = -B_2^- \bar{S}_1(x_{2,2}^b - 0); \quad (4.18)$$

$Q_{2,1}$  – матрица размера  $4N_1 \times 4N_1$ ;  $Q_{2,2}$  – матрица размера  $4N_1 \times 2N_1N_2$ ;  $\bar{G}_2$  – вектор размера  $2N_1$ .

3. Рассмотрим уравнения (4.8)-(4.9). Очевидно, их можно записать следующим образом:

$$B_3^- \bar{U}_2 = \bar{g}_3^-, \quad (4.19)$$

где  $B_3^-$  – матрица граничных условий размера  $2N_1 \times 2N_1N_2$ , алгоритм формирования которой указан в таблице 4.3;  $\bar{g}_3^-$  –  $2N_1$ -мерный нулевой вектор,

$$\bar{g}_3^- = 0. \quad (4.20)$$

Объединяя уравнения (4.13), (4.17), (4.1) и (4.19), будем иметь систему из  $2N_1N_2 + 4N_1$  линейных алгебраических уравнений с  $2N_1N_2 + 4N_1$  неизвестными:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \\ 0 & \tilde{K}_2 \\ 0 & B_3^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \tilde{R}_2 \\ \bar{g}_3^- \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Таблица 5.1. Алгоритм заполнения матрицы  $B_1^+$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее Условие
1	$(2i - 1, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.2)
2	$(2, 2i), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.3)

Примечание: Все элементы матрицы  $B_1^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 4.2. Алгоритм заполнения матрицы  $B_2^-$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.4)
2	$(N_1 + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.5)
3	$(2N_1 + 1, 2)$	$\bar{\mu}_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(4.6) $i = 1$
4	$(2N_1 + 1, 4)$	$\bar{\mu}_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
5	$(2N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\mu}_{1,1}$	
6	$(2N_1 + i, 2(i - 1)), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(4.6) $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$
7	$(2N_1 + i, 2i), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\bar{\mu}_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\mu}_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
8	$(2N_1 + i, 2(i + 1)), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\mu}_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
9	$(2N_1 + i, 2(N_1 + i) - 1), i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\mu}_{1,i-1} + \bar{\mu}_{1,i})$	
10	$(3N_1, 2N_1 - 2)$	$\bar{\mu}_{1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(4.6) $i = N_1$
11	$(3N_1, 2N_1)$	$\bar{\mu}_{1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
12	$(3N_1, 4N_1 - 1)$	$\bar{\mu}_{1,N_1-1}$	
13	$(3N_1 + 1, 1)$	$\bar{\lambda}_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(4.7) $i = 1$
14	$(3N_1 + 1, 3)$	$\bar{\lambda}_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
15	$(3N_1 + 1, 2N_1 + 1)$	$\bar{\lambda}_{1,1} + 2\bar{\mu}_{1,1}$	

1	2	3	4
14	$(3N_1 + i, 2i - 3),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(4.7) $i = 2, 3, \dots,$ $N_1 - 1$
15	$(3N_1 + i, 2i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\bar{\lambda}_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\bar{\lambda}_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N_1 + i, 2i + 1),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} \bar{\lambda}_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(3N_1 + i, 2(N_1 + i)),$ $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$	$\frac{1}{2} (\bar{\lambda}_{1,i-1} + \bar{\lambda}_{1,i}) + \bar{\mu}_{1,i-1} - \bar{\mu}_{1,i}$	
18	$(4N_1, 2N_1 - 3)$	$\bar{\lambda}_{1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_1(1)$	(4.7) $i = N_1$
19	$(4N_1, 2N_1 - 1)$	$\bar{\lambda}_{1,N_1-1} \frac{1}{h_{N_1-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N_1, 4N_1)$	$\bar{\lambda}_{1,N_1-1} + 2\bar{\mu}_{1,N_1-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 4.3. Алгоритм заполнения матрицы  $B_3^-$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	$(2i - 1, 2N_1(N_2 - 1) + 2i - 1),$ $i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.8)
2	$(2i, 2N_1(N_2 - 1) + 2i),$ $i = 1, 2, \dots, N_1$	1	(4.9)

Примечание: Все элементы матрицы  $B_3^-$  не указанные в таблице равны нулю.

После решения данной системы на основании известных формул дискретно-континуального метода конечных элементов [9,18] и метода конечных элементов [1-8,11-16,19,21-25] могут быть найдены искомые перемещения, деформации и напряжения.

**ПРИЛОЖЕНИЕ.**  
**ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ**  
**ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**  
**ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»**  
**В РАМКАХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ**

**МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ**  
**МЕТОДА БАЗИСНЫХ ВАРИАЦИЙ**

*П.1. Локальная система координат конечного элемента. Восполнение неизвестных на элементе.*

Рассмотрим произвольный  $(2, i, j)$ -й конечный элемент (рис. П.1). На элементе вводится локальная система координат (координаты  $t_1$  и  $t_2$ ), при этом  $t_1 \in [0, 1]$ ;  $t_2 \in [0, 1]$ . Имеет место следующее соответствие глобальных и локальных координат узлов элемента:

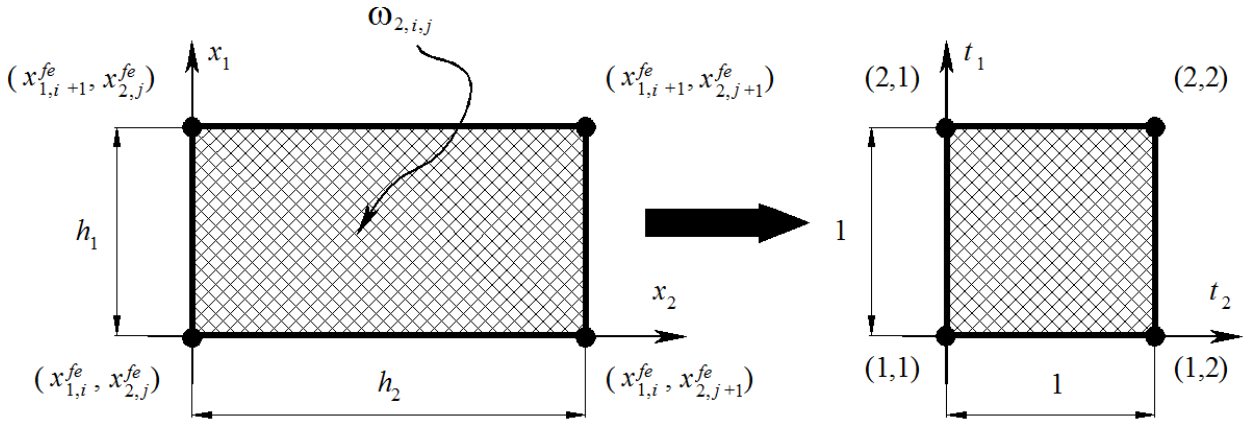


Рис. П.1. Переход к локальной системе координат на конечном элементе.

$$\begin{aligned} (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j}^{fe}) &\Rightarrow (0, 0); & (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j}^{fe}) &\Rightarrow (1, 0); \\ (x_{1,i}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}) &\Rightarrow (0, 1); \\ (x_{1,i+1}^{fe}, x_{2,j+1}^{fe}) &\Rightarrow (1, 1). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Пусть  $\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T$  и  $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$  – векторы координат произвольной точки дискретно-континуального конечного элемента в локальной и исходной глобальной системах координат.

Формула преобразования координат на элементе (рис. П.1):

$$\bar{x}(t_1, t_2) = \bar{x}_n^{(2,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \bar{x}^{(2,i,j)} &= \bar{x}_n^{(2,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(2,i,j)}; \\ \Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j)} &= \bar{x}_n^{(2,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(2,i,j)}; \\ \Delta_{12} \bar{x}^{(2,i,j)} &= \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(2,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}^{(2,i,j)}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Поясним, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_n^{(2,i,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j)} \\ x_2^{(i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(2,i+1,j)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j)} \\ x_2^{(i+1,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(2,i,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i,j+1)} \\ x_2^{(i,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \end{bmatrix}; \\ \bar{x}_n^{(2,i+1,j+1)} &= \begin{bmatrix} x_1^{(i+1,j+1)} \\ x_2^{(i+1,j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i+1}^{fe} \\ x_{2,j+1}^{fe} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Здесь  $\bar{x}_n^{(2,i,j)}, \bar{t}_n^{(2,i,j)}$  – векторы координат  $(2, i, j)$ -го узла элемента в глобальной и локальной системах координат соответственно. Формула восполнения перемещений на элементе:

$$\bar{u}^{(2)}(t_1, t_2) = \bar{u}_n^{(2,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{u}^{(2,i,j)} + t_2 \Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j)}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\Delta_1 \bar{u}^{(2,i,j)} = \bar{u}_n^{(2,i+1,j)} - \bar{u}_n^{(2,i,j)}$ ;

$$\Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j)} = \bar{u}_n^{(2,i,j+1)} - \bar{u}_n^{(2,i,j)};$$

$$\Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j)} = \bar{u}_n^{(2,i+1,j+1)} - \bar{u}_n^{(2,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{u}^{(2,i,j)} \quad (\text{П.6})$$

(нижний индекс «2», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е.  $\omega_2$ ).

Функциональная матрица  $B(t_1, t_2)$  имеет вид:

$$B(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.7})$$

где

$$\beta_{p,q}^{(i,j)}(t_1, t_2) = \Delta_q x_p^{(i,j)} + t_3 \Delta_{12} x_p^{(i,j)}, \quad p=1, 2; \quad q=1, 2; \quad (\text{П.8})$$

$$\Delta_1 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j)} - x_p^{(i,j)}, \quad p=1, 2; \quad (\text{П.9})$$

$$\Delta_2 x_p^{(i,j)} = x_p^{(i,j+1)} - x_p^{(i,j)}, \quad p=1, 2; \quad (\text{П.10})$$

$$\Delta_{12} x_p^{(i,j)} = x_p^{(i+1,j+1)} - x_p^{(i+1,j)} - \Delta_2 x_p^{(i,j)}, \quad p=1, 2. \quad (\text{П.11})$$

Формула вычисления определителя матрицы  $B(t_1, t_2)$ :

Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов

$$J_{i,j}(t_1, t_2) = \det[\Lambda_{i,j}(t_1, t_2)] = \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)\beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)\beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) \quad (\text{П.12})$$

Матрица Якоби  $\Lambda(t_1, t_2)$ , определяемая формулой

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = \mathbf{V}_{i,j}^{-1}(t_1, t_2), \quad (\text{П.13})$$

имеет вид

$$\Lambda_{i,j}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \\ \alpha_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) & \alpha_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.14})$$

$$\text{где } \alpha_{1,1}^{(i,j)} = \alpha_{1,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)};$$

$$\alpha_{1,2}^{(i,j)} = \alpha_{1,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \quad (\text{П.15})$$

$$\alpha_{2,1}^{(i,j)} = \alpha_{2,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)};$$

$$\alpha_{2,2}^{(i,j)} = \alpha_{2,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}. \quad (\text{П.16})$$

*П.2. Вычисление частных производных от перемещений, деформаций и напряжений на элементе.*

Частные производные от перемещений по переменным  $t_1$  и  $t_2$  определяются по следующим формулам:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t_p} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) = \Delta_p \bar{u}^{(2,i,j)} + t_{3-p} \Delta_{12} \bar{u}^{(2,i,j)}, \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.18})$$

Формула определения частных производных от перемещений по переменным  $x_1$  и  $x_2$  имеет вид:

$$= \sum_{q=1}^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t_q} \bar{u}^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \alpha_{q,p}^{(i,j)}(t_1, t_2), \quad p = 1, 2. \quad (\text{П.19})$$

Формула для компонентов тензора деформаций на элементе:

$$\varepsilon_{p,q}^{(2,i,j)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x_q} u_p^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) + \left[ \frac{\partial}{\partial x_p} u_q^{(2)} \right]_{(x_1, x_2) \in \omega_{2,i,j}}(t_1, t_2) \right), \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2. \quad (\text{П.20})$$

Формула для объемной деформации:

$$\varepsilon^{(2,i,j)}(t_1, t_2) = \sum_{p=1}^2 \varepsilon_{p,p}^{(2,i,j)}(t_1, t_2). \quad (\text{П.21})$$

Формула для компонентов тензора напряжений на элементе:

$$\sigma_{p,q}^{(2,i,j)}(t_1, t_2) = \delta_{p,q} \bar{\lambda}_{2,i,j} \varepsilon^{(2,i,j)}(t_1, t_2) + 2\bar{\mu}_{2,i,j} \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j)}(t_1, t_2), \quad p = 1, 2; \quad q = 1, 2, \quad (\text{П.22})$$

где  $\delta_{p,q}$  – символ Кронекера,

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \quad (\text{П.23})$$

*П.3. Определение приведенных к узлам значений напряжений и деформаций с учетом осреднения.*

Приведем ниже формулы для определения напряжений и деформаций в узлах дискретно-континуальной модели (ниже всюду  $p = 1, 2$  и  $q = 1, 2$ ).

– внутренние узлы ( $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ ;  
 $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$ )

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,j-1)} (1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i,j-1)} (0,1)\theta_{2,i,j-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i-1,j)} (1,0)\theta_{2,i-1,j} + \sigma_{p,q}^{(2,i,j)} (0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (\text{П.24})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,j)} = \chi_{2,i,j} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j-1)} (1,1)\theta_{2,i-1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j-1)} (0,1)\theta_{2,i,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,j)} (1,0)\theta_{2,i-1,j} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,j)} (0,0)\theta_{2,i,j}); \quad (\text{П.25})$$

– «левая вертикальная граница» ( $i = 1$ ;  $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$ )

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (\sigma_{p,q}^{(2,1,j-1)} (0,1)\theta_{2,1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(2,1,j)} (0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (\text{П.26})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(1,j)} = \chi_{2,1,j} (\varepsilon_{p,q}^{(2,1,j-1)} (0,1)\theta_{2,1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,1,j)} (0,0)\theta_{2,1,j}); \quad (\text{П.27})$$

– «правая вертикальная граница» ( $i = N_1$ ;  $j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$ )

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,j)} = \chi_{2,N_1,j} (\sigma_{p,q}^{(2,N_1-1,j-1)} (1,1)\theta_{2,N_1-1,j-1} + \sigma_{p,q}^{(2,N_1-1,j)} (1,0)\theta_{2,N_1-1,j}); \quad (\text{П.28})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,j)} = \chi_{2,N_1,j} (\varepsilon_{p,q}^{(2,N_1-1,j-1)} (1,1)\theta_{2,N_1-1,j-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,N_1-1,j)} (1,0)\theta_{2,N_1-1,j}); \quad (\text{П.29})$$

– «нижняя горизонтальная граница» ( $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ ;  $j = 1$ )

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,1)} = \chi_{2,i,1} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,1)} (1,0)\theta_{2,i-1,1} + \sigma_{p,q}^{(2,i,1)} (0,0)\theta_{2,i,1}); \quad (\text{П.30})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,1)} = \chi_{2,i,1} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,1)} (1,0)\theta_{2,i-1,1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,1)} (0,0)\theta_{2,i,1}); \quad (\text{П.31})$$

– «верхняя горизонтальная граница» ( $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1$ ;  $j = N_2$ )

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(i,N_2)} = \chi_{2,i,j} (\sigma_{p,q}^{(2,i-1,N_2-1)} (1,1)\theta_{2,i-1,N_2-1} + \sigma_{p,q}^{(2,i,N_2-1)} (0,1)\theta_{2,i,N_2-1}); \quad (\text{П.32})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(i,N_2)} = \chi_{2,i,j} (\varepsilon_{p,q}^{(2,i-1,N_2-1)} (1,1)\theta_{2,i-1,N_2-1} + \varepsilon_{p,q}^{(2,i,N_2-1)} (0,1)\theta_{2,i,N_2-1}); \quad (\text{П.33})$$

– «угловые узлы границы»  
в случае  $i = 1$ ;  $j = 1$  имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(1,1)} = \chi_{2,1,1} \sigma_{p,q}^{(k,1,1)} (0,0)\theta_{2,1,1}; \quad (\text{П.34})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(1,1)} = \chi_{2,1,1} \varepsilon_{p,q}^{(2,1,1)} (0,0)\theta_{2,1,1}; \quad (\text{П.35})$$

в случае  $i = 1$ ;  $j = N_2$  имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(1,N_2)} = \chi_{2,1,N_2} \sigma_{p,q}^{(2,1,N_2-1)} (0,1)\theta_{2,1,N_2-1}; \quad (\text{П.36})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(1,N_2)} = \chi_{2,1,N_2} \varepsilon_{p,q}^{(2,1,N_2-1)} (0,1)\theta_{2,1,N_2-1}; \quad (\text{П.37})$$

в случае  $i = N_1$ ;  $j = 1$  имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,1)} = \chi_{2,N_1,1} \sigma_{p,q}^{(2,N_1-1,1)} (1,0)\theta_{2,N_1-1,1}; \quad (\text{П.38})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,1)} = \chi_{2,N_1,1} \varepsilon_{p,q}^{(2,N_1-1,1)} (1,0)\theta_{2,N_1-1,1}; \quad (\text{П.39})$$

в случае  $i = N_1$ ;  $j = N_2$  имеем:

$$[\sigma_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} \sigma_{p,q}^{(2,N_1-1,N_2-1)} (1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}; \quad (\text{П.40})$$

$$[\varepsilon_{p,q}^{(2)}]^{(N_1,N_2)} = \chi_{2,N_1,N_2} \varepsilon_{p,q}^{(2,N_1-1,N_2-1)} (1,1)\theta_{2,N_1-1,N_2-1}. \quad (\text{П.41})$$

*П.4. Алгоритм формирования матрицы граничных условий типа «идеальный контакт».*

Ниже рассмотрен алгоритм формирования матрицы  $B_2^+$  при задании условий (5.15) описан ниже.

1. Элементы матрицы  $B_2^+$  определяются по формуле

$$(B_2^+)_{p,q} = \delta_{p,q}, \quad p = 1, 2, \dots, 2N_1, \quad q = 1, 2, \dots, 2N_1. \quad (\text{П.42})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы  $B_2^+$  по формуле (П.42) соответствует заданию граничных условий (4.4)-(4.5).

2. Последовательно задаются  $i_g = 1, 2, \dots, N_1$ .

Для каждого фиксированного значения  $i_g$  выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1. Последовательно перебираются  $i = 1, 2, \dots, N_1$ . Для каждого фиксированного значения  $i$  выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1. Последовательно перебираются  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Для каждого фиксированного значения  $j$  выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1. Последовательно перебираются  $q = 1, 2$ . Для каждого фиксированного значения  $q$  выполняются действия, перечисленные ниже.

2.1.1.1.1. Вычисляется глобальный индекс  $j_g$

$$j_g = q + 2(i-1) + 2N_1(j-1); \quad (\text{П.43})$$

2.1.1.1.2. В качестве вектора неизвестных  $\bar{U}_2$  (см. (3.5)) задается

$$\bar{U}_2 = \bar{e}_{j_g}. \quad (\text{П.44})$$

2.1.1.1.1.3. В соответствии со структурой (3.5) вектора неизвестных по соответствующим формулам из числа представленных выше (П.24), (П.26), (П.28), (П.30), (П.32), (П.34), (П.36), (П.38) и (П.40) определяются приведенные к узлу компоненты  $[\sigma_{1,2}^{(2)}]^{(i,j)}$ ,  $[\sigma_{2,2}^{(2)}]^{(i,j)}$  тензора напряжений.

2.1.1.1.1.4. Соответствующие элементы матрицы  $B_2^+$  определяются по формулам

$$(B_2^+)_{2N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{1,2}^{(k)}]^{(i,j)}; \quad (\text{П.45})$$

$$(B_2^+)_{3N_1+i_g, j_g} = [\sigma_{2,2}^{(k)}]^{(i,j)}. \quad (\text{П.46})$$

Заметим, что вычисление элементов матрицы  $B_2^+$  по формулам (П.45)-(П.46) соответствует заданию граничных условий (4.6), (4.7).

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Проект 7.1.7 «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).
2. Проект 7.1.8 «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискрет-

- но-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 33-45.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 18-32.
  4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.
  5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.
  6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.
  7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
  8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.
  9. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 511 с.

10. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области: Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. - 284 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. - М.: АСВ, 2013. - 416 с.
12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. - М.: Издательство "Архитектура-С", 2010. - 336 с.
13. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. - М.: Издательство АСВ, 2010. - 336 с.
14. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. - М.: ФГБОУ ВПО "МГСУ", 2011. - 368 с.
15. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). - М.: Издательство АСВ, 2008. - 336 с.
16. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. - М.: Издательство АСВ, 2009. - 336 с.
17. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
18. **Секулович М.** Метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1993. - 664 с.
19. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // Известия ВУЗов. Строительство, №10, 2004, с. 8-14.
20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
21. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, Vol. 91 (2014), pp. 2-7.
22. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 89-94.
23. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 95-103.
24. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, Vol. 91 (2014), pp.14-19.

25. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
- 

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА КУПОЛЬНОЙ ЧАСТИ ЗАЩИТНОЙ ОБОЛОЧКИ АТОМНОГО РЕАКТОРА ВВЭР – 1000 НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*П.И. Андреева, М.И. Андреев, О.В. Мкртычев, О.А. Ковальчук,  
Г.Э. Шаблинский*

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Статья посвящена изучению влияния геометрического дефекта купольной части защитной оболочки АЭС, выявленного в ходе проведения натурных исследований, на ее динамические характеристики. Приведены результаты расчета купольной части защитной оболочки с геометрическим дефектом и результаты натурных исследований. Результаты экспериментальных исследований защитных оболочек АЭС хорошо согласуются с результатами, полученными при расчете купольной части защитной оболочки в программном комплексе Ansys. Проведен статистический анализ собственных частот, полученных при натурных исследованиях купольных покрытий защитной оболочки.

**Ключевые слова:** атомные электростанции, собственные колебания, частота собственных колебаний, динамические характеристики, защитная оболочка, форма колебаний

## INFLUENCE OF GEOMETRIC DEFECTS OF THE DOME OF THE NUCLEAR REACTOR CONTAINMENT VVER - 1000 ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS IN VIEW OF STATISTICAL ANALYSIS.

*Peraskovya I. Andreeva, Mikhail I. Andreev, Oleg V. Mkrtychev,  
Oleg A. Kovalchuk, Georgy E. Shablinsky*

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The article is dedicated to the research on the influence of geometrical defect of the dome of the nuclear power plant containment on its dynamic characteristics, identified during the field research. The results of the calculation of the dome of the containment with geometric defect and the results of field research are presented. The results of experimental research of NPP containments are in good agreement with the results obtained during the calculation of the dome of the containment in the Ansys software package. The statistical analysis of natural frequencies obtained from field research of the dome coating of the containment.

**Key words:** nuclear power plants, natural oscillations, natural oscillation frequency, dynamic characteristics, shielding, vibration mode shapes

Защитные оболочки являются наиболее ответственными объектами среди конструкций АЭС с водо-водяными энергетическими реакторами (ВВЭР-1000). Защитная оболочка

должна быть герметичной, и оставаться герметичной при аварийных ситуациях и, кроме того, должна обеспечивать достаточную прочность при внешних воздействиях,

например, при землетрясениях, падении самолета, случайных взрывах и пр. Защитная оболочка реактора ВВЭР – 1000 представляет собой конструкцию из преднапряженного железобетона, которая состоит из цилиндрической части, внешний диаметр которого 47,4 м с толщиной стенки 1,2 м, перекрытой купольным покрытием толщиной 1,1 м, связанным с цилиндрической частью горизонтальным кольцевым уширением. Условия натурального эксперимента позволяли определять только низшую частоту собственных колебаний оболочки как жесткого тела на упругом основании и низшую частоту собственных колебаний купольной части оболочки.

В настоящей работе представлены результаты экспериментальных данных и расчетов отдельно купольных покрытий оболочки, при обследовании которых в одном из куполов было обнаружено наличие дефекта. Всего на протяжении нескольких лет прошли исследования 10 защитных оболочек на четырех АЭС (Ростовская, Нововоронежская, Балаковская, Калининская АЭС). В ходе проведения экспериментов в разное время использовались: цифровые сейсмометры фирмы Guralp; виброметры СМ-3м (модернизированные) с аналогово-цифровым преобразователем; 3-хкомпонентный сейсμοприемник SP-400. Данными устройствами регистрировались фоновые колебания, вызванные работой различного типа оборудования на станции (насосы, турбогенераторы и др.).

Записи экспериментов обрабатывались с использованием модуля послесейсмической обработки данных ACSTest©-Analyzer, который используется для просмотра, графического анализа и математической обработки результатов проведенных измерений. Полученные результаты измерений, обработанные в программе, можно представить в виде: 1) энергетических спектров, из которых можно определить собственные частоты колебаний зданий, 2) фрагментов записей колебаний (смещения, скорости).

2 пика на энергетическом спектре рис. 1 являются очень характерными. Пик на частоте 16,7 Гц определяется вибрациями, создаваемыми главным центробежным насосом (ГЦН), а пик на частоте 17,6 Гц определяется низшей (первой) собственной частотой купольного покрытия. Такое же разделение частот зафиксировано и на спектрах фоновых колебаний. Т.е. вибрации от ГЦН вследствие близости частот вызывают собственные колебания купольного покрытия.

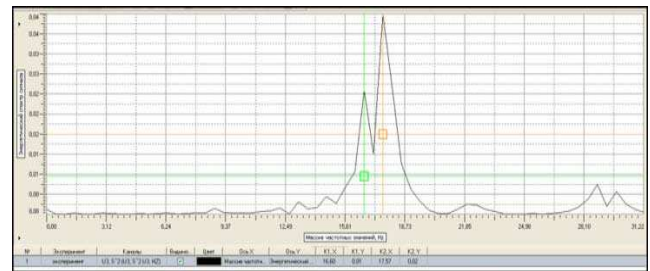


Рис. 1. Энергетический спектр колебаний купольного покрытия

При проведении эксперимента получены следующие собственные частоты купольных покрытий защитных оболочек (таблица 1):

Таблица 1. Значение собственной частоты купольных покрытий защитных оболочек.

Наименование объекта	Первая собств. частота купола, Гц
Нововоронежская АЭС – Оболочка №1	17,6
Ростовская АЭС – Оболочка №2	17,0
Ростовская АЭС – Оболочка №3	17,6
Балаковская АЭС – Оболочка №4	19,5
Балаковская АЭС – Оболочка №5	<b>13,3</b>
Балаковская АЭС – Оболочка №6	18,0
Балаковская АЭС – Оболочка №7	19,5
Калининская АЭС – Оболочка №8	18,3
Калининская АЭС – Оболочка №9	18,7
Калининская АЭС – Оболочка №10	18,5

Как видно из таблицы 1, значение собственной частоты купольных покрытий защитных

оболочек находится в пределах 17,0 - 19,5 Гц. Исключением является купольное покрытие защитной оболочки Балаковской АЭС, где собственная частота купола получилась равной 13,3 Гц. При осмотре данного купола был замечен геометрический дефект, который заключался в том, что примерно одна четвертая часть площади покрытия имела не купольную форму, а плоскую.

Было интересно провести статистический анализ собственных частот, полученных при натурных исследованиях купольных покрытий защитной оболочки, чтобы определить границы интервала, в которых находится генеральная средняя и проверить, попадет ли расчетная частота купола в эти границы интервала. Для определения границ интервала генеральной средней воспользуемся понятием «малой выборки».

наблюдений, т.е. при  $n$  меньше 20, формулы для большой (обычной) выборки, основанные на нормальном распределении вероятностей, дают значительные неточности. Оценка результатов малой выборки производится путем «исправления» выборочного среднего квадратического отклонения и использования закона распределения вероятностей Стьюдента [3].

Найдем стохастическую дисперсию случайной величины от её математического ожидания:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= X_{\text{ср.кв.}} - X_{\text{ср}}^2 = \frac{\sum f^2}{n} - f_{\text{ср}}^2 = \\ &= \frac{3019,85}{9} - 18,32^2 = \\ &= 335,54 - 334,89 = 0,65; \\ \sigma &= \sqrt{0,65} = 0,81; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{м.в.}} &= \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 0,81 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \\ &= 0,81 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = 0,81 \cdot 1,06 = 0,86; \end{aligned}$$

Вычисляем среднюю ошибку малой выборки:

$$\mu_{\text{м.в.}} = \frac{\sigma_{\text{м.в.}}}{\sqrt{n}} = \frac{0,86}{\sqrt{9}} = 0,29;$$

Примем вероятность события  $P = 0,95$ .

$$\begin{aligned} P &= 0,95; \mu_{\text{м.в.}} = 0,29; \\ 2S(t_{\phi}) - 1 &= 0,95; \\ 2S(t_{\phi}) &= 1,95; \\ S(t_{\phi}) &= 0,975; \end{aligned}$$

По таблице Стьюдента [3, с.345] получаем:

$$\begin{aligned} t_{\phi} &= 2,3; \\ f &= f_{\text{ср}} \pm t_{\phi} \cdot \mu_{\text{м.в.}} = 18,3 \pm 2,3 \cdot 0,29 = \\ &= 18,3 \pm 0,667. \end{aligned}$$

В результате получили, что генеральное среднее значение частоты купола защитной оболочки при статистическом расчете по ма-

Таблица 2.

Наименование объекта	f (Гц)	f <sup>2</sup>
Нововоронежская АЭС- Оболочка №1	17,6	309,76
Ростовская АЭС - Оболочка №2	17,0	289,00
Ростовская АЭС - Оболочка №3	17,6	309,76
Балаковская АЭС - Оболочка №4	19,5	380,25
Балаковская АЭС - Оболочка №6	18,0	324,00
Балаковская АЭС - Оболочка №7	19,5	380,25
Калининская АЭС - Оболочка №8	18,3	334,89
Калининская АЭС - Оболочка №9	18,7	349,69
Калининская АЭС - Оболочка №10	18,5	342,25
	f <sub>ср</sub> = 18,3	∑ f <sup>2</sup> = 3019,85

При необходимости оценки генеральной средней по результатам малого числа

лой выборке находится в диапазоне от 17,63 Гц до 18,97 Гц.

Геометрическое искажение купола оболочки показано на рисунке 2.

В случае такого геометрического дефекта часть купола перестает работать только на сжатие - исчезает арочный эффект и жесткость покрытия снижается. Для того, чтобы выяснить какое влияние оказывает обнаруженный геометрический дефект на уменьшение собственной частоты, в ПК Ansys была построена расчетная модель данного купольного покрытия.

Моделировались две модели купольной части оболочки реактора: 1) с дефектом, путем замены  $\frac{1}{4}$  части купола плоскостью; 2) без дефекта (по проекту). Модель была построена в трехмерной постановке. Расчет собственных частот проводился с учетом параметров класса бетона В50 (начальный модуль упругости  $E_b=39 \times 10^3 \text{ МПа}$ ).

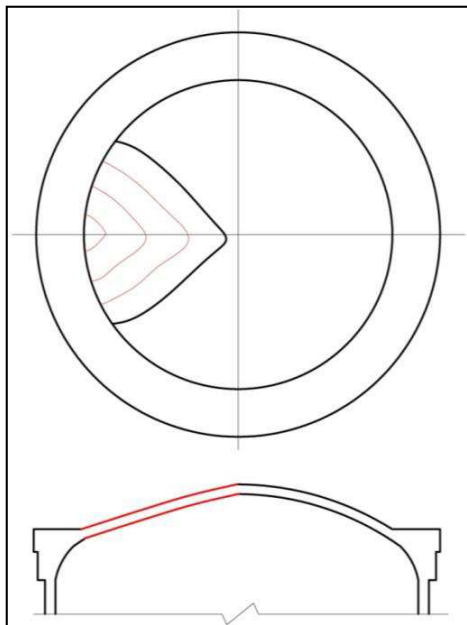


Рис. 2. Геометрический дефект купольного покрытия оболочки реактора 2-го энергоблока Балаковской АЭС.

В результате расчета получили собственные частоты колебаний купольной части оболочки, по пять из которых с соответствующими

им формами колебаний представлены ниже на рис. 3.1-3.6 а) без дефекта, б) с дефектом.

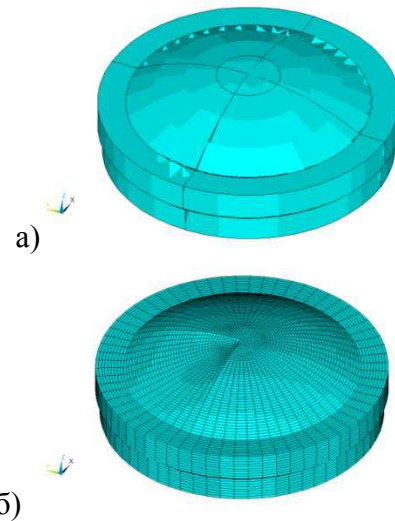
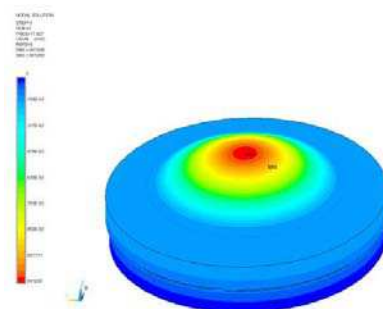
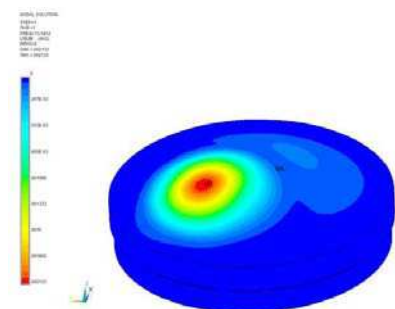


Рис. 3.1. Расчетная схема купольной части.

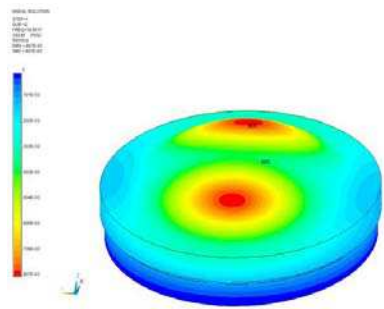


а) 1-я форма колебаний (17,8 Гц).

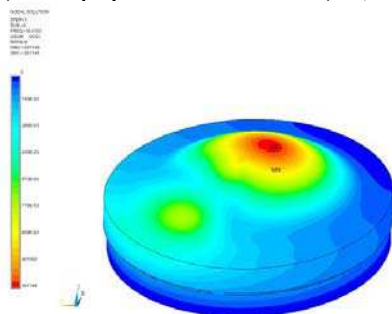


б) 1-я форма колебаний (13,5 Гц).

Рис. 3.2 – 1-я форма колебаний и собственная частота купольной части.

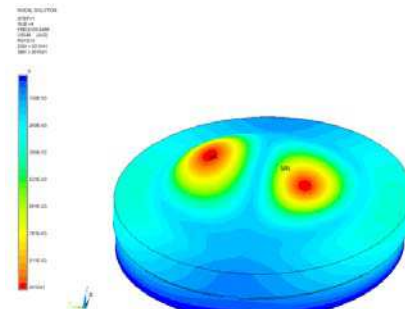


а) 2-я форма колебаний (18,9 Гц).

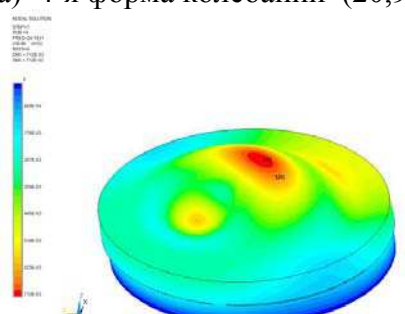


б) 2-я форма колебаний (18,4 Гц).

Рис. 3.3. 2-я форма колебаний и собственная частота купольной части.

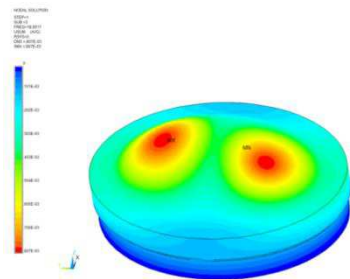


а) 4-я форма колебаний (20,9 Гц).

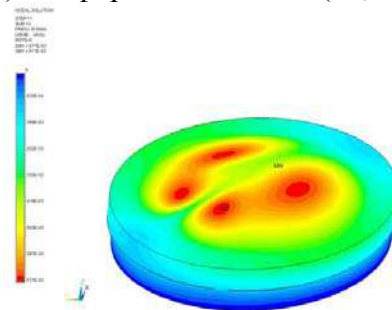


б) 4-я форма колебаний (20,2 Гц).

Рис. 3.5. 4-я форма колебаний и собственная частота купольной части.

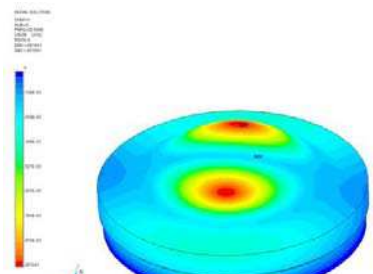


а) 3-я форма колебаний (18,9 Гц).

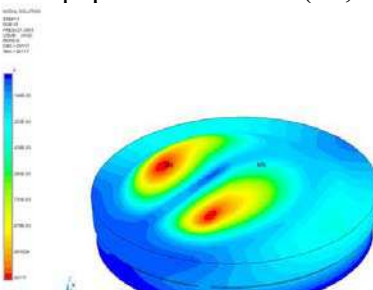


б) 3-я форма колебаний (18,9 Гц).

Рис. 3.4. 3-я форма колебаний и собственная частота купольной части.



а) 5-я форма колебаний (20,9 Гц).



б) 5-я форма колебаний (21,3 Гц).

Рис. 3.6. 5-я форма колебаний и собственная частота купольной части.

Таблица 3. Частоты собственных колебаний купола.

№ п/п	Частота купола (расчетная), Гц		1-я частота купола в натуре (экспериментальная), Гц
	по проекту	с дефектом	
1.	17,83	13,54	17,60– 19,50 (13,30- купол с дефектом)
2.	18,95	18,41	–
3.	18,95	18,95	–
4.	20,95	20,18	–
5.	20,95	21,30	–

**Выводы.**

1. Результаты расчета 1-ой частоты купола без дефекта попадают в диапазон генеральной средней значения частоты, определенной по правилу малой выборки.

2. 1-я расчетная частота купольной части защитной оболочки №5 с дефектом существенно отличается от 1-й частоты, полученной при расчете купола без дефекта. В ходе экспериментальных исследований купола с дефектом была получена частота 13,3 Гц, что соответствует полученным расчетным значениям. Значения остальных же частот практически одинаковы.

Таким образом, при помощи расчета подтвердили, что такое большое снижение собственной частоты защитной оболочки №5 Балаковской АЭС объясняется наличием геометрического дефекта купола. В этом случае оболочка не выполняет своей защитной функции, о чем и было сообщено дирекции АЭС.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Андреева П.И., Ковальчук О.А.** Сравнительный анализ результатов экспериментальных натуральных динамических исследований и расчета динамических характеристик высотного жилого здания //

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2012. – Volume 8, Issue 4. – С.13-18.

2. **Андреева П.И., Завалишин С.И., Шаблинский Г.Э.** Исследование динамических характеристик защитных оболочек АЭС на физических и математических моделях и в натуральных условиях // Вестник МГСУ. – 2013. – № 11. – С. 114-122.

3. **Венецкий И.Г., Кильдишев Г.С.** Основы теории вероятностей и математической статистики. – М.: изд-во «Статистика», 1968.– 360 стр.

4. **Зубков Д.А., Сергеевцев Е.Ю., Румянцев А.А.** Изучение микроколебаний защитной оболочки реактора ВВЭР – 1000 // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2011. – №2. – С.25-29

5. **Зубков Д.А., Сергеевцев Е.Ю., Кошелева Е.Л.** Натурные исследования собственных колебаний гибких покрытий специальных зданий // Вестник МГСУ.– 2011. – №4. – С. 229-237

6. **Кириллов А.П., Саргсян А.Е.** Динамика и сейсмостойкость АЭС с учетом податливости основания. – М.: Информэнерго, 1988. – 86 с.

7. **Ковальчук О.А., Андреева П.И.** О динамических характеристиках защитных оболочек реакторного отделения АЭС // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – № 10. – С. 78-79.

8. **Ковальчук О.А., Зубков Д.А., Дашевский М.А.** Расчетные и экспериментальные исследования воздействия физических факторов производственной среды на жилые здания повышенной этажности // В сборнике: Железобетонные конструкции зданий большой этажности сборник научных трудов, посвященный 90-летию со дня рождения профессора, доктора технических наук П.Ф. Дроздова. Москва.– 2004. - С. 56-60.

9. **Шаблинский Г.Э., Джинчвелашвили Г.А., Зубков Д.А.** Сейсмостойкость строительных конструкций атомных

- электростанций, монография — М.: АСВ, 2010. – 216 стр.
10. **Шаблинский Г.Э., Зубков Д.А.** Натурные и модельные исследования динамических явлений в строительных конструкциях энергетических и гражданских объектов. – М.: МГСУ, 2012. – 483 с.
  11. **Clough R, Penzien J.** Dynamics of Structures. Berkeley, CA 94704 USA: Computers & Structures. – 1995. – 730 p.
  12. **Jeong S.-H., Mwafy A.M., Elnashai A.S.** Probabilistic seismic performance assessment of code-compliant multi-story RC buildings engineering structures // Engineering Structures. – 2012. – Volume 34. – P. 527-537
  13. **Liela A., Haseltonb C., Deierleinc G.** Incorporating modeling uncertainties in the assessment of seismic collapse risk of buildings, Stanford University, CA 94305, USA. – 2009. – P.134.
  14. **Michael N. Fardis** Seismic Design, Assessment and Retrofitting of Concrete Building. – 2009. – P.25-33.
  15. **Shablinsky G., Zoubkov D., Isaikin A.** Frequency Response Analysis of NPP Containment with WWER – 1000 Type Reactor // 18 international Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT 18), Beijing, China. – 2005. – P.83-88.
- 
- Андреева Перасковья Ивановна, аспирант кафедры Сопротивления материалов ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; e-mail: p.andreeva\_90@mail.ru
- Андреев Михаил Иванович, студент Института фундаментального образования ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; e-mail: misha-andreev\_93@mail.ru
- Мкртычев Олег Варганович, доктор технических наук, профессор кафедры Сопротивления материалов
- ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; e-mail: mkrtychev@yandex.ru
- Ковальчук Олег Александрович, кандидат технических наук, профессор кафедры Теоретической механики и аэродинамики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; e-mail: oko44@mail.ru
- Шаблинский Георгий Эдуардович, доктор технических наук, профессор, старший научный сотрудник научно-исследовательского института экспериментальной механики (НИИЭМ) ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26; e-mail: gshablin@gmail.com
- Andreeva Peraskovya Ivanovna, postgraduate student, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavlshoe Shosse, 26; e-mail: p.andreeva\_90@mail.ru
- Andreev Mikhail Ivanovich, student Institute of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavlshoe Shosse, 26; e-mail: misha-andreev\_93@mail.ru
- Mkrtychev Oleg Vartanovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavlshoe Shosse, 26; e-mail: mkrtychev@yandex.ru
- Kovalchuk Oleg Aleksandrovich, Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of Theoretical Mechanics and Aerodynamics, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavlshoe Shosse, 26; e-mail: oko44@mail.ru
- Shablinskiy Georgiy Eduardovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Senior researcher at the Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavlshoe Shosse, 26; e-mail: gshablin@gmail.com

# СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КАМЕННОЙ КЛАДКИ В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

*О.В. Кабанцев*

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Выполнен структурный анализ формирования и эволюции процессов структурных микро-разрушений с переходом к макроразрушению, происходящих при пластическом деформировании кладки в условиях двухосного напряженного состояния. Установлены зависимости, определяющие величину пластической фазы деформирования кладки. Выявлены процессы и соответствующие им критерии прочности, играющие ключевую роль в реализации пластической фазы деформирования. Показано, что пластическое деформирование каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния происходит при физически линейной работе базовых материалов кладки (кирпич и раствор). Установлено, что пластические свойства каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния определяются процессами, происходящими в узлах контактного взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальных и вертикальных швах. По результатам численных исследований определены значения коэффициентов пластичности каменной кладки при различных вариантах механических характеристик кирпича, раствора и адгезионной прочности их взаимодействия.

**Ключевые слова:** моделирование, численные методы, расчетная модель, напряженно-деформированное состояние, каменная кладка, кирпич, раствор

## STRUCTURAL ANALYSIS OF PLASTIC DEFORMATION AND FRACTURE PROCESSES MASONRY UNDER BIAXIAL STRESSES

*Oleg V. Kabantsev*

<sup>1</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** Structural analysis of creation and evolution of the micro-fracture processes with the transition to the macro-fracture processes occurring under the plastic deformation of masonry under biaxial stresses has been performed. Dependencies determining the value of the plastic phase of masonry deformation have been derived. Processes and corresponded strength criteria, which play a key role in the implementation of plastic deformation phase, have been detected. It has been shown that the plastic deformation of masonry under biaxial stresses occurs by the physical linear behavior of the basic materials (brick and mortar). It has been also substantiated that the plastic properties of masonry under biaxial stresses are determined by the processes occurring at the contact interaction nodes between brick and mortar in bed and cross joints. Values of the plasticity coefficients for masonry depending on mechanical properties of a brick, a mortar and adhesive strength in their interaction have been obtained based on the results of performed numerical investigations.

**Keywords:** masonry, brick, mortar, modelling, numerical methods, calculation model, strain-stress state.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Каменная кладка как конструкционный материал преимущественно рассматривается как континуальная среда с обобщенными («эффективными») механическими характеристиками. Концепция континуализации каменной кладки лежит в основе действующих норм по проектированию каменных конструкций и позволяет получить достоверный прогноз как несущей способности, так и деформирования для условий действия нагрузок основного сочетания. При действии особого сочетания нагрузок (например, при сейсмических или деформационных воздействиях вследствие осадок/просадок основания) формируется, как правило, двухосное напряженное состояние каменных конструкций, при котором континуальная модель каменной кладки позволяет получить лишь прогноз несущей способности. Корректный прогноз деформирования (с учетом наличия пластической фазы) каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния на основе континуальных моделей невозможно получить в принципе: как показано в [1], пластическая фаза деформирования представляет собой процесс формирования и накопления локальных разрушений, что порождает неопределенность, связанную с разрывом функционала, который в концепции континуального моделирования может быть только непрерывным.

Исследованиями кладки (например, в работах Г.А. Гениева [2] и Г.А. Тюпина [3]) показано, что уровень несущей способности каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния определяется исключительно величиной нормального сцепления, т.е. адгезионной прочностью взаимодействия кирпича и раствора. Однако, на современном этапе отсутствуют какие-либо данные о влиянии этого важнейшего параметра на характеристики пластичности каменной кладки и процессы, происходящие в рамках пластической фазы деформирования,

которые и определяют уровень пластических свойств.

В работах [4, 5] предложен и обоснован принцип рассмотрения каменной кладки в виде кусочно-однородной разномодульной композитной среды (материала). Композитные материалы имеют ряд значимых особенностей как в механике упруго-пластического деформирования, так и в механизмах их разрушения. В исследованиях [6, 7, 8] показано, что величина адгезионной прочности, реализующаяся в узлах взаимодействия базовых материалов композита, определяет процесс пластической фазы деформирования таких композитов. Таким образом, изучение процессов, происходящих в каменной кладке в рамках пластической фазы деформирования, установление зависимостей, определяющих величину пластической фазы, а также иных значимых факторов, влияющих на пластику и разрушение кладки как композитного материала, представляет собой несомненный интерес.

Выполнение исследований процесса упруго-пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния обеспечено наличием разработанной, обоснованной и верифицированной математической модели кладки (см. работы [9, 10]), а также включенной в сертифицированный расчетный комплекс SCAD [11] расчетной конечноэлементной технологией, позволяющей выполнять многоэтапный расчетный анализ моделей с изменяющейся расчетной схемой.

Результаты исследований пластической фазы деформирования позволяют получить научно обоснованные данные для оценки сейсмостойкости каменных зданий, так как сейсмическая реакция сооружения (т.е. сейсмическая нагрузка) является функцией пластичности материала (конструкции), которая опосредовано отражена в действующих нормативных документах по сейсмостойкому строительству в виде коэффициента допускаемых напряжений  $K_l$ . Значения коэффициента  $K_l$  для несущих конструкций из камен-

ной кладки, принятые в отечественных нормах различных лет, увеличились в течение 30 лет на 60%, что свидетельствует о недостаточной научной обоснованности величины этого параметра, который устанавливался по результатам отдельных физических экспериментов, либо на основе анализа последствий землетрясений.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Общепринятый подход к прогнозу деформирования конструкционного материала, включая пластическую фазу, основан на использовании концепции физической нелинейности, что обеспечивается наличием принятой зависимости «напряжения-деформации» для рассматриваемого материала. Использование принципа физической нелинейности позволяет получить вполне достоверные результаты для многих видов конструкционных материалов, которые, как правило, являются изотропными. Концепция физической нелинейности стоит на некотором объеме эмпирических данных о поведении материала под нагрузкой. Такие данные могут быть получены, в том числе, и в физических экспериментах – например, испытания бетонных призм осевой нагрузкой. Однако, использование принципов физической нелинейности не позволяет получить объяснение явления пластического деформирования с необходимыми обоснованиями.

Каменная кладка, состоящая из разнородных базовых материалов (кирпич и раствор), обладающих существенно различными механическими свойствами, не может быть отнесена к классу изотропных сред. В процессах деформирования каменной кладки при двухосном напряженном состоянии важнейшую роль играют явления, реализующиеся в узле контакта базовых материалов, при этом механические свойства такого узла являются независимыми от характеристик базовых материалов [12].

Рядом исследователей (см., например, [13]) установлено, что нелинейный характер функции «напряжения-деформации» имеет место в случае физически линейной работы базовых материалов композита и определяется сложным процессом микроразрушений в узлах контакта основных материалов композита. Исследование процесса возникновения и эволюции таких локальных разрушений различного генезиса позволяет установить наиболее значимые механизмы, определяющие формирование макроразрушения с переходом к полному разрушению образца (конструкции).

Отслеживание явления формирования локальных разрушений в контактных зонах базовых материалов принципиально невозможно выполнить в рамках идеи физической нелинейности: локальное разрушение (в теории механики сплошной среды [14, 15]) приводит к разрыву концептуально непрерывной функции «напряжения-деформации».

Метод прогнозирования свойств каменной кладки должен учитывать особенности строения этого материала, включая как характеристики базовых материалов, так и характеристики состояния узлов их взаимодействия. Используя дискретную математическую модель каменной кладки (см. [9, 10]) представляется возможным установить состояние каждого структурного элемента такой модели, в том числе (что особенно важно!) узла контакта базовых материалов. Необходимость анализа состояния структурных элементов дискретной модели определяется неоднородностью поля напряжений вследствие наличия в составе композита разномодульных кусочно-однородных фрагментов. Исследование изменяющегося состояния структурных элементов под возрастающей нагрузкой представляет собой процедуру структурного анализа, результаты которого демонстрируют эволюцию процессов микро- и макроразрушения, что (в итоге) позволяет установить обобщенную зависимость «напряжения-деформации» при любых значениях механических характеристик матери-

ала, а также виды механизмов разрушения, определяющие величину пластической фазы деформирования.

Численные исследования каменной кладки проведены на единой методической основе, изложенной в [10]). Выполнен расчетный анализ моделей (схема модели представлена на рис. 1), механические характеристики которых соответствуют наиболее часто используемым маркам базовых материалов (кирпич М50, М100, М150 и раствор М50, М100) и значениям нормального сцепления (адгезионной прочности). Для исследований приняты следующие уровни адгезионной прочности: 0,12 Мпа и 0,18 Мпа (как уровни, требуемые нормами сейсмостойкого строительства), а также 0,08 Мпа и 0,04 Мпа (как уровни, фиксируемые натурными обследованиями).

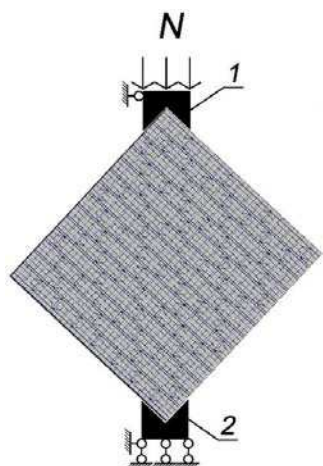


Рис. 1. Общий вид конечноэлементной модели образца из каменной кладки и граничные условия в расчетной области. 1 – нагрузочное устройство (абсолютно твердое тело); 2 – опорное устройство (абсолютно твердое тело).

Принцип дискретного моделирования каменной кладки, разработанный в [9], а также система критериев прочности, предложенная для анализа работы кладки в условиях двухосного напряженного состояния (см. работы [4, 5, 9, 10]), позволяют выполнить детальный анализ структуры процессов пластиче-

ской фазы деформирования: формирования и накопления локальных микроразрушений, слияния микроразрушения в макроразрушение с переходом к разрушению кладки. Структурный анализ позволяет установить характер влияния различных механизмов разрушения, происходящих в различных группах элементов модели по разным критериям прочности, на характер и объем пластической фазы деформирования с переходом к разрушению.

Анализ прочности различных структурных групп конечных элементов моделей выполнен на основе следующих типов критериев прочности (детали – см. работы [9, 10]):

1. Кирпич – критерий прочности материала для условий двухосного напряженного состояния (критерий (3) в работе [10]).
2. Раствор – критерий прочности материала для условий двухосного напряженного состояния (критерий (3) в работе [10]).
3. Адгезионный слой в горизонтальном растворном шве – критерий «отрыв» и «срез» при действии растягивающих напряжений ( $N \geq 0$ ), перпендикулярных плоскости шва.
4. Адгезионный слой в горизонтальном растворном шве – критерий «срез» при действии сжимающих напряжений ( $N < 0$ ), перпендикулярных плоскости шва.
5. Вертикальный растворный шов – критерий «отрыв» при действии растягивающих напряжений ( $N \geq 0$ ), перпендикулярных плоскости шва.
6. Вертикальный растворный шов – критерий «срез» при действии сжимающих напряжений ( $N < 0$ ), перпендикулярных плоскости шва.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

По результатам выполненных исследований построены графики деформирования образцов под возрастающей нагрузкой до момента разрушения (см. рисунок 2).

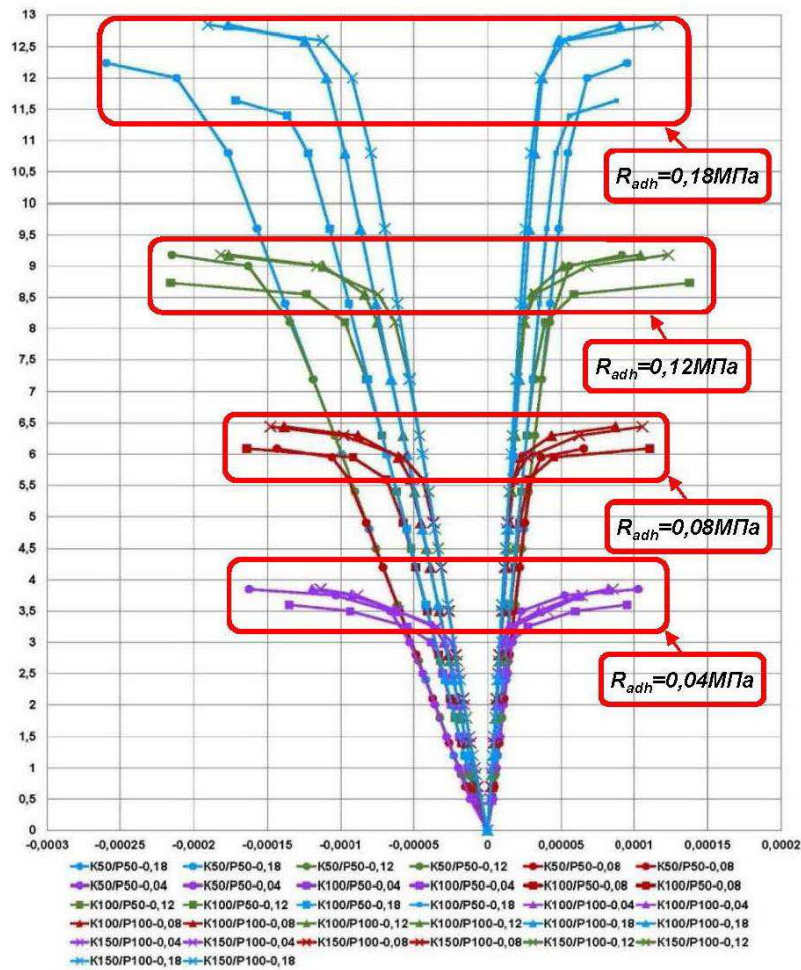


Рис. 2. Графики «нагрузка – деформации» при различных величинах адгезионной прочности, прочности кирпича и раствора (по вертикальной оси – нагрузка в тоннах, по горизонтальной оси – относительные деформации  $\epsilon$ ).

Результаты численного эксперимента позволяют сделать вывод о том, что уровень несущей способности каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния определяется исключительно величиной адгезионной прочности  $R_{adh}$  (нормального сцепления), реализованного в узле контакта кирпича и раствора.

Прочность базовых материалов каменной кладки (кирпич и раствор) не играют значимую роль в формировании уровня несущей способности. При одинаковом уровне адгезионной прочности отклонения величины несущей способности, связанные с различной величиной прочности базовых материалов кладки (кирпича и раствора), не превышают 5-8%.

Результаты численного эксперимента в части, касающейся уровня несущей способности каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния, полностью соответствуют теории прочности каменной кладки как гомогенного материала Г.А. Гениева, Г.А. Тюпина [2, 3], что подтверждает также корректность разработанной структурной (дискретной) математической модели.

Полученные зависимости «нагрузка – деформации» при различных механических характеристиках кирпича и раствора показывают, что в величине общей деформации образцов имеется некоторый объем пластической фазы, что вполне согласуется с данными физических экспериментов (см. работы [1, 16]).

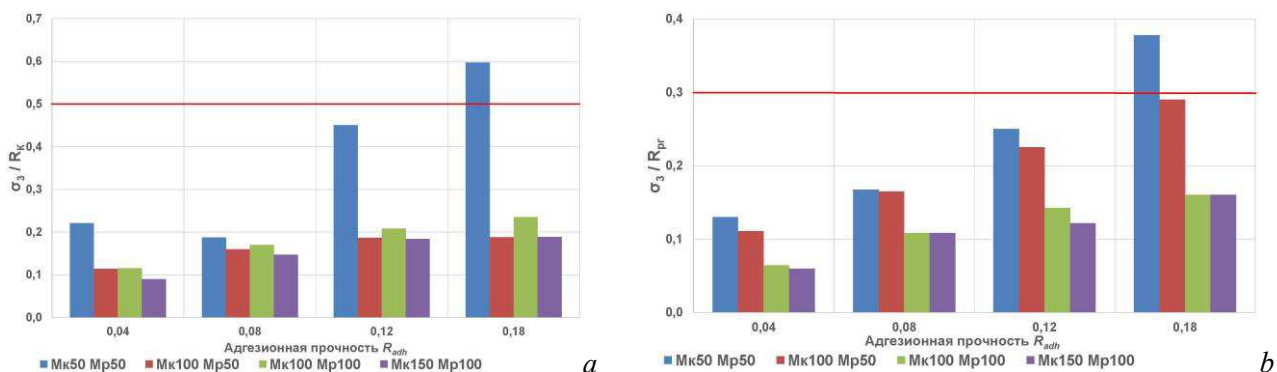


Рис. 3. Значения максимальных напряжений сжатия в КЭ структурной группы, аппроксимирующей кирпич (а) и раствор (b), при различных механических характеристиках элементов моделей.

Анализ напряжений во всех элементах расчетных моделей, принадлежащих различным структурным группам (см. рис. 3), позволяет сделать вывод о том, что во всех группах элементов модели, аппроксимирующих базовые материалы (кирпич и раствор), уровень напряжений не превосходит предел ( $\sigma/R$ ), после которого базовые материалы могут переходить в пластическую стадию деформирования - для кирпича  $\sigma/R \geq 0.5$  [17], для раствора  $\sigma/R \geq 0.3$  [17, 18].

В одной из моделей (кирпич М50, раствор М50,  $R_{adh}=0,18$  Мпа) в КЭ зафиксировано превышение порогового уровня. Однако, экстремальные напряжения зафиксированы только в трех КЭ, аппроксимирующих кирпич, и в пяти КЭ, аппроксимирующих раствор, что составляет сотые и тысячные доли процентов от общего числа КЭ соответствующей структурной группы. Очевидно, что понижение жесткости в столь малом числе элементов структурной группы не может влиять существенным образом на характер деформирования модели.

Таким образом, численные исследования позволили установить факт формирования пластической фазы деформирования кладки в целом при работе базовых материалов (кирпич и раствор) в рамках физической ли-

нейности вплоть до момента разрушения, который происходит при действии главных напряжений разных знаков. Следовательно, пластические свойства каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния определяются процессами, происходящими в узлах контактного взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальных и вертикальных швах.

Численные исследования позволяют детально рассмотреть состояние всех элементов расчетных моделей, включая элементы, аппроксимирующие взаимодействие базовых материалов в узлах их контакта, при любом уровне нагрузок. Анализ состояния элементов модели при возрастающей нагрузке, выполненный на основе системы критериев прочности, представляет возможность установить динамику формирования и накопления «разрушенных» КЭ, аппроксимирующих различные группы структурных элементов кладки. По результатам исследований разработаны обобщающие графики, характеризующие процессы эволюции локальных разрушений, для всех рассмотренных моделей. Примеры таких графиков для наиболее часто используемых материалов – кирпич М100 на растворе М100) представлены на рис. 4.

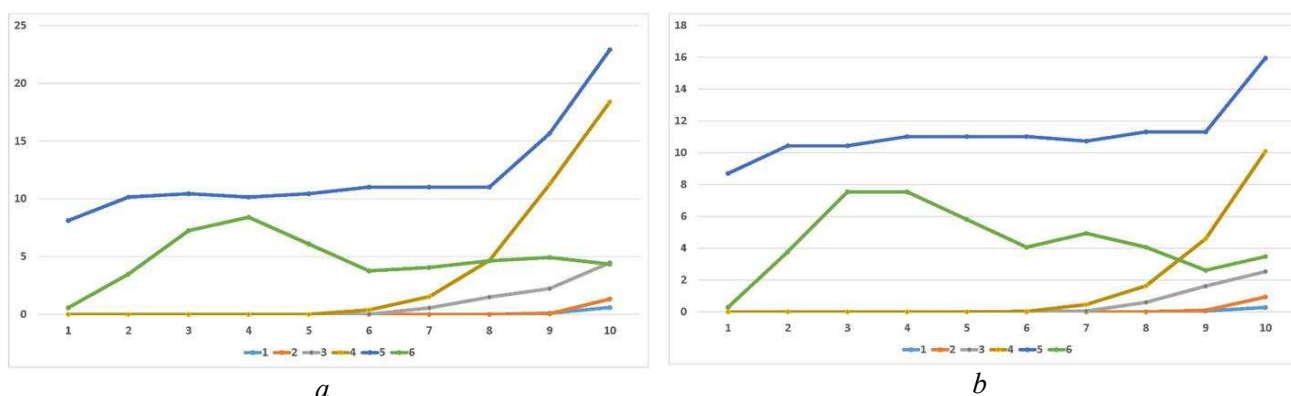


Рис. 4. Графики накопления повреждений в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 при различном уровне адгезионной прочности: а –  $R_{adh}=1,2$  МПа, б –  $R_{adh}=1,8$  МПа (1 ÷ 6 – типы критериев прочности; по вертикальной оси – объем разрушенных элементов структурной группы в %, по горизонтальной оси - этапы нагружения образца).

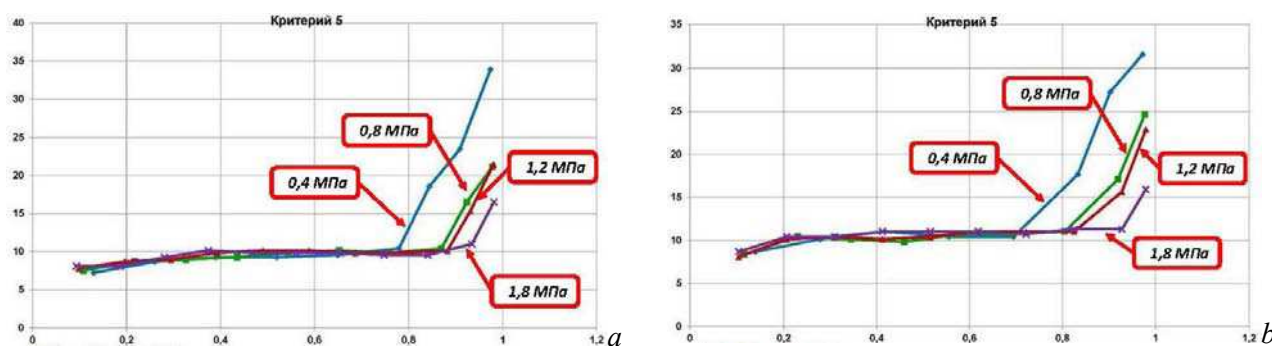


Рис. 5. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 5 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (б); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

Выполненные численные исследования показывают, что «разрушения» по разным видам критериев прочности формируются на разных этапах нагружения модели и имеют ряд особенностей. Так, на самых первых этапах формируются «разрушения» в зонах контакта кирпича и раствора в вертикальных растворных швах, второй этап «разрушений» формируется в узлах контакта кирпича и раствора в горизонтальных швах и третий этап «разрушений» формируется в структурных группах КЭ, аппроксимирующих базовые материалы кладки – кирпич и раствор.

**Первый этап «разрушений»** фиксируется на начальном этапе нагружения – в условиях

отсутствия адгезионного взаимодействия базовых материалов в вертикальном шве при минимальных величинах растягивающих напряжений формируются «разрушения» в зонах контакта кирпича и раствора, т.е. формируется трещина, о чем свидетельствует некоторое число «разрушенных» элементов по этому критерию прочности на первом этапе нагружения образца (см. рис. 5, 6).

На рис. 7 представлены обобщающие зависимости (для финальной стадии нагружения моделей) объема «разрушенных» элементов модели зоны контакта кирпича и раствора в вертикальном шве по критериям тип 5 и тип 6 от уровня адгезионной прочности.

Структурный анализ процесса пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния

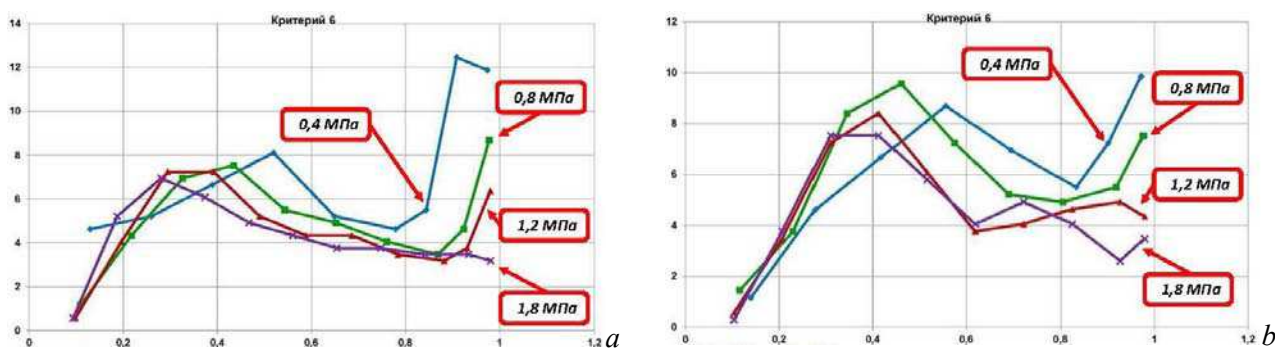


Рис. 6. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 6 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (б); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %%, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

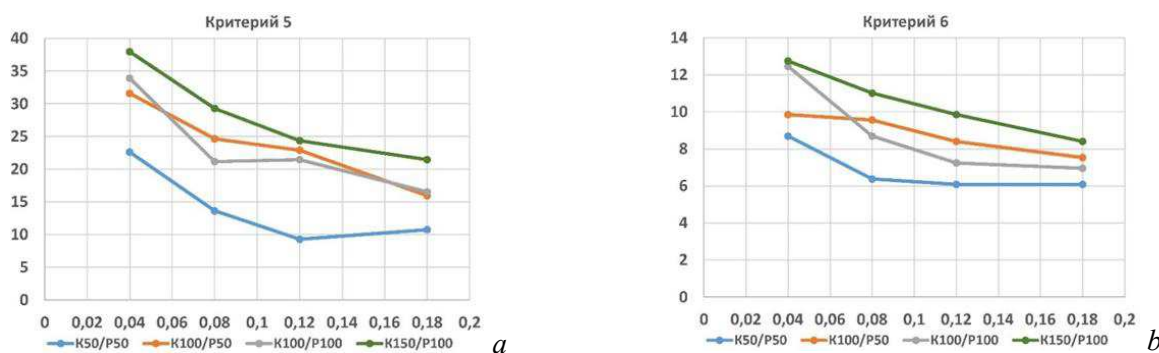


Рис. 7. Графики объема повреждений в структурных элементах моделей по критерию прочности тип 5 (а) и тип 6 (б) в различных моделях на финальной стадии нагружения (по вертикальной оси – объем разрушенных элементов структурной группы в %%, по горизонтальной оси – величина адгезионной прочности  $R_{adh}$ ).

Величина объема «разрушений» по критериям тип 5 и тип 6 на финальной стадии нагружений моделей имеет обратную зависимость от уровня адгезионной прочности – с увеличением последней существенно снижается объем «разрушений» (см. рис. 7). Необходимо отметить, что при низких прочностях кирпича и раствора (марки М50) объем «разрушений» по критерию тип 6 практически не изменяется при уровне адгезионной прочности  $R_{adh} \geq 0,08$  МПа.

**Второй этап «разрушений»** формируется в узлах контакта кирпича и раствора в горизонтальных швах (см. рис. 8-9).

Адгезионные слои в горизонтальных растворных швах могут находиться в сложном напряженном состоянии - пять различных вариантов (см. работу [10]) и анализ их со-

стояния выполняется по различным критериям прочности.

Как правило, «разрушения» по критерию тип 3 и тип 4 формируются на одном уровне нагружения модели. Однако, на всех этапах нагружений этапы объем «разрушений» существенно различен по типам критериев. Так, на втором (после начала образования «разрушений») этапе нагружений объем разрушений по критерию тип 4 достигает  $3 \div 5\%$ , что превосходит уровень «разрушений» по критерию тип 3, который достигает  $0,2 \div 1,8\%$ . При возрастании нагрузок объем «разрушений» возрастает с разной интенсивностью по типам критериев и на финальном этапе нагружения модели разница в объемах «разрушений» составляет десятки процентов (в зависимости от механических характеристик и адгезионной прочности).

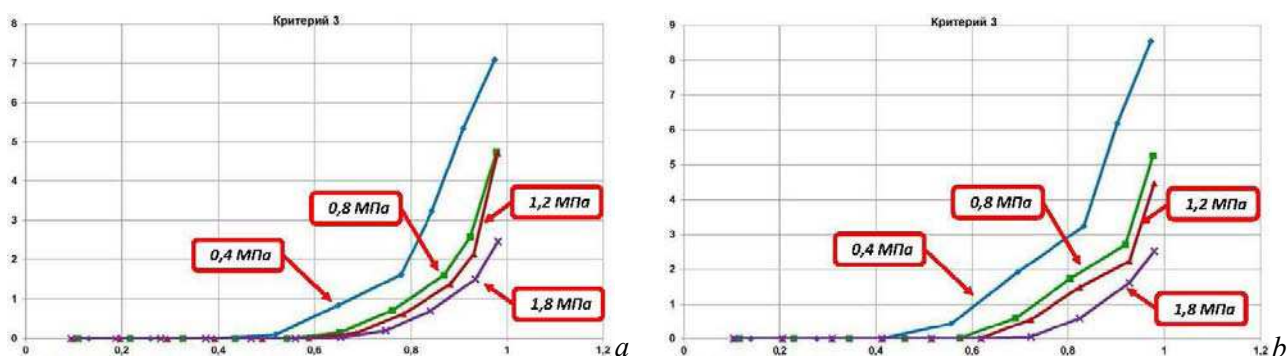


Рис. 8. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 3 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (b); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %%, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

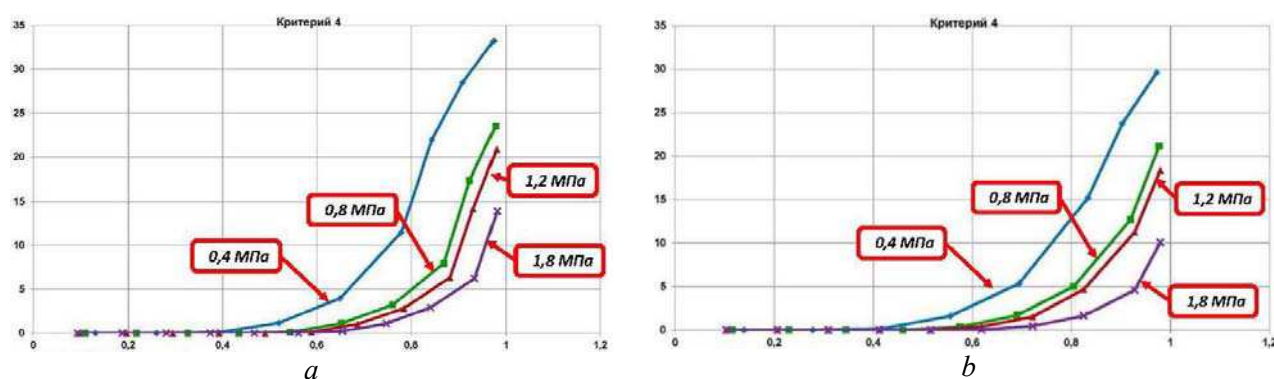


Рис. 9. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 4 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (b); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %%, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

Момент начала процессов локальных «разрушений», происходящих в узле адгезионно-взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальном шве, определяется уровнем адгезионной прочности. При минимальной его величине ( $R_{adh}=0,04$  МПа) «разрушение» происходит при значении нагрузки  $P \leq 0,5P_{ult}$ . При максимальной из принятых в исследованиях значениях ( $R_{adh}=0,18$  МПа) процесс «разрушения» узла начинается при величине нагрузки  $P \approx 0,7P_{ult}$ .

При высоком значении прочности нормального сцепления разрушение в контактом слое кирпича и раствора в горизонтальном шве по критерию тип 4 происходит в значи-

тельно меньшем объеме – высокий уровень адгезионной прочности обеспечивает и высокий уровень удерживающих сил, достаточных для обеспечения неразрушения конечных элементов структурной группы адгезионного слоя. Необходимо отметить, что по критерию типа 4 разрушается наибольший объем конечных элементов по всем типам структурных групп и критериям прочности. На рис. 10 представлены обобщающие зависимости (для финальной стадии нагружения модели) объема «разрушенных» элементов модели зоны контакта кирпича и раствора в вертикальном шве по критериям тип 3 и тип 4 от уровня адгезионной прочности.

Структурный анализ процесса пластического деформирования и разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния

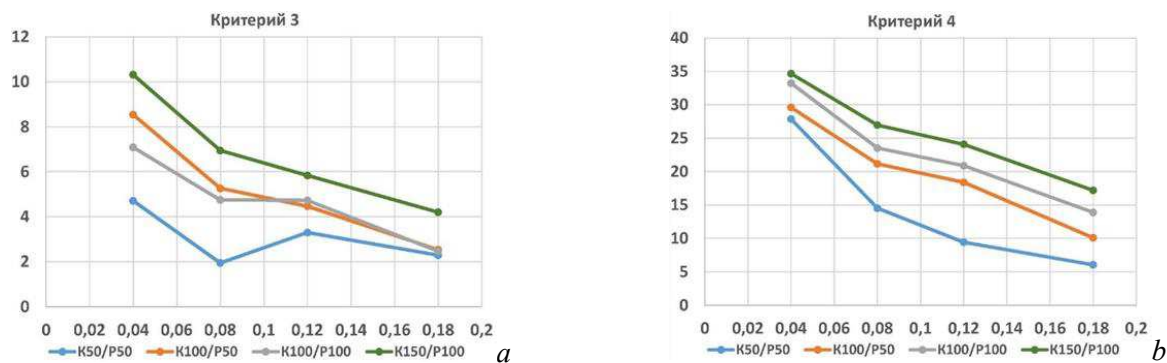


Рис. 10. Графики объема повреждений в структурных элементах моделей по критерию прочности тип 5 (а) и тип 6 (б) в различных моделях на финальной стадии нагружения (по вертикальной оси – объем разрушенных элементов структурной группы в %, по горизонтальной оси – величина адгезионной прочности  $R_{adh}$ ).

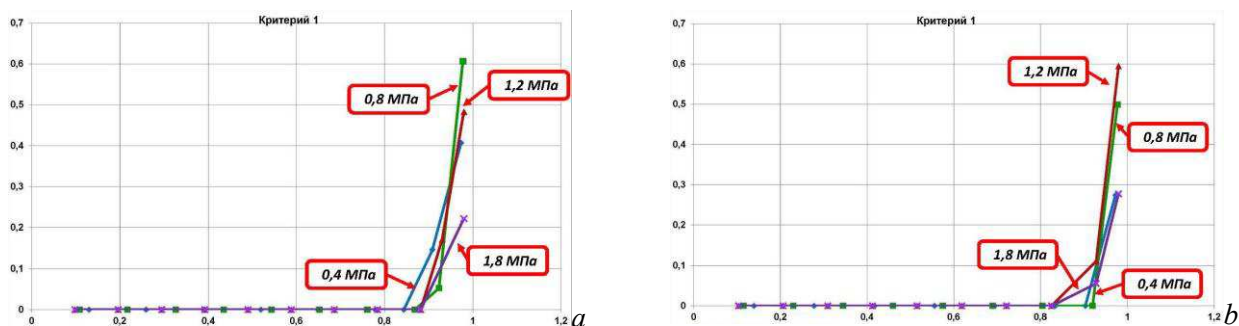


Рис. 11. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 1 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (б); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

Объем «разрушений» в контактной зоне горизонтального шва имеет выраженную корреляцию с уровнем прочности базовых материалов кладки – кирпича и раствора: при высоких прочностях (марки М100 и М150) объем «разрушений» в контактной зоне наибольший, снижение прочности базовых материалов приводит к снижению объема «разрушений» в контактной зоне. Указанная зависимость определяется перераспределением локальных «разрушений» между структурными элементами модели.

**Третий этап «разрушений»** формируется в базовых материалах кладки – в кирпиче и растворе горизонтального и вертикального швов (см. рис. 11, 12). «Разрушения» в базовых материалах происходят на двух финальных этапах нагружения модели, что, совершенно очевидно, определяется накоплением

критического объема «разрушений» в зонах контактного взаимодействия кирпича и раствора в вертикальных и горизонтальных швах. Величина прочности контактного взаимодействия базовых материалов (адгезионная прочность  $R_{adh}$ ) на один-два порядка ниже прочностных характеристик кирпича и раствора, что обуславливает очередность «разрушений» структурных групп элементов модели: от менее прочных (контактные зоны) к более прочным (базовые материалы). Анализ разрушений КЭ структурной группы, аппроксимирующей кирпич, показывает, что объем разрушения по критерию тип 1 весьма невелик – не превышает 0,62%. Раствор (критерий прочности тип 2) разрушается в незначительных объемах (до 0,18%) при низком уровне нормального сцепления; при высоком уровне нормального сцепления

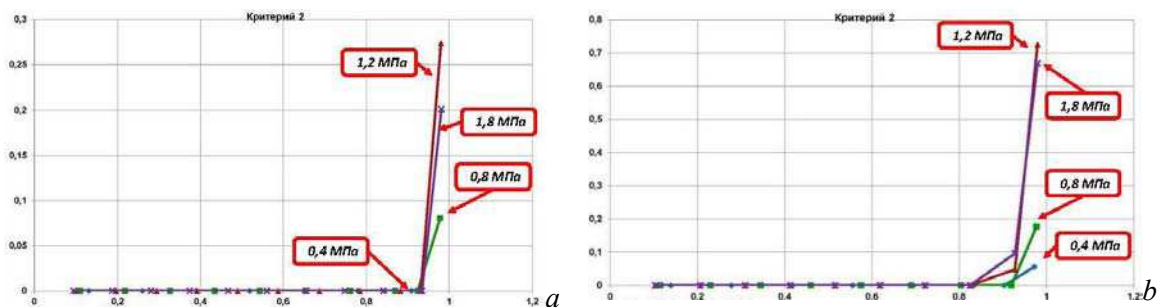


Рис. 12. Графики накопления повреждений по критерию прочности тип 2 в структурных элементах каменной кладки из кирпича М100 на растворе М100 (а) и из кирпича М100 на растворе М50 (b); по вертикальной оси – объем разрушенных элементов раствора в %%, по горизонтальной оси - нагрузка в долях от разрушающей.

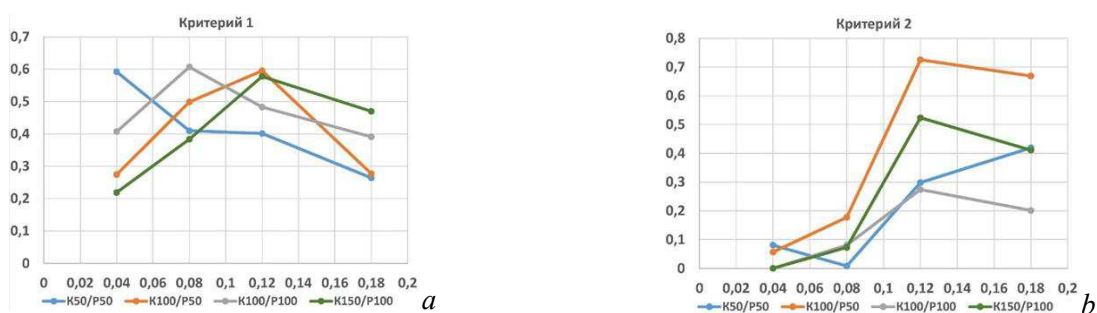


Рис. 13. Графики объема повреждений КЭ структурной группы, аппроксимирующей кирпич (а) и раствор (b) в различных моделях на финальной стадии нагружения (по вертикальной оси – объем разрушенных элементов структурной группы в %%, по горизонтальной оси – величина адгезионной прочности  $R_{adh}$ ).

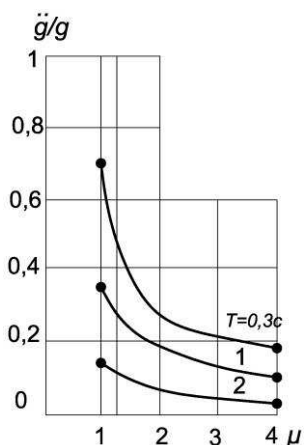


Рис. 14. Зависимость динамического отклика конструкции от уровня пластичности (A.S. Veletsos, N.M. Newmark, C.V. Chelapati [19]).

разрушение раствора происходит в существенно больших объемах (увеличение объема более, чем в 3 раза – до 0,72%); разрушение раствора происходит только на завершающих этапах нагружения образца.

На рис. 13 представлены обобщающие зависимости (для финальной стадии нагружения моделей) объема «разрушенных» структурных элементов, аппроксимирующих кирпич (а) и раствор (b) от уровня адгезионной прочности.

Таблица 1

Марка численной модели	Марка кирпича по ГОСТ	Марка раствора по ГОСТ	Нормальное сцепление, $R_t$ , МПа	Относительные деформации вдоль сжатой диагонали		Коэффициент пластичности $\mu = \frac{\varepsilon_{tot}}{\varepsilon_{el}}$
				Упругая фаза $\varepsilon_{el} \times 10^{-5}$	Полные деформации $\varepsilon_{tot} \times 10^{-5}$	
NM-1-01	50	50	0,04	3,58	16,24	4,536
NM-1-02			0,08	5,97	14,35	2,404
NM-1-03			0,12	10,44	21,52	2,061
NM-1-04			0,18	15,71	25,94	1,651
NM-2-01	100	50	0,04	1,90	13,53	7,121
NM-2-02			0,08	4,88	16,41	3,363
NM-2-03			0,12	7,16	21,58	3,014
NM-2-04			0,18	8,14	17,16	2,108
NM-3-01	100	100	0,04	1,96	11,97	6,107
NM-3-02			0,08	3,90	13,87	3,556
NM-3-03			0,12	5,74	17,62	3,070
NM-3-04			0,18	8,63	17,66	2,046
NM-4-01	150	100	0,04	1,23	11,39	9,260
NM-4-02			0,08	3,15	14,80	4,698
NM-4-03			0,12	4,64	18,19	3,920
NM-4-04			0,18	6,11	19,06	3,119

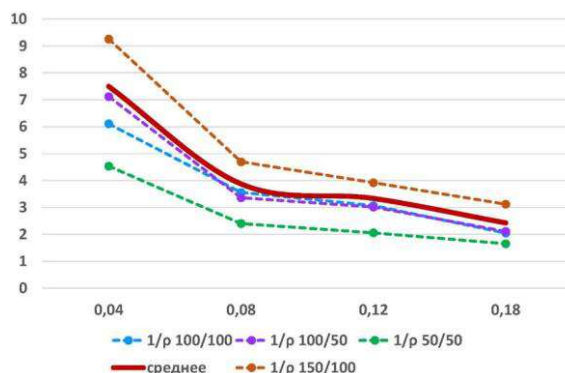


Рис. 15. График коэффициента пластичности  $\mu = \varepsilon_{tot} / \varepsilon_{el}$  - по вертикально оси, по горизонтальной оси - значение адгезионной прочности  $R_{adh}$ . Среднее значение рассчитано для моделей из кирпича M100, M150 и раствора M50, M100.

В оценке сейсмостойкости несущих систем и конструкций широко используется принцип учета пластического деформирования при сохранении определенного уровня несущей способности. В 1964 г. A.S. Veletsos, N.M. Newmark, C.V. Chelapati предложен [19] метод учета влияния пластичности конструкции ( $\mu$ ) на величину относительного ускорения осциллятора ( $\ddot{q}/q$ ), т.е. на динамиче-

ский отклик несущей системы на сейсмическое воздействие (рис. 14):

$$\mu = 1 + \frac{Z_{pl}}{Z_{el}} \quad (1)$$

где:  $Z_{el}$  - величина упругих деформаций несущей системы;  $Z_{pl}$  - величина пластических (полных) деформаций несущей системы.

Для оценки несущей способности конструкций при динамических воздействиях Н.Н. Поповым и Б.С. Расторгуевым в [20] предложено использовать коэффициент пластичности:

$$\mu = \varepsilon_{tot} / \varepsilon_{el} \quad (2)$$

где:  $\varepsilon_{el}$  - величина упругих деформаций;  $\varepsilon_{tot}$  - величина полных деформаций образца на стадии, предшествующей разрушению.

В настоящей работе использована методика оценки пластичности, предложенная Н.Н. Поповым и Б.С. Расторгуевым: по величинам деформаций упругой фазы и значениям полных деформаций, полученным в численных исследованиях, рассчитан коэффициент пластичности ( $\mu$ ) для всех видов исследованных моделей (см. таблицу 1).

Результаты расчетов коэффициента пластичности обобщены и представлены в виде графика (рис. 15).

Анализ полученных результатов показывает, что выявлена выраженная обратная зависимость величины коэффициента пластичности от уровня адгезионной прочности ( $R_{adh}$ ): максимальный уровень коэффициента пластичности зафиксирован при наименьшем уровне адгезионной прочности ( $R_{adh}=0,04$  МПа), минимальный уровень – при наиболее высоком уровне адгезионной прочности ( $R_{adh}=0,18$  МПа).

Столь существенные изменения величины характеристики пластичности определяются различными схемами пластического деформирования, т.е. процессом формирования и накопления повреждений в структурных элементах каменной кладки исследуемых моделей.

Для кладки из кирпича М100 и М150 на растворах М50 и М100, которые разрешены для строительства сейсмостойких каменных несущих конструкций, графики коэффициентов пластичности достаточно близки при малом и среднем уровне адгезионной прочности ( $R_{adh} \leq 0,12$  МПа). При высоком уровне

адгезионной прочности ( $R_{adh}=0,18$  МПа, что соответствует I категории кладки по сейсмическим свойствам) коэффициенты пластичности различаются на 55%.

Для кладки из кирпича М50 (такой кирпич не допускается для применения, но достаточно часто выявляется обследованием в зданиях существующей застройки) графики коэффициентов пластичности существенным образом отличаются от графиков для кладки из допускаемых материалов. Такие отличия обусловлены иными механизмами разрушений, формирующимися в пластической стадии работы кладки, что определяется низкими прочностными показателями кирпича.

Анализ процессов накопления повреждений в адгезионном слое горизонтальных швов показывает, что с увеличением адгезионной прочности формируется особый характер генерации локальных разрушений в узле взаимодействия кирпича и раствора горизонтального шва – их объемкратно снижается по критериям тип 3 и тип 4. Это свидетельствует о том, что увеличение нагрузок на модель, генерирующее увеличение напряжений, приводит к смещению процесса разрушений из узла взаимодействия кирпича и раствора непосредственно в базовые материалы кладки, а такое изменение зон формирования разрушений приводит к изменению объема пластических деформаций образца. Таким образом, высокий уровень адгезионной прочности приводит к существенному повышению несущей способности каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния, но при этом значительно уменьшается пластическая фаза деформирования.

Рядом исследователей зафиксирована зависимость величины пластической фазы деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния от уровня адгезионной прочности. Так, в работе Р. Shubert и D. Vohene [21] установлена связь адгезионной прочности в горизонтальном шве и характеристик работы шва в режиме сдвига, что (в свою очередь) коррелирует с величиной пластической фазы деформиро-

вания. В исследованиях R. Carozzucca [22] показано, что каменные образцы с наибольшим объемом локальных разрушений в горизонтальных швах обладают наиболее выраженной пластической фазой деформирования. В работе R. Sousa, H. Sousa, J. Guedes [22] зафиксировано увеличение пластических деформаций образцов при больших объемах деформирования в локальных зонах горизонтальных швов в режиме сдвига. Однако, причины и механизмы, приводящие к изменению пластичности каменной кладки при двухосном напряженном состоянии авторами работ не установлены.

Детализация схем формирования разрушений по различным видам критериев прочности показывает, что важнейшим фактором, определяющим весь процесс пластической фазы деформирования каменной кладки при плоском напряженном состоянии, является механизм локальных разрушений в зоне взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальном шве по схемам «отрыв и срез при действии растягивающих напряжений» (критерий тип 3) и «срез при действии сжимающих напряжений» (критерий тип 4).

Таким образом, численные исследования позволили установить ранее не описанную особенность пластического деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния: характеристика пластичности определяется объемом локальных разрушений в узле контактного взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальном шве. С учетом многократной разницы в объемах по разным видам механизмов разрушений (объем разрушений по критерию тип 4 превосходит аналогичный объем по критерию тип 3 более чем в четыре раза) можно сделать вывод о том, что схема разрушений по механизму «срез при действии сжимающих напряжений» в контактной зоне горизонтального шва определяет величину характеристики пластических свойств каменной кладки.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании выполненных исследований представляется возможным охарактеризовать каменную кладку как композит особого рода, представляющий собой сложный конструктивный комплекс, состоящий из отдельных конструктивных элементов: базовые материалы (кирпич и раствор) и узлы их взаимодействия. Последние имеют существенно различные механизмы (режимы) работы, определяемые полем напряжений в каждой локальной зоне кладки. Более того, при различных режимах работы узлы контактного взаимодействия базовых материалов влияют существенно различным образом как на общую несущую способность, так и пластические свойства каменной кладки.

Результаты численных исследований показывают, что в каменной кладке в условиях двухосного напряженного состояния формируется определенный объем пластической фазы деформирования. При этом пластическое деформирование кладки реализуется при физически линейной работе базовых материалов – кирпича и раствора. Пластические свойства каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния определяются процессами, происходящими в узлах контактного взаимодействия кирпича и раствора в горизонтальных и вертикальных швах.

Наибольшей пластичностью обладают виды каменной кладки, в которых разрушения формируются и накапливаются в зонах контактного взаимодействия кирпича и раствора горизонтальных швов. И наоборот, минимальной пластичностью обладают виды кладки, в которых объем разрушений в контактной зоне кирпича и раствора горизонтальных швов незначителен, но формируется большой объем разрушений в базовых материалах – кирпиче и растворе. К минимизации разрушений в контактной зоне приводит повышенный уровень адгезионной прочности, при котором процесс формирования локальных разрушений смещается из узлов

контакта базовых материалов непосредственно в кирпич и раствор.

Анализ полученных результатов показывает, что выявлена выраженная обратная зависимость величины коэффициента пластичности от уровня адгезионной прочности ( $R_{adh}$ ): максимальное значение коэффициента пластичности  $\mu=9,26 \div 7,121$  зафиксировано при более низком уровне адгезионной прочности ( $R_{adh}=0,04$  МПа), минимальный уровень  $\mu=1,651 \div 2,046$  – при наиболее высоком уровне адгезионной прочности ( $R_{adh}=0,18$  МПа).

Столь существенные изменения величины характеристики пластичности определяются различными схемами формирования и накопления разрушений в структурных элементах модели в рамках пластической фазы деформирования.

Результаты выполненных исследований позволяют сформулировать заключение о том, что для условий работы каменных конструкций, требующих реализации пластической фазы деформирования при двухосном напряженном состоянии, например, для конструкций сейсмостойких зданий, применение каменной кладки с высоким уровнем адгезионной прочности (нормального сцепления) не может быть признано целесообразным и обоснованным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Копаница, Д.Г.** Экспериментальные исследования фрагментов кирпичной кладки на действие статической и динамической нагрузки [Текст] / Д.Г. Копаница, О.В. Кабанцев, Э.С. Усеинов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. №4. С. 157-178.
2. **Гениев, Г.А.** О критерии прочности каменной кладки при плоском напряженном состоянии [Текст] / Г.А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений. 1979. №2. С. 7-11.
3. **Тюпин, Г.А.** Деформационная теория пластичности каменной кладки [Текст] / Г.А. Тюпин // Строительная механика и расчет сооружений. 1980. - № 6. С. 28-30.
4. **Kabantsev, O.** Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 1. Masonry as Simulation Object. (2015) Applied Mechanics and Materials, 725-726, pp. 681-696.
5. **Kabantsev, O.** Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 2. Strength Criteria and Numerical Experiment. (2015) Applied Mechanics and Materials, 725-726, pp. 808-819.
6. **Вильдеман, В.Э.** Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. Под ред. Ю.В. Соколкина. [Текст] / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А.Ташкинов // – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 228 с.
7. **Бураго, Н.Г.** Моделирование разрушения упругопластических тел [Текст] / Н.Г. Бураго // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т.1, №4. С. 5-20.
8. **Трусов, П.В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого твердого тела (в порядке обсуждения) [Текст] / П.В. Трусов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2009. 17. С. 85-95.
9. **Кабанцев, О.В.** Дискретная модель каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния [Текст] / О.В. Кабанцев // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. №4. С.113-134.
10. **Кабанцев, О.В.** Моделирование упруго-пластического деформирования каменной кладки в условиях двухосного

- напряженного состояния [Текст] / О.В. Кабанцев, А.Г. Тамразян // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2015. ISSUE 3. vol. 11. Pp. 87-100.
11. **Карпиловский, В.С.** SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++ [Текст] / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, М.А. Микитаренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер // – М. Издательство СКАД СОФТ. 2015. - 808 с.
  12. **Поляков, С.В.** Монолитность каменной кладки [Текст] / С.В. Поляков, С.М. Сафаргалиев // - Алма-Ата: 1991. - 160 с.
  13. **Лагас, П.А.** Нелинейный характер зависимости «напряжение-деформация» для слоистых графитопоксидных пластиков [Текст] / П.А. Лагас // *Аэрокосмическая техника*. 1986. №4. –С. 102-111.
  14. **Ильюшин, А.А.** Механика сплошной среды [Текст] / А.А. Ильюшин / - М: Издательство Московского университета. 1978. 287 с.
  15. **Партон, В.З.** Механика упругопластического разрушения. Основы механики разрушения Изд. 3-е, испр. [Текст] / В.З. Партон, Е.М. Морозов // – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 352 с.
  16. **Тонких, Г.П.** Экспериментальные исследования сейсмоусиления каменной кладки наружными бетонными аппликациями [Текст] / Г.П. Тонких, О.В. Кабанцев, О.А. Симаков, А.Б. Симаков, С.М. Баев, П.С. Панфилов // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. М.: 2011. №2. С. 35-42.
  17. **Пангаев, В.В.** Модельные исследования напряженно-деформированного состояния каменной кладки при сжатии [Текст] / В.В. Пангаев, Г.И. Албаут, А.В. Федоров, М.В. Табанюхова // *Изв. Вузов. Строительство*. 2003. №2. - С.24-29.
  18. **Кабанцев, О.В.** Частные критерии прочности каменной кладки для анализа упруго-пластического деформирования [Текст] / О.В. Кабанцев // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. М.: 2013. №3 С. 36-41.
  19. **Veletsos, A.S.** Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motion // *Proc. Second World Conf. Earthq. Engrg., Tokyo and Kioto, Japan*, 895-912.
  20. **Попов Н.Н.** Динамический расчет железобетонных конструкций [Текст] / Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев // М. – СИ. 1974. – 207 с.
  21. **Schubert, P.** Schubfestigkeit von Mauerwerk aus Leichtbetonsteinen /P. Schubert, D. Bohene // *das Mauerwerk Heft 3, Ernst & John*. 2002, Pp. 98-102.
  22. **Capozucca, R.** Shear behaviour of historic masonry made of clay bricks / R. Capozucca // *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2011. 5. (Suppl 1-M6). Pp. 89-96.
  23. **Sousa, R.** Diagonal compressive strength of masonry samples—experimental and numerical approach / R. Sousa, H. Sousa, J. Guedes // *Materials and Structures*. 2013. 46. Pp. 765–786.
- 
- Кабанцев Олег Васильевич, кандидат технических наук, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, 129337, г. Москва, Ярославское ш., 26 (SPIN-код: 2114-1185) email: ovk531@gmail.com.
- Oleg V. Kabantsev, PhD, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Road, 129337, Moscow, Russia (SPIN-code: 2114-1185) email: ovk531@gmail.com.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТИ И ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОЩАДОК РАЗРУШЕНИЯ БЕТОНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

*Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко*

Научно исследовательский институт строительной физики  
Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Рассмотрены критерии прочности бетона и их связь с характером его разрушения при различных видах объёмного напряженного состояния: трехосном сжатии, случаях сжатия-растяжения и трёхосном растяжении. Напряжения сжатия приняты за отрицательные. В случае трехосного сжатия критерия прочности записывается в функции от главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$  и параметра Лоде-Надаи  $\mu_\sigma$ , который позволяет учитывать влияние среднего напряжения  $\sigma_2$  на прочность. Показано, что между предлагаемым критерием прочности бетона при трехосном сжатии и критерием прочности Кулона-Мора возможна аналогия, если принять, что каждому параметру Лоде-Надаи  $\mu_\sigma$  соответствует своя предельная огибающая кругов Мора, а семейство огибающих носит нелинейный характер. При наличии растягивающих напряжений критерии прочности записываются в виде нелинейных функций от главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Характер разрушения в этих случаях связан с образованием трещин по площадкам главных растягивающих напряжений. Критерии прочности совпадают на границах напряженных состояний и совместно образуют общий критерий прочности бетона при объёмном напряженном состоянии.

**Ключевые слова:** критерии прочности, трёхосное сжатие, огибающие кругов Мора, параметр Лоде-Надаи, виды разрушения, случаи сжатия-растяжения, трёхосное растяжение, главные напряжения, площадки главных растягивающих напряжений, образование трещин

## DETERMINATION OF THE STRENGTH AND ORIENTATION OF DESTRUCTION CONCRETE'S SURFACES FOR DIFFERENT TYPES OF BULK STRESS STATE

*Nikolay I. Karpenko, Sergey N. Karpenko*

Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences,  
Moscow, RUSSIA

**Abstract:** Criteria of concrete strength and their dependence on the character of deterioration at the volume tense state types: 3-axial compression, cases of the compression-extension and 3-axial extensions are described. The compression tensions are taken as negative. In the case of 3-axial compression the criterion of the strength is presented as the functions from the main tensions  $\sigma_1, \sigma_3$  and from the Lode-Nadai  $\mu_\sigma$  parameter, which allows to take into account the influence of the middle tension  $\sigma_2$  on the concrete strength. It was shown that the analogy is possible between the offered criterion of concrete strength at 3-axial compression and the Coulomb-Mohr strength criterion, if you take that every Lode-Nadai  $\mu_\sigma$  parameter corresponded its threshold value envelope of Mohr cycles, and the family of the envelopes has unlinear character. Criteria of the strength at the availability of the tensile stresses are represented as unlinear functions from the main tensions  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . The deterioration character in these cases is tied with the formation of cracks at the main tensile stresses surfaces (areas). Criteria of the strength coincides on the borders of the tensile states and forms general criterion of the concrete strength at the volume tensile state in common.

**Keywords:** criterion of strength, triaxial compression, the Lode-Nadai parameter, envelopes of Mohr cycles, deterioration types, the cases of compression-tension, triaxial extension, the main tensions, the surfaces (areas) of the main tensile stresses, formation of cracks.

Общие критерии прочности при объемном напряженном состоянии разрабатывались в работах многих исследователей. Подробный обзор работ приведён в [1,2,3]. Однако в общих критериях обычно не удаётся с одинаковой точностью описать прочность бетона при напряженных состояниях сжатия-растяжения и трехосного сжатия из-за большой разницы в прочностях бетона при сжатии и растяжении. В представленных построениях каждый вид напряженного состояния описывается отдельно, что позволяет устранить указанный недостаток. Ставится лишь требование по соблюдению условий совпадения отдельных критериев на стыковочных границах напряженных состояний, что позволяет объединять их в общий критерий без нарушения точности в различных областях напряженных состояний. Частично этот вопрос рассмотрен [4,5]. Представим уточненную запись критериев прочности и покажем, что каждый вид объемного напряженного состояния характеризуется своей схемой разрушения.

Будем располагать главные напряжения в последовательности  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , приняв главные сжимающие напряжения за отрицательные.

1. Критерии прочности при трёхосном сжатии ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \sigma_1 \leq 0$ ). В случае трёхосного сжатия напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  максимальными будут напряжения  $\sigma_1$ , которые равны минимальным по модулю напряжениям сжатия, а минимальными – напряжения  $\sigma_3$ , хотя по модулю эти напряжения превышают напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (то есть являются максимальными).

Общий критерий прочности при трёхосном сжатии записывается в виде

$$\sigma_3 = -k_c R_{bc} + \beta_n \sigma_1 \quad (1)$$

где  $k_c$  – функция влияния среднего напряжения  $\sigma_2$  на прочность,  $k_c = 1$  при  $\sigma_2 = \sigma_1$ .

$R_{bc}$  – прочность бетона при одноосном сжатии.

Условие (1) при  $k_c = 1$  и  $\beta_n = 5$  приведено в [1], в таком виде оно также вошло в Еврокод [7]. Однако исследования [4,6] показали, что параметр  $\beta_n$  не является постоянной величиной, а описывается некоторой дробной функцией

$$\beta_n = \frac{1 + a - a \frac{\sigma_1}{\sigma_3}}{b + (f - b) \frac{\sigma_1}{\sigma_3}}, \quad (2)$$

где  $a, b, f$  – коэффициенты материала.

Подстановка  $\beta_n$  из (2) в условие (1) приводит к квадратному уравнению по определению  $\sigma_3$ .

Выполненная в [4] обработка экспериментальных исследований по определению прочности тяжёлых бетонов при трехосном сжатии вида  $\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1$  многих исследователей (Ю.Н. Малашкина и Б.В. Тябликова [8], а также зарубежных исследователей, приведенных в работе Л.К. Лукши [9]), А.В. Яшина, Р.Г. Касимова выполненная в [4], показала, что некоторую нижнюю границу прочности условие (1),(2) описывает при  $b = 0.118$ ;  $a = 0.5b$ ,  $f = 1$ , (линия I на рис. 1), а некоторым средним значениям прочности соответствует кривая (2) при  $b = 0.096$ ;  $a = 0.5b$ ,  $f = 1$  (линия II на рис. 1). Опыты проводились на бетонных кубиках из тяжелого бетона прочностью при одноосном сжатии  $3 \text{ МПа} \leq R_{bc} \leq 70 \text{ МПа}$ , они отмечены номерами 1-7 на рис. 1. Мелкозернистые бетоны из крупного заполнителя и раствора (данные под номерами 8-11) показали более низкую прочность (она описывается линией III на рис. 1).

Обработка результатов экспериментальных исследований прочности бетона при двухосном сжатии показала, что функцию  $k_c$  можно принять в виде:

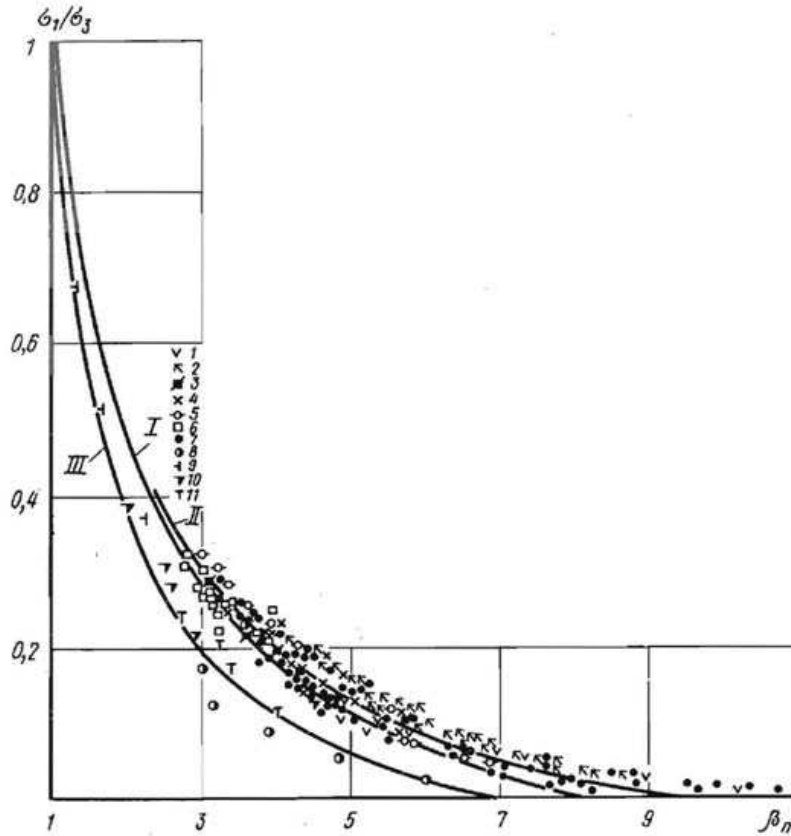


Рис. 1. Теоретические графики характерной функции прочности бетона при трёхосном сжатии  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  (I-III) и результаты опытов (1-11).

$$k_c = 1 + \frac{cR_{bt}}{R_{bc}} \left[ 1 - d\mu_\sigma - (1-d)\mu_\sigma^3 - e(1-\mu_\sigma)^2 \right], \quad \frac{dk_c}{d\mu_\sigma} = 0 = -d - 3(1-d)\mu_\sigma^2 + 2e(1-\mu_\sigma), \quad (3)$$

откуда

где  $c, e$ , – коэффициенты материала (для тяжёлых бетонов  $c \approx 5$ ;  $e \approx 0.44$ ,  $d \approx 0.8$ ),  $\mu_\sigma$  – параметр Лоде-Надаи,

$$\mu_\sigma = \frac{2e \pm \sqrt{4e^2 - 12(1-d)(d-2e)}}{6(1-d)}, \quad (5)$$

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (4)$$

при  $\sigma_2 = \sigma_1$ ,  $\mu_\sigma = 1$ ,  $k_c = 1$ .

Этот параметр удобен тем, что изменяется в пределах  $1 \geq \mu_\sigma \geq -1$ .

Значение  $\mu_\sigma$ , при котором функция  $k_c$  достигает максимума, определяется из условия

где перед корнем принимаем знак плюс. Зависимость (5) удобно использовать для анализа экспериментальных данных. Если в экспериментальных исследованиях выявляется  $\mu_\sigma$ , при котором, функция  $k_c$  достигает максимума, то условие (5) можно использовать для корректировки параметров  $e$  и  $d$ , которые соответствуют этому максимуму. Естественно, при этом будет уточняться и

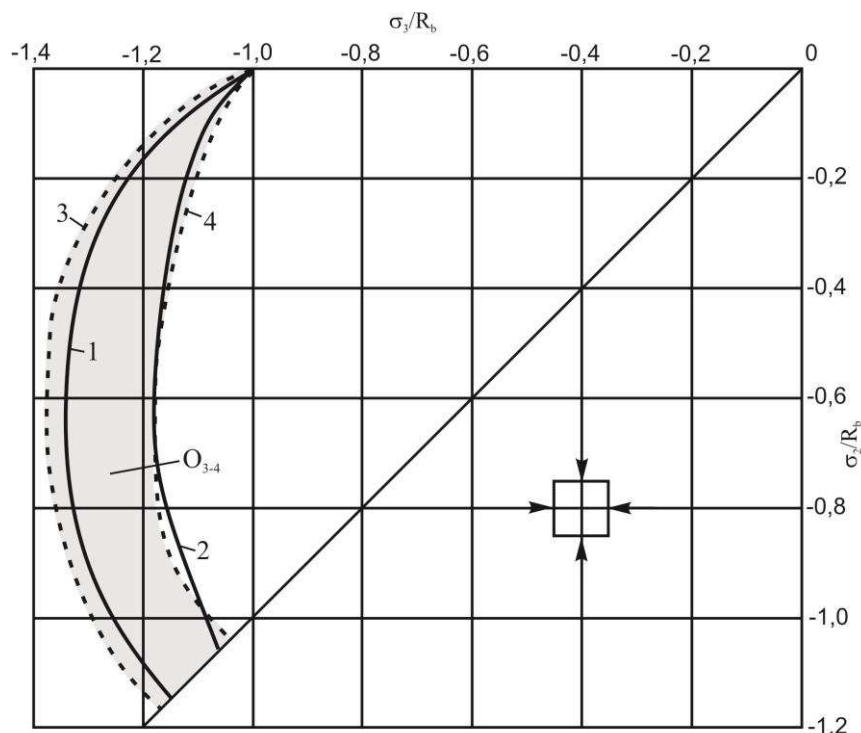


Рис. 2. Кривые прочности бетона при двухосном сжатии (1,2 – теоретические, 3,4 – границы области достоверных экспериментальных данных по [12],  $O_{3,4}$  – затемнённая область экспериментальных данных)

параметр  $c$ , исходя из сопоставления значений  $k_c$  с данными экспериментов.

В случае плоского сжатия ( $\sigma_1 = 0$ ) формула (4) преобразовывается к виду

$$\mu_\sigma = 1 - 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

при этом зависимости (1) и (3), записываются:

$$\sigma_3 = -k_c R_{bc} \quad (6)$$

$$k_c = 1 + \frac{cR_{bt}}{R_{bc}} \left[ 1 - d + 2d \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 4e \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right)^2 - (1-d) \left( 1 - 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right)^3 \right] \quad (7)$$

Зависимость (6) при условии (7) (или условиях (3), (4)) хорошо согласуется с экспериментальными данными по определению прочности при двухосном сжатии (рис. 2, где 1 – теоретическая линия при  $R_{bc} = 10$  МПа,  $R_{bt} / R_{bc} = 0,12$ , 2 – то же, при  $R_{bc} = 50$  МПа,  $R_{bt} / R_{bc} = 0,06$ , 3 и 4 – нижняя и верхняя границы достоверных опытных значений из работы [12]).

Исследования показали, что зависимость (7) также можно использовать для определения  $k_c$  в случае смешанного напряженного состояния вида: сжатие по двум направлениям ( $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ ) и растяжении по одному направлению  $\sigma_1 > 0$ . При этом упрощается использование соответствующего критерия прочности в практических расчётах. Недостаток критерия (1), как и других феноменологических критериев, заключается в том, что они не дают представления об ориентации площадок разрушения. Покажем,

что этот недостаток можно устранить, установив аналогию между критерием (1), (2) и критерием Кулона-Мора, в котором площадка разрушения чётко оговаривается (на этой площадке в момент разрушения касательные напряжения достигают предельного значения, которое зависит от нормального напряжения  $\sigma$  на этой площадке, т.е.  $\tau = f(\sigma)$ ). Однако, такая аналогия возможна только в том случае, если в гипотезу Мора вносятся определённые дополнения и уточнения. Они сводятся к следующему.

1) напряженные состояния разделяются по параметру Лоде-Надаи  $\mu$  и для каждого параметра устанавливается своя огибающая предельных кругов Мора;

2) семейство огибающих носит нелинейный характер, линейные огибающие типа Кулона-Мора, к бетону в отличие от грунтов [12], не применимы, в том числе в случаях корректировки параметров линейного критерия в зависимости от  $\mu_\sigma$  (такие предложения применительно к грунтам приведены [12] и др. работах);

3) разрушение по наклонным площадкам нельзя связывать только со сдвигом; в различных точках предельных огибающих могут реализоваться различные механизмы разрушений от отрыва, сдвига, отрывно-сдвиговые.

В связи с введёнными предпосылками можно использовать известное выражение для касательной к предельной огибающей больших кругов Мора, полагая только, что эта кривая построена (с учётом принятой предпосылки) для некоторого значения  $\mu_\sigma$ . Пусть касательная проходит через некоторую точку  $B$  на огибающей (рис.3). Этой точке, как и любой другой на огибающей, соответствует свой большой круг Мора, который касается огибающей. Касательная к огибающей является одновременно и касательной к соответствующему большому кругу. На рис. 3  $\varphi$ -угол наклона касательной к оси  $\sigma$ ,  $C$  – отрезок, который отсекает касательная на оси  $\tau$ ;  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  - радиус большого круга Мора.

Из рассмотрения прямоугольного треугольника  $ABD$  следует

$$\begin{aligned} AB &= AD \sin \varphi; \quad AB = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2; \\ AD &= C \operatorname{ctg} \varphi - (\sigma_1 + \sigma_3) / 2, \end{aligned}$$

Откуда, после внесения двух последних зависимостей в первую, и простых преобразований, получают

$$\sigma_3 = -C \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} + \sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (8)$$

Не трудно заметить аналогию между зависимостями (1) и (8). Если выдвинутое предположение о том, что зависимости (1), (2) представляют уравнение касательных к изгибающей Мора верно, то из приравнивания правых частей (1) и (8) следует

$$R_{bc} k_c = \frac{2C \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \beta_n$$

Откуда (из второй зависимости)

$$\sin \varphi = \frac{\beta_n - 1}{\beta_n + 1} \quad (9)$$

Из рассмотрения треугольника  $ABD$  также получаем

$$2\theta = 90^\circ - \varphi \quad \text{или} \quad \theta = 45^\circ - \varphi / 2 \quad (10)$$

Рассмотрим определение углов  $\varphi$  и  $\theta$  с использованием зависимости (2) для  $\beta_n$  при  $b = 0.096, a = 0.5b, f = 1$

В случае одноосного сжатия (при  $\sigma_1 = 0$ )  $\beta_n = 10,92$  чему соответствует  $\varphi = 56^\circ, \theta \approx 17^\circ$ .

С увеличением бокового обжатия угол  $\theta$  будет увеличиваться и в граничной точке, когда  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3 \quad 2\theta \rightarrow 90^\circ (\theta \rightarrow 45^\circ), \varphi \rightarrow 0$ . Таким образом, углы наклона площадок разрушения для бетонных элементов с ростом

бокового обжатия будут изменяться в пределах от  $\sim 17^0$  до  $\sim 45^0$

Согласно [13], если принять что разрушение происходит по площадке, на которой выполняется критерий Мора, то угол  $\theta$  будет характеризовать наклон этой площадки к оси  $\sigma_3$ . (рис.3,б)

Кроме этого следует учитывать, что на рис. 3 показала только Двухосное/Круга Мора/(Дж); второй половины угол  $\theta$  заменяется на  $-\theta$ . Параметр  $\mu_\sigma$  будет сказываться только на значения величины  $C$ , хотя возможно его влияние и на значение функции  $\beta_n$  (этот недостаток устраняется, если критерий прочности вместо (11) записать в виде

$$\sigma_3 = -k_c R_{bc} + \gamma_n \beta_n \sigma_1, \quad (11)$$

где

$$\gamma_n = k_c - (k_c - 1) \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (12)$$

При этом

$$\sin \varphi = \frac{\gamma_n \beta_n - 1}{\gamma_n \beta_n + 1} \quad (13)$$

Однако вопрос о преимуществах критерия (11) ещё требует дополнительного анализа экспериментальных данных. Изменение наклона площадок разрушения и оси  $\sigma_3$  в пределах от  $17^0$  до  $45^0$  указывает на то, что в начале (при малых значениях  $\sigma_1$ ) в случаях трёхосного сжатия реализуется механизм разрушения, близкий к отрывному, а затем, по мере увеличения бокового обжатия, все большее значение начинают приобретать элементы разрушения от сдвига.

2. Запись критерия прочности в случае двухосного сжатия с растяжением по третьему направлению ( $\sigma_1 \geq 0$ ;  $\sigma_2 \leq 0$ ;  $\sigma_3 < 0$ ).

Критерий прочности бетона записывается в виде

$$(\tilde{\sigma}_1)^2 + 2a(\tilde{\sigma}_1)(\tilde{\sigma}_2) + \left[ \frac{(1-2c)\tilde{\sigma}_3}{1-2c\tilde{\sigma}_3} \right]^\rho \leq 1, \quad (14)$$

где  $\rho$  - степень ( $\rho = 1 \div 2$ ),  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 / R_{bt}$ ;  $\tilde{\sigma}_2 = -\sigma_2 / (R_{bc} k_c)$ ;  $\tilde{\sigma}_3 = -\sigma_3 / (R_{bc} k_c)$ ,  $k_c$  - определяется по формуле (7),  $a, c$  - параметры, зависящие от прочности бетона, кроме этого параметр  $c$  зависит от степени  $\rho$ .

При  $\rho = 1$

$$c \approx 0.35 - \frac{R_{bc} - 20 \text{ МПа}}{75 \text{ МПа}} \quad \text{или} \quad c \approx 0.35 - \frac{B - B30}{B100} \quad (15)$$

(с ограничением  $0,35 \geq c \geq -0,1$ )

При  $\rho = 2$

$$c \approx 0.2 - 1,5 \frac{R_{bc} - 20 \text{ МПа}}{75 \text{ МПа}} \quad \text{или} \quad c \approx 0.2 - 1,5 \frac{(B - B30)}{B100} \quad (16)$$

(с ограничением  $0,2 \geq c \geq -0,35$ ).

Параметр  $a$  принимается равным:

$$a = 0.1 + 0,2 \frac{R_{bc} - 20 \text{ МПа}}{50 \text{ МПа}} \quad \text{или} \quad a \approx 0.1 + 0,3 \frac{B - B30}{B100}, \quad (17)$$

В случае, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  из (14) следует

$$\tilde{\sigma}_1 = -a\tilde{\sigma} + \sqrt{(a\tilde{\sigma})^2 - \left[ \frac{(1-2c)\tilde{\sigma}}{1-2c\tilde{\sigma}} \right]^\rho + 1} \quad (18)$$

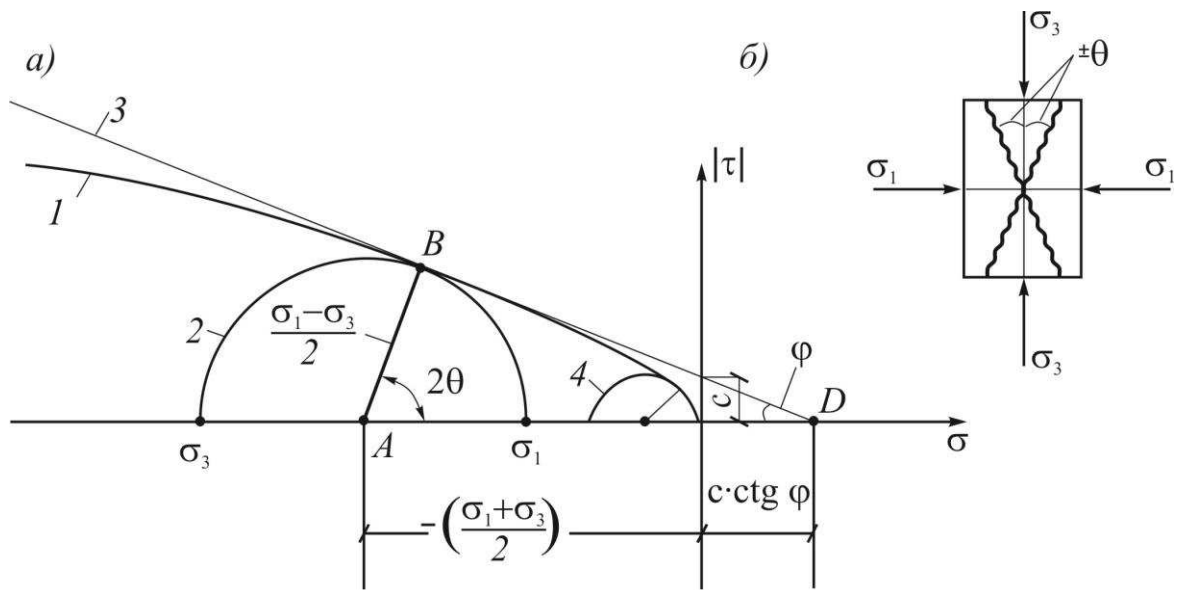


Рис. 2. Характеристики нелинейного варианта критерия Кулона-Мора для трехосного сжатия 1 - нелинейная огибающая, круг Мора для предельной точки В на огибающей, 3- касательная к огибающей к кругу Мора в точки В, 4 - круг Мора для плоского и одноосного сжатия.

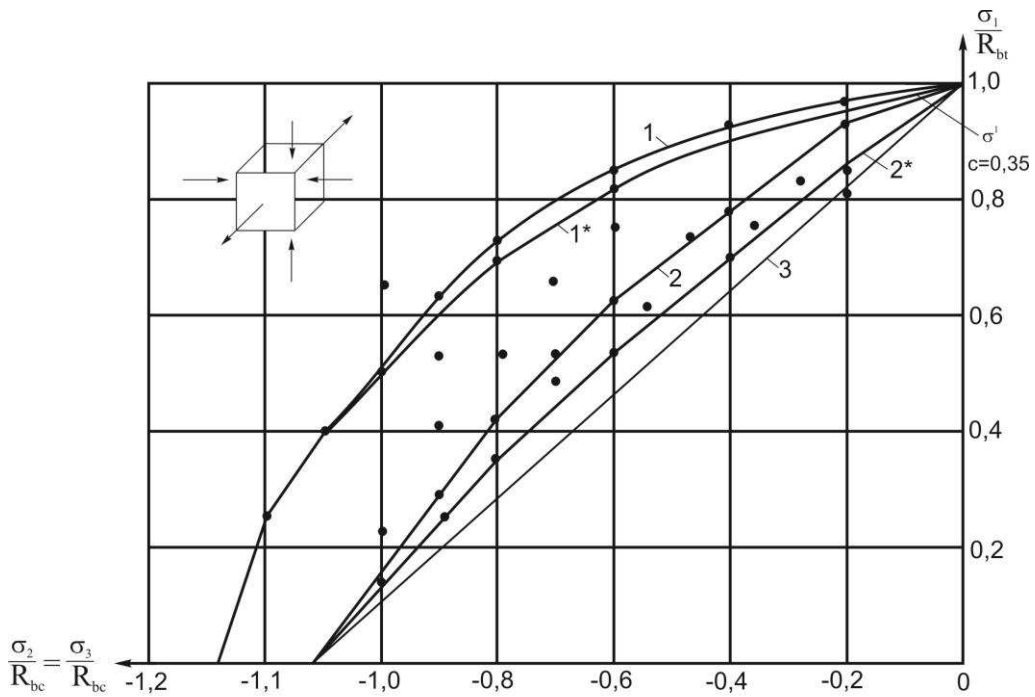


Рис. 3. Графики прочности бетона при сжатии по двум направлениям (в случае  $\sigma_2 < 0; \sigma_3 < 0$  и  $\sigma_2 = \sigma_3$ ) и растяжении по третьему направлению ( $\sigma_1 > 0$ ), вычисленные по критерию (14), (18); 1,2 – вычисляются при  $\rho = 2$ , 1\*,2\* вычисляются при  $\rho = 1$ , 3 – возможная нижняя граница прочности при  $\rho = 1$ ,  
 ●●● - опытные данные [10], [14].

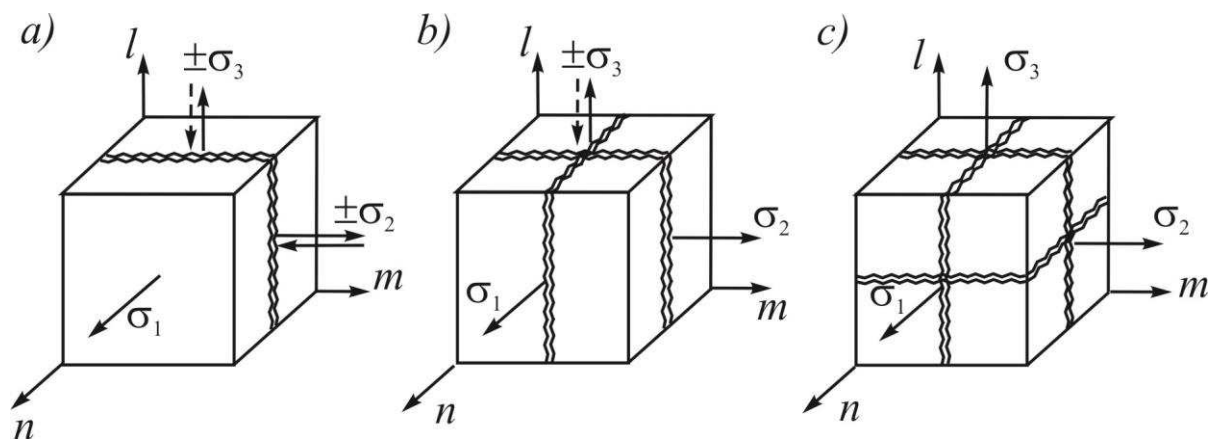


Рис. 5. Схемы разрушения бетонных элементов вследствие образования трещин по площадкам главных растягивающих напряжений: на а) – по площадке действия напряжений  $\sigma_1$  (условно по схеме 1), на б) – по площадкам действия напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (схеме 2), на с) – по площадкам действия  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  (схеме 3).

На рис. 4 представлены результаты расчёта по критерию (14), (18) прочности бетона при трёхосном напряженном состоянии вида: растяжение по одному направлению ( $\sigma_1 > 0$ ) и сжатию по двум другим направления ( $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ ) в случае, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$  для двух видов бетона:

1)  $R_{bc} = 10$  МПа,  $R_{bt} = 1,2$  МПа, 2)  $R_{bc} = 50$  МПа,  $R_{bt} = 3$  МПа. Графики 1,2 на рис. 4 построены по критерию (18) для указанных двух видов бетона при  $\rho = 2$  и вычислении параметров  $c$  и  $a$  по формулам (16), (17), ( $c = 0,2; c = -0,35$ , соответственно  $k_c = 1,144; k_c = 1,012$ ). Графики 1\*, 2\* построены по критерию (18) при  $\rho = 1$  и вычислении параметров  $c$  и  $a$  по формулам (15), (17) (при  $c = 0,35; c = -0,05$ ). В область (1\*), (2\*) хорошо укладываются все данные экспериментальных исследований.

Нарушение критерия прочности (14) связано с образованием трещин по площадке действия напряжений  $\sigma_1$  (по схеме 1 рис.5а).

3. Запись критерия прочности в случае растяжения по двум направлениям и сжатия по третьему направлению ( $\sigma_1 \geq 0; \sigma_2 \geq 0; \sigma_3 \leq 0$ ). Критерий прочности записывается:

$$(\tilde{\sigma}_1)^2 + a^*(\tilde{\sigma}_2)^2 + \left[ \frac{(1-2c)\tilde{\sigma}_3}{1-2c\tilde{\sigma}_3} \right]^p \leq 1, \quad (19)$$

где  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 / R_{bt}; \tilde{\sigma}_3 = -\sigma_3 / R_{bc}$ ; параметры  $a$  и  $c$  – определяются по формулам (15), (16),

$$a \geq a^* \geq 0 \quad (20)$$

В частном случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2$  из формулы (19) следует

$$\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1 - \left[ \frac{(1-2c)\tilde{\sigma}_3}{1-2c\tilde{\sigma}_3} \right]^p}{(1+a^*)}} \quad (21)$$

В частном случае, когда  $\sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$  (случай сжатия-растяжения при плоском напряженном состоянии), зависимость (19) преобразовывается к виду

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{1 - \left[ \frac{(1-2c)\tilde{\sigma}_3}{1-2c\tilde{\sigma}_3} \right]^p} \quad (22)$$

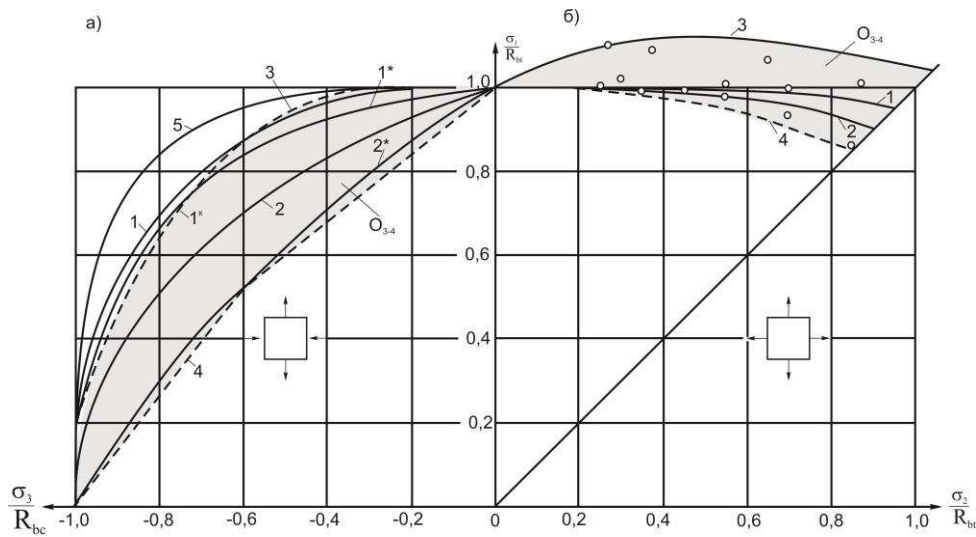


Рис. 6. Графики изменения прочности бетона: на а) при двухосном «сжатии-растяжении», б) при двухосном растяжении (1 – значения, вычисленные по формуле (22) для первого вида бетона при  $\rho = 2$ , 2 – тоже для второго вида бетона, 1\*, 2\* те же значения прочности соответственно для первого и второго вида бетона, вычисленные по формуле (22) при  $\rho = 1$ ; 3, 4 – верхняя и нижняя граница прочностей по данным [12],  $O_{3-4}$  - затемнённая область экспериментальных значений, 5 – некоторая верхняя граничная кривая изменения прочности. На б) линии 1, 2 соответствует  $a^* = a$ , а линия 1\* значению  $a^* = 0$ .

Результаты проверки критерия (22) представлены на рис.6а.

Нарушение критерия (19) связано с образованием трещин по схеме 1 (рис.5а), или при нарушении этого критерия в вид (21) по схемам 1 и 2 (рис.5а,б).

4. Запись критерия прочности бетона при трёхосном растяжении ( $\sigma_1 > 0; \sigma_2 \geq 0; \sigma_3 \geq 0$ ). Обеспечивается, если выполняется условие

$$\tilde{\sigma}_1^2 + a^*(\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2) \leq 1, \quad (23)$$

где  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 / R_{bt}$ ;  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 / R_{bt}$ ;  $\tilde{\sigma}_3 = \sigma_3 / R_{bc}$ . При нарушении критерия (23) возможно образование трещин по трём схемам (сх.1, сх.2, сх.3, рис. 5а, б, с). Параметры  $a, a^*$  и  $c$  в условиях (14)-(22) могут уточняться по мере накопления экспериментальных данных

Таким образом, рассмотрена полная система критериев прочности бетона при различных неодносных напряженных состояниях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвоздев А.А. Расчёт несущей способности конструкций по методу предельного равновесия [Текст].- М., 1949. –280 с.
2. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона [Текст] / Г.А. Гениев, В.Н.Киссюк, Г.А.Тюпин. –М.: Стройиздат, 1974. –196 с.
3. Карпенко С.Н. О разработке более совершенных трёхинвариантных критериев прочности бетонов. Известия Орловского государственного технического университета. «Строительство. Транспорт» 2/14,  $R_{bn}$  2007, с. 42-49.
4. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона, М. Стройиздат, 1996, с. 60-91.

5. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н.** Составной критерий прочности бетона при объемном напряженном состоянии. Бетон и железобетон – взгляд в будущее. Материалы III Всесоюзной (Международной) конференции по бетону и железобетону. Москва. 2014 том IV, с. 156-165.
6. **Карпенко Н.И.** Об одной характерной функции прочности бетонов, при трёхосном сжатии [Текст] // Строит. Механика и расчёт сооружений. 1982. № 2 – С.33-36.
7. f EN 1992-1-1: 2004 Eurocode 2.
8. **Малашкин Ю.Н., Тябликов Б.В.** О прочности бетона при трёхосном сжатии //Свойства бетона, определяющие трещиностойкость /Труды XV координационного совещания по гидротехнике. – Л.:1976, вып.112.
9. **Лукша Л.К.** Прочности трубобетона [Текст]. – Минск: Вышейшая шк., 1977. –С.96.
10. **Яшин А.В.** Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния [Текст] //Расчёт и конструирование железобетонных конструкций / Под ред. А.А.Гвоздева. – М. гиздат НИИЖБ Госстроя СССР, 1977.С.48-57.
11. **Яшин А.В.** Влияние не одноосных (сложных ) напряженных состояний на прочность и деформации бетона, включая область, близкую к разрушению //Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций /Под ред. А.А.Гвоздева. –М. 1981.С.3-29.
12. **Ноткус А.И., Кудзис А.П.** О надежности результатов двухосных испытаний бетона // Железобетонные конструкции. – Вильнюс, 1979.
13. **Зарецкий Ю.К.** Вязко-пластичность грунтов и расчёты сооружений. //М. Стройиздат, 1988, с.27-55.
14. Разрушение, том 2 Математические основы теории разрушения. Из-во «Мир», М.1975, стр.409-424 (перевод с английского).
15. **Hannaut D.J.** Nomograms for the failure of plain concrete subjected to short-term multiaxial stresses // Strud. Eug. 1974. №2, №5, p.151-165.

---

Карпенко Николай Иванович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий лабораторией; «Проблемы прочности и качества в строительстве», федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук»; академик-секретарь Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук; 127328, Россия, г. Москва, Локомотивный проезд, д. 21, НИИСФ РААСН; тел. +7(495)482-40-76, факс: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Карпенко Сергей Николаевич, доктор технических наук, заместитель заведующего лаборатории, федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук»; 127328, Россия, г. Москва, Локомотивный проезд, д. 21, НИИСФ РААСН; тел. +7(495) 482-40-18; e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Nikolay I. Karpenko, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Laboratory of Research Institute for Building Physics, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Academic Secretary of the Section of Construction Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Locomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7(495)482-40-76, fax: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Sergey N. Karpenko, Professor, Dr.Sc., Deputy Head of Laboratory of Research Institute for Building Physics, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Locomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7(495)482-40-18, fax: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

## ВЛИЯНИЕ ВОЗРАСТА НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫСОКОПРОЧНОГО СТАЛЕФИБРОБЕТОНА

*Н.И. Карпенко<sup>1</sup>, А.В. Мишина<sup>2</sup>, В.И. Травуш<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт строительной физики

Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Городской проектный институт жилых и общественных зданий, г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** В статье представлены результаты экспериментального исследования физико-механических и реологических свойств высокопрочного сталефибробетона. В программу исследования входили кратковременные испытания для определения прочностных характеристик, а также длительные испытания для определения деформаций усадки и ползучести. Все испытания проводились на образцах различного возраста, что позволило определить динамику изменения свойств материала и получить аналитические выражения для определения зависимости физико-механических и реологических характеристик от возраста бетона.

**Ключевые слова:** высокопрочный порошковый сталефибробетон; экспериментальные исследования; прочность на сжатие; ползучесть; усадка; мера ползучести

## IMPACT OF GROWTH ON PHYSICAL, MECHANICAL AND RHEOLOGICAL PROPERTIES OF HIGH STRENGTH STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE

*Nikolay I. Karpenko<sup>1</sup>, Alexandra V. Mishina<sup>2</sup>, Vladimir I. Travush<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences,  
Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Urban planning institute of residential and public buildings, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The paper presents the results of experimental study focused on physical, mechanical and rheological characteristics of high strength steel fiber reinforced concrete. The research program included short-term tests to determine strength properties as well as long-term test to obtain shrinkage and creep deformation. All tests were carried out on the different age specimens, so the time history of material properties was determined and analytic expressions of physical, mechanical and rheological properties dependence on concrete growth were developed.

**Keywords:** high strength steel fiber reinforced concrete, experimental studies, compressive strength, creep, shrinkage, creep degree

### ВВЕДЕНИЕ

Сталефибробетон вызывает все больший интерес как строительный материал, обладающий положительными качествами обычного бетона, при этом минимизирующий его слабые проявления (стороны). Поэтому неудивительно, что ученые всего мира занимаются исследованиями сталефибробетона различного

состава. В лаборатории Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ) в Москве были проведены масштабные экспериментальные исследования физико-механических и реологических свойств высокопрочного сталефибробетона на основе высокопрочного бетона.

Таблица 1. Состав и свойства бетонной смеси

Цемент	Фактический состав бетонной смеси, кг/м <sup>3</sup>				Плотность бетонной смеси, кг/м <sup>3</sup>	Распływ конуса, см	В/Ц
	Модификатор МБЗ-50К	Песок	Стальная фибра	Вода			
850	350	830	180	180	2405	75	0,21

Таблица 2. Физико-механические свойства высокопрочного сталефибробетона по результатам кратковременных испытаний

Возраст бетона, сут.	Прочность, МПа				E <sub>x</sub> 10 <sup>3</sup> , МПа	Класс бетона
	R, МПа	R <sub>b</sub> , МПа	R <sub>t</sub> , МПа	R <sub>tf</sub> , МПа		
3	90,5	75,3			38,2	72
7	130,1	110,1			43,4	104
14	143,5	121,4			44,4	115
28	150,2	128,6			46,1	120
28 (10x10x40см)	157,4	149,7	7.0	20.8	45,7	126
90	151,3	138,8			48,2	121
270	170,0	136,7			45.6	137

Состав исследуемого бетона, представленный в таблице 1, был разработан в НИИЖБ. В качестве матрицы был использован высокопрочный модифицированный бетон, оптимальное количество добавляемой фибры определялось путем экспериментальных исследований [1].

Для всестороннего исследования высокопрочного порошкового сталефибробетона была разработана программа испытаний, включающая кратковременные и длительные загрузки образцов в различном возрасте.

Бетонирование и хранение образцов в первые двое суток происходило при температуре 20°C. Через двое суток образцы распалубливали и укладывали во влажные опилки в помещении с нормальной температурой 20±2°C, где они хранились до проведения испытаний.

### 1.1. Кратковременные испытания

С целью изучения физико-механических

свойств сталефибробетона были проведены испытания кубов и призм на сжатие в возрасте 3, 7, 14, 28, 90 и 270 суток.

Средние значения полученных основных физико-механических характеристик для образцов каждого возраста, а также значения условного класса бетона по прочности на сжатие приведены в таблице 2.

Поясним, что здесь R – кубиковая прочность; R<sub>b</sub> – призмная прочность; R<sub>t</sub> – прочность на осевое растяжение, R<sub>tf</sub> – прочность на растяжение при изгибе, E – модуль упругости бетона.

По полученным значениям можно сделать вывод, что сталефибробетон при твердении очень быстро набирает прочность, так как уже в возрасте 3 суток его призмная прочность составляет 58% от прочности в 28 суток. Прочность сталефибробетона на осевое растяжение составила 4,7% от прочности на сжатие, что чуть меньше, чем у традиционных бетонов (5% для В60). Это хороший по-

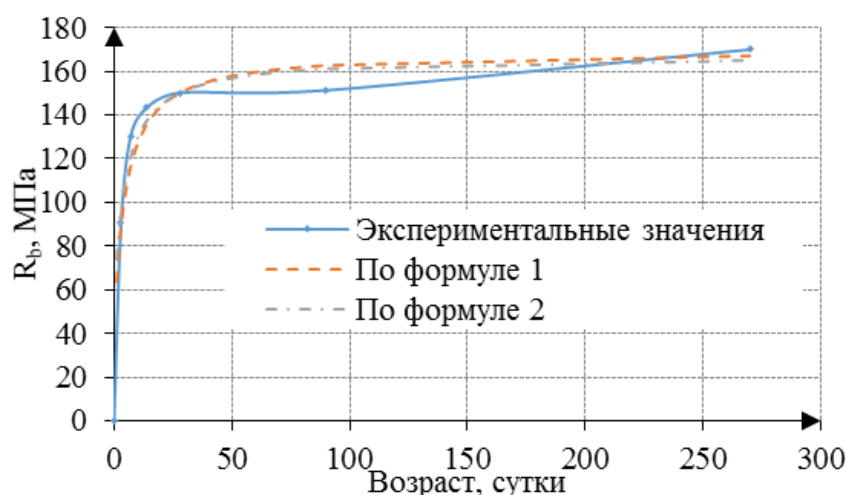


Рис. 1. Рост призмочной прочности в зависимости от возраста бетона.

казатель, учитывая класс исследуемого бетона В120.

Для теоретического описания роста прочности предлагаются следующие формулы:

1. Модифицированная формула Е.Н. Щербатова

$$R_b(t) = R_b(28) \left[ 1 + \frac{23}{55 + B} \cdot \left( \frac{t - 28}{t + 5} \right) \right] \quad (1)$$

где  $R_b(t)$  - призмочная прочность бетона на сжатие в возрасте  $t$ , МПа;  $R_b(28)$  - призмочная прочность бетона на сжатие в возрасте 28 суток, МПа;  $B$  - класс бетона по прочности на сжатие, МПа;  $t$  - возраст бетона к моменту испытания, сут.

2. Формула, подобранная на основе экспериментальных данных

$$R_b(t) = R_b(28) \cdot \frac{t}{2,3 + 0,92 \cdot t} \quad (2)$$

Экспериментальные и теоретические кривые изменения прочности исследуемого бетона приведены на рисунке 2.

## 1.2. Длительные испытания

### 1.2.1. Исследование усадки

Исследования ползучести неразрывно связаны с изучением усадки бетона. Учет дефор-

мации усадки начинался также в возрасте 7, 14, 28 и 90 суток, образцы были гидроизолированы и оборудованы измерительными приборами. Для каждого возраста предусматривалось по 2 усадочных образца, относительные деформации которых в процессе обработки усредняли.

В результате были построены кривые изменения деформаций ползучести во времени. Главной особенностью усадки сталефибробетона является то, что в первые несколько суток после начала учета ее деформации набегают стремительно, затем колеблются относительно примерно одного значения. Значения предельных деформаций усадки представлены в таблице 3. Наиболее существенно усадка проявляется в раннем возрасте, а уже при ее учете в 14 суток и старше она составляет всего  $5 \times 10^{-5}$  единиц и продолжает уменьшаться.

Теоретическое описание изменения деформаций усадки во времени проводилось по формуле [3]:

$$\varepsilon_{bs}(t, t_w) = \varepsilon_{bs}(\infty, t_w) \times \left[ 1 - e^{-\alpha(t-t_w)} \right] \cdot \left[ \frac{A}{e^{\gamma(t-t_w)}} + 1 \right], \quad (3)$$

Таблица 3. Значения предельных деформаций усадки и коэффициентов для формулы (3).

	Возраст начала учета деформаций усадки, сутки			
	7	14	28	90
$\varepsilon_{yc}^{\infty} \cdot 10^{-5}$	17,4	5,0	4,5	3,0
$\gamma$	0,058	0,058	0,07	0,07
$\alpha$	0,027	0,027	0,018	0,018
A	4	4	2	2

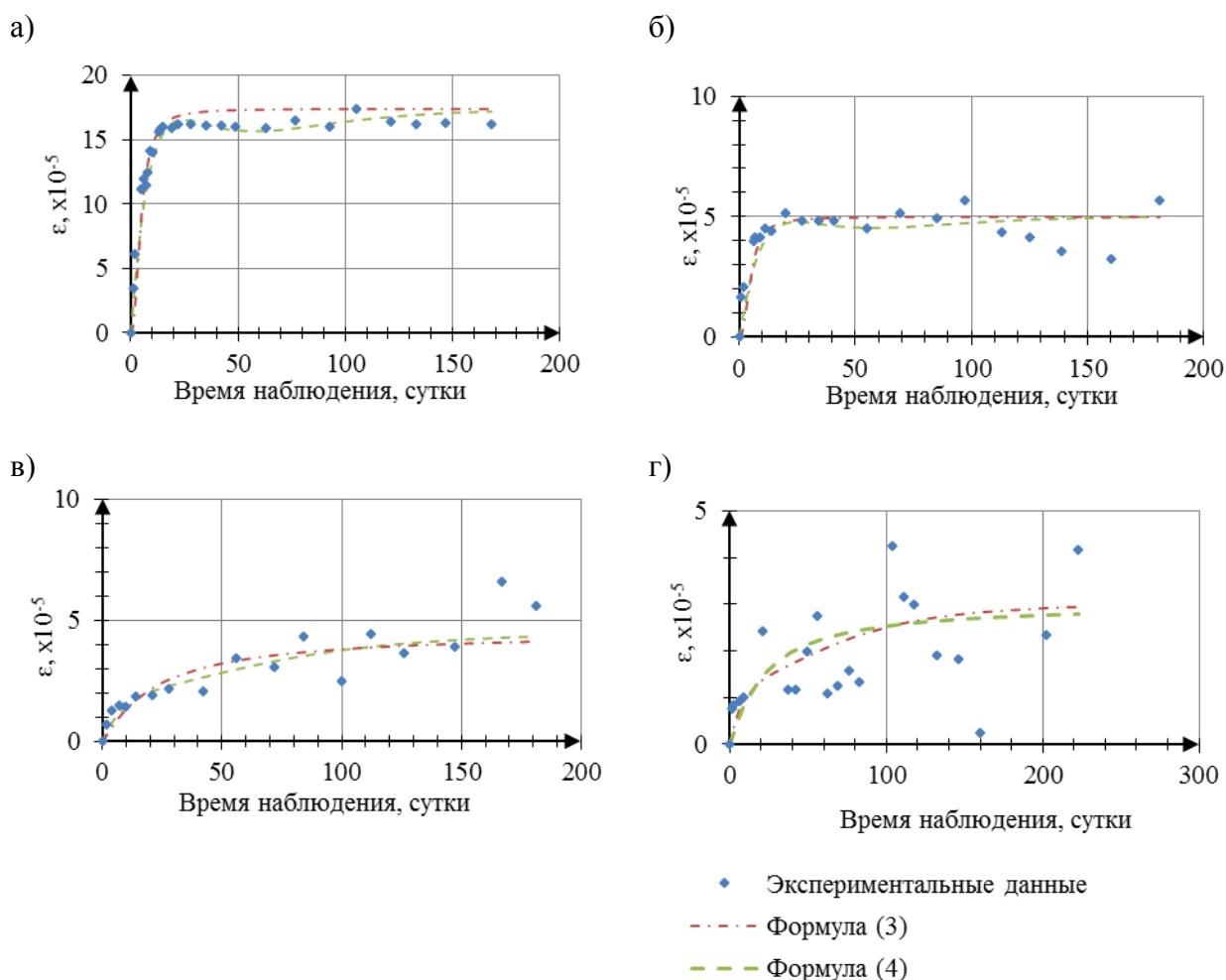


Рис. 2. Диаграммы изменения деформаций усадки, учитывающиеся с возрастом: а - 7 суток; б - 14 суток, в - 28 суток, г - 90 суток.

где  $\varepsilon_{bs}(\infty, t_w)$  - предельные деформации усадки в возрасте  $t_w$ ;  $\gamma$ ,  $\alpha$ , A – коэффициенты, подбираемые из условия наилучшего совпадения теоретических и экспериментальных кривых (таблица 3).

Как видно, значения для сталефибробетона раннего возраста (7 и 14 суток) совпадают между собой, как и значения для более старшего возраста (28 и 90 суток).

Также для аппроксимации опытных данных была использована формула из [2]:

$$(\varepsilon_{sh})_t = \frac{t^\alpha}{f + t^\alpha} \cdot (\varepsilon_{sh})_u \quad (4)$$

где  $\alpha$ , f (сутки) – константы, определяющие зависимость от времени t;  $(\varepsilon_{sh})_u$  - предельное значение усадки. Стандарт [4] рекомендует

Таблица 4. Значение предельных деформаций и мер ползучести.

Показатель	7 суток		14 суток		28 суток		90 суток	
	0,3Rb	0,6Rb	0,3Rb	0,6Rb	0,3Rb	0,6Rb	0,3Rb	0,6Rb
$\epsilon_{п.пред} \cdot 10^{-5}$	77	218	81	200	73	193	68	179
$C_{(\infty, \tau)} \cdot 10^{-5}, \text{ МПа}^{-1}$	2.33	3.3	2.25	2.78	1.87	2.47	1.62	2.13

для обычного бетона значения  $\alpha=0,9-1,1$ ;  $f=20-130$  суток,  $(\epsilon_{sh})_u = 415 \times 10^{-6} - 1070 \times 10^{-6}$ . Поскольку полученные предельные значения усадки сталефибробетона гораздо меньше, коэффициенты были подобраны заново. Для всех возрастов  $f = 30$  суток,  $\alpha=2,2$  для 7 и 14 суток и  $\alpha=1,1$  для 28 и 90 суток.

*Исследование ползучести*

Сталефибробетонные образцы-призмы размером 7x7x28 см. загружались в возрасте 7, 14, 28 и 90 суток нагрузкой, соответствующей 0,3 и 0,6 от призмной прочности, определенной в день загрузки. Нагружение проводилось ступенчато, приложением по 10% от заданного уровня нагрузки на каждой ступени. После загрузки образцы выдерживались под нагрузкой в течение 245 суток.

По показаниям приборов, установленных на образцах, были вычислены средние относительные деформации усадки и ползучести для образцов каждого возраста при разных режимах загрузки. Исходя из уровня приложенной нагрузки, были получены диаграммы изменения мер ползучести во времени, а также вычислены их предельные значения, представленные в таблице 4.

Теоретическое описание полученных диаграмм изменения мер ползучести во времени проводилось по двум методикам:

1. Метод В.М. Бондаренко и Н.И. Карпенко, суть которого выражается в формуле [4]:

$$C_0(\eta, t, \tau) = C_0(\eta, \infty, \tau) - \left[ \frac{C_0(\eta, \infty, \tau) - C_0(\eta, \tau, \tau)}{\left[ 1 + \alpha \frac{m-1}{s+1} (\tilde{t}^{s+1} - 1) \right]^{\frac{1}{m-1}}} \right] \quad (5)$$

где  $\tau$  – возраст бетона,  $t$  - время нагружения ;  $\eta = \frac{\sigma_c}{R_b(\tau)}$  - уровень напряжения  $C_0(\eta, t, \tau)$  – мера ползучести в момент времени  $t$ ;  $C_0(\eta, \infty, \tau)$  - предельная мера ползучести при  $t \rightarrow \infty$ ;  $C_0(\eta, \tau, \tau)$  - дефицит меры ползучести;  $\tilde{t} = \frac{\tau}{t}$  – относительное время нагружения;  $\alpha, m, s$  – эмпирические параметры, зависящие от времени и уровня нагружения.

Особенность этого метода в том, что он учитывает нелинейность деформаций ползучести, возникающей при высоких уровнях напряжения.

Значения  $C_0(\eta, \infty, \tau)$  и  $C_0(\eta, \tau, \tau)$  принимались на основании экспериментальных данных, эмпирические параметры  $\alpha, m, s$  подбирались из условия наилучшего совпадения теоретических и экспериментальных кривых.

2. Метод И.Е. Прокоповича и М.М. Заставы [5]:

$$C_0(t, t_0) = C(\infty, 28) \cdot \Omega(t_0) \cdot f(t, t_0) \quad (6)$$

где  $C(\infty, 28)$  - предельное значение линейной меры ползучести бетона, загруженного в

Таблица 5. Значение коэффициента  $\gamma_1$

Показатель	Значение $\gamma_1$ при модуле открыто поверхности $M_0, m^{-1}$			
	10 и менее	20	40	60 и более
$\gamma_1, \text{сут}^{-1}$	0.004	0.006	0.008	0.01

Таблица 6. Значение коэффициентов для формулы (5).

Возраст, сут.	s		α		m	
	0,3Rb	0,6Rb	0,3Rb	0,6Rb	0,3Rb	0,6Rb
7	3,3	3,9	3,0	5,3	9,46	10,04
14	3,2	3,8	5,8	7,1	9,2	10,1
28	4,8	6,4	5,4	5,5	8,8	9,9
90	6,1	7,4	7,3	7,3	6,7	8

Таблица 1 Значения коэффициентов для формул (6)-(8).

Возраст, сут.	D	B=1-D	a	d	$\gamma_1$
7	0,476	0,524	0,45	0,537	0,01
14	0,335	0,665	0,525	0,582	0,01
28	0,387	0,613	0,525	0,800	0,01
90	0,290	0,710	0,595	2,350	0,01

Таблица 8. Значение коэффициентов для формулы (10).

$\tau$ , сут.	k	a	$V_c$
7	1	0,3	3,55
14	1	0,3	2,41
28	1	0,3	2,44
90	1	0,3	2,55

возрасте 28 суток;  $\Omega(t_0)$  - функция старения, учитывающая влияние возраста загрузки на предельное значение меры ползучести:

$$\Omega(t_0) = 0,5 + d \cdot e^{(-2\gamma_1 t_0)} \quad (7)$$

$f(t, t_0)$  - функция, учитывающая развитие деформаций ползучести во времени:

$$f(t, t_0) = 1 - D \cdot e^{-a_1 \cdot (t-t_0)} - B \cdot e^{-\gamma_1 \cdot (t-t_0)} \quad (8)$$

D, a, d – эмпирические параметры, подбираемые на основании экспериментальных данных,  $\gamma_1$  – коэффициент, принимаемый по таблице 5.

Для обоих методов были подобраны эмпи-

рические коэффициенты (таблица 6, 7), позволяющие применять их для теоретического построения изменения мер ползучести.

Поясним, что

$$M_0 = \frac{\sum F}{V} \quad (9)$$

где  $\sum F$  – общая площадь открытой поверхности,  $m^2$ ; V – объем конструкции,  $m^3$ .

Используя этот метод для построения диаграмм изменения меры ползучести при высоких уровнях напряжений необходимо учитывать нелинейность деформаций ползучести. Мера нелинейной ползучести представляется в виде произведения меры линейной ползучести и функции нелинейности [3]:

$$C(\eta, t, \tau) = f(\eta, \tau) \cdot C'(t, \tau) \quad (10)$$

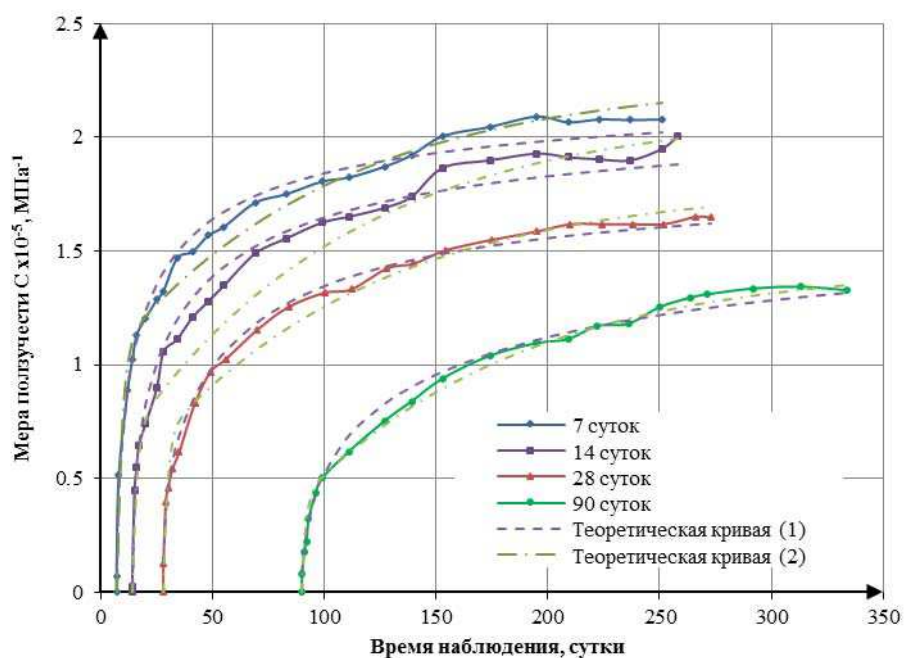


Рис. 3. Экспериментальные и теоретические кривые изменения мер ползучести образцов, нагруженных уровнем нагрузки, соответствующим 0,3 R<sub>b</sub>.

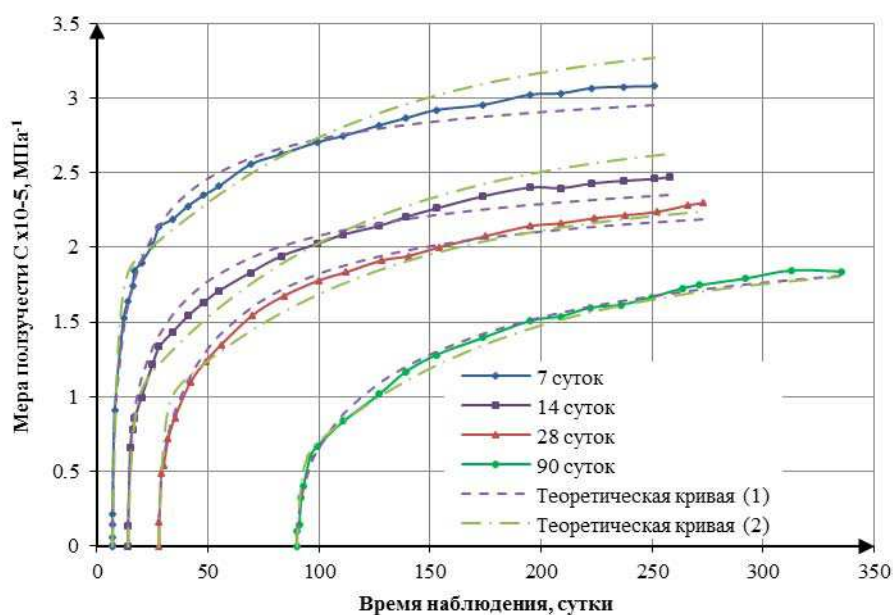


Рис. 4. Экспериментальные и теоретические кривые изменения мер ползучести образцов, нагруженных уровнем нагрузки, соответствующим 0,6 R<sub>b</sub>.

где  $C(\eta, t, \tau)$  – текущая мера ползучести;  
 $f(\eta, \tau)$  – функция нелинейности;  $C'(t, \tau)$  –  
 линейная мера ползучести.

Функция нелинейности может быть пред-  
 ставлена в следующем виде:

$$f_c = 1 + kV_c \frac{\eta^4(t, \tau)}{\sqrt{1 - ae^{-\gamma_1(t-\tau)}}} \quad (11)$$

Значение  $V_c$  зависит от вида бетона, коэф-  
 фициенты  $a$  и  $k$  подбирались на основании

наилучшей сходимости экспериментальных и теоретических данных (таблица 8).

Результаты теоретической обработки экспериментальных данных изменения мер ползучести высокопрочного сталефибробетона представлены на рис. 5, 6.

## 2. ВЫВОДЫ

Проведено масштабное исследование физико-механических и реологических свойств инновационного материала – высокопрочного сталефибробетона. Получены зависимости, позволяющие описать рост прочности сталефибробетона, изменение усадки и мер ползучести сталефибробетона во времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каприелов С.С., Чилин И.А.** Сверхвысокопрочный самоуплотняющийся фибробетон для монолитных конструкций. *Строительные материалы*, 7 (2013), с. 28–30.
2. ACI 209R-92 «Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures».
3. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996.
4. **Бондаренко В.М., Карпенко Н.И.** Уровень напряженного состояния как фактор структурных изменений и реологического силового сопротивления бетона. // *Academia. Архитектура и строительство*, РААСН, 2007, №4
5. **Прокопович И.Е., Застава М.М.** О расчётном определении предельных длительных деформаций тяжелого бетона. // *Бетон и железобетон*, №5, 1972, стр. 35–37.

тельстве», федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук»; академик-секретарь Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук; 127328, Россия, г. Москва, Локомотивный проезд, д. 21, НИИСФ РААСН; тел. +7(495)482-40-76, факс: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Мишина Александра Васильевна, кандидат технических наук, руководитель группы конструкторов, ЗАО «Городской проектный институт жилых и общественных зданий»; 105005, Россия, г. Москва, наб. Академика Туполева, д. 15, корп. 15, этаж 5, ГОРПРОЕКТ; тел.: +7 (926)257-54-78, факс: +7(495)482-40-60, e-mail: amis25@mail.ru

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; заместитель генерального директора по научной работе, ЗАО «Городской проектный институт жилых и общественных зданий»; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; 105005, Россия, г. Москва, наб. Академика Туполева, д. 15, корп. 15, этаж 5, ГОРПРОЕКТ; тел./факс: +7(495)625-79-67, e-mail: travush@mail.ru

Nikolay I. Karpenko, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Laboratory of Research Institute for Building Physics, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Academic Secretary of the Section of Construction Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Locomotivniy Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7(495)482-40-76, fax: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Alexandra V. Mishina, PhD; Leader of the Construction Group, Urban planning institute of residential and public buildings (GORPROJECT); 21, Locomotivniy Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7 (926)257-54-78, fax: +7(495)482-40-60, e-mail: amis25@mail.ru

Vladimir I. Travush, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Vice-Director, Urban planning institute of residential and public buildings (GORPROJECT); Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 24, Bolshaya Dmitrovka Street, Moscow, 107031, Russia; phone/fax: +7(495)625-79-67, e-mail: travush@mail.ru

---

Карпенко Николай Иванович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий лабораторией; «Проблемы прочности и качества в строи-

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ МУФТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ АРМАТУРЫ

*С.Н. Карпенко<sup>1</sup>, В.И. Травуш<sup>2</sup>, И.Г. Чепизубов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Научно исследовательский институт строительной физики

Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Городской проектный институт жилых и общественных зданий, г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** В армировании современных железобетонных конструкций все большее применение начинают находить муфтовые соединения арматуры на резьбе, которые заменяют традиционные соединения в нахлестку. Предлагается методика оценки деформативности и прочности муфтовых соединений арматуры на резьбе, которые находят все большее применение в строительстве. В основу методики положено сопоставление диаграммы деформирования цельного арматурного стержня с диаграммой деформирования соединенного стержня в месте установки муфтового соединения. Поскольку диаграммы деформирования арматуры при сжатии и растяжении идентичны, то за основу принята диаграмма растяжения. Обычно расчетным сопротивлениям арматуры соответствуют предельные относительные деформации при сжатии  $\varepsilon_s$  и растяжении  $\varepsilon_{s 0.2}$ . На основании экспериментальных исследований диаграмм деформирования цельной арматуры и стыковых соединений установлено, что стыки арматур являются более деформативными. Сопоставляя напряжения стыкового соединения с напряжениями цельной арматуры, соответствующие  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_{s 0.2}$ , определяются коэффициенты их снижения  $\gamma_s$  в стыках, которые используются при проектировании. Показано, что коэффициенты  $\gamma_s$  при однократном статическом и циклическом напряжениях являются одинаковыми.

**Ключевые слова:** арматура, муфтовые соединения, диаграммы деформирования, прочность, деформации

## DEFORMABILITY AND STRENGTH DETERMINING OF COUPLING FITTINGS OF STEEL REINFORCEMENT IN THE REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

*Sergey N. Karpenko, Vladimir I. Travush, Igor G. Chepyzubov*

<sup>1</sup> Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Urban planning institute of residential and public buildings, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The fittings on the thread which replace the traditional lap connection begin to find more and more application in reinforcing of modern reinforced concrete structure. The valuation techniques of deformability and strength of coupling fittings of reinforcement on the thread which are increasingly used in construction is presented. The method is based on the comparison of stress-strain diagram of one-piece reinforcing bar with the stress-strain diagram of the connecting rod in the place of installation fitting. On the basis of experimental studies of stress-strain diagrams of one-piece reinforcing bar and butt joints of its rods it was found that the joints of reinforcing bar are more deformation. By comparing of the strain of butt joint with the same of one-piece reinforcing bar corresponding to the calculated deformations of the reinforcement  $\varepsilon_s$  and  $\varepsilon_{s 0.2}$  there are determined the coefficients of the reduction factors of these deformations  $\gamma_s$  in the butt joints which used at designing of reinforced concrete structures.

**Keywords:** reinforcement, fittings, strain, stress-strain diagrams, strength, deformation

## ВВЕДЕНИЕ

На Российских стройках все большее применение начинают находить соединения арматуры при помощи муфт на резьбе взамен ранее применявшихся соединений стержней в нахлестку. Поставщиком таких муфт пока, в основном, выступают различные зарубежные фирмы («Egico», «Dextra», «Hebei Yada reinforcing Bar Connecting Technology Co.» и др.).

Согласно требованию российских норм [1] несущая способность муфтового соединения не должна быть ниже несущей способности арматурного стержня без соединения. Выполнимость этого требования позволяет определить диаграммная методика определения прочности муфтовых соединений, разработанная в НИИСФ РААСН [2]. В данной работе эта методика нашла дальнейшее развитие.

Эта методика указывает на то, что прочность муфтового соединения ниже прочности цельного стержня. Она также позволяет определить коэффициенты условия работы, понижающие прочность и повышающие деформативность муфтового соединения. Значения этих коэффициентов необходимо учитывать при проектировании.

## ДИАГРАММНАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ И ДЕФОРМАЦИЙ МУФТОВОГО СОЕДИНЕНИЯ

В основу методики положено сопоставление диаграмм, связывающих напряжения с относительными деформациями арматурного стержня (диаграммы « $\sigma_s - \varepsilon_s$ » без муфты), с аналогичной диаграммой двух стыкуемых стержней при помощи муфты. Длина (база), на которой производится замер деформаций муфтового соединения

$$l = l_m + 2d_s,$$

где  $l_m$  – длина муфты,  $d_s$  – диаметр соединяемой арматуры; в качестве напряжений здесь также (как и в случае цельных стержней) принимаются напряжения  $\sigma_s$  в стыкуемых стержнях.

В начале испытаний получают экспериментальным путем диаграмму деформирования исходной арматуры. Схематически эта диаграмма представлена на рис. 1 в виде линии I. На линии выделяются четыре точки: 1, 2, 3, 4, где точке I соответствует концу линейного участка диаграммы (напряжениям  $\sigma_{el}$ ), точки 2,3 – максимальным сжимающим напряжениям в арматуре  $\sigma_{sc} = R_{sc}$ , которые допускают нормы использовать при работе арматуры на сжатие (соответственно при кратковременном и длительном напряжении), точка 4 – максимально допускаемым значениям  $\sigma_s = \sigma_{0,2}$  при растяжении. Положение точки 2 определяется по максимальным деформациям сжатия бетона в вершине диаграммы деформирования бетона при сжатии, которые равны  $2 \cdot 10^{-3}$ .

Так как деформации арматуры в сжатом бетоне равны деформациям арматуры  $\varepsilon_b = \varepsilon_s$ , то в момент разрушения бетона деформации арматуры также будут равны  $\varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}$ . Отсюда значение  $\sigma_{sc}$  (при модуле упругости арматуры  $E_s = 2,0 \cdot 10^5$  МПа) должно быть не более значения 400 МПа, которое отвечает указанным укорочениям бетона. При расчете конструкций на длительно действующую часть нагрузки нормы допускают принимать расчетное сопротивление арматуры не более  $\sigma_{sc} = R_{sc} = 500$  МПа. Этой величине отвечают деформации бетона  $\varepsilon_b = \varepsilon_s \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  вместо  $\varepsilon_b = \varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}$ .

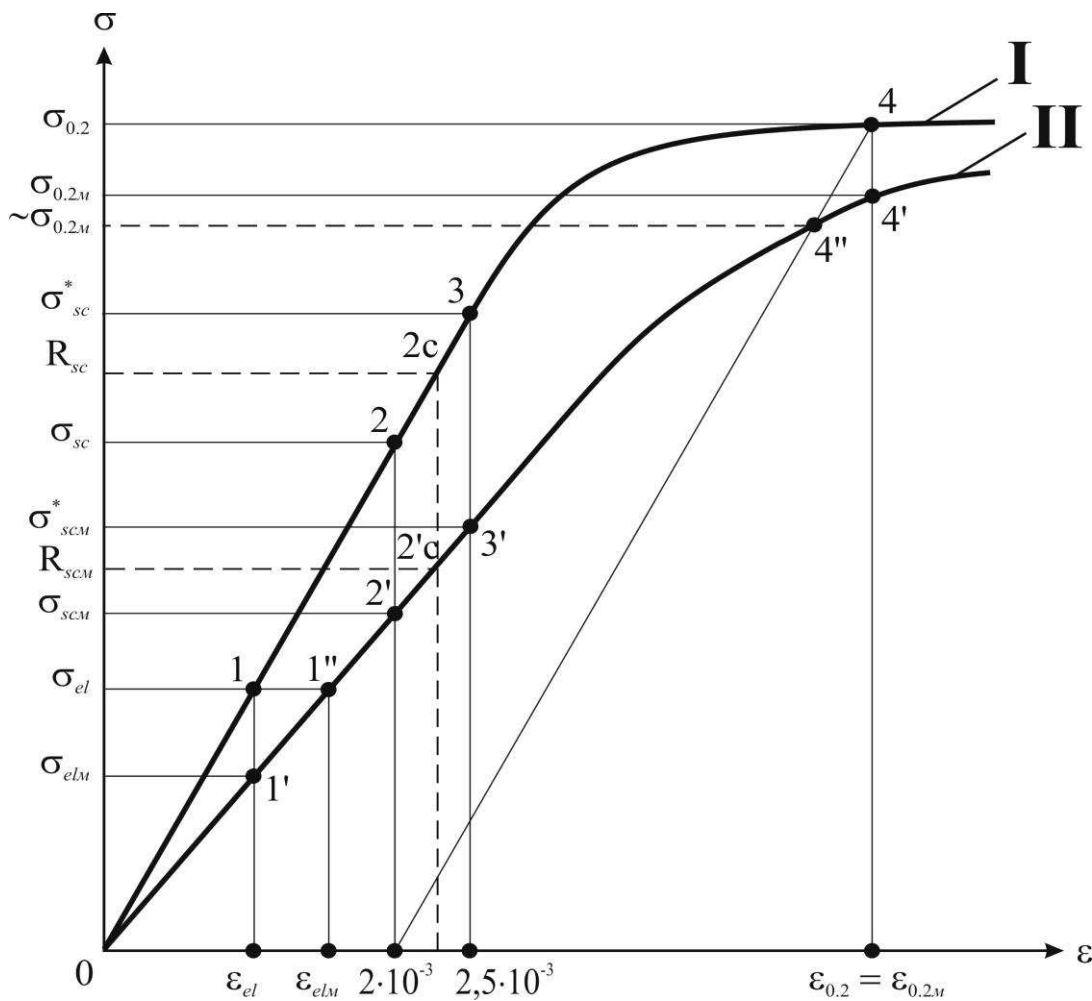


Рис. 1. Сопоставление диаграмм деформирования цельного арматурного стержня (I) с диаграммой деформирования муфтового соединения (II)

При растяжении элементов напряжения в арматуре не должны превышать физического (или условного) предела текучести арматуры  $\sigma_{0,2}$ . Этим напряжениям соответствует точке 4 на диаграмме I (рис. 1). Точке 4 должны соответствовать остаточные деформации в арматуре при разгрузке, равные  $2 \cdot 10^{-3}$ , то есть здесь имеет место чисто случайное совпадение нормируемых остаточных деформаций арматуры и деформаций бетона  $\varepsilon_b = 2 \cdot 10^{-3}$  в вершине диаграммы сжатия. Диаграмма деформирования муфтового соединения II на (рис. 1) располагается ниже диаграммы I. Это установлено по испытаниям муфтовых соединений. Поэтому все указанные выше характеристики для муфтового

соединения оказываются ниже, чем для сплошного стержня без муфты (точки 1', (1''), 2', 3' и 4' (4'')).

Понижающие коэффициенты следуют из сопоставления диаграмм I и II. Находятся следующие отношения: модулей упругости для точек 1 и 1' (отношение равно  $\gamma_E$ ), напряжений сжатия  $\sigma_{sc}$  для точек 2' и 2 ( $\gamma_{cm}$  - отношение  $\sigma_{sc}$ ) и точек 3' и 3 ( $\gamma_{cm}^*$ ), напряжений растяжения  $\sigma_{s0,2}$  ( $\gamma_M$ ) для точек 4 и 4' (возможно 4'').

Например, допустимым деформациям бетона при сжатии  $\varepsilon_b = \varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}$  будет соответствовать точка 2' на диаграмме II и, соответственно, более низкое значение напряжения

$\sigma_{scm}$  в арматуре стыка по отношению к напряжению  $\sigma_{sc}$  в цельном арматурном стержне. Коэффициент снижения составит  $\gamma_{cm} = \sigma_{sc} / \sigma_{sc}$ . Допустимое расчетное сопротивление арматуры сжатию в стыке составит  $R_{scm} = R_{sc} \cdot \gamma_{cm}$ .

В необходимых случаях коэффициенты  $\gamma_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}^*$  уточняются путем дополнительного испытания муфтовых соединений при сжатии и построении диаграмм, аналогичных диаграммам I и II. Опыт аналогичных испытаний показал, что предварительно можно использовать диаграммы I и II, полученные при растяжении.

Снижение модуля деформаций на коэффициент  $\gamma_m$  необходимо учитывать при определении ширины раскрытия трещин.

Указанная методика относится к контролю качества в условиях стройки. Найденные при этом значения коэффициентов  $\gamma_E$ ,  $\gamma_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}^*$ ,  $\gamma_m$  не должны быть меньше величин, указанных в паспорте и сертификате на поставляемую продукцию. При этом должен учитываться вероятностный характер разбросов указанных характеристик с учетом точности изготовления муфтовых соединений в условиях стройплощадки (величины  $\gamma_E$ ,  $\gamma_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}^*$ ,  $\gamma_m$  должны определяться с вероятностью 0,95). Такие значения коэффициентов носят название нормативных. Все нормативные значения коэффициентов  $\gamma_E$ ,  $\gamma_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}^*$ ,  $\gamma_m$  должны указываться фирмой поставщикам в паспорте, а задача научного сопровождения на стройке должна заключаться в их контроле.

Пока в паспортах поставляемых муфтовых соединений таких характеристик нет. В такой ситуации полагаем, что отдельные муфтовые соединения могут быть допущены только при условии введения понижающих коэффициентов  $\gamma_E$ ,  $\gamma_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}^*$ ,  $\gamma_m$  к расчетным характеристикам арматуры, полученных экспериментальным путем на основе предлагаемой методики.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЯ МУФТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ.

Лабораторией «Проблем прочности и качества в строительстве» НИИСФ РААСН выполнены испытания большого количества муфтовых соединений различных фирм. Приведем некоторые характерные данные этих испытаний. Все соединения выполнялись для арматуры класса А500 ( $R_{sc} = 400 - 435$  МПа).

На рис. 2а,б приведены диаграммы деформирования муфтовых соединений фирмы «Lentop» с конической резьбой. Результаты испытаний показали, что качество соединений в большой степени зависит от качества нарезания резьбы в соединительных муфтах.

Так, при нарезании резьбы квалифицированным специалистом от «Egiso», диаграмма деформирования ( $\sigma_s - \varepsilon_s$ ) муфтового соединения приближалась к аналогичной диаграмме арматурного стержня (рис. 2а). Коэффициент снижения расчетного сопротивления соединения при сжатии  $\gamma_{sm} \approx 0,87 - 0,97$ , а при растяжении  $\gamma_{sm} \approx 1$ .

На рис. 2б представлены диаграммы деформирования муфтовых соединений, выполненных строителями в условиях строительных площадок. Для этих соединений  $\gamma_{sm} = 0,70 - 0,85$ ,  $\gamma_m = 0,94 - 0,99$ .

При хорошем контроле качества строительства в условиях строительной площадки  $\gamma_{sm} \approx 0,78 - 0,81$ .

Графики испытаний муфтовых соединений фирма «Dextra» представлены на рис. 3а, б.

Здесь наблюдается та же тенденция в испытаниях, что и у соединений фирмы «Egiso». Соединения, выполненные специалистами фирмы «Dextra» (рис. 3а,  $\gamma_{sm} \approx 0,75 - 0,82$ ) показали более лучшие результаты, чем соединения, выполненные в условиях строительной площадки (рис. 3б,  $\gamma_{sm} \approx 0,66 - 0,76$ ).

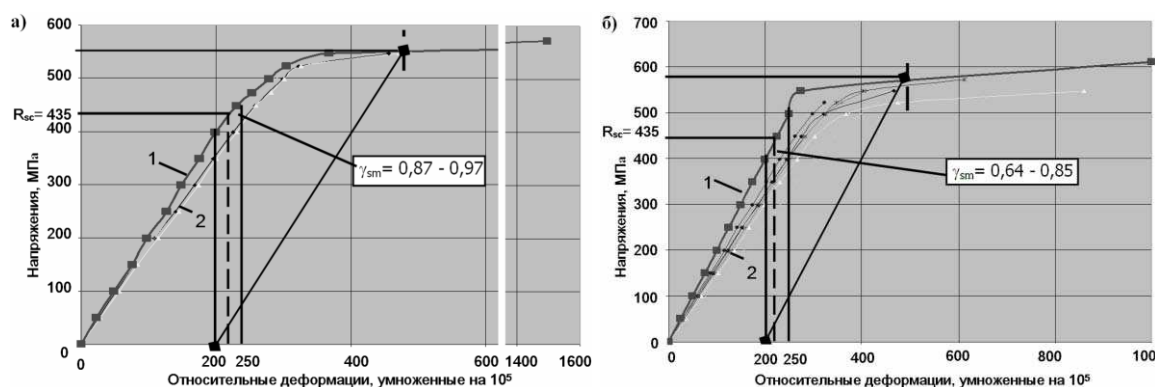


Рис. 2. Диаграммы деформирования муфтовых соединений фирмы «Erico»  
 (а) Нарезание резьбы осуществляли представитель фирмы «Erico»; (б) Нарезание резьбы осуществляли представитель фирмы «Ант-Яны» в условиях строительства; 1 – диаграмма деформирования цельного арматурного стержня, 2 – диаграммы арматурных стержней в месте муфтовых соединений.

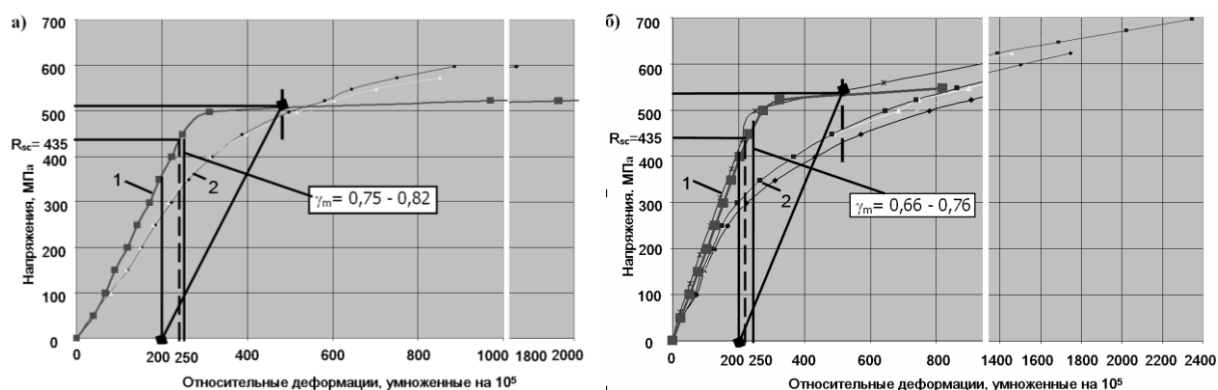


Рис. 3. Диаграммы деформирования муфтовых соединений фирмы «Dextra»  
 (а) Нарезание резьбы и стыковка осуществлялась представителем фирмы;  
 (б) Нарезание резьбы и стыковка осуществлялась в условиях стройплощадки).

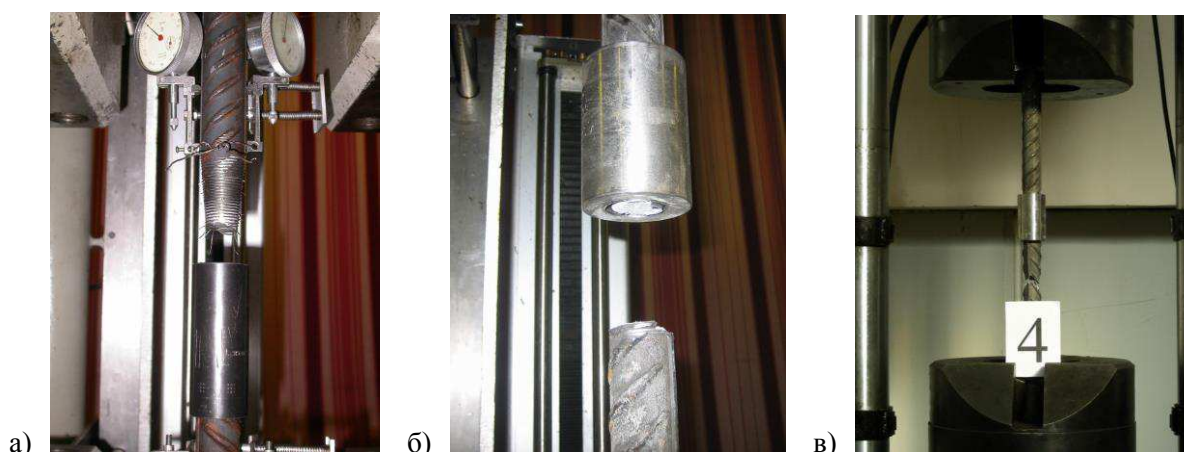
В последнее время в российском строительстве начинают применяться муфтовые соединения, поставляемые различными фирмами из Китая например, «Hebei Yada». Эти соединения, как и представленные выше в значительной степени зависят от качества их выполнения в условиях стройплощадки, и требуют весьма тщательного контроля. При этом качество муфтовых соединений различных фирм поставщиков может также значительно различаться  $\gamma_{sm} \approx 0,873 - 0,65$ .

Соединения фирмы «Erico» разрушились, в основном, от выдергивания арматуры из муфты (рис. 4а), муфтовые соединения фирмы «Dextra» - от разрыва арматуры у контура

вхождения арматуры в муфту (рис. 4б), муфтовые соединения фирмы «Hebei Yada» от разрыва арматуры вне зоны соединения.

## ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. Прочностные характеристики муфтовых соединений на резьбе в значительной степени зависят от качества выполнения резьбы в условиях строительной площадки.



**Рис. 4** Фото разрушения опытных образцов муфтовых соединений:  
(а) фирмы «Egico»; (б) фирмы «Dextra»; (в) фирмы «Hebei Yada».

2. Коэффициенты условия работ должны определяться экспериментальным путем на стадии сертификации муфт, указываться в сертификатах и контролироваться в условиях строительной площадки по предложенной диаграммной методике.
3. Учитывая пониженное сопротивление муфтовых соединений, количество стыкуемых стержней в одном сечении при помощи муфтовых соединений должно быть не более 50%. Расстояние между ближайшими краями муфтовых соединений должно быть не менее  $0,5 l_{an}$ , где  $l_{an}$  - длина анкеровки стержней, и не менее  $4l_m$  где  $l_m$  - длина муфтового соединения.
4. В местах установки муфтовых соединений должно быть установлено дополнительное конструктивное поперечное армирование.
5. Снижение модуля деформации муфтового соединения должно учитываться при определении деформаций железобетонных элементов с трещинами и при определении ширины раскрытия трещин.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\sigma_s$  – напряжения в арматуре,

$\varepsilon_s$  – относительные деформации,  
 $d_s$  – диаметр арматуры,  
 $l_m$  – длина муфты,  
 $l$  – расчетная длина муфтового соединения,  
 $R_{sc}$  – расчетное напряжение арматуры при сжатии,  
 $\sigma_{sc}, \sigma_{sc}^*$  – напряжения в арматуре, соответствующие расчетным относительным деформациям  $\varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_s = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  
 $R_{scm}$  – расчетное напряжение муфтового соединения арматуры при сжатии,  
 $\sigma_{0,2}$  – расчетное напряжение арматуры при растяжении,  
 $\sigma_{scm}^*, \sigma_{scm}$  – напряжения в стыковом соединении, соответствующее расчетным относительным деформациям  $\varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_s = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  
 $\sigma_{0,2m}, \tilde{\sigma}_{0,2m}$  – расчетное напряжение муфтового соединения арматуры при растяжении, соответствующее остаточным деформациям арматуры при разгрузке  $\varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  
 $\sigma_{el}$  – напряжение в арматуре, соответствующее упругой стадии деформирования,  
 $E_s$  – модуль упругости арматуры,  
 $\gamma_E, \gamma_{cm}, \gamma_{cm}^*, \gamma_m$  – коэффициенты снижения расчетных величин муфтового соедине-

ния, соответственно: модуля упругости ( $\gamma_E$ ), прочности при сжатии ( $\gamma_{см}, \gamma_{см}^*$ ), прочности при растяжении ( $\gamma_m$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Свод правил СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М.: 2012 г.
2. **Карпенко С.Н., Чепизубов И.Г., Шифрин К.С.** О результатах проверки прочности муфтовых соединений арматуры на резьбе по диаграммной методике // Промышленное и гражданское строительство, №11, 2008, с. 44-46.

fax: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Vladimir I. Travush, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Vice-Director, Urban planning institute of residential and public buildings (GORPROJECT); Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 24, Bolshaya Dmitrovka Street, Moscow, 107031, Russia; phone/fax: +7(495)625-79-67, e-mail: travush@mail.ru

Igor G. Chepyzubov, PhD, Leading Researcher of the Laboratory, Research Institute for Building Physics, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Locomotivniy Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7 (495)482-40-18, fax: +7(495)482-40-60, e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

---

Карпенко Сергей Николаевич, доктор технических наук, заместитель заведующего лаборатории, федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук»; 127328, Россия, г. Москва, Лocomotивный проезд, д. 21, НИИСФ РААСН; тел. +7(495) 482-40-18; e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; заместитель генерального директора по научной работе, ЗАО «Городской проектный институт жилых и общественных зданий»; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; 105005, Россия, г. Москва, наб. Академика Туполева, д. 15, корп. 15, этаж 5, ГОРПРОЕКТ; тел./факс: +7(495)625-79-67, e-mail: travush@mail.ru

Чепизубов Игорь Геннадьевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории, федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук»; 127328, Россия, г. Москва, Лocomotивный проезд, д. 21, НИИСФ РААСН; тел. +7(495) 482-40-18; e-mail: niisf\_lab9@mail.ru

Sergey N. Karpenko, Professor, Dr.Sc., Deputy Head of Laboratory of Research Institute for Building Physics, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21, Locomotivniy Proezd, Moscow, 127238, Russia, NIISF RAASN; phone: +7(495)482-40-18,

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЕ С НЕЧЕТКИМ ЛОГИЧЕСКИМ ВЫВОДОМ

*Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков*

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Применение подходов, основанных на использовании понятия нечеткого множества, дает эффективные решения задач, содержащих неточность, нечеткость, присутствующих в оценке технического состояния строительных конструкций. В работе представлены принципы и реализация моделирования программных модулей экспертных систем для оценки технического состояния строительных конструкций на базе фрагмента прототипа, предназначенного для определения технического состояния наклонных сечений изгибаемых железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** теория нечетких множеств, функции принадлежности, иерархическая структура, нечеткая база знаний, строительные конструкции, наклонные сечения, техническое состояние строительных конструкций.

## THE TECHNICAL CONDITION OF OBLIQUE SECTION CONCRETE STRUCTURES IN THE EXPERT SYSTEM WITH FUZZY LOGIC

*Galina G. Kashevarova, Yuri L. Tonkov*

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

**Abstract:** Approaches based on the use of the concept of a fuzzy set, gives effective solutions to problems that contain inaccurate, illegible, present in the evaluation of the technical state of the structures. The paper presents the principles and implementation of simulation software modules of expert systems for the evaluation of the technical state of the structures on the basis of a fragment of a prototype, designed to determine the technical condition of oblique section of flexible reinforced concrete structures.

**Keywords:** theory of fuzzy sets, membership functions, hierarchical structure, fuzzy knowledge base building construction, sloping section, the technical condition of building constructions

### ВВЕДЕНИЕ

Число гражданских и промышленных строительных объектов в Российской Федерации непрерывно растет. Это ведет к росту количества их обследований, и ответственности служб, эксплуатирующих здания и сооружения. Обеспечение безаварийной эксплуатации зданий и сооружений предполагает умение своевременно распознавать степень эксплуатационной пригодности (категорию тех-

нического состояния) каждой отдельно рассматриваемой конструкции и здания в целом, т.е. требует глубоких знаний в области строительства и в большой степени зависит от опыта эксперта. Нехватка высококвалифицированных специалистов, проблемы подготовки кадров, отсутствие четко сформулированных критериев оценки технического состояния, рыночная конкуренция обуславливают актуальность автоматизации экспертной деятельности, т.е. создания эксперт-

ной системы (ЭС), способной выполнить поддержку принятия решений в инженерном обследовании строительных конструкций с обеспечением выполнения требований норм. Одна из трудностей построения экспертных систем – это присутствие неопределенности и расплывчатости представления человеческих знаний. Операции с недостоверностью фактов в инженерном обследовании могут решаться на идеях баесовской вероятности [1, 2]. Однако на практике вероятностный подход далеко не всегда можно применить, т.к., размер статистически устойчивой выборки не всегда достаточен или отсутствует строгая повторяемость событий. Работа эксперта при создании интеллектуальной системы заключается не в вероятностной природе, а в нечетких тезисах [3]. Наиболее эффективные решения задач, содержащих нечеткости, нечеткость, в последнее время получают с применением подхода, основанного на использовании понятия нечеткого множества (*fuzzy sets*), введенного Л. Заде в 1965 г.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ

Экспертная оценка технического состояния зданий и сооружений предполагает принятие решения о категории технического состояния строительных конструкций. Автоматизация данного процесса связана с решением задачи при весьма нечетких исходных данных  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , связанных, как с весьма приближительными «лингвистическими» характеристиками технического состояния конструкций, так и с крайней нечеткостью выходных понятий «категория технического состояния».

Современные интеллектуальные технологии позволяют в этих условиях на базе знаний, полученных в результате обобщения экс-

пертных оценок, делать заключение, используя функции принадлежности вида  $\mu_{jp}(x_i)$ , которые указывают степень принадлежности элемента  $x \in X$  некоторому подмножеству [4, 5].

В настоящее время разработан исследовательский прототип программного модуля ЭС, предназначенного для проведения экспертизы по определению категории технического состояния изгибаемых железобетонных конструкций, который успешно прошел тестирование.

Возможность применения теории нечетких множеств и принципы построения математической модели программных модулей в настоящей работе представлены на примере построения одной из ветвей этого прототипа – для экспертной оценки технического состояния наклонных сечений изгибаемых железобетонных конструкций.

Нечеткий логический вывод ЭС, как объекта с дискретным выходом (рис. 1), осуществляется по алгоритму задач классификации [6], т. е. отнесения объекта, заданного вектором входных контролируемых параметров  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  к одной из категорий технического состояния  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ . Классификация соответствует отображению вида:  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow C \in \{c_1, \dots, c_4\}$ .

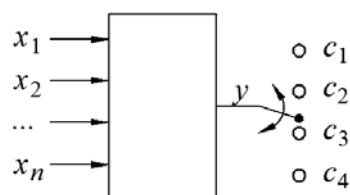


Рисунок 1. Схема моделирования объекта с дискретным выходом

Технические состояния классифицированы в соответствии с действующим национальным стандартом РФ [7]:  $c_1$  – нормативное техническое состояние;  $c_2$  – работоспособное



- укрупненные классы влияющих факторов: {условия и соответствие эксплуатации ( $y_e$ ), условия возведения ( $y_a$ ), результаты визуального обследования ( $y_v$ ), результаты детального обследования ( $y_d$ )};

- классы факторов, влияющих на «результаты детального обследования»: {состояние наклонных сечений ( $y_{co}$ ), состояние нормальных сечений ( $y_n$ ), состояние материалов и формы ( $y_m$ ), состояние сопряжений ( $y_s$ ) и оценка деформаций ( $y_f$ )};

- входные параметры, рассматриваемые как лингвистические переменные:  $x_{21}$  – измеренная коррозия арматуры,  $x_{22}$  – освидетельствованная коррозия поперечной арматуры,  $x_{23}$  – сопротивление арматуры,  $x_{31}$  – освидетельствованная прочность бетона,  $x_{32}$  – измеренная прочность бетона,  $x_{33}$  – нейтрализация бетона,  $x_1$  – поверочные расчеты,  $x_2$  – аварийные признаки;

- входные параметры, составляющие лингвистическую переменную:  $x_{111}$  – ширина раскрытия трещины,  $x_{112}$  – расстояние между трещинами,  $x_{113}$  – угол между трещиной и хомутами (или отгибами),  $x_{114}$  – класс арматуры.

На иерархический характер структуры наложена нечеткая база знаний в виде нечетких матриц для всех нетерминальных вершин и корня.

Нечеткая база знаний разработана в форме правил нечетких продукций и лингвистических переменных. Лингвистическую переменную можно определить как переменную, значениями (термами) которой являются не числа, а слова или предложения естественного языка. Каждому терму лингвистической переменной соответствует определенное нечеткое множество со своей функцией принадлежности, которая описывает совместимость этого терма с различными числовыми значениями.

Формат нечетких правил: «Если <посылка правила>, То <заключение правила>». Правила состоят из переработанной экспертной лингвистической информации, содержащейся в литературных источниках, посвященных

проблемам предупреждения аварий и безаварийной эксплуатации зданий и сооружений, а также эвристические знания из собственного опыта.

Для представления всех зависимостей (1) лингвистическими правилами при построении экспертных высказываний, введены нечеткие термы-оценки переменных в левых частях зависимостей. Используются термы с соответствующими обозначениями: в – «высокий», вс – «выше среднего», с – «средний», нс – «ниже среднего», н – «низкий».

Для примера в таблице 1 представлена нечеткая матрица знаний моделирования зависимости  $y_2 = f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23})$ . Аналогичные матрицы знаний построены для всех зависимостей. Общая база знаний для структуры оценки состояния наклонных сечений содержит 186 правил.

Таблица 1. Матрица знаний для зависимости

$$y_2 = f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23})$$

Если			То $y_2$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	
в	в	в	в
в	в	н	нс
с	в	в	вс
с	в	н	нс
н	в	в	нс
н	в	н	нс
в	с	в	вс
в	с	н	нс
с	с	в	нс
с	с	н	нс
н	с	в	нс
н	с	н	н
в	н	в	нс
в	н	н	нс
с	н	в	нс
с	н	н	н
н	н	в	н
н	н	н	н

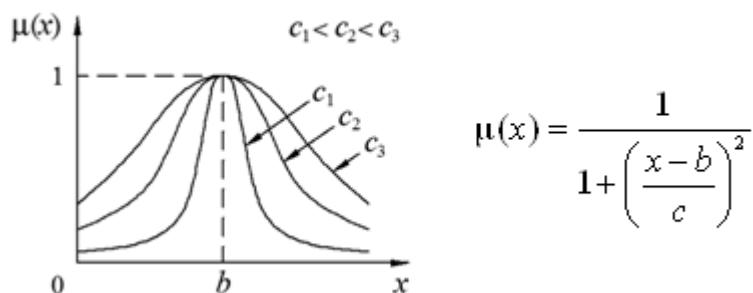


Рисунок 3. Графическая и аналитическая модель колоколообразной функции принадлежности

Термы задаются нечеткими множествами с функциями принадлежности, определяемыми с помощью прямых и косвенных методов [8, 9].

Входные переменные, содержащие измеряемые свойства, формализуются прямым методом построения функции принадлежности, т.е. непосредственным заданием функции, позволяющей вычислять ее значения. Использована, одна из наиболее распространенных функций – колоколообразная [10]. Графическая и аналитическая модель этой функций принадлежности переменной  $x$  произвольному нечеткому терму (рис. 3) простая и удобная для настройки. В формуле:  $b$  и  $c$  – параметры настройки:  $b$  – координата максимума функции;  $c$  – коэффициент концентрации – растяжения функции. Для нечеткого терма число  $b$  представляет наиболее возможное значение переменной  $x$ .

Для оценки качественных признаков сформированы матрицы нечетких отношений. Функции принадлежности качественных признаков получены косвенным методом парных сравнений Саати [11], с использованием оценок экспертов, имеющих достаточно высокую квалификацию, опыт работы и многочисленную статистику в рассматриваемой области. Данный метод применительно к данной системе, оказался наиболее рациональным.

Для оценки качественных признаков сформированы матрицы нечетких отношений. Функции принадлежности качественных признаков, получены косвенным методом –

методом парных сравнений Саати [11], который применительно к данной системе, является оптимальным в сравнении с прямым методом. При построении функции принадлежности методом Саати для каждой пары элементов универсального множества оценено преимущество одного элемента над другим по отношению к свойству нечеткого множества. Такие парные сравнения представлены следующими матрицами:

$$A = \begin{matrix} u_1 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ u_2 & \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots \\ u_n & \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

где  $a_{ij}$  – уровень преимущества элемента  $u_i$  над  $u_j$  ( $i, j = 1, n$ ), определяемый по 9-ти балльной шкале Саати.

В качестве окончательного решения выбирается класс с максимальной степенью принадлежности:

$$C = \arg \max_{\{c_1, \dots, c_4\}} (\mu_{c_1}(X), \mu_{c_2}(X), \mu_{c_3}(X), \mu_{c_4}(X))$$

Обработка знаний в экспертной системе осуществляется логическим выводом по нечетким продукциям. Многомерные зависимости «входы – выходы» заданы нечеткими правилами с логическими операциями «и» ( $\wedge$ ) и «или» ( $\vee$ ), которые, соответственно, заменяются на операции (над функциями принадлежности) «минимума» и «максимума»:

$$\mu(a) \wedge \mu(b) = \min[\mu(a), \mu(b)],$$

$$\mu(a) \vee \mu(b) = \max[\mu(a), \mu(b)].$$

Расчет степени принадлежности объекта  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  по классам  $c_i$  производится по формуле:

$$\mu_{c_j}(X) = \max_{p=1, k_i} w_{jp} \min(\mu_{jp}(x_i)), j = \overline{1, m},$$

где  $\mu_{jp}(x_i)$  – функция принадлежности входа  $x_i$  нечеткому терму  $a_{jp}$ .

### ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕДСТАВЛЕННОЙ МОДЕЛИ ПРОТОТИПА ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ

Для оценки состояния наклонных сечений железобетонной балки, необходимо знать причины возникновения повреждений и характер возможного разрушения. Основными влияющими факторами на процесс идентификации состояния наклонных сечений на этапе *детального (инструментального) инженерного обследования* являются: класс поперечной арматуры, ширина раскрытия трещин, расстояние между наклонными трещинами, состояние бетона сжатой зоны и между трещинами, состояние поперечной арматуры (хомутов, отгибов продольной арматуры) расположение (направление) трещин, а также показатель поверочных расчетов. Отметим, что поверочные расчеты являются обязательной составной частью этапа *детального инженерного обследования* здания или сооружения согласно [7].

Для примера допустим, что все контролируемые элементы (части, участки, детали) и условия эксплуатации (всего их более 50), кроме показанных на рис. 2, имеют идеальные показатели, соответствующие исправному техническому состоянию, и могут не учитываться. Тогда техническое состояние всей конструкции в соответствии с [7], можно определить только по состоянию наклон-

ных сечений. В этом случае, принятие решения о техническом состоянии балки  $cVC = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ , соответствует вектору фиксированных значений входных переменных  $X = \{x_{111}, x_{112}, x_{113}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_1, x_2\}$ .

В результате детального инженерного обследования определена совокупность следующих значений контролируемых параметров:

1. На приопорном участке балки высотой сечения 350 мм обнаружена одна наклонная трещина на расстоянии 0,3 м от опоры;
2. Ширина раскрытия наклонной трещины – 0,15 мм;
3. Трещина направлена под углом 47 градусов к оси хомута;
4. Повреждения бетона в сжатой зоне отсутствуют;
5. Потери площади сечения арматуры не обнаружено;
6. При вскрытии поперечной арматуры обнаружена незначительная поверхностная коррозия в виде локальных участков (пятен и точек);
7. Расчетное сопротивление арматуры не ниже величины, принятой нормами для соответствующего класса;
8. При простукивании бетона издается звонкий звук, но остаются следы при царапании поверхности;
9. Прочность бетона на опорном участке балки по результатам неразрушающего контроля снижена на 15 % от проектного значения;
10. Глубина нейтрализации бетона в среднем до 35 % от толщины защитного слоя бетона;
11. По результатам поверочных расчетов несущая способность наклонных сечений не обеспечена с перенапряжением до 4 %.

В соответствии с описанием системы, входные переменные принимают значения, представленные в таблице 2.

Таблица 2. Значения переменных.

$x_{111}$ , мм	$x_{112}$ , мм	$x_{113}$ , град.	$x_{114}$ , у.е.	$x_{14}$ , у.е.	$x_{21}$ , %	$x_{22}$ , у.е.	$x_{23}$ , %	$x_{31}$ , у.е.	$x_{32}$ , %	$x_{33}$ , %	$x_1$ , %	$x_2$ , у.е.
350	0,15	47	1	0	0	1	0	1	15	35	4	0

Таблица 3. Значения функций принадлежности элементов 1-го слоя.

Наименование термина	$\mu_{jp}(y_{11})$	$\mu_{jp}(x_{14})$	$\mu_{jp}(x_{21})$	$\mu_{jp}(x_{22})$	$\mu_{jp}(x_{23})$	$\mu_{jp}(x_{31})$	$\mu_{jp}(x_{32})$	$\mu_{jp}(x_{33})$
«высокий», $j = в$	0,0270	1	1	0,2	1	0,3902	0,2358	0,2461
«средний», $j = с$	0,7484	–	0,3077	0,3288	–	–	0,9615	0,8
«низкий», $j = н$	0,2653	0,1	0,1	0,1185	0,2	0,1379	0,0536	0,1756

Таблица 4. Значения функций принадлежности элементов 2-го слоя.

Наименование термина	$\mu_{jp}(y_1)$	$\mu_{jp}(y_2)$	$\mu_{jp}(y_3)$	$\mu_{jp}(x_1)$	$\mu_{jp}(x_2)$
«высокий», $j = в$	0,0270	0,2	0,2358	0,6097	1
«выше среднего», $j = вс$	–	0,3288	0,3902	–	–
«средний», $j = с$	–	–	–	0,4525	–
«ниже среднего», $j = нс$	0,7484	0,3077	0,1756	–	–
«низкий», $j = н$	0,2653	0,1185	0,1379	0,1289	0

Таблица 5. Значения функций принадлежности состояний наклонных сечений.

Наименование термина	$\mu_{jp}(y_{co})$
«высокий», $j = в$	0,0270
«выше среднего», $j = вс$	0,0270
«ниже среднего», $j = нс$	<b>0,3288</b>
«низкий», $j = н$	0,2653

Функции принадлежности элементов нижнего уровня (1-го слоя) иерархии принимают значения, приведенные в таблице 3.

Значения функции принадлежности элементов верхнего уровня (2-го слоя) иерархии представлены в таблице 4.

В результате расчета по структуре получаем степени принадлежности технических состояний по каждому из четырех нечетких термов – таблица 5.

Правила нечеткой базы знаний в корневой зависимости прототипа ЭС предусматривают следующее соответствие термов состояния наклонных сечений техническим состояниям: терм «высокий» соответствует исправному техническому состоянию; «выше среднего» – работоспособному; «ниже среднего» – ограниченно работоспособному, «низкий» – аварийному техническому состоянию. Таким образом, при оговоренном ранее допущении (результаты других ответвлений иерархической системы прототипа ЭС имеют идеальные показатели – «высокий»), определяющим результатом технического состояния всей балки в представленном примере будут являться вычисления в «ветке» состояний наклонных сечений – ограниченно работоспособное техническое состояние, поскольку функция принадлежности для «ниже среднего» принимает максимальное значение равное **0,3288**.

Да, может быть, можно обойтись более простым и надежным утверждением «если наклонные трещины есть – состояние аварийное», при этом меньше ответственности. Но при таких подходах в инженерном обследовании можно уйти в крайность – например, запрет эксплуатации зданий при наличии любых трещин.

## ИТОГИ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ВЫВОДЫ

Модель нечеткого логического вывода обеспечивает возможность наблюдения за изменением категории технического состояния при вариации влияющих на нее факторов, что дает возможность прогнозировать возможные результаты при неполной информации. Это может оказать помощь в проведении оценки безопасности конструкций молодыми специалистами.

Организация знаний и эффективность их использования в вычислениях зависит от организации структурной схемы.

Излагаемая методика и принципы могут быть использованы для построения эксперт-

ных систем по определению категории технического состояния всех видов и типов строительных конструкций.

Расширение «термальности» лингвистических переменных приводит увеличению набора правил, при этом отмечается улучшение точности реагирования на категорию технического состояния.

Увеличение точности моделирования может быть достигнуто за счет настройки функций принадлежности по мере накопления реальных экспериментальных данных.

Снижение влияния «субъективного» человеческого фактора в оценке технических состояний строительных конструкций может быть достигнуто применением ЭС с заложенным в программу опытом экспертов и исследований в области диагностики строительных конструкций.

Сложность и трудоемкость создания экспертной системы оценки технического состояния строительных конструкций, несомненно, будет оправдана результатами ее массового практического применения.

Целесообразно также внедрение технологии экспертных систем в виде программ-тренажеров в процесс обучения студентов и специалистов для углубления знаний и получения навыков соответствующей специализации.

Эти проблемы и возможные подходы к их решению, подробно рассмотрены в работах [12, 13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соколов В.А.** Категории технического состояния строительных конструкций зданий при их диагностике вероятностными методами // *Фундаментальные исследования*. 2014. № 6-6. – С. 1159-1164.
2. **Соколов В.А.** Определение категорий технического состояния строительных конструкций зданий и сооружений с использованием вероятностных методов распознавания. Предотвращение аварий

- зданий и сооружений // Сборник научных трудов. Выпуск 9. Москва, 2010 г. – С. 375-387
3. Прикладные нечеткие системы: пер. с япон./ К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под редакцией Т.Терано, К. Асаи, М. Сургено. – М.: Мир, 1993. – 386 с.
  4. **Кашеварова Г.Г., Фурсов М.Н., Тонков Ю.Л.** О построении функций принадлежности нечеткого множества в контексте задачи диагностики повреждений железобетонных плит // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Т. 10. № 2. – С. 93-101.
  5. **Kashevarova G.G., Fursov M.N., Tonkov Y.L.** Membership functions of fuzzy sets in the diagnosis of structures pathology // Informatics, Networking and Intelligent Computing Proceedings of the 2014 International Conference on Informatics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014), November 16-17, 2014, Shenzhen, China, pp. 261–264.
  6. **Штовба С.Д.** Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
  7. ГОСТ 31937-2011. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния / Введ. 2012-04-12. – М. ГУП МНИИТЭП, 2011. – 89 с.
  8. **Борисов А.Н.** Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: «Зинатне», 1990. 184 с.
  9. **Поспелов Д.А.** Нечеткие множества в моделях управления и искусственном интеллекте. – М.: «Наука», 1986. 312 с.
  10. **Ротштейн А.П.** Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы и нейронные сети. Винница: Універсум-Вінниця, 1999. 320 с.
  11. **Саати Т.** Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: – «Радио и связь», 1993. 278 с.
  12. **Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Фурсов М.Н.** Нечеткая экспертная система диагностики повреждений строительных конструкций // Вестник Волжского регионального отделения [Текст]: сб. науч. тр. Вып.17. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2014. – С. 167-173.
  13. **Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л.** Разработка модуля экспертной системы диагностики зданий и сооружений для определения категорий технических состояний строительных конструкций // Вестник отделения строительных наук: вып. 18 / РААСН – Москва: МГСУ, 2014. – С. 30-35.
- 
- Кашеварова Галина Геннадьевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: ggkash@mail.ru .
- Тонков Юрий Леонидович, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198393, e-mail: 95081@mail.ru .
- Galina G. Kashevarova, Adviser RAASN, Professor, Dr.Sc., Head of department “Building constructions and computational mechanics”, Perm National Research Polytechnic University; Russia, 614010, Perm, ul. Kuibyshev, 109, tel. +7 (342) 2198361, e-mail: ggkash@mail.ru.
- Yuri L. Tonkov, Ph.D Student, Department “Building constructions and computational mechanics”, Perm National Research Polytechnic University; 614010, Russia, Perm, ul. Kuibyshev, 109; tel. +7 (342) 2198393; e-mail: 95081@mail.ru.

# ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЧЕТКОЙ БАЗЫ ЗНАНИЙ В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ О ТЕХНИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков*

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Важным аспектом при построении нечетких баз знаний для экспертных систем оценки технического состояния строительных конструкций является онтологический анализ предметной области. В данной работе представлено моделирование рассуждений с использованием метода онтологического анализа данных на примере экспертной оценки технического состояния наклонных сечений изгибаемых железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** онтологический анализ, иерархическая структура, нечеткая база знаний, наклонные сечения, техническое состояние строительных конструкций, функции принадлежности

## FUZZY KNOWLEDGE BASE ONTOLOGICAL ANALYSIS IN SUPPORT DECISION SYSTEM OF THE TECHNICAL STATE OF REINFORCED BENDED CONCRETE STRUCTURE

*Galina G. Kashevarova, Yuri L. Tonkov*

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

**Abstract:** The ontological analysis of the subject area is an important aspect of the construction of fuzzy knowledge bases of expert systems for evaluation of the technical state of the structures. This paper presents modeling of reasoning using the method of the data ontological analysis in the example of an expert evaluation of the technical state of reinforced bended concrete structure.

**Keywords:** ontological analysis, hierarchical structure, fuzzy knowledge base, sloping section, the technical state of constructions, the membership function

### ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение безаварийной эксплуатации зданий и сооружений предполагает умение своевременно и быстро распознавать степень эксплуатационной пригодности (категорию технического состояния) каждой отдельно рассматриваемой конструкции. Нередко, персонал, ответственный за техническое состояние строительных объектов, и даже специалисты, проводящие инженерное обследование зданий и сооружений, не имеют достаточных

профессиональных знаний в «узких» предметных областях, что приводит к неверному анализу информации и неверным выводам о состоянии конструкций и объекта в целом. Поэтому весьма актуальна поддержка принятия решений в проблемных ситуациях с использованием интеллектуальной экспертной системы, разработанной на принципах инженерии знаний в рассматриваемой предметной области.

Одна из трудностей построения экспертных систем – это присутствие неопределенности и расплывчатости представления человеческих

знаний, которое может быть обусловлено неполнотой, внутренней противоречивостью, неоднозначностью и размытостью исходных данных, проблемой выбора наиболее информативных признаков из большого количества параметров состояния объекта, в том числе и качественных, которые нужно получить и проанализировать за ограниченное время. Применение теории нечетких множеств и её приложений позволяет строить формальные схемы решения задач, характеризующиеся той или иной степенью неопределенности при инженерном обследовании строительных объектов и выдаче заключения о категории его технического состояния.

Важным аспектом при проектировании ЭС является онтологический анализ предметной области [1, 2], в основе которого лежит описание предметной области в терминах сущностей, отношений между ними, и действий над сущностями. Суть онтологического анализа заключается в структуризации и классификации знаний, установлении связей, параметров и характеристик, разработке тезауруса. Помимо упорядочивания знаний о предметной области, онтологический анализ способствует повышению качества управления сложными системами. Принятие правильных и своевременных решений должно быть поддержано предоставлением соответствующей информации, содержащей возможные альтернативы решений, выработанные в результате инструментального анализа возникшей проблемной ситуации, а также на основе знаний, накопленных экспертами.

Результативность ЭС, достоверность экспертного моделирования предметной области требует дополнительной аргументации. Такое обоснование, использующее метод онтологического анализа данных на примере экспертной оценки технического состояния наклонных сечений изгибаемых элементов железобетонных конструкций, представлено в данной работе.

Экспертная система поддержки принятия решений о техническом состоянии изгибаемых железобетонных конструкций и формальная

модель предметной области, сочетающая опыт экспертов и элементы расчета представлена в работе [3].

Математическая модель процесса принятия решения о техническом состоянии балки основана на иерархической структуре нечеткого вывода, отображающей классификацию влияющих на него факторов (рис. 1). В рассматриваемом фрагменте условно не показаны другие контролируемые элементы (части, участки, детали) и условия эксплуатации (всего их в прототипе ЭС более 50).

Кружками на структуре обозначены классы влияющих факторов (нетерминальные вершины [4]), описываемые зависимостями вида:

$$\begin{aligned}y_{11} &= f_{11}(x_{111}, x_{112}, x_{113}, x_{114}); \\ y_1 &= f_1(y_{11}, x_{14}); \\ y_2 &= f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}); \\ y_3 &= f_3(x_{31}, x_{32}, x_{33}); \\ y_{co} &= f_c(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2); \\ y_c &= f_c(y_{jn}), j = \overline{1, s}. \\ & \quad \quad \quad n=1, t\end{aligned} \quad (1)$$

Выходной показатель  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  называется корнем, а конечные узлы – терминальными вершинами [4]. Технические состояния  $c_1, c_2, c_3, c_4$  классифицируются в соответствии с [5]. В структуру входят:

- *укрупненные классы* влияющих факторов: {условия и соответствие эксплуатации ( $y_e$ ), условия возведения ( $y_a$ ), результаты визуального обследования ( $y_v$ ), результаты детального обследования ( $y_d$ )};

- *классы факторов*, влияющих на «результаты детального обследования»: {состояние наклонных сечений ( $y_{co}$ ), состояние нормальных сечений ( $y_n$ ), состояние материалов и формы ( $y_m$ ), состояние сопряжений ( $y_s$ ) и оценка деформаций ( $y_f$ )};

- *входные параметры*, рассматриваемые как лингвистические переменные [6]:  $x_{21}$  – измеренная коррозия арматуры,  $x_{22}$  – освидетельствованная коррозия поперечной арма-

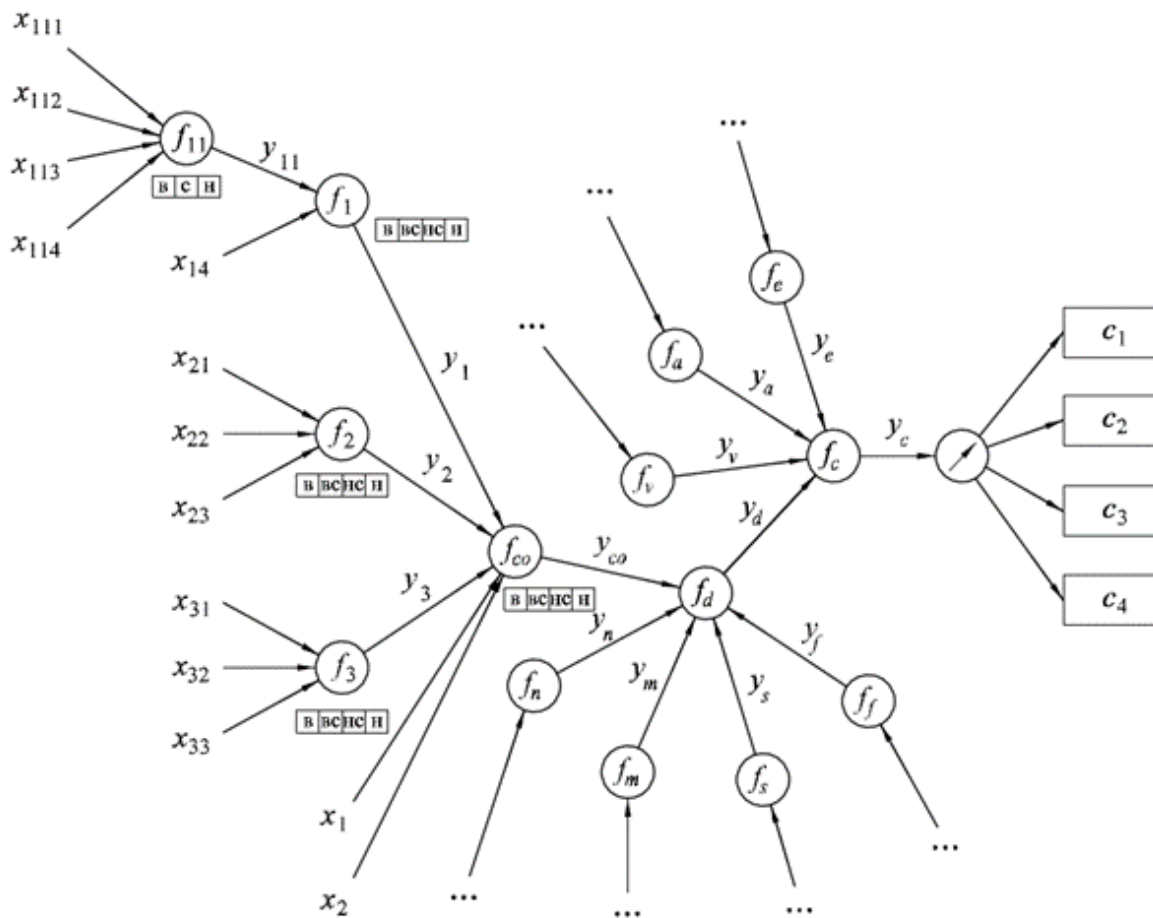


Рисунок 1. Иерархическая структура нечеткого вывода технического состояния наклонных сечений, как составная часть иерархической нечеткой системы прототипа программного модуля оценки технического состояния изгибаемых железобетонных конструкций

туры,  $x_{23}$  – сопротивление арматуры,  $x_{31}$  – освидетельствованная прочность бетона,  $x_{32}$  – измеренная прочность бетона,  $x_{33}$  – нейтрализация бетона,  $x_1$  – поверочные расчеты,  $x_2$  – аварийные признаки;

- входные параметры, составляющие лингвистическую переменную  $y_{11}$ :  $x_{111}$  – ширина раскрытия трещины,  $x_{112}$  – расстояние между трещинами,  $x_{113}$  – угол между трещиной и хомутами (или отгибами),  $x_{114}$  – класс арматуры. На иерархический характер структуры наложена нечеткая база знаний [7, 8] в виде нечетких матриц для всех нетерминальных вершин и корня. Основой представления лингвистических переменных являются *термы* с колоколообразными функциями принадлежности

[7], заданными прямым и косвенным методами [9, 10, 11, 12].

### ФАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ОНТОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА – ПОСТРОЕНИЯ БАЗЫ ЗНАНИЙ

Для оценки состояния наклонных сечений железобетонной балки, необходимо знать причины возникновения повреждений и характер возможного разрушения.

При умеренных процентах поперечного армирования напряжения в хомутах, пересекаемых наклонной трещиной, при разрушении балки достигают предела текучести. При этом в сжатой зоне возможно появление

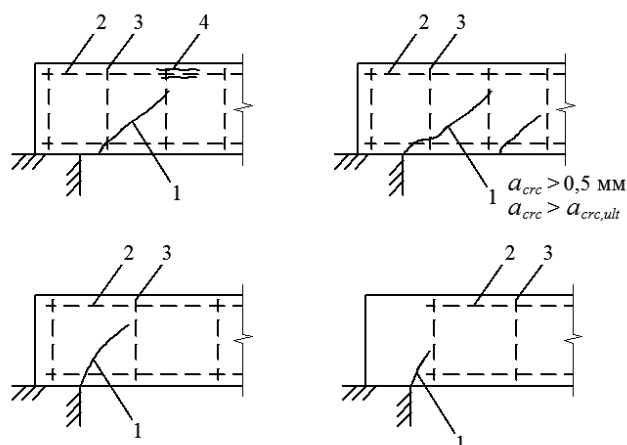


Рисунок 2. Аварийные технические состояния опорных участков:

1 – наклонная трещина, 2 – продольная арматура, 3 – поперечная арматура, 4 трещины, раздробление бетона в сжатой зоне

продольных трещин и раздробление бетона (особенно в статически неопределимых системах). При достаточном мощном поперечном армировании, например стенок тавровых и двутавровых балок, усилия в бетоне между наклонными трещинами большие, а сопротивление арматуры используется не полностью, поэтому и наиболее вероятное разрушение при таких условиях – физическое разрушение бетона от действия главных сжимающих напряжений между наклонными трещинами (с отслаиванием и раздавливанием бетона).

Основные причины появления наклонных трещин в опорных участках – перегрузка и/или неправильное поперечное армирование. К неправильному поперечному армированию относится: большой шаг хомутов, большое удаление поперечной арматуры от опоры, низкое качество соединения поперечной и продольной арматуры, низкий класс бетона.

**Аварийные состояния наклонных сечений.** Большой шаг стержней поперечного армирования (хомутов), большое удаление первого хомута от опоры могут привести к образованию наклонной трещины между хомутами, которые при этом не будут вовлечены в работу. Некачественная приварка к

продольным стержням резко ухудшает анкеровку стержней поперечной арматуры и приводит к их выдергиванию из бетона. Если наклонная трещина у свободной опоры элемента выходит на растянутую грань и раскрытие трещины превысило 0,5 мм, то это свидетельствует о том, что произошло продергивание продольной арматуры на опоре. Если одновременно появились продольные трещины в бетоне над концом наклонной трещины, это свидетельствует о разрушении конструкции по наклонному сечению. Эти состояния опорных участков являются наиболее опасными, а конструкцию в этом случае следует отнести к аварийному техническому состоянию (рис. 2).

#### Класс параметров «раскрытие трещины».

Одним из наиболее важных и значимых показателей напряженного состояния сечения является отсутствие/наличие и ширина раскрытия силовых трещин. Безусловно, наклонные трещины, считаются наиболее опасным видом трещин в балках. Однако их появление не позволяет однозначно, если конечно трещина не находится в зоне заанкеривания рабочей продольной арматуры, «отнести» конструкцию к категории аварийного технического состояния, как это можно увидеть в некоторых

литературных источниках. Если признаки повреждений указывают на случай перегрузки, то сам факт появления наклонной трещины говорит о снижении несущей способности наклонных сечений элемента, конструкция может находиться в ограниченно работоспособном или в аварийном техническом состоянии. Более точный вывод можно сделать только по результатам оценки ширины раскрытия, расстояния между трещинами, угла наклона, места ее расположения, а также состояния бетона в сжатых зонах сечения. При этом, некоторые обследователи, появление наклонных трещин связывают с аварийным состоянием, другие – пытаются сопоставить раскрытие трещины с граничным значением из условия сохранности арматуры, что делать недопустимо, как и в случае идентификации границ аварийного состояния при оценке нормальных трещин. Оценка ширины раскрытия наклонной трещины с позиции долговечности арматуры вообще теряет смысл. Определение граничных значений ширины раскрытия наклонных трещин в ЭС, соответствующих аварийному состоянию, т.е. состояния достижения растянутой арматурой предела текучести, основано на подходе, представленном в работе [13]. Этот метод учитывает расстояние между образовавшимися трещинами. Пренебрегая растяжимостью бетона, раскрытие трещин будет равно абсолютному удлинению арматуры на участке между трещинами:

$$a_{crc,ult} = \epsilon_{sm} l_{crc},$$

где  $\epsilon_{sm}$  – среднее значение относительной деформации арматуры на участке между трещинами:

$$\epsilon_{sm} = \gamma_s \epsilon_s,$$

Здесь  $\gamma_s$  – отношение средних относительных деформаций на участке между трещинами к относительным деформациям арматуры в сечении с трещиной  $\epsilon_s$ . Ориентировочно может быть принято  $\gamma_s = 0,9$ .

За расстояние между трещинами принимается расстояние по перпендикуляру к оси элемента между двумя соседними трещинами или, если трещина одна, длина поперечного стержня (рис. 3).

Для арматуры, имеющей физический предел текучести, относительные деформации при достижении предела текучести можно принять в зависимости от класса, а именно: для класса А-I (А240) – 0,0011, для класса А-II (А300) – 0,0019, для класса А-III (А400) – 0,0028.

Учитывая, что наклонные трещины располагаются под углом к оси хомута, значение ширины раскрытия трещин  $a_{crc}$  следует еще умножить на  $\sin \varrho$ , где  $\varrho$  – угол между наклонной трещиной и хомутом, рис. 3 (или отгибом, что характерно для балок старой застройки).

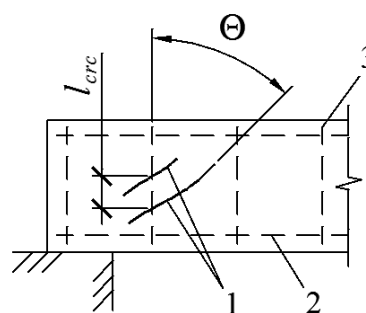


Рисунок 3. К определению расстояния между трещинами и угла наклона трещин: 1 – наклонная трещина, 2 – продольная арматура, 3 – поперечная арматура, 4 трещины, раздробление бетона в сжатой зоне.

Таким образом, значение показателя «раскрытие трещины» ( $\gamma_{11}$ ) определяется по четырем контролируемым параметрам: «класс арматуры поперечного армирования»; «ширина раскрытия трещины», который может принимать значения большие или равные 0; «расстояние между трещинами»; «угол между трещиной и хомутами» (или отгибами).

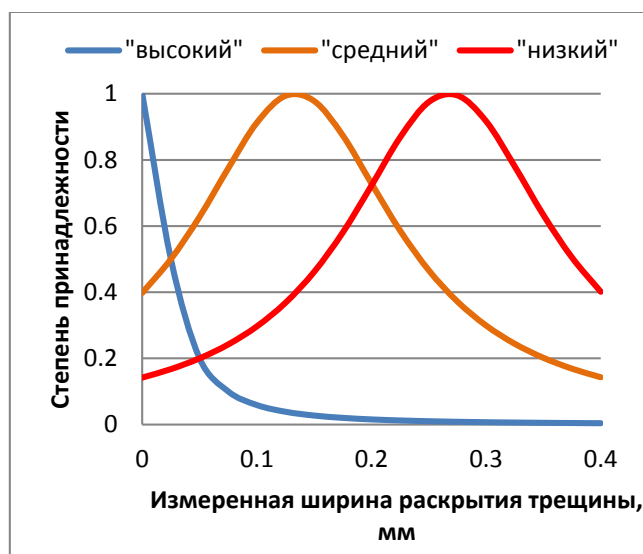


Рисунок 4. Функции принадлежности нечетких термов, описывающих значение класса параметров «раскрытие трещины» ( $y_{11}$ ) при значении угла между трещиной и поперечной арматурой класса А-III (А400) 45 градусов и расстоянии между трещинами 150 мм.

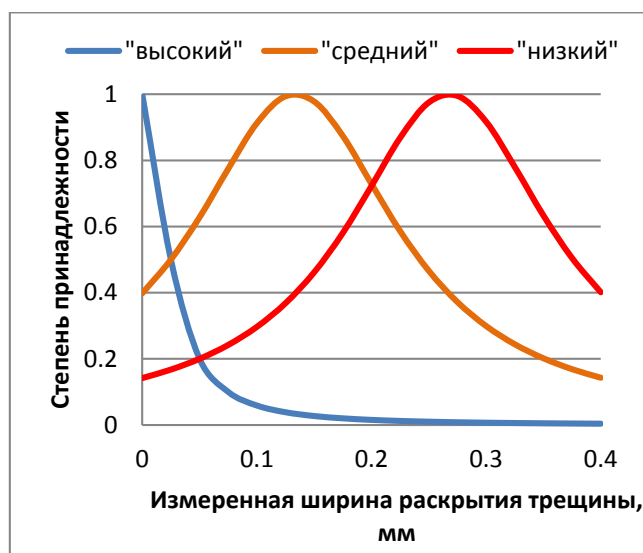


Рисунок 4. Функции принадлежности нечетких термов, описывающих значение класса параметров «раскрытие трещины» ( $y_{11}$ ) при значении угла между трещиной и поперечной арматурой класса А-III (А400) 45 градусов и расстоянии между трещинами 150 мм

Сравнение измеренной ширины раскрытия обнаруженной наклонной трещины  $a_{crc}$  с вычисленным значением аварийного состояния  $a_{crc, ult} \sin \varphi$  в некоторых случаях не позволяет с уверенностью отнести конструкцию к тому или другому состоянию. Определенность вносит переход от конкретных значений показателя состояния трещины к значениям ее

лингвистических переменных с помощью операции фаззификации.

Проведенное исследование показало, что удобно диапазоны измеряемых величин, при которых происходят изменения состояний системы, оценивать двумя или тремя термами. Так, интервал «неаварийного» раскрытия трещины, со значениями от 0 до значения, соответствующего «аварийному» состоянию

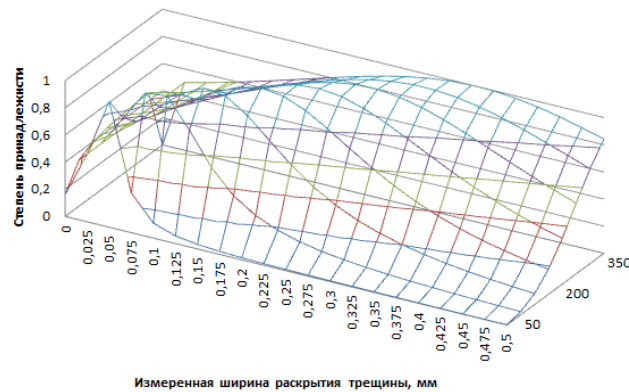


Рисунок 5. Поверхность отклика нечеткого терма «средний» класса параметров «раскрытие трещины» при значениях угла между трещиной и поперечной арматурой класса А-III (А400) 45 градусов и различных возможных расстояниях между трещинами

$a_{crc, ult} \sin \Omega$ , описывается тремя нечеткими термами, как мерами по аналогии с этапами образования трещин: значения терма «высокий» – этап возникновения трещин, когда они могут быть невидимыми; «средний» – появление трещин, когда их возможно увидеть невооруженным глазом (от 0,05 мм); «низкий» – раскрытие трещин до предельно возможного («аварийного») значения (рис. 4).

Зависимость показателя «ширина раскрытия трещины» одновременно от нескольких контролируемых параметров приводит к необходимости автоматической подстройки параметров функций принадлежности нечетких термов [11, 12].

Максимальное значение терма «высокий» принимается при отсутствии трещин – 0 мм. Максимум терма «низкий» – принято при значениях ширины раскрытия трещины, соответствующих достижению арматурой физического предела текучести. Максимальное значение терма «средний» назначено на середине интервала значений переменных между максимумами термов «высокий» и «низкий». Параметры настройки колоколообразной функции принадлежности [7] для терма «высокий» одинаковы для всех вариантов входных значений переменной «расстояние между трещинами»: координата максимума  $b$

$= 0$  мм,  $c$  – определено из условия половины априорной возможности дефекта в виде трещины, т.е. при  $m(x) = 0,5$ , где  $x = 0,05/2 = 0,025$  мм. Параметры настройки функции принадлежности для терма «средний» зависят от входных контролируемых параметров: координата ее максимума  $b$  принимается как середина интервала раскрытия трещины до «аварийного» значения; параметр  $c$  также меняется, и определяется из условия пересечения графиков функций термов «высокий» и «средний» при значениях  $m(x) = 0,5$ . Параметры настройки функции принадлежности для терма «низкий», также как и для терма «средний», зависят от входных контролируемых параметров: координата ее максимума  $b$  принимается равным «аварийному» значению раскрытия трещины; концентрация  $c$  принята равной концентрации функции терма «средний».

На рис. 5 представлено графическое отображение функции нечеткого терма «средний» при фиксированном значении переменной «угол между трещиной и хомутами» (45 градусов). Полученный график представляет собой дефазифицированную поверхность терма и наглядно показывает то, что значения одного терма могут лежать в широком диапазоне.

**Переменная «напряженное состояние бетона».** Раздробление и трещины в бетоне (в сжатой зоне) над концом наклонной трещины, а также между трещинами являются признаком аварийного состояния конструкции. Информация о напряженном состоянии оценивается двумя четкими терминами – «высокий» и «низкий». К условному значению переменной, соответствующей максимальному значению термина «высокий», отнесено отсутствие силовых и внешних повреждений, к «низкий» – признаки, свидетельствующие о раздроблении бетона сжатой зоны.

**Переменная «освидетельствованная коррозия поперечной арматуры».** Коррозия поперечной арматуры имеет ряд негативных последствий, основными из которых являются: ухудшение совместной работы хомутов (или отгибов) с бетоном; повреждение защитного слоя бетона раскливающим действием продуктов коррозии; снижение несущей способности конструкции в результате уменьшения площади сечений арматуры; возможность хрупкого разрушения в результате образования язвенных полостей (питтингов).

Исходными данными для этого показателя являются результаты визуального освидетельствования стержней поперечной арматуры, хомутов или отгибов на участках вскрытия защитного слоя. Также могут быть использованы результаты неразрушающего метода контроля коррозии арматуры, основанного на определении удельного электрического сопротивления бетона [14]. Лингвистические значения переменной представлены в таблице 2.

Для описания переменной введены три термина («высокий», «средний», «низкий»), описывающие ее лингвистические значения. Здесь, как и у других лингвистических переменных, для получения степеней принадлежности нечеткого множества и построения функций принадлежности (рис. 6) используется косвенный метод – метод парных сравнений Сати [11, 15].

Таблица 2. Лингвистические значения переменной «освидетельствование коррозии поперечной арматуры».

Условное значение, у.е.	Лингвистическое значение переменной
0	Поверхность арматуры чистая, без признаков коррозии.
1	Поверхность арматуры имеет отдельные точки и пятна без коррозионного налета и язв коррозии.
2	Участки коррозионного налета без язв поверхностной коррозии, без повреждения защитного слоя бетона.
3	Сплошная поверхностная, язвенная и пластинчатая коррозия, на отдельных участках происходит растрескивание защитного слоя бетона.
4	Сплошная пластинчатая коррозия, растрескивание и выдавливание защитного слоя бетона продуктами коррозии.

**Переменная «измеренная коррозия поперечной арматуры».** Оценка интервала входной переменной «измеренная коррозия поперечной арматуры» производится с помощью трех нечетких термов. К максимальному значению показателя «высокий» в системе отнесено отсутствие коррозии – 0 %, к «среднему» – коррозия до 7 %, к «низкому» – коррозия 15 % и более.

**Показатель «освидетельствованная прочность бетона».** На этапе детального (инструментального) инженерного обследования широко применяется неразрушающий контроль прочности бетона. Надежность результатов неразрушающего контроля во многом зависит от применяемой приборной базы, от оснащенности и квалификация специалиста, осуществляющего контроль. Практика показывает, что, например, значение прочности бетона, определенная приборами неразрушающего контроля, в ряде случаев существенно отличается от значений прочности бетона, определенных разрушающим контролем об-

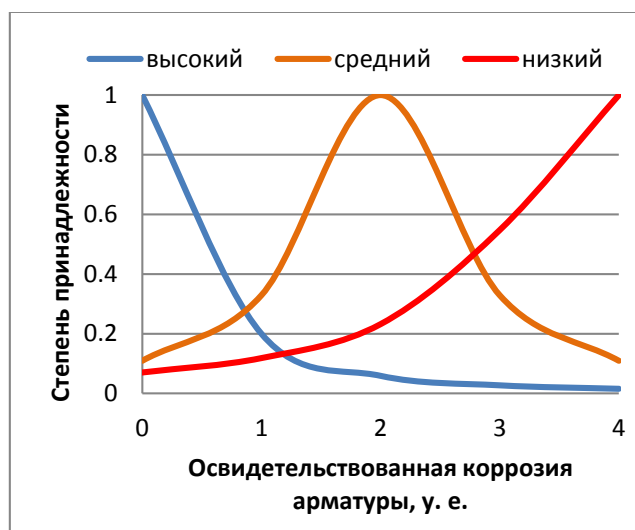


Рисунок 6. Функции принадлежности нечетких термов, описывающих значения переменной «освидетельствованная коррозия поперечной арматуры»

разцов, отобранных из обследуемой конструкции [16]. Отмечается неопределенность фиксируемых параметров, связанная с приборной составляющей погрешности, качеством обработки поверхности материала [17], наличием дефектов в зоне измерений, напряженным состоянием конструкции, неравномерной прочностью материала и др. Поэтому для оценки прочности бетона необходим некий синтез результатов неразрушающего контроля и «дедовского» метода исследования – простукивание материала с визуальной и слуховой оценкой [18]. С учетом оговоренного, в систему введена переменная «освидетельствованная прочность бетона» – см. таблицу 3.

**Переменная «измеренная прочность бетона».** Интервал входной переменной «измеренная прочность бетона» оценивается тремя нечеткими термами. Максимальное значение термина «высокий» соответствует значению переменной при отсутствии снижения прочности от проектного значения – 0 %, значение термина «средний» – снижению прочности до 10 %, значение термина «низкий» – снижению прочности на 30 % и более.

Таблица 3. Лингвистические значения переменной «освидетельствованная прочность бетона»

Условное значение, у.е.	Лингвистическое значение переменной
0	При простукивании бетона издается звонкий звук. Следов и сколов при ударах и царапании не остается.
1	При простукивании бетона издается довольно звонкий звук. Остаются малозаметные (в мм) сколы. При царапании остаются малозаметные штрихи.
2	При простукивании бетона присутствует глухой звук в сочетании со звонким. Заостренные предметы (зубило) вбиваются в бетон на глубину до 10 мм. Остаются заметные сколы
3	При простукивании бетона издается только глухой звук, заостренные предметы (зубило) довольно легко вбиваются в бетон на глубину 20 мм и более. Остаются глубокие сколы

**Переменная «нейтрализация бетона».** Нейтрализация бетона – это процесс взаимодействия его со средой. Наиболее распространена карбонизация бетона надземных кон-

струкций с содержащимся в атмосфере углекислым газом, которая на промышленных объектах сопровождается нейтрализацией другими кислыми газами ( $\text{SO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{S}$  и др.). Нейтрализация бетона сопровождается шелушением поверхности, переуплотнением, приводит к разрушению наружного, защитного слоя бетона, что может нарушить совместную работу бетона и арматуры.

Интервал входной переменной «нейтрализация бетона» оценивается тремя нечеткими термами. Максимальное значение термина «высокий» назначено при условии отсутствия нейтрализации бетона – 0 %, максимум термина «средний» – когда нейтрализация бетона составляет половину толщины защитного слоя бетона (50 %), «низкий» – соответствует нейтрализации на толщину защитного слоя (100 %) и более.

**Переменная «проверочные расчеты».** Анализ результатов обследования и проверочных расчетов на этапе инструментального обследования обычно позволяет дать достоверный ответ на вопрос о состоянии конструкции. Но здесь можно встретить следующие случаи:

- конструкция имеет признаки, характерные для некоторого состояния, что подтверждают и проверочные расчеты, без противоречий;
- конструкция имеет признаки снижения несущей способности, а проверочные расчеты это не подтверждают;
- конструкция не имеет признаков снижения несущей способности, например, ограниченно работоспособного или аварийного, а по результатам проверочных расчетов конструкцию следует отнести именно к этим состояниям.

В случаях противоречий между результатами осмотра, измерений и проверочных расчетов, необходимо вновь проанализировать проверочные расчеты (проверить учет влияния выявленных дефектов, правильность выбранной расчетной схемы и др.), вновь обследовать конструкцию, проанализировать дефекты и причины их появления. Не редкость, что окончательное решение все-таки приходится

делать в условиях противоречий. Необходимо иметь в виду, что часто в расчетах не учитывается совместная работа строительных конструкций, их переменная жесткость, а значит и перераспределение усилий и напряжений. В результате этого, усилия в отдельных сечениях элемента могут значительно превосходить расчетные значения.

Интервал входной переменной «показатель поверочные расчеты» описывается тремя нечеткими термами (рис. 7). Значение переменной, при которой терм «высокий» принимает максимальное значение, принято равным 0, как выполнение требований обеспечения несущей способности. Терм «низкий» принимает максимальное значение при значениях переменной, когда снижение несущей способности составляет 30 % и более, терм «средний» – 15 %, как среднее значение между термами «высокий» и «низкий». Координатой максимума колоколообразной функции [7] термина «высокий» принято  $b = 0$  мм, значение концентрации  $c$  определено из условия половины априорной возможности снижения несущей способности на 5 % (т.е. при  $m(x) = 0,5$ , где  $x = 5$  %).

## ИТОГИ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ВЫВОДЫ

Тестирование представленного в данной работе прототипа модуля ЭС, разработанного на основе онтологического анализа данных, при решении задач оценки технического состояния наклонных сечений железобетонных изгибаемых элементов, показало высокую результативность и достоверность экспертного моделирования. При этом отмечается отсутствие необходимости дополнительной «тонкой настройки» модели (увеличения точности моделирования за счет настройки функций принадлежности [7]).

Расширение «термальности» лингвистических переменных приводит к увеличению набора правил, при этом отмечается улучшение точности реагирования на категорию технического состояния.

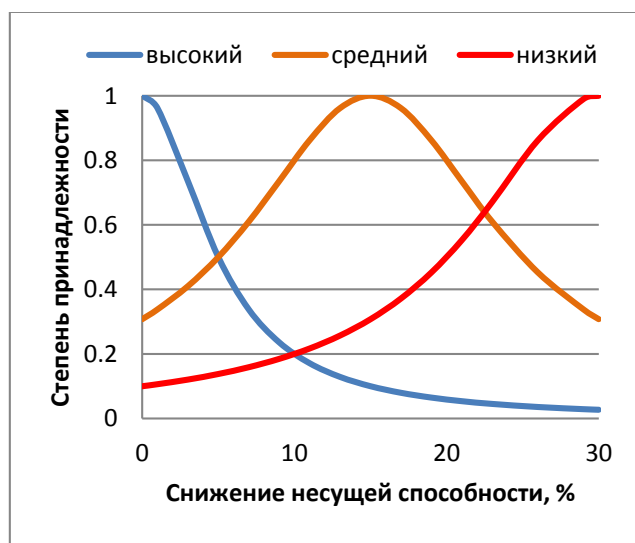


Рисунок 7 – Функции принадлежности нечетких термов, описывающих значения переменной «поверочные расчеты»

Организация знаний и эффективность их использования в вычислениях зависит от организации структурной схемы.

Модель нечеткого логического вывода обеспечивает возможность наблюдения за изменением категории технического состояния при вариации влияющих на нее факторов, что дает возможность прогнозировать возможные результаты при неполной информации.

Излагаемая методика и принципы могут быть использованы для построения экспертных систем по определению категории технического состояния всех видов и типов строительных конструкций;

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Смирнов С.В.** Онтологический анализ предметных областей моделирования // Известия Самарского научного центра РАН. 2001. Т.3. -№ 1. – С. 62-70
2. Базы знаний интеллектуальных систем / Т. А. Гаврилова, В. Ф. Хорошевский — СПб: Питер, 2000. – 384 с.
3. **Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л.** Разработка модуля экспертной системы диагностики зданий и сооружений для определения категорий технических состояний строительных конструкций // Вестник отделения строительных наук: вып. 18 / РААСН – Москва: МГСУ, 2014. – С. 30-35.
4. ГОСТ 31937-2011. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния / Введ. 2012-04-12. – М. ГУП МНИИТЭП, 2011. – 89 с.
5. **Оре О.** Теория графов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
6. **Заде Л.А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
7. **Ротштейн А.П.** Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы и нейронные сети. Винница: Універсум-Вінниця, 1999. – 320 с.
8. **Штовба С.Д.** Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. - М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
9. **Борисов А.Н.** Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: «Зинатне», 1990. – 184 с.
10. **Поспелов Д.А.** Нечеткие множества в моделях управления и искусственном интеллекте. - М.: «Наука», 1986. – 312 с.
11. **Кашеварова Г.Г., Фурсов М.Н., Тонков Ю.Л.** О построении функций принадлежности нечеткого множества в контексте

- задачи диагностики повреждений железобетонных плит // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. Т. 10. № 2. – С. 93-101.
12. **Kashevarova G.G., Fursov M.N., Tonkov Y.L.** Membership functions of fuzzy sets in the diagnosis of structures pathology // *Informatomics, Networking and Intelligent Computing Proceedings of the 2014 International Conference on Informatomics, Networking and Intelligent Computing (INIC 2014)*, November 16-17, 2014, Shenzhen, China, pp. 261–264.
  13. **Гроздов В.Т.** Признаки аварийного состояния несущих конструкций зданий и сооружений. СПб, Издательский Дом KN+, 2000. – 48 с.
  14. **Пузанов А.В., Улыбин А.В.** Методы обследования коррозионного состояния арматуры железобетонных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 7. – С. 18-25.
  15. **Саати Т.** Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: – «Радио и связь», 1993. – 278 с.
  16. **Букин А.В., Патраков А.Н.** Определение прочности бетона методами разрушающего и неразрушающего контроля // *Вестник ПГТУ. Строительство и архитектура*. №1, ПГТУ, 2010. – С. 89-94.
  17. **Улыбин А.В.** О выборе методов контроля прочности бетона построенных сооружений // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 4. – С. 10-15.
  18. **Мальганов А.И., Плевков В.С.** Восстановление и усиление ограждающих строительных конструкций зданий и сооружений: Учебное пособие. – Томск: Печатная мануфактура, 2002. – 391 с.

Тонков Юрий Леонидович, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198393, e-mail: 95081@mail.ru .

Galina G. Kashevarova, Adviser RAASN, Professor, Dr.Sc., Head of department “Building constructions and computational mechanics”, Perm National Research Polytechnic University; Russia, 614010, Perm, ul. Kuibyshev, 109, tel. +7 (342) 2198361, e-mail: ggkash@mail.ru.

Yuri L. Tonkov, Ph.D Student, Department “Building constructions and computational mechanics”, Perm National Research Polytechnic University; 614010, Russia, Perm, ul. Kuibyshev, 109; tel. +7 (342) 2198393; e-mail: 95081@mail.ru.

---

Кашеварова Галина Геннадьевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: ggkash@mail.ru .

## ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

*М.Л. Мозгалева<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>1,2,3</sup>*

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Расчетная схема многих строительных конструкций обычно представляется в виде краевой задачи строительной механики. В частности, такая постановка применяется при расчете сплошных конструкций, а также регулярных дискретных конструкций, таких как фермы, регулярные сетчатые объекты и т.д. Почти всегда в таких конструкциях можно заранее наметить зоны, в которых существует наибольшая опасность возникновения максимальных напряжений, приводящих к разрушению, либо участки конструкции, которым предъявляются дополнительные эксплуатационные требования. Для получения большей точности решения в интересующих нас зонах необходима мелкая сетка, достаточно хорошо аппроксимирующая поставленную задачу при расчетах с привлечением численных методов, таких как метод конечных элементов. В то же время столь мелкое разбиение на участках, удаленных от интересующей зоны, является излишним, поскольку существенное влияние от этих зон оказывают только глобальные факторы, аппроксимация которых достаточна на грубой сетке. Для задач теории упругости это хорошо согласуется с принципом Сен-Венана. Построение сгущающихся сеток является вопросом построения специальных алгоритмов аппроксимации исходной задачи. В настоящей статье рассматривается не-которых общий подход к решению этого вопроса.

**Ключевые слова:** расчеты строительных конструкций, краевая задача, метод локализации, численный метод, аппроксимирующая сетка

## ABOUT ONE NUMERICAL METHOD OF LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

*Marina L. Mozgaleva<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>1,2,3</sup>*

<sup>1</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** Design models of various structures, buildings and complexes are normally represented as a boundary value problems of structural mechanics. In particular, such a formulation is used in analysis of solid structures and regular discrete structures (such as farms, regular mesh objects, etc.). Investigator can pre-identify areas of these structures with the greatest risk of maximum stresses, leading to the destruction and special areas, which are subject to additional operational requirements. In order to obtain more accurate solutions in areas of interest it is necessary to use fine approximating meshes within advanced numerical methods (particularly finite element method). Construction of such meshes is a main objective of a special method, considering in this paper.

**Keywords:** local structural analysis, boundary problem, numerical method, approximating mesh

### ВВЕДЕНИЕ

Расчетная схема многих строительных конструкций обычно представляется в виде крае-

вой задачи строительной механики. В частности, такая постановка применяется при расчете сплошных конструкций, а также регулярных дискретных конструкций, таких как фер-

мы, регулярные сетчатые объекты и т.д. Почти всегда в таких конструкциях можно заранее наметить зоны, в которых существует наибольшая опасность возникновения максимальных напряжений, приводящих к разрушению, либо участки конструкции, которым предъявляются дополнительные эксплуатационные требования [1-10].

Для получения большей точности решения в интересующих нас зонах необходима мелкая сетка, достаточно хорошо аппроксимирующая поставленную задачу при расчетах с привлечением численных методов, таких как метод конечных элементов. В то же время столь мелкое разбиение на участках, удаленных от интересующей зоны, является излишним, поскольку существенное влияние от этих зон оказывают только глобальные факторы, аппроксимация которых достаточна на грубой сетке. Для задач теории упругости это хорошо согласуется с принципом Сен-Венана.

Построение сгущающихся сеток является вопросом построения специальных алгоритмов аппроксимации исходной задачи. Разберем общий подход к решению этого вопроса. Пусть мы имеем достаточно мелкую сетку, хорошо описывающую исходную задачу во всех точках. Далее на этой сетке намечаем интересующую нас локальную зону. На удаленных от намеченной зоны участках переходим к укрупняющейся сетке путем объединения нескольких ячеек мелкой сетки в одну, т.е. тем самым мы заменяем искомую функцию на мелкой сетке кусочно-линейной на укрупняемых ячейках. Будем называть такой подход спрямлением функции на участках сетки.

Основной целью авторов было исследование влияние такого спрямления на результаты, получаемые при решении поставленной задачи на мелкой сетке. С аналитических позиций будем трактовать спрямление функции на узлах сетки как некоторые ограничения, налагаемые на функцию в случае вариационной постановки задачи. Тогда такое ограничение будет входить в исходный

функционал с некоторым множителем Лагранжа  $R$ , который с физической точки зрения является реакцией системы на производимое спрямление.

Настоящую статью следует рассматривать как продолжение работ [9,10], в этой связи ниже используется принятая в [9,10] система обозначений.

## 1. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СПРЯМЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Оценку влияния реакции  $R$  – множителя Лагранжа удобно осуществить с использованием фундаментальной функции, при этом, поскольку исходной позицией является глобальная мелкая сетка, целесообразно использовать дискретную фундаментальную функцию, поскольку она, во-первых, больше соответствует такой постановке, а, во-вторых, не имеет особенностей в начале координат, при этом поведение ее и ее производных по мере удаления от начала координат совпадает с континуальной функцией.

Проводимое исследование будем иллюстрировать случаем двух переменных. Любое спрямление сеточной функции, связанное с направлением, выражается ограничением в виде равенства нулю второй разности по этому направлению. Так, например, для изображенного на рис. 1.1 случая спрямления функции будем иметь ограничения, записываемые в виде:

– точка 1,  $i = (i_1, i_2)$ :

$$D_1^2 u(i_1, i_2) = 0,$$

где  $u(i_1, i_2 + 1) - 2u(i_1, i_2) + u(i_1, i_2 - 1) = 0$ ;

– точка 2,  $j = (j_1, j_2)$ :

$$D_2^2 u(j_1, j_2) = 0,$$

где  $u(j_1 + 1, j_2) - 2u(j_1, j_2) + u(j_1 - 1, j_2) = 0$ ,

которым соответствуют множители Лагранжа  $R_1$  и  $R_2$ .

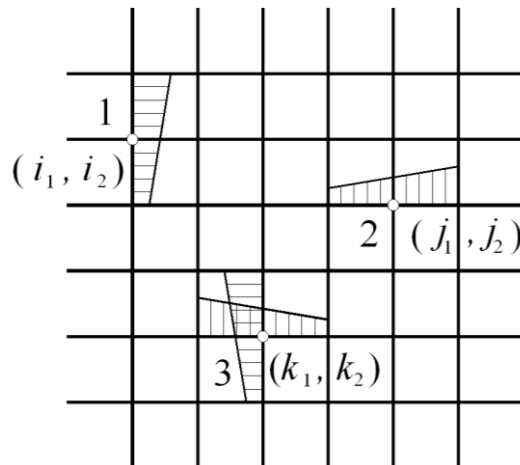


Рис. 1.1. Спрявление в двумерном случае.

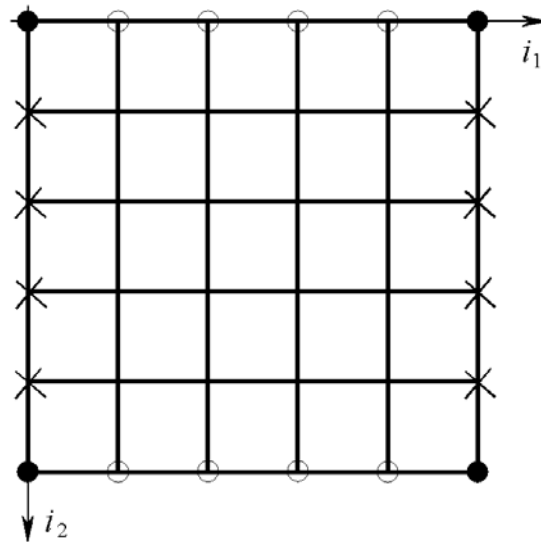


Рис. 1.2. Пример замены мелкой сетки на крупную (условные обозначения: ● – узлы крупной сетки; ○ – узлы мелкой сетки по линиям первого направления; × – узлы мелкой сетки по линиям второго направления).

Спрявление в точке может быть произведено одновременно по двум направлениям (точка 3). Тогда оно записывается в виде двух ограничений

$$\begin{cases} D_1^2 u(k_1, k_2) = 0 \\ D_2^2 u(k_1, k_2) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

которым соответствуют два множителя Лагранжа  $R_1$  и  $R_2$ , осуществляющие реакцию системы на спрявление.

В случае замены мелкой сетки на крупную, внутри крупной сеточной ячейки спрявле-

нию подлежат все дополнительные узлы мелкой сетки. В многомерном случае (например, в двумерном) спрявление связано с увеличением шагов сетки и носит покоординатный характер по линиям крупной сетки и суммарный координатный для точек между узлов крупной сетки. Проиллюстрируем сказанное примером, представленным на рис. 1.2.

Если проводится комплексное спрявление по всей ячейке крупной сетки, то условия (1.1) можно заменить их суммой, т.е.

$$D_1^2 u(i) + D_2^2 u(i) = 0 \quad (1.2)$$

или

$$u(i_1 + 1, i_2) + u(i_1 - 1, i_2) - 4u(i_1, i_2) + u(i_1, i_2 + 1) + u(i_1, i_2 - 1) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Delta_h u = 0. \quad (1.4)$$

Докажем этот факт следующим образом. Во-первых, кусочно-линейная функция удовлетворяет уравнению Лапласа для внутренних узлов мелкой сетки и условиям линейности на границе. В то же время она однозначно определяется своим поведением на границе, поскольку имеет вид

$$u(x) = C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_2 + C_4 x_1 x_2, \quad (1.5)$$

где константы определяются ее значениями в узлах сетки. Следовательно, можем получить дискретную краевую задачу Дирихле для дискретного оператора Лапласа, которая, как известно, имеет единственное решение. Этому решению и удовлетворяет искомая кусочно-линейная функция. Тем самым доказывается достаточность одного суммарного условия для внутренней точки вместо двух.

При формировании общей матрицы ограничений в этих условиях введем характеристические узловые функции:  $\chi_{\Gamma, i}$  – характеристическая функция узлов со спрямлением по  $i$ -му направлению,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

$$\chi_{\Gamma} = \max_{i=1}^N \chi_{\Gamma, i} \quad (1.6)$$

– общая характеристическая функция спрямляемых точек.

Тогда общая матрица ограничений запишется в виде

$$Q = \sum_{s=1}^N \chi_{\Gamma, s} D_s^2 \quad (1.7)$$

и

$$Q^* = \sum_{s=1}^N D_s^2 \chi_{\Gamma, s}. \quad (1.8)$$

При этих ограничениях исходная задача формулируется следующим образом: требуется найти минимум функционала

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} (Au, u) - (F, u) \quad (1.9)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$Qu = 0. \quad (1.10)$$

Используя множители Лагранжа, сводим задачу к поиску стационарной точки функционала вида

$$\Phi(u, R) = \frac{1}{2} (Au, u) - (F, u) + (R, Qu) \quad (1.11)$$

или

$$\Phi(u, R) = \frac{1}{2} (Au, u) - (F, u) + (Q^* R, u), \quad (1.12)$$

где определению подлежат величины  $u$  и  $R$ . Здесь  $R = \{R(i)\}$  – вектор множителей Лагранжа, соответствующий условиям спрямления. Условие стационарности этого функционала описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = A\tilde{u} - F + Q^* \chi_{\Gamma} R = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \chi_{\Gamma} Q\tilde{u} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

В данном случае, если обозначить столбцы матрицы  $Q^* \chi_{\Gamma}$  как векторы  $q^i$ , то первое уравнение системы (1.13) примет вид

$$A\tilde{u} = F - \sum_i R_i q^i, \quad (1.14)$$

где каждое слагаемое типа  $R_i q^i$  является силовой реакцией, обеспечивающей спрямление.

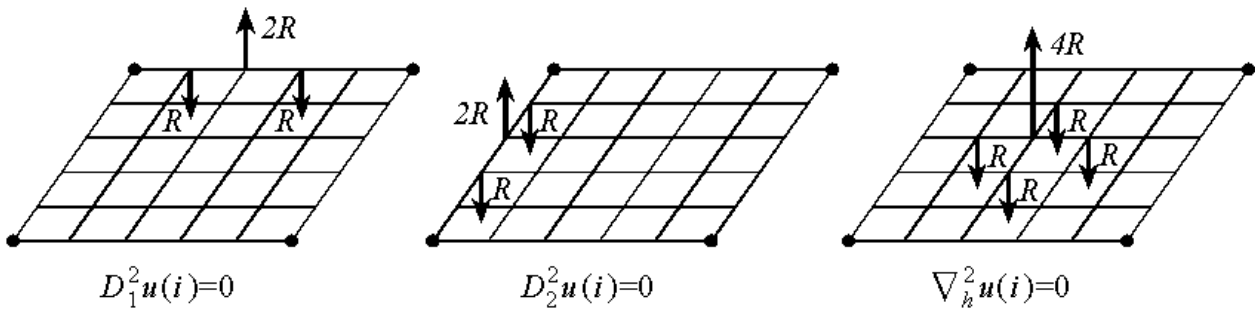


Рис. 1.3. Силовые реакции в двумерном случае.

Поясним, что под  $q^i$  понимается единичная реакция, которую можно в скалярном случае записать следующим образом:

$$q^i(j) = \sum_{s=1}^N \chi_{\Gamma,s} q_s^i(j), \quad (1.15)$$

где

$$q_s^i(j) = \begin{cases} 2, & \text{если } j = i \\ -1, & \text{если } (j_s = i_s \pm 1) \bigcap_{t \neq s} (j_t = i_t) = true \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (1.16)$$

$s$  – направление спрямления;  $\bigcap_{t \neq s}$  – логическая операция вида

$$\bigcap_{t \neq s} = \bigcap_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N, \quad (1.17)$$

обозначающая произведение логических операций для  $t=1, 2, \dots, N$  с пропуском операции  $\bigcap (j_s = i_s)$ , т.е.  $t = s$  (заметим, что общий вид такой реакции в одномерном случае показан в [...], а в двумерном случае – на рис. 1.3).

В векторном случае ( $u$  – векторная функция, состоящая из  $M$  компонент), в свою очередь, будем иметь:

$$u = \bar{u}(i) = (u_1(i), u_2(i), \dots, u_M(i)) = \{u_k\}_{k=1, \dots, M}. \quad (1.18)$$

Вектор обобщенных воздействий, или вектор множителей обобщенных воздействий, может быть представлен в виде

$$R = \bar{R}(i) = (R_1, R_2, \dots, R_M) = \{R_k\}_{k=1, \dots, M}; \quad (1.19)$$

$$q^i = \{q^{i,k}\}_{k=1, \dots, M}, \quad \text{где } q^{i,k} = \sum_{s=1}^N \chi_{\Gamma,s} q_s^{i,k}; \quad (1.20)$$

$q^{i,k}$  –  $k$ -я базисная функция в  $i$ -й точке,

$$q_s^{i,k}(j) = \begin{cases} 2, & \text{если } (j = i) \bigcap (l = k) \\ -1, & \text{если } (j_s = i_s \pm 1) \bigcap (l = k) \bigcap_{t \neq s} (j_t = i_t) = true \\ 0 & \text{в в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.21)$$

Для теории упругости величина  $M$  равняется размерности пространства  $N$ , а  $\bar{u}$  имеет физический смысл перемещения точки. Для случая плоской задачи ( $N = 2$ ) вектор  $\bar{R}$  можно представить в виде, показанном на рис. 1.4.

Следовательно, условие (1.14) примет вид:

$$A\tilde{u} = F + \sum_i \sum_k R_k(i) q_k(i), \quad (1.22)$$

где  $R_k(i)$  – множитель при единичной реакции  $q_k(i)$  по  $k$ -му направлению.

Общее решение задачи (1.13) можно искать в виде

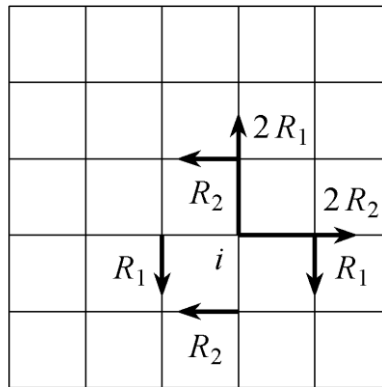


Рис. 1.4. Представление вектора  $\bar{R}$  для случая плоской задачи.

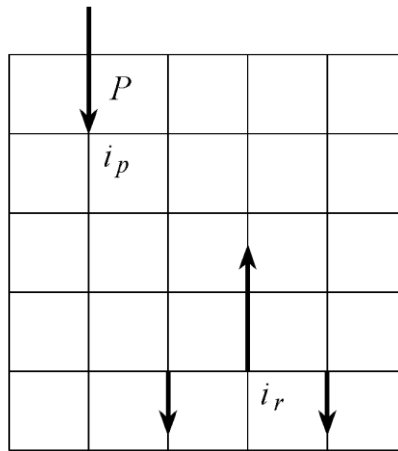


Рис. 1.5. К оценке влияние спрямления.

$$\tilde{u} = u - \Delta u, \text{ где } u = A^{-1}F, \Delta u = A^{-1}Q^*R; \quad (1.23)$$

перепишем уравнение в окончательном виде следующим образом:

$u$  – решение исходной задачи;  $\Delta u$  – влияние связей.

$$BR = Qu = QA^{-1}F \text{ или } BR = GF. \quad (1.27)$$

Введем обозначение

$$G^* = A^{-1}Q^* \quad (1.24)$$

Оценим влияние спрямления, производимого в общей точке  $i$ , на общее решение задачи (рис. 1.5).

Для определения  $R$  подставим  $\tilde{u}$  во второе уравнение системы (1.13). В результате будем иметь:

В этом случае величина поправки  $\Delta u$  может быть найдена по формуле

$$\Delta u = G^*R = A^{-1}q^{ir}R, \quad (1.28)$$

$$Q(u - \Delta u) = 0; \quad Q\Delta u = Qu; \quad QA^{-1}Q^*R = Qu. \quad (1.25)$$

где значение множителя  $R$  определяется из условия

Введя обозначение

$$B = QA^{-1}Q^*, \quad (1.26)$$

$$((q^{ir})A^{-1}q^{ir})R = (q^{ir})^*u, \quad (1.29)$$

$$\text{т.е. } R(i) = b^{-1}(i_r, i_r) \sum_j g(i_r, j)F(j), \quad (1.30)$$

где под величиной  $R(i)$  понимается вектор вида

$$R(i) = [R_1(i) \ R_2(i) \ \dots \ R_M(i)]^T, \quad (1.31)$$

а  $b(i, j)$  и  $g(i, j)$  представляют собой матрицы вида

$$b(i, j) = \begin{bmatrix} b_{1,1}(i, j) & b_{1,2}(i, j) & \dots & b_{1,M}(i, j) \\ b_{2,1}(i, j) & b_{2,2}(i, j) & \dots & b_{2,M}(i, j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{M,1}(i, j) & b_{M,2}(i, j) & \dots & b_{M,M}(i, j) \end{bmatrix} = \{b_{k,l}(i, j)\}_{\substack{k=1,2,\dots,M \\ l=1,2,\dots,M}}; \quad (1.32)$$

$$g(i, j) = \begin{bmatrix} g_{1,1}(i, j) & g_{1,2}(i, j) & \dots & g_{1,M}(i, j) \\ g_{2,1}(i, j) & g_{2,2}(i, j) & \dots & g_{2,M}(i, j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{M,1}(i, j) & g_{M,2}(i, j) & \dots & g_{M,M}(i, j) \end{bmatrix} = \{g_{k,l}(i, j)\}_{\substack{k=1,2,\dots,M \\ l=1,2,\dots,M}}. \quad (1.33)$$

Ввиду того, что исследование ведется в первую очередь для линейной задачи, то достаточно рассмотреть правую часть в виде сосредоточенного воздействия величины

$$P(i) = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_M]^T, \quad (1.34)$$

приложенной в  $i_p$ -м узле.

Тогда реакция стремления определится по формуле

$$R(i_r) = b^{-1}(i_r, i_r)g(i_r, i_p)P, \quad (1.35)$$

а влияние этой связи на общее решение задачи может быть найдено из уравнения

$$\Delta u(i) = g^*(i_r, i)R. \quad (1.36)$$

Подставив в уравнение (1.36) выражение (1.35), получим:

$$\Delta u(i) = g^*(i_r, i)b^{-1}(i_r, i_r)g(i_r, i_p)P. \quad (1.37)$$

Для того, чтобы найти и оценить с физической и математической точек зрения реакции  $R$ , необходимо уметь сравнительно просто численно решать задачу с матрицей  $A$ , либо, что предпочтительнее, иметь какое-либо аналитическое представление  $A^{-1}$ . В последнем случае наиболее удобно представить  $A^{-1}$  в виде свертки с фундаментальной функцией.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕАКЦИИ СВЯЗИ

Как известно, в случае  $N$  измерений для дискретного оператора  $L$  и векторной функции размерности  $M$ , фундаментальная функция – это матрица  $\varepsilon$  размером  $M \times M$ , удовлетворяющая условию

$$L\varepsilon = E, \quad (2.1)$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $M$ ;

$$\varepsilon(i, j) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1}(i, j) & \varepsilon_{1,2}(i, j) & \dots & \varepsilon_{1,M}(i, j) \\ \varepsilon_{2,1}(i, j) & \varepsilon_{2,2}(i, j) & \dots & \varepsilon_{2,M}(i, j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{M,1}(i, j) & \varepsilon_{M,2}(i, j) & \dots & \varepsilon_{M,M}(i, j) \end{bmatrix} = \{\varepsilon_{p,q}(i, j)\}_{\substack{p=1,2,\dots,M \\ q=1,2,\dots,M}}. \quad (2.2)$$

Так, при рассмотрении задачи теории упругости каждый столбец такой матрицы соответствует решению задачи от действия единичной сеточной функции по  $q$ -му направлению. Если задана произвольная нагрузка

$$f(i) = [f_1(i) \ f_2(i) \ \dots \ f_M(i)]^T \quad (2.3)$$

на бесконечной сетке, то решение такой дискретной задачи получается операцией свертки вида

$$\bar{u} = \varepsilon * \bar{f}, \text{ т.е. } \bar{u}(i) = \sum_j \varepsilon(i-j) * \bar{f}(j) \quad (2.4)$$

или в развернутом (более подробном) виде

$$\begin{aligned} u(i_1, i_2, \dots, i_N) &= \\ &= \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_N=-\infty}^{\infty} \varepsilon(i_1 - j_1, i_2 - j_2, \dots, i_N - j_N) \times \\ &\quad \times f(j_1, j_2, \dots, j_N). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим случай спрямления функции в  $s$ -м направлении в узле  $i_r$  бесконечной области, в которой в узле  $i_p$  задано сосредоточенное воздействие (1.34). В этом случае можем записать, что

$$b(i_r, i_r) = \varepsilon(i_r - i_r) = \varepsilon(0); \quad (2.6)$$

$$g(i_r, i_p) = D_s^2 \varepsilon(i_r - i_p). \quad (2.7)$$

Тогда выражение для определения величины  $R$  будет иметь вид:

$$R(i_r) = [D^2 \varepsilon(0)]^{-1} D_s^2 \varepsilon(i_r - i_p) P, \quad (2.8)$$

а ее влияние на общее решение задачи определится по формуле

$$\Delta u(i) = D_s^2 \varepsilon(i - i_r) R \quad (2.9)$$

или

$$\Delta u(i) = D_s^2 \varepsilon(i - i_r) [D^2 \varepsilon(0)]^{-1} D_s^2 \varepsilon(i_r - i_p) P. \quad (2.10)$$

Поскольку известно, что разности от фундаментальной функции убывают, то из этих формул можно сделать следующие выводы: – величина реакции  $R$  убывает в соответствии с расстоянием между узлами  $i_p$  и  $i_r$

пропорционально второй разности от функции  $\varepsilon$ ;

– погрешность от реакции спрямления убывает также пропорционально второй разности от фундаментальной функции, но в зависимости от расстояния между узлами  $i$  и  $i_r$ ;

– общая погрешность в  $i$ -м узле от спрямления в узле  $i_r$  от сосредоточенного воздействия в узле  $i_p$  убывает пропорционально произведению значения второй разности фундаментальной функции от величины расстояния между точкой приложения силы и местом спрямления на значение второй разности фундаментальной функции от величины расстояния между местом спрямления и интересующей точкой.

Таким образом, существенным фактом является то, как убывает вторая разность от фундаментальной функции. Поскольку

$$D_s^2 \varepsilon \approx h^2 \varepsilon'', \quad (2.11)$$

то достаточно знать, как убывает соответствующая континуальная функция.

Известно, что для оператора Лапласа и теории упругости имеют место следующие оценки:

$$\varepsilon''(r) = \begin{cases} C_1 / r^2, & \text{в двумерном случае;} \\ C_2 / r^3, & \text{в трехмерном случае,} \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые константы.

Поскольку при расчете конструкций основной интерес представляет напряженное состояние, которое пропорционально первым производным, то запишем оценку влияния спрямления на производную

$$(\Delta u(i))_s^{(k)} = (D_s^{2+k} \varepsilon(i - i_r)) R, \quad (2.13)$$

т.е. имеет место убывание пропорционально  $1/r^{N+k}$ , где  $N$  – размерность пространства.

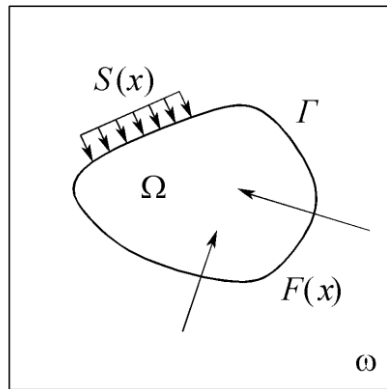


Рис. 3.1. Рассмотрение задачи в расширенной (окаймляющей) области.

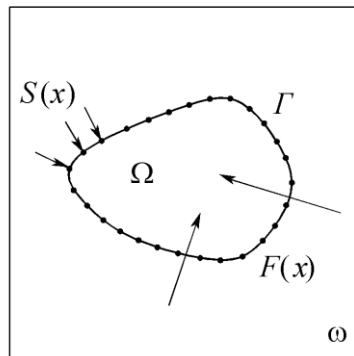


Рис. 3.2. Дискретизация границы при построении численного решения.

### 3. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СПРЯМЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Известно, что задачу в ограниченной области можно свести к задаче в неограниченной области, например с позиций непрямого метода граничных интегральных уравнений. В строительной механике не прямой метод часто называется методом компенсирующих нагрузок, что в большей степени отражает суть его физической интерпретации. Будем придерживаться далее именно этого подхода.

Вместо решения задачи в ограниченной области рассмотрим задачу в неограниченной области. Исходную область лишь «окаймим» бесконечной и приложим к ней все заданные нагрузки (рис. 3.1). Далее в месте соответствующей границы приложим некоторую нагрузку, сосредоточенную по линии границы. Из общей теории граничных уравнений следует, что эту дополнительную нагрузку  $S(x)$  можно задать так, что она полностью

обеспечит выполнение исходных внутренних и граничных условий, т.е., по сути, все сводится к поиску этой дополнительной нагрузки.

Общее решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varepsilon(x - \xi) S(\xi) d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon(x - \xi) F(\xi) d\xi, \quad (3.1)$$

где  $S(\xi)$  можно определить, подставляя  $u(x)$  из этого выражения в граничные условия.

С позиции численного решения можно разбить границу на участки (рис. 3.2) и представить фиктивную нагрузку  $S(x)$  в виде сосредоточенных сил, заданных по участкам. Тогда решение исходной задачи примет вид:

$$u(x) = \sum_j \varepsilon(x - x_j) S_j + \int_{\Omega} \varepsilon(x - \xi) F(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

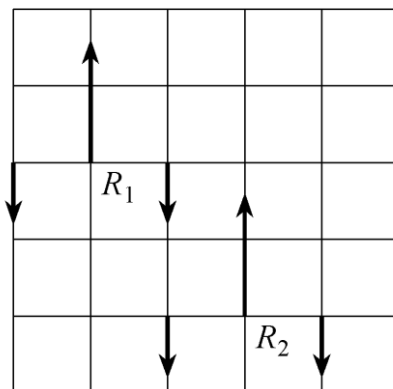


Рис. 3.3. К оценке взаимного влияния двух спрямлений на локальное решение в точке.

где определению подлежат величины  $S_j$ . В данном случае нас первоначально могут не интересовать значения величин  $S_j$ , поскольку требуется оценить относительное влияние спрямления. Поэтому все относительные результаты, полученные для бесконечной области, опирающиеся на поведение фундаментальной функции, остаются справедливыми и для ограниченной области.

Определим взаимное влияние двух спрямлений на локальное решение в точке. Рассмотрим влияние спрямления  $R_1$  на  $R_2$  (рис. 3.3). В этом случае в формулах (2.8), (2.9) вместо силы  $P$  достаточно представить систему сил при  $R_1$ . Тогда поправка  $\tilde{R}_2$  от действия этой системы сил на величину  $R_2$  может быть оценена по формуле

$$\tilde{R}_2 = \varepsilon^{(4)}(x)R, \quad (3.3)$$

т.е. она убывает пропорционально  $\varepsilon^{(4)}(x)$ , что в случае двумерной задачи означает пропорциональность  $1/r^4$ .

#### 4. ВЛИЯНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ В УЗЛАХ МЕЛКОЙ СЕТКИ

Влияние закрепления также целесообразно исследовать с использованием фундаментальной функции и множителей Лагранжа,

при этом следует учесть тот факт, что оператор краевой задачи с естественными краевыми условиями (ему соответствует функционал без ограничений) для многих задач является вырожденным на пространстве, определенном некоторыми функциями ( $u = const$  для оператора Лапласа или жесткое смещение для оператора теории упругости). В таком случае требование разрешимости состоит в наложении некоторых простых условий на правую часть. Пусть, например, задана сеточная область, показанная на рис. 4.1, а в точке  $i_p$  задано сосредоточенное воздействие  $P$ , а в точках  $i_{r_1}$ ,  $i_{r_2}$  и  $i_{r_3}$  задано следующее условие:

$$(i_{r_k}) = g_k; \quad i_{r_k} = (i_{r_k,1}, i_{r_k,2}). \quad (4.1)$$

Следовательно, задача может быть описана функционалом

$$\Phi(u, R) = \Phi(u) + \sum_{k=1}^M R_k (u(i_{r_k}) - g_k), \quad (4.2)$$

стационарная точка которого определяется уравнением

$$\begin{cases} Au = Pe^{i_p} + \sum_{k=1}^M R_k e^{i_{r_k}} \\ u(i_{r_k}) = g_k, \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (4.3)$$

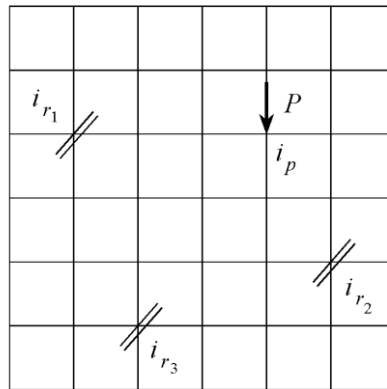


Рис. 4.1. К оценке влияние закрепления значения искомой функции в узлах мелкой сетки (условным обозначением «//» показаны точки с закрепленным значением функции).

Поскольку  $A$ , как уже было отмечено выше, может быть выраженным оператором, то отсюда вытекают дополнительные условия, связывающие множители Лагранжа. Например, если  $A$  – дискретный оператор соответствующей краевой задачи с оператором Лапласа, то дополнительное требование состоит в условии

$$\sum_{k=1}^M R_k + P = 0, \quad (4.4)$$

т.е. число неизвестных  $R_k$  на единицу меньше, поскольку, например,

$$R_M = P - \sum_{k=1}^{M-1} R_k, \quad (4.5)$$

т.е.  $u = u(R_1, R_2, \dots, R_{M-1}). \quad (4.6)$

В свою очередь, к решению  $u$ , удовлетворяющему первому условию системы (4.10.3), необходимо добавить константу, т.е.

$$u = u + C \quad (4.7)$$

и из  $M$  условий вида

$$u(i_{r_k}) = g_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.10.8)$$

определяются величины  $R_1, R_2, \dots, R_{M-1}$  и  $C$ . При других случаях вырожденности на величины  $R_k$  накладываются другие условия

(например, в теории упругости равенство нулю сумм проекций и моментов и т.п.). Рассмотрим следующий случай для уравнения Пуассона в неограниченной сеточной области. Пусть в точке  $i_p = (i_{p,1}, i_{p,2})$  задано сосредоточенное воздействие  $P = P \exp(i_p)$ , а в точке  $i_r = (i_{r,1}, i_{r,2})$  задано фиксированное значение  $u(i_r) = g$  (рис. 4.2).

Тогда исходный функционал имеет вид

$$\Phi(u, R) = \Phi(u) + R_0(u(i_r) - g), \quad (4.9)$$

стационарная точка которого определяется из условия

$$\begin{cases} Au = P \exp(i_p) + R_0 \exp(i_r) \\ u(i_r) = g. \end{cases} \quad (4.10)$$

Поскольку  $A$  – сеточный аналог оператора Лапласа, то в силу его однократной вырожденности любое решение первого уравнения определяется с точностью до константы  $C$  (см. формулу (4.7)), а разрешимость уравнения возможна лишь при условии

$$\sum F(i) = 0 \quad (4.11)$$

или, поскольку

$$F = P \exp(i_p) + R_0 \exp(i_r), \quad (4.12)$$

то  $P + R_0 = 0$  и  $R_0 = -P. \quad (4.13)$

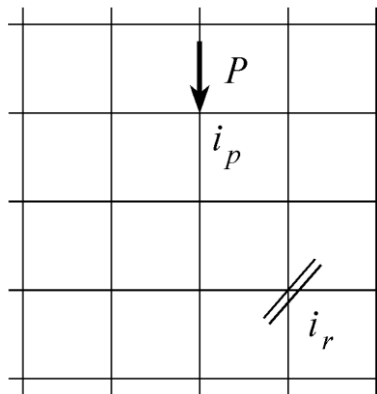


Рис. 4.2. Рассматриваемая сеточная область.

Таким образом, общее решение определяется по формуле

$$u = PA^{-1}(\exp(i_p) - \exp(i_r)) + C, \quad (4.14)$$

где константа  $C$  определяется из второго условия.

Поскольку в случае неограниченной области оператор  $A^{-1}$  представим в виде свертки с фундаментальной функцией, то

$$u(i) = P[\varepsilon(i - i_p) - \varepsilon(i - i_r)] + C. \quad (4.15)$$

Из второго условия системы (4.10) следует, что

$$P[\varepsilon(i_r - i_p) - \varepsilon(0)] + C = g, \quad (4.16)$$

т.е. 
$$C = g - P[\varepsilon(i_r - i_p) - \varepsilon(0)]. \quad (4.17)$$

В случае нормировки фундаментальной функции  $\varepsilon(0) = 0$  получим:

$$u(i) = P[\varepsilon(i - i_p) - \varepsilon(i - i_r)] + g - P\varepsilon(i_r - i_p). \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь случай, когда в точке закрепления производится спрямление функции (рис. 4.2).

В этом случае исходный функционал будет иметь вид:

$$\Phi(u, R) = \Phi(u) + R_0(u(i_r) - g) + R_0 D_1^2 \exp(i_r). \quad (4.19)$$

Его стационарная точка определяется из условий

$$\begin{cases} Au = P \exp(i_p) + R_0 \exp(i_r) + R_0 D_1^2 \exp(i_r) \\ u(i_r) = g \\ D^2 u(i_r) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Условие разрешимости первого уравнения приводит к требованию

$$\sum F(i) = 0 \quad \text{или} \quad P + R_0 + (1 - 2 + 1)R_0 = 0. \quad (4.21)$$

Поскольку вектор  $D_1^2 \exp(i_r)$  имеет ненулевые компоненты 1, -2, 1, то отсюда следует, что по-прежнему  $R_0 = -P$  и общее решение имеет вид:

$$u = PA^{-1}(\exp(i_p) - \exp(i_r)) + R_0 A^{-1} D_1^2 e^{i_r} + C. \quad (4.22)$$

Если  $A^{-1} = \varepsilon *$ , то

$$u(i) = P[\varepsilon(i - i_p) - \varepsilon(i - i_r)] + R_0 D^2 \varepsilon(i - i_r) + C. \quad (4.23)$$

Из условия

$$(D^2u)(i_r) = 0 \quad (4.24)$$

получим

$$\begin{aligned} & P[D^2\varepsilon(i_r - i_p) - D^2\varepsilon(i_r - i_r)] + R_0 D^4\varepsilon(i_r - i_r) = 0 \\ \text{или} \\ & R_0 = \\ & = -\frac{P}{D^4\varepsilon(0)} [D^2\varepsilon(i_r - i_p) - D^2\varepsilon(i_r - i_r)] = \\ & = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из условия закрепления получим:

$$C = g - P[\varepsilon(i_r - i_p) - \varepsilon(0)] + R_0 D^2\varepsilon(0). \quad (4.26)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(i) = & P[\varepsilon(i - i_p) - \varepsilon(i - i_r)] - \\ & - P[\varepsilon(i_r - i_p) - \varepsilon(0)] + \\ & + R_0 D^2\varepsilon(i - i_r) + R_0 D^2\varepsilon(0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Рассмотрим разницу между решениями задачи без учета и с учетом спрямления

$$\Delta u = u - u_0 = R_0 D^2\varepsilon(i - i_r) + C_d, \quad (4.28)$$

$$\text{где} \quad C_d = P\varepsilon(0) + R_0 D^2\varepsilon(0). \quad (4.29)$$

Или с учетом нормировки будем иметь:

$$C_d = R_0 D^2\varepsilon(0). \quad (4.30)$$

Таким образом, можно увидеть, что эта разность содержит слагаемое (первое), которое убывает вместе с  $D^2\varepsilon(i - i_r)$  при удалении точки  $i$  от  $i_r$ , а второе слагаемое остается неизменным, т.е. при выполнении условия спрямления даже в одной точке мы получаем убывающее решение по всей области. Что касается поведения этой разности для разностной производной  $k$ -го порядка, то получаем

$$\Delta u^{(k)} = R_0 D^{2+k}\varepsilon(i - i_k) / h^k, \quad (4.31)$$

которые убывают вместе с  $D^{2+k}\varepsilon(i - i_k)$  по мере удаления от точки  $i_r$ .

Для ограниченного тела посчитан пример, показывающий, что аналогичный результат имеется и в данном случае [7].

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ШАГА В ЛОКАЛЬНОЙ СЕТКЕ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Выбор шага можно производить, исходя из нескольких соображений. Рассмотрим вначале первое. Общее решение для краевой задачи может быть записано в виде

$$u(i) = \varepsilon * \tilde{F} = \sum_j \varepsilon(i - j) \tilde{F}(j), \quad (5.1)$$

где  $\varepsilon$  – фундаментальное дискретное решение для мелкой сетки;  $\tilde{F}$  – нагрузки.

Следует отметить, что в  $\tilde{F}$  входят нагрузки различного происхождения. Во-первых, это заданные внешние силы, во-вторых, компенсирующие нагрузки, связанные с краевыми условиями и, в-третьих, это нагрузки, связанные со спрямлением функции при увеличении шага сетки (реакции системы на производимое спрямление). Из формулы (5.1) следует, что выбор шага связан с точностью вычисления свертки фундаментальной функции с заданными функциями нагрузок. Поскольку при решении задачи нас в большей степени интересует производная функции  $u$  в локальной зоне (в точке  $i = 0$ ), т.е. величина

$$u'(0) = \varepsilon' * F = \sum_j \varepsilon'(i) F(i), \quad (5.2)$$

то наибольшей точности будет соответствовать выбор шага, связанный с заменой функции  $\varepsilon'$  ломаной, достаточно хорошо аппроксимирующей эту функцию.

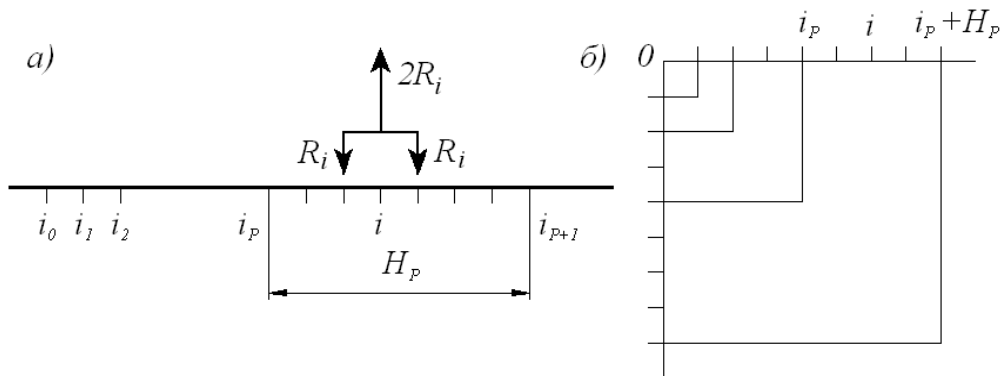


Рис. 5.1. Одномерная и двумерная схемы.

Другое соображение связано с оценкой влияния реакции спрямления на решение задачи в интересующей точке, в зависимости от ее удаленности. В таком случае рассмотрим однородную схему, показанную на рис. 5.1а. Пусть в зоне  $(i_p, i_{p+1})$  происходит спрямление искомой функции. Это соответствует следующей реакции относительно каждой внутренней точки промежутка:

$$P_i = D^2 \chi_R R_i, \quad (5.3)$$

где  $\chi_R$  – характеристическая функция спрямляемых точек,

$$\chi_R(i) = \begin{cases} 1, & i = i_p + 1, i_p + 2, \dots, i_p + H_p - 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (5.4)$$

$R_i$  – реакция или множитель Лагранжа, соответствующий условию спрямления  $D^2 u(i) = 0$ .

Тогда влияние спрямлений относительно точки 0 выразится формулой

$$\begin{aligned} \Delta u_p(0) &= \sum_j \varepsilon(j) P(j) = \sum_{j=i_p}^{i_p+H_p} \varepsilon(j) [D^2 \chi_R R(j)] = \\ &= \sum_{j=i_p}^{i_p+H_p} [\chi_R D^2 \varepsilon(j)] R(j). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для оценки последнего выражения выберем некоторую среднюю величину для

$R(j)$ . Пусть  $R(j) = R_p, j \in (i_p, i_p + H_p)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta u(0) &= R(i) \sum_{j=i_p}^{i_p+H_p} \chi_R D^2 \varepsilon(j) = \\ &= R_p [\varepsilon(i_p + 2) - 2\varepsilon(i_p + 1) + \varepsilon(i_p) + \\ &+ \varepsilon(i_p + 3) - 2\varepsilon(i_p + 2) + \varepsilon(i_p + 1) + \\ &+ \varepsilon(i_p + 4) - 2\varepsilon(i_p + 3) + \\ &+ \varepsilon(i_p + 2) + \dots + \varepsilon(i_p + H_p - 4) - \\ &- 2\varepsilon(i_p + H_p - 3) + \varepsilon(i_p + H_p - 2) + \\ &+ \varepsilon(i_p + H_p - 3) - 2\varepsilon(i_p + H_p - 2) + \\ &+ \varepsilon(i_p + H_p - 1) + \varepsilon(i_p + H_p - 2) - \\ &- 2\varepsilon(i_p + H_p - 1) + \varepsilon(i_p + H_p)] = \\ &= R_p [\varepsilon(i_p) - \varepsilon(i_p + 1) - \\ &- \varepsilon(i_p + H_p - 1) + \varepsilon(i_p + H_p)], \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Delta u(0) &= R(i) \sum_{j=i_p}^{i_p+H_p} \chi_R D^2 \varepsilon(j) = \\ &= R_p [\varepsilon(i_p) - \varepsilon(i_p + 1) - \\ &- \varepsilon(i_p + H_p - 1) + \varepsilon(i_p + H_p)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

или

$$\Delta u(0) = -R_p [D\varepsilon(i_p) - D\varepsilon(i_p + H_p - 1)]. \quad (5.7)$$

В случае двумерной задачи (рис. 5.1б) число точек, удаленных от точки 0 на величину  $i = \max(|i_1|, |i_2|)$ , равно длине периметра квадрата, у которого каждая сторона содержит  $2i$  точек.

Тогда общая погрешность в двумерном случае выразится формулой

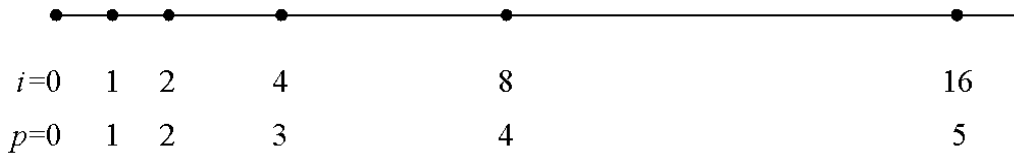


Рис. 5.2. Пример построения локальной сетки в одномерном случае.

$$\Delta u_p(0) = -R_p 8i [D\varepsilon(i_p) - D\varepsilon(i_p + H_p - 1)], \quad (5.8)$$

а для фундаментальной функции справедливо асимптотическое равенство

$$D\varepsilon_i \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i}. \quad (5.9)$$

Следовательно,

$$\Delta u_p(0) = -\frac{R_p}{2\pi} i_p \left[ \frac{1}{i_p} - \frac{1}{i_p + H_p - 1} \right] \approx \frac{R_p}{2\pi} \frac{H_p}{i_p}. \quad (5.10)$$

Одно из требований, предъявляемых к локальной сетке, заключается в том, чтобы на каждом шаге при его увеличении погрешность была одинаковой. Это приводит к следующему критерию выбора шага:

$$\frac{H_p}{i_p} = const \quad \text{или} \quad \frac{H_{p+1}}{i_{p+1}} = \frac{H_p}{i_p}, \quad (5.11)$$

откуда получаем формулу для определения шага

$$H_{p+1} = H_p \frac{i_p + H_p}{i_p} = H_p \left[ 1 + \frac{H_p}{i_p} \right]. \quad (5.12)$$

Рекуррентная формула (5.12) для выбора шага связана с асимптотическим поведением фундаментальной функции, которое может быть нехарактерным для начальных точек. В связи с этим необходим учет вышеуказанного соображения о спрямлении производной от фундаментальной функции, особенно при назначении шага для начальных узлов.

Практические (как следует из опыта экспериментальных расчетов и решений реальных задач) оказывается, что оба требования хорошо согласуются друг с другом. В частности, было установлено, что для оператора Лапласа и для задачи теории упругости целесообразно строить локальную сетку следующим образом: первые два шага всегда делать одинаковыми и равными шагу исходной мелкой сетки, а затем текущий шаг удваивать (рис. 5.2, 5.3). Можно показать [7], что такой шаг хорошо согласуется с поведением спрямления производной от фундаментальной функции.

В том случае, если интересует решение в некоторой локальной зоне, в пределах этой зоны, расширенной на один шаг мелкой сетки, необходимо оставить исходный мелкий шаг, а затем увеличивать шаги в соответствии с формулой (5.12).

Суммарная погрешность, связанная с расчетом по локальной сетке, для точки 0 оценивается формулой (ниже  $N_p$  – число шагов локальной сетки)

$$\Delta u(0) = \sum_{p=0}^{N_p} \Delta u_p(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N_p} R_p \frac{H_p}{i_p}. \quad (5.13)$$

Поскольку выбор шага определяется величиной  $H_p / i_p = C$ , то, если вместо  $R_p$  взять среднюю величину  $R$ , получим:

$$\Delta u(0) = \frac{1}{2\pi} RCN_p. \quad (5.14)$$

В случае, если интерес представляет суммарная погрешность относительно производной в точке, то ее асимптотическая погрешность имеет вид:

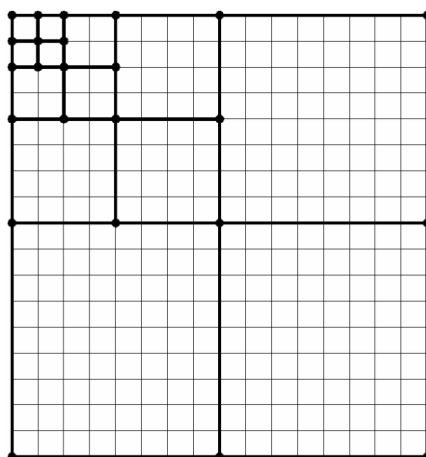


Рис. 5.3. Пример построения локальной сетки в двумерном случае.

$$Du(0) = \sum_{p=0}^{N_p} D\Delta u_p(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N_p} R_p \frac{H_p}{i_p^2} \quad \text{или}$$

$$Du(0) = \frac{1}{2\pi} RC \sum_{p=0}^{N_p} \frac{1}{i_p}. \quad (5.15)$$

При вводе этих оценок в случае бесконечной области не учтено убывание величины  $R_p$ . Этого убывания нет только в случае неубывающего нагружения на бесконечности, что в практических задачах не имеет места. Во всех остальных случаях  $N_p$  конечно и даже не очень велико (менее 10).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей статье увеличение шага локальной сетки, построенной на основе исходной мелкой, рассматривалось как результат спрямления исходной функции при проходе через удаляемый узел. Такое допущение сопровождается реальным физическим смыслом, соответствующим реакцией системы на производимое спрямление (множители Лагранжа). Показывается, что такая реакция является симметричной самоуравновешенной системой сил. Свертка с этим воздействием фундаментальной функции имеет характер убывания соответствующей второй производной от фундаментальной функции, которая, в свою очередь, убывает как неко-

торая отрицательная степень величины  $\rho$  (расстояния от места спрямления), что и позволяет оценивать допустимую величину шага локальной сетки. Кроме того, была описана и величина самой реакции. В результате получена возможность проследить суммарное влияние действующей силы на спрямление и обоих факторов на локальную сетку. Производится оценка не только по самой функции, но и, что более важно, по ее производным. Делается вывод о том, что произведенные оценки влияния спрямления функции справедливы в случае отсутствия разрыва конструкции по линии спрямления. Если же в этом месте имеется разрыв, то численная проверка показывает, что это не приводит к резкому увеличению реакции системы в виде множителей Лагранжа, но существенно влияет на само решение задачи. Основной результат состоит в том, что шаг локальной сетки определяется оптимальной кусочно-линейной аппроксимацией разностной производной от дискретной фундаментальной функции для оператора Лапласа, соответствующего оператору теории упругости. Этот результат согласуется с выведенной рекуррентной формулой для вычисления шага, построенной на основании критерия равной погрешности локального решения на каждом шаге увеличивающейся сетки. Полученные формулы и критерии подтверждаются предствительным набором численных экспериментов [7].

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Проект 7.1.7 «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).
2. Проект 7.1.8 «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и Российской академии архитектуры и строительных наук на 2015 год (2013-2015 гг.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2014. – 632 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы. – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
5. **Золотов А.Б., Медведько Д.В.** О влиянии шага сетки на локальное решение задач строительной механики. // Деп. во 2 вып. библиогр. указателя депонир. рукописей ВНИИТПИ. – М.: МИСИ, 1992.
6. **Золотов А.Б., Мозгалева М.Л., Медведько Д.В., Булгаков В.Е.** Методы локализации, фрагментации и техника вейвлет-анализа в применении к расчетам строительных конструкций. // Вестник МГСУ, №1, 2008, с. 94-106.
7. **Медведько Д.В.** Алгоритмы построения оптимальных сеток для локального расчета конструкций: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.23.17. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992. – 212 с.
8. **Медведько Д.В.** К вопросу о получении локальных решений для одномерных задач строительной механики. // Деп. во 2 вып. библиогр. указателя депонир. рукописей ВНИИТПИ. – М.: МИСИ, 1992.
9. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** К вопросу об оценке влияния спрямления аппроксимирующей сетки на численное решение краевой задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 115-120.
10. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Об исследовании дискретных методов получения локальных решений одномерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 121-134.

---

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный

университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

# НАТУРНО-РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ГРУНТА ОСНОВАНИЯ СООРУЖЕНИЙ

*Е.Ю. Сергеевцев<sup>1</sup>, С.В. Щербина<sup>2</sup>, С.А. Павлющик<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> ООО «НИИ Транснефть», г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** В статье приводятся результаты натурных вибродинамических исследований 7 сооружений, а также данные исследований динамических характеристик грунтов полученные в результате выполненной верификации конечноэлементной модели.

**Ключевые слова:** динамические характеристики, формы колебаний,  
динамический модуль упругости грунта

## FIELD AND COMPUTATIONAL DETERMINATION OF DYNAMIC MODULUS OF ELASTICITY OF FOUNDATION SOIL

*Evgeny Y Sergeevtsev<sup>1</sup>, Sergey V. Scherbina<sup>2</sup>, Sergey A. Pavlyushik<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> LLC "NII Transneft", г. Москва, RUSSIA

<sup>2</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The article describes the results of dynamic research of 7 structures and also soil dynamic characteristics, based on verification of finite element model.

**Key words:** dynamic characteristic, waveshape, dynamic modulus of elasticity

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ РАСЧЕТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

При расчете сейсмостойкости зданий и сооружений важнейшими параметрами являются их частоты собственных колебаний. Современные расчетные методы позволяют получить частоты и формы собственных колебаний конструкций практически любой сложности. Однако при расчетах сложных строительных конструкций на динамические нагрузки часто возникают проблемы построения их расчетных схем, адекватных реальному сооружению. Одним из параметров вызывающих неопределенность при построении расчетной модели являются динамические характеристики грунтов основания, так как статические характеристики - в первую

очередь модуль деформации, определяются при действии длительной нагрузки на грунт и не могут характеризовать реакцию грунта на динамические нагрузки. Таким образом, для построения расчетной схемы адекватной реальному сооружению необходимо определить динамический модуль упругости грунта. Поясним, что в рамках статьи термин «динамический модуль упругости грунта» применяется для обозначения характеристики грунтового основания применяемой при модальном расчете здания или сооружения (расчете на сейсмическое или пульсационное ветровое воздействие).

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для уточнения значений динамических модулей упругости грунтов основания было решено провести серию натурных исследований динамических характеристик семи сооружений. Далее на основе натурных данных выполнить верификацию расчетной модели сооружения на упругом основании и уточнить значения динамических модулей упругости грунтов основания.

Исследуемые сооружения имеют пространственную конструкцию из монолитного железобетона, включающую защитную оболочку и конструкции обстроя опирающиеся на общий фундамент в виде монолитной железобетонной плиты. Оболочка состоит из цилиндрической части внешним диаметром 47.4 м. и толщиной стен 1.2 м., перекрытой купольным покрытием толщиной 1.1 м. связанным с цилиндрической частью горизонтальным кольцевым уширением. Отметка верха купольного покрытия оболочки части – +66.45, отметка покрытия обстроя +50.40. Общий вид исследуемого сооружения показан на рисунке 1.



Рис. 1. Общий вид исследуемого сооружения

В экспериментах на разных сооружениях были использованы: модернизированные виброметры СМ-3м совместно с аналогово-

цифровым преобразователем; широкополосные цифровые сейсмометры СМГ-6ТD фирмы Guralp, трехкомпонентный сейсмоприемник SP-400 фирмы EENTEC. Указанными приборами регистрировались так называемые фоновые колебания, вызываемые работой различного оборудования (турбогенераторы, насосы и др.) и микросейсмическим воздействием, то есть отклик конструкции на фоновое вибрационное воздействие. Программы проведения исследований на всех объектах были идентичными. Датчики располагались на купольном покрытии оболочки и на покрытии обстроя. Типовая схема расположения точек измерения колебаний показана на рисунке 2.

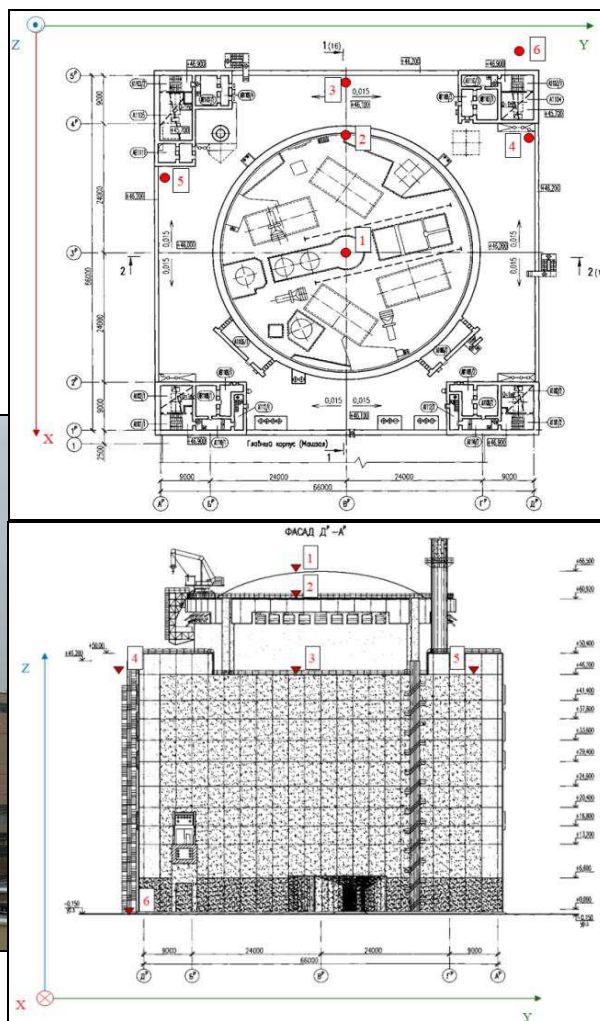


Рис. 2. Схема расположения точек измерения колебаний на исследуемом сооружении.

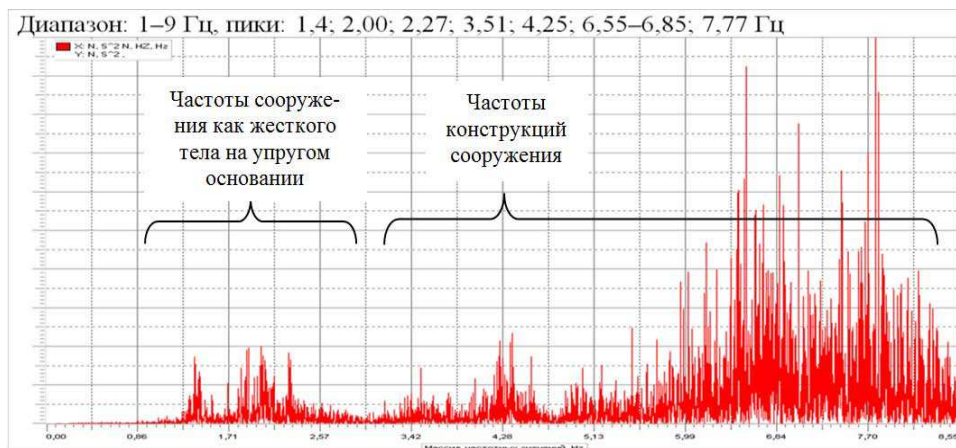


Рис. 3. Энергетический спектр колебаний по оси X в точке опорном кольце защитной оболочки сооружения № 6

Таблица 1. Значения низших собственных частот колебаний исследованных объектов

№ п/п	Сооружение	Низшие частоты собственных колебаний	
		Направление X	Направление Y
1	2	3	4
1	Сооружение №1	1.4	1,9
		2.3	
2	Сооружение №2	1.6; 2.3	
3	Сооружение №3	1.27; 1.38–1.47; 1.76; 2.34	
4	Сооружение №4	1.30–1.32; 1.40; 1.76–1.77; 2.30–2.31	
5	Сооружение №5	1.30–1.32; 1.40; 1.8; 2.20–2.40;	
6	Сооружение №6	1.40	1.30
		1.96–2.00; 2.18–2.26	
7	Сооружение №7	1.83	1.65–1.70
		2.18–2.21	

В результате проведенных исследований были зарегистрированы и определены собственные частоты всех сооружений в диапазоне от 1 до 20 Гц. С точки зрения верификации расчетной модели сооружения на упругом основании наибольший интерес представляют собственные колебания сооружения как жесткого тела на упругом основании, которые, как правило, являются низшими собственными частотами сооружения.

На спектрах колебаний измеренных сооружений собственные частоты разделяются на две группы: группа низших собственных частот колебаний и группа более высоких собственных частот. На этом было сделано предположение, о том, что группа низших

частот относится к колебаниям сооружения как жесткого тела на упругом основании, а более высокие собственные частоты к колебаниям конструкций сооружения. Разделение частот на группы хорошо видно на спектре колебаний в точке на опорном кольце покрытия защитной оболочки сооружения № 6 показанном на рисунке 3. Это предположение было подтверждено в дальнейшем при расчетах модели сооружения на упругом основании. Значения низших собственных частот колебаний исследованных объектов представлены в таблице 1.

Как видно из таблицы 1, первые частоты собственных колебаний сооружений близки по значениям – 1.27-1.65 Гц. Наборы низших собственных частот на разных объектах раз-

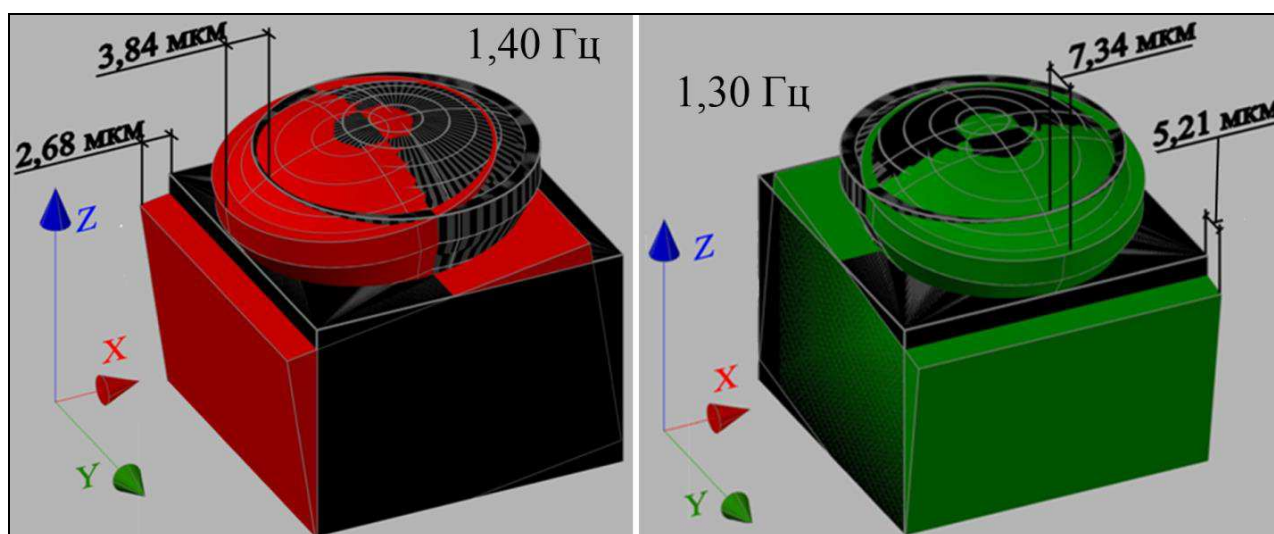


Рис. 4. Формы колебаний сооружения № 6 как жесткого тела на упругом основании по направлениям «X» и «Y» соответствующие частотам 1.30 и 1.40 Гц.

Таблица 2. Статические характеристики грунтов основания.

Наименование ИГЭ	Толщина слоя, м	Плотность, т/м <sup>3</sup>	Модуль деформации, МПа	Коэффициент Пуассона	Обозначение в модели
1	2	3	4	5	6
Насыпной грунт	7.2	-	-	-	
Доломитовый щебень	4.18	2.38	91	0.25	
Пески средней плотности	0.5	1.82	30	0.27	
Глины	2.5	1.98	10	0.41	
Глины	2.5	1.94	15	0.43	
Пески пылеватые	1.7	1.91	13	0.28	
Пески мелкие	8.2	1.91	26	0.28	
Пески средней крупности	8.6	1.91	26	0.28	
Пески мелкие, средней крупности	8.8	1.92	65	0.27	
Глины, суглинки	6.1	1.99	45	0.41	
Пески мелкие и средней крупности	19.7	1.93	58.5	0.26	

личаются, однако, на всех объектах достаточно сильно проявились две низших частоты, причем на сооружениях № 1, 6 и 7 эти частоты четко разделились по двум взаимно перпендикулярным горизонтальным направлениям. Разница в результатах, полученных на разных сооружениях, объясняется различными деформационными характеристиками грунтовых оснований, а также тем, что на по-

крытиях обстроев некоторых сооружений были установлены дополнительные грузы в виде бетонных блоков для выравнивания осадок. При исследовании сооружения №6 были получены результаты, позволившие не только определить значения собственных частот, но и построить формы колебаний соответствующие первым двум частотам 1.40 и 1.30 Гц. Полученные формы колебаний показаны на рисунке 4.

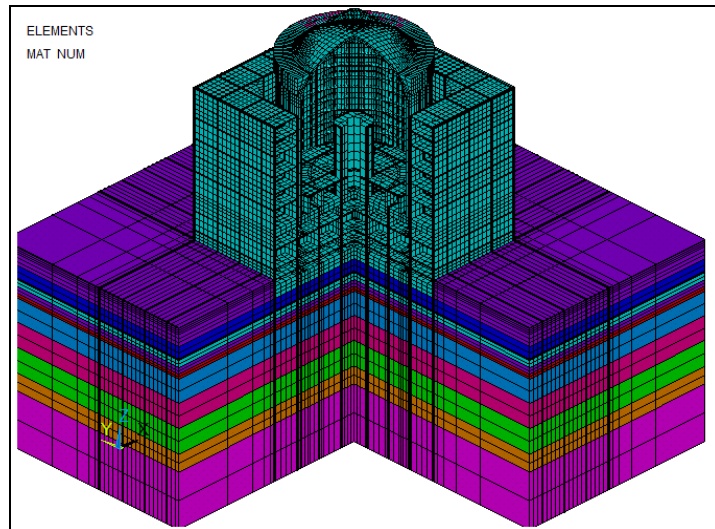


Рис. 5. Общий вид модели сооружения с вырезом ¼.

Таблица 3. Частоты собственных колебаний модели сооружения на упругом основании, вычисленные в ПК ANSYS

№ расчетной частоты	Значение частоты, Гц	Примечание
1	2	3
1	0.537	Частоты всего здания в целом как жесткого тела
2	0.538	
3	0.886	
4	1.092	
5	1.216	
6	1.217	
7	4.96	Совместная частота колебаний обстроя и оболочки
8	4.97	Частота колебаний обстроя
9	5.94	Частота колебаний обстроя
10	6.64	Частота колебаний обстроя

### 3. ВЕРИФИКАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Следующей задачей поставленной в начале работы было построение и верификация расчетной модели сооружения на упругом основании. В модели использованы данные инженерно-геологических исследований для сооружения №4. Данные для построения модели самого сооружения взяты из типового проекта. В качестве модулей упругости грунтов основания в модель закладывались

значения модулей деформации, полученные при статических испытаниях (таблица 2).

Модель построена в программно-расчетном комплексе ANSYS. Задача решается в трехмерной постановке, все элементы выполнены из трехмерных восьмиузловых элементов типа SOLID185. Общий вид модели представлен на рисунке 5. Различные материалы отмечены разными цветами. Результаты расчета модели сооружения на упругом основании приведены в виде значений собственных частот, представленных в таблице 3.

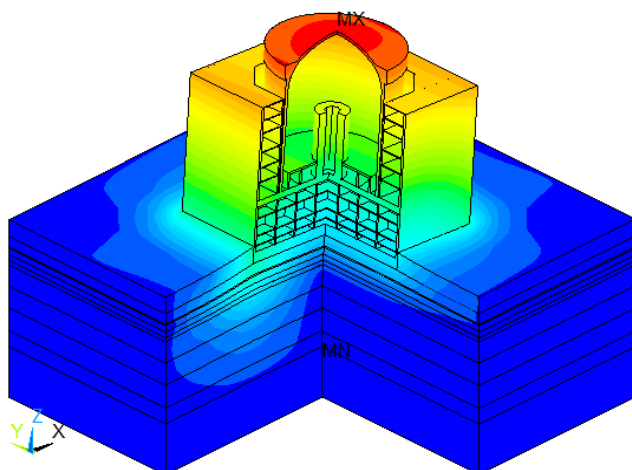


Рис. 6. Первая расчетная форма колебаний КЭ модели сооружения на упругом основании (частота 0.538 Гц).

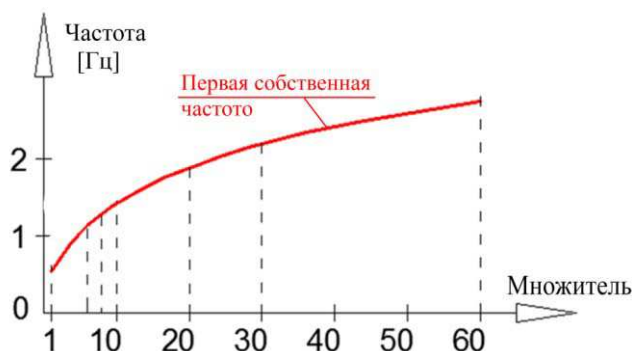


Рис. 7. График зависимости первой расчетной частоты модели сооружения от множителя модулей упругости грунтов основания

Первые 6 расчетных частот относятся к колебаниям всего сооружения как жесткого тела на упругом основании. При этом группа из первых 6-ти частот, так же как и при натуральных исследованиях, отстоит от более высоких собственных частот конструкций.

Первая и вторая расчетные формы колебаний совпадают с формами, полученными при натуральных измерениях. Первая расчетная форма собственных колебаний модели сооружения показана на рисунке 6, вторая расчетная форма собственных колебаний симметрична первой.

Как видно из рисунков 4 и 6 натурная и расчетная формы собственных колебаний хорошо совпадают, при этом частоты соответствующие им значительно расходятся: расчетная частота – 0.538 Гц, натурная частота –

1.30 Гц, т. е. значения расчетных частот меньше натуральных в 2 – 3 раза. Расхождение значений натуральных и расчетных частот является следствием того, что значения динамического модуля упругости грунта основания отличается от статического модуля деформации, определенного испытаниями и заложенного в расчет. При повышении значения модуля деформации основания и приближении к реальному значению динамического модуля упругости значения расчетных частот должны совпасть с экспериментальными частотами.

Для определения реальных значений динамических модулей упругости грунтов основания была проведена серия расчетов. В каждом расчете значения статических модулей деформации грунтов основания, взятые

по данным геологии, умножались на один коэффициент, после чего определялись значения собственных частот. Перебирая, таким образом, значения множителей в серии расчетов, был получен график зависимости значений первой и второй расчетных частот от множителя и соответственно модулей упругостей грунтов основания. График зависимости для второй частоты практически полностью совпадают с графиком для первой частоты. График зависимости показан на рисунке 7.

В результате проведенного анализа установлено, что наилучшее совпадение расчетных и натуральных результатов получено при значениях множителя от 8 до 10. При этом первая и вторая расчетные частоты практически полностью совпадают по значениям в отличие от первой и второй натуральных частот. Это вызвано тем, что расчетная модель в отличие от реального сооружения является абсолютно симметричной. Поэтому точность полученных значений динамических модулей упругости грунтов основания, определенных по графику зависимостей частот от множителя, составляет 7-10%. Значения 1-й и 2-й расчетных частот при заложенных в модель значениях динамических моделей упругости грунтов основания составили:

- при множителе 8 – 1.29 Гц;
- при множителе 10 – 1.42 Гц.

Эти значения расчетных частот хорошо сходятся с данными натуральных исследований.

#### 4. ВЫВОД

В результате анализа данных натуральных исследований и проведенной на их основе верификации модели сооружения были определены реальные динамические модули упругости грунтов основания, что позволило идентифицировать расчетную модель с реальным сооружением.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варшицкий В.М., Богач А.А.** Моделирование взаимодействия трубопровода со смещающимся грунтом в тектоническом разломе// Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов 2014 №4
2. **Ширяев А.М., Жолобов В.В., Тарновский Е.И., Валиев М.И.** Построение математической модели волнового процесса в упругом подземном нефтепроводе, подверженном сейсмическому воздействию// Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов 2014 №3.
3. **Андреева П.И., Голованов А.В., Сергеевцев Е.Ю., Щербина С.В.** Экспериментально – расчетное исследование динамических характеристик купольной части защитной оболочки атомного реактора ввэр-1000// Научно-технический вестник Поволжья №6 2013
4. **Андреева П.И.,** Экспериментальное определение динамических характеристик жилого 40-этажного здания в натуральных условиях // Журнал Промышленное и гражданское строительство. – 2012. - №12.
5. **Сергеевцев Е.Ю., Румянцев А.А.** Натурные исследования динамических характеристик частично возведенного здания универсального бассейна в г. Анапе // Вестник МГСУ 2012 №5.
6. **Сергеевцев Е.Ю., Румянцев А.А.** Вибрационные испытания 16-этажного жилого дома объемно-блочной конструкции // Вестник МГСУ 2012 №5.
7. **Зубков Д.А., Сергеевцев Е.Ю., Румянцев А.А.** Изучение микроколебаний защитной оболочки реактора ВВЭР – 1000 // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2011. – №2. С.
8. **Зубков Д.А., Кузнецов В.В., Сергеевцев Е.Ю.** Определение динамических характеристик в натуральных условиях высотного здания старой постройки // Сейсмостойкое строительство Безопасность сооружений 2011 №4.

9. **Шаблинский Г.Э.** «Сейсмостойкость массивных конструкций энергетических сооружений», диссерт. на соискание уч. степ. докт. техн. наук: 05.23.17: защищена: 20.02.90, утверждена 03.08.90, М., 1990.

---

Сергеевцев Евгений Юрьевич, кандидат технических наук, заместитель заведующего лаборатории разработки нормативной документации ООО «НИИ Транснефть», Россия, 117186 г. Москва, Севастопольский проспект, д. 47а; тел: +7 (495) 950-8295 (4571) e-mail: sergeevtsevey@niitnn.transneft.ru

Щербина Сергей Викторович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) НИУ МГСУ «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г.Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: scherbine@mail.ru, niccm@mgsu.ru

Павлющик Сергей Александрович кандидат технических наук, заведующий лаборатории фундаментов и оснований ООО «НИИ Транснефть»; Россия, 117186 г. Москва, Севастопольский проспект, д. 47а, тел: +7 (495) 950-8295 (4577); e-mail: pavlyuschiksa@niitnn.transneft.ru

Evgeny Y Sergeevtsev Сергеевцев DSc, deputy head of the laboratory of development of normative documents, LLC "NII Transneft", Russia, 117186 Moscow, Sevastopol prospect, 47A, tel: +7 (495) 950-8295 (4571) e-mail: sergeevtsevey@niitnn.transneft.ru

Sergey V. Scherbina, engineer of Research & Education Center of Civil Engineering, Moscow State University of Computation Simulation, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: scherbine@mail.ru, niccm@mgsu.ru

Pavlyushik Sergey Aleksandrovich, DSc, head of laboratory foundations and basements; LLC "NII Transneft"; Russia, 117186 Moscow, Sevastopol prospect, 47A, tel: +7 (495) 950-8295 (4577)

# ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ «СООРУЖЕНИЕ-ЖИДКОСТЬ»

*А.М. Белостоцкий<sup>1,2</sup>, Д.С. Дмитриев<sup>2</sup>, Нгуен Тай Нанг Лонг<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** в статье представлен сравнительный анализ результатов решенных задач по верификации разработанной методики уточнённого численного моделирования динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) трехмерной системы «грунтовое основание – водохранилище – гидротехнические сооружения» при сейсмических воздействиях.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, связанная постановка, напряженно-деформированное состояние, собственные частоты, колебание жидкости

## VERIFICATION OF NUMERICAL METHOD OF STRAIN-STRESS DYNAMIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL SYSTEM «STRUCTURE-FLUID»

*Alexander M. Belostotsky<sup>1,2</sup>, Dmitry S. Dmitriev<sup>2</sup>, Nguyen Tai Nang Luong<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** The article presents a comparative analysis of solutions of problems on the verification methodology developed by the refined numerical simulation of the dynamic stress-strain state (SSS) of three-dimensional system of "ground foundation - reservoir - structures" at seismic impacts.

**Key words:** math modeling, numerical methods, related production, stress-strain state, natural frequencies, strain-stress state, fluctuation of the fluid

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Конструкции и сооружения, взаимодействующие с жидкостью (например, водоподпорные сооружения различного назначения, резервуары, элементы систем водоснабжения и т.п.), достаточно распространены в области промышленного и гражданского строительства. Расчетное обоснование таких объектов при сейсмическом воздействии представляет собой нетривиальную задачу, в том числе, ввиду возникновения колебаний свободной

поверхности жидкости (эффект плескания). Это может привести к возникновению непредвиденных гидродинамических воздействий и, как возможное следствие, к повреждениям или полному разрушению рассматриваемых конструкций и сооружений. В актуальной «инженерной» практике расчетов гидротехнических сооружений влияние водной среды учитывается путем задания присоединенных масс на напорную грань сооружения, но данный метод имеет ряд ограничений и не позволяют учесть некоторые

значимые факторы. Необходимость учета этих факторов заставляет совершенствовать методы решения связанных задач «сооружение-жидкость».

В настоящей работе представлены задачи по верификации разработанной методики уточнённого численного моделирования динамического НДС трехмерной системы «грунтовое основание – водохранилище – сооружение напорного фронта ГТС» при сейсмических воздействиях. В статье приведено сопоставление результатов, полученных различными численными методами, которые реализованы в программных комплексах ANSYS Mechanical (постановка Лагранжа) и ANSYS CFX (постановка Эйлера), с аналитическими решениями и экспериментальными данными.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математической формулировки основных уравнений системы «сооружение-жидкость» применимы альтернативные подходы постановки: Лагранжа, Эйлера и так называемая произвольная Лагранжа-Эйлера (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation (постановка ALE)).

Постановка Лагранжа основывается на том, что в начальный момент времени каждая из частиц рассматриваемой среды «маркируется» путем присвоения ей значений координат, а в дальнейшем прослеживается движение каждой частицы индивидуально – путем определения траектории, т.е. координат относительно начальных значений [1]. Одним из программных комплексов в котором для решения связанных задач «сооружение-жидкость» реализован численный метод, основанный на постановке Лагранжа, является ANSYS Mechanical.

Постановка Эйлера основана на изучении параметров движения сплошной среды в каждой фиксированной точке пространства в различные моменты времени. Методы, основанные на подходе Эйлера, используют стационарную, чаще всего регулярную сетку, сквозь

которую движутся частицы (малые объемы) сплошной среды, а все физические характеристики определяются в узлах данной сетки, т.е. они не связаны с конкретными материальными частицами, а в каждый момент времени являются характеристиками разных частиц, находящихся в данный момент в данной точке пространства. Численный метод основанный на постановке Эйлера реализован в программном комплексе ANSYS CFX, который специально разработан для решения задач гидрогазодинамики с учетом нелинейного поведения жидкости/газа.

Произвольная постановка Лагранжа-Эйлера относится к комбинированным методам. В данном методе используется сетка, которая может двигаться произвольно, т.е. она не остается фиксированной, как Эйлерова сетка, но и не подчиняется законам движения Лагранжевой сетки [2]. В настоящей работе произвольная постановка Лагранжа-Эйлера не рассматривалась.

В качестве верификационных примеров в статье рассмотрены две задачи:

1. задача собственных значений колебания свободной поверхности жидкости;
2. задача поведения свободной поверхности жидкости при динамическом воздействии.

Основным критерием выбора серии верификационных примеров послужило наличие их достоверного расчетного и экспериментального подтверждения.

## 3. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЖЕСТКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Задача о колебаниях свободной поверхности жидкости является классической задачей на собственные значения изучаемая такими учеными, как: Пуассон, Релей, Кирхгоф и др. В качестве верификационного примера рассмотрена задача по определению частот и форм собственных колебаний жидкости в прямоугольном резервуаре. Рассматривается

вариант со следующими параметрами: глубина воды в резервуаре 5м, ширина резервуара 27м, стенки резервуара из бетона толщиной 1м.

*Аналитическое решение*

Согласно [5] собственная круговая частота жидкости в прямоугольном сосуде равна:

$$\omega_i^2 = g \cdot k \cdot th(kH) \tag{1}$$

где:  $k$ (волновое число)

$$k = \frac{\pi n}{L} \tag{2}$$

где:  $n = 1,2,3\dots$ (число полуволн на свободной поверхности жидкости)

Подставив (2) в (1) получим:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g\pi n}{L} \cdot th\left(\frac{\pi H n}{L}\right)} \tag{3}$$

$$f_i = \frac{\sqrt{\frac{g\pi n}{L} \cdot th\left(\frac{\pi H n}{L}\right)}}{2\pi} \tag{4}$$

где:  $g$  – ускорение свободного падения;  $H$  – глубина воды в сосуде;  $L$  – ширина сосуда с жидкостью.

*Решение в ПК ANSYS Mechanical*

В ПК ANSYS Mechanical симметричная постановка задачи расчета связанной системы «сооружение-жидкость», реализуется двумя возможными способами:

1. Симметричная постановка, полученная по средствам использования соответствующей постановки в перемещениях для сооружения и постановки в перемещениях для жидкости ( $\bar{u}, \xi$ ) [8]. Это задачи гидроупругости, связанные с колебаниями жидкости (т.е. задачи расчета связанной системы «сооружение – несжимаема жидкость с эффектом свободной поверхности»). Для моделирования жидкости в таких задачах применяют элементы FLUID79 и FLUID80.

2. Симметричная постановка в перемещениях (элементы, граничащие с сооружением, и элементы свободной поверхности) и давлениях для жидкости ( $\bar{u}, p, \phi$ ) [8]. Это задачи упруго-акустики (т.е. задачи расчета связанной системы «сооружение – акустическая жидкость»). Для моделирования акустической жидкости в таких задачах применяют элементы FLUID29 и FLUID30.

При решении данной верификационной задачи, рассматривались два варианта моделирования жидкости:

1. моделирование с использованием элементов несжимаемой жидкости с эффектом свободной поверхности (FLUID79 (плоский элемент) и FLUID80 (объемный элемент). Использование плоских и объемных элементов позволит верифицировать 3D элементы FLUID80 в плоской постановке (рис.1);
2. моделирование с использованием акустических элементов FLUID30 (объемный элемент) (рис.1).

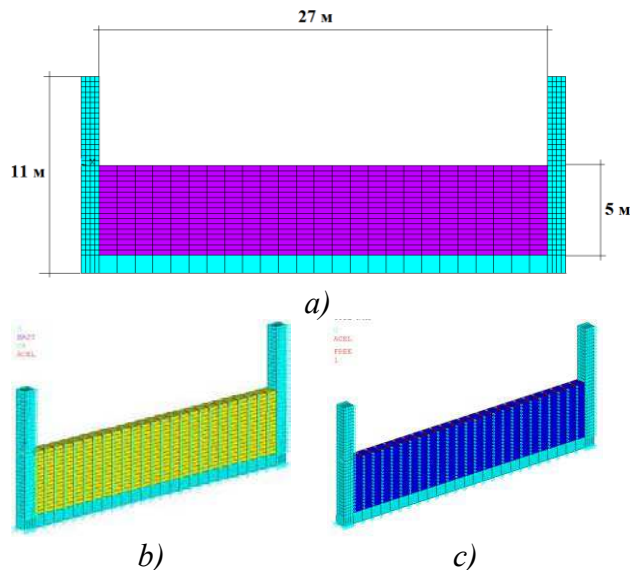


Рис. 1. Конечноэлементная модель резервуара с жидкостью.  
 а) Модель с двумерными элементами FLUID79; б) Модель с объемными элементами FLUID80; в) Модель с объемными «акустическими» элементами FLUID30.

### Вариант 1 (FLUID79, FLUID80)

Для моделирования стенок резервуара использовались элементы PLANE42 (в плоской постановке) и SOLID185 (в объемной постановке). Узлы днища бака были жестко закреплены (ограничены все перемещения). При использовании объемных элементов FLUID80 всем узлам были ограничены перемещения в направлении UY, для реализации плоской постановки. На общих поверхностях воды и резервуара накладывались ограничение степеней свободы по нормальям (перемещение в направлении перпендикулярном плоскости контакта) командой CP. Для вычисления собственных частот и форм колебаний жидкости использовался редуцированный метод. Для использования этого метода ко всем узлам свободной поверхности жидкости назначался мастер степеней свободы по нормали к этой поверхности. Свойства материалов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов и сред

1 вариант (FLUID79, FLUID80)		2 вариант (FLUID30)	
<i>Бетон (резервуар)</i>			
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2500	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2500
Модуль упругости $E$ , Па	$3 \times 10^{10}$	Модуль упругости $E$ , Па	$3 \times 10^{10}$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.23	Коэффициент Пуассона $\nu$	0.23
<i>Жидкость (вода)</i>			
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000
Динамическая вязкость $\eta$ , Па·с	0.001	Динамическая вязкость $\eta$ , Па·с	0.001
Модуль упругости $E$ , Па	$2.068 \times 10^{10}$	Скорость звука в жидкости $\nu$ , м/с	1400
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.49		

### Вариант 2 (FLUID30)

Для моделирования стенок резервуара использовались элементы SOLID185. Элементы

жидкости (FLUID30) и элементы резервуара на контакте имеют общие узлы, на которые накладываются условия контакта FSI. На узлы свободной поверхности жидкости командой SF накладывались условия FREE (эта команда добавляет в выбранных элементах, помимо давления PRESS, дополнительные узловые степени свободы – перемещения UZ, UX, UY). Для реализации случая плоской деформации, всем узлам были ограничены перемещения в направлении UY. Узлы днища бака были жестко закреплены (ограничены перемещения UX, UY, UZ и повороты). Свойства материалов представлены в таблице 1. Для вычисления собственных частот и форм колебаний жидкости у элементов FLUID30 опция KEYOPT(2) устанавливалась в положение 3 (Present for modal).

Сопоставление результатов, полученных аналитическим методом и в ПК ANSYS (таблица 2), показало хорошее совпадение; расхождение нарастает с увеличением частоты, что объясняется разрешающей способностью принятой КЭ сетки. Формы собственных колебания свободной поверхности жидкости представлены в таблице 3.

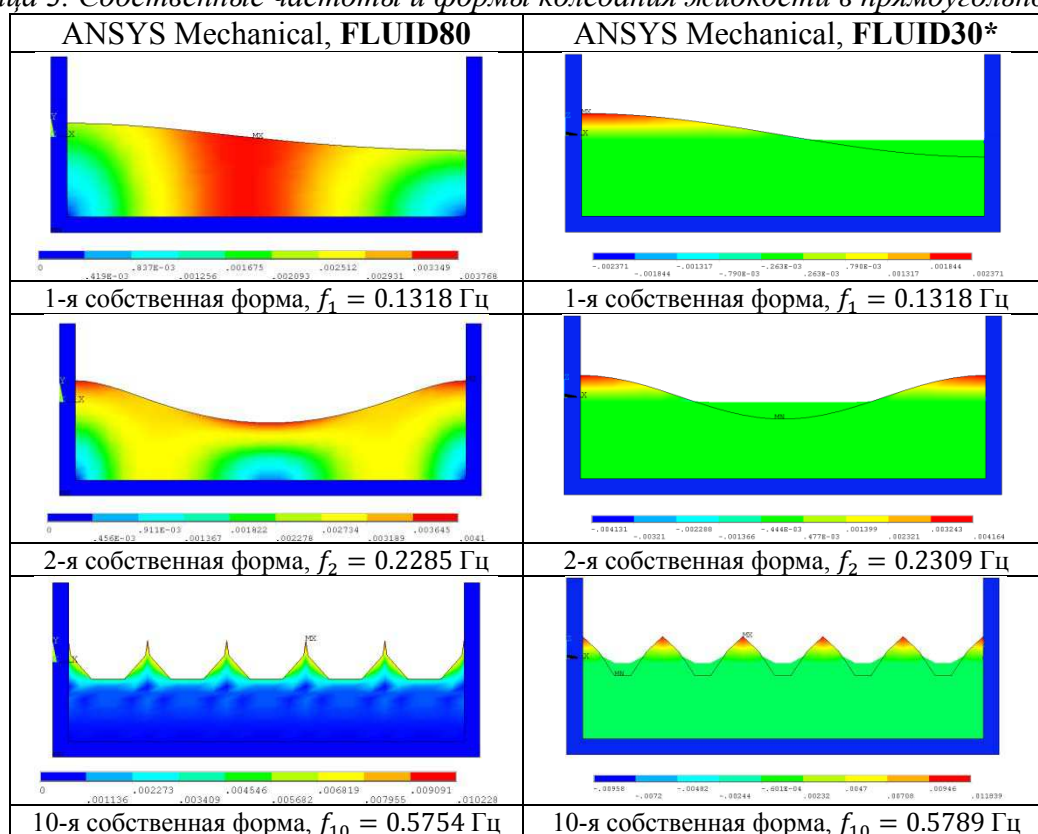
## 4. КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ РЕЗЕРВУАРЕ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В рассматриваемой верификационной задаче моделировался прямоугольный резервуар, частично заполненный жидкостью (водой). Геометрические размеры модели резервуара, а также физические свойства жидкости и характер моделируемого динамического воздействия полностью соответствуют эксперименту, который проводился в 2003 году в Аргентине [6].

Таблица 2. Сопоставление значений частот собственных колебаний

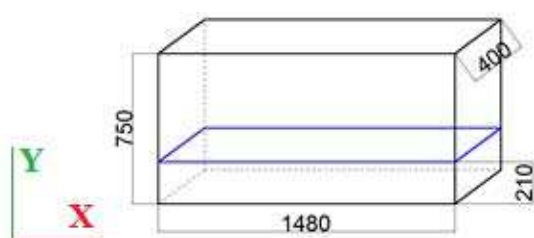
№ фор мы	Аналитиче- ское решение [5]	Лагранж, ANSYS Mechanical		
		Fluid79 (2D) / расхождение с аналит. решением	Fluid80 (3D) / расхождение с аналит. решением	Fluid30 (3D) / рас- хождение с ана- лит. решением
		$f_n$ [Гц]	$f_n$ [Гц] / %	$f_n$ [Гц] / %
1	<b>0.1319</b>	0.1318 / 0.1	0.1318 / 0.1	0.1319 / 0.0
2	<b>0.2305</b>	0.2285 / 0.1	0.2286 / 0.8	0.2309 / 0.2
3	<b>0.2992</b>	0.2949 / 1.4	0.2951 / 1.4	0.3002 / 0.3
4	<b>0.3512</b>	0.3490 / 0.6	0.3494 / 0.5	0.3532 / 0.6
5	<b>0.3945</b>	0.3941 / 0.1	0.3948 / 0.1	0.3980 / 0.9
6	<b>0.4327</b>	0.4309 / 0.4	0.4322 / 0.1	0.4382 / 1.3
7	<b>0.4676</b>	0.4652 / 0.5	0.4672 / 0.1	0.4757 / 1.7
8	<b>0.4999</b>	0.5001 / 0.1	0.5030 / 0.6	0.5113 / 2.2
9	<b>0.5303</b>	0.5353 / 0.9	0.5392 / 1.7	0.5456 / 2.8
10	<b>0.5589</b>	0.5700 / 2.0	0.5754 / 2.9	0.5789 / 3.5

Таблица 3. Собственные частоты и формы колебания жидкости в прямоугольном сосуде.

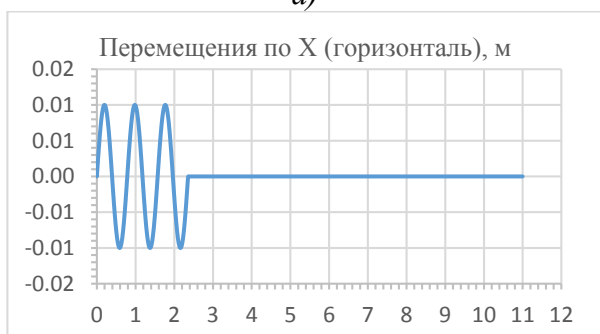


Примечание: такая картина отображения суммарных перемещений связана с отсутствием у всех акустических элементов FLUID30, кроме поверхностных, линейных перемещений в качестве узловых степеней свободы.

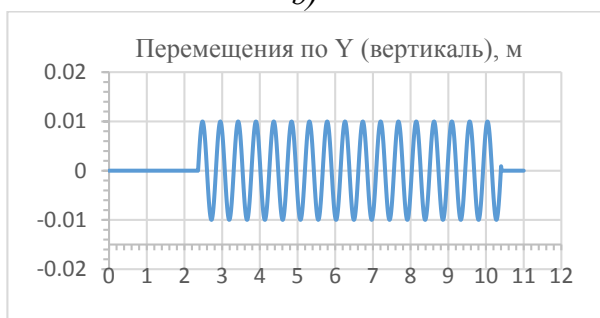
Стенки «экспериментального» резервуара были выполнены из оргстекла толщиной 10мм (в модели задавались, как условно абсолютно жесткие). Резервуар имеет размеры 1480×400×750 мм (рис.2), толщина слоя воды – 210мм. Продолжительность динамического воздействия составляла 11 секунд и представляет собой синусоиду. Первые 2.37с воздействие прикладывалось в горизонтальной плоскости (для возбуждения свободной поверхности жидкости), начиная с 2.38с по 11с воздействие прикладывалось по вертикали.



a)



b)



c)

Рис. 2. a) Габаритные размеры исследуемого резервуара (мм); Прикладываемое динамическое воздействие: b) График прикладываемого воздействия по горизонтали; c) График прикладываемого воздействия по вертикали.

### Параметры расчетов

#### ANSYS Mechanical

Для моделирования жидкости использовались элементы FLUID80 (модификация элемента SOLID45, с нулевой сдвиговой жесткостью). Стенки резервуара моделировались элементами SOLID185 (условно абсолютно жесткие). Расчетная сетка полностью структурированная (рис. 3). Характерный размер конечного элемента составляет 0.01 м. На общих поверхностях воды и резервуара накладывались ограничение степеней свободы по нормалю (перемещение в направлении перпендикулярном плоскости контакта) командой CP.

Для решения задачи в динамической постановке решение СЛАУ выполнялось прямым разреженным методом (SPARSE). Интегрирование по времени проводилось методом Ньюмарка, шаг принимался равным 0.0025 с. Динамическое воздействие прикладывалось к нижней поверхности резервуара в виде заданных перемещений (рис.2 b,c).

#### ANSYS CFX

Рассматриваемое поведение жидкости и газа в резервуаре принималось авторами статьи [9] ламинарным мультифазовым (Air 25°C – Water 25°C). Воздух и жидкость в резервуаре моделируются трехмерными нестационарными нелинейными уравнениями гидрогазодинамики Навье-Стокса. Для дискретизации решаемых уравнений гидрогазодинамики применяется метод конечных объемов (МКО) с применением схемы переноса «High Resolution» и неявной схемы интегрирования по времени обратным методом Эйлера второго порядка.

В результате выполненных расчетных исследований было проведено сопоставление вынужденные формы колебания жидкости в различные моменты времени. Результаты, полученные численными методами, сопоставлялись с фотографиями реального (экспериментального) резервуара с жидкостью (таблица 4).

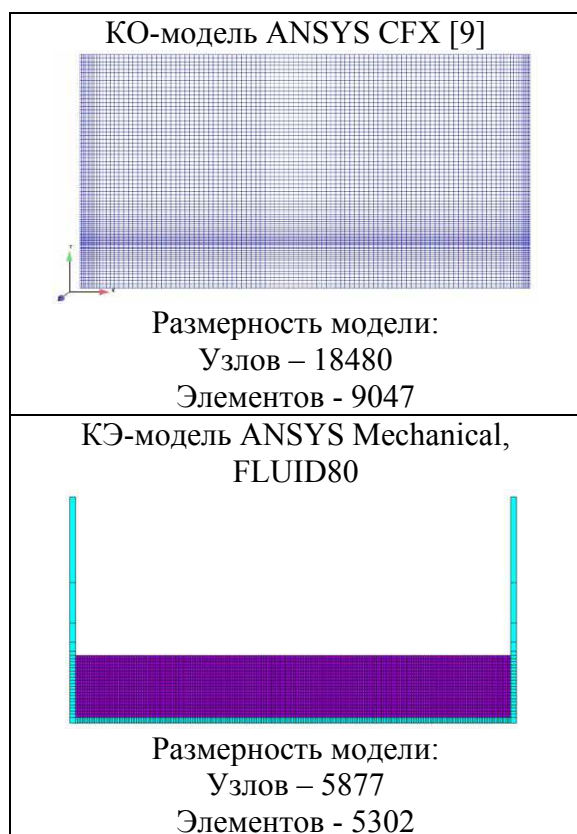


Рис. 2. Общий вид расчетных моделей и их размерность.

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Сравнение частот и форм собственных колебаний жидкости в прямоугольном резервуаре, полученных численными и аналитическими методами, показало хорошее качественное (форма свободной поверхности жидкости) и количественное (частота колебаний) совпадение. Расхождения на высших формах колебаний объясняются разрешающей способностью принятой конечноэлементной сетки. Объемные и плоские элементы (FLUID80 и FLUID79 соответственно) дают близкие результаты в данной постановке.
2. Хорошее совпадение вычисленных частот и форм собственных колебаний жидкости с аналитическим решением подтвердило воз-

можность применения акустических элементов FLUID30 для моделирования жидкости. Недостаток в отображении форм колебания жидкости связан с отсутствием у основной части акустических элементов линейных перемещений в качестве узловых степеней свободы. Однако расхождение по количественному показателю (частота собственных колебаний) находится в пределах 1% на первых пяти формах.

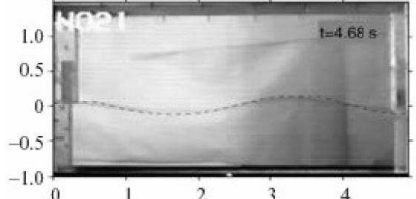
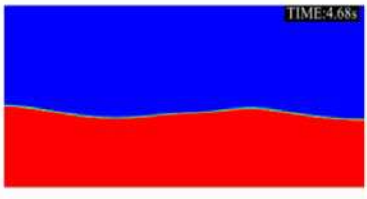
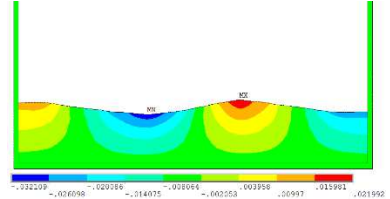
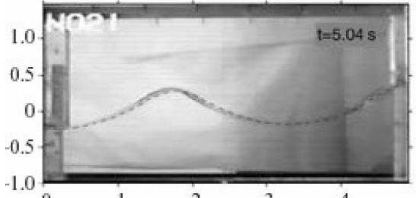
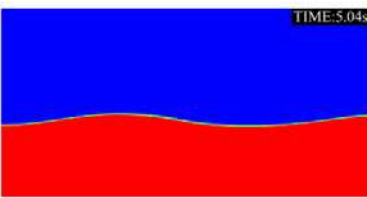
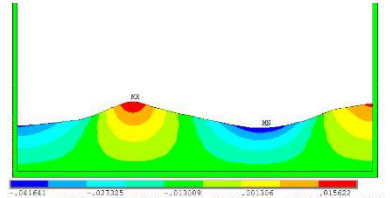
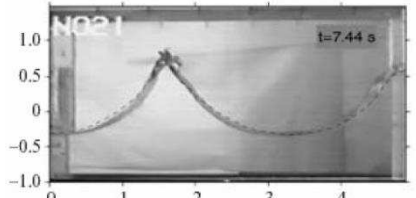
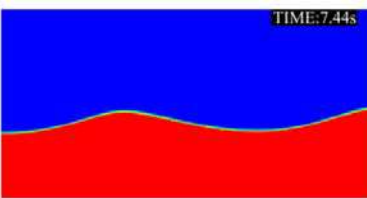
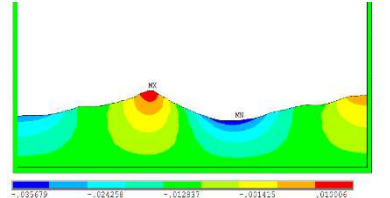
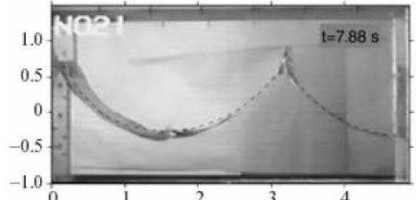
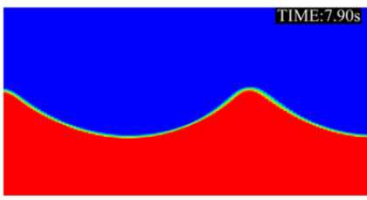
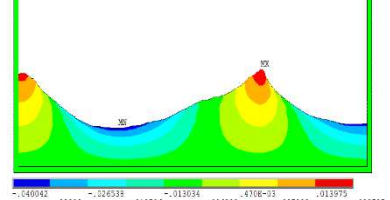
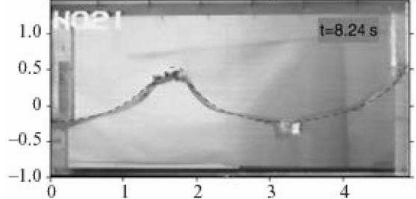
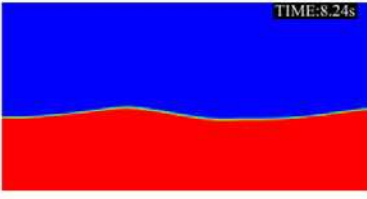
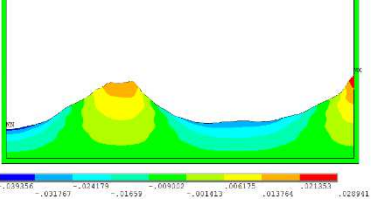
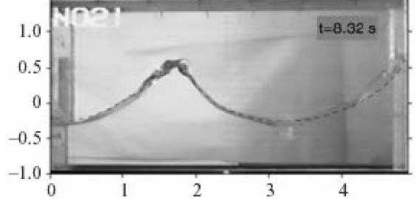
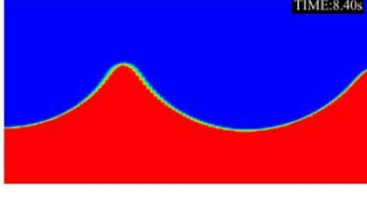
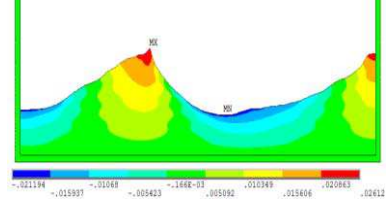
3. При рассмотрении задачи о поведении свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде при динамическом воздействии применяемые подходы (лагранжев и эйлеров) показали результаты, близкие к полученным в эксперименте. На основании данного сравнения можно сделать вывод о возможности использования ПК ANSYS Mechanical (лагранжев подход) для решения связанных задач для систем «сооружение – жидкость».

4. Несмотря на то, что численные методы, реализованные в ANSYS Mechanical, упрощают уравнения гидроупругости и приближенно описывают поведение жидкости, данные подходы вполне применимы для задач, где основной интерес представляет прочность и надёжность сооружений, контактирующих с жидкостью (в том числе гидротехнические сооружения).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Усманов А.Р., Щербина С.В. О традиционных подходах численного моделирования связанных систем «сооружение-жидкость». // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сборник трудов №17. – г. Москва, 2014 г., стр. 159-183.

Таблица 3. Визуальное сопоставление форм свободной поверхности жидкости при динамическом воздействии в различные моменты времени, полученных в эксперименте и численно (Эйлер, Лагранж).

Эксперимент [9]	Эйлер, ANSYS CFX [9]	Лагранж, ANSYS Mechanical, FLUID80
Время, $t = 4.68$ с		
		
Время, $t = 5.04$ с		
		
Время, $t = 7.44$ с		
		
Время, $t = 7.88$ с		
		
Время, $t = 8.24$ с		
		
Время, $t = 8.32$ с		
		

2. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Усманов А.Р., Щербина С.В.** Некоторые традиционные подходы к сейсмическому расчету конструкций и сооружений, взаимодействующих с жидкостью. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сборник трудов №17. – г. Москва, 2014 г., стр. 102-121.
3. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Дмитриев Д.С., Усманов А.Р., Чужинов А.С., Щербина С.В.** Постановка, конечноэлементная аппроксимация и алгоритмы решения задач расчетного обоснования связанных систем «сооружение–жидкость». // Строительная механика и расчет сооружений, 5 (256) – г. Москва, 2014 г., стр.21-27.
4. **Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С.** Сравнение методов динамического расчета гидротехнических сооружений по заданным акселерограммам (с использованием программного комплекса ANSYS). // Природообустройство. – 2013. – № 5. – С. 43-46.
5. **Моисеев Н.Н., Петров А.А.** Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1966. 270 с. (Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 3).
6. **Bredmose H., Brocchini M.** Peregrine, D.H. & Thais, L., 2003, “Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. // J. Fluid Mech., v.490, pp.217–249.
7. **Donea J., Giuliani S., Halleux J.P.** An arbitrary Lagrangian – Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 33, 1982, pp. 689-723.
8. **Ohayon R.** Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural – acoustic and hydroelastic – sloshing system.// Comput. Meth. Appl. Mech.Eng. 190 (1954), pp. 3009-3019.
9. Wave sloshing inside a reservoir. Tiago Konno de Dornellas Cysneiros, Roger Matsumoto Moreira, Raphael David Aquilino Bacchi. 19th International Congress of Mechanical Engineering, November 5-9, 2007, Brasilia, DF.

---

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры Информатики и прикладной математики, руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования НИУ МГСУ, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Дмитриев Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Нгуен Тай Нанг Лыонг, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, StaDyO Research & Engineering Center; Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Dmitry S. Dmitriev, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 8<sup>th</sup> floor, 18, 3-ya Ulitsa Tverskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; tel. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Nguyen Tai Nang Luong, Ph.D Student, Department of Applied Mathematics and Computer Sciences, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО И СВЕРХВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

*А.М. Белостоцкий<sup>1,2</sup>, А.А. Аул<sup>2</sup>, В.А. Слуцкий<sup>3</sup>, Н.А. Андронов<sup>3</sup>*

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> АО «НПО «Пластполимер», г. Санкт-Петербург, РОССИЯ

**Аннотация:** В статье изложена разработанная методика численного моделирования напряженно-деформированного состояния и оценки прочности деталей трубопроводных систем высокого и сверхвысокого давления. Приводятся результаты сравнительного анализа распределения напряжений в деталях по действующим нормативным формулам и при использовании уточненных объемных конечноэлементных моделей. Методика реализована в новой отраслевой "ветви" программного комплекса прочностных расчетов трубопроводных систем АСТРА-НОВА – АСТРА-СВД.

**Ключевые слова:** трубопроводные системы, высокое давление, сверхвысокое давление, автофретирование, напряженно-деформированное состояние, оценка прочности, численное моделирование, метод конечных элементов, объемные конечноэлементные модели, программный комплекс

## COMPUTATIONAL SIMULATION OF HIGH PRESSURE PIPELINES AND ULTRA-HIGH PRESSURE PIPELINES

*Alexander M. Belostotsky<sup>1,2</sup>, Andrey A. Aul<sup>2</sup>, Vyacheslav A. Slutsky<sup>3</sup>, Nikolay A. Andronov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> JSC "NPO Plastpolimer", St. Petersburg, RUSSIA

**Abstract:** The article describes a technique developed by the numerical simulation of stress-strain state and co-evaluate the strength of parts of high pressure and ultra-high pressure pipelines. The results of the comparative analysis of the stress distribution in the details of the effective regulatory formulas and using 3D finite element models are presented. The method is realized in the new "branch" of software strength analysis of piping systems ASTRA NOVA - ASTRA-SVD.

**Key words:** piping systems (pipelines), high pressure, ultra high pressure, stress-strain state, estimation of strength, numerical simulation, finite element method, 3D finite element model, the software package

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Трубопроводные системы (ТС, в инженерном "обиходе" – трубопроводы) используются во многих отраслях промышленности, особенно широко и ответственно – в атомной и тепловой энергетике, химическом производстве, в нефтяной и газовой промышленности, тепловых сетях. Любая промышленная установка может быть оборудована множеством разно-

образных трубопроводов, транспортирующих теплоносители, реагенты и т.п. среды, которые должны воспринимать без выхода из строя разнообразные нагрузки, как постоянные, так и переменные. Стабильная безаварийная работа трубопроводных систем влияет на общую безопасность объекта.

Трубопроводные системы **высокого давления (ВД)**, от 10 МПа до 100 МПа) и **сверхвысокого давления (СВД)**, от 100 МПа до 320 МПа) представляют собой специфический и особо

ответственный класс трубопроводов. Важными и сложными для анализа проблем эксплуатации технологических линий ВД-СВД являются высокие давление и температура, а также вибрация оборудования и трубопроводов из-за пульсирующего характера потока газа и колебаний поршневых компрессоров. Для обеспечения эффективности и безопасности технологических установок необходимо выполнять прочностные расчеты технологического оборудования и трубопроводов, работающих при высоких давлениях и высокой температуре с учетом динамических нагрузок.

Для формализации прочностных расчетов трубопроводных систем и их деталей разработаны и введены в действие нормативные и методические документы. Однако, как показывает практика, в некоторых случаях этого недостаточно для обеспечения расчетной базы, гарантирующей безаварийную работу трубопроводных систем.

## 2. СПЕЦИФИКА РАСЧЕТОВ ТРУБОПРОВОДОВ ВД-СВД

Трубопроводы, эксплуатируемые при высоком уровне внутреннего давления, состоят из достаточно специфичных элементов-деталей. В первую очередь следует отметить высокую толстостенность, т.е. отношение толщины стенки к среднему диаметру/радиусу сечения. Это приводит к тому, что напряжения по толщине стенки существенно переменны. Также на распределение напряжений по толщине стенки влияет температурный градиент (см. [3], [4]). В случае воздействия только давления и температуры на прямолинейный участок трубы распределение напряжений симметрично по сечению. Но для не симметричных элементов трубопровода (отводы, тройники, угольники и пр.), а также с учетом несимметричной внешней нагрузки, влияния соседних частей трубопровода, распределение напряжений по сечению и толщине

стенки представляет собой достаточно сложную картину, подробный анализ которой в свою очередь необходим для определения прочности элемента. Как было указано выше, трубопроводы с большой толстостенностью не могут быть достаточно точно рассчитаны по зависимостям, предлагаемым и широко используемым в расчетной практике для тонко- и среднестенных трубопроводов

При высоких уровнях внутреннего давления элементы трубопровода могут предварительно подвергаться процедуре автофретирования. Вследствие такой обработки внутренняя часть сечения трубопровода работает за пределами области упругости (пластичность), что приводит не только к еще большему усложнению распределения напряжений по сечению и толщине стенки, но и к реализации, в общем случае, различных критериев прочности для разных частей сечения.

В отличие от трубопроводов с более низким давлением, трубопроводы ВД-СВД имеют не сварные, а соединения с фланцами, накручиваемыми на соединяемые элементы с промежуточными линзами. Подобные соединения должны рассчитываться на прочность методами, не совпадающими с таковыми, применяемыми на низком давлении.

С учетом большой величины значения внутреннего давления даже относительно небольшое динамическое изменение этой величины (пульсация давления потока) приводит к большим нагрузкам на трубопроводную систему. Нагрузки, порождаемые сбросом давления таких величин на сбросных клапанах, тоже значительны. Вследствие этих факторов, подробный расчетный динамический анализ таких трубопроводных систем необходим для обеспечения их безопасного функционирования.

Высокий уровень внутреннего давления не позволяет использовать в таких трубопроводных системах специальных устройств, компенсирующих температурное расширение типа сильфонных компенсаторов. Поэтому температурные расширения должны быть компенсированы методом самокомпенсации,

что в совокупности с относительно повышенной жесткостью элементов трубопровода приводит к усложнению трассировки трубопроводной системы высокого давления.

Но если трубопроводы ВД-СВД подвержены вибрации от пульсации давления потока, ТС должна обладать достаточной жесткостью. Это приводит к избыточным нагрузкам в трубопроводе, по сравнению с подобными трубопроводами на более низкое давление. Для обеспечения безопасной эксплуатации трубопроводной системы, опорные конструкции должны быть также рассчитаны на прочность.

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

#### *Расчётные нормативные формулы [4]*

Ниже в формулах используются следующие обозначения:  $\beta$  – коэффициент толстостенности, равный отношению наружного радиуса к внутреннему;  $r_n$  – наружный радиус детали (трубы, отвода);  $r_v$  – внутренний радиус детали (трубы, отвода);  $R$  – радиус отвода;  $A_s, W$  – площадь и момент сопротивления поперечного сечения детали;  $r$  – значение радиуса, при котором вычисляются напряжения;  $\theta$  – значение угла по окружности сечения детали, при котором вычисляются напряжения;  $R_{T/20}$  – предел текучести материала детали при 20 °С;  $p$  – внутреннее давление;  $p_a$  – давление автофретирования;  $r_T$  – радиус текучести;  $r_T^*$  – оптимальный радиус текучести;  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты;  $N$  – продольное усилие;

#### 3.1. Напряжения от действия давления

##### 3.1.1. Вычисление напряжений в прямолинейных неавтофретированных трубах.

Напряжения от действия давления определяются по формулам Лямэ:

Радиальное напряжение:

$$\sigma_r^P = \frac{p}{\beta^2 - 1} \left[ 1 - \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Тангенциальное напряжение:

$$\sigma_\theta^P = \frac{p}{\beta^2 - 1} \left[ 1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Осевое напряжение:

$$\sigma_z^P = \frac{p}{\beta^2 - 1}$$

##### 3.1.2. Напряжения в прямых автофретированных трубах:

а). Вычисление радиуса текучести при заданном давлении автофретирования осуществляется из уравнения:

$$p_a = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{r_T}{r_v} - \frac{r_T^2}{r_H^2} + 1 \right]$$

б). Вычисление напряжений производится в зависимости от текущего радиуса:

При радиусе в диапазоне  $r_v \leq r \leq r_T$

Радиальное:

$$\sigma_r = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_T} + \frac{r_T^2}{r_H^2} - 1 \right] - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1} \left[ 1 - \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_\theta = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_T} + \frac{r_T^2}{r_H^2} + 1 \right] - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1} \left[ 1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Осевое:

$$\sigma_z = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_T} + \frac{r_T^2}{r_H^2} \right] - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1}$$

При радиусе в диапазоне  $r_T \leq r \leq r_n$

Радиальное:

$$\sigma_r = \left[ \frac{R_{T/20} r_T^2}{\sqrt{3} r_H^2} - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1} \right] \left[ 1 - \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_r = \left[ \frac{R_{T/20} r_T^2}{\sqrt{3} r_H^2} - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1} \right] \left[ 1 + \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

Осевое:

$$\sigma_z = \left[ \frac{R_{T/20} r_T^2}{\sqrt{3} r_H^2} - \frac{p_a - p}{\beta^2 - 1} \right]$$

### 3.1.3. Вычисление напряжений в криволинейных неавтофретированных трубах.

Напряжения от действия давления определяются по формулам:

Радиальное:

$$\sigma_r = \frac{p}{m_2} \left[ \frac{1}{r_H^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_\theta = \frac{p}{m_3} \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\sin \theta}{(R - r_b \sin \theta) r_b} + \frac{\sin \theta}{(R - r_H \sin \theta) r} \right] + A_1$$

Осевое:

$$\sigma_z = \frac{p}{m_3} \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{\sin \theta}{2(R - r_b \sin \theta) r_b} - \frac{\sin \theta}{(R - r_b \sin \theta) r_H} + \frac{\sin \theta}{(R - r_b \sin \theta) r} \right] + A_2$$

где:

$$m_2 = \frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_H^2} + \frac{\sin \theta}{R r_b} - \frac{\sin \theta}{R r_H} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r_b \sin \theta)}{r_b (R + r_H \sin \theta)}$$

$$m_3 = \frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_H^2} - \frac{\sin \theta}{(R - r_H \sin \theta) r_H} + \frac{\sin \theta}{(R - r_b \sin \theta) r_b}$$

$$A_1 = p \frac{2 r_b^2 r_H}{R (r_H^2 - r_b^2) (r_H - r_b)} [|\sin \theta| (r_H + 0,4 r_b - 1,4 r) - 0,6 r_H - 0,2 r_b + 0,8 r]$$

$$A_2 = p \frac{2 r_b^2 r_H}{R (r_H^2 - r_b^2) (r_H - r_b)} [|\sin \theta| (0,2 r_H + 0,45 r_b - 0,65 r) + \sin \theta (0,535 r_H - 0,6 r_b + 0,065) + 0,035 r_H - 0,35 r_b + 0,385 r]$$

### 3.1.4. Вычисление напряжений в криволинейных автофретированных трубах:

а). Вычисление радиуса текучести при заданном давлении автофретирования осуществляется из уравнения:

$$p_a = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_{T\theta}^2 (\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_{T\theta} (R + r_H \sin \theta)}{r_H (R + r_{T\theta} \sin \theta)} + \frac{r_{T\theta} \sin \theta}{R} - \frac{r_{T\theta}^2 \sin \theta}{R r_H} + 1 - \frac{r_{T\theta}^2}{r_H^2} + \ln \frac{r_{T\theta}^2 (R + r_{T\theta} \sin \theta)}{r_b^2 (R + r_b \sin \theta)} \right]$$

б). Вычисление напряжений производится в зависимости от текущего радиуса:

При радиусе в диапазоне  $r_b \leq r \leq r_T$

Радиальное:

$$\sigma_r = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2 (\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r_T \sin \theta)}{r_T (R + r_H \sin \theta)} - \frac{r_T \sin \theta}{R} + \frac{r_T^2 \sin \theta}{R r_H} + \ln \frac{r^2 (R + r \sin \theta)}{r^2 (R + r_T \sin \theta)} + \frac{r_T^2}{r_H^2} - 1 \right] - \frac{p_a - p}{m_2} \left[ \frac{1}{r_H^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_{\theta} = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2 (\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r_T \sin \theta)}{r_T (R + r_H \sin \theta)} - \frac{r_T \sin \theta}{R} + \frac{r_T^2 \sin \theta}{R r_H} + \ln \frac{r^2 (R + r \sin \theta)}{r_T^2 (R + r_T \sin \theta)} + \frac{r_T^2}{r_H^2} + 1 \right] - \frac{p_a - p}{m_2} \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

Осевое:

$$\sigma_z = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2 (\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r_T \sin \theta)}{r_T (R + r_H \sin \theta)} - \frac{r_T \sin \theta}{R} + \frac{r_T^2 \sin \theta}{R r_H} + \ln \frac{r^2 (R + r \sin \theta)}{r_T^2 (R + r_T \sin \theta)} + \frac{r_T^2}{r_H^2} \right] - \frac{p_a - p}{m_2} \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

При радиусе в диапазоне  $r_T \leq r \leq r_H$

Радиальное:

$$\sigma_r = \left[ \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} r_T^2 - \frac{p_a - p}{m_2} \right] \left[ \frac{1}{r_H^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_{\theta} = \left[ \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} r_T^2 - \frac{p_a - p}{m_2} \right] \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

Осевое:

$$\sigma_z = \left[ \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} r_T^2 - \frac{p_a - p}{m_2} \right] \left[ \frac{1}{r_H^2} + \frac{\sin \theta}{R r_H} - \frac{\sin \theta}{R r} + \frac{(\sin \theta)^2}{R^2} \ln \frac{r_H (R + r \sin \theta)}{r (R + r_H \sin \theta)} \right]$$

### 3.2. Напряжения от перепада температур по толщине стенки

Напряжения от действия перепада температур по толщине стенки для всех типов деталей определяются по формулам:

Радиальное:

$$\sigma_r^t = -m \left[ \frac{\ln \frac{r_H}{r}}{\ln \beta} + \frac{1 - \frac{r_H^2}{r^2}}{\beta^2 - 1} \right]$$

Тангенциальное:

$$\sigma_{\theta}^t = -m \left[ \frac{\ln \frac{r_H}{r} - 1}{\ln \beta} + \frac{1 + \frac{r_H^2}{r^2}}{\beta^2 - 1} \right]$$

Осевое:

$$\sigma_z^t = -m \left[ \frac{2 \ln \frac{r_H}{r} - 1}{\ln \beta} + \frac{2}{\beta^2 - 1} \right]$$

### 3.3. Остаточные напряжения от гибки в гнутых отводах

Остаточные осевые напряжения, возникающие после гибки в отводах  $\sigma_{z,ост}$ , определяются как сумма напряжений, появляющихся в отводах при гибке  $\sigma_{гиб}$ , и напряжений разгрузки  $\sigma_{разгр}$ :

$$\sigma_{z,ост} = \sigma_{гиб} + \sigma_{разгр}$$

### 3.4. Осевые напряжения от самокомпенсации

Дополнительно для всех типов деталей вычисляются осевые напряжения от самокомпенсации по формуле:

$$\sigma_{zc} = \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} + \frac{N_z}{A_s}$$

### 3.5. Эквивалентные напряжения.

Вычисленные напряжения (радиальное, тангенциальное и осевое напряжения) от всех учитываемых нагрузок, суммируются покомпонентно результаты суммирования используются для вычисления эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{эКВ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2}$$

## 4. РАСЧЁТ НДС ЭЛЕМЕНТОВ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ФОРМУЛ ГОСТ 55600-2013 И КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Трёхмерные КЭ-моделей, разработанные в ПК СТАДИО и ANSYS

Разработаны 6 трёхмерных КЭ-моделей для следующих расчётных случаев (деталей):

1. Прямая труба, нагруженная внутренним давлением и заглушенная с обоих концов;
2. Прямая труба, нагруженная температурным перепадом по толщине стенки;
3. Криволинейная труба (отвод), нагруженная внутренним давлением и заглушенная с обоих концов;
4. Криволинейная труба (отвод), нагруженная перепадом температур по толщине стенки;
5. Прямая автофретированная труба, нагруженная внутренним давлением и заглушенная с обоих концов (2 варианта);

6. Криволинейная автофретированная труба (отвод), нагруженная внутренним давлением и заглушенная с обоих концов (2 варианта); Характеристики деталей трубопровода приведены в таблице 1. Материал трубы моделировался идеально упруго-пластической моделью. Физическая нелинейность материала трубы идеализирована билинейной диаграммой деформирования (диаграммой Прандтля), график которой представлен на рисунке 1. Давление автофретирования вычислялось на основании [4]:

Оптимальный радиус текучести:

$$r_T^* = r_B e^{\frac{\sqrt{3}p}{2R_{T/20}}} = 0,02 \cdot 2,718281^{\frac{\sqrt{3} \cdot 275}{2 \cdot 850}} = 0,02647 \text{ м}$$

Оптимальное давление автофретирования:

$$p_a = \frac{R_{T/20}}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{r_T}{r_B} + \frac{r_T^2}{r_B^2} + 1 \right] = \frac{850}{\sqrt{3}} \left[ 2 \ln \frac{0,02647}{0,02} + \frac{0,02647^2}{0,0475^2} + 1 \right] = 613,38 \text{ МПа}$$

Таблица 1. Характеристики деталей трубопроводов

Параметр	Значение
Наружный диаметр, D	95 мм
Толщина стенки, t	27,5 мм
Радиус криволинейной трубы, R	100 мм
Модуль упругости, E	200000 МПа
Коэффициент Пуассона, ν	<b>0,3 / 0,49</b>
Предел текучести, σ <sub>T</sub>	850 МПа
Модуль упрочнения E <sub>T</sub>	200 МПа
Коэффициент линейного температурного расширения, α	1,15 · 10 <sup>-5</sup>
Внутреннее давление, p	275 МПа

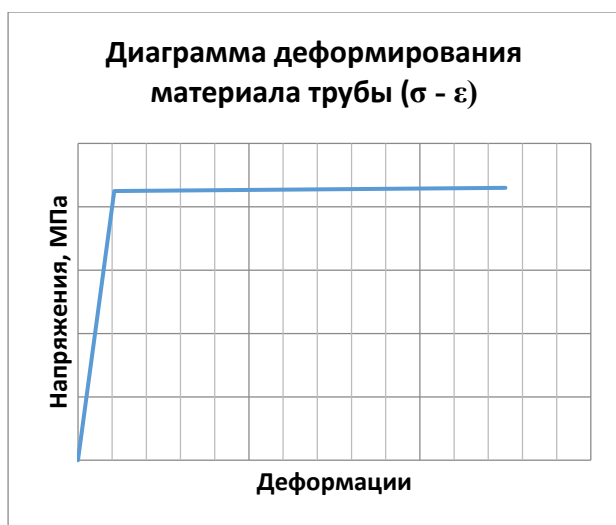


Рис. 1. Диаграмма деформирования материала трубы (σ - ε)

В силу соотношения толщины и наружного диаметра деталей трубопровода, высокого давления и, как следствие, трёхосного напряжённо-деформированного состояния деталей трубопровода, при построении КЭ-моделей рассчитываемых деталей использован объёмный 20-узловой КЭ SOLID186 (ANSYS) и ИПКЭ (АСТРА-СТАДИО). КЭ-сетка имеет достаточную подробность для отображения картины распределения параметров НДС.

Процесс автофретирования и приложение рабочей нагрузки разделён на 3 этапа (нагружения):

1. Приложение давления автофретирования;
2. Сброс давления автофретирования;
3. Приложение рабочего давления.

Давление (автофретирования и рабочее) прикладывалось к внутренней поверхности трубы. На торцы трубы приложено распределённое давление, моделирующее внутреннее давление на крышки трубы.

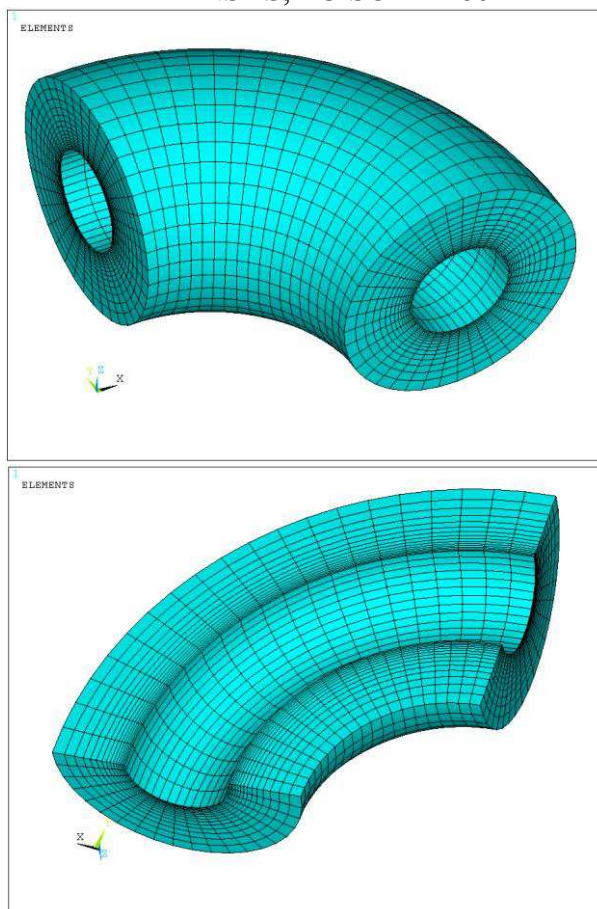
Итак, из сравнения результатов расчета распределения напряжений по формулам ГОСТ 55600-2013 и по трехмерным (объемным) КЭ-моделям, реализованным в верифицированных ПК ANSYS и АСТРА-НОВА (программный модуль АСТРА-СТАДИО), можно сформулировать следующие «промежуточные» выводы:

1. Выявлено следующее наибольшее расхождение по критериальным параметрам (максимальные эквивалентные напряжения) от

действия давления: в прямых трубах без автофретирования 0,6 % и с автофретированием 0,7 %, в криволинейных трубах без автофретирования 6,7 % и с автофретированием 18,0 %.

2. Расхождения компонент напряжений от действия давления в прямых трубах для значимых величин составляет: без автофретирования 1,3 % (радиальные напряжения на внутренней поверхности трубы) и с автофретированием 46,4% (осевые напряжения, на внутренней поверхности трубы). Значительное различие величин осевых напряжений при расчёте автофретированных труб связано с моделью несжимаемого материала (коэффициент Пуассона равен 0,5), используемого в ГОСТ.
3. Расхождения компонент напряжений от действия давления в криволинейных трубах для значимых величин составляет: без автофретирования 27,6% (осевые напряжения, на внутренней поверхности трубы) с автофретированием более чем в 2 раза (осевые напряжения). Кроме того, отмечено качественное различие картин распределения кольцевых и осевых напряжений по формулам ГОСТ 55600-2013 и по МКЭ.
4. Расчёт напряжений от действия перепада температуры показал следующее наибольшее расхождение по критериальным параметрам (максимальные эквивалентные напряжения): в прямых трубах 0,6%, в криволинейных трубах 5,5%. Для расчёта температурных напряжений и распределения температурных полей по толщине стенки по ГОСТ, в криволинейных трубах использовались формулы для прямолинейных труб.
5. Максимум напряжений от действия давления для неавтофретированных деталей расположен на внутренней поверхности детали, тогда как для автофретированных он отмечен в толще стенки, на границе, отделяющей упругую область от пластической, причём для криволинейных труб в зоне, соответствующей вогнутой области.

ПК ANSYS, КЭ SOLID186



ПК АСТРА-НОВА (модуль АСТРА-СТАДИО), ИПКЭ 20

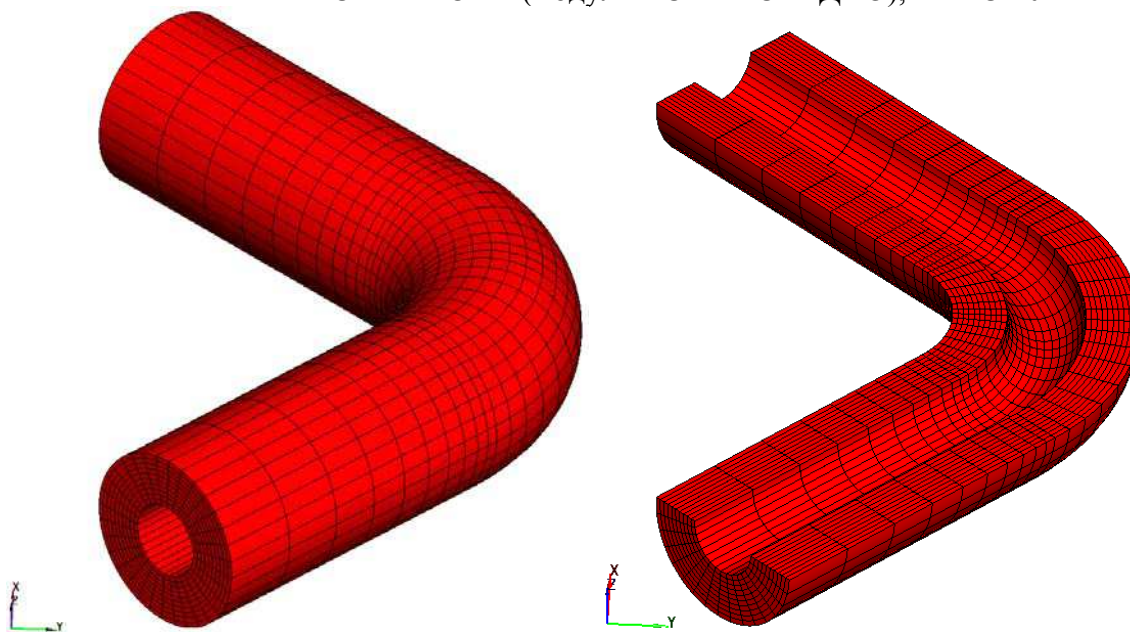
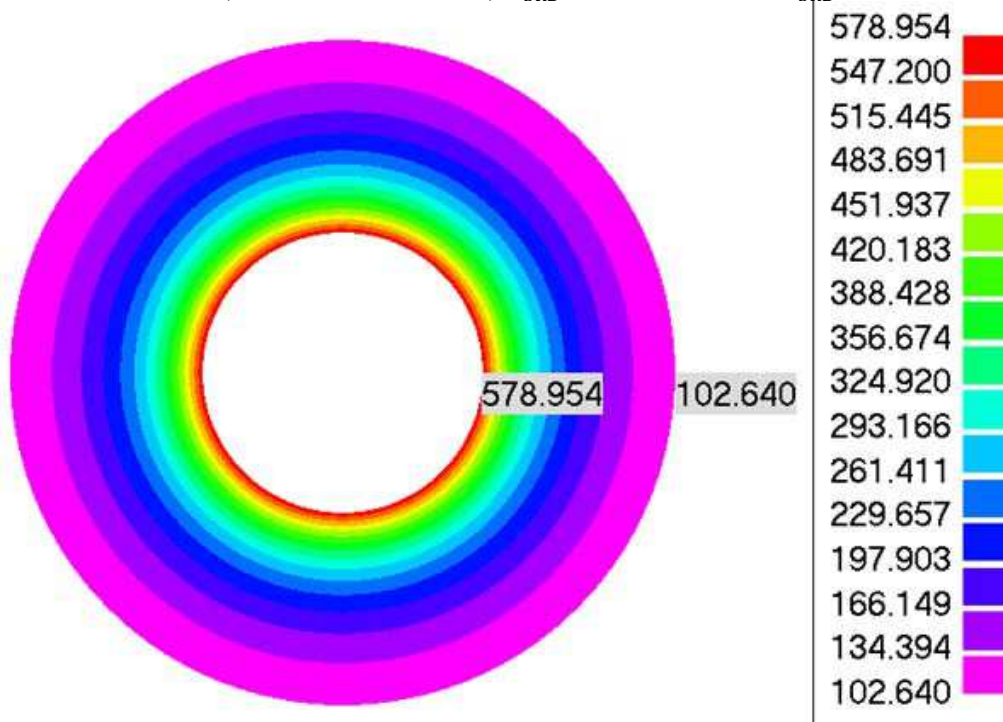


Рис. 2 Общий вид объемных КЭ-моделей криволинейной трубы

Результаты расчетов по формулам ГОСТ 56600-2013 и МКЭ.

ГОСТ 55600-2013 (ПК АСТРА-НОВА)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 102,6$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 579,0$  МПа



ГОСТ 55600-2013 (ПК MATLAB)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 102,6$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 579,0$  МПа

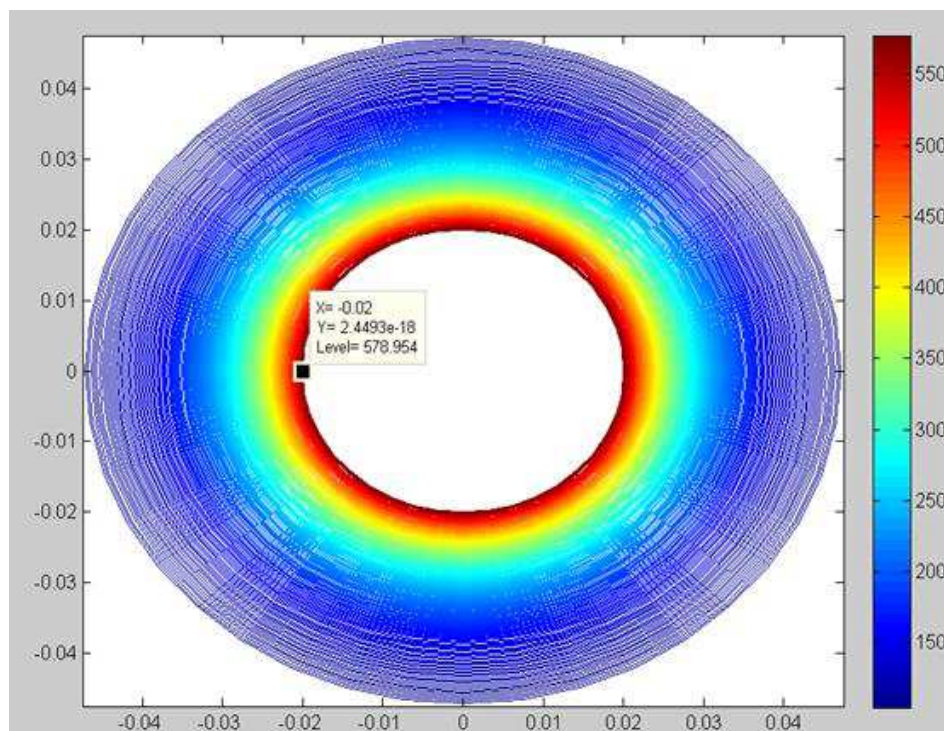
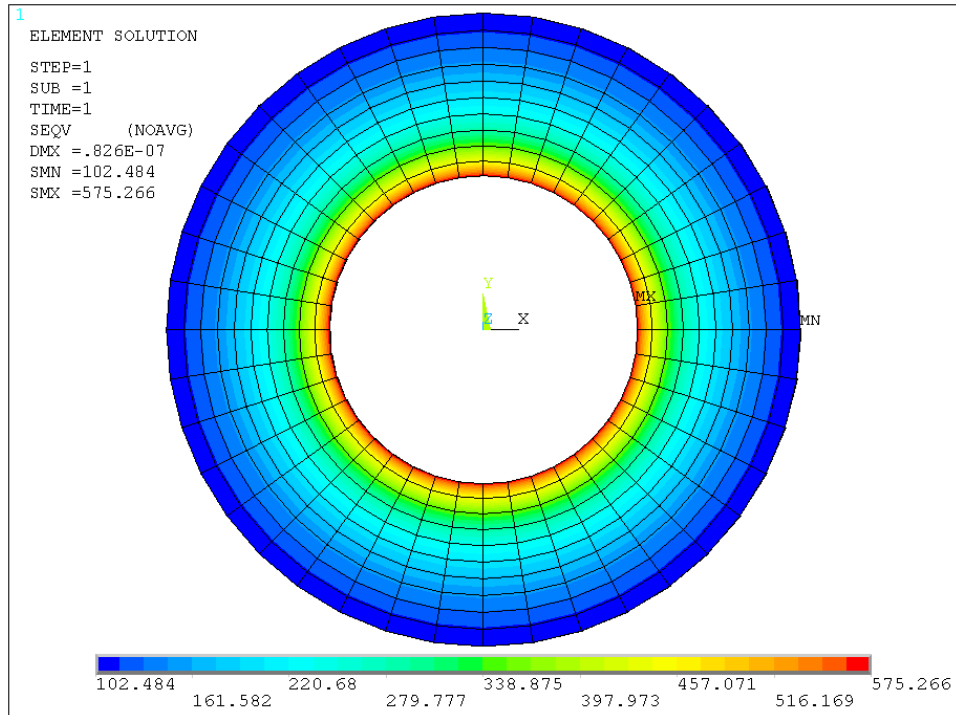


Рис. 3. Эквивалентные напряжения в прямой трубе от действия давления, МПа.

МКЭ (ПК ANSYS)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 102,5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 575,3 \text{ МПа}$



МКЭ (ПК АСТРА-НОВА, модуль АСТРА-СТАДИО)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 102,6 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 579,0 \text{ МПа}$

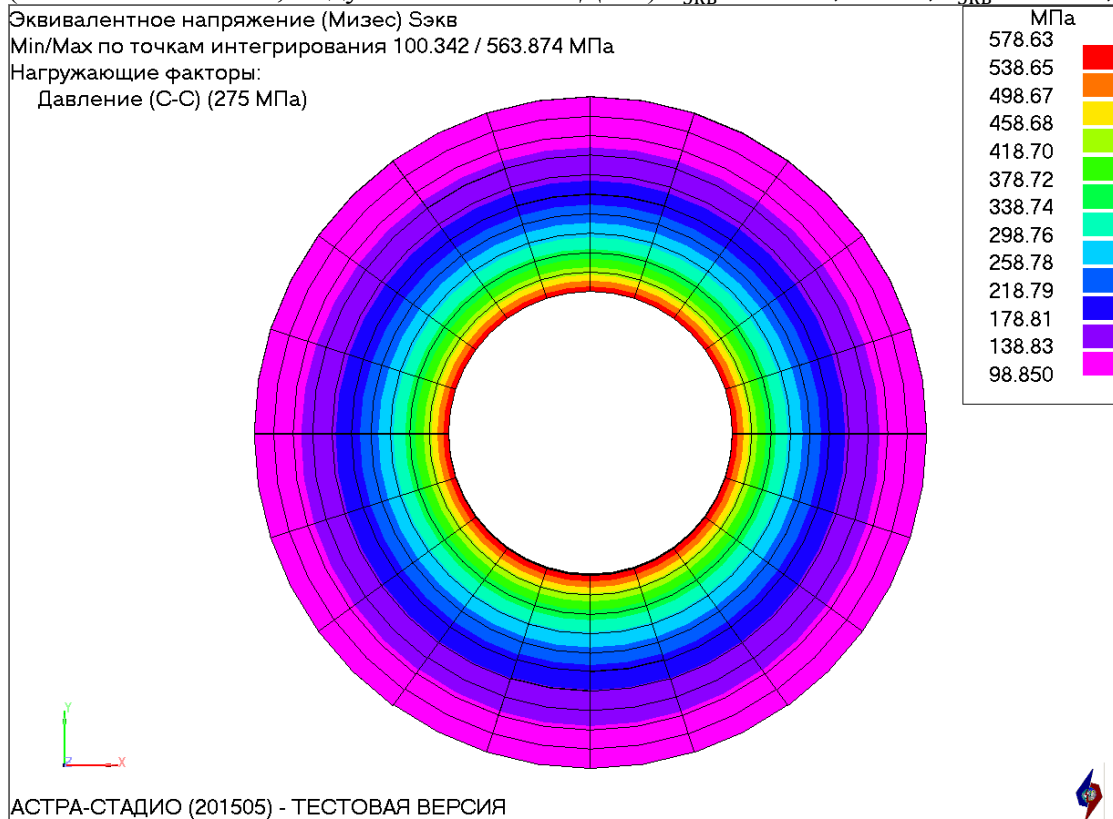
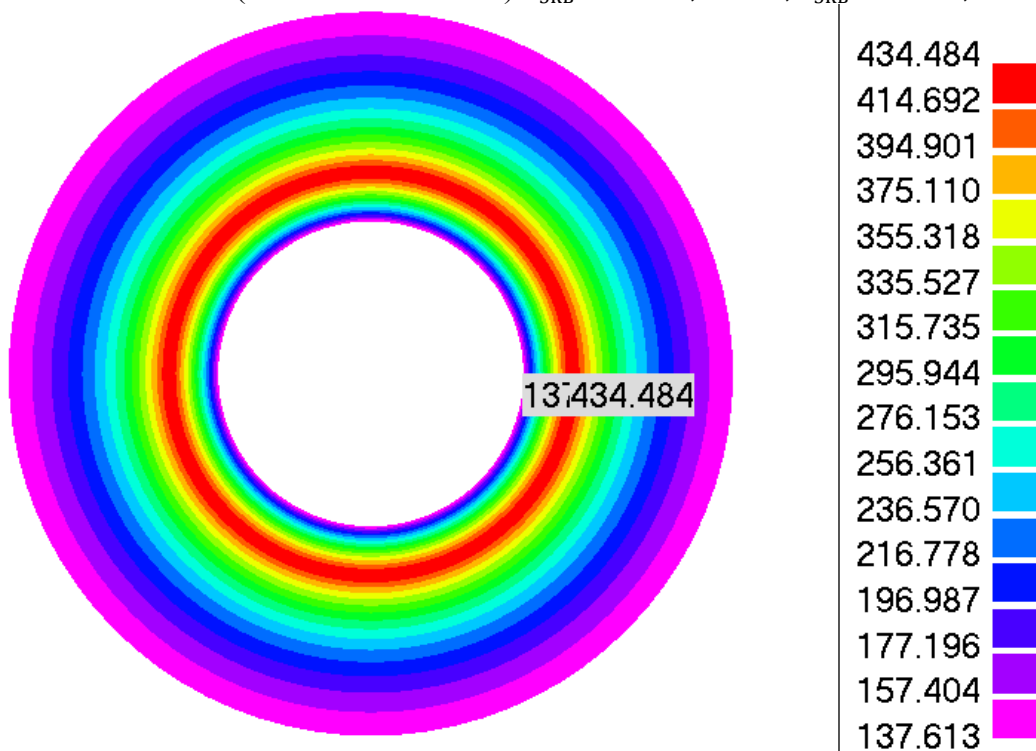


Рис. 4. Эквивалентные напряжения в прямой трубе от действия давления, МПа.  
 Расчёт по МКЭ

ГОСТ 55600-2013 (ПК АСТРА-НОВА)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 137,6$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 434,5$  МПа



ГОСТ 55600-2013 (ПК MATLAB)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 137,6$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 434,5$  МПа

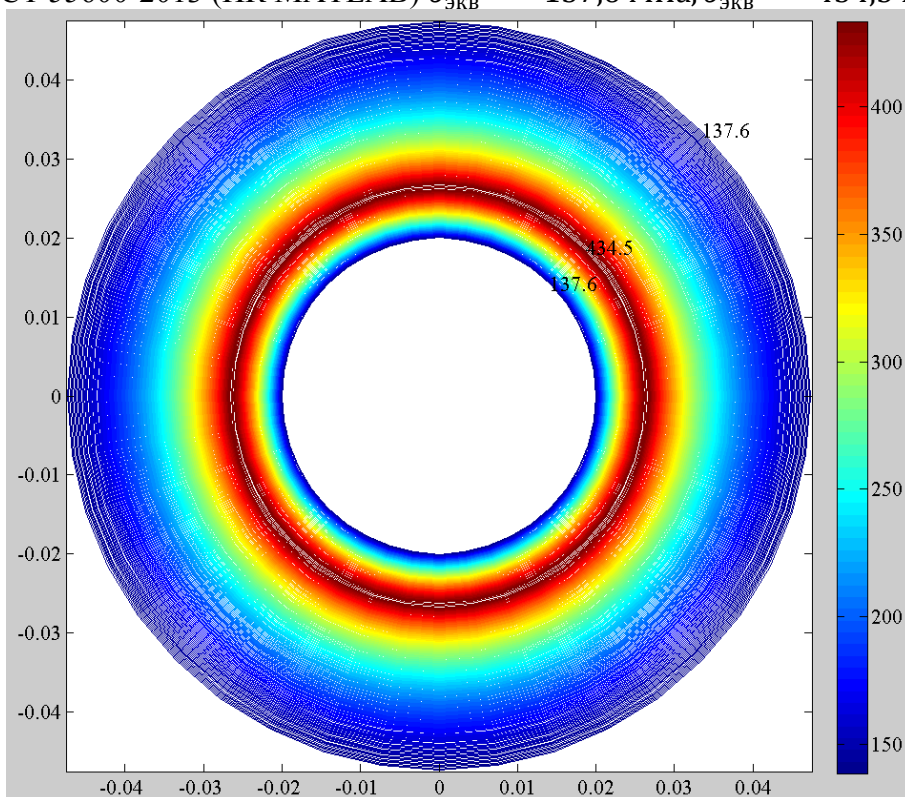
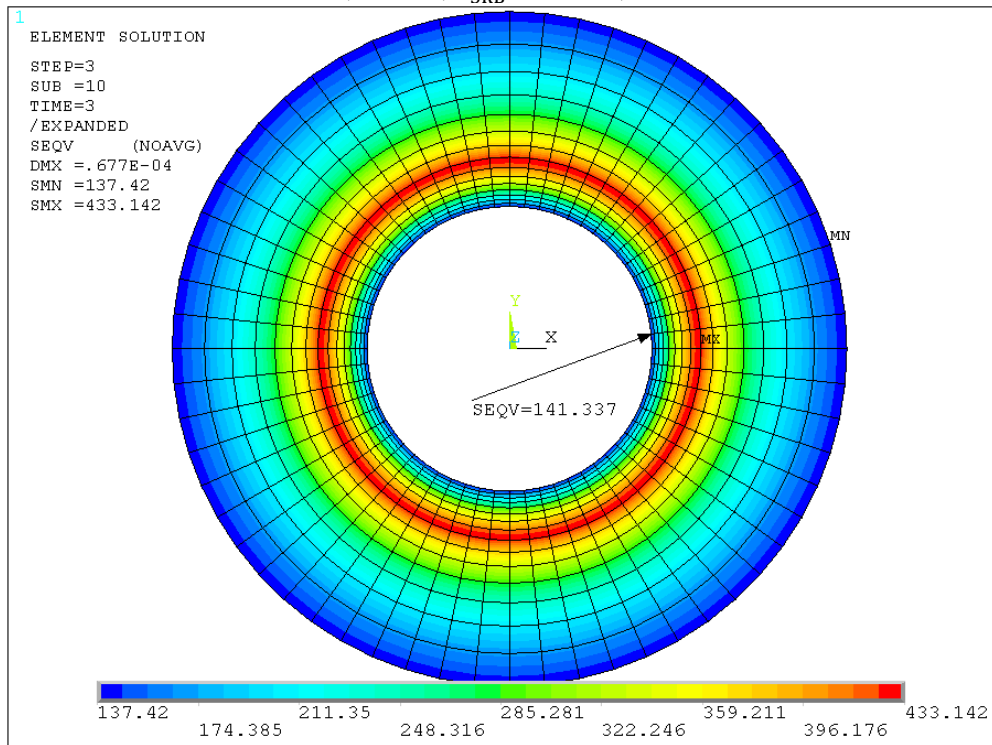


Рис. 5. Эквивалентные напряжения в прямой автофретированной трубе от действия давления, МПа. Расчёт по ГОСТ 55600-2013

МКЭ (ПК ANSYS). Коэффициент Пуассона материала трубы – 0,49.  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 137,4$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 433,1$  МПа



МКЭ (ПК ANSYS). Коэффициент Пуассона материала трубы – 0,3.  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 137,8$  МПа,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 432,9$  МПа

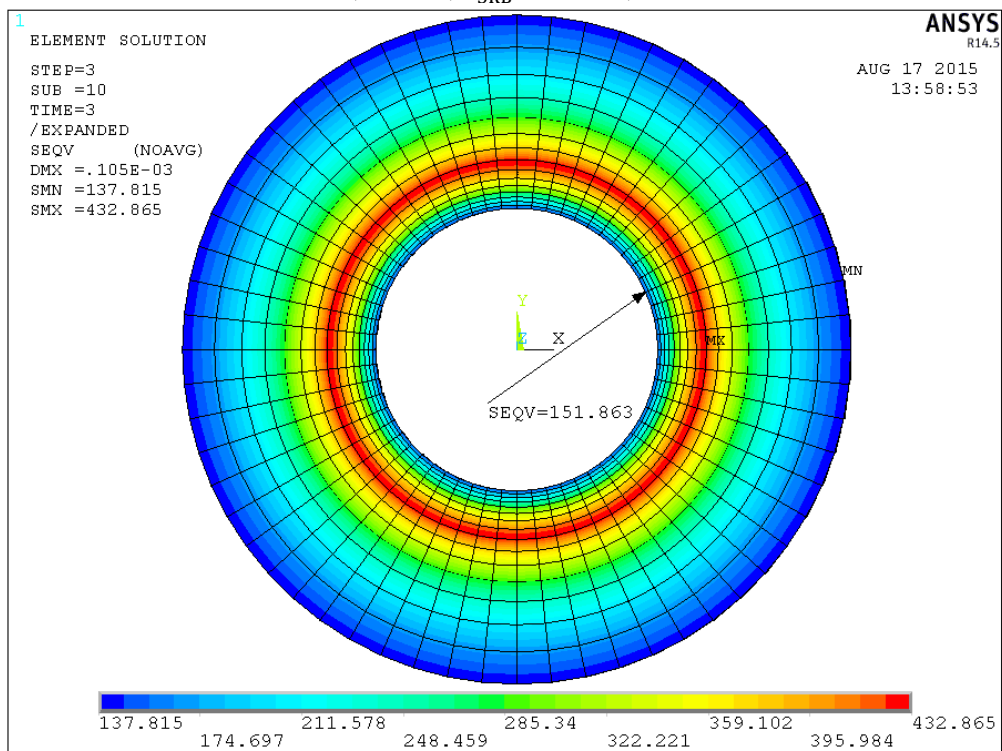
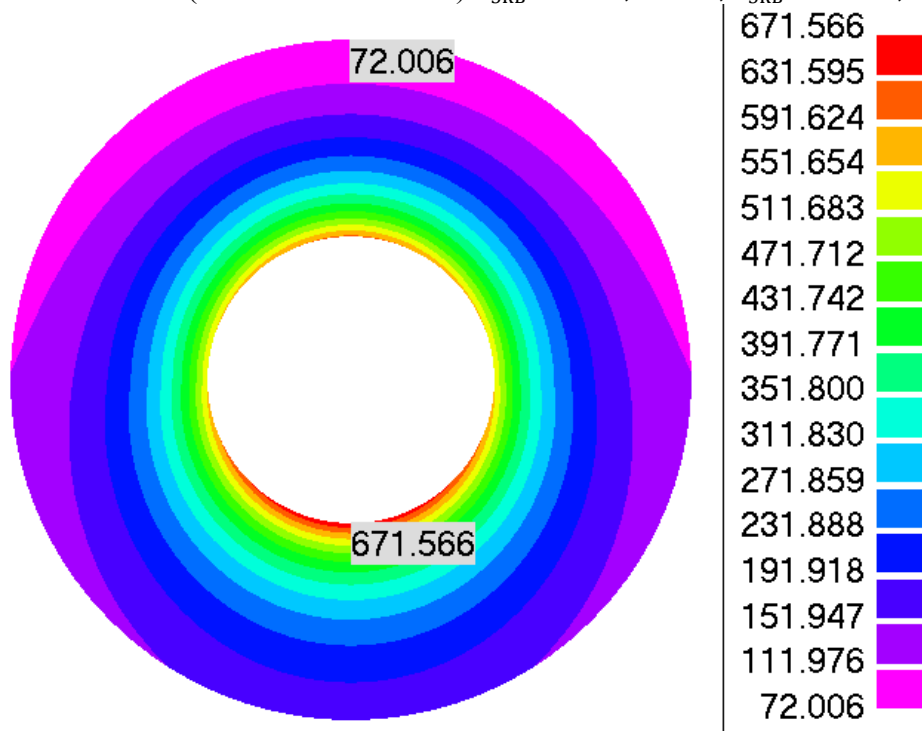


Рис. 6. Эквивалентные напряжения в прямой автофретированной трубе от действия давления, МПа. Расчёт по МКЭ (ПК ANSYS)

ГОСТ 55600-2013 (ПК АСТРА-НОВА)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 72,0 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 671,6 \text{ МПа}$



ГОСТ 55600-2013 (ПК МАТЛАВ)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 72,0 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 671,6 \text{ МПа}$

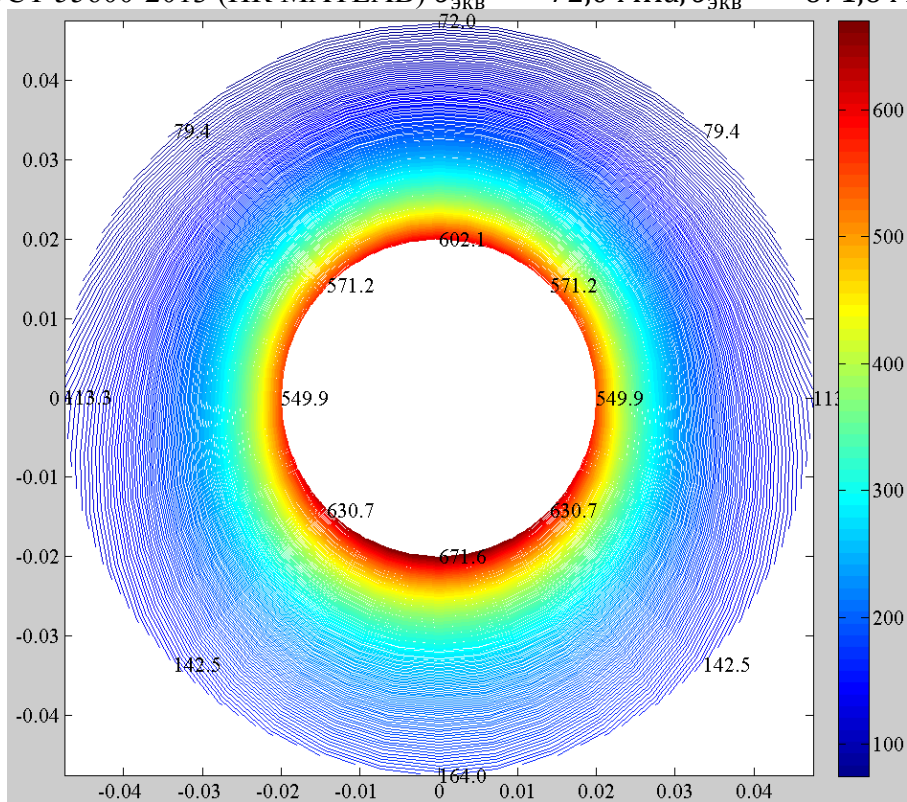


Рис. 7. Эквивалентные напряжения в среднем сечении криволинейной трубы от действия давления, МПа, по ГОСТ 55600-2013.

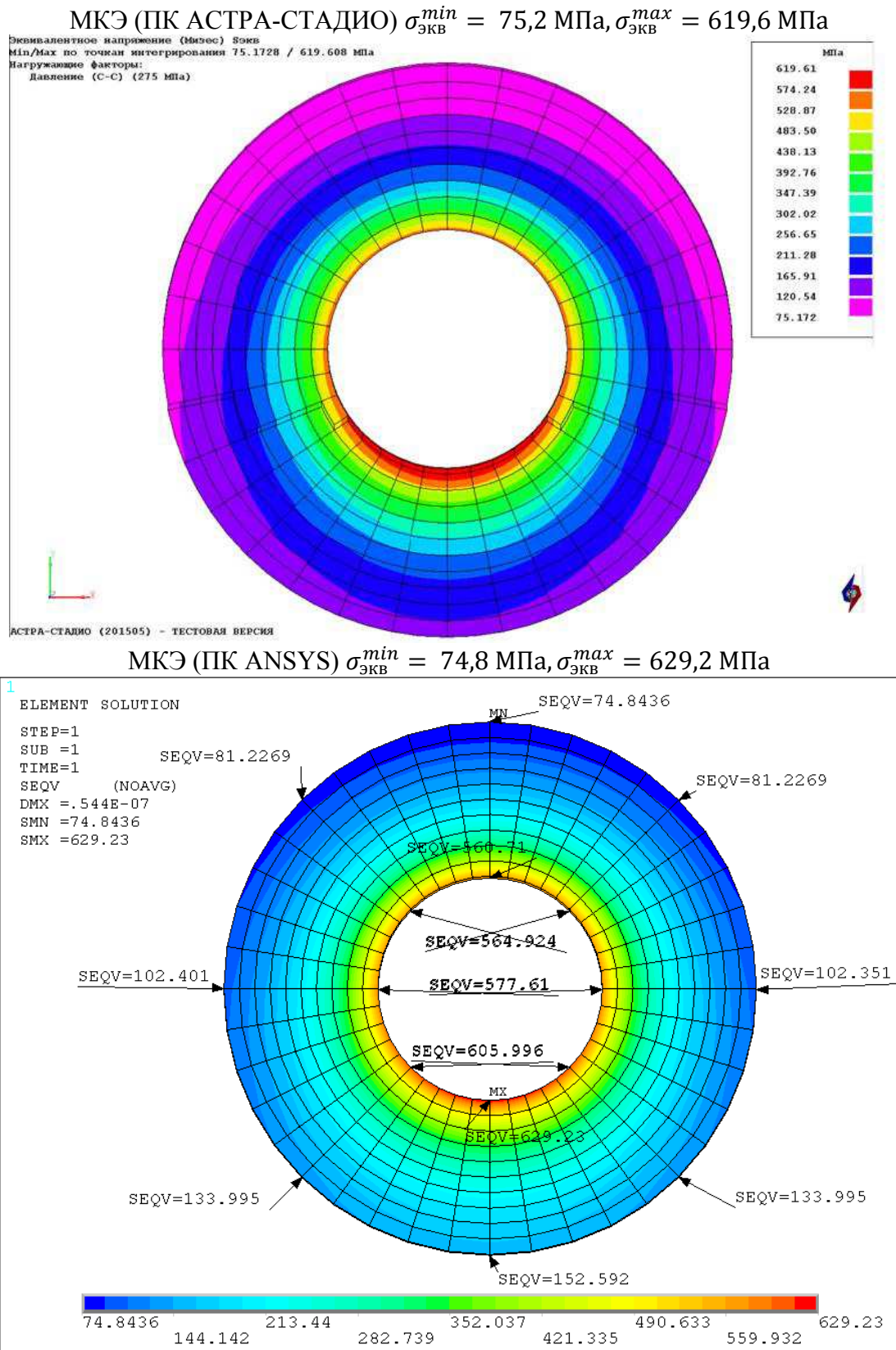
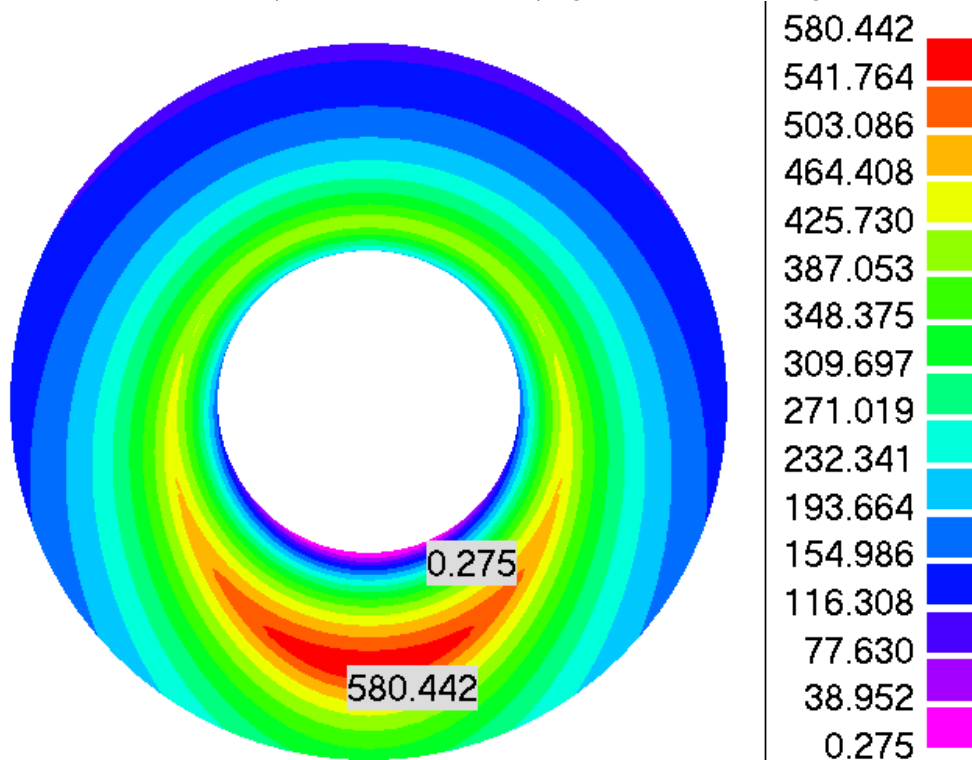


Рис. 8. Эквивалентные напряжения в среднем сечении криволинейной трубы от действия давления, МПа. Расчёт по МКЭ.

ГОСТ 55600-2013 (ПК АСТРА-НОВА)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 580,4 \text{ МПа}$



ГОСТ 55600-2013. (ПК MATLAB)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\min} = 8,5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max} = 580,1 \text{ МПа}$

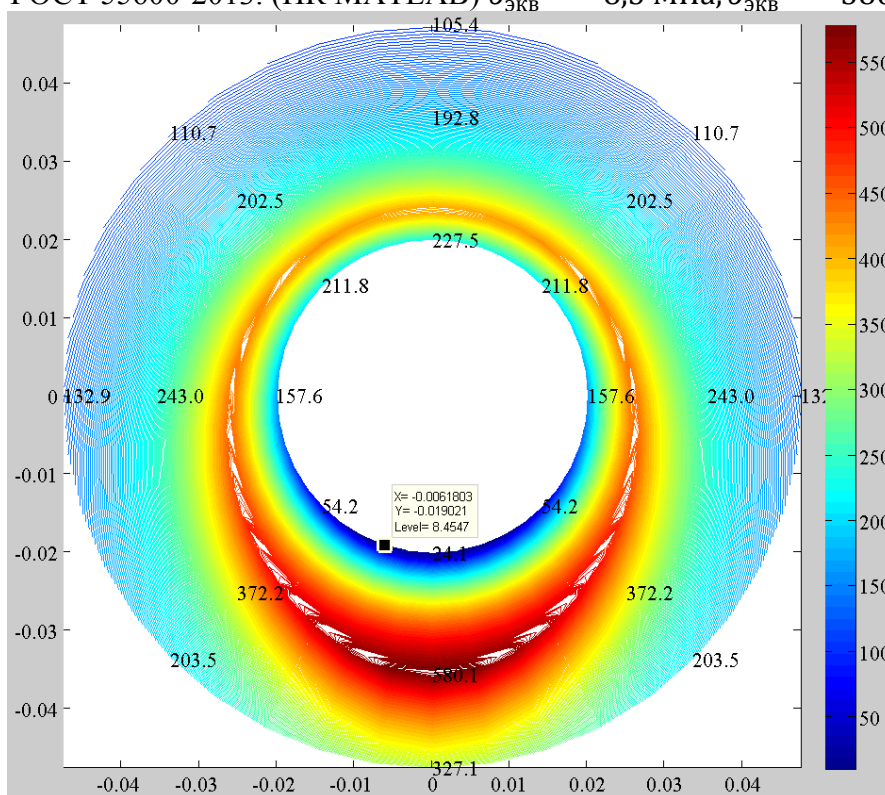
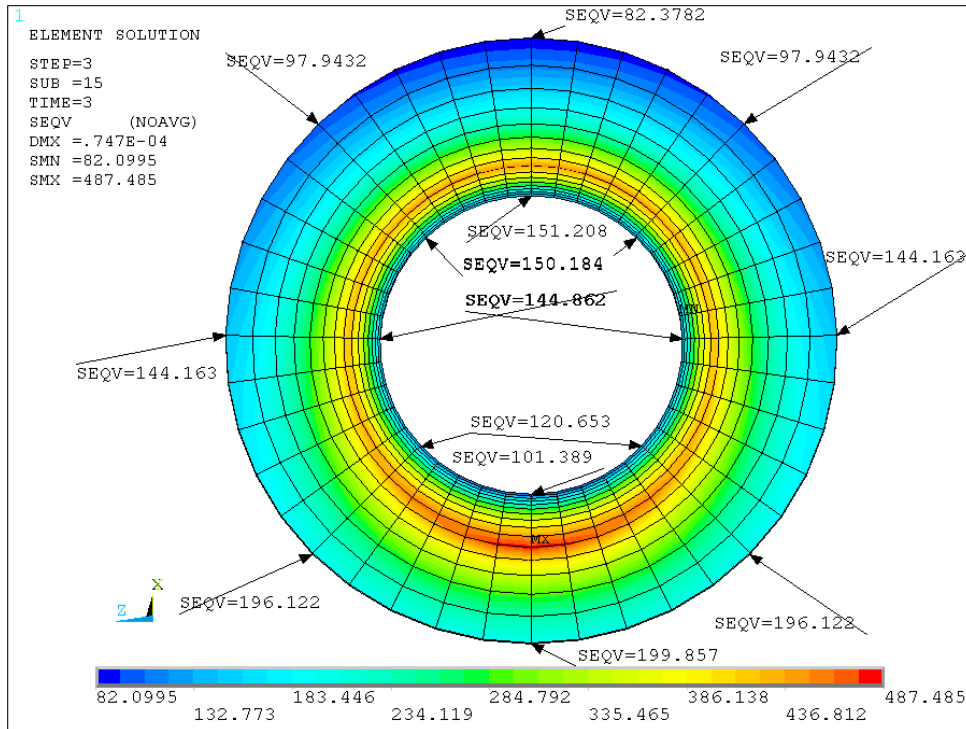


Рис. 9. Эквивалентные напряжения в среднем сечении криволинейной автофретированной трубы от действия давления, МПа. Расчёт по ГОСТ 55600-2013

МКЭ (ПК ANSYS) Коэффициент Пуассона материала трубы – 0,49  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 82,1 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 487,5 \text{ МПа}$



МКЭ (ПК ANSYS) Коэффициент Пуассона материала трубы – 0,3.  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{min}} = 84,9 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{max}} = 500,0 \text{ МПа}$

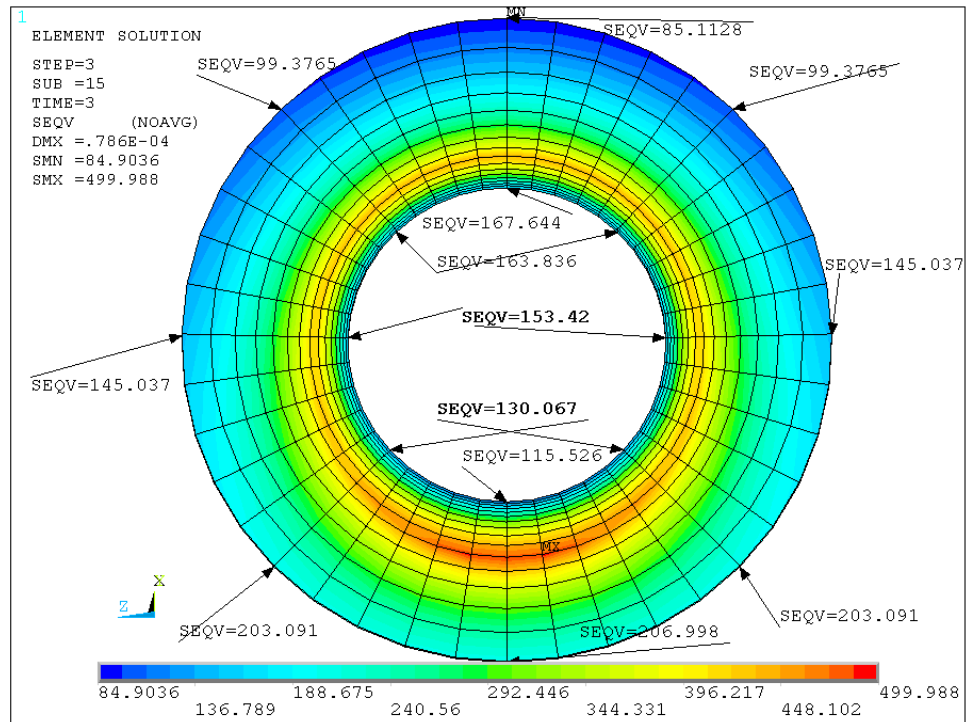


Рис. 10. Эквивалентные напряжения в среднем сечении криволинейной автофретированной трубы от действия давления, МПа. Расчёт по МКЭ (ПК ANSYS).

Сравнение результатов

Таблица 2. Сопоставление результатов расчёта (максимум напряжений по абс. величине)

Параметр	Наружная пов-ть		$\delta$	Внутренняя пов-ть		$\delta$
	ГОСТ (АСТРА- НОВА, MATLAB)	МКЭ (ANSYS)	%	ГОСТ (АСТРА- НОВА, MATLAB)	МКЭ (ANSYS)	%
<b>Задача 1 Прямая труба с заглушками, нагруженная внутренним давлением</b>						
Радиальное напряжение, МПа	0	0,18	-	-275	-271,5	1,3
Кольцевое напряжение, МПа	118,5	118,4	0,1	393,5	392,3	0,3
Осевое напряжение, МПа	59,3	59,3	0	59,3	60	1,2
Эквивалентное напряжение, МПа	102,6	102,5	0,1	579,0	575,3	0,6
<b>Задача 2 Прямая труба, нагруженная температурным перепадом по толщине стенки</b>						
Радиальное напряжение, МПа	0	-2,4		0	0,7	
Кольцевое напряжение, МПа	200,1	201,7	0,8	-351,9	-355,8	1,1
Осевое напряжение, МПа	200,1	203,9	1,9	-351,9	-357,2	1,5
Эквивалентное напряжение, МПа	200,1	201,8	0,8	351,9	354,1	0,6
<b>Задача 3 Криволинейная труба с заглушками, нагруженная внутренним давлением</b>						
Радиальное напряжение, МПа	0	-0,12		275	273,9	0,4
Кольцевое напряжение, МПа	68,6	86,2	25,7	488,5	444,0	10,0
Осевое напряжение, МПа	79,6	89,2	12,0	130,0	102,6	26,7
Эквивалентное напряжение, МПа	72,0	74,8	3,9	671,6	629,2	6,7
<b>Задача 4 Криволинейная труба (отвод), нагруженная перепадом температур по толщине стенки</b>						
Радиальное напряжение, МПа	0	-1,0		0	-1,3	
Кольцевое напряжение, МПа	200,1	210,0	4,9	-351,9	-372,3	5,8
Осевое напряжение, МПа	200,1	205,8	2,8	-351,9	-375,2	6,2
Эквивалентное напряжение, МПа	200,1	204,6	2,2	351,9	371,3	5,5

Примечание. Фоном отмечены факторы, по которым получено качественное различие результатов по ГОСТ и МКЭ

Таблица 2. Сопоставление результатов расчёта (максимум напряжений по абс. величине), продолжение

Параметр	Наружная пов-ть			δ	Внутренняя пов-ть			δ	Максимум в толще стенки			
	ГОСТ (АСТРА- НОВА, MATLAB)	МКЭ (ANSYS)	%		ГОСТ (АСТРА- НОВА, MATLAB)	МКЭ (ANSYS)	%		ГОСТ (АСТРА- НОВА, MATLAB )	МКЭ (ANSYS)	%	
<b>Задача 5 Прямая автофретированная труба с заглушками, нагруженная внутренним давлением</b>												
		v=0,49	v=0,3			v=0,49	v=0,3			v=0,49	v=0,3	
Радиальное напряжение, МПа	0	4,2	0,4	-	-275	-273,9	-274,5	0,4	-	-	-	-
Кольцевое напряжение, МПа	158,9	162,9	159,3	2,5	-116,1	-110,7	-113,6	4,8	327,6	335,4	331,2	2,3
Осевое напряжение, МПа	79,5	85,0	74,7	6,9	-195,5	-189,0	133,5	46,4	-	-	-	-
Эквивалентное напряжение, МПа	137,6	137,4	137,8	0,1	137,6	141,3	151,9	10,3	429,9	433,1	432,9	0,7
Эквивалентная пласт. деф-ция, %	-	0	0		-	0,3198	0,3916		-	-	-	
Интенсивность пласт. деф-ций, %	-	0	0		-	0,5539	0,6773		-	-	-	
Радиус текучести, мм									26,47	26,50	26,50	
<b>Задача 6 Криволинейная автофретированная труба с заглушками, нагруженная внутренним давлением</b>												
Радиальное напряжение, МПа	0	9,1	0,45	-	-275	-274,7	-275	-	-	-	-	-
Кольцевое напряжение, МПа	377,7	237,6	238,8	-	-302,9	-159,3	-173,1	-	507,9	438,9	433,8	-
Осевое напряжение, МПа	188,8	114,5	108,6	-	-288,9	-195,4	-148,7	-	238,7	122,7	103,2	-
Эквивалентное напряжение, МПа	327,1	199,9	207,0	-	227,5	151,2	167,6	-	575,4	487,5	500,0	18,0
Эквивалентная пласт. деф-ция, %	-	-	-	-	-	0,4859	0,5947	-	-	-	-	-
Интенсивность пласт. деф-ций, %	-	-	-	-	-	0,8342	1,0273	-	-	-	-	-
Радиус текучести 0 и 180 град, мм	-	-	-	-	-	-	-	-	25,93	25,51	25,51	-
Радиус текучести 90 град, мм	-	-	-	-	-	-	-	-	23,85	25,27	24,70	-
Радиус текучести 270 град, мм	-	-	-	-	-	-	-	-	35,49	30,15	30,65	-

Примечание. Фоном отмечены факторы, по которым получено качественное различие результатов по ГОСТ и МКЭ

Установлена допустимость применение расчётных формул ГОСТ 55600-2013 для вычисления напряжений в прямолинейных неавтофретированных трубах. Для расчёта напряжений в прямолинейных автофретированных и в любых криволинейных трубах необходим расчёт напряжений по объёмным схемам МКЭ, а для всех автофретированных элементов – с учётом физической нелинейности материала.

## 5. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

На основании выводов по проведённым сравнительным расчётным исследованиям (см. п.4) и рекомендаций ASME Boiler & Pressure Vessel Code Section VIII Division 3 KD-230 предлагается для расчёта НДС и прочности трубопроводной системы следующий алгоритм:

1. Расчёт трубопроводной системы как пространственно-стержневой с эффективными коэффициентами податливости элементов по существующему универсальному и апробированному алгоритму, определение параметров НДС (перемещения, усилия, нагрузки на опоры), собственных частот и форм колебаний, параметров динамической (вибрационной) реакции системы;
2. Расчёт напряжений (от действия внутреннего давления, температурного перепада и усилий, определенных по п.1) элементов-деталей по «комбинированным» схемам:
  - прямых неавтофретированных труб по формулам ГОСТ 55600-2013;
  - криволинейных неавтофретированных труб по формулам ГОСТ 55600-2013 и по объёмным схемам МКЭ;
  - прямых автофретированных труб по формулам ГОСТ 55600-2013 и по объёмным схемам МКЭ с учётом физической нелинейности материала;
  - криволинейных автофретированных труб по ГОСТ 55600-2013 и по объёмным схемам

МКЭ с учётом физической нелинейности материала;

- неавтофретированных деталей трубопровода, расчёт которых не регламентирован ГОСТ 55600-2013 (переходы, тройники, угольники и пр.), по объёмным схемам МКЭ;
- автофретированных деталей трубопровода, расчёт которых не регламентирован ГОСТ 55600-2013 (переходы, тройники, угольники и пр.), по объёмным схемам МКЭ с учётом физической нелинейности.

3. Оценки прочности по критериям ГОСТ 55600-2013.

## 6. РЕАЛИЗУЮЩИЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

Практические расчеты выполняются с использованием программных систем промышленного типа, хотя известны примеры, когда применяются разовые разработки, специально создаваемые «под задачу». Такие разработки редко создаются "на пустом месте", чаще всего они основываются на использовании некоторого базового варианта промышленной программы, который дополняется силами авторов или же другими разработчиками применительно к специальным условиям использования. В случае удачи (и при наличии спроса) такого рода дополнения впоследствии могут быть включены в очередную версию программной системы.

Разработанное семейство программных комплексов (ПК) **АСТРА-НОВА™** – лидер постсоветского рынка автоматизированных наукоемких нормативно регламентированных прочностных расчетов трубопроводных систем различных отраслей – обеспечивает автоматизированные расчеты произвольных пространственных разветвленных и протяженных трубопроводных систем на статическую и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, на вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с требованиями действующих российских нормативных документов:

- АСТРА-АЭС™ – ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (аттестован...).
- АСТРА-ТЭС™ – РД 10-249–98. Нормы расчета на прочность стационарных котлов и трубопроводов пара и горячей воды (сертифицирован ...).
- АСТРА-НЕФТЕХИМ™ – РТМ 38.001-94. Указания по расчету на прочность и вибрацию технологических стальных трубопроводов (сертифицирован ...).
- АСТРА-ТЕПЛОСЕТЬ™ – РД 10-400–01. Нормы расчета на прочность трубопроводов тепловых сетей (сертифицирован ...).
- АСТРА-МАГИСТР™ – СНиП 2.05.06-85. Магистральные трубопроводы (с необходимой авторской доработкой в части расчетной оценки прочности).

В комплексах реализован единый алгоритм расчета трубопроводов (определение перемещений, нагрузок на опоры и усилий в сечениях) как линейно-упругих пространственных многократно статически неопределимых стержневых систем, сочетающий суперэлементный подход метода перемещений, методы начальных параметров и прогонки (для каждого суперэлемента) и спектральную методику решения динамических задач. Учитывается повышенная оболочечная податливость криволинейных труб (эффекты Кармана) и тройниковых соединений. Значимые собственные частоты и формы колебаний в требуемом диапазоне определяются из решения частной проблемы собственных значений методом блочного Ланцоша. Принципиальный шаг сделан в уточненном учете статических и динамических характеристик сложных подсистем (детали, опорные конструкции и оборудование) в составе общей суперэлементной модели трубопроводной системы – формирование и использование т.н. редуцированных матриц влияния суперэлементов (Крейга-Бемптона, жесткости, масс, нагрузок).

Впервые в отечественной практике достигнут качественно новый уровень комплексного автоматизированного расчетного обоснования

статической и циклической прочности, сейсмостойкости, вибрационной и динамической прочности на доступных компьютерах: трубопроводные системы произвольной сложности можно (и следует) оперативно и точно моделировать с использованием преимуществ реализованных современных численных методов, Windows- и САПР-технологий, анализировать в полном соответствии с требованиями действующих российских норм и оптимизировать по прочностным критериям, не прибегая к вынужденным и, зачастую, необоснованным упрощениям и умолчаниям.

«Исследовательская» подсистема программного комплекса прочностных расчетов трубопроводных систем – АСТРА-СТАДИО™ – полностью совместима с АСТРА-НОВА (экспорт геометрических характеристик, физико-механических свойств и нагрузок, импорт уточненных напряжений и матриц жесткости/податливости), обеспечивает уточненный расчет по пространственно-оболочечным и объемным схемам метода конечных элементов (МКЭ) температурного и напряженно-деформированного состояния (НДС), статической, циклической и сейсмической прочности следующих тяжело нагруженных элементов трубопроводов при действии полной системы квазистатических нагрузок (внутреннее давление, вес и температурные деформации, осевая и поперечные силы, изгибающие и крутящий моменты на границах-торцах):

- 1) тройников ортогональных и неортогональных (косых) радиальных (сварных, с накладками, штампованных, штампованных и кованных);
- 2) отводов (гибов, колен) гнутых, крутоизогнутых, штампованных и секторных с учетом эллиптичности, разностенности (переменной толщины сечения) и примыкающих прямых труб;
- 3) конических переходов концентрических и с эксцентриситетом;
- 4) линзовых и сильфонных компенсаторов осевых, угловых и сдвиговых (многоволновых с учетом примыкающих прямых труб);
- 5) косых стыков;

б) подземных трубопроводов (труб, отводов и косых стыков с изоляцией/компенсирующими подушками в грунте).

Подсистема аккумулирует мировой и собственный 39-летний опыт разработчиков по анализу сложного пространственного распределения перемещений, деформаций и напряжений в деталях, определяющих прочность всей трубопроводной системы, в оборудовании, строительных конструкциях и сооружениях.

Подсистема обладает диалоговым пре- и постпроцессором, может быть связана с базой данных типовых элементов, требует лишь необходимого минимума информации для автоматической генерации оптимальных по точности пространственно-оболочечных (для тонко- и “среднестенных” элементов) и объемных (для толстостенных деталей и системы «трубопровод-изоляция-грунт») расчетных конечноэлементных моделей. Вычислительным “ядром” служит мощный верифицированный конечно/суперэлементный комплекс СТАДИО, имеющий богатый послужной список исследованных сложных объектов атомной, тепловой и гидроэнергетики, различных отраслей строительства и машиностроения.

Для прочностного расчёта трубопроводов высокого и сверхвысокого давления разработана новая отраслевая “ветвь” ПК АСТРА-НОВА – программный комплекс *АСТРА-СВД*, не имеющий аналогов: расчет по выбору размеров деталей и комплексный поверочный расчет трубопроводных систем в соответствии с действующими российскими нормативами и авторскими доработками (в том числе, с учетом автофретирования) по изложенной выше верифицированной численной методике (пп.4,5 статьи).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. РТМ 38.001-94. Указания по расчету на прочность и вибрацию технологических стальных трубопроводов
2. ГОСТ 32388-2013 Трубопроводы технологические. Нормы и методы

- расчета на прочность, вибрацию и сейсмические воздействия
3. РД РТМ 26-01-44-78. Детали трубопроводов на давление свыше 10 до 100 МПа. Нормы и методы расчета на прочность
4. ГОСТ Р 55600-2013 Трубы и детали трубопроводов на давление свыше 100 до 320 МПа. Нормы и методы расчета на прочность.
5. РД 10-249-98 Нормы расчета на прочность стационарных котлов и трубопроводов пара и горячей воды
6. ПНАЭ Г-7-002-86 Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок
7. EN13480 Metallic industrial piping
8. B31.1 Power Piping
9. ASME Boiler & Pressure Vessel Code
10. “Семейство” программных комплексов АСТРА-НОВА’2015. Автоматизированное проектирование и расчеты трубопроводных систем на статическую и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с российскими нормативными требованиями. Общее описание. М., ЗАО НИЦ СтаДиО, 2015 г.
11. Программный комплекс АСТРА-АЭС. Аттестационный паспорт федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору Рег. № 292 от 14.04.2011.
12. Программный комплекс АСТРА-НОВА’2015. Сертификат соответствия № РОСС RU.СП15.Н00848 от 13.07.2015.
13. **Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю., Аул А.А., Островский К.И.** Верификация и аттестация программного комплекса АСТРА-АЭС. Новый уровень прочностных расчетов трубопроводных систем. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 33-40.

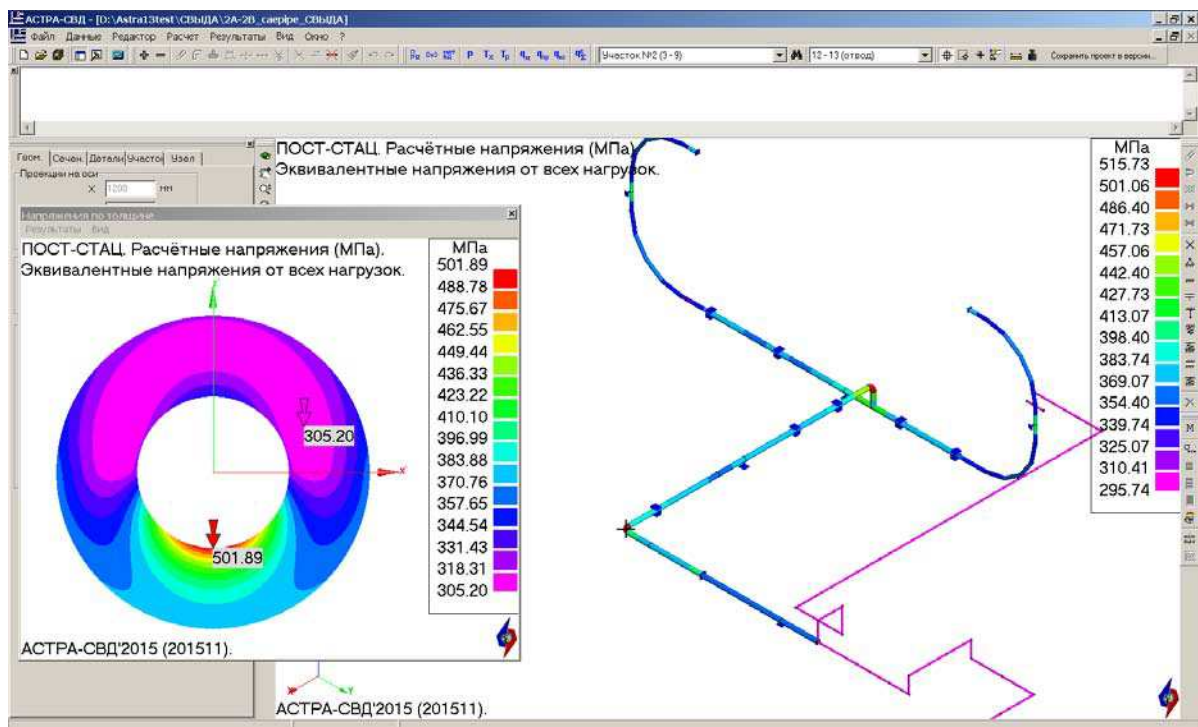


Рис. 11. Интерфейс программного комплекса АСТРА-СВД

14. Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л. Реализация методов модального синтеза в программных комплексах СТАДИО и АСТРА-НОВА. Труды XXIV международной конференции «ВЕМ&FEM-2011», С-Петербург, 2011, стр.99-101
15. Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю. Реализация методов динамического синтеза подконструкций и субмоделирования в программных комплексах СТАДИО и АСТРА-НОВА. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 87-91
16. Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю. Современные численные методы в "нормативных" прочностных расчетах трубопроводных систем различных отраслей. Семейство программных комплексов АСТРА-НОВА. Сборник трудов первой международной научно-практической конференции «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», МГСУ, М. 2008 г., стр. 204-216
17. Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л. Программно-алгоритмическая разработка и верификация подсистемы уточненного конечноэлементного моделирования деталей трубопроводов (АСТРА-СТАДИО). Сб. научных трудов МГСУ "Вопросы прикладной математики и вычислительной механики", М., 2008 г., № 11, с. 185-192
18. Сайт <http://stadyo.ru/>
19. Сайт <http://ansys.com/>
20. Сайт <http://mathworks.com/>
21. ANSYS User's Guide. Release 15.0. ANSYS, Inc. November 2013
22. "MATLAB Documentation". MathWorks Inc., 2015

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры Информатики и прикладной математики, руководитель

Научно-образовательного центра компьютерного моделирования НИУ МГСУ, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810,  
тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Аул Андрей Андреевич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810,  
тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Слуцкий Вячеслав Аркадьевич, директор АО «НПО «Пластполимер», Россия, 195197, Санкт-Петербург, Полустровский проспект, 32, телефон: (812) 718-27-52; e-mail: proekt@plastpolymer.com

Андронов Николай Александрович, ведущий инженер АО «НПО «Пластполимер», Россия, 195197, Санкт-Петербург, Полустровский проспект, 32, телефон: (812) 540-68-03; e-mail: proekt@plastpolymer.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, StaDyO Research & Engineering Center; Director of Research & Education Center of Computation Simulation, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Andrey A. Aul, Senior Designer, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 8<sup>th</sup> floor, 18, 3-ya Ulitsa Tverskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; tel. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Vyacheslav A. Slutsky, Director, JSC “NPO Plastpolimer”; 32, Polustrovsky Prospekt, Saint-Petersburg, 195107, Russia; tel. (812) 718-27-52; e-mail: proekt@plastpolymer.com

Nikolay A. Andronov, Senior Engineer, JSC “NPO Plastpolimer”; 32, Polustrovsky Prospekt, Saint-Petersburg, 195107, Russia; tel. (812) 540-68-03; e-mail: proekt@plastpolymer.com



## **О СОЗЫВЕ ОЧЕРЕДНОГО ОБЩЕГО СОБРАНИЯ ЧЛЕНОВ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК**

**В соответствии со статьей 40 Устава федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» президиум РААСН объявляет о созыве очередного общего собрания членов РААСН.**

Общее собрание членов РААСН пройдет с 20 по 22 апреля 2016 года на базе Московского архитектурного института (Государственной академии), расположенного по адресу: улица Рождественка, дом 11/4, корп.1, стр.4.

Президиумом РААСН (Постановление № 8 от 21 октября 2015 года) утверждена тема научной части общего собрания членов РААСН-2016: «Стратегия сохранения и развития российского архитектурного наследия».

2 декабря 2015 года на совместном заседании ученого совета и президиума РААСН утвержден следующий – Состав Научного комитета по подготовке и проведению научной части Общего собрания РААСН-2016:

### **Председатель комитета:**

Кудрявцев А.П. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Архитектура»;

### **Заместители председателя комитета:**

Акимов П.А. – член-корреспондент, главный учёный секретарь президиума РААСН;

Лежава И.Г. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Градостроительство»;

Травуш В.И. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Строительные науки»;

Ильичёв В.А. – академик, вице-президент РААСН по направлению: «Инновации».

### **Члены комитета:**

Некрасов А.Б. – академик, академик-секретарь отделения Архитектуры (ОА);

Шубенков М.В. – член-корреспондент, и.о. академика-секретаря отделения  
Градостроительства (ОГ);

Карпенко Н.И. – академик-секретарь отделения Строительных наук (ОСН);

Анисимов А.В. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

Ахмедова Е.А. – член-корреспондент (ОГ), г. Самара;

Бирюков И.Г. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

Бондаренко И.А. – член-корреспондент (ОГ), г. Москва;  
Вавакин Л.В. – академик (ОГ), г. Москва;  
Долгов А.В. – член-корреспондент (ОА), г. Екатеринбург;  
Кадышев Г.И. – член-корреспондент (ОГ), г. Москва  
Орельский В.В. – советник президента РААСН, советник (ОА), г. Москва;  
Орфинский В.П. – академик (ОА), г. Петрозаводск;  
Худин А.А. – член-корреспондент (ОА), г. Нижний Новгород;  
Щенков А.С. – член-корреспондент (ОА), г. Москва;

**Учёный секретарь комитета:**

Грязнова Н.В. – начальник научно-организационного отдела ОА, советник РААСН.

Президиума РААСН напоминает, что участие в работе Общего собрания членов РААСН является уставной обязанностью члена федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» (статья 38 Устава РААСН). Программа проведения общего собрания членов РААСН-2016 будет размещена на официальном сайте РААСН в начале февраля 2016 года.



## **ИНФОРМАЦИЯ О КОНКУРСЕ НА МЕДАЛИ И ДИПЛОМЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК ЗА 2015 ГОД**

**«УТВЕРЖДЕНО»**  
**Постановлением Президиума РААСН**  
**№ 7 от 16 сентября 2015 года**

**Президиум федерального государственного бюджетного учреждения «Российская академия архитектуры и строительных наук» (РААСН) объявляет о проведении XIX Конкурса на медали и дипломы РААСН на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2015 год.**

Медали и дипломы РААСН присуждаются архитекторам, градостроителям, учёным и практикам архитектурно-градостроительных и строительных специальностей – гражданам Российской Федерации и или иностранных государств – в следующих номинациях:

- за лучший реализованный архитектурный (инженерный) проект,
- за лучший неосуществлённый архитектурный проект,
- за лучший проект, находящиеся в стадии реализации с подтверждёнными документами об их утверждении (для градостроительных работ);
- за лучшую опубликованную научную работу, имеющую опубликованную положительную рецензию;
- за лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию УМО Министерства образования и науки Российской Федерации и имеющий опубликованную положительную рецензию.

На конкурс представляются построенные объекты, имеющие срок эксплуатации не менее 1 года и научные работы, опубликованные в течение последних 5-ти лет.

Научно-исследовательские, проектно-конструкторские и инженерные разработки, в результате которых получен значительный экономический или социальный эффект, должен быть подтверждён конкретными расчётами и рекомендациями.

Работы, удостоенные Государственных премий Российской Федерации, премий Правительства РФ, медалей других государственных академий наук Российской Федерации на соискание медалей и дипломов РААСН не представляются.

В рамках Конкурса на медали и дипломы РААСН в соответствии с «Положением о конкурсе РААСН для молодых ученых и специалистов», утвержденным президиумом (постановление № 7 от 16.09.2015 года), президиум РААСН объявляет Конкурс РААСН на лучшие научные

и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2015 год для молодых учёных и специалистов.

Решение о присуждении медалей и дипломов принимает президиум РААСН.

**Установить срок представления материалов на Конкурс не позднее 16 февраля 2016 года (вторник) включительно, до 17-00 часов**

**Установить следующие Медали Российской академии архитектуры и строительных наук:**  
*в области архитектуры*

1 золотая и 1 серебряная медали за лучший реализованный проект и за лучшую опубликованную научную работу в области архитектурной науки.

*в области градостроительства*

1 золотая и 1 серебряная медали за лучшую проектную работу в области градостроительства, реализованную или принятую к реализации, и за лучшую опубликованную научную работу в области градостроительной науки.

*в области строительных наук*

1 золотая и 1 серебряная медали за лучший инженерный проект или инженерную технологию и за лучшую опубликованную научную работу в области строительной науки.

***Примечание:***

*Золотая и серебряная медали присуждаются автору или каждому члену авторского коллектива на основе конкурса между работами, представленными в отделения в объявленных номинациях; дополнительно к золотой и серебряной медали автору или каждому члену авторского коллектива вручается диплом.*

**Установить следующие Дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук:**

12 дипломов (без разделения на номинации), в том числе:

- 4 диплома в области архитектуры,
- 4 диплома в области градостроительства,
- 4 диплома в области строительной науки.

1 диплом «за лучший неосуществлённый архитектурный проект».

1 диплом за «лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию УМО Министерства образования и науки Российской Федерации в области архитектуры».

1 диплом за «лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию УМО Министерства образования и науки Российской Федерации» в области градостроительства.

1 диплом за «лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию УМО Министерства образования и науки Российской Федерации» в области строительной науки.

2 диплома в области архитектуры для молодых учёных и специалистов.

2 диплома в области градостроительства для молодых учёных и специалистов.

2 диплома в области строительных наук для молодых учёных и специалистов.

