

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 11, Issue 2 *2015*

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, Moscow, 107031, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics
Moscow Institute of Architecture (State Academy)
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,
107031, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Chief Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Head of Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Centre "StADyO"
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
Moscow, 125040, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panassenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
Moscow, 119899, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Saint Petersburg State Polytechnical University
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint Petersburg, 195251, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University, 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Mukhtaridin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI),
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University,
8 Suhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina,
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering,
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences,
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering,
1, Academicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics, 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University, 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Saint Petersburg State Polytechnical
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,
St. Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Ilyazar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering,
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,
26-600, Radom, Poland

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University,
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University,
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education,
New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
7-3-1 Hongo, Bunkyo, Tokyo,
113-8654, Japan
Tokyo University, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University,
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vladimir N. Alekhin, Professor, PhD
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering,
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов /АСВ/ (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26) и Издательство Begell House Inc. (79 Madison Avenue, New-York, USA / Издательский дом Бегелл, 79, Мадисон авеню, г. Нью-Йорк, США). Партнером издания выступает Российская академия архитектуры и строительных наук /РААСН/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on CD or DVD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

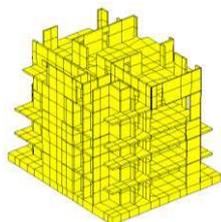


Figure 1.

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on CD or DVD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or DVD with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics,
Moscow Institute of Architecture
(State Academy), 11/4, Building 4,
Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031,
Russia; *e-mail*: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Advanced Mathematics and Structural Mechanics, Moscow Institute of Architecture (State Academy), 11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031, Russia, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском (английском) языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском (русском) языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на CD-диске или DVD-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on CD or on DVD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на CD или DVD) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

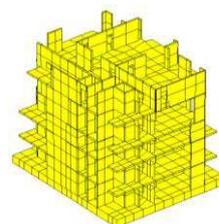


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на CD или DVD) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата A4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На CD или DVD необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

- **Главный редактор**
советник РААСН, профессор,
доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
Московский архитектурный институт
(государственная академия),
кафедра высшей математики
и строительной механики,
107031, Россия, г. Москва,
ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- **Технический редактор**
советник РААСН, доцент,
кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
Московский государственный
строительный университет,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Московский архитектурный институт (государственная академия), кафедра высшей математики и строительной механики, 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, советник РААСН, доцент, кандидат технических наук, Московский государственный строительный университет, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 11, Issue 2

2015

TABLE OF CONTENTS

Александрю Сергеевичу Городецкому – 80 лет	<u>14</u>
Об использовании аппроксимирующих сеток в дискретно-континуальном методе конечных элементов для расчета строительных конструкций <i>П.А. Акимов, О.А. Негрозов</i>	<u>16</u>
Постановки задач равновесия гибкой нити <i>А.В. Баенхаев, А.К. Баенхаев</i>	<u>39</u>
Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейного деформирования пространственных тел <i>В.А. Баженов, С.О. Пискунов, И.И. Солодей</i>	<u>46</u>
Методы численного моделирования и расчета осадки здания <i>М.С. Барабаш, А.Л. Грабовский, О.Ю. Башинская</i>	<u>69</u>
Экспериментальное и численное моделирование трехмерных турбулентных течений в вентилируемом помещении <i>В.Н. Варпаев, С.А. Дорошенко, С.А. Капустин, А.Ю. Троцко</i>	<u>79</u>
Особенности применения и сходимость МКЭ в форме классического смешанного метода <i>А.В. Игнатьев, Е.А. Невзорова, Н.С. Самылина</i>	<u>89</u>
Аналитическое решение задачи о неосесимметричной деформации круглой ортотропной пластины радиально-переменной толщины на точечных опорах <i>Е.Б. Коренева, В.Р. Гросман</i>	<u>94</u>
Численный анализ напряженно-деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения <i>С.Б. Косицын, Чан Суан Линь</i>	<u>101</u>
Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления <i>Р.Л. Лейбов</i>	<u>107</u>

О чувствительности некоторых тонкостенных систем к начальным несовершенствам	<u>131</u>
<i>Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев</i>	
Дискретные и дискретно-континуальные методы многоуровневого расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа	<u>143</u>
<i>М.Л. Мозгалева</i>	
Остаточный ресурс эксплуатируемых сооружений и конструкций из бетона и железобетона	<u>154</u>
<i>Г.В. Мурашкин, В.Г. Мурашкин</i>	
К моделированию напряженного состояния структурно-неоднородных конгломератных композитов в строительных конструкциях	<u>160</u>
<i>Е.М. Чернышов, А.И. Макеев</i>	



АЛЕКСАНДРУ СЕРГЕЕВИЧУ ГОРОДЕЦКОМУ – 80 ЛЕТ

Исполнилось 80 лет Александру Сергеевичу Городецкому, иностранному члену Российской академии архитектуры и строительных наук, доктору технических наук, профессору, лидеру и патриарху советской научной школы разработки вычислительных методов, алгоритмов, промышленных программных комплексов и их применения в расчётах и автоматизированном проектировании широкого класса строительных конструкций и сооружений.

Александр Сергеевич закончил в 1955 году Киевский инженерно-строительный институт по специальности «Промышленное и гражданское строительство». Начал свою трудовую деятельность на проектной и затем на научной работе, работая в 1955-1960 годах инженером и главным инженером проекта в УкрНИИпроектстальреконструкции, в 1960-1971 годах заведующим лабораториями в КиевЗНИИЭП в УкрНИИпроекте, в 1971-1976 годах заведующим отделом в Гипрохиммаш, в 1976-2009 годах заместителем директора по научной работе НИИАСС, в 2009-2012 годах главным научным сотрудником НИИСП. С 2012 года по настоящее время Александр Сергеевич – профессор Киевского национального университета строительства и архитектуры.

А.С. Городецкий всегда совмещал научно-исследовательскую деятельность с проектной и инженерной практикой. Руководил работами по теоретическому обоснованию прочности и надежности конструкций сложных строительных объектов и принимал непосредственное участие в их проектировании. Среди таких объектов большепролетное покрытие Бориспольского аэровокзала пролетом 56–48 м (в начале 60–х годов в СССР это было самое большое покрытие в виде тонкостенной пологой оболочки), конструкций Республиканского стадиона в г. Киеве, большепролетных висячих покрытий крытых рынков и киноконцертных залов, конструктивно сложных строительных объектов металлургической, химической и угольной промышленности.

В шестидесятых годах под руководством и при участии А.С. Городецкого разработаны программные комплексы массового применения для расчёта строительных конструкций МИРАЖ и СУПЕР, в которых впервые в СССР был на промышленном уровне реализован метод

конечных элементов, а к концу 60-х годов – и метод суперэлементов.

В 70-х годах прошлого столетия научная деятельность Александра Сергеевича Городецкого связана с теоретическими исследованиями и развитием метода конечных элементов, его применением в практической проектно-конструкторской и инженерной деятельности. Им разработаны подходы к построению новых высокоточных конечных элементов, обосновано применение метода конечных элементов при решении нелинейных задач механики. Эти работы обобщены в докторской диссертации А. С. Городецкого, которую он успешно защитил в 1978 году. В 80-х годах его научные исследования направлены на разработку методов информатизации проектирования строительных объектов. За эти работы А.С. Городецкий в 1986 году удостоен Государственной премии Украины в области науки и техники.

А.С. Городецкий является основателем научной школы компьютерных технологий проектирования конструкций и научным руководителем многих представителей этой школы. Под научным руководством А.С. Городецкого подготовлено два доктора наук и более двадцати кандидатов наук.

Широко известные и активно применяемые в проектной, научной и образовательной практике России, Украины, Белоруссии, ряда других стран программные комплексы ЛИРА, ЛИРА САПР, МОНОМАХ, разработаны высокопрофессиональными коллективами под руководством и при непосредственном участии профессора А.С. Городецкого.

Мы сердечно поздравляем Александра Сергеевича с замечательным юбилеем, желаем ему здоровья и многолетнего творчества на благо строительной науки.

Российская академия архитектуры и строительных наук

Редакционный Совет и редакционная коллегия

международного научного журнала

“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ СЕТОК В ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

П.А. Акимов^{1,2,3}, О.А. Негрозов¹

¹ Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье излагаются актуальные вопросы использования различных типов сеток, используемых при аппроксимации сечений строительных конструкций, поперечных по отношению к направлению регулярности (постоянства или кусочного постоянства) их физико-геометрических параметров (характеристик). В частности, рассматриваются аппроксимирующие сетки регулярной структуры, топологически эквивалентные прямоугольным, а также сетки нерегулярной структуры, связанные с использованием дискретно-континуальных конечных элементов с четырехугольным или треугольным поперечным сечением. Кроме того, описываются основные этапы реализации дискретно-континуального метода конечных элементов.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, аппроксимирующая сетка регулярной структуры, аппроксимирующая сетка нерегулярной структуры, расчеты строительных конструкций, дискретно-континуальный конечный элемент с четырехугольным поперечным сечением, дискретно-континуальный конечный элемент с треугольным поперечным сечением

ABOUT APPLICATION OF APPROXIMATING MESHES IN DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS

Pavel A. Akimov^{1,2,3}, Oleg A. Negrozov¹

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³ JSC "Research Centre "StADyO", Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to actual problems of application of various approximating meshes in discrete-continual finite element method of analysis of structures with regular (constant or piecewise constant) physical and geometrical parameters in one dimension (direction). Meshes of regular and irregular (with the use of discrete-continual finite elements with quadrilateral or triangular cross-sections). Besides, theoretical foundations of discrete-continual finite element method are under consideration as well.

Key words: discrete-continual finite element method, regular approximating mesh, irregular approximating mesh, structural analysis, discrete-continual finite element with quadrilateral cross-section, discrete-continual finite element with triangular cross-section

1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современный этап развития строительной механики, в частности задач определения

напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций, связан с широким использованием численных методов. Прогресс в компьютерной индустрии и вычислительной математике, продолжающийся последние десятилетия, обусловил из-

менение соотношения аналитических, экспериментальных (модельных и натуральных) и численных подходов к анализу сложных конструкций, зданий и сооружений. Практика выдвигает задачи многовариантных исследований двумерных и трехмерных систем, адекватное решение которых может быть зачастую получено только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Этим, в частности, и объясняется определенное преобладание численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Вообще, на всех этапах изучения НДС сооружения математическая теория, исследования аналитическими и экспериментальными методами и численный расчет должны применяться совместно и согласованно. В настоящее время появляется определенный потенциал для расширения доли аналитических подходов. Достигнутый в начале XXI века уровень мощности ЭВМ и имеющийся в арсенале инструментарий аналитических математических средств в сочетании с разнообразием математических моделей позволяет ставить на повестку дня задачи разработки и исследования так называемых численно-аналитических или, следуя терминологии О. Зенкевича, полуаналитических методов. Преимущества сочетания качественных свойств замкнутых решений и общности численных методов отмечались и раньше, но многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия, по крайней мере, одного из перечисленных факторов, либо в той или иной мере не учитывалась вычислительная специфика и необходимость последующей компьютерной реализации. Полуаналитические методы позволяют получать решения в аналитической форме, способствующей улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с их помощью картина НДС развивает интуицию расчетчика

и понимание работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов. Полуаналитические подходы особенно эффективны в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Кроме того, при численном решении сложных задач строительной механики предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств проблемы может оказать значительную помощь. Сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности, его точности. Учитывая вышеизложенное, актуальной задачей является разработка и исследование так называемых дискретно-континуальных методов расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

В работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова [1-11, 15-16, 23-25, 27, 28, 30, 31] было предложено семейство корректных дискретно-континуальных методов, включающее дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ)).

Область применения ДКМКЭ, рассмотрению которого посвящена настоящая статья, составляют конструкции, здания и сооружения, в которых имеется постоянство (регулярность) физико-геометрических характеристик (параметров) по одному из координатных направлений (это направление условно называется основным или «продольным»). Характерной особенностью таких объектов является то, что их очень много. В качестве примеров можно привести высотные здания и сооружения, здания и сооружения большой протяженности, гидротехнические сооруже-

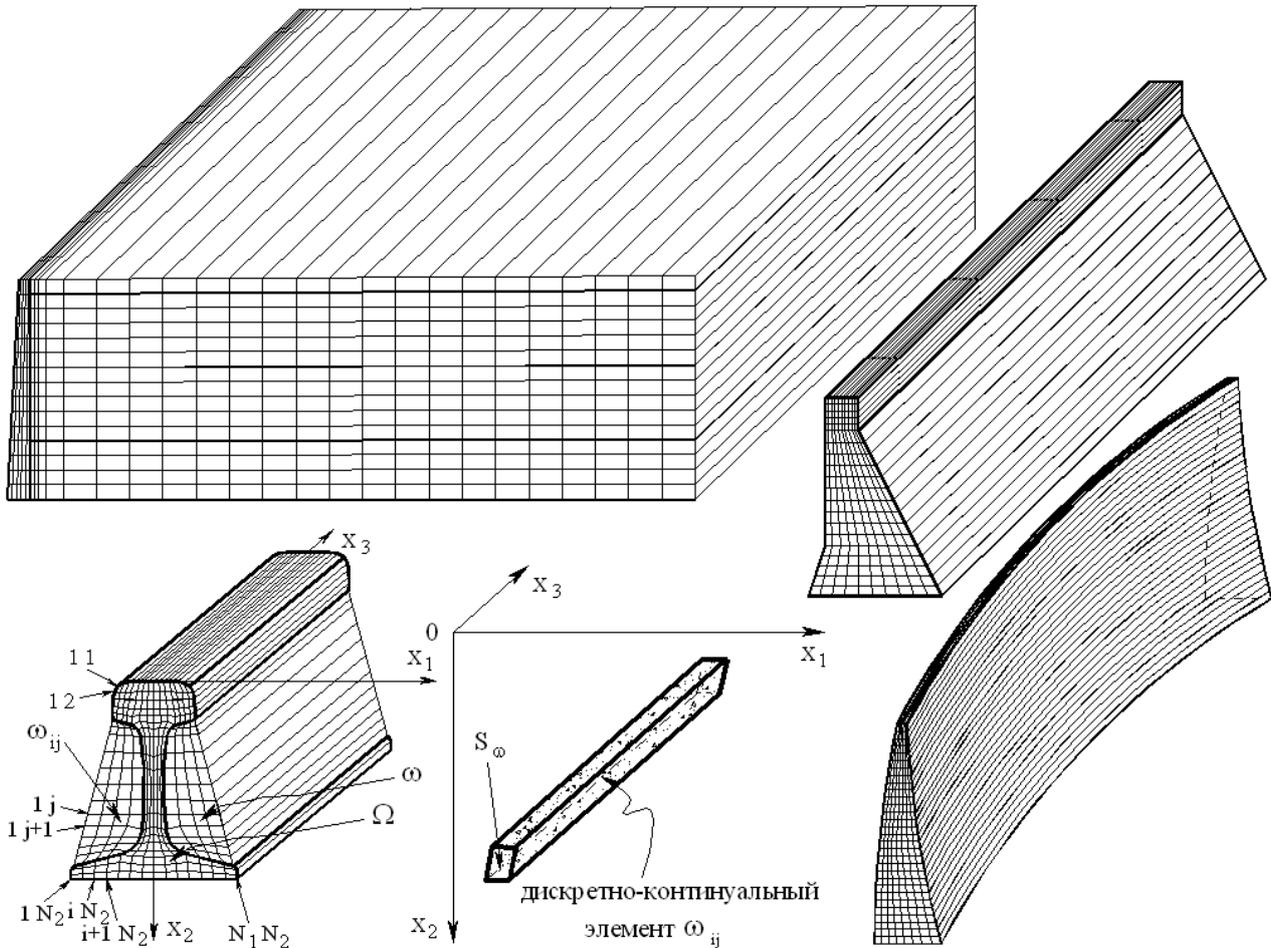


Рис. 1.1. Примеры объектов применения дискретно-континуальных методов.

ния, тоннельные конструкции, большинство типовых конструкций (плиты перекрытий, стеновые панели, ригели, колонны, балочные конструкции, оболочечные конструкции, складчатые конструкции, фундаментные конструкции и т.д. (рис. 1.1)). Для расчета таких ответственных объектов исключительно важно построить точное аналитическое решение вдоль направления регулярности (основного направления) при любых воздействиях и промежуточных закреплениях, стыковках и т.д. Под точным аналитическим решением понимается наличие явной формулы вычисления НДС конструкции в произвольной точке сечения. Соответствующая формула в явном виде демонстрирует характер поведения вычисляемых факторов (перемещений, их производных и т.д.). Метод является дискретно-континуальными в том смысле, что по выделяемому направлению

постоянства и регулярности характеристик (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием стандартной техники метода конечных элементов (МКЭ) и обоснованно контролируемой степенью точности. ДКМКЭ включает четыре основных этапа, рассматриваемых далее.

2. КONTИНУАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ С ВЫДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Первым этапом ДКМКЭ является сведение исходной задачи расчета строительной конструкций, здания или сооружения к обычно-

венным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению и использования метода стандартной (расширенной) области А.Б. Золотова [26]. Поясним это на примере трехмерной задачи теории упругости. Имеем:

$$-\mathcal{L}_{vv}\partial_3^2\bar{u} + \tilde{\mathcal{L}}_{uv}\partial_3\bar{u} + \mathcal{L}_{uu}\bar{u} = \tilde{\mathcal{F}}, \quad (2.1)$$

$$\text{где } \tilde{\mathcal{L}}_{uv} = \mathcal{L}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}^*; \quad \mathcal{L}_{vu} = \mathcal{L}_{uv}^*; \quad \tilde{\mathcal{L}}_{uv}^* = -\tilde{\mathcal{L}}_{uv}; \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \theta\bar{F} + \delta_\Gamma \bar{f}; \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^*\bar{\lambda} \\ 0 & 0 & \partial_2^*\bar{\lambda} \\ \partial_1^*\bar{\mu} & \partial_2^*\bar{\mu} & 0 \end{bmatrix} \partial_3; \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{uu} = \sum_{j=1}^2 \partial_j^* \bar{\mu} \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\mu} \partial_1 & \partial_2^* \bar{\mu} \partial_1 & 0 \\ \partial_1^* \bar{\mu} \partial_2 & \partial_2^* \bar{\mu} \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\lambda} \partial_1 & \partial_1^* \bar{\lambda} \partial_2 & 0 \\ \partial_2^* \bar{\lambda} \partial_1 & \partial_2^* \bar{\lambda} \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

x_1, x_2, x_3 – используемые декартовы координаты; $\bar{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ – вектор составляющих перемещений; λ, μ – параметры Ламе; Ω – область, описываемая конструкцией с границей $\Gamma = \partial\Omega$; $\theta = \theta(x)$ – характеристическая функция области Ω ; $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(x)$ – дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$; $\bar{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области; $\bar{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области; $\bar{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ – вектор составляющих нормали к поверхности.

3. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Второй этап ДКМКЭ – это дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих им функционалов. Итак, для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи исходная область Ω окаймляется расширенной ω . Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: в поперечных по отношению к основному направлению конструкции (оси Ox_1, Ox_2) производится сеточная аппроксимация, тогда как в основном направлении (ось Ox_3) решается континуальная задача. Расширенная область ω в простейшем случае выбирается стандартной в виде параллелепипеда. Аппроксимация поперечного сечения стандартной области при использовании регулярных сеток состоит в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной таким образом, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям поперечного сечения конструкции (рис. 3.1). Понятие топологической эквивалентности в данном случае означает, что она может быть получена из прямоугольной сетки в результате некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания». Выбор такого класса сеток, с одной стороны, дает возможность аппроксимировать большое количество разнообразных конструкций, а с другой – позволяет использовать простую регулярную нумерацию узлов, что приводит в дальнейшем к удобным математическим формулам, эффективным вычислительным схемам и алгоритмам, а также существенно упрощает сбор исходной информации и вывод результатов. Переход к прямоугольной сетке с единичным шагом легко осуществляется локальной заменой координат внутри сеточной ячейки. При «выпрямлении» сетки общий вид уравнений сохраняется – меняются лишь элементы матрицы коэффициентов исходной системы. Во многих случаях эффективно непосредственное применение прямоугольных сеток, поскольку это значительно упрощает и уско-

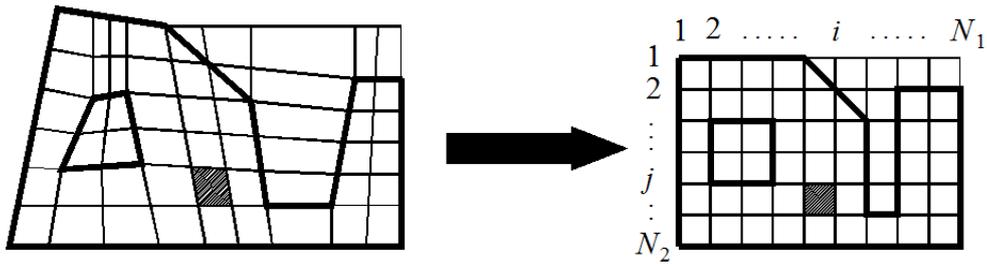


Рис. 3.1. Пример выбора аппроксимирующей сетки.

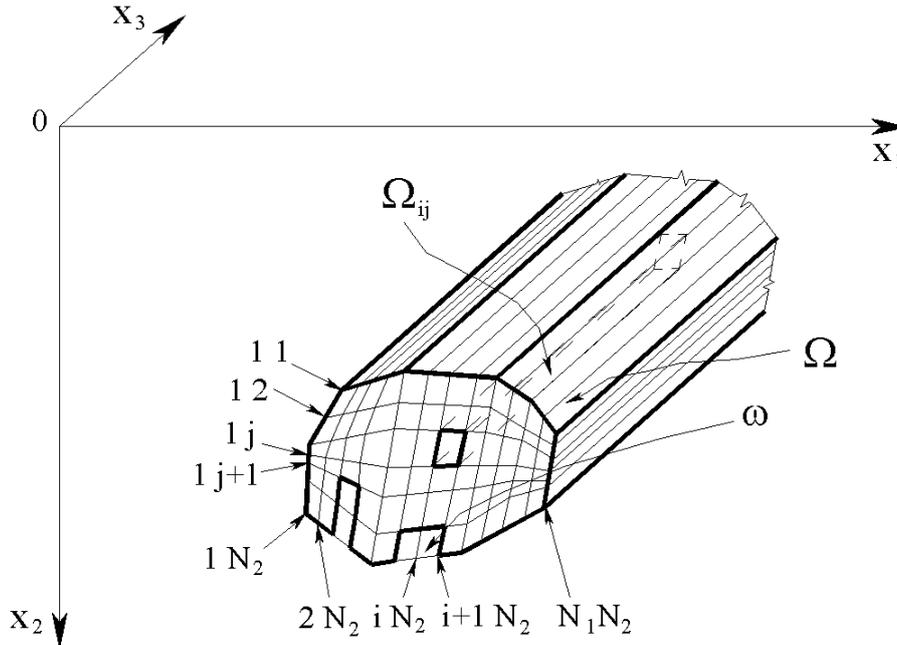


Рис. 3.2. Пример дискретизации конструкции.

ряет алгоритмы, а следовательно, позволяет использовать большое количество узлов, что в результате приводит к увеличению точности. Допускается несогласованность сетки и очертания поперечного сечения конструкции (рис. 3.1).

Область ω разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) ω_{ij} (рис. 3.2, 3.3):

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} \omega_{ij}; \quad (3.1)$$

$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\omega; x_3 \in [0, l]\}, \quad (3.2)$$

где

$$\omega_{ij} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\omega^{ij}; x_3 \in [0, l]\}; \quad (3.3)$$

S_ω, S_ω^{ij} – области, описанные соответственно сеткой и ij -м ДККЭ в поперечном направлении конструкции; l – длина последней в продольном (основном) направлении; N_1, N_2 – принятое количество узлов по направлению осей Ox_1 и Ox_2 ; $(x_1^{ij}, x_2^{ij}, x_3)$, $i=1, \dots, N_1$; $j=1, \dots, N_2$ – координаты узлов; $N = N_1 \cdot N_2$.

В произвольном поперечном сечении дискретно-континуального конечного элемента можно ввести локальную систему координат Ot_1 и Ot_2 (рис. 3.4), при этом $t_1 \in [0, 1]$ и $t_2 \in [0, 1]$. В пределах элемента можно провести локальную перенумерацию узлов, в частности для ij -го элемента: $i, j \Rightarrow 1, 1$; $i+1, j \Rightarrow 2, 1$; $i, j+1 \Rightarrow 1, 2$ и $i+1, j+1 \Rightarrow 2, 2$.

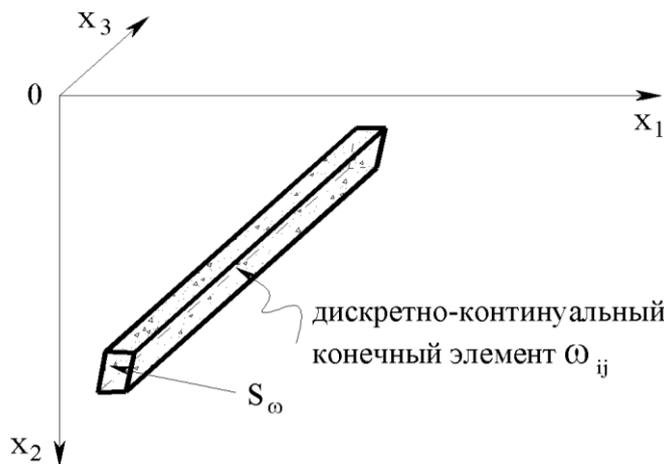


Рис. 3.3. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент с четырехугольным поперечным сечением.

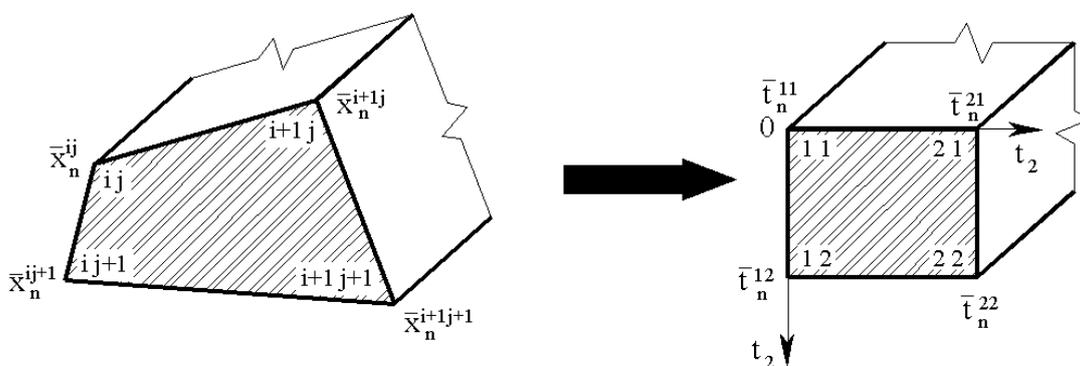


Рис. 3.4. Переход к локальной системе координат на дискретно-континуальном конечном элементе с четырехугольным поперечным сечением.

Для заданного поперечного сечения конструкции векторы координат произвольной точки ДККЭ в элементной и исходной системах имеют вид:

$$\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T; \quad \bar{x} = [x_1 \ x_2]^T. \quad (3.4)$$

Формула преобразования координат записывается следующим образом:

$$\bar{x} = \bar{x}_n^{11} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (3.5)$$

где $\Delta_1 \bar{x} = \bar{x}_n^{21} - \bar{x}_n^{11}$; $\Delta_2 \bar{x} = \bar{x}_n^{12} - \bar{x}_n^{11}$;
 $\Delta_{12} \bar{x} = \bar{x}_n^{22} - \bar{x}_n^{21} - \Delta_2 \bar{x}$. (3.6)

Здесь $\bar{x}_n^{ij}, \bar{t}_n^{pq}$ – векторы координат узла элемента в исходной и элементной системах координат

соответственно, $i = 1, 2, \dots, N_1$; $j = 1, 2, \dots, N_2$; $p = 1, 2$; $q = 1, 2$.

В качестве основных неизвестных в узлах ДККЭ принимаются составляющие перемещений u_1, u_2, u_3 и их производные v_1, v_2, v_3 по переменной x_3 , т.е. для pq -го узла это $u_1^{pq}, u_2^{pq}, u_3^{pq}$, $v_1^{pq}, v_2^{pq}, v_3^{pq}$ и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{pq} = \bar{U}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{pq} \\ \bar{v}_n^{pq} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\bar{u}_n^{pq} = \bar{u}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{pq} \\ u_2^{pq} \\ u_3^{pq} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_n^{pq} = \bar{v}_n^{pq}(x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{pq} \\ v_2^{pq} \\ v_3^{pq} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\bar{U}^{ij} = \bar{U}^{ij}(x_3) = [(\bar{U}_n^{11})^T \quad (\bar{U}_n^{21})^T \\ (\bar{U}_n^{12})^T \quad (\bar{U}_n^{22})^T]^T. \quad (3.9)$$

В простейшем случае поля $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ по сечению ДККЭ аппроксимируются полиномами первого порядка, зависящими от двух аргументов (билинейная аппроксимация):

$$\bar{u} = \bar{u}_n^{11} + t_1 \Delta_1 \bar{u} + t_2 \Delta_2 \bar{u} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{u}; \quad (3.10)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_n^{11} + t_1 \Delta_1 \bar{v} + t_2 \Delta_2 \bar{v} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{v}, \quad (3.11)$$

где $\Delta_1 \bar{u} = \bar{u}_n^{21} - \bar{u}_n^{11}; \quad \Delta_2 \bar{u} = \bar{u}_n^{12} - \bar{u}_n^{11};$

$$\Delta_{12} \bar{u} = \bar{u}_n^{22} - \bar{u}_n^{21} - \Delta_2 \bar{u}; \quad (3.12)$$

$$\Delta_1 \bar{v} = \bar{v}_n^{21} - \bar{v}_n^{11}; \quad \Delta_2 \bar{v} = \bar{v}_n^{12} - \bar{v}_n^{11};$$

$$\Delta_{12} \bar{v} = \bar{v}_n^{22} - \bar{v}_n^{21} - \Delta_2 \bar{v}. \quad (3.13)$$

Соответствующие выражения для деформаций и напряжений определяются на основе дифференцирования (3.10) и с использованием (3.11).

Рассмотрим формулы дифференцирования произвольной функции φ . В результате замены переменных вычисление производных по x_1 и x_2 производится согласно формулам дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2. \quad (3.14)$$

Величины $\partial t_k / \partial x_s$ здесь образуют якобиан системы. Матрица Якоби:

$$\frac{D\bar{x}}{D\bar{t}} = \begin{bmatrix} \partial t_1 / \partial x_1 & \partial t_1 / \partial x_2 \\ \partial t_2 / \partial x_1 & \partial t_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \alpha, \quad (3.15)$$

где $\alpha_{ks} = \frac{\partial t_k}{\partial x_s}. \quad (3.16)$

Формула дифференцирования функции φ по переменным x_1, x_2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \alpha_{ks}, \quad s = 1, 2. \quad (3.17)$$

Элементы матрицы функционального определителя $\beta = D\bar{x} / D\bar{t}$ находятся как

$$\beta_{ks} = \partial x_k / \partial t_s = \Delta_s x_k^{ij} + t_{3-s} \Delta_{12} x_k^{ij}, \quad (3.18) \\ k = 1, 2; \quad s = 1, 2.$$

Матрицы функциональных определителей $D\bar{x} / D\bar{t}$ и $D\bar{t} / D\bar{x}$ взаимосвязаны:

$$\frac{D(\bar{t})}{D(\bar{x})} = \left[\frac{D(\bar{x})}{D(\bar{t})} \right]^{-1} \quad \text{или} \quad \alpha = \beta^{-1}, \quad (3.19)$$

т.е. $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$

где $J = \det[\beta] = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12} \beta_{21}. \quad (3.21)$

Расположение точек интегрирования в дискретно-континуальном конечном элементе показано на рис. 3.5. Координаты точек интегрирования с соответствующими весами представлены в таблице 3.1 (используется схема интегрирования по Гауссу).

Таблица 3.1. Локальные координаты точек интегрирования с соответствующими весами для дискретно-континуального конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением.

№	t_1	t_2	ω
1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
3	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

Итак, Очевидно, что дискретно-континуальные конечные элементы могут использоваться также в рамках нерегулярных сеток (такой случай будет рассмотрен в примере расчета).

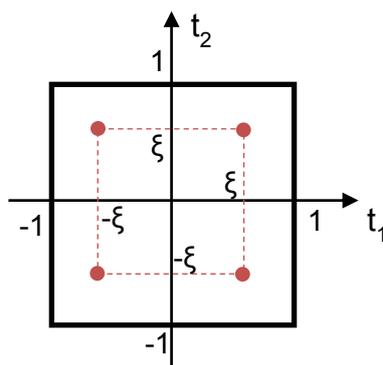


Рис. 3.5. Расположение точек интегрирования в дискретно-континуальном конечном элементе с четырехугольным поперечным сечением.

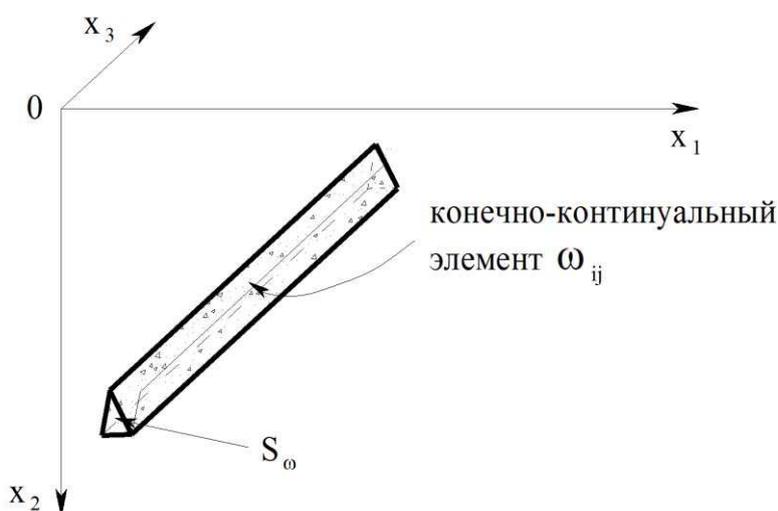


Рис. 3.6. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент с треугольным поперечным сечением.

При аппроксимации поперечных (по отношению к основному направлению) сечений конструкции в практических приложениях нередко возникают ситуации, когда использование дискретно-континуальных конечных элементов сопряжено с определенными трудностями (в частности, в случае сложной геометрии соответствующего сечения) и необходимостью, например, введения дополнительных элементов, аппроксимирующих «пустоту». В таких ситуациях может оказаться предпочтительнее использовать дискретно-континуальные конечные элементы с треугольным поперечным сечением (рис. 3.6), в том числе для снижения количества дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при формировании

дискретно-континуальной модели рассматриваемой конструкции.

В качестве локальной в таких дискретно-континуальных конечных элементах используется барицентрическая система координат (т.е. широко используемые в традиционном методе конечных элементов L -координаты). Таким образом, имеем (рис. 3.7):

$$\bar{x} = L_1 \bar{x}_1 + L_2 \bar{x}_2 + L_3 \bar{x}_3 = L_1 \bar{x}_1 + L_2 \bar{x}_2 + (1 - L_2 - L_1) \bar{x}_3, \quad (3.22)$$

где $L_k = \alpha_{k1}x + \alpha_{k2}y + \alpha_{k3}z;$ (3.23)

$$A = D^{-1}; \quad D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

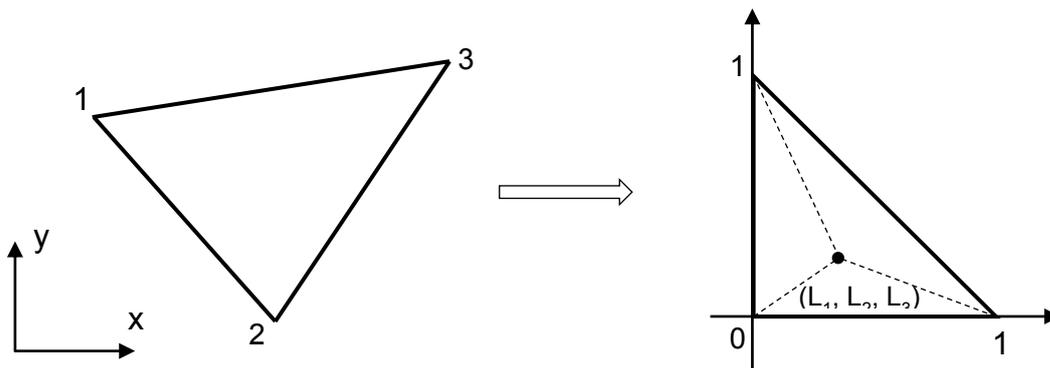


Рис. 3.7. Переход к локальной системе координат на дискретно-континуальном конечном элементе с треугольным поперечным сечением.

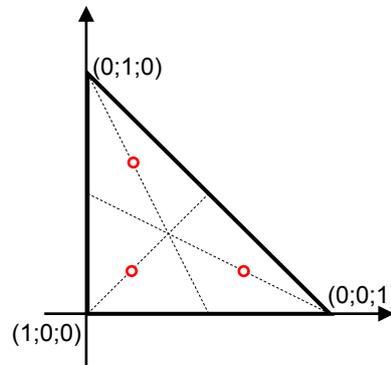


Рис. 3.8. Расположение точек интегрирования в дискретно-континуальном конечном элементе с треугольным поперечным сечением.

Дифференцирование функций в случае треугольного элемента происходит следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial L_s} \frac{\partial L_s}{\partial x_k} = (\varphi_1 - \varphi_3)\alpha_{k1} + (\varphi_2 - \varphi_3)\alpha_{k2}, \quad s = 1, 2, \quad (3.25)$$

где $\varphi_k = \varphi(\bar{x}_k)$.

Расположение точек интегрирования в дискретно-континуальном конечном элементе показано на рис. 3.8. Координаты точек интегрирования с соответствующими весами представлены в таблице 3.2 (используется схема интегрирования по Гауссу).

Таблица 3.2. Локальные координаты точек интегрирования с соответствующими весами для дискретно-континуального конечного элемента с треугольным поперечным сечением.

№	L_1 -координата	L_2 - координата	Ω
1	1/6	1/6	1/6
2	2/3	1/6	1/6
3	1/6	2/3	1/6

Итак, в результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, причем на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по «неосновным» координатным направлениям аппроксимируются, как правило, полиномами,

а в основном направлении их вид остается искомым. Иными словами, неизвестные функции фактически определяются своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

Используя конечноэлементную технику аппроксимации по переменным x_1 и x_2 на третьем этапе ДКМКЭ реализуем переход к разрешающей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, сопровождаемый, как правило, введением дополнительных неизвестных. Следует отметить, что количество дифференциальных уравнений в системе достаточно велико и насчитывает несколько тысяч штук. Разрешающая система имеет вид:

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x), \quad (3.26)$$

где $\bar{y}(x)$ – искомая n -мерная вектор-функция; A – матрица постоянных коэффициентов n -го порядка; $\bar{f}(x)$ – n -мерная вектор-функция правых частей; x – переменная, отвечающая «продольному» направлению.

4. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Четвертый этап ДКМКЭ – это аналитическое решение разрешающих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что все сложности реализации дискретно-континуальных методов определяются характерными специфическими особенностями этих систем.

Прежде всего, важен фактор количества рассматриваемых дифференциальных уравнений. В лучшем случае в рамках метода Л.В. Канторовича, метода В.З. Власова и метода прямых иногда можно решить систему, насчитывающую очень небольшое число

(два, три и т.д.) обыкновенных дифференциальных уравнений, и то это требует зачастую привлечения ряда специальных мер (ограничение длины конструкции и проч.). Перечисленные методы вообще изначально ориентированы их разработчиками исключительно на ручной счет. Так, например, выбор базисных функций в них чаще всего не предполагает никакой дискретизации. Кроме того, эти базисные функции далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли соответствующей части заданных граничных условий. При решении же трехмерных задач с использованием предлагаемых дискретно-континуальных методов число уравнений достигает нескольких тысяч (рассматривались задачи, включающие 5000 дифференциальных уравнений и более), и все традиционно применяемые подходы для аналитического решения таких систем несостоятельны. В связи с отмеченным выше практически все исследователи ищут не точное аналитическое решение в виде формулы со слагаемыми экспоненциального типа, а строят решение с помощью разложений в ряды (методы Л.В. Канторовича и В.З. Власова, метод конечных полос), использований сплайн-функций (метод конечных полос) и т.д. Идейно наиболее близким к разработанным А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым дискретно-континуальным методам является метод прямых [1,4-11,14].

Стандартные полуаналитические подходы очень плохо справляются с учетом сосредоточенных нагрузок и нагрузок, распределенных на небольших участках. Между тем расчет на такие нагрузки является наиболее важным для большинства строительных конструкций. Не менее критичны в этом же смысле и граничные условия: либо они несостоятельны, либо для их адекватного учета требуется некоторый специальный вид таких условий, не имеющий места в общем случае. Точность и сходимость решений, получаемых по таким методам, часто сильно зависит от вида выбираемых базисных функций для

аппроксимации неизвестных, а также от количества учитываемых членов ряда. Сходимость же в зонах краевых эффектов, сосредоточенных факторов, концентраций напряжений и деформаций (т.е. в наиболее ответственных зонах) весьма медленная и слабо зависит от числа учитываемых членов ряда Фурье. И даже, например, если сходимость для перемещений относительно высока, для напряжений и внутренних усилий она много меньше. Данный факт отчасти объясняется известным в теории рядов эффектом Гиббса [13], способам борьбы с которым посвящено достаточно много работ как отечественных, так и зарубежных специалистов.

Отмеченные недостатки стандартных методов следуют из математической сути задачи, эти слабые места достаточно подробно указываются в обзорных статьях и монографиях (например, [29]), и данные там оценки полностью совпадают с мнением авторов. В целом преимущества сочетания качественных свойств замкнутых решений и общности численных методов отмечались ранее многими исследователями, но большинство разработок прежнего времени были либо не реализуемыми практически из-за недостаточного на то время развития математических (теория обобщенных функций, теория операторов) и численных методов, относительно невысокого уровня производительности компьютерной техники, либо в той или иной мере не учитывалась сложная вычислительная специфика соответствующих задач и необходимость компьютерной реализации.

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицей A с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависят от спектра.

Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр матрицы A имеет следующие особенности:

- 1) Наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) Характерная «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного

числа матрицы A к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \geq M, \quad (4.1)$$

где M – большое число.

- 3) В спектральном разложении матрицы A присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
- 4) Жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных конечных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Итак, спектральное разложение матрицы A имеет вид:

$$A = T J T^{-1}, \quad (4.2)$$

где $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_u \end{bmatrix}; \quad (4.3)$

$$J_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

$$\dim J_p = m_p; \quad (4.5)$$

T – невырожденная матрица n -го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A ; J – матрица Жордана n -го порядка; J – жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_p ; u – количество различных собственных значений.

Традиционный подход, рекомендуемый в неспециальной математической литературе и публикациях, посвященных строительной механике, фактически сразу предлагает искать решение задачи (3.26) соответственно в виде

$$\bar{y}(x) = \exp(Ax)\bar{y}(0) + \int_0^x \exp(A(x-\xi))\bar{f}(\xi)d\xi; \quad (4.6)$$

Функция от матрицы вычисляется по известным правилам:

$$\exp(Ax) = T \exp(Jx)T^{-1}. \quad (4.7)$$

Вообще, решение (4.6) в первую очередь ориентируется на задачи Коши. Для случаев, когда исходные уравнения имеют эллиптический тип, (4.6) является, по сути, решением по методу начальных параметров или начальных функций. Несмотря на наличие в некотором ограниченном числе задач решений, определяемых по формуле (4.6), в общем случае они практически нереализуемы. Это связано с тем обстоятельством, что в решении (4.6) всегда имеются функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$, причем величина λx достигает значительных величин (например, $12 < \lambda x < 300$). Реализация таких функций на ЭВМ является «вычислительной катастрофой». Следует отметить, что чем точнее «поперечная» (по «поперечным» направлениям) аппроксимация, тем большие значения принимает величина λx .

Системы (3.26), как указывалось, являются жесткими. В частности, отсюда вытекает характер решения вблизи границ (краевой эффект, эффект малого параметра) и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок. Таким образом, часть составляющих решения системы является быстроизменяющимися, а часть меняется медленно. Как следствие, никакой дискретный подход, например использующий сплайны, не в состоянии уловить все компоненты решения одновременно и его асимптотику. Важным параметром является также и протяженность рассматриваемой конструкции. Как было показано выше, если, например, она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Часто решение систем (3.26) ведется либо некорректными методами, зачастую

не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, ортогональной прогонки и другие [341], причем метод ортогональной прогонки сопряжен с большим объемом вычислений и неоправданным усилением (ортогонализацией и нормировкой) исчезающих по длине факторов)).

В литературе жесткие системы, безусловно, исследуются [1,4-11], но в основном при решении задач Коши и, как правило, для систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от аргумента. В нашем случае цель состояла именно в получении аналитического решения при постоянных коэффициентах, что является характерным для большинства задач расчета типовых строительных конструкций.

Важной особенностью при построении решения в форме (4.6) является необходимость вычисления жордановых клеток и присоединенных векторов. Эта задача также является некорректной, необходимое для ее решения математическое и программное обеспечение в общем случае отсутствует. В литературе по линейной алгебре [17] доказывается, что не может существовать ни одного численно устойчивого универсального способа вычисления жордановых канонических форм. Разумеется, данное обстоятельство можно преодолеть путем возмущения матрицы, но при этом возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Суть предложенного в [1,4-11] подхода состоит в нижеследующем.

Прежде всего, строится фундаментальная матрица-функция, свертка с которой является оператором, обратным к исходному дифференциальному. Для этой цели исходная матрица A коэффициентов системы представляется в виде следующей суммы:

$$A = A_+ + A_- + A_0, \quad (4.8)$$

где $A_+ = P_+ A$; (4.9)

$A_- = P_- A$; (4.10)

$A_0 = P_0 A = A - A_+ - A_-$, (4.11)

где P_+ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями; P_- – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями; P_0 – проектор на подпространство, отвечающее собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям;

$P_+ = T_+ (\tilde{T}_+ T_+)^{-1} \tilde{T}_+$; (4.12)

$P_- = T_- (\tilde{T}_- T_-)^{-1} \tilde{T}_-$; (4.13)

$P_0 = E - P_+ - P_-$; (4.14)

T_+ и \tilde{T}_+ – соответственно матрицы размерности $n \times n_+$ и $n_+ \times n$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A с неотрицательными действительными частями; T_- , \tilde{T}_- – соответственно матрицы размерности $n \times n_-$ и $n_- \times n$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A с неотрицательными действительными частями; E – единичная матрица соответствующего порядка; n_+ и n_- – соответственно количество ненулевых собственных значений с неотрицательными и отрицательными действительными частями.

Заметим, что матрицы \tilde{T}_+ и \tilde{T}_- предлагается определять из решения левой проблемы собственных значений для матрицы A (учитывается тот факт, что, как следует из сказанного выше, практически невозможно на практике построить матрицы T и T^{-1} в разложении (4.2) при наличии в матрице J

жордановых клеток неединичного порядка). Левая проблема собственных значений матрицы A , как известно, сводится к (правой) проблеме собственных значений матрицы A^T . Отметим, что после решения проблем собственных значений для матриц A и A^T следует провести такую сортировку их собственных значений (и соответственно собственных векторов), чтобы сначала нумеровались все ненулевые собственные значения. Сопутствующие преобразования определяются формулами (знак \Rightarrow условно обозначает операцию присваивания)

$\tilde{T}_+ \Rightarrow (\tilde{T}_+ T_+)^{-1} \tilde{T}_+$; $\tilde{T}_- \Rightarrow (\tilde{T}_- T_-)^{-1} \tilde{T}_-$. (4.15)

Подчеркнем, что проектор P_0 не нуждается в специальном построении. Он элементарно находится как разность единичной матрицы соответствующего порядка с парой проекторов P_+ и P_- , которым он ортогонален.

Предлагаемые процедуры также облегчают применение метода стандартной области [1,4-11,26], связанное с наличием дискретно-континуальных элементов нулевой жесткости.

Фундаментальная матрица-функция для задачи (3.26) может быть представлена в виде:

$\varepsilon(x) = T_1 \tilde{\varepsilon}_0(x) \tilde{T}_1 + \chi(x, 0) [P_0 + \sum_{k=1}^{m_{\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_0^k]$, (4.16)

где $\chi(x, \lambda_p) = \begin{cases} \chi(x), & \text{Re}(\lambda_p) \leq 0 \\ -\chi(-x), & \text{Re}(\lambda_p) > 0; \end{cases}$ (4.17)

$\tilde{\varepsilon}_0(x) = \text{diag}\{\chi(x, \lambda_1) \exp(\lambda_1 x), \dots, \chi(x, \lambda_l) \exp(\lambda_l x)\}$; (4.18)

$T_1 = [T_+ \ T_-]$; $\tilde{T} = [\tilde{T}_+^T \ \tilde{T}_-^T]^T$; (4.19)

$m_{\max} = \max_{l \leq i \leq u} m_i$, причем величина m_{\max} конечна и небольшая; $l = n_+ + n_-$ – число ненулевых собственных значений матрицы A .

Отметим, что в приведенном выражении для фундаментальной матрицы-функции нет

компонент типа $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$. Следует особо отметить, что такое представление основано на том, что из свойств задач строительной механики вытекает, что все жордановы клетки неединичного порядка соответствуют нулевым собственным значениям, являются нильпотентными, т.е. их некоторая степень приводит к нулевым клеткам.

Рассмотрим двухточечные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений (3.26). Имеем (ниже условно принято $x = 0$ и $x = l$ – координаты граничных точек):

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x); \quad (4.17)$$

$$B_0\bar{y}(0) + B_l\bar{y}(l) = \bar{g}, \quad (4.18)$$

где B_0, B_l – заданные матрицы коэффициентов граничных условий n -го порядка; \bar{g} – заданный вектор правых частей граничных условий n -го порядка.

Решение задачи (4.17)-(4.18) определяется формулой

$$\bar{y}(x) = [\varepsilon(x) - \varepsilon(x-l)]\bar{C} + \int_0^l \varepsilon(x-\xi)\bar{f}(\xi)d\xi, \quad (4.19)$$

где \bar{C} – n -мерный вектор постоянных коэффициентов, определяемый из граничных условий (4.18) явным матричным методом или методом базисных вариаций [1,4-11].

Представленный общий вид решения является корректным при любых условиях и свободным от всех недостатков, присущих, например, методам типа начальных параметров. Методы типа начальных параметров применимы с практической точки зрения, главным образом, только лишь при расчете балок и пространственных стержней при отсутствии упругого основания.

Рассмотрим теперь многоточечную краевую задачу, под которой понимается задача с «внутренними» граничными условиями, представляющая собой, таким образом, совокупность обычных краевых задач, рассматриваемых на областях, имеющих общие границы.

Постановка многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка состоит из n уравнений и $n_k - 1$ граничных условий, заданных в граничных точках $x_k^b, k = 1, \dots, n_k$:

$$\bar{y}' - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (4.20)$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (4.21)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1,$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (4.22)$$

где $B_1^+, B_k^-, B_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы граничных условий n -го порядка; $\bar{g}_1^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные n -мерные векторы правых частей граничных условий.

Вектор-функция решение задачи (4.20)-(4.22) на произвольном интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) , обозначается $\bar{y}_k(x)$ и определяется формулой

$$\bar{y}_k(x) = (\varepsilon(x - x_k^b) - \varepsilon(x - x_{k+1}^b))\bar{C}_k + \varepsilon(x) * \bar{f}_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (4.23)$$

где \bar{C}_k – вектор постоянных коэффициентов n -го порядка, определяемых из условий (4.21)-(4.22); * – символ, обозначающий операцию свертки.

$$\bar{f}_k(x) \equiv f(x)\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (4.24)$$

$$\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (4.25)$$

В заключение отметим, что прямое или точное решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе (выполнен анализ более 600 публикаций, в том числе обзорных статей, см., например, [1,4-11]) не приводится. По-видимому, главную роль в этом сыграли перечисленные особенности подобных задач. Отметим, что эти особенности характерны именно для строительных задач (расчеты конструкций,

зданий, сооружений) и, может быть, по этой причине они не являлись предметом широкого исследования в математике, хотя решением близких проблем в значительной степени занимались в МГУ им. М.В. Ломоносова, в том числе в научных школах М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко [12], Б.М. Левитана, А.А. Шкаликова [18-22] и др. Однако в работах перечисленных ученых исследовались в основном качественные вопросы (существование, единственность и т.д.), тогда как проблемы численной реализации практически не затрагивались. А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым реализован устойчивый алгоритм аналитического решения при любом числе неизвестных в корректной для вычислений форме, который является основой для построения программных комплексов промышленного типа.

5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Основным предназначением разработанных О.А. Негрозовым верифицируемых модулей программного комплекса *DCFEM* является статический расчет строительных конструкций на основе дискретно-континуального метода конечных элементов с использованием нерегулярных сеток. В целом, программный комплекс *DCFEM* по желанию пользователя обеспечивает:

- распечатку и диагностику введенных исходных данных;
- определение компонент перемещений узлов заданной аппроксимирующей сетки в заданных сечениях по длине конструкции;
- определение компонент напряжений и деформаций в сечениях по длине конструкции (основному направлению);
- распечатку некоторых матриц и векторов, необходимых для всестороннего качественного и количественного анализа результатов расчета;
- представление результатов расчета в графическом и/или табличном виде.

Программный комплекс *DCFEM* написан на языке FORTRAN стандарта Fortran-90/95 с использованием Intel Parallel Studio XE, предназначен для работы в среде Microsoft Windows 8.1.

В программном комплексе *DCFEM* предусмотрена многоуровневая диагностика ошибок, при обнаружении которых выдаются соответствующие предупреждающие сообщения с указаниями их характера и местонахождения.

В качестве характерного примера рассмотрим задачу о расчете бруса с треугольным поперечным сечением (рис. 5.1) в трехмерной постановке.

Параметры материала бруса следующие: модуль упругости $E = 3000 \text{ кН/см}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.16$.

К брусу в сечении $x_3 = 150 \text{ см}$ приложена внешняя нагрузка $F_y = 20 \text{ кН}$, ориентированная в соответствии с рис. 5.1.

В сечениях $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ конструкция закреплена, т.е. перемещения соответствующих узлов по этому сечению полагаются нулевыми $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Для аппроксимации в рамках ДКМКЭ будем использовать нерегулярную сетку, сформированную с использованием дискретно-континуальных конечных элементов с четырехугольным поперечным сечением (рис. 5.1). На рис. 5.1 отмечен узел верификации, использованный для сопоставления перемещений и напряжений, определенных с использованием ДКМКЭ и соответствующих модулей программного комплекса *DCFEM*, с аналогичными данными, найденными с помощью стандартного метода конечных элементов (МКЭ), в результате применения универсального программного комплекса промышленного типа ANSYS.

На рис. 5.2 представлена конечноэлементная модель конструкции, использованная при моделировании бруса в программном комплексе ANSYS. Отметим, что при этом использовались конечные элементы типа SOLID185 [1].

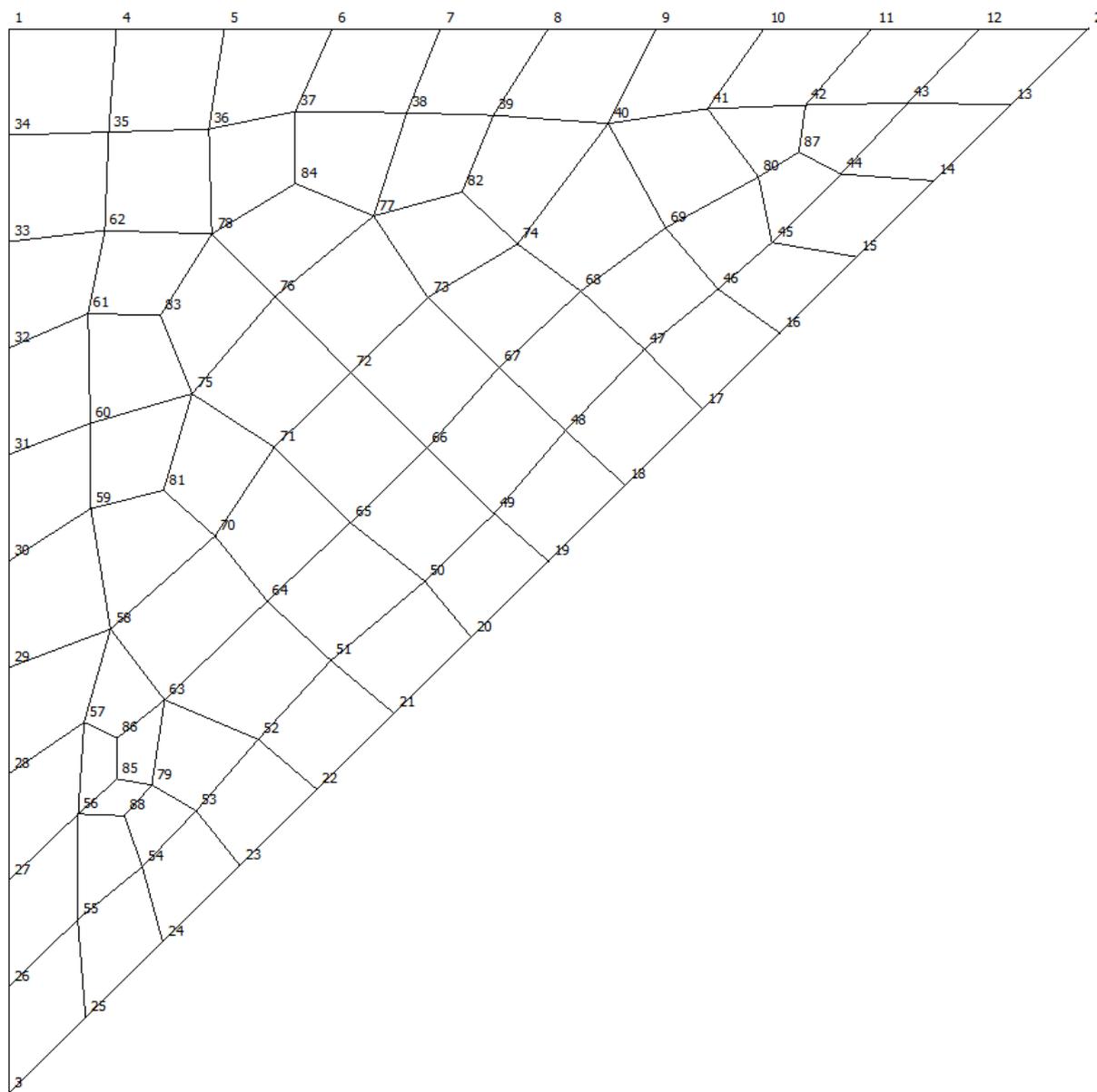


Рис. 5.1. Нерегулярная сетка, сформированная с использованием дискретно-континуальных конечных элементов с четырехугольным поперечным сечением, аппроксимирующая поперечное сечение конструкции.

На рис. 5.3-5.6 представлены соответственно выборочные сопоставления компонент перемещений и напряжений, полученных с использованием МКЭ и ДКМКЭ (используется система координат, показанная на рис. 5.2). Следует отметить хорошую согласованность указанных данных.

Воспользуемся теперь для решения той же самой задачи (статический расчет бруса в трехмерной постановке) нерегулярной сеткой, сформированной с использованием дис-

кретно-континуальных конечных элементов с треугольным поперечным сечением (рис. 5.7). На рис. 5.8-5.9 представлены соответственно выборочные сопоставления компонент перемещений и напряжений, полученных с использованием МКЭ и ДКМКЭ (используется система координат, показанная на рис. 5.2). Вновь следует отметить, в целом, хорошую согласованность указанных данных.

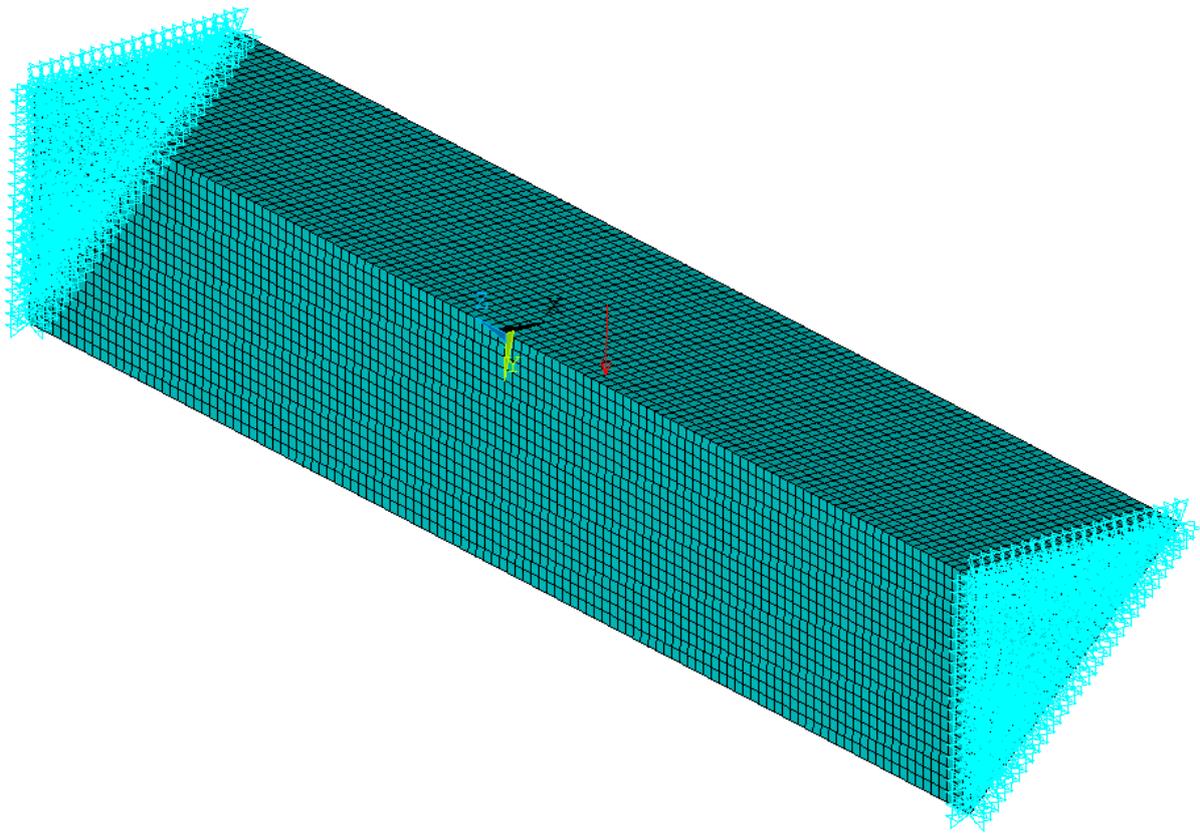


Рис. 5.2. Конечнoэлементная модель конструкции, используемая в программном комплексе ANSYS.

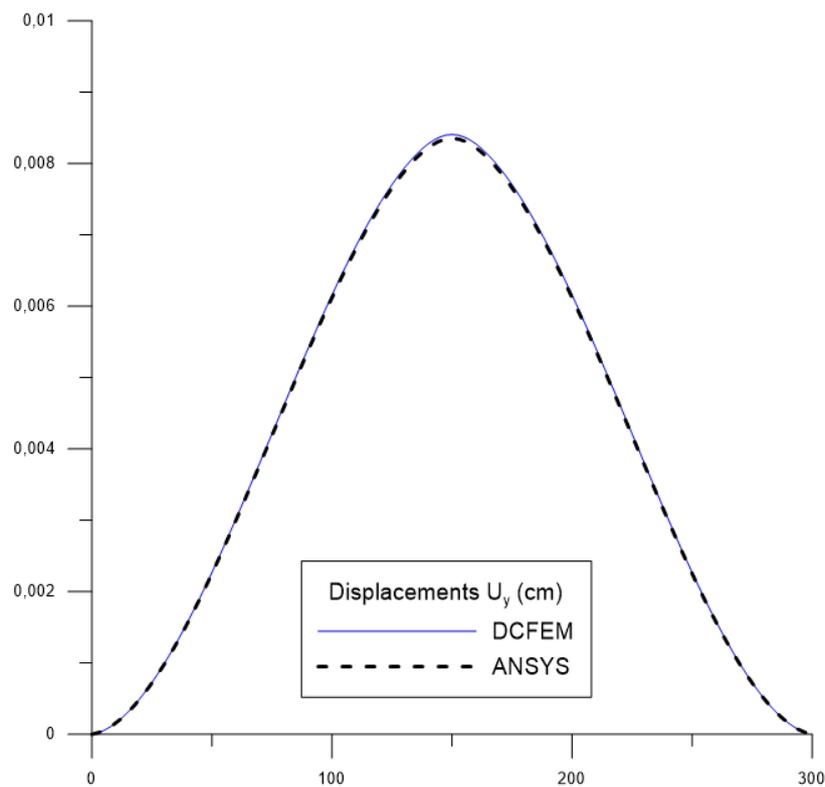


Рис. 5.3. Сопоставление компоненты перемещений вдоль оси y (в сантиметрах).

Об использовании аппроксимирующих сеток в дискретно-континуальном методе конечных элементов для расчета строительных конструкций

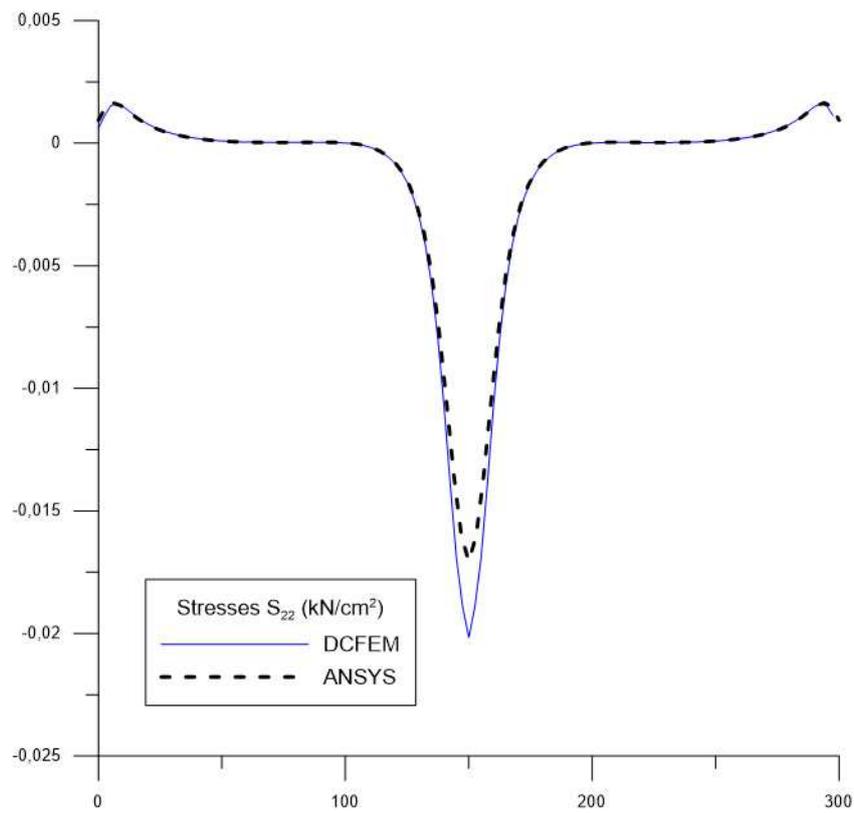


Рис. 5.4. Сопоставление компоненты нормальных напряжений вдоль оси σ_y (в кН/см²).

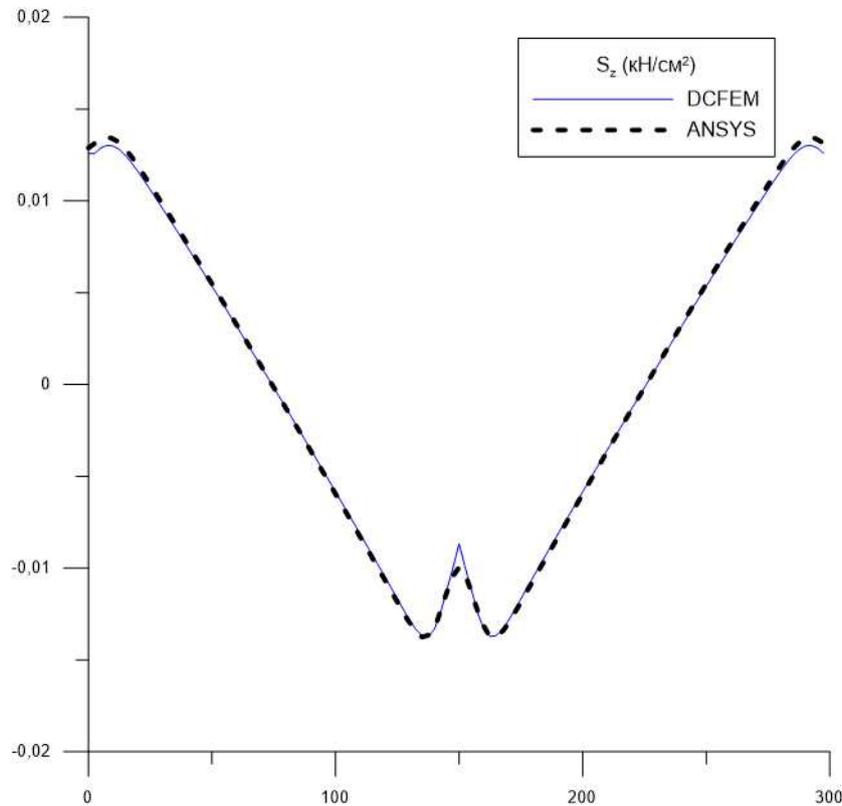


Рис. 5.5. Сопоставление компоненты нормальных напряжений вдоль оси σ_z (в кН/см²).

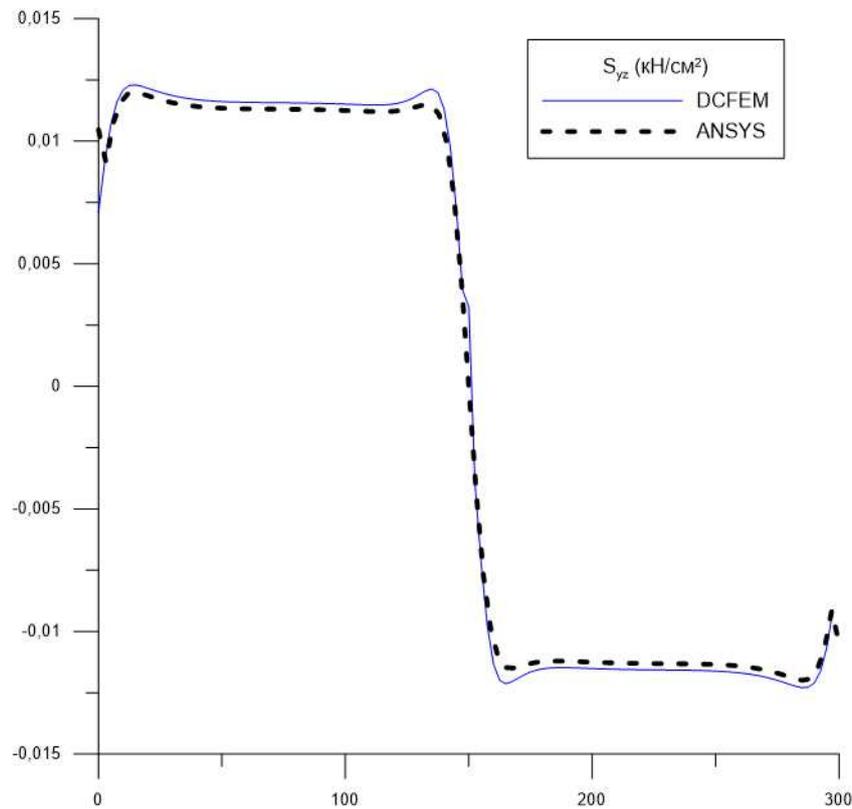


Рис. 5.6. Сопоставление компоненты касательных напряжений вдоль оси σ_{yz} (в кН/см^2).

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих

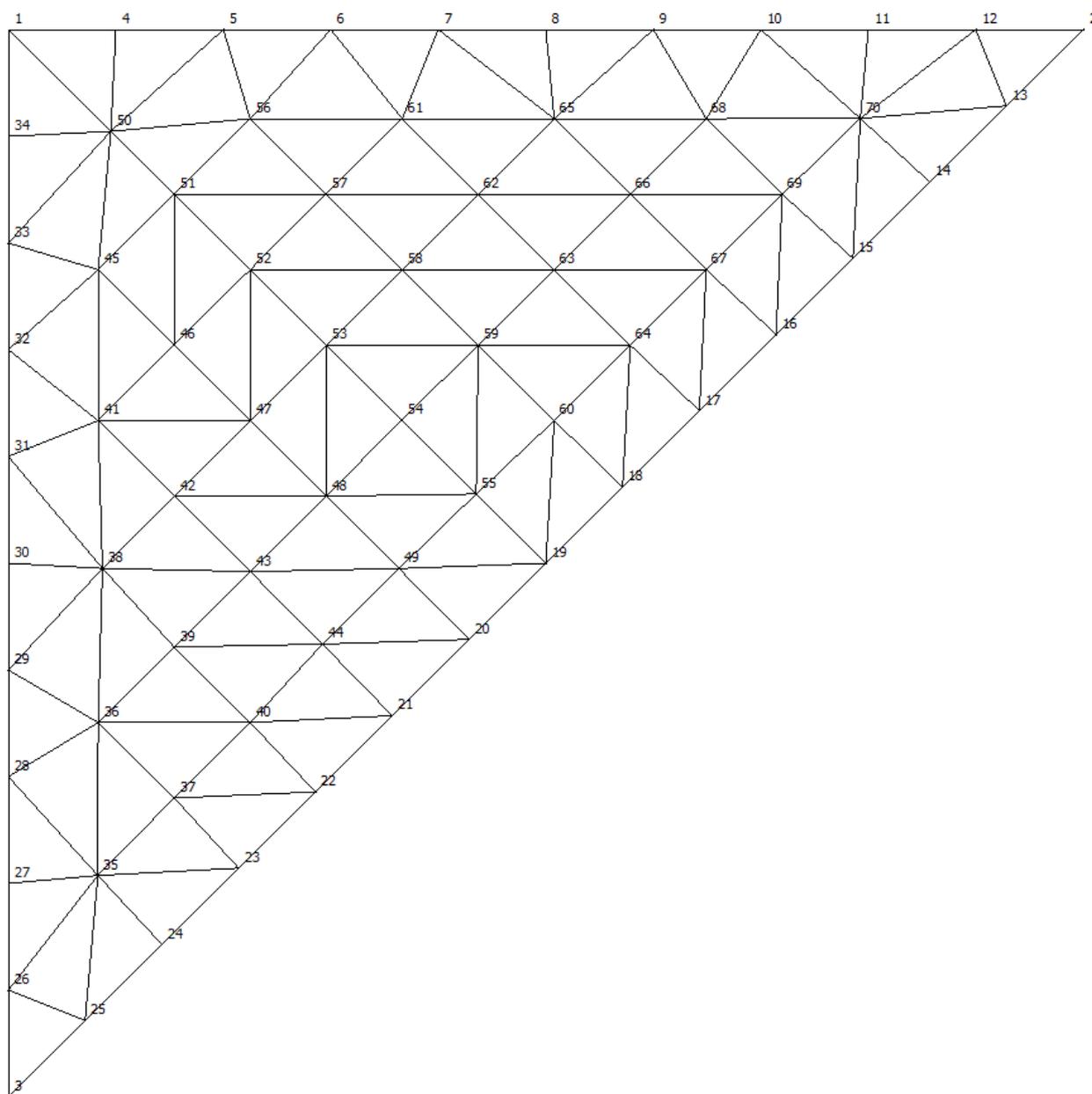


Рис. 5.7. Нерегулярная сетка, сформированная с использованием дискретно-континуальных конечных элементов с треугольным поперечным сечением, аппроксимирующая поперечное сечение конструкции.

сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.

4. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.

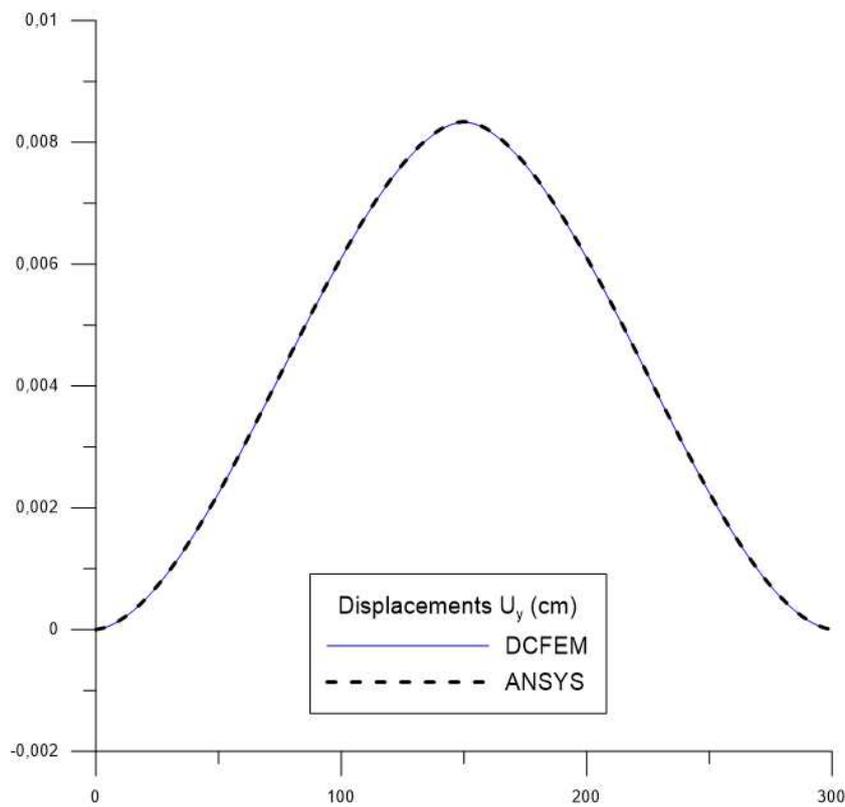


Рис. 5.8. Сопоставление компоненты перемещений вдоль оси y (в сантиметрах).

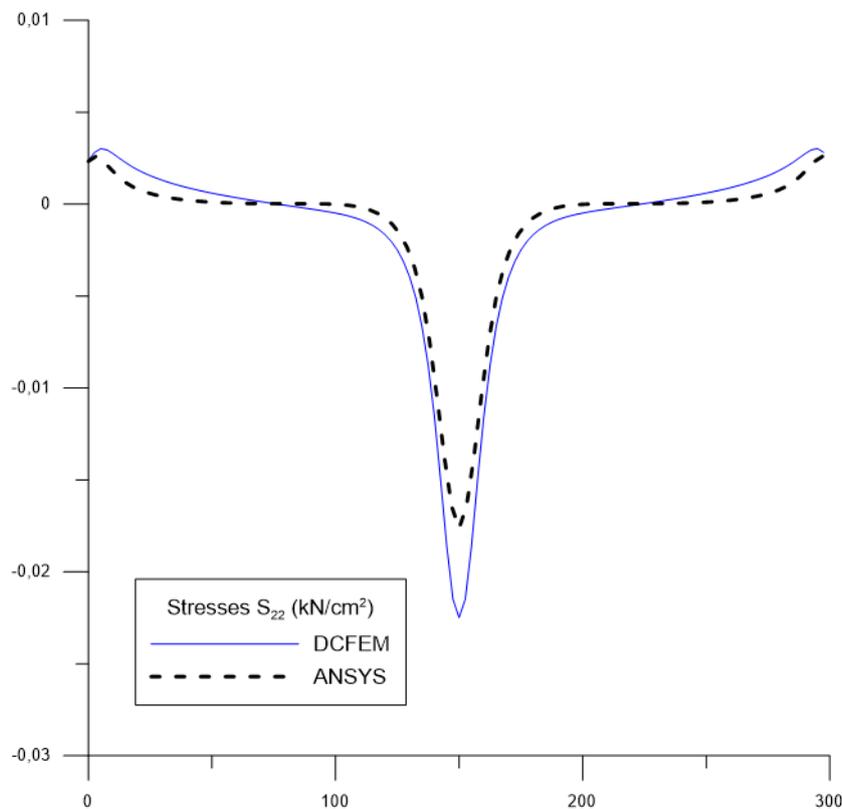


Рис. 5.9. Сопоставление компоненты нормальных напряжений вдоль оси σ_y (в кН/см²).

6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
12. **Костюченко А.Г., Оразов М.Б.** Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки. // Труды семинара им. И.Г. Петровского, т. 6. – М.: Издательство МГУ, 1981, с. 97-146.
13. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. 1961. – 524 с.
14. **Постнов В.А.** Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
15. **Сидоров В.Н., Акимов П.А.** О научной деятельности Александра Борисовича Золотова. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 5, Issue 1&2, 2009, pp. 166-185.
16. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // Известия ВУЗов. Строительство, №10, 2004, с. 8-14.
17. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
18. **Шкаликов А.А.** Задача об установившихся колебаниях трансверсально изотропного полуцилиндра со свободной границей. // Функциональный анализ и его приложения, 1991, т. 17, №2, с. 86-89.
19. **Шкаликов А.А.** К спектральной теории пучков операторов и разрешимости операторно-дифференциальных уравнений: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.
20. **Шкаликов А.А.** Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков. // УМН, 1983, т. 38, №3.
21. **Шкаликов А.А.** Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Т. 14. М.: Издательство МГУ, 1989. с. 140-224.
22. **Шкаликов А.А., Шкред А.В.** Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра. // Математический сборник, 1991, т. 182, №3, с. 1222-1246.
23. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
24. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L.** Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Analysis of NPP Structures. // Technical Innovation in Nucle-

- ar Civil Engineering - TINCE 2013, Paris (France), October 28-31, 2013, 10 pages.
25. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
 26. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
 27. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Discrete-continual Finite Element Method for Analysis of Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters in One Direction. // *Abstract Volume, 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCBE)*, Moscow, 27-29 June 2012, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Publishing House "ASV", pp. 152-153.
 28. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // *Advanced Materials Research* Vols. 250-253, 2011, pp. 3652-3655.
 29. **Christov C.T., Petrova L.** Comparison of Some Variants of the Finite Strip Method for Analysis of Complex Shell Structures. // *Proceedings of the IKM, Weimar, 2000*, 6 pages.
 30. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // *Proceedings of the International Symposium LSCE 2002* organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.
 31. **Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems of

Structural Analysis. // *Journal of Beijing University of Civil Engineering and Architecture*. Vol. 25, No. 2, Jun. 2009.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, ассистент кафедры информатики и прикладной математики, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: genromgsu@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Oleg A. Negrozov, Assistant, PhD Student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: genromgsu@gmail.com

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ ГИБКОЙ НИТИ

А.В. Баенхаев, А.К. Баенхаев

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Получены вариационные постановки задач равновесия нерастяжимых и растяжимых гибких нитей. Предложен способ решения смешанной вариационной задачи. Построена схема метода конечных элементов.

Ключевые слова: задача равновесия гибкой нити, вариационная постановка, функционал, метод конечных элементов

FORMULATIONS OF THE EQUILIBRIUM PROBLEMS OF FLEXIBLE STRING

Aleksandr V. Baenkhaev, Andrey K. Baenkhaev

Far Eastern Federal University, Vladivostok, RUSSIA

ABSTRACT: Variational formulations of the equilibrium problems of inextensible and extensible flexible string is derived. The technique of the solution of the derived mixed variational task is offered. The finite element discretization is constructed.

Key words: the equilibrium problem flexible string, variational formulation, functional, finite element method

Задачи равновесия гибких нитей возникают при расчете различных тросовых сооружений, в том числе имеющих существенные перемещения, например, систем закорения плавучих нефтегазодобывающих платформ, тросовых систем сооружений для выращивания морепродуктов.

Рассмотрим задачу равновесия гибкой нити, форма которой определяется нагрузкой и связями. Положение оси гибкой нити будем описывать вектором декартовых координат

$$x = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T.$$

Напряженное состояние нити характеризуется усилием в нити T ($T \geq 0$). Координату вдоль оси нити обозначим через s . Для формулирования уравнений, учитывающих различные виды граничных условий, будем считать, один конец нити – закрепленным, к другому – приложим нагрузку.

1. НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

Запишем дифференциальную постановку задачи равновесия гибкой нерастяжимой нити [1] в виде:

– статическое уравнение:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + p = 0, \quad (1)$$

– геометрическое уравнение:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} = 1, \quad (2)$$

– геометрическое граничное условие:

$$x|_{s=0} = x_0. \quad (3)$$

– статическое граничное условие:

$$T \frac{dx}{ds} \Big|_{s=l} = F_l, \quad (4)$$

Здесь

$$p = \{p_1 p_2 p_3\}^T$$

– вектор распределенных нагрузок;

$$x_0 = \{x_{01} x_{02} x_{03}\}^T$$

– заданный вектор координат закрепленного конца нити;

$$F_l = \{F_{l1} F_{l2} F_{l3}\}^T$$

– нагрузка на свободном конце нити.

2. НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ОСНОВНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Для построения вариационных постановок задач, отражающих энергетические свойства изучаемой системы, необходимо, чтобы структура уравнений допускала определенную интегральную формулу, аналогичную формуле интегрирования по частям и основанную на комплексе операций дифференцирования, присущим данной задаче [2-4].

Введем произвольные векторы

$$a = \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T \text{ и } b = \{b_1 \ b_2 \ b_3\}^T$$

с компонентами – функциями координаты s . Пусть эти функции обладают нужной степенью гладкости, обеспечивающей возможность выполнения требуемых операций. Тогда для них справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_0^l \left(\frac{da}{ds} \right)^T b ds = a^T b \Big|_0^l - \int_0^l a^T \frac{db}{ds} ds. \quad (5)$$

Интегральная формула (5) переводит операцию дифференцирования с вектора a на вектор b . Примем

$$a = \bar{x} \text{ и } b = \bar{T} \cdot d\bar{x}/ds$$

и подставим в (5). Получим *основную интегральную формулу* для рассматриваемой задачи:

$$\int_0^l \left(\frac{d\bar{x}}{ds} \right)^T \bar{T} \frac{d\bar{x}}{ds} ds = \bar{x}^T \bar{T} \frac{d\bar{x}}{ds} \Big|_0^l - \int_0^l \bar{x}^T \frac{d}{ds} \left(\bar{T} \frac{d\bar{x}}{ds} \right) ds. \quad (6)$$

Формула (6) справедлива для произвольных значений \bar{x} и \bar{T} . Если $\bar{x} = x$ и $\bar{T} = T$ – истинные, т.е. удовлетворяющие соотношениям (1) – (4), то формулу (6) можно записать в виде:

$$\int_0^l T \cdot 1 ds = x^T F_l \Big|_{s=l} - x_0^T R_0 + \int_0^l x^T p ds. \quad (7)$$

Здесь

$$R_0 = T \frac{dx}{ds} \Big|_{s=0}$$

– вектор реакции связи.

При этом формула приобретает определенный механический смысл. Представим два состояния системы. Первое – нить свернута в начале системы координат. Второе состояние – нить принимает положение, отвечающее заданным закреплениям и нагрузке. Работа внутреннего усилия T по разворачиванию нити из первого состояния во второе (левая часть равенства (7)) равна работе, которую на этих перемещениях совершают внешние силы (правая часть равенства (7)).

3. НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА.

Если задать произвольное приращение истинному усилию T и приращение истинному вектору координат оси нити x , удовлетворяющее геометрическому граничному условию (3):

$$\bar{T} = T + \delta T, \quad (8)$$

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \delta x|_{s=0} = 0 \quad (9)$$

подставить их в (6), пренебрегая вторым порядком от приращений, принимая во внимание, что для истинных значений формула (6) выполняется, можно получить вариационное уравнение для задачи равновесия гибкой нерастяжимой нити, которое отличается от вариационного уравнения, приведенного ранее в [5, 6], дополнительным членом, соответствующим статическому граничному условию (4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \delta T \cdot \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds + \\ & + \int_0^l \left(\frac{\delta dx}{ds} \right)^T T \frac{dx}{ds} ds - \\ & + \int_0^l \delta x^T p ds - \delta x^T F_l|_{s=l} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что внешние силы не варьируются, вынесем операцию варьирования:

$$\delta B_1 = 0.$$

Откуда получим вариационную постановку задачи в виде условия стационарности функционала $B_1(x, T)$:

$$\begin{aligned} B_1(x, T) = & \frac{1}{2} \int_0^l T \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds - \\ & - \int_0^l x^T p ds - x^T F_l|_{s=l} = \text{const.} \end{aligned} \quad (11)$$

в зависимости от усилия T и вектора координат оси нити x , принимающего заданное значение в начальной граничной точке (3).

4. НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. СПОСОБ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Функционал (11) является смешанным, неизвестными являются усилия T и координаты оси нити x . Для решения этой смешанной задачи воспользуемся методикой, предложенной в [7], в которой расчетная область разбивается на подобласти, и предполагается, что часть уравнений смешанного метода выполняется в каждой такой подобласти в отдельности.

Разобьем нить на n подобластей – элементов. Длину элемента с номером r ($r = 1, 2, \dots, n$) будем обозначать l^r . Предположим, что на каждом элементе выполняется вариационное уравнение:

$$\int_r \delta T \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds = 0, \quad (12)$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

Тогда для решения вариационной задачи (10) остается рассмотреть интегральное тождество:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(\frac{\delta dx}{ds} \right)^T T \frac{dx}{ds} ds - \\ & - \int_0^l \delta x^T p ds - \delta x^T F_l|_{s=l} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

определенное на классе векторов x , удовлетворяющих (3).

5. НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Построим схему метода конечных элементов,

основанную на вариационной постановке задачи (12), (13) [6]. Представим на конечном элементе вектор x и усилие T в виде:

$$x = N^r \cdot X^r, \quad T = [1] \cdot t^r \in l^r, \quad (14)$$

где N^r - матрица функций формы; X^r - вектор координат узлов элемента r ; t^r - значение усилия в элементе r (усилие T принято кусочно-постоянной функцией). Подставим (14) в (12) и, вследствие произвольности вариации усилий, получим

$$(X^r)^T H^r X^r - l^r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

где $H^r = \int_r \left(\frac{dN^r}{ds} \right)^T \left(\frac{dN^r}{ds} \right) ds$.

Представим (13) в виде суммы по элементам и, используя (14), получим

$$\sum_{r=1}^n [(\delta X^r)^T (H^r X^r - P^r)] = 0, \quad (16)$$

где

$$H_t^r = t^r H^r, \quad P^r = \int_r (N^r)^T p ds + (N^r)^T F_l \Big|_{s=l}.$$

Если последовательно в порядке возрастания r записать в один вектор вектора координат узлов элементов X^r - получим вектор X^* координат узлов несвязанных между собой элементов. Аналогично вводится вектор узловых нагрузок P^* и квазидиагональная матрица H_t^* . Тогда (16) представляется в форме:

$$(\delta X^*)^T (H_t^* X^* - P^*) = 0. \quad (17)$$

Связь вектора координат узлов несвязанных между собой элементов X^* с вектором координат узлов системы X установим с помощью матрицы соединения Γ [8]:

$$X^* = \Gamma X. \quad (18)$$

Подставляем (18) в (17)

$$(\delta X)^T (H_t X - P) = 0,$$

где $H_t = \Gamma^T H_t^* \Gamma$, $P = \Gamma^T P^*$.

Вариацию δX , учитывающую граничные условия (3), можно связать с произвольной вариацией $\delta_1 X$:

$$\delta X = E_1 \cdot \delta_1 X,$$

где E_1 - диагональная матрица, учитывающая заданные координаты. Каждому элементу матрицы E_1 , стоящему на диагонали, сопоставляется узел и направление координат в том же порядке, что и в векторе X . Там, где заданы координаты элементы E_1 принимаются равными нулю, остальные диагональные элементы равны единице. Вследствие произвольности $\delta_1 X$ приходим к системе алгебраических уравнений:

$$E_1 (H_t X - P) = 0. \quad (19)$$

Окончательная система уравнений (15), (19) содержит неизвестные координаты в узлах системы X и неизвестные усилия в элементах t^r (неявно в матрице H_t).

При кусочно-линейной аппроксимации x уравнения (15), (19) эквивалентны уравнениям приближенного метода, предложенного в [9]. Уравнения (15) в этом случае можно записать следующим образом:

$$\sum_{m=1}^3 \left(\frac{x_{mj}^r - x_{mi}^r}{l^r} \right)^2 = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

где x_{mi}^r - координата i -того узла элемента r в направлении m -той оси координат.

Итерационная процедура решения такой задачи заключается в следующем. Задаются начальные значения усилий в элементах $t_{(0)}^r$.

Решается система алгебраических уравнений (19), линейная относительно неизвестных координат. Для уточнения значений t^r используется соотношение (20) в виде:

$$t_{(k)}^r = t_{(k-1)}^r \cdot \left[\sum_{m=1}^3 \left(\frac{x_{mj}^r - x_{mi}^r}{l^r} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (21)$$

где k - номер итерации. Итерации продолжают до достижения требуемой точности вычисления усилий.

6. РАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

В случае учета растяжимости нити деформированное состояние нити характеризуется относительной линейной деформацией ε . Дифференциал дуги нити в растянутом состоянии ds связан с дифференциалом дуги нити в исходном состоянии ds_0 соотношением:

$$ds = (1 + \varepsilon) \cdot ds_0, \quad (22)$$

Дифференциальную постановку задачи гибкой растяжимой нити можно записать в виде:

– статическое уравнение:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + \frac{p_m}{1 + \varepsilon} + p_s = 0$$

или

$$\frac{d}{ds_0} \left(\frac{T}{1 + \varepsilon} \frac{dx}{ds_0} \right) + p_m + p_s \cdot (1 + \varepsilon) = 0, \quad (23)$$

– геометрическое уравнение:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^T \cdot \frac{dx}{ds} = 1$$

или

$$\left(\frac{dx}{ds_0} \right)^T \cdot \frac{dx}{ds_0} = (1 + \varepsilon)^2, \quad (24)$$

– физическое уравнение:

$$\varepsilon = \frac{T}{EA}, \quad (25)$$

– геометрическое граничное условие:

$$x|_{s=0} = x_0, \quad (26)$$

– статическое граничное условие:

$$T \frac{dx}{ds} \Big|_{s=l} = F_l$$

или

$$\frac{T}{1 + \varepsilon} \frac{dx}{ds_0} \Big|_{s=l} = F_l \quad (27)$$

Здесь

$$p_m = \{p_{m1} p_{m2} p_{m3}\}^T$$

– вектор распределенных массовых нагрузок;

$$p_s = \{p_{s1} p_{s2} p_{s3}\}^T$$

– вектор распределенных поверхностных нагрузок на нить; EA – жесткость нити;

$$x_0 = \{x_{01} x_{02} x_{03}\}^T$$

– заданный вектор координат в начальной точке нити;

$$F_l = \{F_{l1} F_{l2} F_{l3}\}^T$$

– нагрузка на свободном конце нити. Разделение нагрузки на массовые и поверхностные выполнено для учета при растяжении уменьшения массовой нагрузки, отнесенной к единице длины нити.

7. РАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ОСНОВНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Используя описанную ранее процедуру, получим основную интегральную формулу для задачи равновесия растяжимой гибкой нити:

$$\int_0^l \frac{\bar{T}}{1+\varepsilon} \left(\frac{d\bar{x}}{ds_0} \right)^T \frac{d\bar{x}}{ds_0} ds_0 =$$

$$= x^{-T} \frac{\bar{T}}{1+\varepsilon} \frac{d\bar{x}}{ds_0} \Big|_0^l - \int_0^l x^{-T} \frac{d}{ds_0} \left(\frac{\bar{T}}{1+\varepsilon} \frac{d\bar{x}}{ds_0} \right) ds_0,$$

(28)

где $\varepsilon = \frac{\bar{T}}{EA}$.

8. РАСТЯЖИМАЯ НИТЬ. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дадим произвольное приращение истинному усилию T и приращение истинному вектору координат оси нити x , удовлетворяющее геометрическому граничному условию (26):

$$\bar{T} = T + \delta T, \quad (29)$$

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \delta x|_{s=0} = 0. \quad (30)$$

Подставим их в (28) и после преобразований придём к вариационному уравнению для задачи равновесия растяжимой гибкой нити:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\delta T}{1+\varepsilon} \cdot \left[\left(\frac{dx}{ds_0} \right)^T \frac{dx}{ds_0} - (1+\varepsilon)^2 \right] ds_0 +$$

$$+ \int_0^l \left(\frac{\delta dx}{ds_0} \right)^T \frac{T}{1+\varepsilon} \frac{dx}{ds_0} ds_0 - \quad (31)$$

$$- \int_0^l \delta x^T [p_m + p_s \cdot (1+\varepsilon)] ds_0 -$$

$$- \delta x^T F_l|_{s=l} = 0$$

или к условию стационарности функционала:

$$B_2(x, T) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T}{1+\varepsilon} \left[\left(\frac{dx}{ds_0} \right)^T \frac{dx}{ds_0} - (1+\varepsilon)^2 \right] ds_0 - \quad (32)$$

$$- \int_0^l x^T [p_m + p_s \cdot (1+\varepsilon)] ds_0 -$$

$$- x^T F_l|_{s=l} = \text{const.}$$

определенному на классе векторов x , удовлетворяющих (26); деформация в формулах (31) и (32) определяется соотношением (25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меркин Д.В. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
2. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 223 с.
3. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
4. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
5. Баенхаев А.В. Вариационная постановка задачи о равновесии существенно подвижной гибкой нити // Прочность и устойчивость инженерных конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. / Алтайский политехн. ин-т им. И.И. Ползунова – Барнаул, 1991. с 22-25.

6. **Baenkhaev A.V.** The finite element method for the equilibrium problem of flexible string. // *Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 136-139.
7. **Розин Л.А., Баенхаев А.В.** Смешанные схемы МКЭ и их применение к решению задач теории упругости // *Известия ВНИИГ*. Л.: Энергоатомиздат, 1986. Т. 194, с. 79-84.
8. **Розин Л.А.** Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.
9. **Стоценко А.А.** Гидробиотехнические сооружения. Владивосток: изд-во ДВГУ, 1984. – 136 с.

Баенхаев Александр Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры гидротехники, теории зданий и сооружений, Дальневосточный федеральный университет, РОССИЯ, 690922, г. Владивосток, нп. Русский Остров, п. Аякс, 10; e-mail: baenkhaev.av@gmail.com

Баенхаев Андрей Константинович, аспирант, Дальневосточный федеральный университет, РОССИЯ, 690922, г. Владивосток, нп. Русский Остров, п. Аякс, 10; e-mail: areallimp@mail.ru

Aleksandr V. Baenkhaev, PhD, Department of Hydrotechnics, Theory of Structures, Far Eastern Federal University; pos. Ajax, ostrov Russky, Vladivostok, 690922, Russia; e-mail: baenkhaev.av@gmail.com

Andrey K. Baenkhaev, PhD Student, Far Eastern Federal University; pos. Ajax, ostrov Russky, Vladivostok, 690922, Russia; e-mail: areallimp@mail.ru

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

В.А. Баженов, С.О. Пискунов, И.И. Солодей

Киевский национальный университет строительства и архитектуры (КНУСА), г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ. В статье изложены исходные уравнения физически нелинейного деформирования и механики разрушения, разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ), алгоритмы решения систем уравнений, определения напряженно-деформированного состояния и вычисления параметров механики континуального и дискретного разрушения, результаты решения соответствующих тестовых примеров и практических задач деформирования и разрушения реальных объектов различных отраслей техники при статическом и динамическом нагружении.

Ключевые слова: пространственная задача, полуаналитический МКЭ, пластичность, ползучесть, ресурс, механика разрушения, динамическое нагружение.

SEMIANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD IN PROBLEMS OF SPATIAL BODIES NONLINEAR DEFORMATION PROCESS

Victor A. Bazhenov, Sergii .O. Pyskunov, Ivan I. Solodey

Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA), Kyiv, UKRAINE

ABSTRACT. The paper deals with initial equations of physically nonlinear deformation and fracture mechanics, resolving ratios of semi-analytical method of finite elements (SFEM), algorithms of solution of equation systems, definitions of the stress-strained state and calculations of parameters of mechanics of continual and discrete fracture, results of solution of the corresponding test examples and practical problems of deformation and fracture of real objects in different branches of engineering under static and dynamic load.

Key words: spatial problem, semianalytical FEM, plasticity, creep, life-time, fracture mechanic, dynamic loading

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее универсальным численным методом, позволяющим выполнять расчеты нелинейного деформирования конструкций, а также выполнять моделирование их континуального и дискретного разрушения является метод конечных элементов (МКЭ). Однако решение таких задач на основе общей трехмерной постановки МКЭ требует значительных объемов вычислительных затрат. Несмотря на стремительный рост ресурсов и мощности вычислительной техники, наличие

и развитость современного программного обеспечения (в частности таких программных комплексов как ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и др.) это может накладывать ограничения на возможность решения вышеуказанных задач. Кроме того, для некоторых классов задач необходимы специальные алгоритмы (например алгоритмы описания накопления поврежденности и роста зон разрушения или вычисления параметров механики разрушения), реализация которых в указанных комплексах ограничена.

Указанные обстоятельства приводят к необходимости разработки эффективных вариантов МКЭ, ориентированных на достаточно широкий круг тел, которые имеют общие черты, что позволяет отнести их к частному классу объектов. Так, многие объекты геометрически могут быть представлены как результат движения двумерной поверхности, контур которой соответствует поперечному сечению тела, вдоль незамкнутой, в общем случае криволинейной, образующей. Такое представление дает возможность существенно увеличить эффективность МКЭ, выполнив его объединение с методом разделения переменных. Этот подход получил название полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) [40]. Суть его состоит в разложении искомых величин вдоль одной координаты (образующей) по некоторой системе непрерывных гладких базисных функций в сочетании с конечноэлементной дискретизацией вдоль двух других (в поперечном сечении тела). При этом расширение выбора аппроксимирующих координатных функций позволяет оптимизировать структуру получаемых систем уравнений МКЭ и способы их решения, а также предоставляет дополнительные возможности уменьшения объемов исходной информации для описания геометрии пространственных тел.

Развитие различных модификаций ПМКЭ для решения линейных и нелинейных задач механики выполнен в работах Б.Я. Кантора [25, 26], Ю.Н. Шевченко и В.Г. Савченко [33, 34], П.П. Гонтаровского и Е.К. Руденко [18, 19, 32], Н.Н. Шапошникова и И.И. Монахова [28, 39], А.Б. Золотова и П.А. Акимова [23, 24] и других публикациях, например [15].

Накопленный опыт работы в данном направлении нашел отражение в создании и дальнейшем развитии эффективного сочетания ПМКЭ с моментной схемой МКЭ (МСКЭ) [11, 35] и его использования для моделирования процессов статического и динамического деформирования произвольно нагруженных неоднородных круговых, призматических и других объектов канонической формы с различными граничными условия-

ми. Соответствующие результаты получили отражение в монографиях [3, 4, 7, 8] и других публикациях [2, 5, 6, 9, 10, 20, 30, 41, 42 и др.] авторов и сотрудников Научно-исследовательского института строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры (НИИ-СМ КНУСА).

В данной статье приведено короткое изложение теории указанной модификации ПМКЭ, подтверждение его достоверности и иллюстрация результатов применения в нелинейных задачах деформирования и разрушения пространственных тел.

1. ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ И РАЗРЕШАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ПМКЭ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Рассматриваются пространственные сплошные твердые тела, полученные движением некоторой возможно неодносвязной фигуры вдоль гладкой криволинейной (рис. 1.1,а) или прямолинейной (рис. 1.1,б) направляющей, соответственно круговые или призматические неоднородные тела. Физико-механические характеристики материала (например модуль упругости E) предполагаются зависимыми от координат и могут изменяться локально на несколько порядков (как на рис.1,а) или описываться функцией координат $E = E(z^i)$ (как на рис. 1.1,б). Предусматривается также возможность непрерывного изменения площади указанной фигуры (без изменения ее конфигурации) в соответствии с изменением площади поперечного сечения тела вдоль образующей по закону вида $A(z^3) = A_0 f(z^3)$ (рис. 1.1,в).

На торцах тел могут реализованы произвольные граничные условия.

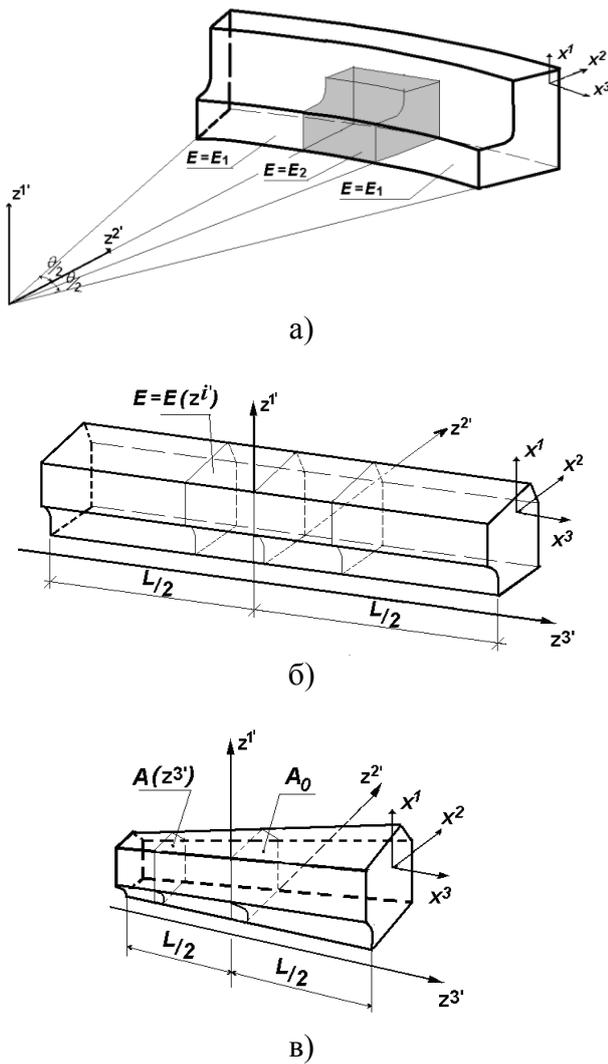


Рис.1.1. Фрагменты примеров пространственных сплошных тел.

В каждой точке тела известны компоненты тензора преобразования местной x^i и базисной z^j систем координат [12]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j} \quad (1.1)$$

Взаимосвязь компонент тензора деформаций ε_{ij} в местной и перемещений $u_{i,i}$ в базисной системе координат описывается соотношением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,i'} z_{,j}^{i'} + u_{i',j} z_{,i}^{i'} \right) - u_{l',i} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}, \quad (1.2)$$

где Γ_{ij}^k символы Кристоффеля второго рода.

При упругом деформировании компоненты тензора напряжений в местной системе координат определяются через компоненты деформаций на основе обобщенного закона Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (1.3)$$

В ПМКЭ конечноэлементная дискретизация выполняется в поперечном сечении тела (рис. 1.2) с использованием неоднородных круговых незамкнутых (рис. 1.3,а) или призматических (рис. 1.3,б) конечных элементов (КЭ). Их размеры в поперечном сечении могут изменяться в зависимости от параметров сеточной области, а характерный размер и конфигурация в направлении образующей соответствует исследуемым объектам.

С учетом возможности моделирования характера изменения перемещений по толщине оболочек и пластин принимается билинейный закон распределения перемещений в плоскости поперечного сечения КЭ:

$$u_{i'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_j x^j + S_1 S_2 x^1 x^2 \right), \quad (1.4)$$

где $u_{i'(S_1 S_2)}$ – узловые значения перемещений; S_1 и S_2 – удвоенные координаты узлов вдоль осей x^1 и x^2 , определяющие их положение в местной системе координат.

Выбор системы базисных функций для аппроксимации перемещений в направлении x^3 обусловлен формой исследуемого объекта и необходимостью моделирования произвольных граничных условий.

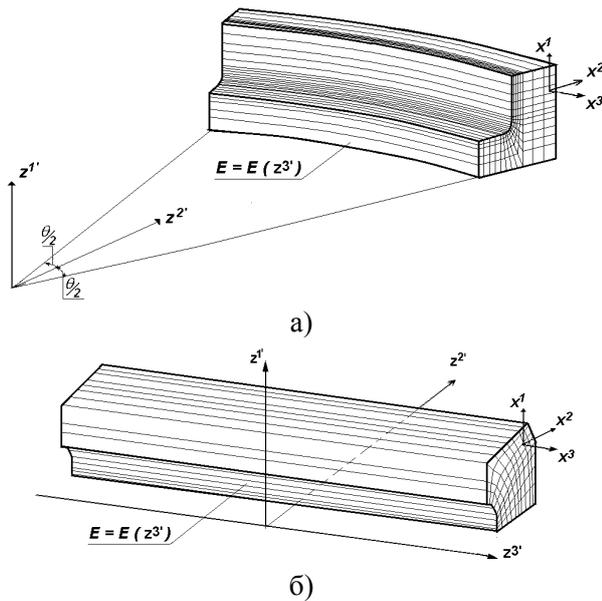


Рис. 1.2. Примеры дискретизаций поперечных сечений конструкций.

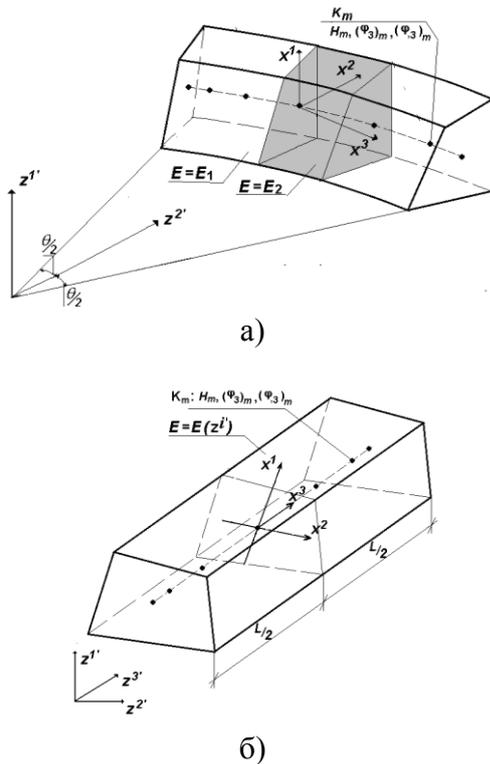


Рис. 1.3. Примеры конечных элементов.

Так, для исследования призматических и круговых незамкнутых тел с произвольными граничными условиями на торцах используется разложение по системе координатных

функций $\varphi^{(l)}$ – полиномам Лагранжа ($l = 0, 1$) и Михлина ($l = 2, \dots, L$)

$$u_m = \sum_{l=0}^L u_m^l \varphi^{(l)}, \quad (1.5)$$

где $\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1 - x^3)$, $\varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x^3)$,

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}.$$

Данная система базисных функций удовлетворяет условиям полноты и линейной независимости и позволяет наиболее просто и эффективно формулировать различные виды граничных условий на торцах тела традиционным для МКЭ способом, то есть путем исключения соответствующих уравнений. Для круговых замкнутых и призматических шарнирно опертых на торцах тел целесообразным является представление неизвестных перемещений 2π -периодическими по x^3 функциями, а узловых неизвестных - отрезками тригонометрического ряда Фурье:

$$u_{\alpha'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L u_{\alpha'(S_1, S_2)}^l \cos lx^3$$

$$u_{3'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L u_{3'(S_1, S_2)}^l \sin lx^3, \quad (1.6)$$

где $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$, $\alpha = 1, 2$,

$$u_{\alpha'(S_1, S_2)}^l = \mathcal{G} \int_{x^3} u_{\alpha'(S_1, S_2)} \cos lx^3 dx^3,$$

$$u_{3'(S_1, S_2)}^l = \mathcal{G} \int_{x^3} u_{3'(S_1, S_2)} \sin lx^3 dx^3,$$

$$\mathcal{G} = \begin{cases} 1/2\pi, & l = 0 \\ 1/\pi, & l > 0 \end{cases}.$$

Необходимо отметить, что, несмотря на ограниченные возможности использования представления перемещений (1.6), это позволяет оптимизировать структуру матрицы жесткости системы уравнений ПМКЭ и дополнительно уменьшить вычислительные затраты для решения соответствующих задач.

При выводе разрешающих соотношений ПМКЭ могут быть использованы физические значения деформаций

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad (1.7)$$

учитывающие переменность компонент метрического тензора в пределах поперечного сечения КЭ: $g_{ij} = g_{ij}(x^\alpha)$. Это позволяет существенно снизить ограничения на соотношение размеров сторон и неортогональность поперечного сечения КЭ.

Для учета изменения площади поперечного сечения тела (рис.1.1,в) вводится предположение об изменении определителя метрического тензора вдоль образующей по закону вида

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} \quad (1.8)$$

Отличительная особенность ПМКЭ – использование значительно более высоких порядков аппроксимаций перемещений по x^3 чем по x^1 и x^2 . В этом случае независимое разложение деформаций по x^3 , выполненное согласно МСКЭ, приводит к нарушению свойств ортонормированности базисных функций и, как следствие, ухудшает обусловленность матрицы системы разрешающих уравнений ПМКЭ. В то же время влияние на жесткие смещения коэффициентов разложения деформаций, которые согласно МСКЭ должны отбрасываться, при высоких порядках координатных функций значительно уменьшается. Поэтому для ПМКЭ целесообразно использование варианта МСКЭ, при котором разложение деформаций в ряд Маклорена осуществляется только по x^1 и x^2 :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}, \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}$ – коэффициенты разложения деформаций в ряд Маклорена, которые вычисляются как значения деформаций и их производных в центре КЭ:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha \neq i, j.$$

Вывод разрешающих соотношений ПМКЭ базируется на вариационном уравнении Лагранжа, которое для системы из M конечных элементов имеет вид:

$$\sum_{m=1}^M \delta W_m - \delta A = 0 \quad (1.10)$$

где W_m – вариация энергии деформации элемента m ; δA – вариация работы внешних сил. Опуская индекс m , запишем вариацию энергии деформации КЭ через напряжения и деформации в местной системе координат в векторной форме:

$$\delta W = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Связь между деформациями и коэффициентами разложения перемещений представим в виде:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=0}^L ([B] \{\varphi\}_l + [B_3] \{\varphi_3\}_l) \{U\}_l, \quad (1.10)$$

где $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{33} \right\}$;

$$\{U\}_l^T = \left\{ U_{l(-1,-1)}^T \quad U_{l(+1,-1)}^T \quad U_{l(-1,+1)}^T \quad U_{l(+1,+1)}^T \right\}$$

$$\{U\}_{l(s_1,s_2)}^T = \left\{ u_{1'(s_1,s_2)}^l \quad u_{2'(s_1,s_2)}^l \quad u_{3'(s_1,s_2)}^l \right\};$$

$$[B] = \left[\begin{matrix} [B]^{(-1,-1)} & [B]^{(1,-1)} & [B]^{(-1,1)} & [B]^{(1,1)} \end{matrix} \right].$$

Элементы подматриц типа $[B]^{(s_1,s_2)}$ вычисляются по результатам представления коэффици-

циентов разложения в (1.7) на основе (1ю3) с учетом (1.4) и (1.5) на основе группировки коэффициентов при значениях полиномов φ и их производных φ_3 .

Подставив (1.10) в (1.9), запишем вариацию энергии деформации элемента через коэффициенты разложения перемещений $\{U\}_l$ и узловые реакции $\{r\}_l$

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta \{U\}_l^T \{r\}_l$$

где

$$\{r\}_l = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \left([\varphi]_l^T [B]^T \{\sigma\} + [\varphi_3]_l^T [B_3]^T \{\sigma\} \right) \times \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.11)$$

Значения узловых реакций КЭ вычисляются на основе численного интегрирования. точек интегрирования.

Для вывода матрицы жесткости конечного элемента представим связь между приращениями напряжений $\{\Delta\sigma\}$ и приращениями деформаций $\{\Delta\varepsilon\}$ в виде:

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\} . \quad (1.12)$$

Элементы матрицы $[D]$ вычисляются с учетом зависимости механических характеристик материала от температуры и, при необходимости, уровня развития деформаций пластичности и ползучести в соответствии с принятыми законами состояния материала.

Опуская знак Δ , записываем выражение приращения вариации энергии элемента через деформации:

$$\delta W = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 . \quad (1.13)$$

Представляя деформации через коэффициенты разложения перемещений, получаем:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \delta \{U\}_l^T [k]_{ln} \{U\}_n , \quad (1.14)$$

где $[k]_{ln}$ – коэффициенты матрицы жесткости:

$$[k]_{ln} = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \left([\varphi]_l^T [B]^T [D] [B] [\varphi]_n + [\varphi]_l^T [B]^T [D] [B_3] [\varphi_3] + [\varphi_3]_l^T [B_3]^T [D] [B] [\varphi]_n + [\varphi_3]_l^T [B_3]^T [D] [B_3] [\varphi_3]_n \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 , \quad (1.15)$$

Числовые значения узловых реакций КЭ и коэффициентов матрицы жесткости вычисляются на основе численного интегрирования. При этом могут вводиться упрощающие допущения о постоянстве (усреднении) физико-механических и геометрических характеристик КЭ вдоль координатных осей.

Выведенные на основе МСКЭ соотношения для узловых реакций и коэффициентов матрицы жесткости универсального КЭ позволяют рассчитывать широкий круг массивных и тонкостенных пространственных конструкций сложной формы с учетом пластических свойств материала.

В случае использования в качестве базисных функций рядов Фурье матрицы $[B]$ и $[B_3]$ формируются на основе группировки коэффициентов при косинусах и синусах соответственно.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

2.1 Исходные соотношения.

При термоупругопластическом деформировании пространственных тел компоненты приращения полной деформации $d\varepsilon_{ij}$ могут быть представлены суммой приращений упругих деформаций $d\varepsilon_{ij}^e$, температурных деформаций $d\varepsilon_{ij}^T$ и деформаций пластичности $d\varepsilon_{ij}^p$, т.е.:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.1)$$

Компоненты тензора напряжений σ^{ij} определяются через компоненты тензора упругих деформаций в соответствии с обобщенным законом Гука (1.3). Температурные составляющие компонент тензора деформаций для изотропного материала определяются по формуле:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (2.2)$$

где $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$ – коэффициент линейного расширения материала, $\Delta T = T - T_0$ – приращение температуры в исследованной точке тела относительно его исходного состояния при $T = T_0$.

Представление температурных деформаций выполняется аналогично в терминах физических величин (1.7) и в соответствии с МСКЭ (1.9).

При пластическом деформировании связь между напряжениями и деформациями определяется соотношениями теории пластического течения для изотропно-упрочняющегося материала. При этом принимается, что материал пластически несжимаем и изменение его объема – линейно-упругое:

$$d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{ii}^e \quad (2.3)$$

Область упругих деформаций ограничена поверхностью текучести, уравнение которой в пространстве напряжений для изотропно упрочняющегося материала при условии текучести Мизеса конкретизируется в виде:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2 = 0, \quad (2.4)$$

где $s_{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma^{kl} g^{ij}$ – компоненты девиатора напряжений; δ_{kl} – символ Кронекера; $\tau_s = \tau_s(\chi)$ – предел текучести при

чистом сдвиге; $\chi = \int \frac{\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}}{\sqrt{3}}$ – параметр

Одквиста.

2.2 Алгоритмы решения систем уравнений ПМКЭ и вычисления напряжений.

При использовании неортогональной системы базисных функций или при анализе объектов с переменными вдоль координаты разложения физико-механическими и геометрическими характеристиками не удается достичь разделения переменных и представить матрицу системы разрешающих уравнений в виде диагональной матрицы, главная диагональ которой состоит из ненулевых блоков, а остальные элементы матрицы равны нулю. Для таких систем уравнений характерна блочная (клеточная) структура матрицы жесткости:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{00} & [K]_{0m} & [K]_{0L} \\ [K]_{l0} & [K]_{lm} & [K]_{lL} \\ [K]_{L0} & [K]_{Ll} & [K]_{LL} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

где L - число базисных функций.

Решение пространственных задач термоупругопластичности осуществляется шаговым алгоритмом по параметру нагрузки. На каждом шаге для решения систем нелинейных разрешающих уравнений ПМКЭ с матрицей вида (2.1) наиболее эффективным является алгоритм решения, основанный на методе блочных итераций с последовательной верхней релаксацией:

$$\{U\}_i^n = \{U\}_i^{n-1} + \omega [K]_{li}^{-1} (\{Q\}_i - \{R\}_i^{n-1}), \quad (2.6)$$

где $\{U\}_i^{n-1}, \{U\}_i^n$ - векторы коэффициентов разложения узловых перемещений на итерациях $n-1$ и n соответственно; ω - параметр релаксации ($1 \leq \omega \leq 2$); $[K]_{li}$ – матрица жесткости, компоненты которой определяются по формулам (1.16); $\{R\}_i^{n-1}$ – вектор амплитудных узловых реакций (1.11).

При определении узловых реакций $\{R_l\}_n^m$ в начале каждой итерации n шага m компоненты тензора напряжений σ_{ij} вычисляются по формуле:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n, \quad (2.7)$$

где $(\Delta\sigma_{ij})_n$ – приращения напряжений, которые определяются согласно закону Гука по величине приращения полных деформаций, вычисленных на основе $\{\Delta U_l\}_n^m$.

Действительные значения напряжений вычисляются по формуле:

$$(\overline{\sigma_{ij}})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m, \quad (2.8)$$

где $(\overline{s^{ij}})_n^m$ – компоненты девиатора напряжений, учитывающие приращение нелинейных деформаций.

При возникновении пластических деформаций (выполнении условия $\tau_i = \sqrt{s^{ij}s_{ij}}/2 \geq \tau_s$) величины $(\overline{s^{ij}})_n^m$ вычисляются в соответствии с принятым условием текучести по методике [38]:

$$(\overline{s^{ij}})_n^m = s_{ij} \frac{\tau_s}{\tau_i} \quad (2.9)$$

Условие сходимости итерационного процесса (2.6) на шаге m с учетом величин напряжений (2.2), (2.7) имеет вид:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta U_l\}_n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{U_l\}_n)^2, \quad (2.10)$$

где $\{\Delta U_l\}_n$ и $\{U_l\}_n$ – соответственно приращение и полные значения амплитудных перемещений на итерации n шага m ; ζ – предварительно заданный параметр точности решения системы нелинейных уравнений ПМКЭ ($\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$).

После выполнения условия сходимости итерационного процесса данным шагом нагружения вычисляются полные величины деформаций пластичности.

2.3. Результаты определения термоупругопластического напряженного состояния круговых и призматических тел.

Приведенные выше соотношения и алгоритмы позволяют проводить моделирование напряженно-деформированного состояния широкого класса объектов с учетом наличия полостей и вырезов (учитывается переменными физическими параметрами КЭ), переменной площади поперечного сечения (учитывая изменение геометрических параметров КЭ) (физически неоднородность), а также физически нелинейных задач.

Достоверность результатов ПМКЭ для неоднородных тел с переменными физическими параметрами подтверждена решением тестовой задачи о растяжении прямоугольной пластины с вырезом (рис.2.1, слева показана КЭ модель МКЭ, справа - ПМКЭ). Моделирование выреза выполнялось использованием условия $E_2 \rightarrow 0$ для призматического КЭ (рис.1.1). Распределения напряжений, полученные в характерных сечениях пластины и полости имеют вид, представленный на рис.2.2 и совпадают для МКЭ и ПМКЭ.

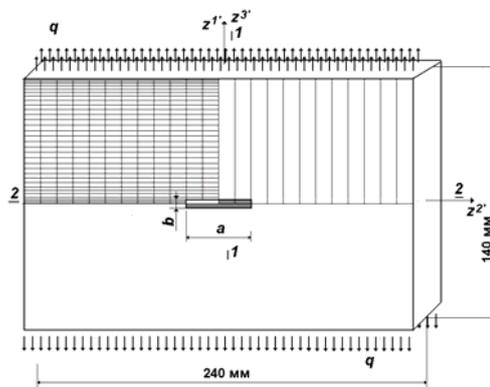


Рис.2.1. Тестовая задача о растяжении прямоугольной пластины с вырезом.

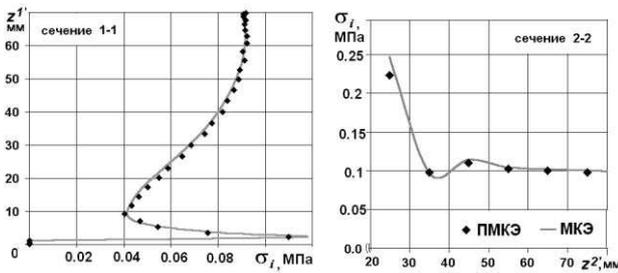


Рис.2.2. Распределения напряжений, полученные в характерных сечениях пластины при разных соотношениях размеров пластины и полости.

Для обоснования достоверности моделирования геометрически неоднородных тел рассмотрена модельная задача о растяжении стержня переменной толщины (рис.2.3). Изменение площади поперечного сечения стержня описывается линейным законом. Физико-механические характеристики материала: $E=1 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0$. Полученные МКЭ и ПМКЭ распределения перемещений U_{z^3} и напряжений $\sigma_{z^3 z^3}$ вдоль оси z^3 полностью совпадают.

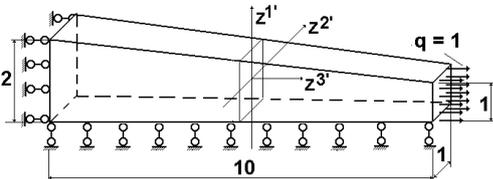


Рис.2.3. Модельная задача о растяжении стержня переменной толщины.

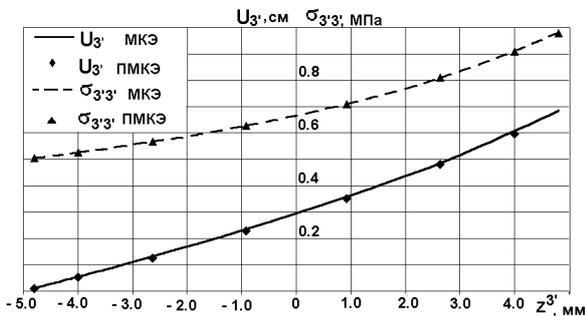


Рис.2.4. Распределения перемещений и напряжений, полученные по МКЭ и ПМКЭ.

Достоверность алгоритма решения упруго-пластических задач (2.7)-(2.9) подтверждена

моделированием деформирования толстостенной трубы и формирования в ней зон пластичности под действием нарастающего от 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН/м}^2$ внутреннего давления [36],: $E=1 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$ (рис.2.5, а). Границы зон разрушения при различных значениях нагрузки, а также величины параметров напряженно-деформированного состояния совпадают с приведенными в [36].

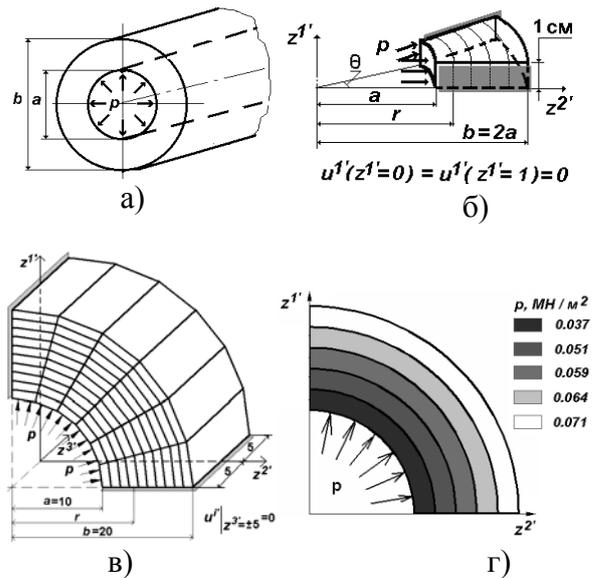


Рис.2.5. Моделирование деформирования толстостенной трубы и формирования зон пластичности.

Анализ достоверности термопластического деформирования проведен на примере задачи о деформировании куба (рис.2.6, $\alpha_T = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$, $E = 1.96 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 1/3$, [40]) при нагревании от $T_0 = 20^\circ \text{C}$ до неравномерного распределения температуры

$$T(z^1, z^2, z^3) = T_0 \cos \pi z^1 \cos \pi z^2 \cos \pi(z^3 + 2.5)$$

где $T_0 = 800^\circ \text{C}$.

На рис. 2.7 показано полученное ПМКЭ (сплошная линия) изменение компонент напряжений в зависимости от координаты z^1 при наличии деформаций пластичности вдоль линии $z^3 = -1.875 \text{ мм}$, $z^1 = z^2$, кото-

рое совпало с приведенным в [40] (штриховая линия).

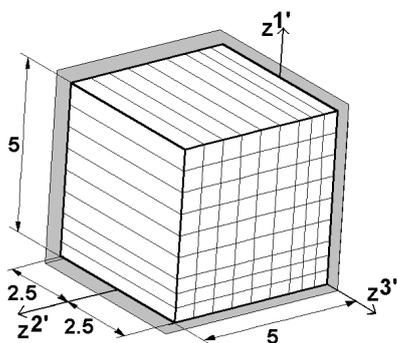


Рис. 2.6. Задача о деформировании куба.

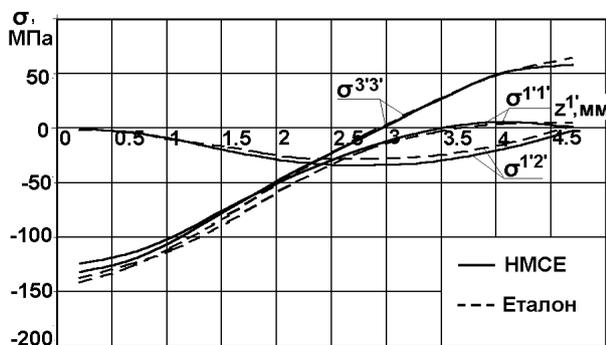


Рис. 2.7. Изменение компонент напряжений в зависимости от координаты (ПМКЭ).

Таким образом ПМКЭ позволяет достоверно определять напряженно-деформированное состояние пространственных тел в том числе с переменными физическими и геометрическими параметрами. Эти результаты часто являются основой для дальнейшего решения задач ползучести с учетом континуального разрушения и задач механики разрушения для тел с трещинами.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ И КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

3.1. Соотношения континуальной механики разрушения и вычисление напряжений при ползучести.

При длительном статическом нагружении в материале конструкций кроме деформаций

пластичности возникают деформации ползучести. Этот процесс сопровождается зарождением, развитием и слиянием пор, образованием зон разрушения, т.е. континуальным разрушением. В случае наличия деформаций ползучести приращение полных деформаций (2.1) должно быть дополнено слагаемым $d\varepsilon_{ij}^c$ – приращением деформаций ползучести, которое определяется на основе теории упрочнения:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij} \quad (3.1)$$

где

$$f_c = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_c(v_c, T, \xi_c^i, \omega)]^2 = 0 \quad (3.2)$$

– функция, ограничивающая поверхность ползучести,

$$v_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon_{ij}^c}$$

– параметр упрочнения Одквиста; T – температура;

$$\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_{ic}}{dt}$$

– интенсивность скоростей деформаций ползучести; ω – параметр повреждаемости материала Качанова-Работнова [31].

Выражение (3.2) может быть конкретизировано в виде:

$$\xi_c^i = \frac{B_1 \sigma_i^{n-(\alpha+1)}}{(v_c)^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m}. \quad (3.3)$$

Параметр повреждаемости материала ω определяется из кинетического уравнения, общий вид которого [16, 17]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (3.4)$$

где $B_1, C, n, m, r, q, \alpha, \beta$ – константы материала, σ_e – эквивалентное напряжение. Наиболее общей структурой выражения σ_e при изотропном характере накопления повреждаемости является

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (3.5)$$

где σ_1 – максимальное главное напряжение; $I_1(\sigma_{ij}), I_2(s_{ij})$ – первый и второй инварианты тензора σ_{ij} и девиатора s_{ij} напряжений соответственно; α, β, γ – константы материала, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. [17].

Моделирование эволюционного процесса деформирования с учетом накопления деформаций ползучести и повреждаемости осуществляется шаговым методом по времени. На каждом шаге решение системы нелинейных уравнений осуществляется в соответствии с описанным выше алгоритмом (2.2), а для вычисления напряжений используются формулы (2.7)–(2.8). При этом на первом шаге решения задачи принимается $t = 0$, что позволяет получить упругое (или упругопластическое) распределение напряжений в момент приложения нагрузки при отсутствии деформаций ползучести. На последующих шагах ($t > 0$) девиатор напряжений в (2.8) приводится в соответствие с величинами деформаций ползучести по формулам:

$$s_{ij}^* = s_{ij} - G_1 \Delta \varepsilon_{ij}^c, \quad \Delta \varepsilon_{ij}^c = \xi_{ij}^c \Delta t, \quad (3.6)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ – величина приращения деформаций ползучести на текущем шаге;

$$G_1 = E / (1 - 2\mu);$$

$$\xi_{kj}^c = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{kj}}{\sigma_i}$$

– компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; Δt – величина шага по времени.

В общем случае величина Δt зависит от характера напряженно-деформированного состояния и характеристик ползучести материала. Проведение исследований сходимости получаемых решений при последовательном уменьшении величины Δt является обязательным для получения достоверных результатов.

По завершении итерационного процесса на шаге m проводится вычисление значений приращений деформаций ползучести $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m$ и повреждаемости материала $(\Delta \omega)_m$ с использованием напряжений, полученных на последней итерации шага, и соответствующих накопленных к концу предыдущего шага величин $(\varepsilon_{ij}^c)_{m-1}$ и ω_{m-1} :

$$(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m, \quad (3.7)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_m \Delta t_m. \quad (3.8)$$

В конце каждого шага для всех КЭ осуществляется проверка условия начала локального разрушения $\omega > \omega_{кр}$, где $\omega_{кр}$ – критическое значение параметра повреждаемости. При численном решении задач принимается $\omega_{кр} \approx 1$ ($\omega_{кр} = 0.9 \dots 0.99$) [14, 16, 17, 31].

Момент времени, когда в некоторой точке тела с координатами (z^{1*}, z^{2*}, z^{3*}) параметр повреждаемости достигает критического значения $\omega_{кр}$, фиксируется как момент появления начальной зоны континуального разрушения (рис.3.1,а). В окрестности данной точки вводится полость объемом V_0 (рис.3.1,б). Величина V_0 в поперечном сечении тела определяется размером КЭ, а в направлении образующей – числом гармоник, используемых для аппроксимации напряженно-деформированного состояния.

Дальнейшее решение задачи ползучести проводится в соответствии с алгоритмом (2.6)-(2.8), (3.6)-(3.8) при наличии полости объемом V_0 до достижения условия $\omega > \omega_{кр}$ в других точках конструкции, к которым применяется процедура введения полости V_0 . Процесс заканчивается при достижении полостью объема V^* (рис.3.1, в).

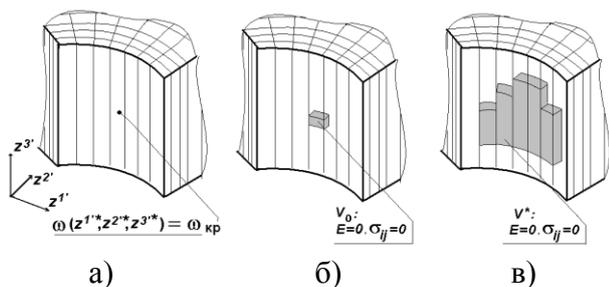


Рис. 3.1. Зоны непрерывного разрушения.

3.2. Достоверность и практическое применение решения задач ползучести и непрерывного разрушения ПМКЭ.

В качестве примера апробация алгоритмов решения задач ползучести и непрерывного разрушения рассмотрена, в частности, задача о деформировании толстостенной трубы [14], расчетная схема и дискретные модели аналогичны показанным на рис.2.5,а,б. На первом этапе проведено моделирование накопления повреждаемости. Показано, что процесс деформирования сопровождается существенным перераспределением напряжений и повреждаемости по толщине стенки трубы (рис. 3.2., врезка), а зона разрушения образуется на внешней поверхности трубы ($\omega \approx 1$ при $r=b$, рис.3.2). Дальнейшее решение задачи позволило провести моделирование развития зоны разрушения радиусом r^* примерно до половины стенки трубы (рис.3.3). На всех этапах решения задачи значения повреждаемости (рис.3.2) и напряжений (рис.3.3), полученные ПМКЭ, совпали с приведенными в работе Дж.Бойла [14].

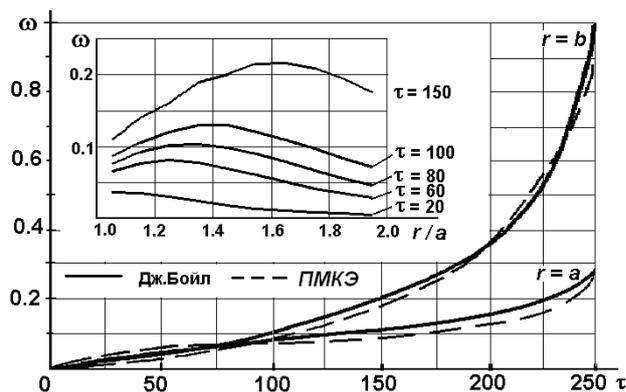


Рис.3.2. Перераспределение напряжений и повреждаемости по толщине стенки трубы; образование зоны разрушения.

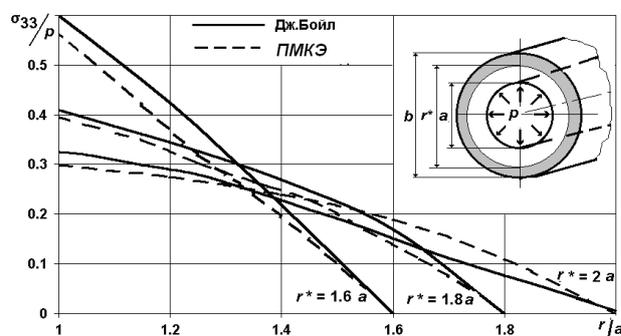


Рис. 3.3. Напряжения, полученные по ПМКЭ.

Изложенные алгоритмы решения задач ползучести и непрерывного разрушения позволяют проводить определение расчетного ресурса до начала локального разрушения и дополнительного ресурса, связанного с развитием зоны разрушения в пространственных телах, условия эксплуатации которых характеризуются длительными силовыми воздействиями при высоких температурах – корпусные детали, роторы, лопатки турбин и их соединения с дисками [4, 5].

Лопатка газотурбинной установки представляет собой пространственное тело сложной конфигурации, обусловленной переменной площадью поперечного сечения и наличием закручивания относительно вертикальной оси (рис.3.4,а). Для проведения расчета был выделен фрагмент пера лопатки, в котором происходит наиболее активное накопление деформаций ползучести. Середина

фрагмента находится на расстоянии R^* от оси вращения лопатки.

Дискретная модель фрагмента лопатки, полученная с использованием неоднородных призматических КЭ (рис.3.4,б). Распределения напряжений по высоте фрагмента лопатки, полученные на основе ПМКЭ при упругом деформировании материала, совпадают с результатами, полученными на основе традиционного трехмерного метода конечных элементов с учетом реальной переменной геометрии фрагмента лопатки.

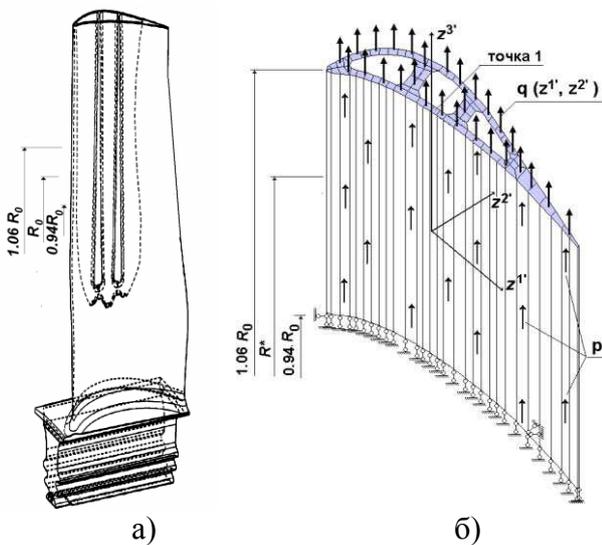


Рис. 3.4. Лопатка газотурбинной установки.

При решении задачи проведены исследования сходимости результатов при последовательном увеличении параметров дискретной модели. Так, увеличение числа гармоник с 9 до 30 позволило уточнить время до начала разрушения t_0^* на 15%. В то же время последовательное сгущение исходной КЭ сетки в поперечном сечении (рис.3.5) в два, четыре и восемь раз как по толщине, так и вдоль стенки лопатки (на рис.3.5 эти сетки обозначены «2X», «4X», «8X», где число соответствует количеству КЭ по толщине стенки лопатки) не существенно повлияло на величину t^* . Такой результат объясняется существенной локализацией зоны максимальных значений повреждаемости по высоте лопатки. Начальная зона разрушения формируется

в момент времени t^* в точке 1 поперечного сечения лопатки, расположенного на расстоянии $1,01 R^*$ от оси вращения.

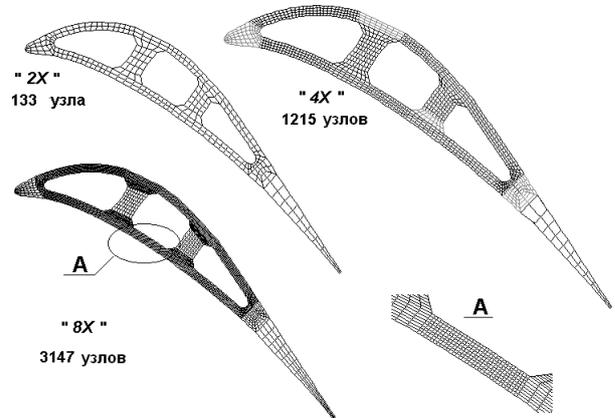


Рис. 3.5. Аппроксимирующие сетки.

Результаты дальнейшего расчета показали, что характерный размер зоны в плане на всех этапах ее роста (рис.3.6) существенно превышает ее толщину (размер вдоль оси лопатки), что указывает на формирование в лопатке трещиноподобного дефекта.

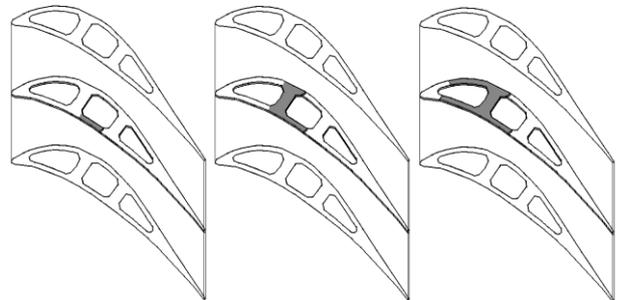


Рис. 3.6. Зона разрушения.

Величина дополнительного ресурса, связанного с развитием зоны разрушения, не превышает 5% от величины ресурса t^* до формирования начальной зоны разрушения. Необходимо отметить, что описанный алгоритм решения задач континуального разрушения также апробирован и использован для определения ресурса пространственных тел при циклическом деформировании [30, 41, 42].

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ С ТРЕЩИНАМИ

4.1 Исходные соотношения.

При моделировании деформирования пространственных тел с трещинами на основе ПМКЭ в зависимости от расположения фронта трещин относительно образующей различают тела с поперечными (рис.4.1,а) продольными (рис.4.1,б) трещинами.

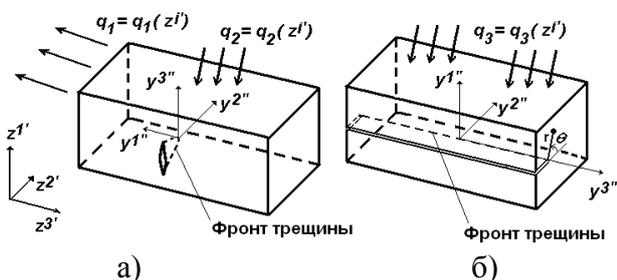


Рис. 4.1. Тела с трещинами.

При упругом деформировании напряжения и перемещения в окрестности вершины трещины характеризуются параметрами K_I, K_{II}, K_{III} – коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) и связаны с ними соотношениями вида [29]:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_k &= f(K_k, r, \sin \theta, \cos \theta), \\ (u_j)_k &= f(K_k, r, \sin \theta, \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где r, θ – радиус-вектор и угол, описывающие расположение точки, где вычисляются напряжения и перемещения, относительно вершины трещины

В случае упругопластического деформирования для оценки напряженного состояния используется выражение J-интеграла Черепанова-Райса [1]:

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} (W n_t - \bar{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot (\nabla u)^T \bar{t}) dF, \quad (4.2)$$

где W – величина полной энергии деформи-

рования,

$$W = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon},$$

$\bar{\sigma}$ – тензор напряжений, $\bar{\varepsilon}$ – тензор деформаций, \bar{n} – внешняя нормаль к поверхности интегрирования F ; \bar{t} – вектор, определяющий направление развития трещины; ∇u – градиенты перемещений; F – произвольная поверхность интегрирования, охватывающая вершину трещины.

Величины КИН или J-интеграла вычисляются по результатам численного определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. При этом при построении дискретной модели ПМКЭ предусматривается специальная зона сгущения сетки в окрестности вершины трещины. Вычисление КИН осуществляется прямым методом на основе соотношений (4.1) по известным величинам напряжений и перемещений [6, 29], для вычисления J-интеграла используется «метод напряжений», основанный на непосредственной реализации формулы (4.2) в дискретной модели ПМКЭ, или специально разработанный авторами «метод реакций», основанный на представлении J-интеграла через величины узловых реакций и перемещений КЭ [6].

4.2 Результаты определения параметров механики разрушения.

На основе разработанного алгоритма вычисления КИН прямым методом было проведено определение распределения КИН вдоль фронта трещины в лопатке ГТУ (рис.3.4,а). При этом использована аналогичная приведенной на рис.3.4,б дискретная модель, отличающаяся наличием привершинной зоны сгущения сетки (рис.4.2). Результаты вычисления КИН (вследствие симметрии – для половины эллиптического фронта трещины) с учетом сходимости в зависимости от колитчсива КЭ вдоль фронта (12 КЭ – квадраты и 24 КЭ – сплошная линия) приведены на рис. 4.3.

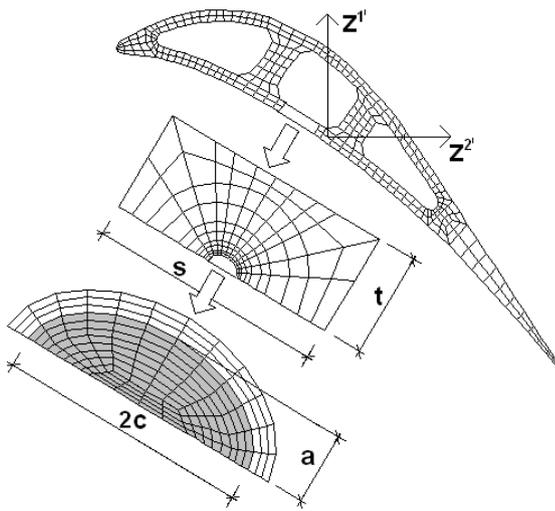


Рис.4.2. Дискретная модель.

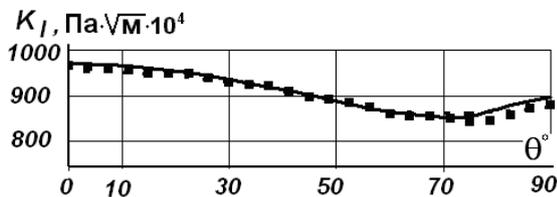


Рис. 4.3. Результаты вычисления КИН.

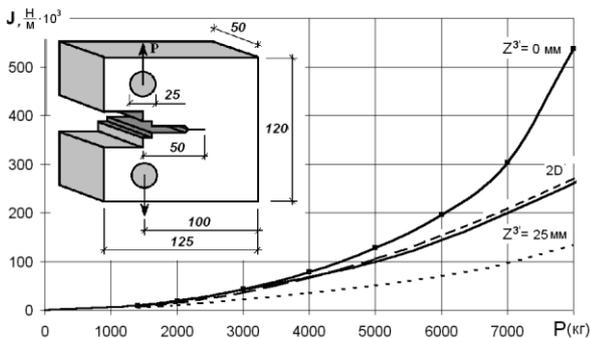


Рис. 4.3. Зависимость J-интеграла от приложенной нагрузки в компактном образце.

С использованием «метода реакций» было проведено вычисление зависимости J-интеграла от приложенной нагрузки в компактном образце (рис.4.4, врезка), который используется для экспериментального определения трещиностойкости материалов. Традиционно расчет компактного образца проводится в условиях плоской деформации. Результат такого расчета совпал с приведенным в [29] (сплошная и штриховая линии на

рис. 4.4).

Расчет в пространственной постановке на основе ПМКЭ (дискретная модель приведена на рис. 4.5) показал существенные отличия величин J-интеграла в середине образца (при $z^3=0$) и на его поверхности (при $z^3=25$ мм), как между собой, так и от результатов расчета в двумерной постановке в условиях плоской деформации.

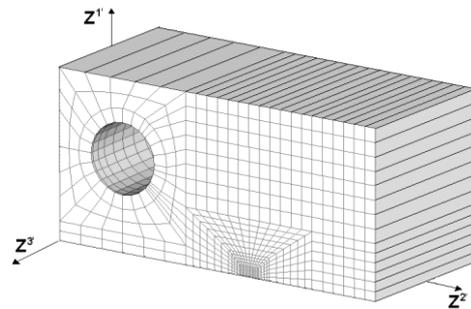


Рис.4.5. Дискретная модель.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

В процессе эксплуатации сооружения и оборудование подвергаются воздействию различных динамических нагрузок. К ним относятся ветровые и подвижные нагрузки, периодические вибрационные или ударные воздействия на несущие конструкции, действия взрывов, вызывают резкое изменение давления на поверхности сооружения, сейсмические колебания, которые вызывают вынужденные сложные перемещения элементов зданий и т. д.

Вывод разрешающих соотношений проводится на основе уравнения движения в виде вариационного принципа Гамильтона [21]:

$$\delta T + \delta W - \delta A = 0 \quad (5.1)$$

де δW - вариация потенциальной энергии деформации δA - вариация работы внутренних и внешних сил; δT - вариация кинетической энергии.

При общем подходе вариация кинетической энергии КЭ в местной системе координат описывается соотношением:

$$\delta T = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (5.2)$$

исходя из которого, можно получить выражения для отдельных важных случаев, определяемых параметрами нагрузки, а именно законом ее изменения, уровнем интенсивности, скорости роста и продолжительностью во времени.

5.1. Периодические колебания пространственных тел.

Согласно процесса стационарных колебаний неоднородного изотропного пространственного (осесимметричного, циклически симметричного или призматического) тела под действием системы произвольно распределенных в пространстве периодических внешних нагрузок:

$$\begin{aligned} f^{j'} &= \sum_{r=1}^R f_r^{j'} \sin \omega_r t, \quad \omega_r = \frac{r\pi}{T}, \\ p^{j'} &= \sum_{r=1}^R p_r^{j'} \sin \omega_r t, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где T - период действия нагрузки; R - число гармоник, необходимое для описания распределения нагрузок в интервале $[t_0, t_1]$. Можно ожидать, что реакция системы также должна удовлетворять периодическому закону:

$$u_{i'} = \sum_{s=1}^S u_{i'}^s \sin \omega_s t \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_{ij} = \sum_{s=1}^S \tilde{\varepsilon}_{ij}^s \sin \omega_s t \quad (5.4)$$

Представив перемещения, внешние нагрузки и деформации известными периодическими функциями временной координаты (5.3) и (5.4), и выполнив интегрирование с учетом ортогональности тригонометрических функций на интервале $[t_0, t_1]$, в случае колебаний упругих тел, когда зависимость между напряжениями и деформациями описывается линейным законом, и как следствие

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sum_{s=1}^S \tilde{\sigma}^{ij,s} \sin \omega_s t,$$

решения пространственной задачи динамики сводится к поиску ряда квазистатических периодических решений для каждой гармоники в разложении заданных и неизвестных функций по временной координате с учетом инерционных сил:

$$\delta T = -\omega_p^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_{i'}^{i'} \delta u_{i'}^p \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.5)$$

Выразив перемещения узлов элемента вдоль окружной координаты в соответствии с (1.6), получим амплитудную матрицу масс $[\overset{\circ}{m}]_{lm}$ неоднородного вдоль x^3 КЭ, компоненты которой вычисляются по формуле:

$$[\overset{\circ}{m}]_{lm} = -\omega_s^2 H_I \int_{x^3} \rho [\overset{\circ}{\varphi}]_{l'}^T [\overset{\circ}{g}] [\overset{\circ}{\varphi}]_m \sqrt{g} dx^3 \quad (5.6)$$

В общем случае при вычислении интеграла по плоскости поперечного сечения КЭ

$$H_I = \prod_{n=1}^2 [(S_n P_n + 3)/144].$$

Так как при формировании коэффициентов матрицы жесткости участвуют полиномы более низкой степени (первые производные), чем при формировании коэффициентов матрицы масс и, следовательно, сходимость численного решения определяется сходимостью потенциальной энергии деформации, то целесообразно уменьшить степень полиномов, которые используются при вычислении коэффициентов матрицы масс. Используя предположение о осреднения массы у узла и учитывая, что каждая узловая масса соответствует части массы элементов, примыкающих к данному узлу можем записать $H_I = 1/4$. В этом случае матрицу масс называют "несогласованной".

Для проверки достоверности рассмотрена задача периодических колебаний круглой пластины (рис. 5.1), защемленной по краям, имеющей аналитическое решение. Исходные данные: $R = 1$ м, $h = 0.2$ м, $E = 2 \times 10^4$ МПа, $\rho = 2400$ кг/м³, $\nu = 0.17$, $P = P_0 \sin pt$, $P_0 = 10^3$, $p = 50$.

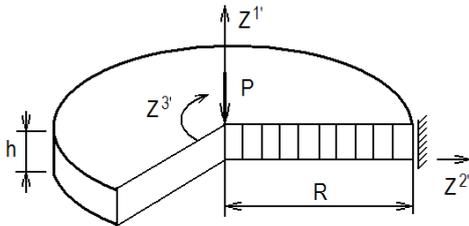


Рис. 5.1. Задача периодических колебаний круглой пластины.

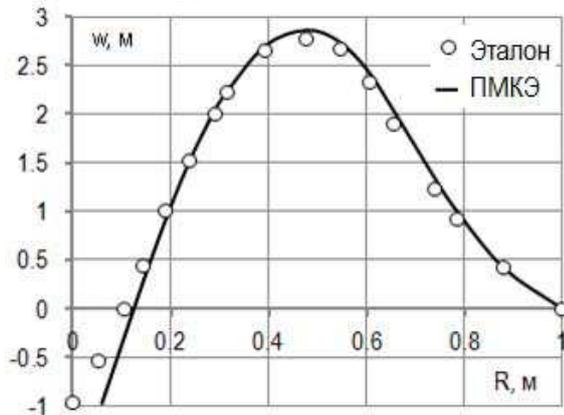


Рис. 5.2. Распределения амплитудных значений вертикальных перемещений вдоль радиуса пластины.

На рис. 5.2 приведены распределения амплитудных значений вертикальных перемещений вдоль радиуса пластины. Кружками представлены эталонное решение [27], сплошной линией - решение полученный на основе предложенной методики.

5.2. Деформирование тел под действием подвижной нагрузки.

Рассматриваются стали процессы при постоянной скорости движения нагрузки V_q , с фронтом которого связывают подвижную базовую систему координат $y^{i'}$ (рис. 5.3).

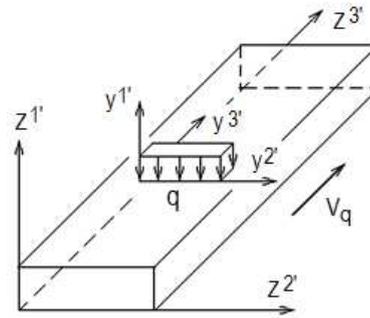


Рис. 5.3. Подвижная базовая система координат.

Связь между подвижной и неподвижной системами координат имеет вид:

$$y^{3'} = z^{3'} - V_q t, \quad y^{\alpha'} = z^{\alpha'}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.7)$$

Тогда

$$\frac{\partial z^{i'}}{\partial y^{j'}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \frac{\partial z^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ V_q, & i = 3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ -V_q, & i = 3 \end{cases}, \quad \frac{\partial t}{\partial t} = 1 \quad (5.8)$$

Исходя из (5.8) получим:

$$\frac{\partial}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial}{\partial y^{i'}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - V_q \frac{\partial}{\partial y^{3'}} \quad (5.9)$$

На основе положения о стационарности процесса в движущейся системе координат и используя соотношение (5.2) в качестве исходного для вариации кинетической энергии, получим:

$$\delta T = V_q^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \frac{\partial u^{i'}}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_{i'}}{\partial y^{3'}} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.10)$$

Компоненты матрицы жесткости вычисляются по формуле:

$$[m]_{lm} = \frac{1}{4} V_q^2 H_M^l \int_{x^3} \rho [\varphi]_l^T [\tilde{g}] [\varphi]_m \sqrt{g} dx^3 \quad (5.11)$$

Коэффициент перехода к подвижной системе координат H_M^l имеет вид:

$$H_M^l = - \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^3} \frac{l\pi}{2} \right)^2 \quad (5.12)$$

При перемещении нагрузки с постоянной скоростью $V_q = const$, формирование и триангуляризация эффективной глобальной матрицы задачи осуществляются один раз на первом шаге по времени. Для решения задачи с переменной скоростью движения нагрузки процедуры формирования и триангуляризации эффективных амплитудных подматриц необходимо выполнять при каждой смене ведущего параметра.

Рассмотрены динамическое деформирования полосы прямоугольного сечения под действием силы P , движущейся с постепенной скоростью (рис. 5.4).

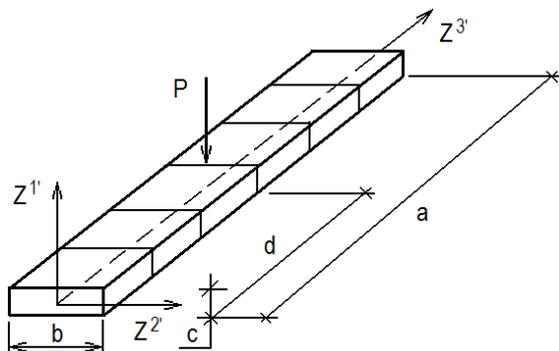


Рис. 5.4. Полоса прямоугольного сечения под действием силы, движущейся с постоянной скоростью.

Исходные данные: $a = 10$ дм, $b = 0.1$ дм, $c = 0.03$ дм, $d = 0.5a$, $P = 1$ Н, $E = 1.85 \times 10^9$ Н/дм², $\rho = 7.8$ кг/дм³, $\nu = 0.3$. Полученные эпюры прогиба балки в момент времени, когда сила достигает середины своего пути для различных скоростей передви-

жения фронта нагрузки. Во всех случаях сохраняется хорошая согласованность результатов с аналитическими решениями [37] в пределах $1 \div 2\%$ (рис. 5.5).

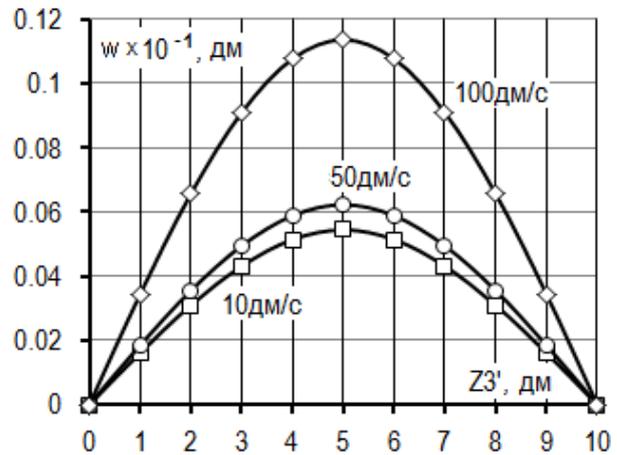


Рис. 5.5. Сопоставление результатов расчета с аналитическими решениями.

5.3. Свободные и вынужденные колебания пространственных тел.

Считается, что в процессе свободных колебаний изменение во времени параметров напряженно-деформированного состояния системы определяется гармоничным законом:

$$u_i = \sum_{r=1}^{\Omega} \varphi_i^r \cos \theta_r t \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_{ij} = \sum_{r=1}^{\Omega} \tilde{\varepsilon}_{ij}^r \cos \theta_r t \quad (5.13)$$

В случае колебаний упругих тел:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sum_{r=1}^{\Omega} \tilde{\sigma}^{ij,r} \cos \theta_r t, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.14)$$

где $\tilde{\sigma}^{ij,r}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^r$ - амплитуды колебаний физических напряжений и деформаций r -ой собственной формы; φ_i^r , θ_r - r -я собственной формы и частота свободных колебаний твердого тела.

Исходя из (5.14), вариация кинетической энергии конечного элемента в местной системе координат (1.39) примет вид:

$$\delta T = -\theta_r^2 \int \int \int_{x^1, x^2, x^3} \rho u_r^{i'} \delta u_r^{i'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.15)$$

Амплитудная матрица масс $[m]_{lm}$ неоднородного по x^3 КЭ вычисляется по формуле:

$$[m]_{lm} = -\frac{1}{4} \theta_p^2 \int_{x^3} \rho [\varphi]_l^T [\tilde{g}] [\varphi]_m \sqrt{g} dx^3 \quad (5.16)$$

Рассмотрены собственные колебания однородной цилиндрической оболочки, защемленной по торцам. Радиус срединной поверхности оболочки $R = 7.6 \times 10^{-2}$ м, высота $L = 0.305$ м, толщина стенки $h = 2.5 \times 10^{-4}$ м, $E = 1.96 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7.7 \times 10^3$ кг/м³.

На рис. 5.6 показаны первые две формы собственных колебаний цилиндрической оболочки. Вычисленная минимальная частота собственных колебаний $f_1 = 531$ практически совпадает с аналитическим решением [13] $f_1 = 533$.

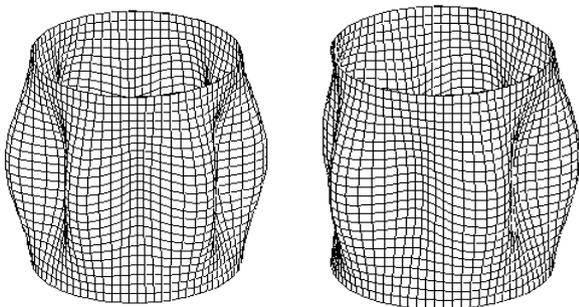


Рис. 5.6. Первые две формы собственных колебаний цилиндрической оболочки.

Решение задачи о вынужденных колебаниях конструкции представляется на основе разложения решения по собственным формам колебаний и интеграла Дюамеля адаптированных для амплитудных подсистем ПМКЭ. Рассмотрены колебания толстостенного стального однородного бесконечного цилиндра ($E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³,) под действием равномерно распределенного по части внешней по-

верхности давления с интенсивностью $q_a = 1$ Па. Схема нагрузки и результаты исследований моделей МКЭ и ПМКЭ показаны на рис. 5.7, где $R_{вн} = 1$ м, $R_{306} = 2$ м, $\alpha = 45^\circ$,

$$q_a = \begin{cases} 0, & \alpha < 45^\circ \\ 1, & \alpha \geq 45^\circ \end{cases} \text{ Па.}$$

По толщине модели удерживали 15 КЭ, по кольцевой координате 72 КЭ Шаг интегрирования во времени составлял $\Delta t = 0.4 \times 10^{-4}$ сек.

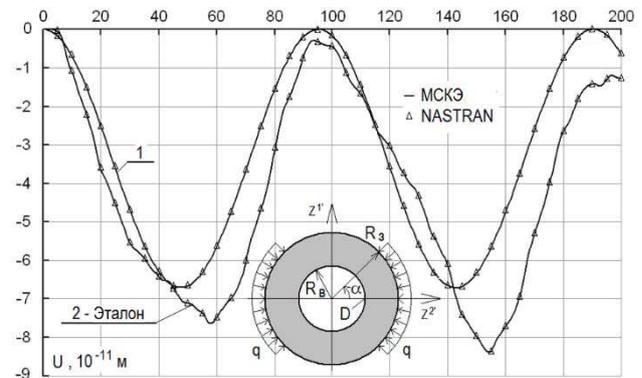


Рис. 5.7. Схема нагрузки и результаты исследований моделей МКЭ и ПМКЭ.

За эталонные приняты соответствующие значения перемещений при использовании для аппроксимации длины дуги цилиндра углом 90 градусов 25 КЭ или членами ряда Фурье. При решении задачи на вынужденные колебания в плоскости меридионального сечения было зафиксировано 15 КЭ. Приведенные графики свидетельствуют о примерно одинаковых погрешности методов.

5.4. Деформирование тел под действием импульсной нагрузки.

Наиболее трудоемкой задачей динамики, с точки зрения описания динамической реакции системы, бесспорно, является описание изменения параметров напряженно-деформированного состояния во времени под действием импульсных воздействий. Попытки упрощения расчета, например с

помощью разложения решения по собственным формам и частотами свободных колебаний, не дают ожидаемого результата, поскольку исследования таких процессов требует предварительного вычисления подавляющего большинства полного спектра частот и форм конструкции, что в целом нивелирует эффективность подхода. Кроме того, изменение зон контактного взаимодействия или появление и распространение областей нелинейной работы материала изменяют свойства изучаемого объекта, что в свою очередь требует пересмотра установленных интегральных характеристик конструкции, то есть циклического решения начальных задач.

Поэтому для решения поставленной проблемы используется общая формулировка вариации кинетической энергии конечного элемента с введением дополнительных гипотез, по закону изменения ускорения точек элементарного объема тела $\ddot{u}^k(t)$ во времени:

$$\delta T = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^k(t) \delta u_k(t) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.17)$$

Амплитудная "несогласованная" матрица масс вычисляется по формуле:

$$[m]_{lm} = \frac{1}{4} \int_{x^3} \rho [\varphi]_l^T [\tilde{g}] [\varphi]_m \sqrt{g} dx^3 \quad (5.18)$$

Базовыми для интегрирования уравнений движения принимаются методы Ньюмарка и θ -Вильсона, модифицированных для амплитудных подсистем ПМКЭ.

Для обоснования достоверности НМСЕ рассматривалась задача упруго деформирования толстостенного стального цилиндра с двумя вырезами на внутренней поверхности под действием равномерно распределенного внешнего давления (рис. 5.8). Интенсивность внешнего давления $q_a = 0.75 \times 10^8$ Па. Нагрузка прикладывается мгновенно и сохраняется постоянным на протяжении всего

временного интервала.

При исследовании объектов с учетом необратимых пластических деформаций, как правило, наибольший интерес представляет анализ образования и распространения зон нелинейной работы материала, а также уровне интенсивностей пластических деформаций.

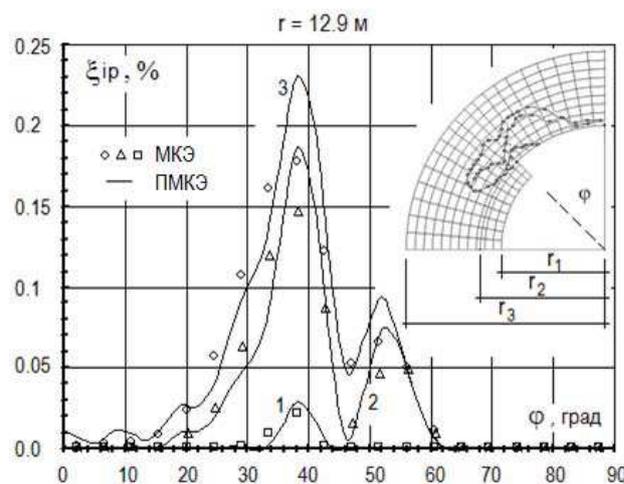


Рис. 5.8. Задача упруго деформирования толстостенного стального цилиндра с двумя вырезами на внутренней поверхности под действием равномерно распределенного внешнего давления.

Развитие пластических деформаций во времени показано на рис. 5.8 (приведены интенсивности пластических деформаций 1-0.006 с, 2-0.008 с, 3-0.01 с.) Необратимые деформации захватывают наибольший объем материала в области $Z^3 \in [25^\circ ; 45^\circ]$. Как видно из приведенных данных, на всем интервале нагрузки наблюдается количественное и качественное согласование результатов МКЭ и ПМКЭ.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе представлен ряд методик решения задач нелинейной механики сплошной среды, связанных с учетом пластического деформирования, ползучести, континуального и дискретного разрушения пространственных объек-

тов, а также задач динамического деформирования. Широкие возможности разработанного подхода в отношении классов решаемых задач наглядно иллюстрируются тестовыми задачами результатами моделирования поведения реальных объектов. Следует особо подчеркнуть, что обобщение ПМКЭ на неоднородные криволинейные и призматические тела с произвольными граничными условиями, выполненное на основе использования моментной схемы конечных элементов МКЭ, выбора почти ортонормированных базисных функций и блочных алгоритмов решения систем линейных и нелинейных уравнений высоких порядков, обеспечивает высокую эффективность ПМКЭ по сравнению с традиционным вариантом МКЭ, позволяющую существенно сократить объемы вычислений, связанных с решениями пространственных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлури С. Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. Баженов В.А., Гулярь А.И. Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика – 2003. – Т.39. – №4. – С. 34–71.
3. Баженов В.А., Гулярь О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. – Київ, ВІПОЛ, 2005. – 376 с.
4. Баженов В.А., Гулярь О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл. – Київ, Каравела, 2012. – 236 с.
5. Баженов В.А., Гулярь О.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П. Решение пространственных задач термовязкопластичности на основе ПМКЭ. Прикладная механіка. – №12. – 2009. – С.60-75.
6. Баженов В.А., Гулярь А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Максимюк Ю.В. Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе ПМКЭ Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения // «Проблемы прочности»– К.: НАН Украины, ИПП НАНУ им.Г.С.Писаренко. – №1. – 2011. – С.24-33. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ. // «Проблемы прочности»– К.: НАН Украины, ИПП НАНУ им.Г.С.Писаренко. – №2. – 2011. – С.42-51.
7. Баженов В.А., Гулярь О.И., Сахаров О.С., Солодей И.И. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ, Каравела, 2014. – 242 с.
8. Баженов В.А., Гулярь А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993. – 376 с.
9. Баженов В.А., Гулярь А.И., Солодей И.И. Численное моделирование динамических процессов упруго-пластического взаимодействия неоднородных пространственных тел на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Расчетные соотношения полуаналитического метода конечных элементов и алгоритмы исследования переходных процессов динамического деформирования неоднородных призматических тел и тел вращения // «Проблемы прочности» –№5. – 2013. – С. 13-27. Сообщение 2. Исследование динамического деформирования пространственных конструкций сложной формы // «Проблемы прочности» // №1. – 2014. – С. 31-38.
10. Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкрыль О.О., Богдан Д. В Неоднорідний призматичний скінченний елемент зі

- змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензора Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 85. – С.3–22.
11. **Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.** Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика, –2002, №6. – С.3–40.
 12. **Блох В.И.** Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьковск. гос. университета, 1964. – 484 с.
 13. **Бобырь В.И.** Несимметричное деформирование тел вращения при простых процессах нагружения / Бобырь В.И., Ищенко Д.А. // Киев, 1985.- 3с.- Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5531-Деп.
 14. **Бойл Дж., Спенс Дж.** Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
 15. **Бреславский Д.В.** Термоползучесть анизотропных тел вращения и математическое обеспечение расчетов практических задач на ЭВМ // Динамика и прочность машин. – Х.: 1986. – Вып 43. – С. 22–25.
 16. **Голуб В.П.** Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31–66.
 17. **Голуб В.П.** Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Прикладная механика.– 1993. – № 10. – С. 37–49.
 18. **Гонтаровский П.П., Руденко Е.К.** Расчет напряженно-деформированного состояния тел вращения МКЭ при неосесимметричной нагрузке. // Пробл. машиностроения.– 1988. –№ 29. – С. 36–41.
 19. **Гонтаровский П.П., Руденко Е.К.** Расчет напряженно-деформированного состояния тел вращения МКЭ при неосесимметричной нагрузке. // Пробл. машиностроения.– 1988. –№ 29. – С. 36–41.
 20. **Гуляр А.И., Топор А.Г., Солодей И.И.** Развитие ПМКЭ для исследования динамического деформирования неоднородных тел вращения при импульсном нагружении // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Вып. 63. – 1997. – С. 103–114.
 21. **Друккер Д.** Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.– М.: ИП, 1959.– № 6.
 22. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1986. –318 с.
 23. **Золотов А.Б., Акимов А.А.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложение в строительстве –М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
 24. **Золотов А.Б., Акимов А.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики / Монография. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
 25. **Кантор Б.Я.** Нелинейные задачи теории неоднородных упругих оболочек. – К.: Наук. думка, 1971. – 136 с.
 26. **Кантор Б.Я., Гнитко В.И.** Об одном методе изучения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций вращения, циклически неоднородных в окружном направлении – Харьков: ИПМаш АН УССР, 1982. – 20 с.
 27. **Коренев В.Г.** Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях – М.: Физматлит, 1960. – 458с.
 28. **Монахов И.И.** Использование полуаналитического варианта МКЭ для расчета трехслойных конструкций // Тр. Моск. ин-та инженеров ж.д. транспорта. – 1984.– №749. –С.61–65.
 29. **Морозов Е.М., Никишков Г.П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.
 30. **Пискунов С.О, Мицюк С.В.** Визначення ресурсу просторових тіл обертання змінної площі поперечного перерізу з початковою тріщиною Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С.86–97.

31. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 732 с.
32. **Руденко Е.К.** Ползучесть неосесимметрично нагруженных тел вращения: Препр. / АН УССР. Институт проблем машиностроения. – Харьков: 1990. – 48 с.
33. **Савченко В.Г.** Численное исследование неосесимметричного термонапряженного состояния составных тел вращения с учетом повреждения материала // Прикл. механика – 2004. – Т.40. – №3. – С.45–54.
34. **Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н.** Методы исследования термовязкопластического деформирования трехмерных элементов конструкций // Прикл. механика. – 1993. – № 9. – С. 3–18.
35. **Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В.** Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
36. **Соколовский В.Н.** Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 214 с.
37. **Тимошенко С.П.** Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975 – 704 с.
38. **Уилкинс М.Л.** Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
39. **Шапошников Н.Н., Монахов И.И.** Использование полуаналитического варианта МКЭ для расчета конструкций. // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – Вып. 22. – С. 221–239.
40. **Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.** Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 327 с.
41. **Vazhenov V.A., Gulyar O.I., Pyskunov S.O.** An estimation of residual lifetime of spatial structural elements under continual fracture condition // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2014. – Вип. 92.- С.50-61.
42. **Vazhenov V.A., Pyskunov S.** A finite element technique and results of continual

fracture process modeling // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8.

Баженов Виктор Андреевич – Заслуженный деятель науки и техники Украины, Лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (1993, 2003), образования (2013), академик Национальной академии педагогических наук Украины, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры (КНУБА), директор НИИ строительной механики; 03037, Украина, г.Киев, просп.Воздухофлотский, 31., тел. +38 044 241-54-12

Пискунов Сергей Олегович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры (КНУБА); 03037, Украина, г.Киев, просп.Воздухофлотский, 31, тел. +38 044 241-55-55; E-mail: s_piskunov@ua.fm

Солодей Иван Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры (КНУБА); 03037, Украина, г.Киев, просп. Воздухофлотский, 31., тел. +38 044 241-55-55; E-mail: isolodey@gmail.com

Bazhenov Victor Andreevich – Honored Scientist of Ukraine, Winner of the State Prize of Ukraine in Science and Technology (1993, 2003), Education (2013), academician of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine, doctor of technical sciences, professor, Head of the department of Structural mechanics of Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA), director of the Institute of Structural Mechanics; 03037, Ukraine, Kyiv, Povitroflotsky Ave., 31, phone +38 044 241-54-12

Pyskunov Sergii Olegovich – doctor of technical sciences, professor, Professor of the department of Structural mechanics of Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA); 03037, Ukraine, Kyiv, Povitroflotsky Ave., 31; phone +38 044 241-55-55 E-mail: s_piskunov@ua.fm

Solodey Ivan Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, Professor of the department of Structural mechanics of Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA); 03037, Ukraine, Kyiv, Povitroflotsky Ave., phone +38 044 241-55-55; E-mail: isolodey@gmail.com

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА ОСАДКИ ЗДАНИЯ

М.С. Барабаш¹, А.Л. Грабовский², О.Ю. Башинская²

¹Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

² Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена численному моделированию и анализу расчётных методов оценки деформаций основания с учётом упругой и пластичной работы грунта на примере здания торгово-развлекательного комплекса. В качестве сопоставляемых методов были выбраны: метод послойного суммирования, моделирование грунта при помощи коэффициентов постели C_1 и C_2 , моделирование грунтового массива при помощи объёмных КЭ с учётом линейной и нелинейной работы основания. В рамках выбранных моделей выполнены расчёты НДС грунтового основания и конструкции. Исследования проводились с помощью программного комплекса «ЛИРА-САПР».

Ключевые слова: Численное моделирование, напряженно-деформированное состояние, осадка, метод послойного суммирования, нелинейные модели.

METHODS OF NUMERICAL MODELING AND CALCULATIONS OF BUILDING SEDIMENTS

Mariia S. Barabash¹, Andrej L. Grabovskij², Olga U. Bashynska²

¹National Aviation University, Kiev, UKRAINE

²Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: This article presents an analysis of computational methods for assessing deformation of the base of the building trade - entertainment complex, taking into account the elastic and plastic work of soil. From the compared methods were chosen: layering summation method, modeling soil bed using coefficients C_1 and C_2 , modeling soil mass by means of volumetric EC, taking into account the linear and nonlinear foundation. As part of the selected models are made calculations of subgrade and construction Stress Strain State. Surveys were conducted using the software "LIRA-SAPR".

Key words: Numerical simulation, stress-strain state, sediment, layering summation method, nonlinear models.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно нормативным документам, нормальная эксплуатация и повышение долговечности сооружения обеспечивается устранением неравномерных осадок и ограничением абсолютных и относительных перемещений фундаментов и надфундаментных конструкций. В наше время существует большое количество различных вариантов математического моделирования работы грунта. Важным является выбор наиболее рациональной модели поведения основания.

Кроме того, иногда при использовании одного и того же программного комплекса проектировщик может получить различные результаты расчета. Это можно аргументировать разными методами приведения реальной работы конструкции к её математической модели. Поэтому актуальным является разработка достоверных методов численного моделирования основания конструкции и выполнение сравнительного анализа НДС конструкции при различных вариантах моделирования.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Численные методы расчета конструкций и методы математического и компьютерного моделирования отражены в работах современных ученых: М.С. Барабаш [2,3], А.М. Белостоцкого [5], А.С. Городецкого [9], С.Ф. Клованича, А.В. Перельмутера, Л.А. Розина, Н.В. Савицкого, В.И. Сливкера, В.Н. Сидорова и др.

В разное время исследователями было предложено множество различных расчетных моделей сплошного грунтового основания. Среди них можно выделить:

- модель Винклера и ее модификации.
- модели упругого (линейно-деформируемого) полупространства и линейно деформируемого слоя конечной толщины, рекомендуемые нормативными документами.
- нелинейные (упругопластические) модели.

Описанию этих моделей посвящено большое количество работ, в том числе работы А.И. Боткина, Г. В. Василькова [8], М.В. Малышева [12], В.О. Сахарова [13], Б.Л. Фаянса, Н.А., Цытовича, В.В. Лушникова [11].

Результаты экспериментальных исследований приведены в трудах Д. С. Баранова, А.К. Бугрова. Тематике решения нелинейных задач при рассмотрении работы грунтового массива посвящены работы В.Г. Березанцева, И.В. Ковалева, Н.Н. Сидорова, А.К. Бугрова, Г. В. Василькова, Ю.А. Киричека [10], А.В. Трегуба [14], В. Н. Широкова.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Механические свойства грунтов намного сложнее, чем свойства других материалов. Правомерность применения линейной теории упругости к грунтам обосновывается тем, что в соответствии с требованиями нормативной документации фундаменты должны быть спроектированы так, чтобы давление на грунт от сооружения не превышало 0,2 – 0,3 МПа, что позволяет не считаться с нелинейностью зависимости осадок от дав-

лений. Модуль деформации при этом устанавливается по среднему значению тангенса угла наклона кривой «нагрузка-осадка».

При назначении упругих характеристик грунта предлагается выделять два состояния основания, соответствующие двум периодам:

1. Состояние в период возведения сооружения и непосредственно после возведения, когда происходит активная осадка сооружения вследствие необратимых деформаций основания.

2. Состояние после завершения осадочных явлений и стабилизации основания, т.е. в период эксплуатации сооружения.

Эти состояния требуют назначения разных моделей основания. Первое предполагает возможным рассматривать его как изотропное линейно деформируемое полупространство, характеризуемое модулем деформации. Второе – как изотропное упругое полупространство, характеризуемое модулем упругости, примерно на порядок превышающем модуль деформации. Эти характеристики должны быть дополнены коэффициентами Пуассона. Они являются исходными для определения обобщенных характеристик основания, однородного или слоистого.

В программном комплексе ЛИРА-САПР имеется возможность проводить расчет по различным моделям, в основе которых лежит трехмерная модель грунта, построенная на основе инженерно-геологических исследований. На основе этой модели возможно определить значения коэффициентов постели переменного по площади рассчитываемого здания. В этом случае расчет производится по модели Винклера. Трехмерная модель грунта может быть триангулирована, каждому конечному элементу (КЭ) назначены жесткостные характеристики, в соответствии с механическими свойствами грунта, к которому относится этот КЭ. Расчет здания может также производиться совместно с трехмерным массивом, моделирующим грунтовое основание, т.е. расчет проводится по модели упругого полупространства.

Для расчета и исследования НДС конструкции было построено расчётную схему в ПК «ЛИРА-САПР». Компьютерная модель основания была осуществлена следующими методами:

1. С помощью коэффициентов жесткости упругого основания C_1 и C_2 .

Моделирование грунтового массива через объёмные шестиузловые КЭ:

-при использовании универсального пространственного КЭ № 34 для описания линейной деформации грунта;

- при использовании физически нелинейного объемного КЭ №273 (при задании различных вариантов условий прочности).

А также проведено сравнение полученных результатов при компьютерном моделировании и при расчете деформации основания методом послойного суммирования.

3. ОПИСАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Наиболее распространенными видами аппроксимации работы неоднородного основания при статическом расчете конструкции являются одноузловые, пластинчатые или объёмные конечные элементы. При использовании пластинчатых КЭ в ПК «ЛИРА-САПР» реализовано три метода определения коэффициентов постели: для модели Пастернака, Винклера - Фусса и модифицированный расчет для модели Пастернака. Также, пользователь имеет возможность выбрать схему расчета осадки основания (линейно-деформированного полупространства или линейно-деформированного слоя).

Для рассматриваемой компьютерной модели коэффициенты постели были рассчитаны по первому методу (по модели Пастернака): $C_1=25087.1\text{кН/м}^3$, $C_2=4886.04\text{кН/м}$, где C_1 вычисляется по формуле:

$$C_1 = \frac{E_e}{H_c(1-2\nu_e^2)}, \quad (1)$$

где ν_e - приведенный коэффициент Пуассона грунта под подошвой фундамента, определя-

ется методом усреднения по Фойгту; E_e - приведенный модуль деформации, определяется, как среднее значение в пределах сжимаемой толщи; $H_c = \sum h_i$ - высота сжимаемой толи.

Коэффициент C_2 определяется по формуле:

$$C_2 = \frac{C_1 H_c^2 (1-2\nu_e^2)}{6(1+\nu_e)}, \quad (2)$$

На втором этапе исследования моделируется грунтовое основания с помощью объёмных КЭ. Этот этап делится на две части: расчет основания в линейной постановке задачи и с учётом физической нелинейности поведения основания (при задании различных критериев прочности). Компьютерная модель здания приведена на рис. 1.

Если грунтовую среду моделировать как линейно деформированную, в ПК «ЛИРА-САПР» реализуется вычисление осадки основания от заданных нагрузок с использованием расчетной схемы в виде линейно деформированного полупространства (задача Буссинеска). В этой модели принимаются два предположения: первое – осадка $W(x, y)$ точки поверхности основания прямо пропорциональна величине загрузки $p(x, y)$ в этой точке, второе - осадка распространяется и за пределы площади загрузки.

В отличие от предыдущего метода модель линейно деформированного полупространства при совместном расчете сооружения с основанием позволяет определить, кроме контактных напряжений, напряженно-деформированное состояние почвы всего основания.

При таком моделировании основы, с помощью объёмных конечных элементов, в качестве исходных данных вводятся только модуль общих деформаций E , коэффициент Пуассона ν и удельный вес каждого слоя. Толщина слоя задается при задании геометрии конечных элементов. При этом расчетная модель фактически сводится к сжатому слою конечной прочности.

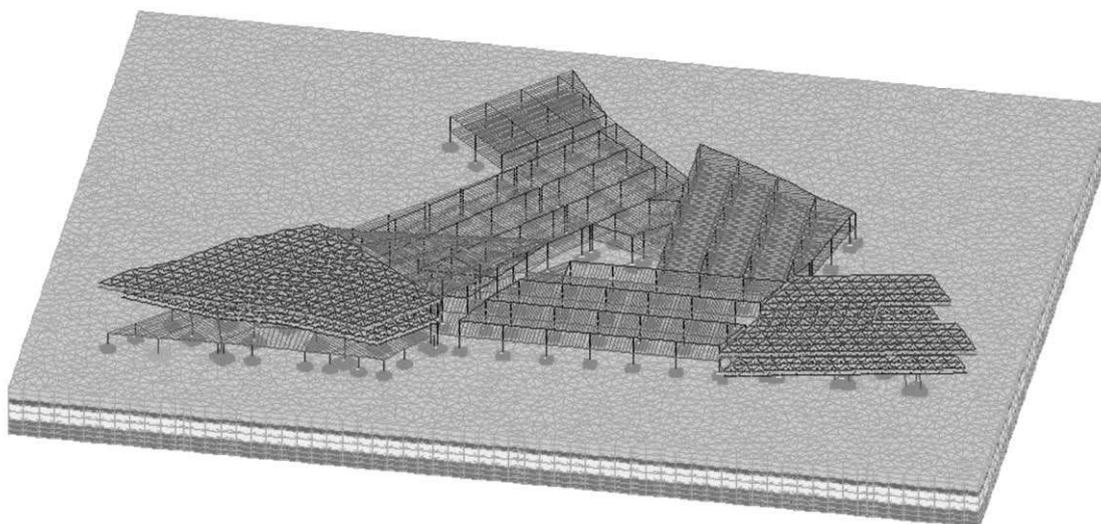


Рис. 1. Расчётная схема здания при моделировании основания объёмными КЭ.

В рассматриваемой задаче были заданы следующие характеристики слоев грунтового массива: ИГЭ-1 ($E=25000 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0,3$), ИГЭ-2 ($E=27000 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0,3$), ИГЭ-3 ($E=16000 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0,3$), ИГЭ-4 ($E=13000 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0,35$).

Но деформацию грунта можно описать с помощью линейной модели среды лишь до определенного уровня усилий, за пределами которого линейная связь напряжений и деформаций нарушается. Нелинейность свойств объясняется образованием необратимых структурных изменений. Микроразрушения являются основной причиной нелинейности основания в области сжатых напряжений. Такие разрушения возникают в зонах концентрации напряжений возле микродефектов (пор или трещин). Начиная с определенного уровня развития микродефектов снижается сопротивление грунтового массива к внешним нагрузкам.

Известно, что в основном, грунтовая среда характеризуется относительно низкой прочностью на растяжение, а иногда её полным отсутствием. Возникновение микроразрушений, что вызывают разрыв, означает, что данный грунтовый массив в дальнейшем не способен воспринимать растягивающие усилия, хотя его свойство сопротивляться усилиям сжатия сохраня-

ется [6,7]. Хотя, конечно, в МКЭ реализуется только феноменологическое описание физических закономерностей, происходящих в объекте, с помощью аппроксимирующих функций.

Необратимые деформации грунта, как гетерогенной среды, возникают значительно раньше достижения предельного состояния и они существенно превышают упругие деформации. Это обусловлено деформацией пор и образованием локальных концентраций напряжений и в результате приводит к локальной пластичности и местному разрушению [1].

Именно поэтому важным для данной работы было исследование НДС элементов конструкции и осадки грунтового массива с учетом физически - нелинейной работы основания.

Для решения этой задачи в ПК «ЛИРА-САПР» было смоделировано одностороннюю работу грунта с учетом сдвига, при помощи задания соответствующих характеристик физически - нелинейным конечным элементам грунта в форме трехгранной призмы (КЭ273). В данном случае у пользователя есть возможность выбрать модель работы грунта (по Кулону - Мору, Друккеру - Прагеру или Боткину) [9].

Для численного моделирования нелинейных свойств грунтового массива конечным элементам типа 273 было задано следующие характеристики: ИГЭ-1 ($E= 28000$ кН/м², $\nu = 0,3$, $R_0= 17,4$ кН/м³, $k_e= 1$, $C= 2$ кН/м², $R_t= 2$ кН/м², $F_i= 32^\circ$, $\sigma_p= 300$ кН/м²), ИГЭ-2 ($E= 25000$ кН/м², $\nu = 0,3$, $R_0= 19,3$ кН/м³, $k_e= 1$, $C= 1$ кН/м², $R_t= 1$ кН/м², $F_i= 30^\circ$, $\sigma_p= 300$ кН/м²), ИГЭ-3 ($E= 13000$ кН/м², $\nu = 0,3$, $R_0= 19,1$ кН/м³, $k_e= 1$, $C= 12$ кН/м², $R_t= 5$ кН/м², $F_i= 23^\circ$, $\sigma_p= 280$ кН/м²), ИГЭ-4 ($E= 16000$ кН/м², $\nu = 0,35$, $R_0= 19,1$ кН/м³, $k_e= 1$, $C= 25$ кН/м², $R_t= 30$ кН/м², $F_i= 22^\circ$, $\sigma_p= 250$ кН/м²), где C – сцепление, R_t – предельное напряжение при растяжении, которое было определено из соотношения $R_t \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \leq C$, j – угол внутреннего трения, σ_p – предельное напряжение сжатия.

Простой нелинейной моделью работы почвы является общеизвестная идеально упруго - пластическая модель с предельной поверхностью, что определяется критерием Кулона-Мора. Преимущество модели заключается в простоте назначения параметров, которые можно получить из отчета по инженерно-геологическим изысканиям. Для этой модели условие прочности в ПК «ЛИРА-САПР» выражается по формуле:

$$\sin(\varphi) \cdot \sigma_0 + \sigma_i \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(\Psi) + \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi)) - 3C \cdot \cos(\varphi) \leq 0, \quad (3)$$

Однако, эта модель предусматривает одинаковое поведение материала на стадии первичного нагружения и разгружения, что совсем не характерно для грунтов (в которых модуль нагружения и разгружения отличается, как известно, в 5 ... 10 раз). Кроме того, недостатком данной модели является то, что в расчёте исключено главное промежуточное напряжение и его влияние на грунт, что не соответствует действительности, а наличие углов на поверхности текучести усложняет численное решение пространственных задач. Эти недостатки

исключены при расчёте по критерию прочности Друккера - Прагера.

Модель Друккера - Прагера также реализует упругое идеально - пластическое поведение грунтов. А поверхность пластичности согласно модели Друккера - Прагера является правильным круговым конусом относительно гидростатической оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ в пространственной системе главных напряжений.

Условие прочности в ПК «ЛИРА-САПР» для модели Друккера-Прагера выражают по формуле:

$$2 \sin(\varphi) \cdot \sigma_0 + 3\sigma_i - 6C \cdot \cos(\varphi) \leq 0, \quad (4)$$

Еще одним условием прочности грунта, что реализовано в ПК «ЛИРА-САПР» есть условие Боткина. Согласно этому условию, в отличие от Кулона – Мора, предполагается, что на прочность почвы влияют все три главных напряжения, а предельное состояние наступает на октаэдрической плоскости (плоскость, является равнонаклонной ко всем главным направлениям напряжений).

В 1940г. Боткин впервые предложил использовать и обобщил для случая грунтовой среды теорию прочности Р. Мизеса, разработанной для металлических конструкций. В этой модели роль промежуточного главного напряжения весьма существенна.

В работах А. И. Боткина было показано, что условие предельного напряженного состояния представляет собой инвариантное соотношение, связывающее линейным образом интенсивность касательных напряжений со средним давлением, и, таким образом, не совпадает с условием Кулона-Мора. Это соотношение в традиционной механике пластичности известно под названием условия Губера - Мизеса - Шлейхера. В механике грунтов это соотношение стали называть условием Боткина.

Условие прочности в ПК «ЛИРА-САПР» для модели Боткина:

$$\sin(\varphi) \cdot \sigma_0 + 3\sigma_i - 2C \cdot \cos(\varphi) \leq 0, \quad (5)$$

Стоит отметить, что в литературе (Б. Н. Баршевский, М. В. Малышев, А. Строганов, и др.) имела место дискуссия по поводу выбора между условиями Кулона-Мора, Боткина и др. Кроме того, все три условия по-разному оценивают влияние главного промежуточного напряжения на прочность грунта, поэтому для исследования НДС рассматриваемой конструкции целесообразным является проведение анализа по трем условиям [4].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Сравнение и анализ расчётов было выполнено по ряду показателей: напряженное состояние наиболее загруженных колонн, величина максимального прогиба консольных стержневых элементов конструкции, кинематические характеристики - перемещение расчетных характерных точек здания по направлению «Z».

Численные значения максимальных прогибов консолей для каждого варианта моделирования грунтового основания приведены в таблице 1. Номера секций здания показаны на рис. 2.

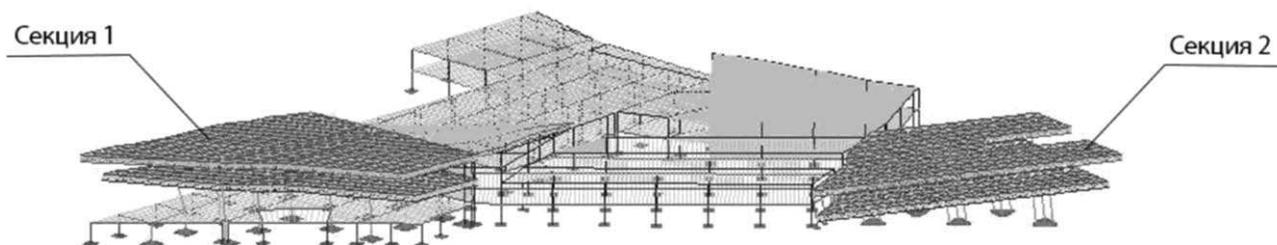


Рис. 2. Конечно-элементная модель расчётной схемы здания.

Таблица 1. Максимальные прогибы консольных частей здания, мм

	Вариант моделирования грунтового основания				
	Коэффициент постели	КЭ, тип. 34	КЭ, тип. 273, метод Боткина	КЭ, тип. 273, метод Друккера – Прагера	КЭ, тип.273, метод Кулона – Мора
Максимальный прогиб консоли секции 1, мм	258	248	277	273	275
Максимальный прогиб консоли секции 2, мм	111	116	131	128	129

Из таблицы видно, что полученные перемещения по результатам расчета при нелинейной постановке значительно выше, чем при использовании коэффициентов постели и КЭ34. Это объясняется тем, что КЭ273 лучше моделирует поведение

основания, работа которого несомненно влияет на НДС элементов конструкции.

На рисунке 3 показано сравнение значений продольных усилий, что возникают в конечных элементах, которые моделируют работу самых загруженных колонн секции 2.

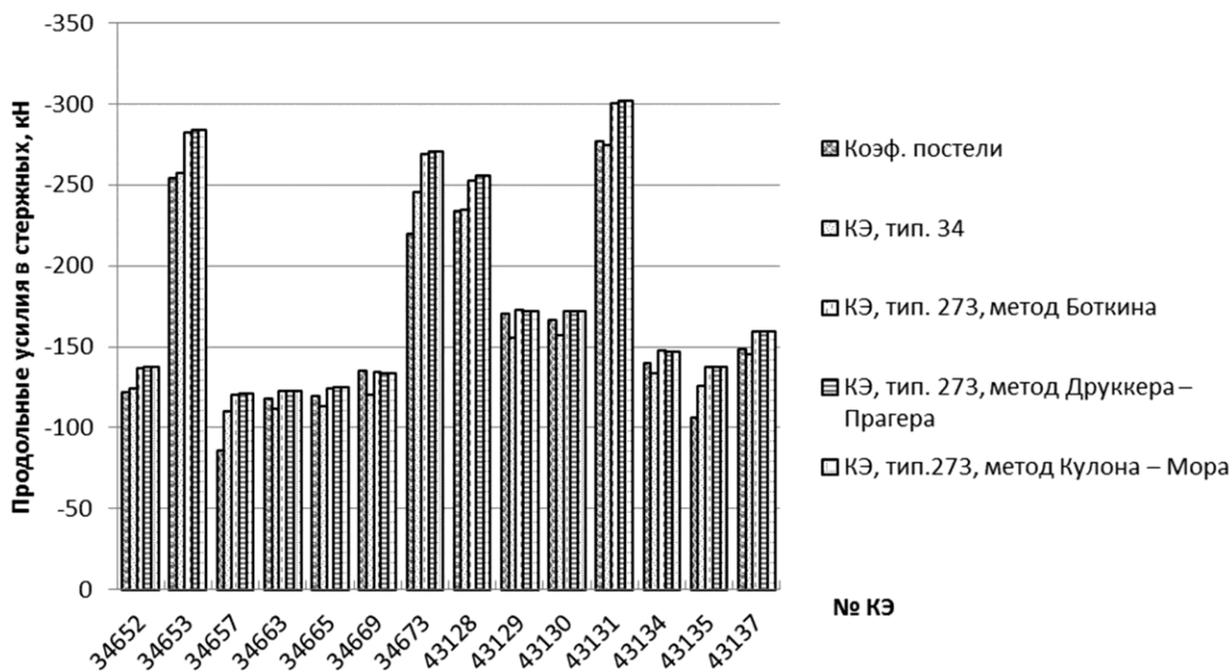


Рис. 3. Значения продольных усилий в наиболее нагруженных колоннах секции 1.

Результаты расчета в линейной постановке задачи и с учетом физической нелинейности основы характеризуются значительной степенью сходства. А погрешность в результатах при различных вариантах моделирования нелинейной работы основания меньше 1%. Это указывает на то, что выбор метода описания нелинейной деформации элементов почти не играет роли при определении несущей способности и подборе сечений элементов конструкции.

И завершающим этапом данного исследования есть сравнение значений осадки расчетных характерных точек фундаментных плит, обозначенных кругами на рисунке 4. Анализ полученных результатов сформирован в виде гистограммы по вертикальным перемещениям, рисунок 5. Изополю вертикальных перемещений рассматриваемых фундаментных плит показаны на рис. 6.

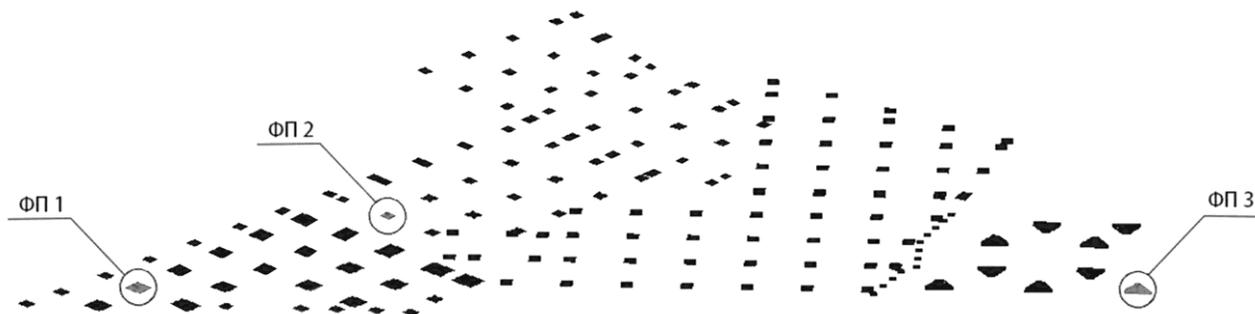


Рис. 4. Конечно-элементная модель фундаментных плит (ФП).

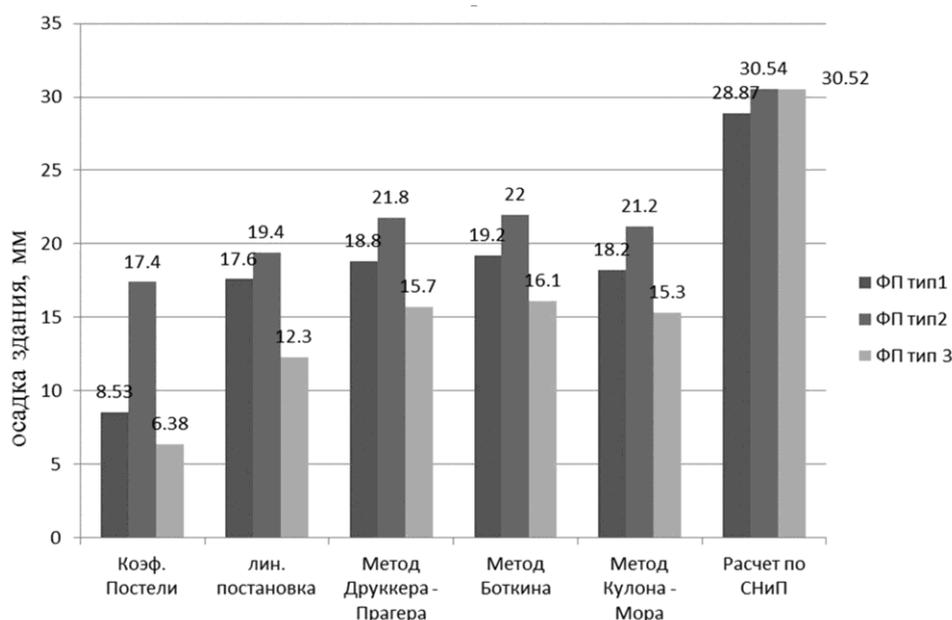


Рис. 5. Гистограмма максимальных значений осадки в зависимости от метода моделирования грунта.

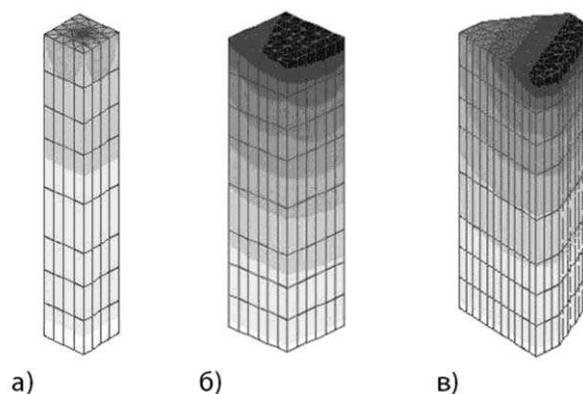


Рис. 6. Изополя значений максимальных вертикальных перемещений фундаментных плит (рассчитаны по методу Кулона – Мора):
а – тип 1; б – тип 2; в – тип 3.

5. ВЫВОДЫ

Выполненный анализ НДС при различных вариантах моделирования показал, что максимальные значения осадки были получены при расчёте методом послойного суммирования. Разница между численным моделированием основания и при расчёте грунтового массива по методике линейно-деформированного полупространства с условным ограничением глубины

сжимаемой толщи можно аргументировать несколькими факторами:

- в каждом элементарном слое вертикальные напряжения принимаются как среднее значение между дополнительным давлением на вершине и на подошве каждого слоя. Такая аппроксимация эпюр напряжений не даёт достаточной возможности описать работу дисперсной среды;

- отсутствие сил взаимодействия между элементарными слоями;
- в методе послойного суммирования не учитывается нелинейное изменение величины модуля деформаций для каждого элементарного слоя.
Погрешность при расчётах осадки здания при различных методах моделирования нелинейной работы грунта составляет в основном меньше 1%. При учёте пластической работы основания метод Кулона – Мора показал наименьшие значения осадки. Это можно объяснить тем, что данная модель не учитывает влияния главного промежуточного напряжения. Этот фактор был учтён в методе Боткина, где принимается во внимание связь интенсивности касательных напряжений и среднего давления. Именно при использовании этого метода были получены максимальные значения осадки конструкции при компьютерном моделировании системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алейников С.М.** Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований. – М.: Изд-во «АСВ», 2000. – 754с.
2. **Барабаш М. С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства: Монография / Мария Сергеевна Барабаш. – К. : Изд-во «Сталь», 2014. – 301 с.
3. **Барабаш М. С.** Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий / М. С. Барабаш // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – М.: Изд-во «АСВ», 2012. – Vol. 8, Issue 3 – С. 58 - 68.
4. **Барвашов В. А.** Трёхпараметрическая модель грунтового основания и свайного поля, учитывающая необратимые структурные деформации грунта / В. А. Барвашов, В. Г. Федоровский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1978. – №4. – С. 17 - 20.
5. **Белостоцкий А.М.** Комплексное расчетное обоснование напряженно-деформированного состояния высотных многофункциональных комплексов /А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличаева [и др.] // Стр. мех. и расч. соор., 2006. - №6. - С.52-56.
6. **Бойко И.П.** Напряжённо-деформированное состояние грунтового массива при устройстве новых фундаментов вблизи существующих зданий / И. П. Бойко, В. А. Сахаров // «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов»: Труды докладов XX Международной конференции (Санкт-Петербург, 24–26 сентября, 2003 г.) – СПб., 2003. – Т. II – С. 111-116.
7. **Бугров А.К.** Механика грунтов: Учеб. пособие. – СПб: СПбГПУ, 2007 – С. 146-153.
8. **Васильков Г.В.** Некоторые модели и методы теории упругости и пластичности // Вычислительная техника.- Ростов-н/Д, -1993. -4.2. -123с.
9. **Городецкий А.С.** Компьютерные модели конструкций / А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров. – 2-е изд., доп. – М: Изд-во «АСВ», 2009. – 360 с.
10. **Киричек, Ю.А.** Об адекватности нелинейных методов расчета осадок фундаментов мелкого заложения / Ю.А. Киричек, А.В. Трегуб // Тр. Международной конференции по геотехнике «Развитие городов и геотехническое строительство» / НПО «Геореконструкция-Фундаментпроект». – СПб, 2008. – Т. 3. – С. 183 – 186.
11. **Лушников В.В.** Оценка действительных характеристик деформируемости элювиальных грунтов по результатам измерений деформаций зданий // Ос-

нования, фундаменты и механика грунтов. – 2011. – С. 23–29.

12. **Малышев М.В.** Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. – М.: Стройиздат, 1994. – 228 с.
13. **Сахаров В.О.** Модель деформирования грунтового основания при сейсмических нагрузках // Межведомственный научно – технический сборник. – 2013. – Вып. 33.- С.33-46.
14. **Трегуб, А.В.** Развитие методики нелинейного расчета фундаментов мелкого заложения / А.В. Трегуб, Ю.А. Киричек // Строительство, материаловедение, машиностроение: сб. науч. трудов. Вып. №56. – Д.: ПГАСА, 2010. – С. 535 – 545.

Olga U. Bashynska, Master Student; Kyiv National University of Construction and Architecture; Kiev, Ukraine, tel. +380631082201;
E-mail: olchik01@ukr.net

Барабаш Мария Сергеевна, академик Академии строительства Украины, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий строительства Национального авиационного университета, директор ООО «ЛИРА САПР», 03058, Украина, г. Киев, Кияновский переулок, 7А;
E-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Грабовский Андрей Леонидович, ассистент кафедры основ и фундаментов, научный сотрудник лаборатории численных методов в геотехнике, Киевский Национальный Университет Строительства и Архитектуры, Украина, г. Киев,
тел.: +308932675994

Башинская Ольга Юриевна, магистр Киевского Национального Университета Строительства и Архитектуры, Украина, г. Киев, тел.: +380631082201;
E-mail: olchik01@ukr.net

Mariia S. Barabash, Full Member of Academy of Construction of Ukraine, Dr.Sc., Professor, Department of Computer Technologies in Construction, National Aviation University; Director of “Lira SAPR”; 7A, Kiyanyovsky per., Kiev, 03058, Ukraine;
E-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Andrej L. Grabovskij, Assistant, Department of Foundation Engineering; Research Engineer, Laboratory of Numerical Methods in Geotechnics; Kyiv National University of Construction and Architecture; Kiev, Ukraine, tel. +308932675994.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВЕНТИЛИРУЕМОМ ПОМЕЩЕНИИ

В.Н. Варанаев, С.А. Дорошенко, С.А. Капустин, А.Ю. Троцко

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматривается задача численного моделирования движения воздуха в помещении, ее решение с помощью комплекса ANSYS CFX, приводятся результаты экспериментов воздухообмена для модели помещения. Проведен сравнительный анализ результатов экспериментов и проведенных численных расчетов с использованием различных моделей турбулентности. Проведено сравнение с экспериментальными и численными исследованиями других авторов.

Ключевые слова: численное моделирование, модель турбулентности, физический эксперимент, вентилируемое помещение, комплекс ANSYS CFX

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL SIMULATION OF THREE-DIMENSIONAL TURBULENT FLOWS IN VENTILETED ROOM

*Vladimir N. Varapaev, Sergei A. Doroshenko, Sergei A. Kapustin,
Artem Y. Trotsko*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This article presents numerical and experimental simulation results of airflows in a ventilated room with ANSYS CFX. Numerical calculations with use of various models of turbulence and results of experiments are compared. Comparison of results with experimental and numerical studies of other authors is carried out.

Key words: computational fluid dynamics, turbulence model, physical experiment, ventilated room, complex ANSYS CFX

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение в объеме может существовать за счет различных причин: за счет подачи и удаления заданного расхода воздуха через открытые границы с помощью механических побудителей; из-за наличия перепада температур на различных горизонтальных и вертикальных поверхностях, что приводит к появлению естественно-конвективных движений; из-за существующего перепада давлений и температур внутри и вне помещения, что приводит к движению воздуха через от-

крытые границы области, причем характер этого движения должен быть определен в процессе решения задачи. При решении различных задач могут существовать как все перечисленные причины движения воздуха вместе, так и каждая в отдельности, что приводит к необходимости использовать уравнения вынужденной, естественной или смешанной конвекции.

Поскольку движение воздуха в помещении и температуры ограничивающих его поверхностей взаимосвязаны, то в общем случае сопряженной задачи надо учитывать все три ме-

ханизма теплообмена: конвекцию, тепловое излучение и теплопроводность. В большинстве случаев воздух в помещении можно считать прозрачным для теплового излучения. Тогда общая математическая модель рассматриваемой задачи представляет собой взаимосвязанную систему уравнений в частных производных для описания движения и теплообмена воздуха, теплопроводности в твердом теле и интегрального уравнения для определения плотности результирующего теплового излучения поверхностей. На границах воздуха и твердого тела должны быть заданы соответствующие условия сопряжения. Решение некоторых из таких задач для плоского случая рассмотрены, например, в [4], [5].

В случае, когда в помещении нет значительных источников тепла, и температура подаваемого системами вентиляции воздуха близка температуре воздуха в помещении, движение воздуха в помещении можно считать изотермическим. Математической моделью для изотермической задачи является система уравнений аэродинамики вязкого несжимаемого газа с использованием подходящей модели турбулентности. Эта модель остается весьма сложной, но она позволяет полностью определить аэродинамическую картину течения в целом в зависимости от геометрии области и от места расположения и способа подачи и удаления воздуха. В данной работе проводится как численное, так и экспериментальное изучение движения воздуха в вентилируемом помещении для турбулентного режима в стационарной и нестационарной постановке для случаев 2D и 3D. Эта задача численно и экспериментально впервые была рассмотрена Нильсеном [1]. В последующие годы задачи такого типа рассматривались в [1-3, 6-10].

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представленная ниже постановка задачи полностью соответствует выбранной эксперимен-

тальной модели, для которой проводились измерения воздушных потоков, профилей скоростей и пульсационной энергии турбулентности. Численное моделирование также проводилось в этой постановке.

Рассматривается замкнутый объем помещения, приведенный на рисунке 1. В этом объеме рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости для изотермического случая.

В левом верхнем углу помещения вдоль всей вертикальной стенки располагается приточное отверстие, а в правом нижнем углу – вытяжное отверстие, через которые подается и отбирается воздух в помещении. Все остальные границы помещения (боковые стены, пол и потолок) являются непроницаемыми границами, на которых выполняются условия прилипания.

Все размеры модели помещения приведены на чертеже. Числовые значения параметров приведены при описании эксперимента. В начальном сечении приточного отверстия задаются профили скорости и начальной пульсационной энергии турбулентности.

Сечение, выделенное штриховыми линиями, является средним сечением модели. Задача решается как в плоской постановке, когда областью решения задачи является среднее сечение модели и решение считается не зависящим от перпендикулярного к нему направления, так и в трехмерной постановке, когда областью решения задачи является вся область, приведенная на рис. 1. Температура воздуха и всех границ области считается одинаковой.

Область решения в случае плоской задачи приведена штриховкой на рис. 1. Для сравнения с экспериментами выдается подробная информация о численном решении задачи (линии тока, профили компонент скорости, кинетическая энергия турбулентности, члены, характеризующие тензор турбулентных напряжений Рейнольдса).

Экспериментальные данные для профилей скорости и напряжений Рейнольдса получены в основном при $x = 530$ мм, $x = 1060$ мм и при $y = 23$ мм у поверхности пола в среднем сечении модели.

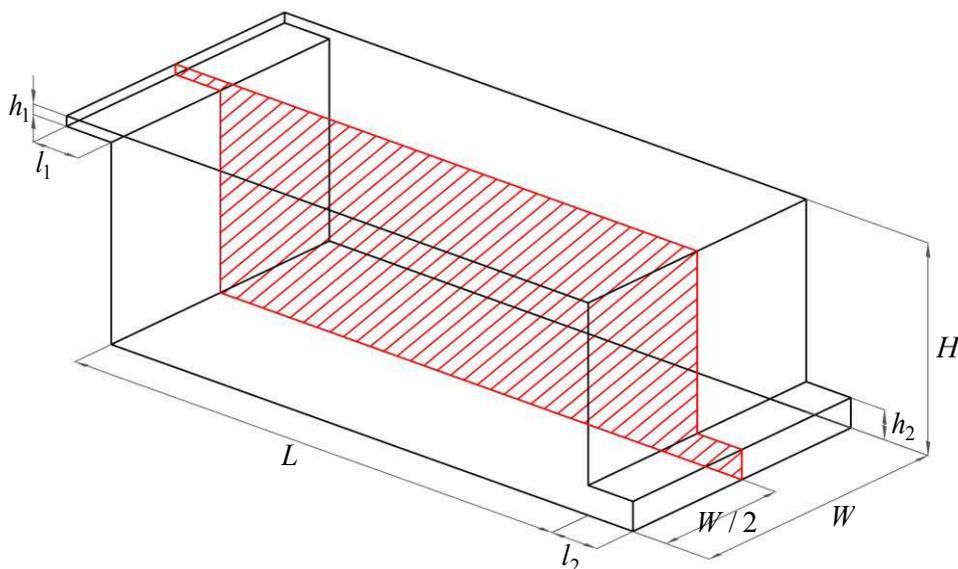


Рис. 1. Общий вид области, в которой численно и экспериментально исследуется воздухообмен.

Выбор размеров области и сечений, где определялись численные и экспериментальные данные, был связан с возможностью сравнения этих результатов с экспериментальными и численными результатами серии работ [1-3]. Хотя геометрические размеры области и скорости в данной работе и в упомянутых выше исследованиях различны, они допускают сравнение в безразмерном виде, используя теорию подобия и размерности.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

И в плоском, и в трехмерном случае в областях решается полная система уравнений Навье-Стокса, записанная для турбулентного режима течения с использованием каких-либо условий замыкания. В данной работе использовался подход RANS с применением разнообразных полуэмпирических моделей турбулентности, реализованных в программном комплексе ANSYS CFX (модели (k, ε) , (k, ω) , SST, BSL). Расчеты проводились как для стационарного, так и для нестационарного случаев. Эти модели являются одними из наиболее

употребительных при решении научно-исследовательских и инженерных задач и результаты с использованием этих моделей приводятся во многих научных публикациях. Для рассматриваемой в данном разделе задачи, которая впервые была исследована Нильсеном [1-2], при решении ее в плоском случае использовались эти же модели и там же приведены результаты некоторых экспериментальных исследований (профили скоростей, пульсационные компоненты скорости и линии тока). Это позволяет провести сравнение этих результатов с экспериментальными и расчетными данными, приведенными в данной работе.

На всех границах, кроме приточного и вытяжного отверстий, задавались условия прилипания: $u = v = w = 0$. В приточном отверстии в начальном сечении канала задавался степенной закон. Профиль скорости является симметричным относительно середины канала и в половине канала имеет вид

$$\left(\frac{u}{u_0} \right) = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Здесь δ – половина высоты канала, u_0 – мак-

симальная в сечении скорость, n – целое число, характеризующее степенной закон. Известно, что величина n растет с увеличением числа Рейнольдса. Учитывая, что в данной задаче числа Рейнольдса являются небольшими (порядка 5000), было принято, что $n = 6$. Интенсивность турбулентности в начальном сечении канала задавалась порядка 4%, что позволило провести сравнение с теоретическими и экспериментальными данными работ [1-3].

При выборе сеток в окрестности твердых стенок они выбирались так, чтобы выполнялись условия $y^+ > 11$ для модели (k, ε) и $y^+ < 1$ для остальных турбулентных моделей.

4. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Данная задача решалась экспериментально в учебно-научной лаборатории МГСУ.

Исследуемая модель представляет собой прямоугольную полую призму, имеющую два щелевых отверстия с противоположных торцевых сторон модели. Отверстия, имитирующие систему принудительной вентиляции, имеют прямоугольное сечение. Их ширина совпадает с шириной модели. Первое отверстие, размером 30×850 мм, является входным для потока и расположено под верхней стенкой, имитирующей потолок. Через второе отверстие размером 85×850 мм поток воздуха выходит из модели. К каждому из отверстий прикреплены переходные каналы, имеющие поперечные сечения, аналогичные входному и выходному отверстиям.

Общий вид модельного блока показан на рис. 2. Погрешность в геометрических размерах не превышает 0,5 мм. Высота модели составляет $H = 530$ мм, длина $L = 1600$ мм, ширина $W = 850$ мм. Длина входного канала 110 мм, выходного 280 мм. Данные размеры дают возможность получить подобный воздушный режим, что и в [1-3].



Рис. 2. Экспериментальная модель.

Для организации данного эксперимента была собрана экспериментальная площадка (рис. 3), которая включает в себя саму модель помещения (1), установку AeroLab (2), обратный канал (3), а также коллектор конфузорного типа (сопло) (4). Длина стенда – 11 м, ширина – 4 м, высота – 2,5 м.

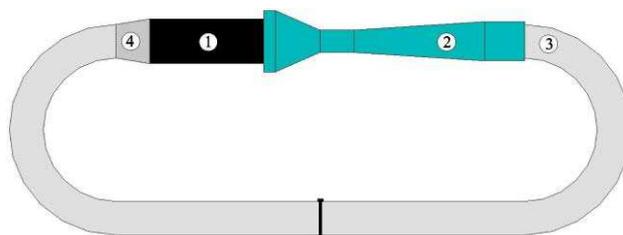


Рис. 3. Экспериментальный
модельный стенд:

- 1 – модель исследуемого помещения;
- 2 – прямой канал аэродинамической трубы;
- 3 – обратный канал;
- 4 – входной коллектор конфузорного типа (сопло)

Потолочная стенка модели и боковая стенка выполнены прозрачными из листового стекла толщиной 10 мм. Критерий выбора оптического стекла: улучшенная светопрозрачность, уменьшенная дефектность листа, минимальный угол отклонения луча и рассеивающий угол.

Остальные элементы модели непрозрачны и выполнены из фанеры, эти стенки имеют толщину 20 мм. Они пропитаны защитным от влаги составом, покрыты черной матовой краской. Поскольку листы фанеры склонны к

деформациям, то были приняты все меры по минимизации деформационных отклонений. Все швы в модели герметизировались. Исследуемая модель посредством переходного элемента соединяется с установкой AeroLab. Данная аэродинамическая труба необходима для формирования течения в модели, а также для поддержания постоянных параметров потока воздуха при проведении эксперимента. Тем не менее в эксперименте течение во входном канале у потолка модели незначительно изменялось по времени (максимальная по времени скорость составляла 2,558 м/с, а минимальная по времени – 2,246 м/с). Измеренная средняя по времени скорость была равна 2,486 м/с.

Основная цель проведения модельного физического эксперимента – получение характеристик потока и сравнение результатов с расчетами, полученными методами численного моделирования с использованием различных моделей турбулентности. На этом этапе работы изучалось движение воздуха при постоянной температуре. Циркуляция воздушного потока осуществляется при температуре 27,4 градусов Цельсия посредством двух отверстий, расположенных на противоположных сторонах модели. Поток входит через отверстие, находящееся под верхней крышкой со скоростью примерно 2,5 м/с и выходит через отверстие с противоположной стороны модели.

Целью эксперимента является изучение пространства воздушного потока внутри помещения с помощью PIV технологии. В результате работы была получена плоская картина течения в плоскости симметрии модели: изолинии, усредненные и мгновенные поля векторов скоростей.

Для изучения полной картины движения воздуха в модели помещения недостаточно произвести съёмку при фиксированном положении видеокамеры, так как охватываемая PIV аппаратурой область меньше чем размер модели. Поэтому был проведен эксперимент с различными координатами положения видеокамеры относительно изучаемой модели.

Первая исследуемая область была снята с координатой камеры $x = 250$ мм притом, что за начало координаты x был принят левый нижний угол модели. Эксперимент проводился с частотой съёмки между парами кадров равной 10 Гц и временем dt между двумя кадрами, составляющими пару, равным 700 мкс. После чего было проведено осреднение мгновенных полей скоростей, полученных из 500 пар кадров за одну видеосессию в одном измерительном створе. Аналогичные съёмки проходили и для остальных двух сечений.

В итоге полученные картины осредненных мгновенных скоростей, полученные с разных камер, были "склеены". На рис. 4 представлены линии тока, построенные по полученным значениям осредненных мгновенных скоростей.

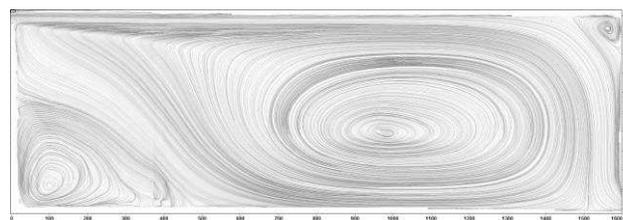


Рис. 4. Линии тока в области течения, полученные с помощью PIV эксперимента.

Отдельно были построены эпюры осреднённых скоростей по оси x и по оси y , а также эпюры среднеквадратических отклонений скорости потока в двух сечениях с координатами $x = 530$ мм и $x = 1060$ мм.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Полученный в эксперименте вид линий тока показывает, что основной поток движется вдоль потолка, вовлекая за счет трения воздух в центральной части области, который образует в центре большую вихревую зону. Скорость в центре этого вихря является достаточно малой. Кроме основного вихря, в левом нижнем углу и в правом верхнем углу образуются еще два вихря малой интенсивно-

сти, скорости в которых очень малы.

Для сравнения экспериментальных и расчетных данных приведем линии тока для плоского случая, полученные с помощью моделей турбулентности (k, ε) , (k, ω) , SST. Эти линии тока приведены на рис. 5.

Сравнение рисунков показывает, что совпадение расчетных и экспериментальных линий тока является хорошим для случая модели (k, ω) . Эти результаты хорошо совпадают и с результатами работы [3], полученных с помощью модели турбулентности (k, ω) . Сравнение полученных результатов с линиями тока по модели (k, ε) показывает, что последняя не описывает вихри в левом нижнем и верхнем правом углах области. Аналогичные результаты были получены в [1-3].

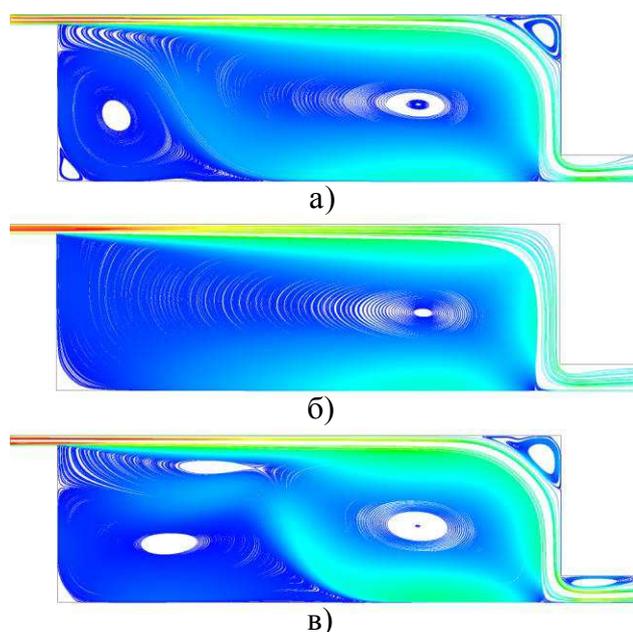


Рис. 5. Линии тока в области, полученные численным методом с помощью модели: а – (k, ω) ; б – (k, ε) ; в – SST

Рассмотрим полученные в расчетах профили скоростей в различных сечениях помещения и сравним их с экспериментальными данными. Все величины на графиках приведены в безразмерном виде: за характерный размер принята высота области H , а за характер-

ную скорость – средняя по сечению скорость в приточном канале.

На рис. 6 приведены профили относительной скорости $u(y)$ в сечении $x = 530$ мм (в безразмерном виде это сечение $\bar{x} = x/H = 1$) для плоской задачи, полученные с помощью моделей (k, ε) , (k, ω) , SST, BSL, экспериментальные данные из работ [1-3] и экспериментальные данные лаборатории МГСУ.

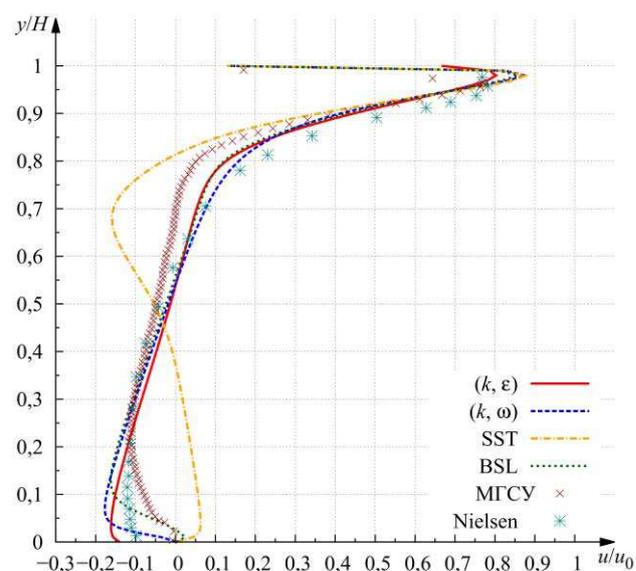


Рис. 6. Профиль относительной скорости $u(y)$ в сечении $\bar{x} = x/H = 1$ для плоской задачи, полученный с помощью моделей (k, ε) , (k, ω) , SST, BSL и экспериментальные данные лаборатории МГСУ и работ [1-3].

Результаты расчетов по моделям (k, ε) , (k, ω) и BSL близки друг к другу всюду, кроме окрестности стенок, что определяется более точным расчетом моделей (k, ω) и BSL в окрестности стенки. Действительно, на рис. 6 видно, что для модели (k, ε) скорость не приближается на стенке к нулю в отличие от двух других моделей. Результаты, полученные по модели SST, значительно отличаются от результатов других моделей и от результатов эксперимента МГСУ и работ [1-3]. Экспериментальные данные лаборатории МГСУ достаточно хорошо совпадают с

данными работ [1-3] всюду, кроме области пола и в центре основного вихревого течения, где скорости воздуха малы. Результаты экспериментов МГСУ у поверхности пола являются, по-видимому, более точными, так как больше соответствуют условиям прилипания на стенке.

Аналогичным образом обстоит дело и в окрестности потолка модели.

В работе [9] указано, что в данном течении существует два различных временных масштаба времени: быстрый временной масштаб, относящийся к пристенной струе, и медленный временной масштаб, относящийся к структуре потока в области малых скоростей, который может составлять много секунд. Это может быть одной из причин некоторого отличия результатов в области малых скоростей в центре основной вихревой зоны, полученных в [1-3] методом лазерной доплеровской анемометрии (LDA) и с помощью PIV-технологии в МГСУ.

Другими причинами могут быть влияние трехмерности и различные значения ширины области w в экспериментах МГСУ и в работе [1] и описанная выше в разделе 4 нестационарность течения во входном канале в экспериментах МГСУ.

Рассмотрим теперь профили скорости для сечения $\bar{x} = x/H = 2$, для которого также имеются экспериментальные данные лаборатории МГСУ и в работах [1-3] и данные расчета по четырем моделям турбулентности. На рис. 7 приведены профили относительной скорости $u(y)$ в сечении $\bar{x} = x/H = 2$ для плоской задачи, полученные с помощью моделей (k, ε) , (k, ω) , SST, BSL, и экспериментальные данные лаборатории МГСУ.

Результаты показывают, что рассмотренные модели турбулентности в данном сечении дают близкие результаты, и они достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными данной работы и работ [1-3] всюду, кроме области маленьких скоростей в центре основного вихревого течения. Возможные причины этого отличия уже обсуждались выше. Исключением являются результаты

модели SST, которые значительно отличаются от других результатов.

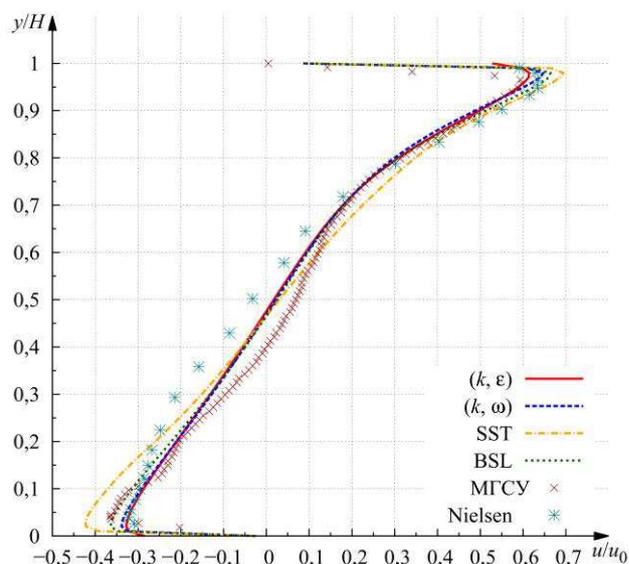


Рис. 7. Профиль относительной скорости $u(y)$ в сечении $\bar{x} = x/H = 2$ для плоской задачи, полученный с помощью моделей (k, ε) , (k, ω) , SST, BSL и экспериментальные данные лаборатории МГСУ и работ [1-3].

Интересно отметить, что в области маленьких скоростей в центре основного вихревого течения в сечении $\bar{x} = x/H = 1$ значения скоростей в эксперименте МГСУ меньше соответствующих значений в эксперименте [1-3], а в сечении $\bar{x} = x/H = 2$, наоборот, больше.

В задачах вентиляции помещения представляет интерес поведение потока вблизи пола помещения. На рис. 8 представлены численные и экспериментальные результаты относительной скорости $u(x)$, показывающей изменение горизонтальной компоненты скорости в нижней части помещения (вдоль пола) в горизонтальном сечении $\bar{y} = 0,028$. На рисунке приведены результаты расчетов с помощью различных моделей турбулентности и экспериментальные данные Нильсена [1-3] и МГСУ. Видно, что вблизи левой границы области, где скорости достаточно малы, экспериментальные данные лучше всего описывают модели (k, ω) и BSL.

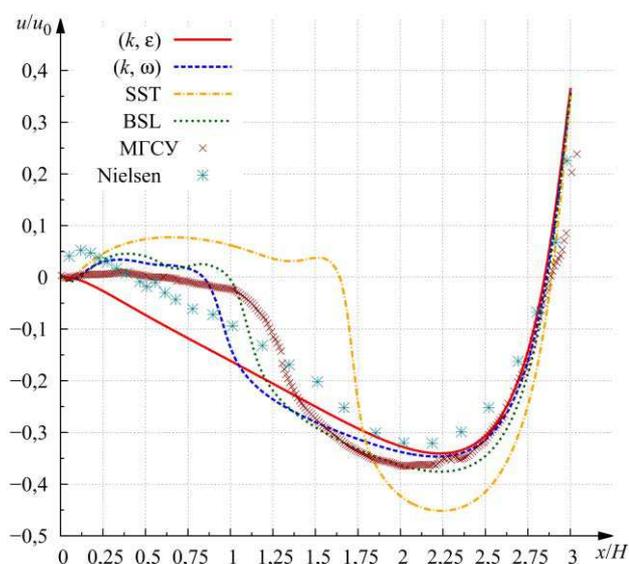


Рис. 8. Профиль относительной скорости $u(x)$, показывающий изменение горизонтальной компоненты скорости в нижней части помещения (вдоль пола) в горизонтальном сечении $\bar{y} = 0,028$.

Как и на предыдущих графиках, наибольшее отличие дают результаты, полученные с помощью модели SST, что совпадает с результатами работ [1-3]. По-видимому, эта стационарная модель турбулентности не позволяет хорошо описывать рассматриваемые течения.

Наряду с плоским случаем были проведены расчеты для трехмерного случая. Подробный анализ и сравнение этих результатов будут приведены в следующей работе, однако здесь можно сделать некоторые замечания. Рассмотренную задачу достаточно трудно исследовать и численно, и экспериментально в силу того, что в некоторых областях течения внутри области скорости очень малы (и применение моделей турбулентности здесь не очень оправдано, также как и применение некоторых экспериментальных методик). В то же время в части области (у потолка) существуют большие скорости и градиенты скорости и кинетической энергии турбулентности.

Некоторые из этих вопросов рассмотрены, например, в [9].

Наилучшие результаты, пожалуй, дают модели (k, ε) , (k, ω) и BSL почти во всей области. Исключением являются небольшие области в правом верхнем и левом нижнем углах, где скорости движения воздуха очень малы. В области возле пола более точные результаты дают модели (k, ω) и BSL. Эти же модели дают вид линий тока, хорошо совпадающий с линиями тока, полученными экспериментально с помощью PIV – технологии. Анализ турбулентной энергии в области показывает, что наибольшее значение пульсационная энергия принимает в области вытекания струи в помещение и составляет 10-14%.

На рис. 9 и 10 приведены сравнения экспериментальных данных и численных расчетов для двухмерного (2D) и трехмерного (3D) случаев для моделей (k, ε) и (k, ω) . Обозначение 3Ds означает, что проводился расчет в половине трехмерной области с условием симметрии в среднем сечении, приведенном на рис. 1.

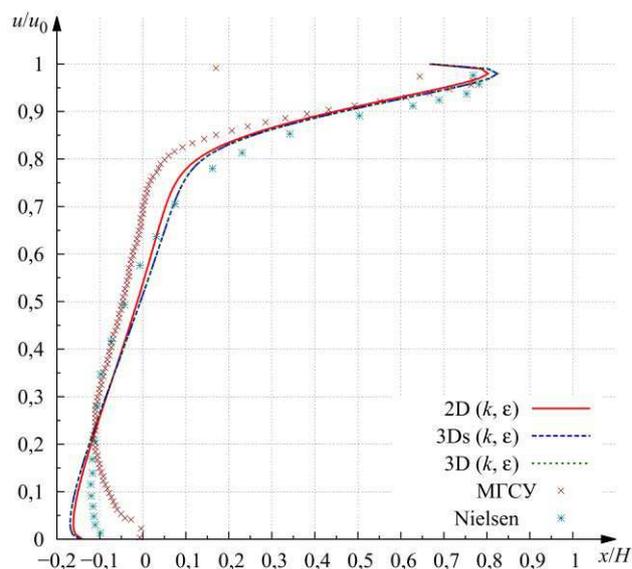


Рис. 9. Сравнение экспериментальных данных и численных расчетов для двухмерного (2D) и трехмерного (3D) случаев для модели (k, ε) .

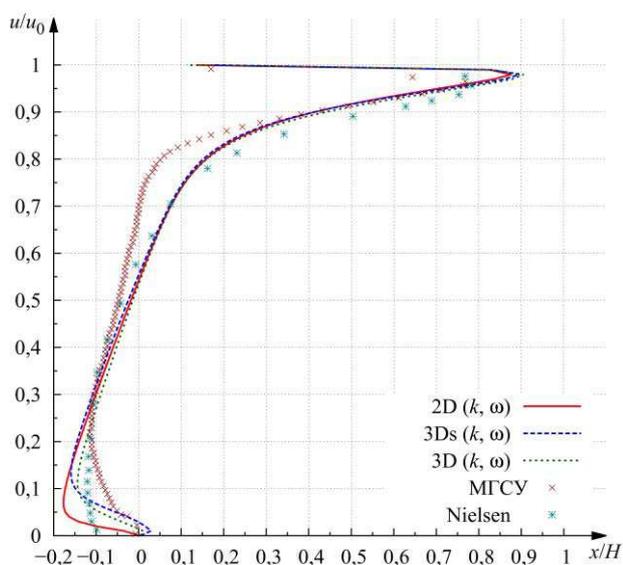


Рис. 10. Сравнение экспериментальных данных и численных расчетов для двухмерного (2D) и трехмерного (3D) случаев для модели (k, ω) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nielsen P.V.** Flow in Air Conditioned Rooms: Model experiments and numerical solution of the flow equations. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1974.
2. **Nielsen P.V.** Specification of a two-dimensional test case. Department of Building Technology and Structure Engineering. Aalborg University, 1990. ISSN 0902-7613 R9040.
3. **Rong Li, Nielsen P.V.** Simulation with different turbulence models in an annex 20 room benchmark test using Ansys CFX 11.0. DCE Technical Report No. 46, Aalborg University, 2008.
4. **Varapaev V.N.** Natural convection in unclosed air cavity taking account walls' radiation. Proc. Third International Confer. On Air Distribution in Rooms. Aalborg, 1992.
5. **Варапаев В.Н., Китайцева Е.Х.** Математическое моделирование задач внутренней аэродинамики и теплообмена зданий. –М.: Изд-во СГА, 2008, 338 с.
6. **Chen Q., Ewert M., Nielsen P.V., Inard C.** Room air and contaminant flow, evaluation of computational methods. annex 20: Air flow patterns within buildings. Technical report, International Energy Agency, 1993.
7. **Skovgaard M., Nielsen P.V.** Research item 1.46dk. simulation of simple test case, case 2d1. Technical report, The University of Aalborg, Department of Building Technology and Structural Engineering, 1991.
8. **Olmedo I., Nielsen P.V.** Analysis of the iea 2d test. 2d, 3d, steady or unsteady airflow? Technical report, The University of Aalborg, Department of Building Technology and Structural Engineering, 2010.
9. **Pedersen J.M., Meyer K.E.** POD analysis of flow structures in a scale model of a ventilated room. Experiments in Fluids, 33, 2002.
10. **Susin R.M., Lindner G.A., Mariani V.C., Mendoza K.C.** Evaluating the influence of the width of inlet slot on the prediction of indoor airflow. Comparison with experimental data. Building and Environment, 2009, 44, 971-986.

Варапаев Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./ факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: vnvarapaev@mail.ru

Дорошенко Сергей Александрович, инженер Института проблем механики РАН, 110526, Москва, проспект Вернадского, 101, корп. 1; тел/ факс: +7(026) 364-76-43; e-mail: sad.pochta@gmail.com

Капустин Сергей Александрович, инженер лаборатории УНПЛ ААИСК ФГБОУ ВПО «МГСУ», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(925) 224-46-03; e-mail: ks_aleksvl@mail.ru

Троцко Артем Юрьевич, аспирант кафедры информатики и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Мос-

ковский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/ факс: +7(499) 183-59-94;
e-mail: trotsko@f-m.fm

Vladimir N. Varapaev, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: vnvarapaev@mail.ru

Sergei A. Doroshenko, Engineer, Institute of Problems of Mechanics of the Russian Academy of Sciences; 101, korp. 1, prosp. Vernadskogo, Moscow, 110526, Russia; tel./fax: +7(026) 364-76-43;
e-mail: sad.pochta@gmail.com

Sergei A. Kapustin, Engineer, Laboratory UNPL AAISK, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(925) 224-46-03;
e-mail: ks_aleksvl@mail.ru

Artem Y. Trotsko, postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: trotsko@f-m.fm

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ И СХОДИМОСТЬ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

А.В. Игнатьев, Е.А. Невзорова, Н.С. Самылина

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, г. Волгоград, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье описан алгоритм преобразования разрешающей системы уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода к разрешающим уравнениям МКЭ в форме метода сил или перемещений. Такое преобразование на основе блочного исключения неизвестных по Гауссу дает возможность получить систему уравнений с симметричной положительно определенной матрицей и применять хорошо известные и зарекомендовавшие себя методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений. Приведено сравнение результатов расчета квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки по МКЭ в форме классического смешанного метода и по традиционному МКЭ в перемещениях. Сделан вывод о большей эффективности МКЭ в форме классического смешанного метода.

Ключевые слова: метод конечных элементов, форма классического смешанного метода, матрица откликов, блочное исключение неизвестных по Гауссу

SPECIFICS OF APPLICATION AND CONVERGENCE OF FEM IN THE FORM OF CLASSICAL MIXED METHOD

Alexander V. Ignatyev, Elena A. Nevzorova, Natalia S. Samylyna

Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Volgograd, RUSSIA

ABSTRACT: The article describes the algorithm of transformation of the system of governing equations of the Finite Element Method written in the form of classical mixed method to governing equations of FEM in the form of force or displacement method. Such transformation is based on block Gauss elimination of unknowns and enables to obtain system of equations with symmetric positively defined matrix and to use well-known and reliable methods for solving large systems of linear algebraic equations. Comparison of the results of analyses of square plate with pin-supported edges using FEM in the form of classical mixed method and traditional displacement-based form of FEM is presented. It is concluded that FEM in the form of a classical mixed method demonstrates greater efficiency.

Keyword: Finite Element Method, form of a classical mixed method, response matrix, block Gauss elimination of unknowns

В основе широко применяемого в расчетной практике МКЭ в перемещениях лежит использование матриц жесткости конечных элементов, на которые разделена конструкция, и составление разрешающих уравнений на основе выполнения условий равенства нулю реакций во введенных связях основной системы. В МКЭ на основе классического смешанного метода используется матрица откликов и разрешающие уравнения составляются

на основе равенства нулю реакций во введенных связях и равенства нулю разрывов по направлениям устраненных связей в основной системе смешанного метода.

Если в первом случае разрешающие уравнения являются по физическому смыслу уравнениями равновесия, то во втором они делятся на две группы, одна из которых является уравнениями равновесия, а вторая – условиями совместности деформаций в узлах конечно-элементной сетки.

Точно также вектор грузовых коэффициентов в первом случае состоит из реакций в связях основной системы от нагрузки, а во втором состоит из двух подвекторов, один из которых – реакции во введенных связях, а второй – перемещения по направлениям силовых неизвестных от нагрузки.

Подробно составление разрешающих уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода изложено в работе [1].

В матричном виде эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_p \\ \tilde{\delta}_p \end{Bmatrix} = 0. \quad (1)$$

Здесь:

$$\begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$$

– матрица откликов системы; $[r]$ – матрица реакций в связях основной системы смешанного метода от единичных смещений этих связей; $[\tilde{r}]$ – матрица реакций в связях основной системы от силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных; $[\tilde{\delta}]$ – матрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных от единичных смещений связей основной системы; $[\delta]$ – матрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных; $\{r_p\}$ – вектор реакций во введенных связях от узловых нагрузок, к которым приведена местная нагрузка, распределенная по элементам основной системы; $\{\tilde{\delta}_p\}$ – вектор перемещений по направлению силовых неизвестных от нагрузки в основной системе;

$$\begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}$$

– вектор неизвестных смешанного метода; $\{q\}$ – подвектор неизвестных перемещений; $\{\tilde{q}\}$ – подвектор неизвестных усилий.

На основании теоремы о взаимности реакций и перемещений:

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T.$$

На первом этапе формирование разрешающей системы уравнений происходит путем составления уравнений равновесия и совместности перемещений для всех конечных элементов, сходящихся в каждом из рассматриваемых узлов конечно-элементной сетки. В каждое из этих уравнений входят как кинематические неизвестные q , так и силовые неизвестные \tilde{q} .

Особенностью этой системы уравнений является то, что матрица ее коэффициентов не является симметричной и положительно определенной, и поэтому для ее решения не могут быть применены хорошо известные и зарекомендовавшие себя методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений. Для преодоления этого затруднения предлагается использовать известную процедуру блочного исключения неизвестных по Гауссу для перехода к разрешающей системе уравнений или метода сил, или метода перемещений.

На рис. 1 показана блочная структура уравнения (1) для случая, когда число кинематических неизвестных n меньше числа силовых неизвестных m .

Рассмотрим алгоритм сведения этой системы уравнений к системе уравнений метода сил в случае $m > n$. Развернутая форма блочно-матричного уравнения (2) приведена ниже:

$$\begin{aligned} 1. & \quad r q + \tilde{r}_1 \tilde{q}_1 + \tilde{r}_2 \tilde{q}_2 + R_p = 0, \\ 2. & \quad \tilde{\delta}_1 q + \delta_{11} \tilde{q}_1 + \delta_{12} \tilde{q}_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ 3. & \quad \tilde{\delta}_2 q + \delta_{21} \tilde{q}_1 + \delta_{22} \tilde{q}_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из первого уравнения следует:

$$\begin{bmatrix} r & & \\ (nxn) & \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 \\ \hline \tilde{\delta}_1 & \delta_{11} & \delta_{12} \\ & (nxn) & \\ \hline \tilde{\delta}_2 & \delta_{21} & \delta_{11} \\ & & (mxn) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_p \\ \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Рис. 1. Блочная структура уравнения (1) для случая, когда число кинематических неизвестных меньше числа силовых неизвестных.

$$q = -r^{-1}(\tilde{r}_1\tilde{q}_1 + \tilde{r}_2\tilde{q}_2 + R_p).$$

В результате дальнейших преобразований приходим к разрешающей системе уравнений метода сил:

$$\begin{aligned} &(-\tilde{\delta}_1 r^{-1} \tilde{r}_1 + \delta_{11})\tilde{q}_1 + (-\tilde{\delta}_1 r^{-1} \tilde{r}_2 + \delta_{12})\tilde{q}_2 + \\ &+ (-\tilde{\delta}_1 r^{-1} R_p + \Delta_{1p}) = 0, \\ &(-\tilde{\delta}_2 r^{-1} \tilde{r}_1 + \delta_{21})\tilde{q}_1 + (-\tilde{\delta}_2 r^{-1} \tilde{r}_2 + \delta_{22})\tilde{q}_2 + \\ &+ (-\tilde{\delta}_2 r^{-1} R_p + \Delta_{2p}) = 0. \end{aligned}$$

Если блок $[r]$ нулевой, то процесс перехода к методу сил следует начинать со второго уравнения системы уравнений (3), в котором $[\tilde{\delta}_1]$ – квадратная матрица. Из чего находим:

$$q = -\tilde{\delta}_1^{-1}(\delta_{11}\tilde{q}_1 + \delta_{12}\tilde{q}_2 + \Delta_{1p}).$$

Подставив это выражение в уравнения 1 и 3 системы (3) получаем разрешающую систему уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \tilde{r}_1\tilde{q}_1 + \tilde{r}_2\tilde{q}_2 + R_p = 0 \\ -\delta_2\tilde{\delta}_1^{-1}(\delta_{11}\tilde{q}_1 + \delta_{12}\tilde{q}_2 + \Delta_{1p}) + \delta_{21}\tilde{q}_1 + \delta_{22}\tilde{q}_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Аналогично выполняется преобразование системы уравнений (3) к уравнениям метода перемещений. Однако при этом нужно отме-

тить, что в этих уравнениях в качестве неизвестных будут только линейные кинематические неизвестные q (линейные перемещения узлов сетки КЭ), в отличие от классического МКЭ в перемещениях, в котором в качестве неизвестных есть и углы поворота узловых сечений конечных элементов.

В таблице 1 приведено сравнение результатов расчета квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки по МКЭ в форме классического смешанного метода и по традиционному МКЭ в перемещениях. На рис. 2 проиллюстрирована сходимость к точному решению этих двух форм МКЭ.

Из этого сравнения можно сделать вывод о большей эффективности МКЭ в форме классического смешанного метода.

Примечание: результаты расчетов, выполненных с использованием полученных в результате преобразований разрешающих уравнений метода сил и метода перемещений, полностью совпадают с результатами по смешанному методу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Жиделев А.В. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики // Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет. Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. 172 с.

Таблица 1. сравнение результатов расчета квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки по МКЭ в форме классического смешанного метода и по традиционному МКЭ в перемещениях.

Значение в центре пластины	Сетка 2x2 КЭ	Сетка 4x4 КЭ	Сетка 8x8 КЭ	Сетка 16x16 КЭ	Точное решение
w	0,0041382	0,0041350	0,0040787	0,0040660	0,00406
Процентное расхождение с точным решением	+1,926 %	+1,814 %	+0,461 %	+0,148 %	
w по методу перемещений	0,00345	0,00394	0,00403	0,00406	0,00406
Процентное расхождение с точным решением	-15,025 %	-2,956 %	-0,739 %	0 %	
$M_x = M_y$	0,0559753	0,0485300	0,0479732	0,0479025	0,0479
Процентное расхождение с точным решением	+16,859 %	+1,298 %	+0,153 %	+0,005 %	
$M_x = M_y$ по методу перемещений	0,05720	0,04873			0,0479
Процентное расхождение с точным решением	+19,415 %	+1,733 %			

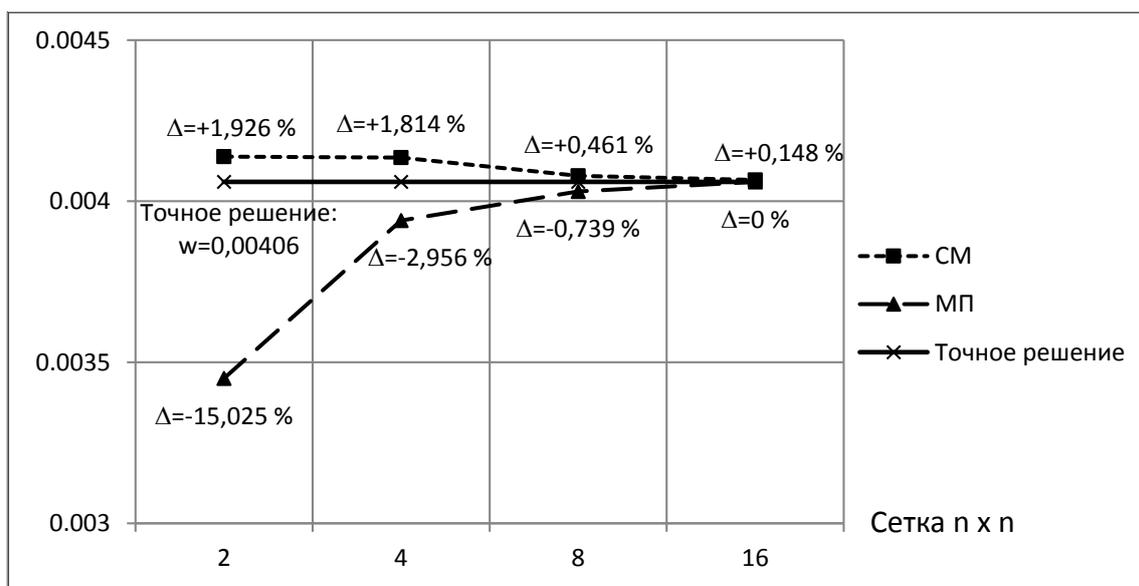


Рис. 2. Сходимость к точному решению.

Игнатьев Александр Владимирович, ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», доцент кафедры строительной механики, кандидат технических наук;
тел.: +7-905-336-06-14; e-mail: alignat@gmail.com

Невзорова Елена Александровна, ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», аспирант кафедры строительной механики; тел.: +7-902-659-2644; e-mail: sittron@list.ru

Самылина Наталья Сергеевна государственный архитектурно-строительный университет», аспирант кафедры строительной механики,
тел.: +7-960-881-7842; e-mail: nsamyлина@yandex.ru

Aleksander V. Ignatyev, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Associate Professor of Chair of Structural Mechanics, Candidate of Engineering Sciences, phone: +7-905-336-06-14;
e-mail: alignat@gmail.com

Elena A. Nevzorova, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Graduate student of Chair of Structural Mechanics, phone: +7-902-659-2644;
e-mail: sittron@list.ru

Natalia S. Samylyna, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Graduate student of Chair of Structural Mechanics, phone: +7-960-881-7842;
e-mail: nsamyлина@yandex.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ РАДИАЛЬНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ТОЧЕЧНЫХ ОПОРАХ

Е.Б. Коренева, В.Р. Гросман

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Получено аналитическое решение задачи о напряжённо-деформируемом состоянии круглой пластины из ортотропного материала с жёсткостью, изменяющейся вдоль радиуса по степенному закону. Изучаемая конструкция опирается на точечные опоры, расположенные вдоль окружности, не совпадающей с контуром. Для получения решений построены функции влияния. Определены функции Коши, для чего использовались свойства определителей Вандермонда. Изучалось действие различного рода неосесимметричных нагрузок; нагрузки, распределённые по всей поверхности пластины, по отрезкам дуг окружности, по площадям круговых прямоугольников. Решения получены в замкнутом виде.

Ключевые слова: круглая пластина, переменная жёсткость, ортотропный материал, точечные опоры, неосесимметричная нагрузка.

ANALYTICAL SOLUTION OF UNSYMMETRIC FLEXURE PROBLEM BY CIRCULAR ORTHOTROPIC PLATE WITH RADUALLY VARYING THICKNESS BASED ON POINT SUPPORTS

Elena B. Koreneva, Valery R. Grosman

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: State of stress and strain of circular plate made from orthotropic material with the flexural rigidity varying along the radius according to power law is considered. The plate under study is based on point supports situated along circumference noncoinciding with the contour. For receiving of the solution the influence functions are determinant. Cauchy functions are obtained, Wandermund's determinator properties are used. An influence of different kinds of nonsymmetric loads is analyzed. The loads distributed over plate's surface, as well as the loading distributed along lengths of arcs and over surfaces of circular rectangles are under study. The solutions are given in the closed farms.

Key words: circular plate, variable flexural rigidity, orthotropic material, point supports, nonsymmetric loads

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$D = D_0 x^m, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad (1)$$

Рассмотрим вопрос о неосесимметричной деформации круглой ортотропной пластины с толщиной, изменяющейся вдоль радиуса по степенному закону

где m - действительное число; r_0 , D_0 - постоянные.

Изучаемая пластина опирается на N точечных опор, расположенных вдоль окружности

с радиусом $x = x_1$, не совпадающей с контуром, и находящихся на одинаковых расстояниях друг от друга.

В литературе известны задачи о расчёте круглых изотропных пластин переменной толщины, находящихся под действием равномерно распределённой нагрузки и опирающихся на контуре в N точках, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга [1].

Ниже будет произведён учёт анизотропии материала и будет изучаться действие нагрузок как распределённых по поверхности пластины, так и разрывного типа, представляющих собой силы, равномерно распределённые вдоль отрезков дуг окружностей, не совпадающих с контуром, а также будут учитываться воздействия, распределённые по площадям круговых прямоугольников.

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения указанных выше задач следует рассмотреть циклически-симметричный изгиб ортотропной круглой пластины [1]. В этом случае деформации пластины изменяются вдоль окружности по закону $\cos k\theta$ или $\sin k\theta$ ($k = 2, 3, \dots$). Подобный изгиб вызывается самоуравновешенной контурной и поверхностной нагрузкой вида

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= Q_k \cos k\theta, \\ M(\theta) &= M_k \cos k\theta, \\ q_z(r, \theta) &= q_k(r) \cos k\theta, \\ &(k = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2)$$

где $Q(\theta), M(\theta)$ – интенсивности контурной поперечной силы и контурного изгибающего момента; $q_z(r, \theta)$ – интенсивность распределённых по поверхности поперечных сил;

Q_k, M_k – постоянные величины; $q_k(r)$ – функция переменной r .

Произвольную нагрузку можно представить рядами

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \sum_{k=0}^{k=\infty} (Q_k \cos k\theta + Q'_k \sin k\theta), \\ M(\theta) &= \sum_{k=0}^{k=\infty} (M_k \cos k\theta + M'_k \sin k\theta), \\ q_z(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{k=\infty} (q_k(r) \cos k\theta + q'_k(r) \sin k\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты рядов (3) определяются по известным формулам теории рядов Фурье. Нагрузка (3) состоит из симметричной нагрузки $Q_0, M_0, q_0(r)$, антисимметричной нагрузки (см. [2]) и циклически-симметричной нагрузки вида (2) см. [2], [3], [4]. Зная решения для этих трех типов нагрузки и используя разложения (3), можно исследовать изгиб пластины, подверженной действию произвольной нагрузки [5], [6], [7]. Циклически-симметричный изгиб возникает, в частности, в случае действия симметричной нагрузки на пластину, опёртую на контуре в нескольких точках, равноудалённых друг от друга, а также при действии на пластину системы равных и равноотстоящих сосредоточенных сил.

Дифференциальное уравнение, описывающее циклически-симметричный изгиб круглой ортотропной пластины радиально-переменной толщины, приведённое в [2], при жёсткости (1) и при внешней нагрузке

$$Q(x, \theta) = \sum_j \sum_k q_{j,k} x^j \cos k\theta \quad (4)$$

принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2(1+m)}{x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\
 & + \frac{m(m+\sigma+1)-n^2}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{(n^2-m\sigma)(1-m)}{x^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & + \frac{2(c_0+\sigma)}{x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \\
 & - \frac{2(c_0+\sigma)(1-m)}{x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + \\
 & + \left(\frac{2(c_0+\sigma)(1-m)-n^2(m-2)}{x^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{m\sigma(m-1)}{x^4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{n^2}{x^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \\
 & = \frac{I_0^4}{D_0 n_2} \sum_j \sum_k q_{j,k} x^{1-m} \cos k\theta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Параметры $n^2 = n_1 n_2$ определяются из соотношений

$$E_r = \frac{E}{n_1}, \quad E_\theta = E n_2, \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{n^2}, \quad \sigma_\theta = \sigma. \tag{6}$$

Здесь E и σ – приведённые модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для изотропной пластины $n_1 = n_2 = 1$; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига;

$$G_\theta = \frac{2(n^2 - \sigma^2)G_{r\theta}}{E n_2}.$$

Ищем решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5), в следующей форме

$$w(x, \theta) = \sum_k w_k(x) c \cos k\theta \tag{7}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5), зависит от значений корней характеристического уравнения, которое записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \gamma(\lambda) = L^2 - L \left[2(c_0 + \sigma)k^2 + m(1 - \sigma) + \right. \\
 \left. + n^2 - 1 \right] + k^2 \left[k^2 n^2 - m^2 \sigma + \right. \\
 \left. + m(2c_0 + 3\sigma + n^2) - 2(c_0 + \sigma + n^2) \right] = 0; \\
 L = \lambda(\lambda + m - 2).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Вычисления показывают, что корни характеристического уравнения (8) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ могут быть либо все действительными числами, либо все попарно комплексносопряжёнными, либо два первых корня могут представлять собой действительные числа, а два последующих быть комплексносопряжёнными.

Приведём общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5):

$$\begin{aligned}
 w = w_1(x, \theta) = (A_{1,k} x^{\lambda_1} + A_{2,k} x^{\lambda_2} + \\
 + A_{3,k} x^{\lambda_3} + A_{4,k} x^{\lambda_4}) \cos k\theta.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ниже будем рассматривать случаи, когда все корни характеристического уравнения действительны; тогда их можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = b + c, \quad \lambda_2 = b + d, \\
 \lambda_3 = b - c, \quad \lambda_4 = b - d.
 \end{aligned}$$

3. УЧЁТ РЕАКЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ОПОР, РАЗРЫВНЫХ НАГРУЗОК И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Интенсивность опорных реакций можно представить выражением

$$Q = -\frac{q_0 x_1}{2} - q_0 x_1 \sum_{k=N, 2N, \dots}^{\infty} \cos k\theta. \quad (10)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения рассматриваемой задачи выбираем в виде:

$$w = w' + w'' \quad (11)$$

Здесь w' означает частное решение уравнения, описывающего осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины с жёсткостью (1) под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q_0 , w'' – частное решение задачи о циклически-симметричном изгибе той же пластины.

Для решения поставленной задачи следует определить функции Коши:

$$Z_{1,k}(x_1; x), Z_{2,k}(x_1; x), Z_{3,k}(x_1; x), \\ Z_{4,k}(x_1; x),$$

свойства которых описаны в [2], [8]. При их вычислении используются свойства определителей Вандермонда и формулы Крамера. В результате получим:

$$Z_{1,k}(x_1; x) = \frac{x_1^{-b} x^b}{2(c^2 - d^2)} \left\{ \frac{(b^2 - d^2)}{c} \times \right. \\ \times [(b+c)x_1^c x^{-c} - (b-c)x_1^{-c} x^c] + \\ \left. + [(b-d)x_1^{-d} x^d - (b+d)x_1^d x^{-d}] \times \right. \\ \left. \times \frac{(b^2 - c^2)}{d} \right\}, \quad (12)$$

$$Z_{2,k}(x_1; x) = \frac{x_1^{-b+1} x^b}{2(c^2 - d^2)} \times \\ \times \left\{ \frac{x_1^{-c} [3b(b-1) + c(1-2b) - d^2]}{c} x^c - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1^{-d} [3b(b-1) + d(1-2b) - c^2]}{d} x^d + \right. \\ \left. + \frac{x_1^c [-3b(b-1) + c(1-2b) + d^2]}{c} x^{-c} - \right. \\ \left. - \frac{x_1^d [-3b(b-1) + d(1-2b) + c^2]}{d} x^{-d} \right\},$$

$$Z_{3,k}(x_1; x) = \frac{x_1^{-b+2} x^b}{2cd(c^2 - d^2)} \times \\ \times \left\{ -x_1^{-c} d [3(b-1) - c] x^c + x_1^{-d} c \times \right. \\ \times [3(b-1) - d] x^d + x_1^c d [3(b-1) + c] x^{-c} - \\ \left. - x_1^d c [3(b-1) + d] x^{-d} \right\},$$

$$Z_{4,k}(x_1; x) = \frac{x_1^{-b+3}}{2(c^2 - d^2)} \times \\ \times \left\{ \frac{x_1^{-c}}{c} x^{b+c} - \frac{x_1^{-d}}{d} x^{b+d} - \frac{x_1^c}{c} x^{b-c} + \frac{x_1^d}{d} x^{b-d} \right\}.$$

Отметим частный случай, когда пластина изотропна и жёсткость её изменяется вдоль радиуса по квадратичному закону, т.е. положим в (1) $m = 2$. Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения при $k = 0$ содержит логарифмический член. Указанное общее решение имеет вид:

$$w(x, \theta) = (A_{1,k} x^{\lambda_1} + A_{2,k} x^{\lambda_2} + \\ + A_{3,k} x^{\lambda_3} + A_{4,k} x^{\lambda_4}) \cos k\theta, \quad k \neq 0; \quad (13)$$

$$w(x) = (A_{1,0} + A_{2,0} \ln x + \\ + A_{3,0} x^{m_1} + A_{4,0} x^{-m_1}), \quad k = 0, \quad (14)$$

где

$$m_1 = \sqrt{k^2 + 2(1-\sigma)}, \quad x = \frac{r}{r_0}.$$

Приведём для этого случая выражения для функций Коши $Z_{3,k}$ и $Z_{4,k}$:

$$Z_{3,k}(x_1; x) = \frac{1}{4(1-\sigma)} \times \left[-\frac{x_1^{-k+2}(k+3)}{k} x^k - \frac{x_1^{k+2}(k-3)}{k} x^{-k} + \frac{x_1^{-m_1+2}(m_1+3)}{m_1} x^{m_1} + \frac{x_1^{m_1+2}(m_1-3)}{m_1} x^{-m_1} \right], k \neq 0; \quad (15)$$

$$Z_{4,k}(x_1; x) = \frac{1}{4(1-\sigma)} \left[-\frac{x_1^{-k+3}}{k} x^k + \frac{x_1^{k+3}}{k} x^{-k} + \frac{x_1^{-m_1+3}}{m_1} x^{m_1} - \frac{x_1^{m_1+3}}{m_1} x^{-m_1} \right], k \neq 0;$$

при $k=0$:

$$Z_{4,0}(x_1; x) = \frac{1}{4(1-\sigma)} \left[\frac{x_1^{-m_1+3}}{m_1} x^{m_1} + 2x^3 \ln x_1 - 2x_1^3 \ln x - \frac{x_1^{m_1+3}}{m_1} x^{-m_1} \right] \quad (16)$$

Для учёта реакций точечных опор R_1 введём в рассмотрение фундаментальные функции, в частности функцию $w_{4,k}(x_1; x)$ [2], которая определяется выражением

$$w_{4,k}(x_1, x) = -\frac{1}{n_2 D(x_1)} \times Z_{4,k}(x_1, x), \quad (17)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

Обозначим радиусы внутреннего и внешнего контуров соответственно через b_1 и b_2 ; $b_1 < x_1 < b_2$.

Прогибы пластин при $b_1 \leq x \leq x_1$ определяются зависимостью (9). Запишем выражение

для прогибов при $x_1 < x \leq b_2$, обозначая реакции опор через R_N :

$$w = w_2(x, \theta) = w_1(x, \theta) + \frac{R_N N r_0^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} w_{4,0}(x_1; x) + \sum_{k=N, 2N, \dots}^{\infty} w_{4,k}(x_1; x) \cos k\theta \right\}. \quad (18)$$

Постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 и реакции R_N определяются из условий на внутреннем при $x = b_1$ и внешнем при $x = b_2$ контурах и из условий, что в точках опирания

$$\left(x = x_1; \theta = 0, \frac{2\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N} \right)$$

имеем:

$$w_{x=x_1; \theta=0, \dots} = (w')_{x=x_1} + (w'')_{x=x_1; \theta=0, \dots} = 0. \quad (19)$$

Далее рассмотрим действие на пластину с жёсткостью (1) разрывных циклически-симметричных нагрузок.

Сначала изучим действие на пластину нагрузки q , равномерно распределённой по отрезкам дуг, имеющих длину $2\alpha x_2$, где 2α - удвоенный центральный угол (рис.1) $x_1 < x_2 < b_2$; x_2 - радиус окружности, по отрезкам которой распределена нагрузка q .

Представим нагрузку в виде ряда

$$q(\theta) = \frac{qa\ell}{\pi} \cdot \frac{2q\ell}{\pi} \sum_{k=\ell, 2\ell}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} \cos k\theta, \quad (20)$$

где ℓ - число отрезков дуг.

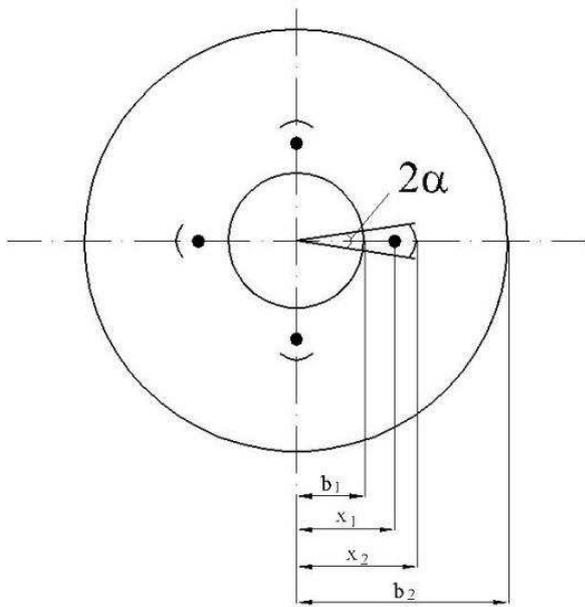


Рис. 1. Пластина, нагруженная действием нагрузок, распределённых по длинам дуг.

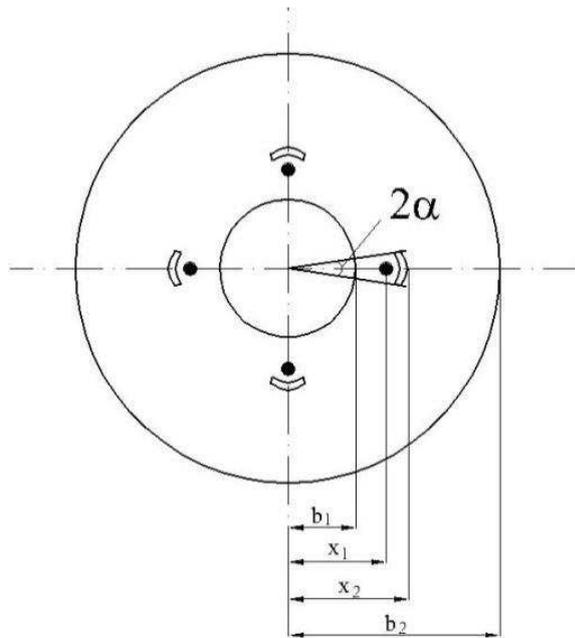


Рис. 2. Пластина, нагруженная действием нагрузок, распределенных по площадям круговых прямоугольников.

Здесь в решении также используется функция влияния $w_4(x_2; x)$.

В этом случае выражение для прогиба при $x_2 < x < b_2$:

$$w = w_1(x, \theta) + \frac{q\alpha l r_0^3}{\pi} \left\{ w_{4,0}(x_2; x) + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=\ell, 2\ell}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} w_{4,k}(x_2; x) \cos k\theta \right\}. \quad (21)$$

Изучим действие на пластину нагрузки p , равномерно распределённой по площади круговых прямоугольников (рис.2). Для этого интегрируем выражение (21) по координате x .

При $x_2 < x < x_3$ для точек, расположенных в пределах прямоугольника, выражение для прогиба имеет вид

$$w(x, \theta) = w_2(x, \theta) + F_0 + 2 \sum_{k=\ell, 2\ell}^{\infty} F_k \cos k\theta, \quad (22)$$

где

$$F_k = -\frac{p\alpha l r_0^4}{\pi D_0 n_2 (c^2 - d^2)} \frac{\sin k\alpha}{k} \times \left\{ \frac{2x^{-m+4}(c^2 - d^2)}{\left[(-b-m+4)^2 - c^2 \right] \left[(-b-m+4)^2 - d^2 \right]} - x^b x_2^{-b-m+4} \left\{ \frac{1}{c} \left[\frac{x^c x_2^{-c}}{(-b-m+4-c)} - \frac{x^{-c} x_2^c}{(-b-m+4+c)} \right] + \frac{1}{d} \left[\frac{x^{-d} x_2^d}{(-b-m+4+d)} - \frac{x^d x_2^{-d}}{(-b-m+4-d)} \right] \right\} \right\}$$

Слагаемое F_0 в отличие от F_k имеет перед фигурной скобкой множитель

$$\left[p\alpha l r_0^4 / 2\pi D_0 n_2 (c^2 - d^2) \right];$$

числа b, c, d в выражении для F_0 соответствуют члену $k = 0$.

Для изотропной пластины с квадратичным законом изменения жёсткости F_0 и F_k определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 F_0 = & -\frac{\rho \alpha l r_0^4}{4\pi D_0 (1-\sigma)} \left\{ \frac{m_1^2 x^2}{2(4-m_1^2)} - \right. \\
 & -x_1^2 \ln x_1 + \frac{x_1^2}{2} + x_1^2 \ln x_1 - \frac{x_1^{2-m_1}}{m_1(2-m_1)} x^{m_1} + \\
 & \left. + \frac{x_1^{2+m_1}}{m_1(2+m_1)} x^{-m_1} \right\}; \\
 F_k = & -\frac{\rho \alpha l r_0^4 \sin k\alpha}{\pi D_0 k} \left\{ \frac{x^2}{(4-k^2)(4-m_1^2)} + \right. \\
 & + \frac{1}{4(2-\sigma)} \left[\frac{x_1^{2-k}}{k(2-k)} x^k - \frac{x_1^{2+k}}{k(2+k)} x^{-k} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x_1^{2-m_1}}{m_1(2-m_1)} x^{m_1} + \frac{x_1^{2+m_1}}{m_1(2+m_1)} x^{-m_1} \right] \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе в замкнутом виде получены решения ряда задач неосесимметричного изгиба круглых ортотропных пластин на точечных опорах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коваленко А.Д.** Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
2. **Коренева Е.Б.** Аналитические методы расчёта пластин переменной толщины и их практические приложения М.:АСВ, 2009. – 240 с.
3. **Koreneva E.B.** Supports of high-rise structures with circular base. // Proc. of IASS Symposium 1995-Spatial Structures: Herit-

- age, Present and Future. Milan, Italy, vol.2, 1995, pp. 1345-1352.
4. **Kreis M.G.** Kreisringplatten unter anti-symmetrischer Belastung. Budapest: Academiai Kiado, 1973, 294 p.
5. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины переменной толщины, лежащей на упругом основании. // Вестник МГСУ, 2011, №8, с. 156-159.
6. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Обобщенные решения Конуэя на некоторые задачи статики и колебаний круглых пластин, сделанных из ортотропного материала // Строительная механика и расчёт сооружений, №6, 2013, с. 31-35.
7. **Гросман В.Р.** Неосесимметричные задачи статики и колебаний круглых ортотропных и изотропных пластин // Строительная механика и расчёт сооружений, №2, 2014, с.14-17.
8. **Koreneva E.B.** The flexure of orthotropic and isotropic semi-infinite rectangular plates of varying thickness subjected to an action of discontinuous loading // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Vol.1, Issue 2, 2005, pp. 43-49.

Коренева Елена Борисовна, д.т.н., профессор, кафедра информатики и прикладной математики; Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru

Гросман Валерий Романович, кафедра информатики и прикладной математики; Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; e-mail: ipm@mgsu.ru

Elena B. Koreneva, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA; e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru

Valery R. Grosman, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA; e-mail: ipm@mgsu.ru

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ ГРУНТА, С УЧЕТОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИХ ВОЗВЕДЕНИЯ

С.Б. Косицын, Чан Суан Линь

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Приведены результаты статических расчетов системы «грунтовой массив – пересекающиеся оболочки тоннельных обделок» на основе различных пространственных моделей, как без учета, так и с учетом геометрической и физической нелинейностей основания. Учтено возможное одностороннее взаимодействие между контактирующими объектами. Выполнен численный анализ напряженно – деформированных состояний систем.

Ключевые слова: пересекающиеся цилиндрические оболочки, грунтовой массив, одностороннее взаимодействие, контактные элементы, тоннель, последовательность возведения

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATES OF INTERSECTING CYLINDRICAL SHELLS OF TUNNELS, INTERACTING WITH THE SURROUNDING ARRAY GROUND, WITH REGARD TO THE SEQUENCE OF THEIR CONSTRUCTION

Sergey B. Kositsyn, Tran Xuan Linh

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This article shows the results of static calculations of the system “ground - intersecting shell tunnel lining” at various three-dimensional models, as without consideration and with the account of geometrical and physical nonlinearity foundation. A possible unilateral interaction between the contact objects is considered. The numerical analysis of the stress - strain state system is performed.

Key words: intersecting cylindrical shells, soil array, unilateral interaction, contact element, tunnel, sequence of construction.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрены ортогонально пересекающиеся цилиндрические оболочки, моделирующие тоннельные обделки. Обделка большого тоннеля изготовлена из монолитного бетона марки Б40 со следующими характеристиками: модулем упругости $E = 3.6 \cdot 10^{10}$ н/м², ко-

эффициентом Пуассона $\mu = 0.2$, плотностью $\rho = 2400$ кг/м³, а маленького примыкающего тоннеля – из монолитного бетона марки Б25 со следующими характеристиками: модулем упругости $E = 3 \cdot 10^{10}$ н/м², коэффициентом Пуассона $\mu = 0.2$, плотностью $\rho = 2400$ кг/м³. Вследствие наличия арматуры (не более 3% по объему) [1] в обделках их модуль упруго-

сти и плотность увеличены: для большого тоннеля $E = 4.11 \cdot 10^{10}$ н/м² и $\rho = 2500$ кг/м³, для малого – $E = 3.528 \cdot 10^{10}$ н/м² и $\rho = 2500$ кг/м³. Внутренние диаметры обделок тоннелей равны соответственно 5.6 м и 3.0 м, а их толщины – 0.3 м и 0.2 м. Пересекающиеся

оболочки заложены на глубине 20 м в неоднородном грунтовом массиве, состоящем из шести разных слоев (рис. 1). Каждый слой считался однородным изотропным. Основные физико-механические характеристики слоев грунта приведены в таблице 1.

Таблица 1. Основные физико-механические характеристики слоев грунта

Наименование грунтов	Модуль деформации E (10^7 Па)	Коэффициент Пуассона μ	Плотность (кг/м ³)	Сцепление (КПа)	Угол внутреннего трения (градусы)
Насыпной грунт	3.3	0.3	1600	–	–
Песок среднезернистый	4.0	0.3	2000	2.0	38
Супесь средней плотности	2.4	0.32	1970	17	29
Супесь плотная	2.4	0.3	2200	15	26
Песок мелкозернистый	3.8	0.3	1960	4	36
Суглинок мягко – пластичный	1.7	0.35	2100	25	19

Размеры массива подобраны из условий затухания его напряженно – деформированного состояния (НДС) и приняты равными трем диаметров тоннелей в соответствующие стороны [2]. Границы двух нижних слоев – наклонные, что нарушает симметрию задачи. Нижняя граница массива закреплена от вертикальных перемещений, а боковые – от горизонтальных по нормальям к поверхностям. Для оценки влияния разных моделей грунтов на НДС оболочек проведены три расчета системы «грунтовый массив – оболочки тоннельных обделок» с учетом особенностей контактного взаимодействия объектов. Использован программный конечноэлементный комплекс MSC PATRAN – NASTRAN. Сетки конечных элементов (КЭ) построены с учетом особенностей геометрии областей со сгущением в местах отверстий. Применены различные типы КЭ: тетраэдр (TET4) и параллелепипед (HEX8) для дискретизации массива, четырехузловые плоские элементы

(QUAD4) для аппроксимации оболочек и одномерные контактные элементы (GAP). Общее количество КЭ составило ~ 280 000. Во всех трех случаях материалы оболочек считались линейно упругими. Система нагружена собственным весом грунтов и тоннельных обделок с учетом коэффициентов надежности по нагрузке [3].

2. ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ ГРУНТЫ, ЖЕСТКИЙ КОНТАКТ ОБОЛОЧЕК С МАССИВОМ

В первом случае использован самый простой и популярный подход, применяемый в расчетах подобных подземных сооружений. Все материалы (как грунтов, так и оболочек) приняты линейно упругими. Контакт между ними – полный жесткий. Задача решена в линейной постановке.

Численный анализ напряженно-деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения

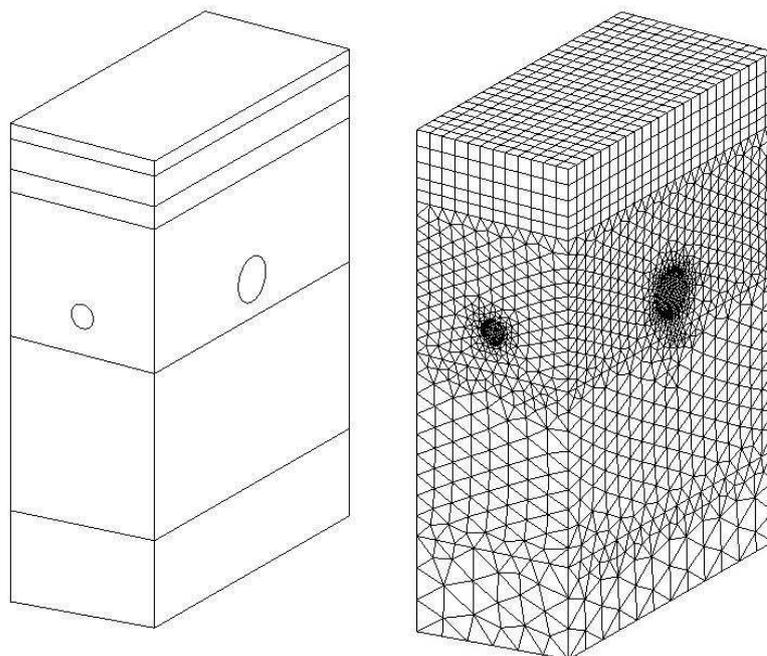


Рис 1. Грунтовый массив с пересекающимися оболочками и конечноэлементная модель пространственной системы «оболочки – массив».

Основные компоненты НДС системы (максимальные вертикальные напряжения в массиве ($\sigma_{угр}$), максимальные окружные напряжения во внутренних волокнах большой оболочки ($\sigma_{\theta бол.об}$), малой оболочки ($\sigma_{\theta мал.об}$) и максимальные перемещения обделок ($w_{об}$)) представлены в таблице 2 (вариант 1).

3. ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ ГРУНТЫ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ОДНОСТОРОННЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОЛОЧЕК И ГРУНТОВОГО МАССИВА

В отличие от предыдущего случая между грунтовым массивом и заложенными в нем оболочками поставлены односторонние контактные элементы (в программном комплексе NASTRAN их называют GAP элементами), что обеспечивает возможность одностороннего взаимодействия контактирующих объектов. Эти контактные элементы имеют большую жесткость при сжатии и близкую к нулю жесткость при растяжении. Длина GAP элементов принята близкой к нулю. Задача

решена с учетом геометрической нелинейности и в конструктивно нелинейной постановке в связи с необходимостью итерационного процесса отыскания зоны «отлипания» конструкций от окружающего грунта. Соответствующие результаты расчета показаны в таблице 2 (вариант 2).

4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ГРУНТЫ С УЧЕТОМ ОДНОСТОРОННЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОЛОЧЕК И ГРУНТОВОГО МАССИВА

Расчетная модель осталась такой же, как и во втором случае, но здесь учтены пластические свойства грунтов. Поведение грунтов определено упруго – пластической моделью Друкера – Прагера [4]. В данном случае модель реализует упругое идеально – пластическое поведение грунтов, то есть без упрочнения. Функция текучести модели Друкера – Прагера записана в виде:

$$f(I_1, I_2) = \sqrt{I_2} - \alpha I_1 - k, \quad (1)$$

где I_1, I_2 – инварианты, α и k параметры, характеризующие свойства материала, которые можно связать со сцеплением c и углом внутреннего трения φ следующими соотношениями:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}. \quad (2)$$

Поверхность текучести согласно модели Друкера – Прагера является правильным круговым конусом относительно гидростатической оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ в пространственной системе главных напряжений.

Задача решена с учетом геометрической и физической нелинейностей. На рис. 2, а) и б) соответственно показаны поля вертикальных напряжений в массиве в бытовом состоянии и согласно третьему варианту расчета, а на рис. 3 – деформированный вид оболочек в увеличенном масштабе. Под действием собственного веса грунтов и обделок оболочки сплющиваются. Основные показатели НДС системы помещены в таблице 2 (вариант 3). В этой же таблице показаны максимальные осадки поверхности грунта в бытовом состоянии $\Delta_{\text{осад.}}$.

5. УПРУГО – ПЛАСТИЧЕСКИЕ ГРУНТЫ С УЧЕТОМ ОДНОСТОРОННЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОЛОЧЕК И ГРУНТОВОГО МАССИВА, А ТАКЖЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВОЗВЕДЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

Величины полных перемещений конструкций во всех случаях оказались слишком большими (порядка метра). Эти перемещения включают осадки грунтов, которые произошли еще до начала строительства подземных сооружений. Максимальная осадка поверхности грунта в первоначальном состоянии, то есть до начала возведения обделок тоннелей ($\Delta_{\text{осад.}}$), показана в таблице 2. Это состояние принято называют бытовым, а со-

ответствующие напряжения и перемещения – бытовыми. На рис. 2, а) показано поле вертикальных напряжений массива в бытовом состоянии. Чтобы получить реальные перемещения оболочек, возникшие за счет сооружения тоннелей, нужно вычесть из полученных результатов $w_{\text{об}}$ бытовые перемещения их точек. Линейная задача это сделать позволяет, а для нелинейной задачи (с учетом пластических деформаций) следует учесть технологию возведения конструкции и проводить расчеты по этапам. Этой проблеме посвящен данный раздел. Расчет проведен по двум этапам с учетом геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. На первом этапе (бытовое состояние) определены НДС системы. На втором этапе выкапывают отверстия и одновременно вставляют обделку тоннелей. В качестве дополнительной нагрузки в каждом узле окружающего оболочки массива грунта введены шесть компонентов напряжений. Эти напряжения называются начальными напряжениями. Основные результаты расчета приведены в таблице 2 (вариант 4) и показаны на рис. 2, в) и 4, г). Окружные напряжения в оболочках обделок тоннелей существенно снизились (~41%) по сравнению с третьим вариантом. Максимальное полное перемещение оболочек составило $2.09 \cdot 10^{-2}$ м.

6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Максимальные перемещения в оболочках получили точки верхней части большого тоннеля во всех вариантах расчетов.
2. Максимальные вертикальные напряжения в массиве ($\sigma_{\text{угр}}$) возникли на нижней границе последнего слоя за счет собственного веса грунтов и обделок. Наибольшие напряжения $\sigma_{\text{угр}}$ дает первый вариант.

Численный анализ напряженно-деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения

Таблица 2. Основные результаты расчета.

Компоненты НДС	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$\sigma_{\text{угр}}, 10^6 \text{ Па}$	1.442	1.438	1.438	1.422
$\sigma_{\text{бол.об}}, 10^7 \text{ Па}$	4.709	5.498	5.602	3.296
$\sigma_{\text{мал.об}}, 10^7 \text{ Па}$	3.859	3.882	3.906	2.363
$W_{\text{об}}, \text{ М}$	1.001	1.003	1.003	$2.09 \cdot 10^{-2}$
$\Delta_{\text{осад.}}, \text{ М}$	1.173	1.173	1.173	1.173

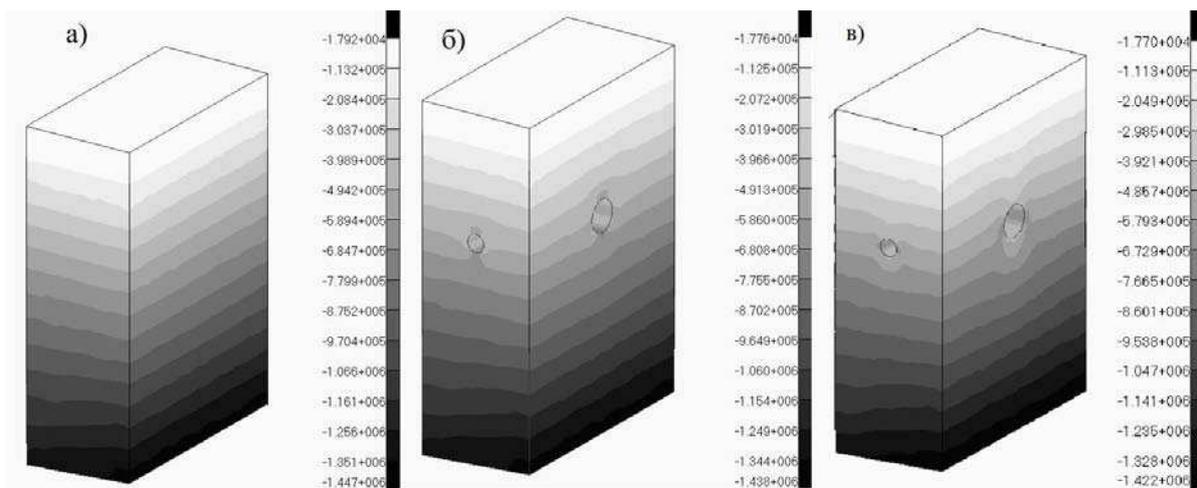


Рис. 2. Поля вертикальных напряжений в массиве: а) в бытовом состоянии; б) согласно третьему варианту расчета; в) согласно четвертому варианту расчета

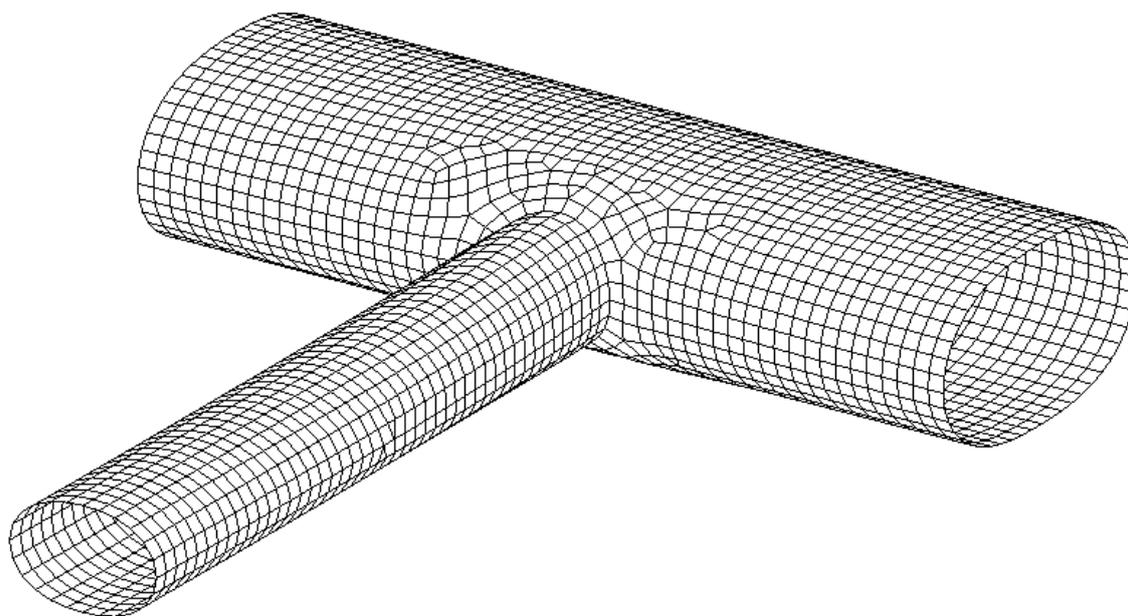


Рис. 3. Деформированный вид оболочек тоннельных обделок с учетом физической и геометрической нелинейностей грунтов и последовательности их возведения.

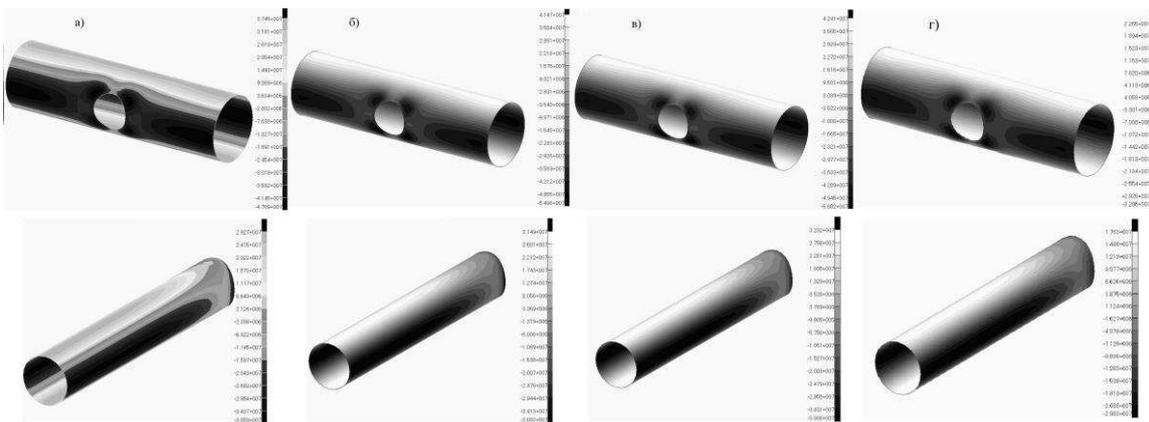


Рис. 4. Поля окружных напряжений во внутренних волокнах оболочек тоннельных обделок: а) вариант 1; б) вариант 2; в) вариант 3; г) вариант 4.

- Во всех случаях максимальные окружные напряжения ($\sigma_{\text{обл.об}}$) возникли в точках большой оболочки, расположенных непосредственно в зоне примыкания тоннелей (рис. 4). Расчет с учетом возможного одностороннего взаимодействия и пластических деформаций грунтов дает наибольшие напряжения $\sigma_{\text{обл.об}}$ (соответственно на 19% и 2% больше, чем варианты 1 и 2). Именно эту расчетную модель рекомендуется применять в практических расчетах подземных сооружений.
- Расчет объекта с учетом последовательности возведения оболочек обделки тоннелей дает пониженные компоненты НДС системы как в оболочках, так и в грунте. В грунте это объясняется тем, что вес оболочек обделок меньше, чем вес удаленного грунта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- СНиП 2.05.03-84*. Мосты и трубы. М.: ФГУП ЦПП, 1996. 242 с.
- Чан Суан Линь. Оценка размеров массива грунта, задаваемого при пространственных расчетах подземных сооружений, исходя из условий затухания его напряженно – деформированного состояния // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. № 4. М.: РУДН, 2013. – С. 41 – 43.
- СНиП 32-04-97. Тоннели железнодорожные и автодорожные. М.: ФАУ «ФЦС», 2012. 132 с.
- Строкова Л.А. Применение метода конечных элементов в механике грунтов. – М.: Издательство Томского политехнического университета, 2010. – 143 с.

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;
e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Чан Суан Линь, аспирант Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127944, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;
e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

Sergey B. Kositsyn, Dr.Sc., Professor; Moscow State University of Railway Engineering; Obrazsova str. 9, bld. 9, 127944, Moscow, RUSSIA,
e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Tran Xuan Linh, Moscow State University of Railway Engineering, Obrazsova str. 9, bld. 9, 127944, Moscow, RUSSIA, e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ СВОЙСТВ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Р.Л. Лейбов

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье представлен метод улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления на границе областей действия двух линейных моделей. Одна из двух линейных моделей считается известной, а матрицы другой оцениваются по переходным процессам нелинейной модели, пересекающим границу областей действия двух линейных моделей. Для уменьшения ошибок кусочно-линейной модели при оценивании используется билинейная модель нелинейного объекта. Приведены результаты применения предлагаемого метода при создании кусочно-линейной модели авиационного газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: нелинейный объект, кусочно-линейная модель, переходные процессы нелинейной модели, оценивание матриц линейной модели с помощью билинейной модели

NONLINEAR PLANT PIECE-WISE LINEAR MODEL IMPROVEMENT TECHNIQUE USING BILINEAR MODEL

Roman L. Leibov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This paper presents a nonlinear plant piecewise-linear model improvement technique on the border of two linear models application areas. The matrices of the first linear model assumed to be known and the matrices of the other one are estimated using nonlinear model time responses that cross the border of two linear models application areas. A bilinear model is used to reduce piecewise-linear model errors. The results of proposed method application for aircraft turbofan engine piecewise-linear model formation are presented.

Key words: Nonlinear plant, piecewise-linear model, nonlinear model time responses, linear model matrix estimation using bilinear model

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценивание матричных параметров кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления, необходимо для разработки алгоритмов обнаружения, локализации и парирования отказов и связанных с ними алгоритмов оптимального оценивания состояния систем автоматического управления (САУ). Для этих алгоритмов важна точность используемой при их разработке кусочно-линейной модели, в частности, на границах областей

действия разных линейных моделей. В данной работе для уменьшения ошибок кусочно-линейной модели на одной из таких границ используется билинейная модель нелинейного объекта управления.

2. ЛИНЕЙНАЯ И БИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Нелинейная модель объекта управления, имеет вид [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{x} — вектор состояния, \mathbf{u} — вектор управления, \mathbf{w} — вектор внешних воздействий, а \mathbf{f} — нелинейная вещественная векторная функция. Координаты вектора состояния (переменные состояния) такого объекта управления, например авиационного газотурбинного двигателя (ГТД), это частоты вращения роторов, температуры и давления в различных сечениях проточной части двигателя. Координаты вектора управления (переменные управления) — это расход топлива, изменяемые геометрические характеристики проточной части двигателя, в частности, площадь критического сечения реактивного сопла и углы поворота направляющих аппаратов вентилятора и компрессора. Координаты вектора внешних воздействий (переменные внешних воздействий) это угол отклонения рычага управления двигателем (управляющее воздействие), а также высота и скорость полета (переменные внешних условий). Постоянное управляющее воздействие и внешние условия, входящие в вектор ${}_s\mathbf{w}$, определяют установившийся режим работы двигателя (рабочую точку), которому соответствуют вектор установившихся значений переменных управления ${}_s\mathbf{u}$ и вектор установившихся значений переменных состояния ${}_s\mathbf{x}$.

В небольшой окрестности произвольного r -ого установившегося режима нелинейный объект управления можно [1] приближенно описать с помощью линейной модели в нормированных отклонениях от установившихся значений

$$\dot{\mathbf{x}}^n = {}^r\mathbf{A}(\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) + {}^r\mathbf{B}(\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n), \quad (2)$$

или

$$\dot{x}_i^n = {}^r_i\mathbf{a}(\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) + {}^r_i\mathbf{b}(\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

или

$$\dot{x}_i^n = \begin{bmatrix} {}^r_i\mathbf{a} & {}^r_i\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{x}^n — n -мерный вектор нормированных переменных состояния, а \mathbf{u}^n — m -мерный вектор нормированных переменных управления

$$x_i^n = \frac{x_i}{\max_s |x_i|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$u_i^n = \frac{u_i}{\max_s |u_i|}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

$${}^r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^r_1\mathbf{a} \\ \dots \\ {}^r_n\mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$${}^r\mathbf{B} = \begin{bmatrix} {}^r_1\mathbf{b} \\ \dots \\ {}^r_n\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (8)$$

матрицы динамической линейной модели для r -ого установившегося режима.

Поскольку для установившихся значений нормированных переменных состояния и управления справедливы соотношения

$$\mathbf{0} = {}^r\mathbf{A}({}_s\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) + {}^r\mathbf{B}({}_s\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n), \quad (9)$$

$$({}_s\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) = {}^r\mathbf{S}({}_s\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n), \quad (10)$$

то

$${}^r\mathbf{S} = -{}^r\mathbf{A}^{-1} {}^r\mathbf{B}, \quad (11)$$

$${}^r\mathbf{B} = -{}^r\mathbf{A} {}^r\mathbf{S}, \quad (12)$$

$${}^r_i\mathbf{b} = -{}^r_i\mathbf{a} {}^r\mathbf{S}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где ${}^r\mathbf{S}$ — матрица статической линейной модели.

Соответственно,

$$\dot{\mathbf{x}}^n = {}^r\mathbf{A}[(\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) - {}^r\mathbf{S}(\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n)], \quad (14)$$

$$\dot{x}_i^n = {}^r_i\mathbf{a}[(\mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n) - {}^r\mathbf{S}(\mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$\dot{x}_i^n = \begin{bmatrix} {}^r_i\mathbf{a} & -{}^r_i\mathbf{a} {}^r\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^n - {}_s\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^n - {}_s\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления

В окрестности произвольного r -ого установившегося режима нелинейный объект управления также можно приближенно описать с помощью билинейной модели в нормированных отклонениях от установившихся значений

$$\dot{x}_i^n = \begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n, \quad (17)$$

где $r_i \Gamma$ симметрические матрицы.

Рассмотрим производные правых частей этих уравнений [2]

$$\frac{d \left(\begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix} \right)}{d \begin{bmatrix} x^n \\ u^n \end{bmatrix}^T} + \frac{d \left(\begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix} \right)}{d \begin{bmatrix} x^n \\ u^n \end{bmatrix}^T} = \begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \frac{d \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}}{d \begin{bmatrix} x^n \\ u^n \end{bmatrix}^T} + \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T \frac{d \begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix}}{d \begin{bmatrix} x^n \\ u^n \end{bmatrix}^T} + \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T (r_i \Gamma^T + r_i \Gamma) \frac{d \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}}{d \begin{bmatrix} x^n \\ u^n \end{bmatrix}^T} = \begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x^n - r & x^n \\ u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma, \quad i=1, \dots, n. \quad (18)$$

Значения этих правых частей и их первых производных в точке

$$\begin{bmatrix} r & x^n \\ s & x^n \\ r & u^n \\ s & u^n \end{bmatrix}$$

будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma \begin{bmatrix} r & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} r & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma = \begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n. \quad (20)$$

Соответственно, линейная модель в окрестности этой точки описывается с помощью (4).

Рассмотрим теперь линейную и билинейную модели в точке

$$\begin{bmatrix} r-1 & x^n \\ s & x^n \\ r-1 & u^n \\ s & u^n \end{bmatrix},$$

которая соответствует соседнему установившемуся режиму. Для правых частей обеих моделей при установившемся режиме должны выполняться условия

$$\begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r-1 & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} r & a_i & r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r-1 & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r-1 & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix}^T r_i \Gamma \begin{bmatrix} r-1 & x^n - r & x^n \\ s & u^n - r & u^n \end{bmatrix} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (22)$$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix} = 0, \quad i=1, \dots, n. \quad (23)$$

Это условие задает набор ограничений в виде равенств для элементов матриц билинейной модели.

Значения первых производных правых частей билинейной модели в точке

$$\begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}$$

равны

$$[{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b}] + 2 \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma, \quad i=1, \dots, n, \quad (24)$$

следовательно, линейная модель в окрестности этой точки

$$\dot{x}_i^n = [{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n \\ \mathbf{u}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{X}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n \\ \mathbf{u}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n. \quad (25)$$

С другой стороны линейная модель в окрестности этой точки имеет вид

$$\dot{x}_i^n = [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, {}^{r-1}_i \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n \\ \mathbf{u}^n - {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n, \quad (26)$$

поэтому,

$$\begin{aligned} [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, {}^{r-1}_i \mathbf{b}] &= \\ [{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b}] &+ 2 \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma, \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

или

$$\begin{aligned} [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, -{}^{r-1}_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S}] &= [{}^r_i \mathbf{a}, -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S}] + \\ 2 \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{X}^n - {}^r_s \mathbf{X}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T &{}^r_i \Gamma, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, -{}^{r-1}_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S}] &= [{}^r_i \mathbf{a}, -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S}] + \\ 2 [{}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n, \dots, {}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n, &{}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n, \dots, {}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n] \\ \begin{bmatrix} {}^r_i \gamma_{11} & \dots & {}^r_i \gamma_{1n} & {}^r_i \gamma_{1,n+1} & \dots & {}^r_i \gamma_{1,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^r_i \gamma_{n1} & \dots & {}^r_i \gamma_{nn} & {}^r_i \gamma_{n,n+1} & \dots & {}^r_i \gamma_{n,n+m} \\ {}^r_i \gamma_{n+1,1} & \dots & {}^r_i \gamma_{n+1,n} & {}^r_i \gamma_{n+1,n+1} & \dots & {}^r_i \gamma_{n+1,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^r_i \gamma_{n+m,1} & \dots & {}^r_i \gamma_{n+m,n} & {}^r_i \gamma_{n+m,n+1} & \dots & {}^r_i \gamma_{n+m,n+m} \end{bmatrix} &= \\ [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, -{}^{r-1}_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S}] &= [{}^r_i \mathbf{a}, -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S}] + \\ 2 [{}^r_i \gamma_{11} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \dots, \\ {}^r_i \gamma_{1,n+m} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n+m} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)], \\ &i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} {}^{r-1}_i \mathbf{a} &= {}^r_i \mathbf{a} + \\ 2 [{}^r_i \gamma_{11} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \dots, \\ {}^r_i \gamma_{1n} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)], \\ &i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} -{}^{r-1}_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S} &= -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S} + \\ 2 [{}^r_i \gamma_{1,n+1} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n+1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \dots, \\ {}^r_i \gamma_{1,n+m} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n+m} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)], \\ &i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -\{ {}^r_i \mathbf{a} + 2 [{}^r_i \gamma_{11} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \\ \dots, {}^r_i \gamma_{1n} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)] \} {}^{r-1}_s \mathbf{S} = \\ -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S} - \\ 2 [{}^r_i \gamma_{1,n+1} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n+1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \dots, \\ {}^r_i \gamma_{1,n+m} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n+m} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)], \\ &i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S} - \\ 2 [{}^r_i \gamma_{11} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,1} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n), \dots, \\ {}^r_i \gamma_{1n} ({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n) + \dots + &{}^r_i \gamma_{n+m,n} ({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n)] {}^{r-1}_s \mathbf{S} = \end{aligned}$$

$$-{}^r_i \mathbf{a}_x^r \mathbf{S} + 2 \left[{}^r_i \gamma_{1,n+1} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,n+1} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{1,n+m} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,n+m} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right) \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (33)$$

$${}^r_i \mathbf{a}_x \left({}^r_s \mathbf{S} - {}^{r-1}_s \mathbf{S} \right) = 2 \left\{ \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,1} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{1n} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,n} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right) \right] {}^{r-1}_s \mathbf{S} + \left[{}^r_i \gamma_{1,n+1} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,n+1} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{1,n+m} \left({}^{r-1}_s \mathbf{x}_1^n - {}^r_s \mathbf{x}_1^n \right) + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m,n+m} \left({}^{r-1}_s \mathbf{u}_m^n - {}^r_s \mathbf{u}_m^n \right) \right] \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (34)$$

Это условие также задает набор ограничений в виде равенств для элементов матриц билинейной модели.

3. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЦ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Для оценивания матриц билинейной модели, соответствующей r -ому установившемуся режиму, используются переходные процессы нелинейной модели объекта, то есть наборы значений нормированного вектора состояния и его первой производной $\mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_k)$, $\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k)$, $k = 0, \dots, N$, а также нормированного вектора управления $\mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k)$, $k = 0, \dots, N-1$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$, причем $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, где Δt это шаг дискретности. Переходные процессы для переменных управления в разомкнутой системе управления представляют собой ступенчатые воздействия, включающие в себя линейные функции времени, наклоны которых примерно соответствует переходным процессам в замкнутой системе управления. Поскольку переходные процессы должны пересекать границы областей действия двух линейных моделей, эти линейные функции соединяют значения, которые соответствуют соседним установившимся

режимам. В этом случае, например, при оценивании матриц линейной модели не обязательно использовать ограничения в виде равенств (21). Соответственно, при оценивании матриц билинейной модели не обязательно использовать ограничения в виде равенств (22), а, следовательно, и ограничения в виде равенств (23). Можно предположить, что в этом случае при оценивании не обязательно использовать и ограничения в виде равенств (34).

Оценивание матриц билинейной модели может быть сведено к задаче нелинейного программирования вида

$${}^r_1 \Gamma, \dots, {}^r_n \Gamma : \min \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{БЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) \right]^T {}_x \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N \left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_0) \right]^T {}_x \mathbf{W}(t_k)}}}, \sqrt{\frac{\left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{БЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) \right]}{\left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_0) \right]}}, \left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{БЛн}}(t_k) &= \left[{}^r_i \mathbf{a}_x, {}^r_i \mathbf{b} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}^{\text{БЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{array} \right] + \\ & 2 \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}^{\text{БЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{array} \right]^T {}^r_i \Gamma \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}^{\text{БЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{array} \right], \\ \mathbf{x}_i^{\text{БЛн}}(t_{k+1}) &= \mathbf{x}_i^{\text{БЛн}}(t_k) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{БЛн}}(t_k), \\ & k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

Здесь ${}_x \mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы, матрицы ${}^r \mathbf{A}$ и ${}^r \mathbf{B}$ считаются известными, начальные значения матриц ${}^r_i \Gamma = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$, а начальное значение вектора состояния билинейной модели

$$\mathbf{x}^{\text{БЛн}}(t_0) = \mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_0).$$

В этой задаче очень большое число неизвестных $(n+m)^2 \times n$, поэтому далее будем считать, что матрицы ${}^r_i \Gamma$, $i=1, \dots, n$ диагональные

$${}^r_i \Gamma = \text{diag} \left\{ {}^r_i \gamma_{11}, \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \right\}, \quad i=1, \dots, n. \quad (36)$$

Тогда в силу (27), (13)

$$\begin{aligned} [{}^{r-1}_i \mathbf{a}, {}^{r-1}_i \mathbf{b}] &= [{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b}] + 2 \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma = \\ &= [{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b}] + 2 \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right), \right. \\ &\quad \left. {}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} {}^{r-1}_i \mathbf{a} &= {}^r_i \mathbf{a} + \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} {}^{r-1}_i \mathbf{b} &= {}^r_i \mathbf{b} + \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n. \quad (39)$$

$$\begin{aligned} -{}^{r-1}_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S} &= -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S} + \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} -\left\{ {}^r_i \mathbf{a} + \right. \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right) \right] \left. \right\} {}^{r-1}_s \mathbf{S} = \\ &= -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S} + \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^{r-1}_s \mathbf{S} - \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right) \right] {}^{r-1}_s \mathbf{S} = \\ &= -{}^r_i \mathbf{a} \quad {}^r_s \mathbf{S} + \\ &+ 2 \left[{}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right], \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} {}^r_i \mathbf{a} \left({}^r_s \mathbf{S} - {}^{r-1}_s \mathbf{S} \right) &= \\ &= 2 \left\{ \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right) \right] {}^{r-1}_s \mathbf{S} + \right. \\ &\quad \left. \left[{}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad i=1, \dots, n. \quad (43)$$

При этом условие (23) и уравнение (17) принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix}^T {}^r_i \Gamma \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix} &= \\ &= \left[{}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{nn} \left({}^{r-1}_s x_n^n - {}^r_s x_n^n \right), \right. \\ &\quad \left. {}^r_i \gamma_{n+1, n+1} \left({}^{r-1}_s u_1^n - {}^r_s u_1^n \right), \dots, {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right) \right] \\ &\quad \begin{bmatrix} {}^{r-1}_s \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ {}^{r-1}_s \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix} = \\ &= {}^r_i \gamma_{11} \left({}^{r-1}_s x_1^n - {}^r_s x_1^n \right)^2 + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left({}^{r-1}_s u_m^n - {}^r_s u_m^n \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^n &= \left[{}^r_i \mathbf{a}, {}^r_i \mathbf{b} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^n - {}^r_s \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^n - {}^r_s \mathbf{u}^n \end{bmatrix} + \\ &+ {}^r_i \gamma_{11} \left(x_1^n - {}^r_s x_1^n \right)^2 + \dots + {}^r_i \gamma_{n+m, n+m} \left(u_m^n - {}^r_s u_m^n \right)^2, \end{aligned} \quad i=1, \dots, n. \quad (45)$$

Теперь оценивание матриц билинейной модели может быть сведено к задаче нелинейного программирования вида

$$\begin{aligned} &{}^r_1 \Gamma, \dots, {}^r_n \Gamma: \\ &\min \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{БЛ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_k) \right]^T \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N \left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_0) \right]^T \mathbf{W}(t_k)}}} \right. \\ &\quad \left. \frac{\left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{БЛ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_k) \right]}{\left[\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}n}(t_0) \right]} \right\} \end{aligned}$$

Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) &= \begin{bmatrix} r \mathbf{a}_i & r \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{БЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{БЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{u}^n \end{bmatrix} + \\ & \quad {}^r \gamma_{11} \left[x_1^{\text{БЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} x_1^n \right]^2 + \dots \\ & \quad + {}^r \gamma_{n+m, n+m} \left[u_m^{\text{БЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} u_m^n \right]^2, \\ x_i^{\text{БЛ}n}(t_{k+1}) &= x_i^{\text{БЛ}n}(t_k) + \Delta t \dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k), \\ & \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} (46)$$

Здесь ${}_{\mathbf{x}} \mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы, матрицы ${}^r \mathbf{A}$ и ${}^r \mathbf{B}$ считаются известными, начальные значения элементов матриц ${}^r \gamma_{11} = 0, \dots, {}^r \gamma_{n+m, n+m} = 0$, $i = 1, \dots, n$, а начальное значение вектора состояния билинейной модели $\mathbf{x}^{\text{БЛ}n}(t_0) = \mathbf{x}^{\text{НЛ}n}(t_0)$.

Матрицы билинейной модели можно приближенно оценивать отдельно друг от друга, решая для $i = 1, \dots, n$ задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} & {}^r \gamma_{11}, \dots, {}^r \gamma_{n+m, n+m} : \\ & \min \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N {}_{\mathbf{x}} w_{ii}(t_k) [\dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k)]^2}{\sum_{k=1}^N {}_{\mathbf{x}} w_{ii}(t_k) [\dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_0)]^2}} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} \dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) &\cong \begin{bmatrix} r \mathbf{a}_i & r \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{u}^n \end{bmatrix} + \\ & \quad {}^r \gamma_{11} \left[x_1^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} x_1^n \right]^2 + \dots \\ & \quad + {}^r \gamma_{n+m, n+m} \left[u_m^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} u_m^n \right]^2, \\ & \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} (47) \end{aligned}$$

или

$$\delta, {}^r \gamma_{11}, \dots, {}^r \gamma_{n+m, n+m} : \min \left\{ \delta \mid \delta \geq 0, \sqrt{{}_{\mathbf{x}} w_{ii}(t_k)} |\dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k)| \leq \delta, \right.$$

которые сводятся к задачам линейного программирования

$$\begin{aligned} & \delta, {}^r \gamma_{11}, \dots, {}^r \gamma_{n+m, n+m} : \min \left\{ \delta \mid \delta \geq 0, \right. \\ & \quad \left. - \frac{\delta}{\sqrt{{}_{\mathbf{x}} w_{ii}(t_k)}} \leq \dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k) \leq \frac{\delta}{\sqrt{{}_{\mathbf{x}} w_{ii}(t_k)}}, \right. \\ & \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_i^{\text{БЛ}n}(t_k) &\cong \begin{bmatrix} r \mathbf{a}_i & r \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} \mathbf{u}^n \end{bmatrix} + \\ & \quad {}^r \gamma_{11} \left[x_1^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} x_1^n \right]^2 + \dots \\ & \quad + {}^r \gamma_{n+m, n+m} \left[u_m^{\text{НЛ}n}(t_k) - \frac{r}{s} u_m^n \right]^2, \\ & \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} (49) \end{aligned}$$

4. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЦ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Пусть матрицы линейной модели для r -ого установившегося режима считаются известными, а матрицы линейной модели для соседнего $(r-1)$ -ого установившегося режима оцениваются с помощью матриц билинейной модели по переходным процессам нелинейной модели, пересекающим границу областей действия этих линейных моделей. Тогда задача оценивания может быть сведена к задаче нелинейного программирования вида

$$\begin{aligned}
 & {}^{r-1}\mathbf{A}, {}^{r-1}\mathbf{B}, {}^r\Gamma, \dots, {}^r\Gamma: \\
 & \min \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{KЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k)]^T \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_0)]^T \mathbf{W}(t_k)}} \\ & \left| \frac{\dot{\mathbf{x}}^{\text{KЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k)}{\dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_0)} \right| \end{aligned} \right. \\
 & {}^{r-1}\mathbf{a} = {}^r\mathbf{a} + \\
 & \quad 2 \left[{}^r\gamma_{11} ({}^{r-1}x_1^n - {}^r x_1^n) + \dots + {}^r\gamma_{n+m,1} ({}^{r-1}u_m^n - {}^r u_m^n), \dots, \right. \\
 & \quad \left. {}^r\gamma_{1n} ({}^{r-1}x_1^n - {}^r x_1^n) + \dots + {}^r\gamma_{n+m,n} ({}^{r-1}u_m^n - {}^r u_m^n) \right], \\
 & \quad i = 1, \dots, n, \\
 & {}^{r-1}\mathbf{b} = {}^r\mathbf{b} + \\
 & \quad 2 \left[{}^r\gamma_{1,n+1} ({}^{r-1}x_1^n - {}^r x_1^n) + \dots + {}^r\gamma_{n+m,n+1} ({}^{r-1}u_m^n - {}^r u_m^n), \dots, \right. \\
 & \quad \left. {}^r\gamma_{1,n+m} ({}^{r-1}x_1^n - {}^r x_1^n) + \dots + {}^r\gamma_{n+m,n+m} ({}^{r-1}u_m^n - {}^r u_m^n) \right], \\
 & \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k) = [{}^r\mathbf{a}, {}^r\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{KЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \\
 & \quad i = 1, \dots, n \\
 & \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2 \leq \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2, \\
 & \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k) = [{}^{r-1}\mathbf{a}, {}^{r-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{KЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \\
 & \quad i = 1, \dots, n \\
 & \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2 > \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2, \\
 & x_i^{\text{KЛn}}(t_{k+1}) = x_i^{\text{KЛn}}(t_k) + \Delta t \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k), \\
 & \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \right. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Здесь ${}^r\mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы, матрицы ${}^r\mathbf{A}$ и ${}^r\mathbf{B}$ считаются известными, начальные значения матриц ${}^r\Gamma = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$, а начальное значение вектора со-

стояния кусочно-линейной модели $\mathbf{x}^{\text{KЛn}}(t_0) = \mathbf{x}^{\text{HЛn}}(t_0)$.

Если считать матрицы ${}^r\Gamma$, $i = 1, \dots, n$ диагональными, то оценивание тоже может быть сведено к задаче нелинейного программирования

$$\begin{aligned}
 & {}^{r-1}\mathbf{A}, {}^{r-1}\mathbf{B}, {}^r\Gamma, \dots, {}^r\Gamma: \\
 & \min \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{KЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k)]^T \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_0)]^T \mathbf{W}(t_k)}} \\ & \left| \frac{\dot{\mathbf{x}}^{\text{KЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k)}{\dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HЛn}}(t_0)} \right| \end{aligned} \right. \\
 & {}^{r-1}\mathbf{a} = {}^r\mathbf{a} + 2 \left[{}^r\gamma_{11} ({}^{r-1}x_1^n - {}^r x_1^n), \dots, {}^r\gamma_{nm} ({}^{r-1}x_n^n - {}^r x_n^n) \right], \\
 & \quad i = 1, \dots, n, \\
 & {}^{r-1}\mathbf{b} = {}^r\mathbf{b} + \\
 & \quad 2 \left[{}^r\gamma_{n+1,n+1} ({}^{r-1}u_1^n - {}^r u_1^n), \dots, {}^r\gamma_{n+m,n+m} ({}^{r-1}u_m^n - {}^r u_m^n) \right], \\
 & \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k) = [{}^r\mathbf{a}, {}^r\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{KЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \\
 & \quad i = 1, \dots, n \\
 & \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2 \leq \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2, \\
 & \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k) = [{}^{r-1}\mathbf{a}, {}^{r-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{KЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{x}^n \\ \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^n \end{bmatrix}, \\
 & \quad i = 1, \dots, n \\
 & \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^r\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2 > \left\| \mathbf{u}^{\text{HЛn}}(t_k) - {}^{r-1}\mathbf{u}^{\text{HЛn}} \right\|_2, \\
 & x_i^{\text{KЛn}}(t_{k+1}) = x_i^{\text{KЛn}}(t_k) + \Delta t \dot{x}_i^{\text{KЛn}}(t_k), \\
 & \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \right. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Здесь ${}^r\mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы, матрицы ${}^r\mathbf{A}$ и ${}^r\mathbf{B}$ считаются известными, начальные значения элементов матриц

Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления

${}^r_i\gamma_{11} = 0, \dots, {}^r_i\gamma_{n+m, n+m} = 0, i = 1, \dots, n$, а начальное значение вектора состояния кусочно-линейной модели $\mathbf{x}^{\text{КЛ}n}(t_0) = \mathbf{x}^{\text{НЛ}n}(t_0)$.

Ошибки кусочно-линейной модели рассчитываются по каждой из переменных состояния и по каждой из их первых производных

$$\Delta_{x_i^n} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [x_i^{\text{КЛ}n}(t_k) - x_i^{\text{НЛ}n}(t_k)]^2}{\sum_{k=1}^N [x_i^{\text{НЛ}n}(t_k) - x_i^{\text{НЛ}n}(t_0)]^2}}, i = 1, \dots, n, (52)$$

$$\Delta_{\dot{x}_i^n} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\dot{x}_i^{\text{КЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k)]^2}{\sum_{k=1}^N [\dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛ}n}(t_N)]^2}}, i = 1, \dots, n. (53)$$

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для определения матрицы динамической линейной модели по переходным процессам нелинейной модели двухвального двухконтурного турбореактивного авиационного ГТД в разомкнутой САУ. Переходные процессы нелинейной модели начинаются на установившемся режиме, которому соответствует линейная модель, считающаяся известной, пересекают границу областей действия двух соседних линейных моделей и заканчиваются на установившемся режиме, соответствующем линейной модели, матрицы которой необходимо определить. В рассматриваемом примере высота и скорость полета равны нулю. Четыре переменные управления ($m=4$) соответствуют расходу топлива в основной камере сгорания, площади критического сечения реактивного сопла, углу поворота направляющих аппаратов вентилятора и углу поворота направляющих аппаратов компрессора. Пять переменных состояния объекта

управления ($n=5$) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя, частоте вращения компрессора двигателя, давлению торможения за компрессором, давлению торможения за турбиной и температуре торможения за турбиной.

Рассмотрим оценивание элементов матриц ${}^{r-1}\mathbf{A}$ и ${}^{r-1}\mathbf{B}$ (${}^{89}\mathbf{A}$ и ${}^{89}\mathbf{B}$ в обозначениях работ [3], [4]) кусочно-линейной модели с помощью билинейной модели. При оценивании используются такие же переходные процессы, как и в работах [3], [4], а матрицы ${}^r\mathbf{A}$ и ${}^r\mathbf{B}$ (${}^{98}\mathbf{A}$ и ${}^{98}\mathbf{B}$), соответствующие максимальному режиму работы, считаются известными [3], [4]. Вектора нормированных установившихся значений управления и состояния и матрицы статических и динамических линейных моделей для двух соседних установившихся режимов согласно [3], [4] имеют вид

$${}^r_s\mathbf{u}^n = [1, 0.4515, 0, 0]^T,$$

$${}^r_s\mathbf{x}^n = [1, 1, 1, 1, 1]^T,$$

$${}^r_s\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.4432 & 0.6940 & -0.0939 & 0.0122 \\ 0.2935 & 0.3768 & -0.0274 & -0.1330 \\ 0.6187 & -0.5341 & 0.0374 & 0.0125 \\ 0.5023 & -1.4456 & 0.0484 & 0.0045 \\ 0.4111 & 0.3198 & -0.0392 & -0.0115 \end{bmatrix},$$

$${}^r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.8208 & 1.1770 & & & \\ 0.0697 & -1.6507 & & & \\ 9.7385 & 11.5191 & & & \\ 9.6711 & 3.5115 & & & \\ 2.9867 & -6.8163 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -20.1171 & -13.1868 & 0 & & \\ -5.5917 & -19.3568 & 0 & & \\ -3.4159 & -3.1171 & -30.0422 & & \end{bmatrix},$$

$${}^r\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.4615 & 0.8201 & -0.1387 & 0.1788 \\ 0.4536 & 0.5736 & -0.0387 & -0.2204 \\ 11.3732 & -40.9063 & 2.6207 & 1.7240 \\ 7.8656 & -39.0036 & 2.1503 & 0.5060 \\ 16.7064 & 3.7726 & -0.8053 & -1.2318 \end{bmatrix},$$

лей практически нет скачков первых производных переменных состояния. При этом элементы матрицы $r^{-1}A$, полученные с помощью билинейной модели, гораздо меньше отличаются от элементов матрицы rA , чем элементы матрицы $r^{-1}A$, приведенной в работах [3], [4]. Однако, на рис. 25 представлены переходные процессы первой производной нормированной переменной состояния \dot{x}_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при условии, что $r^{-1}A=rA$. Видно, что в этом случае на границе областей действия разных линейных моделей скачок первой производной переменной состояния существенно больше, чем при использовании матрицы $r^{-1}A$, приведенной в работах [3], [4].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика уменьшения ошибок кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления на границе областей действия двух линейных моделей с использованием билинейной модели этого объекта. В качестве исходных данных для оценивания матриц одной из двух линейных моделей, которые рассчитываются на основе матриц билинейной модели с помощью алгоритмов нелинейного программирования, используются переходные процессы переменных управления и первых производных переменных состояния нелинейной модели объекта, пересекающие границы областей действия разных линейных моделей.

Результаты данной работы могут быть применены при разработке систем управления нелинейными объектами, которые приближенно описываются с помощью кусочно-линейных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лейбов Р.Л.** Прикладные методы теории управления – М. : АСВ, 2014. – 192 с.

2. **Чаки Ф.** Современная теория управления – М. : Мир, 1975. – 424 с.
3. **Лейбов Р.Л.** Обнаружение и конкретизация отказов исполнительного устройства с помощью кусочно-линейной модели замкнутой системы управления // Авиакосмическое приборостроение. 2015. № 2. С. 45...63.
4. **Лейбов Р.Л.** Кусочно-линейная модель нелинейного объекта управления при отказах исполнительных устройств системы // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики : сб. научн. тр. № 17. М. : МГСУ, 2014. С. 305...319.

Лейбов Роман Львович, доктор технических наук, профессор, кафедра информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26;
e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

Roman L. Leibov, Dr.Sc., Professor, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Highway, 129337, Moscow, RUSSIA;
e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

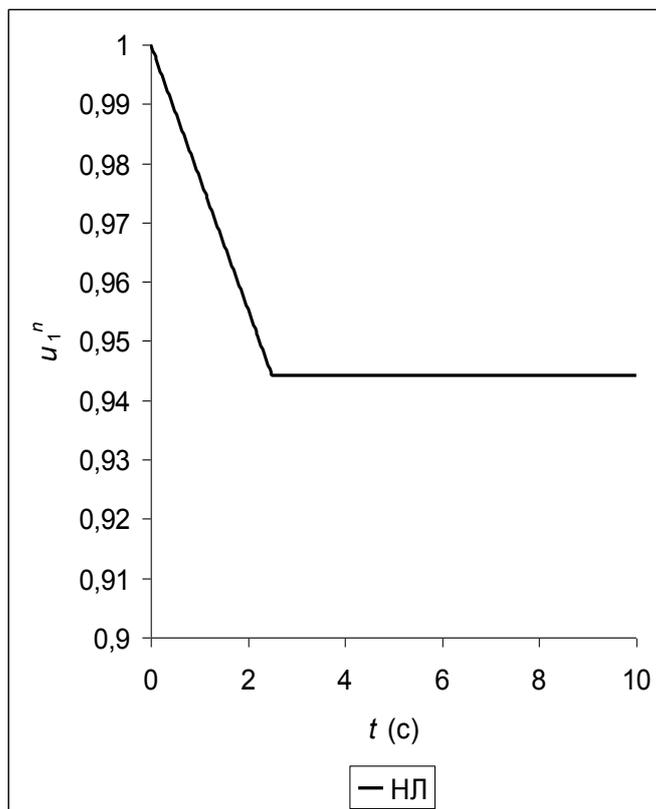


Рис. 1. Переходный процесс нормированной переменной управления u_1^n .

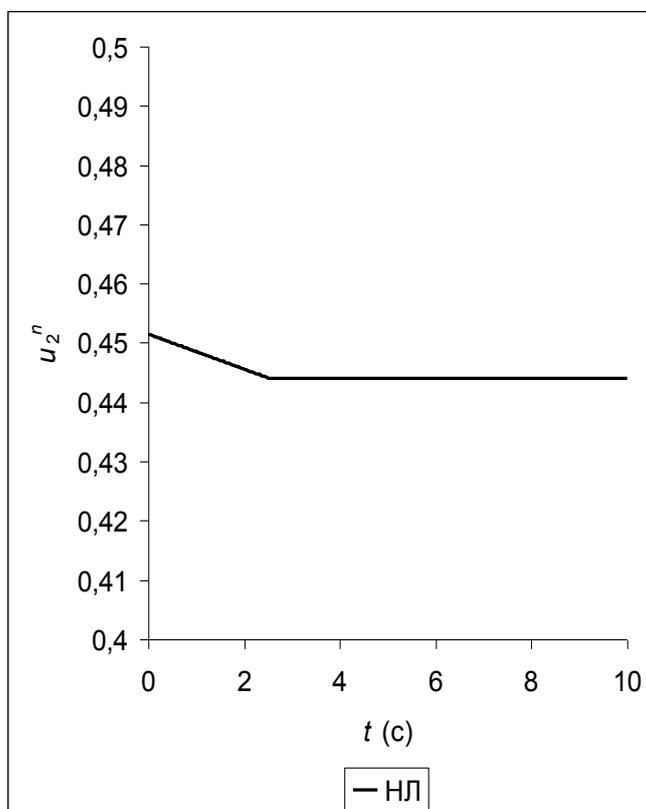


Рис. 2. Переходный процесс нормированной переменной управления u_2^n .

Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления

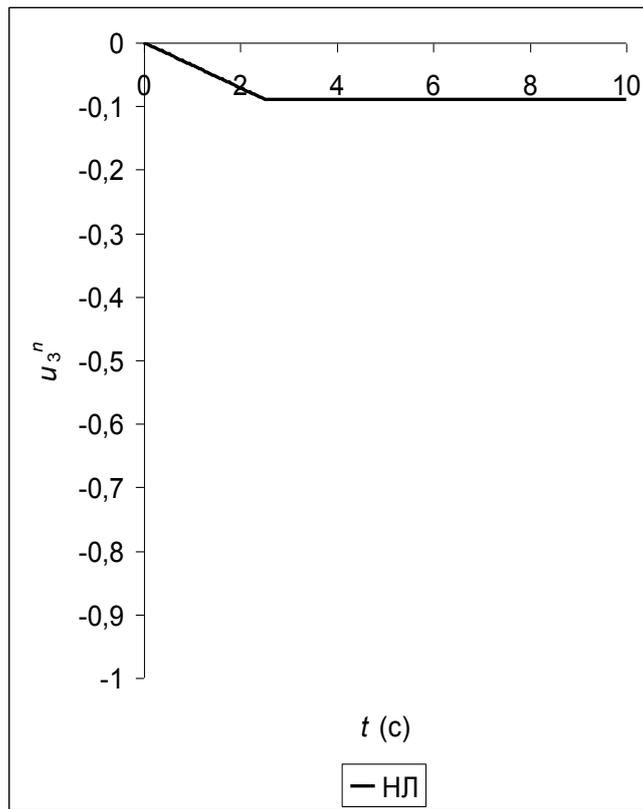


Рис. 3. Переходный процесс нормированной переменной управления u_3^n .

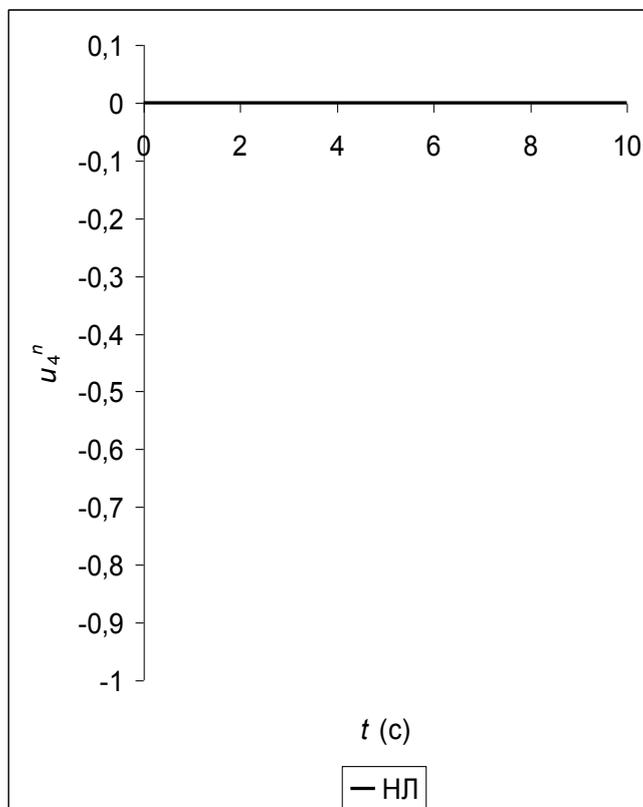


Рис. 4 Переходный процесс нормированной переменной управления u_4^n .

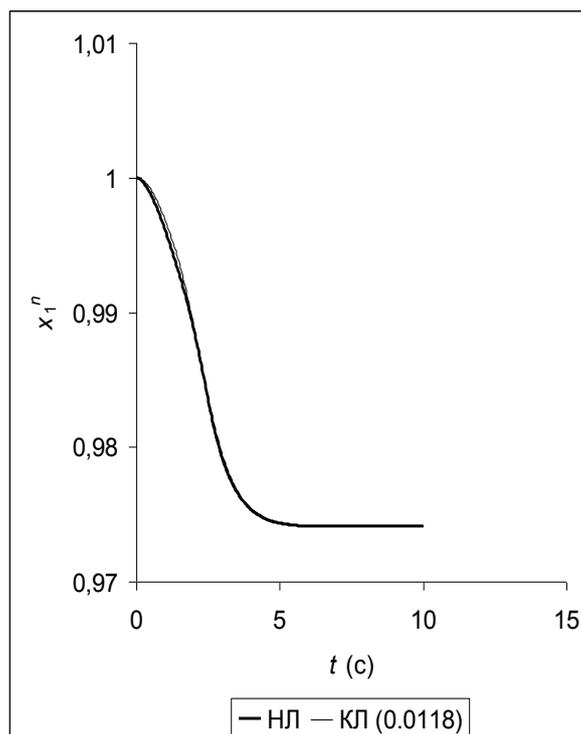


Рис. 5 Переходные процессы нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

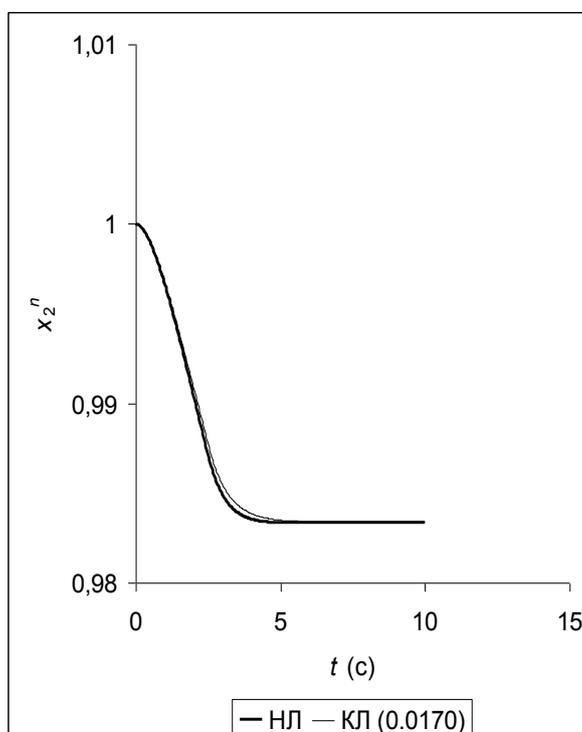


Рис. 6 Переходные процессы нормированной переменной состояния x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

Использование билинейной модели для улучшения свойств кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления

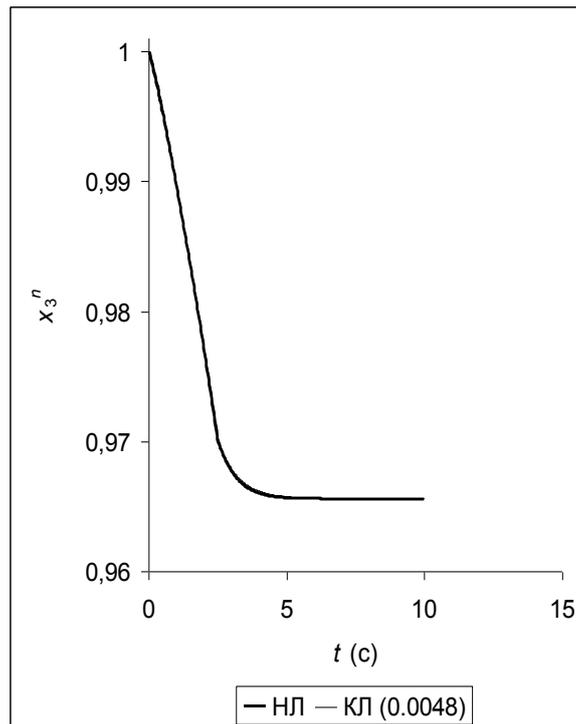


Рис. 7. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц ${}^{r-1}\mathbf{A}$ и ${}^{r-1}\mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

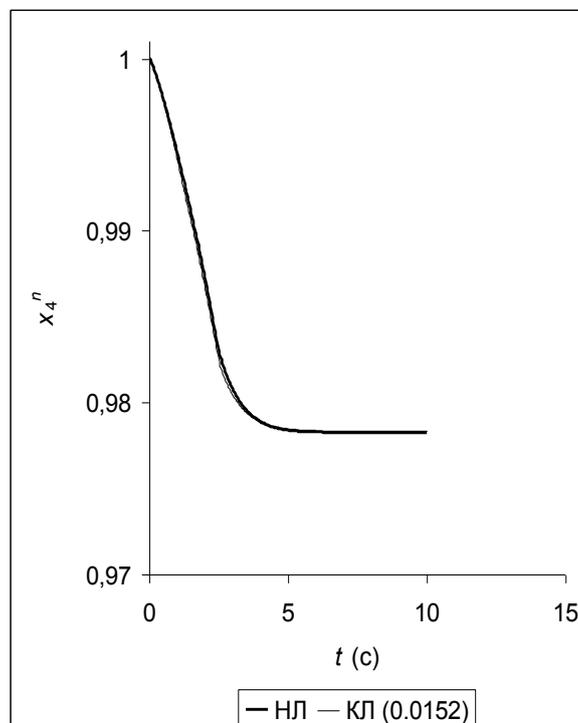


Рис. 8. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_4^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц ${}^{r-1}\mathbf{A}$ и ${}^{r-1}\mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

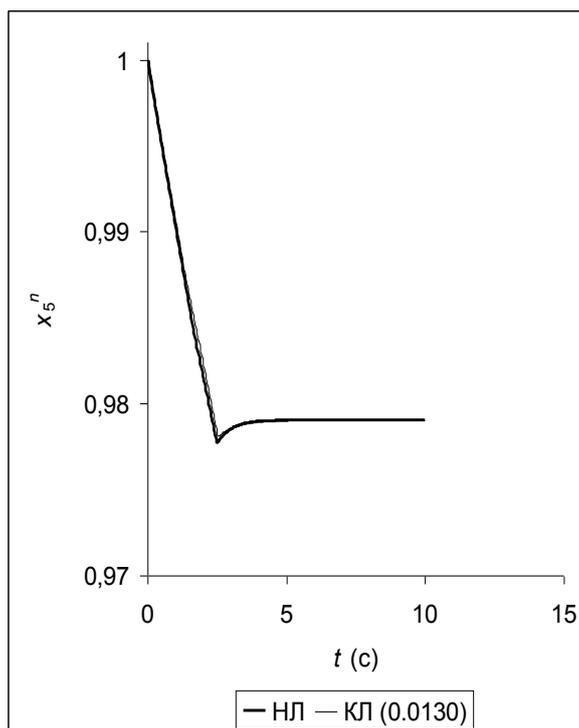


Рис. 9. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

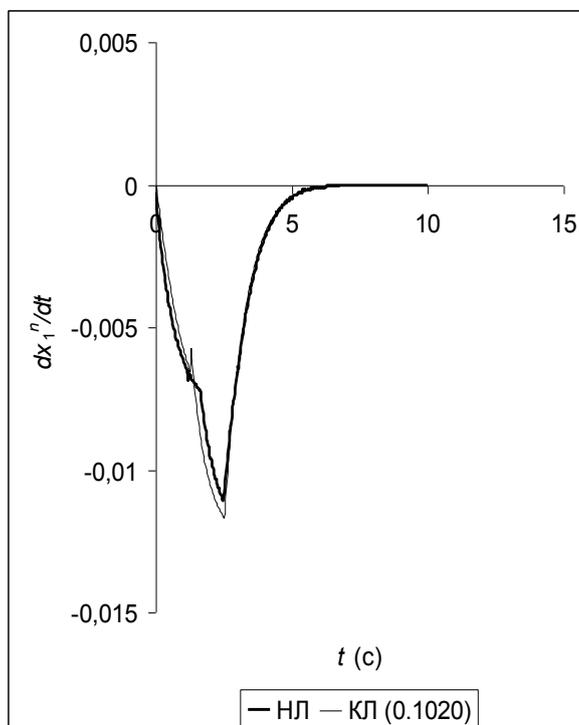


Рис. 10. Переходные процессы первых производных \dot{x}_1^n нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

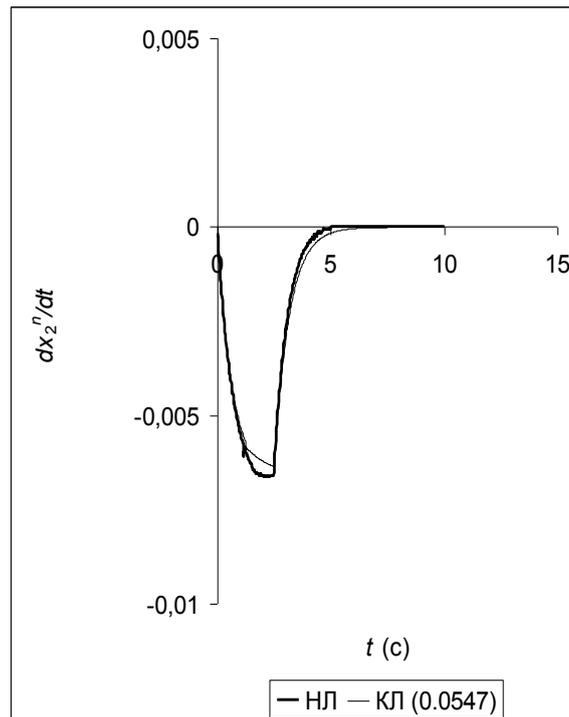


Рис. 11. Переходные процессы первых производных \dot{x}_2^n нормированной переменной состояния x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

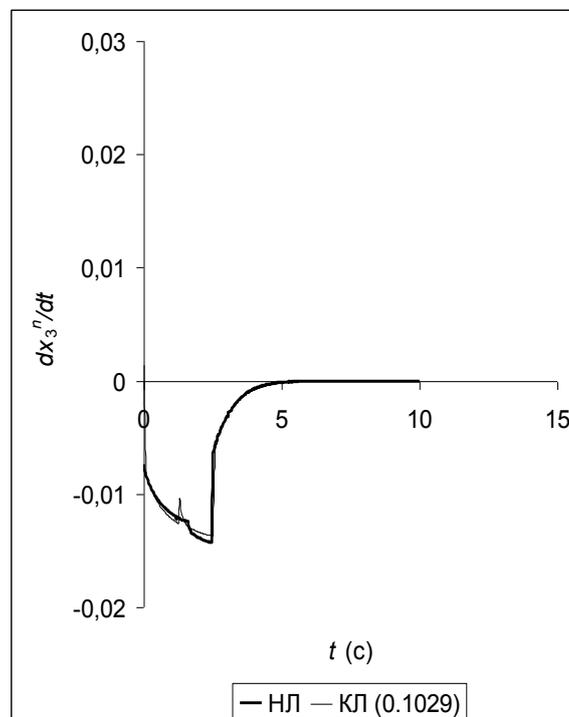


Рис. 12. Переходные процессы первых производных \dot{x}_3^n нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1} \mathbf{A}$ и $r^{-1} \mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

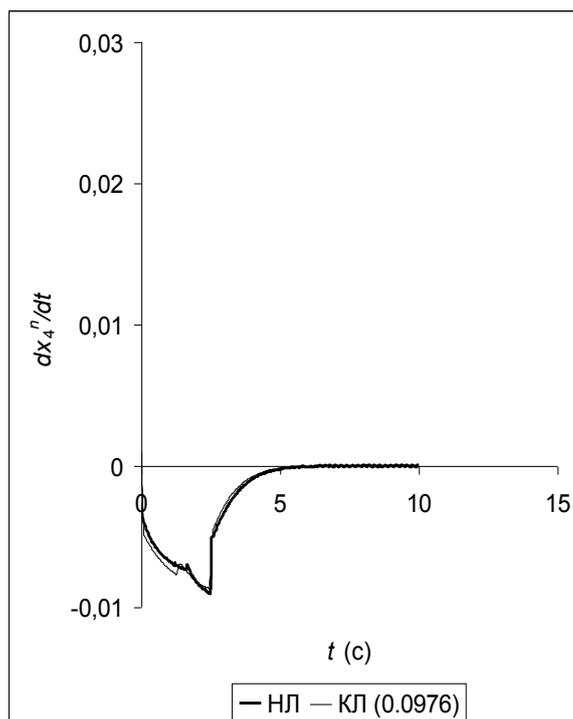


Рис. 13. Переходные процессы первых производных \dot{x}_4^n нормированной переменной состояния x_4^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1}\mathbf{A}$ и $r^{-1}\mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

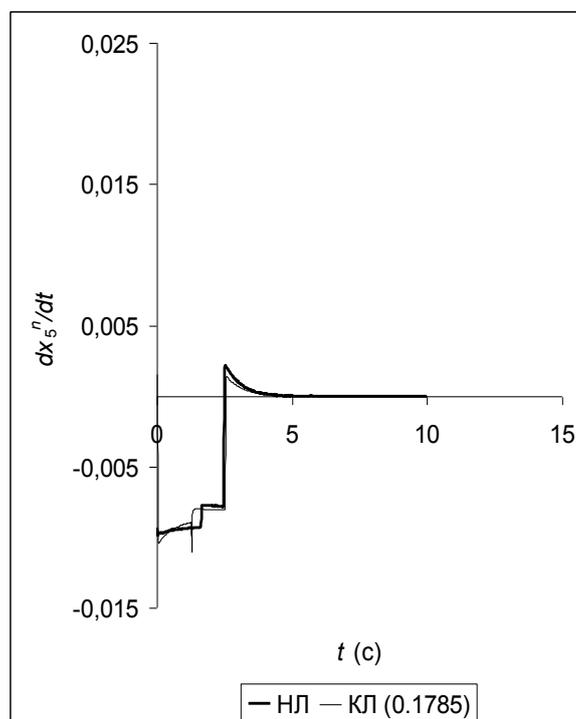


Рис. 14. Переходные процессы первых производных \dot{x}_5^n нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при оценивании элементов матриц $r^{-1}\mathbf{A}$ и $r^{-1}\mathbf{B}$ с помощью билинейной модели.

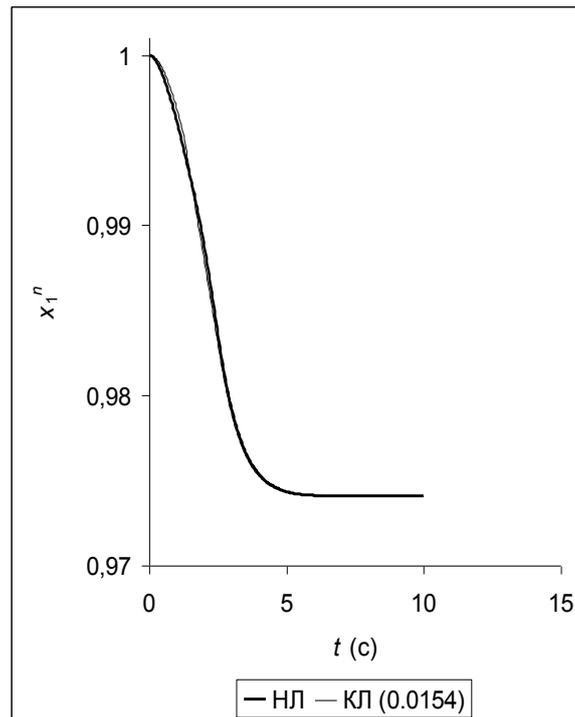


Рис. 15. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

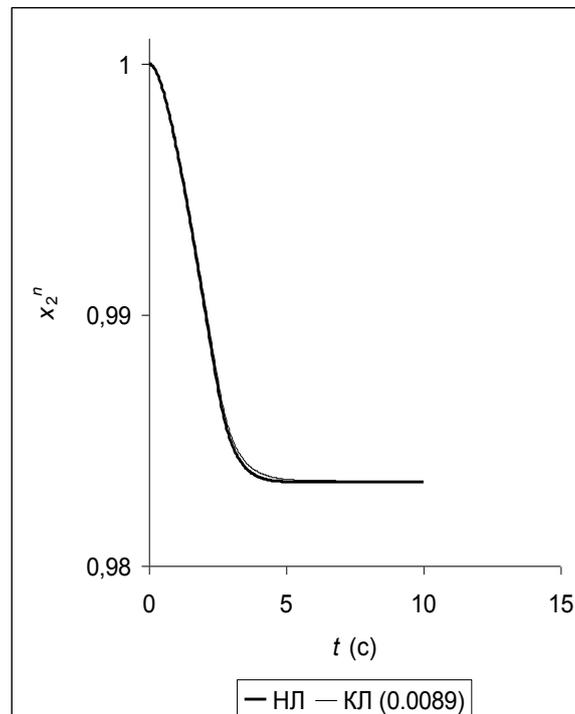


Рис. 16. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

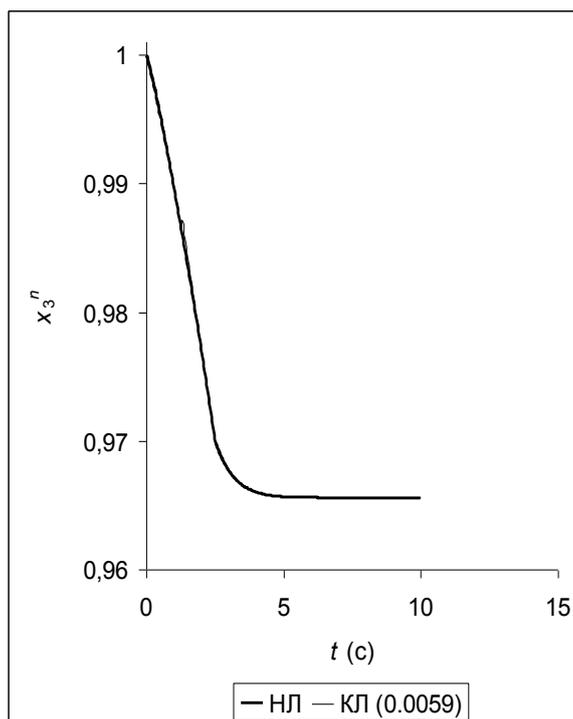


Рис. 17. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

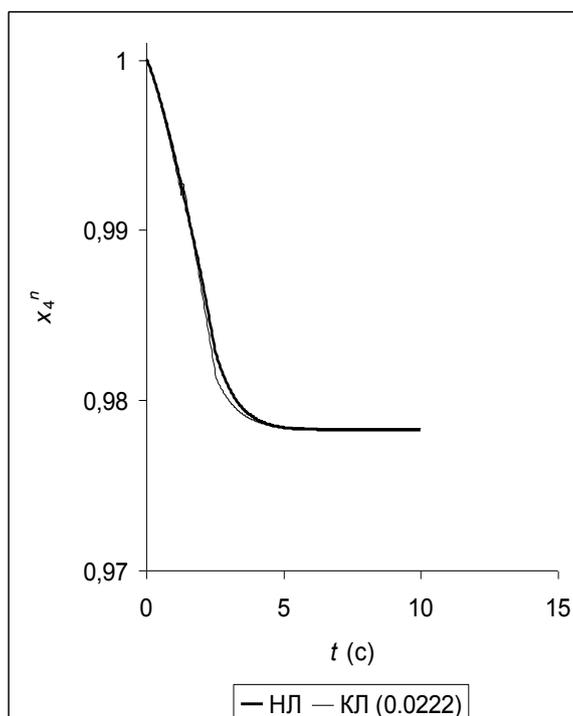


Рис. 18. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_4^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

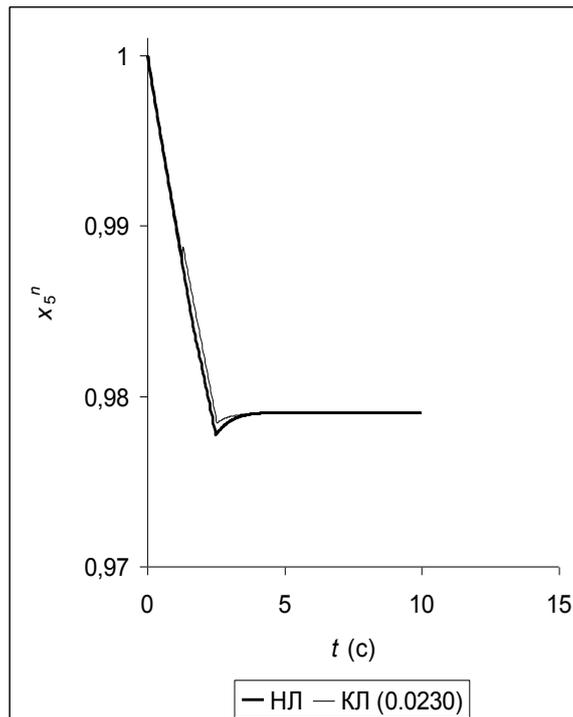


Рис. 19. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

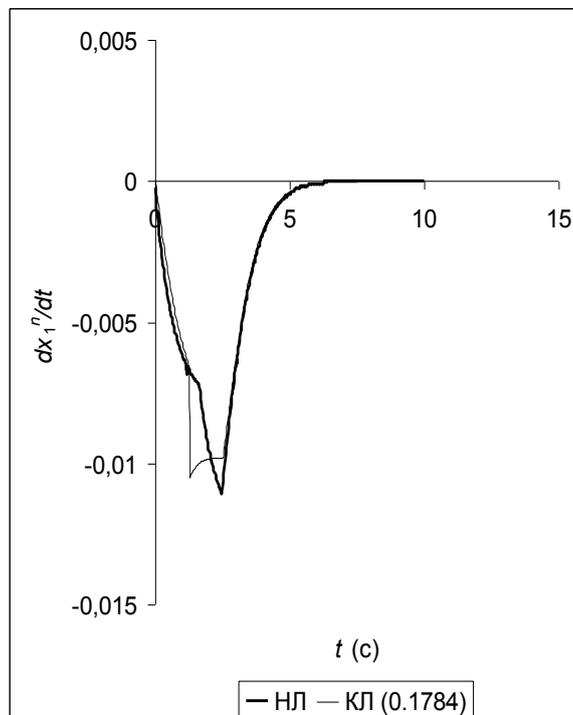


Рис. 20. Переходные процессы первых производных \dot{x}_1^n нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

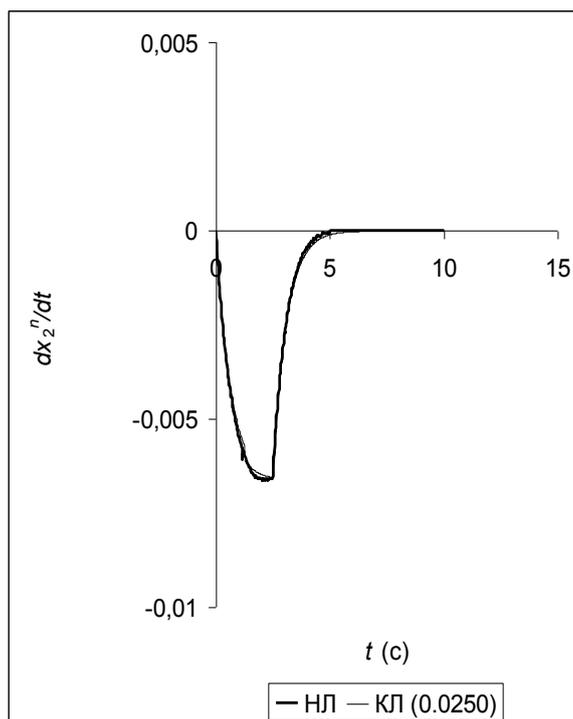


Рис. 21. Переходные процессы первых производных \dot{x}_2^n нормированной переменной состояния x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

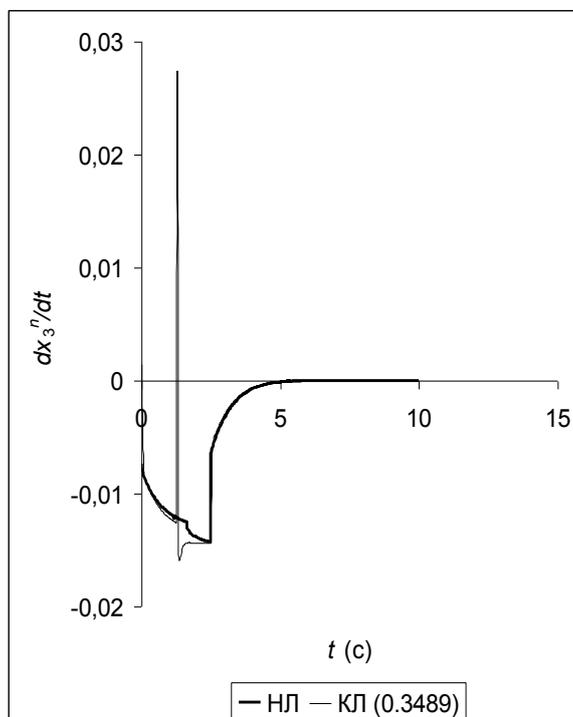


Рис. 22. Переходные процессы первых производных \dot{x}_3^n нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

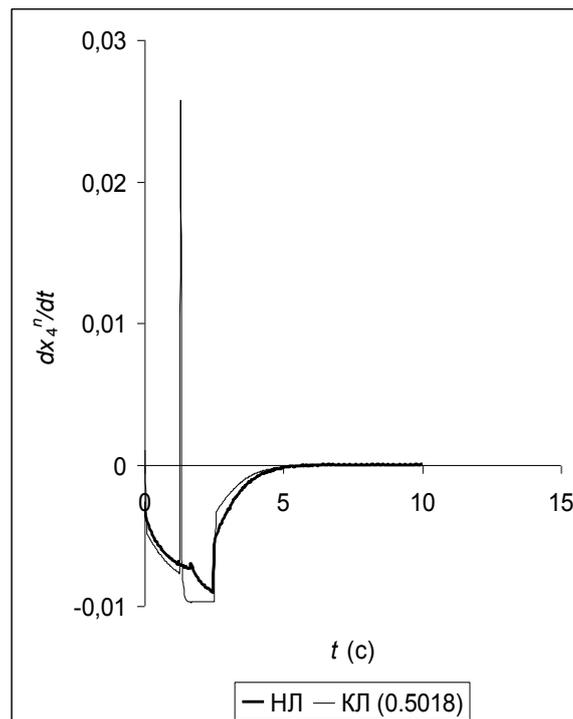


Рис. 23. Переходные процессы первых производных \dot{x}_4^n нормированной переменной состояния x_4^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

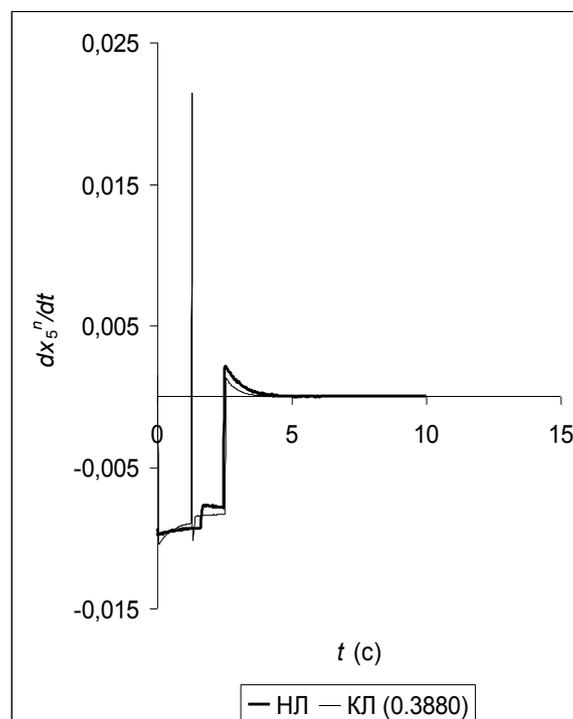


Рис. 24. Переходные процессы первых производных \dot{x}_5^n нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при использовании $r^{-1} \mathbf{A}$, приведенной в работах [3], [4].

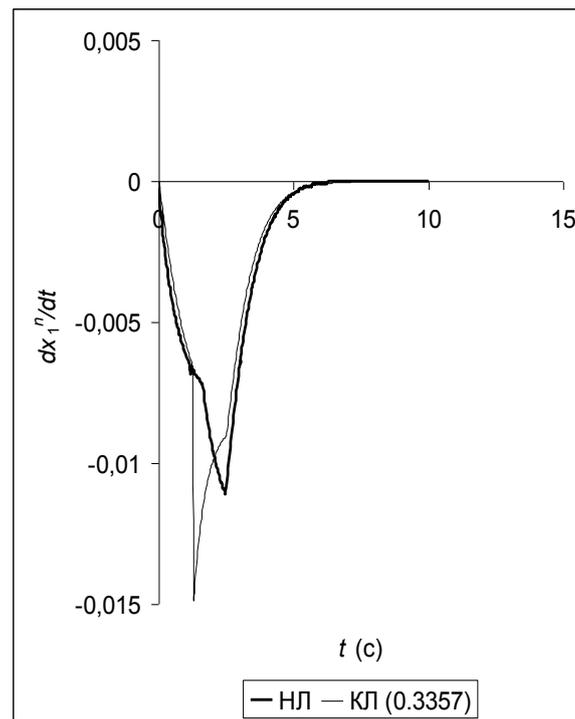


Рис. 25. Переходные процессы первых производных \dot{x}_1^n нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели при условии, что $r^{-1} \mathbf{A} = r \mathbf{A}$.

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ К НАЧАЛЬНЫМ НЕСОВЕРШЕНСТВАМ

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ.

АННОТАЦИЯ: Рассматриваются вопросы оценки чувствительности упругой системы к начальным несовершенствам на основе поиска формы наихудшего геометрического несовершенства, вызывающего наибольшее падение критической нагрузки.

Ключевые слова: эллиптическая омбилика, устойчивость, бифуркация, начальные несовершенства.

ABOUT INITIAL IMPERFECTION-SENSITIVITY OF SOME THIN-WALLED STRUCTURES

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

ABSTRACT: In the paper the question is raised of elastic structure sensitivity estimation to initial imperfections based on search of the worst geometrical imperfection which would cause the biggest reduction of critical load.

Key words: elliptic umbilic, buckling, bifurcation, initial imperfection.

Рассматривается круг вопросов, связанных с оценкой чувствительности упругой системы к начальным несовершенствам, которые могут вызвать сильное падение критической нагрузки в предельных точках несовершенной системы по сравнению с бифуркационной нагрузкой совершенной системы.

Наихудшее начальное несовершенство – это несовершенство, которое вызывает наибольшее падение критической нагрузки среди всех других несовершенств с одинаковой нормой отклонений от геометрии совершенной системы. Проблемой исследования влияния начальных несовершенств при простых и кратных критических нагрузках занимались: Д. Хо [1], В.Т. Койтер [2], Н. Триантафуллидис и Р. Пик [3, 4], М. Потье-Ферри [5], Дж. Хант [6], П. Самуэльс [7, 8], З. Гашпар [9].

Для определения условий существования и формы наихудшего начального несовершенства, предложен комплексный алгоритм (рис. 1), который заканчивается построением

кривой наибольшего падения критических нагрузок несовершенных систем в зависимости от величины нормы начального несовершенства. Если докритическое равновесие системы полное, то потеря устойчивости возможна только в предельных точках с весьма умеренной чувствительностью к начальным несовершенствам.

Если докритическое равновесие неполное, то система может потерять устойчивость в точке бифуркации. Признаком бифуркационной потери устойчивости является равенство нулю работы внешней нагрузки на бифуркационных перемещениях, соответствующих НДС, которое энергетически ортогонально исходному равновесию.

В случае неустойчивой точки бифуркации и некротной наименьшей критической нагрузки, форма наихудшего начального несовершенства определяется единственной собственной формой потери устойчивости, которая находится из решения линеаризованной задачи на собственные значения. В этом

случае кривые наибольшего падения критических нагрузок описываются асимптотическими законами: «закон 2/3» для неустойчивой симметричной бифуркации, и «закон 1/2» для случая асимметричной бифуркации. Если наименьшая критическая нагрузка m – кратная, то форма наихудшего начального несовершенства определяется как форма неустойчивого закритического равновесия в точке бифуркации, которое имеет наиболее «круто падающую» траекторию. Эта траектория наибольшего наклона в случае несимметричной кратной точки бифуркации или

кривая с наибольшей отрицательной кривизной в точке бифуркации в случае симметричной точки бифуркации. Однако решение задачи определения формы наихудшего начального несовершенства в общем случае кратной бифуркации значительно более сложное по сравнению с аналогичной задачей при простой критической нагрузке. Общая схема алгоритма определения наихудших начальных несовершенств и построения кривой падения критических нагрузок представлена на рис. 1.

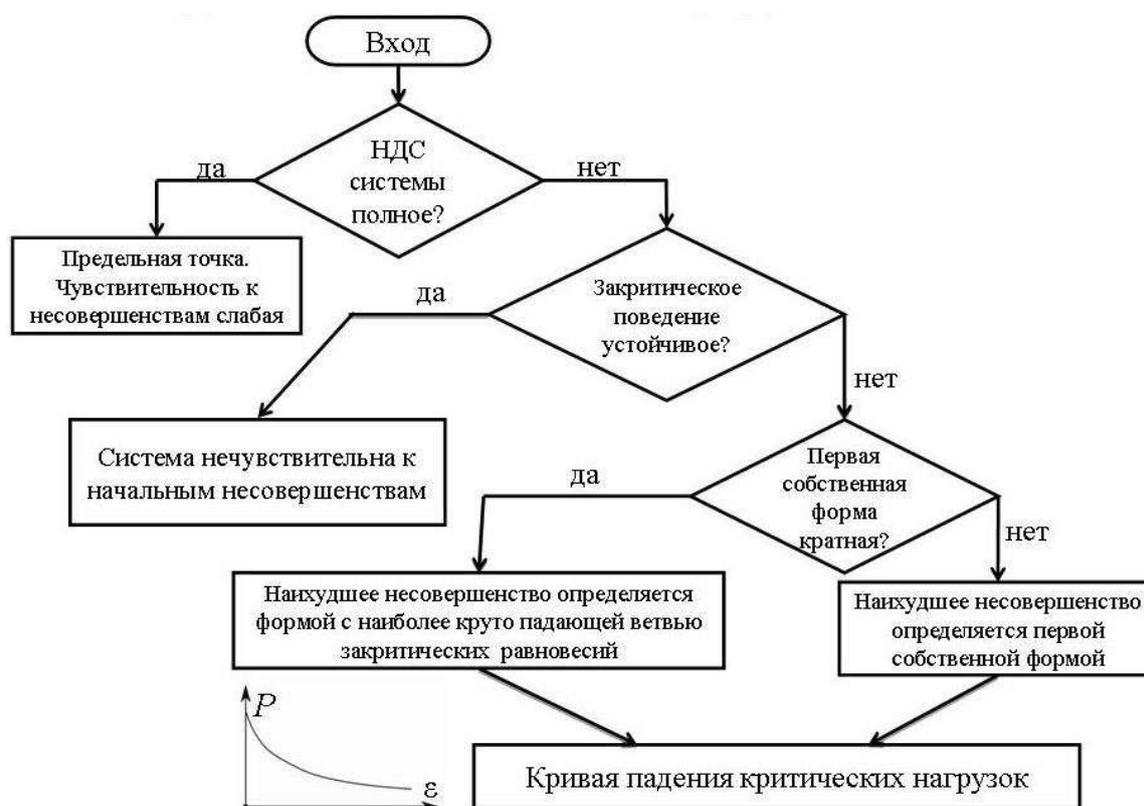


Рис. 1. Схема алгоритма определения наихудших начальных несовершенств и оценки их влияния на критические нагрузки.

Для иллюстрации этого алгоритма ниже рассмотрено несколько простых примеров применительно к плоским стержневым системам.

Первый пример – задача устойчивости круговой двухшарнирной арки с углом раствора 20° под действием распределенной верти-

кальной нагрузки q . Арка имеет первую собственную форму кососимметричную, а вторую – симметричную (рис. 2, б). Наихудшее начальное несовершенство соответствует кососимметричным начальным прогибам по первой форме.

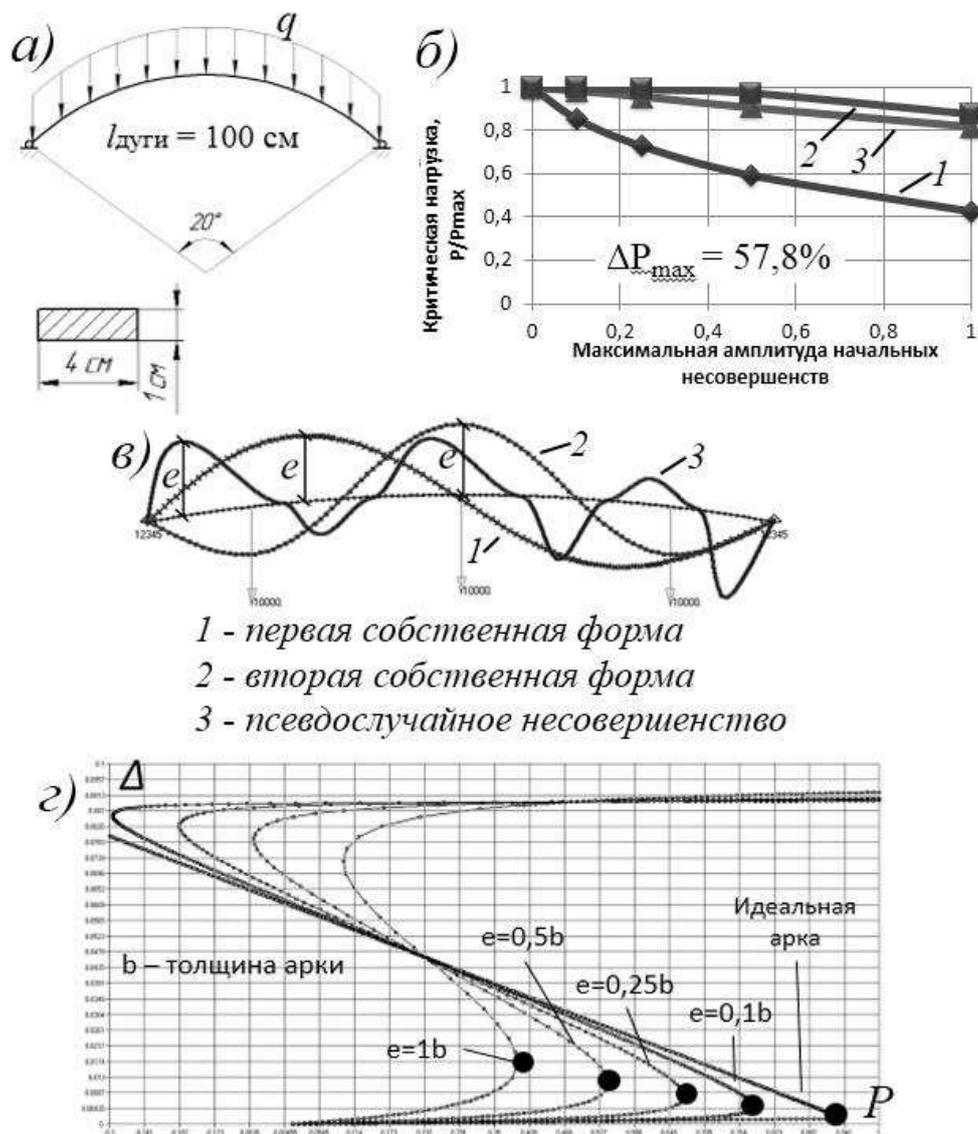


Рис. 2. Влияние начальных несовершенств на критические нагрузки пологой двухшарнирной арки: а) геометрия и схема нагружения арки; б) кривые падения критических нагрузок; в) формы начальных несовершенств; г) диаграмма равновесных состояний при наихудших несовершенствах.

Кривые равновесных состояний в зависимости от амплитуды наихудшего начального несовершенства представлены на рис. 2, г. Максимальная нагрузка соответствует точке неустойчивой бифуркации. Падение критических нагрузок в подчиненных предельных точках в зависимости от величины амплитуды наихудшего несовершенства описывается нижней кривой на рис. 2, б. Наибольшее уменьшение нагрузки при амплитуде откло-

нений порядка толщины сечения арки (1 см) составило 57,8%. Верхняя кривая 2 (рис. 2, б), описывает гораздо более слабое влияние «не наихудшего» несовершенства, заданного по второй (симметричной) собственной форме. Кривая 3 (рис. 2, б) описывает падение нагрузок также для «не наихудшего» несовершенства, которое задается псевдослучайной формой начальных прогибов арки. Из рис. 2, б видно, что при любой амплитуде

отклонения, наилучшее несовершенство дает самое большое уменьшение критической нагрузки по сравнению с бифуркационной. Любые другие несовершенства с той же амплитудой вызывают меньшее падение критической нагрузки.

Во втором примере исследован характер чувствительности к начальным несовершенствам симметричной рамы в виде жесткого треугольного контура с одним сжатым стержнем (горизонтальным, рис. 3, а). Все стержни рамы имели прямоугольное сечение 1×4 см, длина горизонтального стержня $l=1$ м. Данная рама, хотя и имеет ось симметрии, однако по отношению к вертикальным «зеркальным» несовершенствам (или возмущениям), приложенным к горизонтальному стержню, реагирует несимметрично и имеет несимметричную бифуркационную диаграмму.

Потенциал асимметричной точки бифуркации имеет вид:

$$V \approx \frac{1}{6} V_{III} q^3 + \frac{1}{2} V_{\lambda II} \lambda q^2 + V_{I\varepsilon} \varepsilon q$$

Уравнение околобифуркационного равновесия:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad \frac{1}{2} V_{III} q^2 + V_{\lambda II} \lambda q + V_{I\varepsilon} \varepsilon = 0$$

имеет два послебифуркационных решения при $\varepsilon=0$:

1. Исходное

$$q_1 = 0 \quad q_2 \neq 0 \quad \frac{1}{2} V_{III} q_2 + V_{\lambda II} \lambda = 0.$$

2. Новое бифуркационное, которое определяется прямой с ненулевым наклоном

$$3. \quad \lambda = -\frac{V_{III}}{2V_{\lambda II}} q_2 = kq_2$$

Для несовершенных систем ($\varepsilon \neq 0$) послебифуркационные равновесия описываются гиперболой с асимптотами $\lambda = kq_2$ и $q_2 = 0$.

$$\lambda = -\frac{V_{III} q_1}{2V_{\lambda II}} - \frac{V_{I\varepsilon} \varepsilon}{V_{\lambda II} q_1}$$

Экстремумы на этих гиперболах есть предельные точки. Геометрическое место указанных предельных точек – прямая линия, показанная пунктиром на рис. , наклон которой определяется условием

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0; \quad -\frac{V_{III}}{2V_{\lambda II}} + \frac{V_{I\varepsilon} \varepsilon}{V_{\lambda II} q_1^2} = 0$$

Подстановка соотношения

$$\frac{V_{I\varepsilon} \varepsilon}{V_{\lambda II}} = \frac{V_{III}}{2V_{\lambda II}} q_1^2$$

в выражение для λ дает уравнение «прямой предельных точек»:

$$\lambda_* = -\frac{V_{III}}{2V_{\lambda II}} q_1 - \frac{V_{III}}{2V_{\lambda II}} q_1 = -\frac{V_{III}}{V_{\lambda II}} q_1 = 2kq_1$$

Эта прямая имеет наклон в два раза больший по сравнению с наклоном прямой послебифуркационных равновесий, и отделяет устойчивые равновесия системы с асимметричной точкой бифуркации от неустойчивых. Как следует из рис. 3, б вычисленная кривая закритических равновесий треугольной рамы с асимметричной точкой бифуркации имеет начальный участок достаточно близкий к прямой линии в достаточно большом диапазоне закритических нагрузок. Следовательно околобифуркационные построения для закритических равновесий (рис. 3) достаточно хорошо и полно аппроксимируют поведение систем с несимметричными бифуркационными диаграммами.

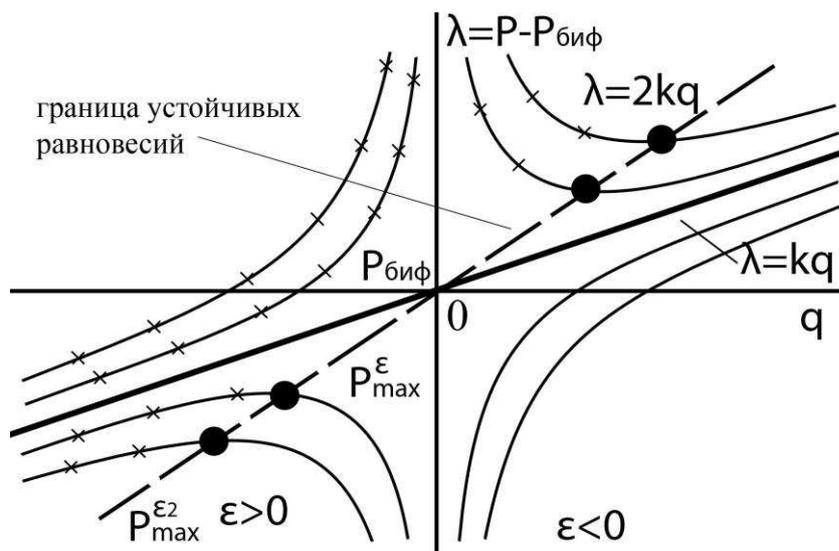


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для асимметричной точки бифуркации.

Если дать возмущение горизонтальному стержню в точке бифуркации вверх, то критическое равновесие будет устойчиво вплоть до предельной точки 4 (рис. 4, б) из которой рама хлопком переходит в равновесное состояние 4', а горизонтальный стержень станет растянутым. Если же в точке бифуркации аналогичное возмущение направлено вниз, то сразу произойдет хлопок в точку 1'. Далее после незначительного роста нагрузки будет достигнута предельная точка 3, из которой рама прощелкивает в точку 3', аналогичную по форме равновесия точке 4'.

Различие в поведении данной рамы по отношению к зеркальным возмущениям объясняется тем, что отклонение сечений горизонтального стержня вверх оказывает «разгружающее» влияние на распределение внутренних усилий в закритическом равновесии рамы. При этом внешняя нагрузка для поддержания указанного равновесия должна увеличиваться. Это определяет устойчивость закритического равновесия (верхняя кривая на рис. 4, а). Наоборот, при «догружающем» эффекте, который вызывается отклонением сечений горизонтального стержня вниз, внешняя нагрузка может быть меньше бифуркационной, что вызывает неустойчивость закритического равновесия (рис. 4, б).

Поскольку первая собственная форма для этой рамы простая (рис. 4, а), то наилучшее началь-

ное несовершенство задается в виде этой формы с отклонением сечений горизонтального стержня вниз, показанной пунктиром на рис. 4, а. Соответствующая кривая 1 падения критических нагрузок представлена на рис. 4, в. Максимальное уменьшение критической нагрузки при амплитуде отклонения среднего сечения горизонтального стержня на 1 см составило 25,6%.

Если задать почти «наихудшее» несовершенство (прогибы горизонтального стержня от сосредоточенной силы посередине), то получим кривую 2 (рис. 4, в), весьма близкую к кривой, вызываемой «наихудшим» несовершенством. Верхние кривые на рис. 4, в (кривые 5, 6) соответствуют начальным несовершенствам, задаваемым по третьей (симметричной) собственной форме, взятой с различными знаками. Кривая 4 на рис. 4, в соответствует влиянию несовершенства, задаваемого второй (кососимметричной) собственной формой рамы. Промежуточная кривая 4 (рис. 3, в) отражает влияние также «не наилучшего» несовершенства, имеющего форму несимметричных двузначных прогибов горизонтального стержня от действия сосредоточенной силы, приложенной на расстоянии 1/3 его длины от правого узла при наличии опорного закрепления на расстоянии 1/3 длины от левого узла.

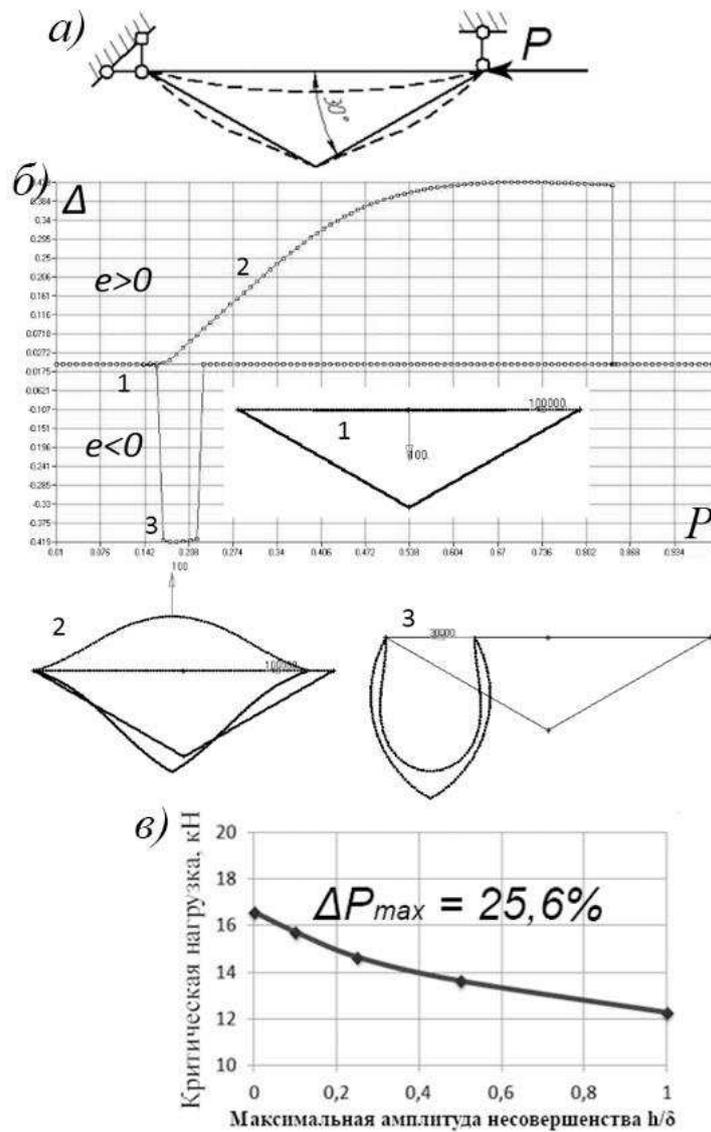


Рис. 3. Влияние начальных несовершенств на критические нагрузки симметричной треугольной рамы: а) геометрия рамы и ее первая собственная форма; б) диаграмма и формы равновесных состояний в характерных точках; в) кривые падения критических нагрузок при различных начальных несовершенствах.

Третья рама имеет форму правильного треугольника с жесткими узлами с одинаковыми и одинаково сжатыми стержнями и сечением 1×4 см (рис. 5, а). Наименьшая критическая нагрузка - двукратная. Это следует из рассмотрения свойств матрицы реакций метода перемещений, составленной относительно узловых поворотов.

$$r(P) = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 4\varphi_2(\nu) & \varphi_3(\nu) & \varphi_3(\nu) \\ \varphi_3(\nu) & 4\varphi_2(\nu) & \varphi_3(\nu) \\ \varphi_3(\nu) & \varphi_3(\nu) & 4\varphi_2(\nu) \end{bmatrix},$$

где $\varphi_2(\nu)$ и $\varphi_3(\nu)$ – специальные функции краевых усилий А.Ф. Смирнова,

$$\nu = l\sqrt{P/\sqrt{3EI}}$$

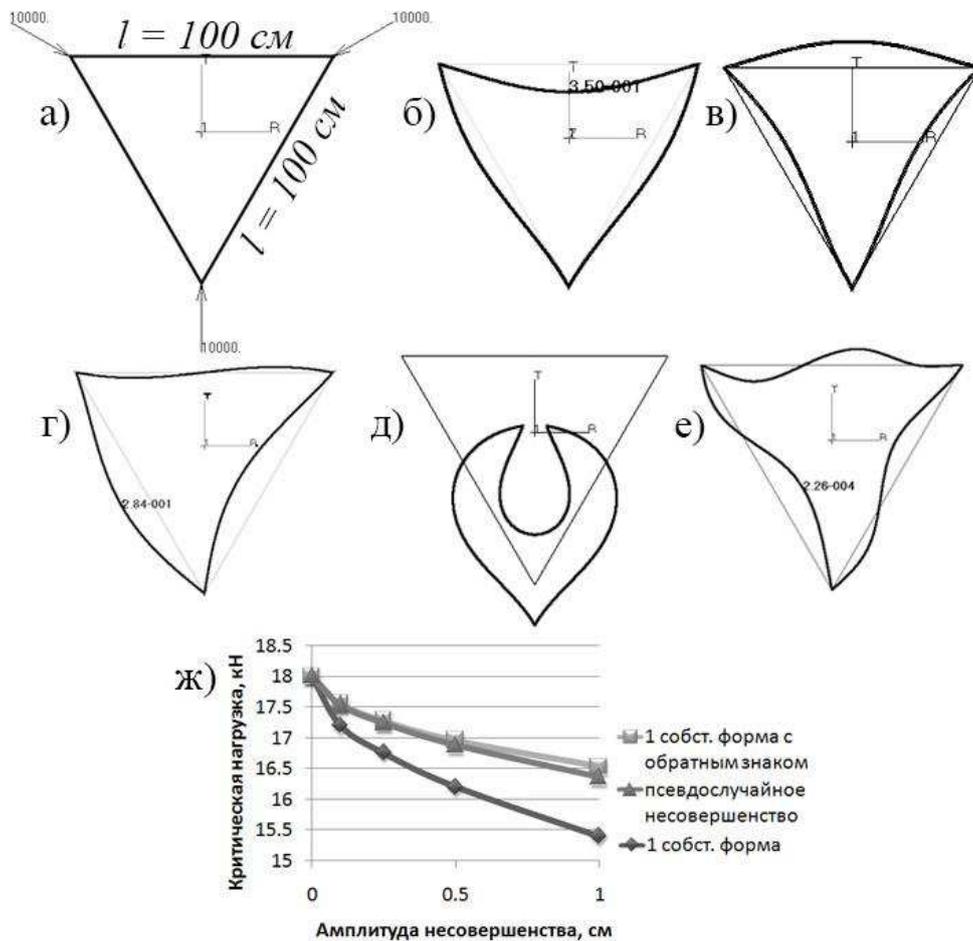


Рис. 5. Влияние начальных несовершенств на критические нагрузки треугольной рамы с двукратной критической нагрузкой: а) геометрия рамы и схема нагружения; б), в) первая (симметричная) собственная форма потери устойчивости с разными знаками; г) вторая (кососимметричная) собственная форма; д) форма закритического равновесия после хлопка; е) форма начального псевдослучайного несовершенства; ж) кривые падения критических нагрузок.

– силовой параметр. Эта матрица имеет два одинаковых характеристических числа и одно простое при всех значениях ν

$$\lambda_1(\nu) = \lambda_2(\nu) = (8\varphi_2(\nu) - 2\varphi_3(\nu)) \frac{EI}{l};$$

$$\lambda_3(\nu) = (8\varphi_2(\nu) + 4\varphi_3(\nu)) \frac{EI}{l}$$

Так как производная $\frac{d\lambda}{d\nu} < 0$, и первыми обращаются в ноль числа-функции ($\lambda_1(\nu_{кр}) = \lambda_2(\nu_{кр}) = 0$), то наименьшая

критическая нагрузка для этой рамы двукратная:

$$P_{кр1}^{биф} = P_{кр2}^{биф} \cong 25,767 EJ/l^2.$$

Соответствующие факторизованные взаимно ортогональные собственные формы потери устойчивости, выраженные через угловые повороты имеют вид:

$$\vec{Z}_1 = [1, -1, 0] \quad \text{и} \quad \vec{Z}_2 = [1, 1, -2]$$

Они определяют симметричные (\vec{Z}_1) и кососимметричные (\vec{Z}_2) формы начального по-

слебифуркационного равновесия рамы. Поскольку данная рама имеет три оси симметрии, расположенные взаимно под углами $\pm 120^\circ$, то собственные формы обладают поворотной симметрией.

Как известно [6, 9] такие системы при двукратной критической нагрузке имеют двукратную точку бифуркации, которая описывается трехпараметрической катастрофой эллиптической омбилики. В главных координатах ($q_1 = q_{к.с.}$, $q_2 = q_c$ - амплитуда собственных форм) соответствующий кубический потенциал можно представить в виде

$$V(\lambda, q_1, q_2) \sim q_2^3 - 3q_1^2 q_2 - \lambda(q_1^2 + q_2^2) + \varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2$$

Этот потенциал симметричен по координате q_1 и несимметричен по координате q_2 .

Уравнение околобифуркационного равновесия из условий стационарности функции энергии запишется:

$$\begin{aligned} V_2 = 0 & \quad 3q_2^2 - 3q_1^2 - 2\lambda q_2 + \varepsilon_2 = 0 \\ V_1 = 0 & \quad -6q_1 q_2 - 2\lambda q_1 + \varepsilon_1 = 0 \end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ решения этих уравнений для рамы без начальных несовершенств дают начальные околобифуркационные равновесия. Соответствующие собственные формы потери устойчивости показаны на рис. 4, б, г. Точка бифуркации – неустойчивая; при достижении этой точки происходит хлопок в далекое сильно деформированное «подковообразное» равновесное состояние (рис. 5, д). Всего через полусимметричную точку бифуркации может проходить две или четыре траектории равновесных состояний. В данном случае их четыре (включая основное безмоментное) при каждом значении $\lambda = P - P_{биф}$

1. $q_1 = q_2 = 0$ (основное или исходное равновесие).

2. $\lambda = +\frac{3}{2}q_2$ ($q_1 = 0$) - симметричное равновесие относительно оси $q_1 = 0$.

3. $\lambda = -\sqrt{3}q_1$, $q_2 = +\frac{q_1}{\sqrt{3}}$ - симметричное равновесие относительно линии $q_2 = +\frac{q_1}{\sqrt{3}}$ ($q_1 > 0$).

4. $\lambda = \sqrt{3}q_1$, $q_2 = -\frac{q_1}{\sqrt{3}}$ ($q_1 < 0$) - симметричное равновесие относительно линии $q_2 = -\frac{q_1}{\sqrt{3}}$ ($q_1 < 0$).

Последние два выражения для λ можно записать в форме, аналогичной записи для траектории равновесий 2.

$$\begin{aligned} \lambda &= +\frac{3}{2}\rho, \\ \rho &= \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = q_1 \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2q_1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Из этого следует, как и ожидалось (в силу поворотной симметрии системы), что все три начальных послебифуркационных равновесия описываются прямыми, пересекающимися точку бифуркации в оппозитных направлениях и имеющими одинаковый наклон. Пространственная бифуркационная диаграмма имеет форму трехгранной пирамиды с основанием в виде правильного треугольника (рис. 6). Ребра этой пирамиды дают координаты (λ , q_1 , q_2) описанных выше послебифуркационных равновесий. Если записать матрицу Гессе для потенциала эллиптической омбилики

$$H = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right\} = \begin{bmatrix} 6q_2 - 2\lambda & 6q_1 \\ -6q_1 & 6q_2 - 2\lambda \end{bmatrix}$$

то с ее помощью можно показать, что указанные равновесия неустойчивые (седловые, степень неустойчивости равна единице) как

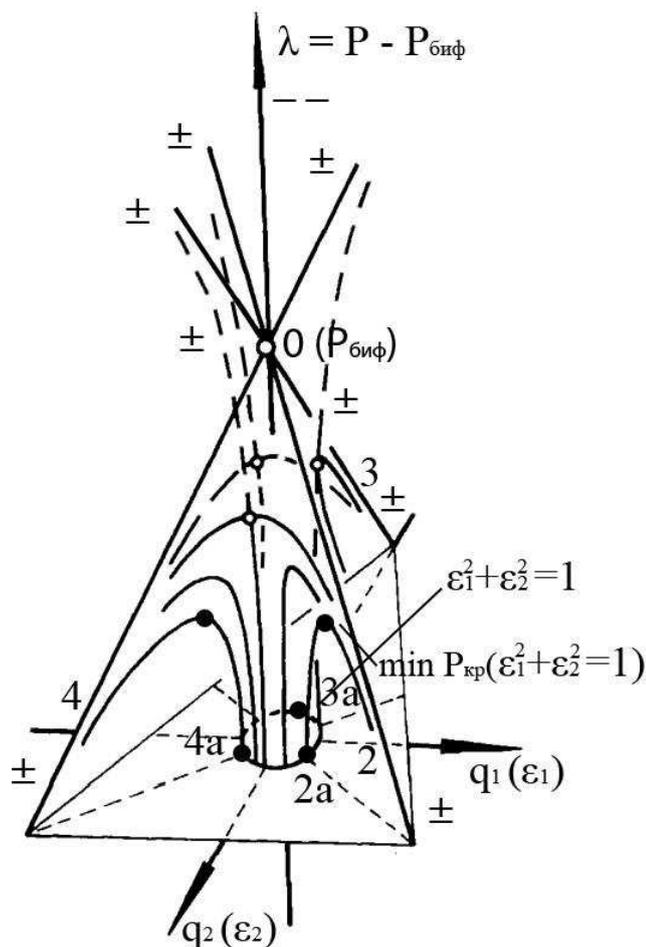


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма катастрофы эллиптической омбилики.

при $P > P_{\text{биф}}$ так и при $P < P_{\text{биф}}$. Основное равновесие при $P > P_{\text{биф}}$ ($\lambda > 0$) имеет степень неустойчивости равную двум.

При исследовании несовершенных систем с полусимметричной точкой бифуркации, весьма важной оказываются теоремы Д. Хо [1]. Он показал, что форма наихудшего начального несовершенства всегда есть форма наиболее круто падающего равновесия совершенной системы (т.е. имеющей в точке бифуркации наибольший наклон). При этом наименьшая критическая нагрузка, соответствующая наихудшему несовершенству всегда есть критическая нагрузка в предельной точке.

Для рассматриваемого случая системы с поворотной симметрией все три послебифуркационных симметричных равновесия имеют одинаковые наклоны. Следовательно, каждая

такая форма с определенным знаком задает соответствующую форму наихудшего начального несовершенства ($\epsilon_2 = -q_c$, рис. 5, б). Иначе говоря, наихудшие несовершенства это несовершенства в виде симметричной собственной формы, имеющие прогиб вдоль оси симметрии, направленный к центру треугольника.

Весьма глубокий геометрический анализ полусимметричных точек бифуркации провел П. Самуэльс [7, 8]. Он показал, что равновесие, соответствующее наихудшему начальному несовершенству всегда развивается в плоскости послебифуркационного равновесия. В данном случае это вертикальные плоскости $\lambda(0,0)-\lambda(2)$, $\lambda(0,0)-\lambda(3)$ и $\lambda(0,0)-\lambda(4)$. Если взять единичную окружность, состоящую из точек несовершенств с одинако-

вой евклидовой нормой ($\varepsilon_c^2 + \varepsilon_{kc}^2 = 1$), то наихудшим несовершенствам соответствуют точки 2а, 3а и 4а. Соответствующие кривые равновесий развиваются в вертикальных плоскостях, проходящих через биссектрисы треугольного основания бифуркационной пирамиды. Критические нагрузки в предельных точках при таких несовершенствах – наименьшие среди всех других критических нагрузок систем с несовершенствами, имеющими одну и ту же евклидову норму. При достаточно произвольных несовершенствах соответствующие траектории равновесия стремятся к ближайшим «наклонным» равновесиям совершенной системы (рис. 7). Исключения составляют траектории порожденные симметричным несовершенством по первой собственной форме, знак которой противоположен знаку наихудшего начального несовершенства ($\varepsilon_2 = +q_c$). Эти особые траектории равновесия теряют устойчивость в точках симметричной неустойчивой бифуркации, отмеченных кружочками на рис. 6. Бифуркация происходит в момент пересечения траектории равновесия несовершенной системы с осью симметрии с каждой гранью бифуркационной пирамиды. Критические бифуркационные нагрузки существенно больше критических нагрузок для систем с наихудшим несовершенством и являются верхней границей для всех несовершенных систем с одинаковой евклидовой нормой.

Бифуркационное множество катастрофы эллиптической омбилики состоит из трех листов, «скленными» между собой тремя параболическими ребрами (рис.). Эта поверхность в пространстве ε_1 - ε_2 - λ имеет три плоскости симметрии. Каждый лист бифуркационного множества есть геометрическое место критических нагрузок в предельных точках для несовершенных систем. Точки ребер – бифуркационные критические нагрузки систем с рассмотренными выше симметричными несовершенствами. Падение критических нагрузок в предельных точках в зависимости от амплитуды начального несовер-

шенства определяется известным «законом $1/2$ ». Линии наибольшего ската на каждой листовой поверхности есть геометрическое место критических нагрузок в предельных точках для систем с наихудшими начальными несовершенствами.

Кривая наиболее сильного падения критических нагрузок для рассматриваемой рамы в форме правильного треугольника при наихудших несовершенствах была построена численно. Амплитуды наихудших начальных симметричных несовершенств принимались равными $0,1\delta$, $0,25\delta$, $0,5\delta$, 1δ ($\delta = 1$ см – толщина прямоугольного поперечного сечения стержней рамы 4×1 см). Максимальное падение критической нагрузки при $-\varepsilon_c = \delta = 1$ см составило 14,5% (рис. 5, кривая 1). Относительно слабым оказалось уменьшение критической нагрузки при задании аналогичных симметричных несовершенств противоположного знака (рис. 5, кривая 3). Промежуточная кривая 2 на этом рисунке соответствует чувствительности рамы к влиянию начальных несовершенств достаточно произвольной псевдослучайной формы (рис. 5, е). Отметим, что при начальных несовершенствах в виде второй (кососимметричной) собственной формы с теми же амплитудами наибольших прогибов наклонных стержней (рис. 5, г) форма равновесий несовершенной рамы по мере роста нагрузки постепенно перестраивались и становились симметричными при достижении предельной точки. Поэтому все критические нагрузки при таких начальных несовершенствах совпали с критическими нагрузками, соответствующими симметричному наихудшему несовершенству.

В заключение отметим, что сравнительно простой анализ чувствительности треугольной рамы к наихудшим начальным несовершенствам оказался возможным вследствие ее поворотной симметрии и сравнительно простого определения закритических послебифуркационных форм равновесия.

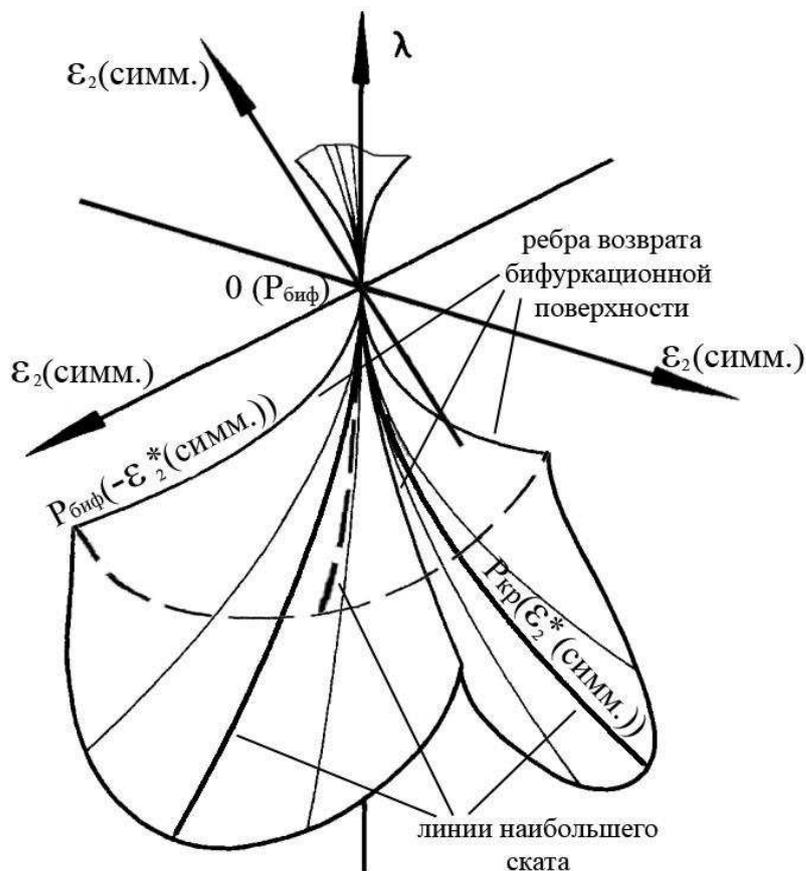


Рис. 7. Бифуркационное множество катастрофы эллиптической омбилики.

В общем случае придется исследовать все послебифуркационные равновесия (их число может быть равным $2^m - 1$ для систем с кубическим потенциалом и $(3^m - 1)/2$ в случае систем, имеющих потенциал с членами четвертой степени, m – кратность критической нагрузки). Среди этих решений выбирается то, которое имеет наиболее круто падающую траекторию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ho D.** Buckling load of nonlinear systems with multiple eigenvalues [Text] / D. Ho // Int. J. Solids Struct. – 1974. – Vol. 10. – P. 1315.
2. **Koiter W.T.** Current trends in the theory of buckling. [Text] / W.T. Koiter // Buckling of structures. B. Budiansky (ed.) – Berlin. – 1976. P. 1-16.
3. **Triantafyllidis N.** On stability and the worst imperfection shape in solids with nearly simultaneous eigenmodes. [Text] / N. Triantafyllidis, R. Peek // International journal of solids and structures. – Vol. 29. – N18. – pp. 2281-2299.
4. **Peek R.** Worst shapes of imperfections for space trusses with many simultaneously buckling members. [Text] / R. Peek, N. Triantafyllidis // International journal of solids and structures. – Vol. 29. – N19. – pp. 2385-2402.
5. **Potier-Ferry M.** Foundations of elastic postbuckling theory. [Text] / M. Potier-Ferry // Lecture notes in physics. – Vol. 288. – 1987. – P. 83-142.
6. **Hunt G.W.** Imperfections and near-coincidence for semisymmetric bifurcations

[Text] / G.W. Hunt // *Annals of the New York Academy of Sciences.* – Vol. 316. – 1978. – p. 572-589.

gineering (МИИТ), str. 9, 9, Obraztsova str., Moscow, 127994, Russia; tel./fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

7. **Samuels P.** The relationship between post-buckling behavior at coincident branching points and the geometry of an umbilic point of the energy surface. [Text] / P. Samuels // *J. Struct. Mech.* – Vol. 7 (3). – 1979. – p. 297-324.
8. **Samuels P.** Bifurcation and limit point instability of dual eigenvalue third order systems. [Text] / P. Samuels // *Int. J. Solids and Structures* – Vol.16. – 1980. – p. 743-756.
9. **Gaspar Z.** Computation of imperfection-sensitivity at two-fold branching points. [Text] / Z. Gaspar // *ZAMM.* – Vol. 63. – 1983. – p. 359-370.

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры "Строительная механика" Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9 стр. 9; тел./факс: +7(499) 972-49-81

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Теоретическая механика" Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9 стр. 9; тел./факс: +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, ассистент кафедры "Теоретическая механика" Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9 стр. 9; тел./факс+7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Assistant Professor, Department of Structural Mechanics; Moscow State University of Railway Engineering (МИИТ), str. 9, 9, Obraztsova str., Moscow, 127994, Russia; tel./fax: +7(499) 972-49-81

Sergey B. Kosytsyn, Dr.Sc., Professor, Head of Department, Department of Theoretical Mechanics; Moscow State University of Railway Engineering (МИИТ), str. 9, 9, Obraztsova str., Moscow, 127994, Russia; tel./fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Maxim M. Begichev, Assistant, Department of Theoretical Mechanics; Moscow State University of Railway En-

ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МНОГОУРОВНЕВОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

М.Л. Мозгалева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье приводятся краткие сведения о разработанных дискретных и дискретно-континуальных методах многоуровневого расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Обосновывается актуальность соответствующей проблемы, дается оценка научной новизны соответствующих результатов, теоретической и практической значимости.

Ключевые слова: дискретные методы, дискретно-континуальные методы, вейвлет-реализации, многоуровневые расчеты, строительные конструкций, кратномасштабный вейвлет-анализа, дискретно-континуальный метод конечных элементов

WAVELET-BASED DISCRETE AND DISCRETE-CONTINUAL METHODS OF MULTILEVEL STRUCTURAL ANALYSIS

Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to brief presentation of wavelet-based discrete and discrete-continual methods of multilevel structural analysis. Urgency of the problem, scientific novelty, theoretical and practical significance of corresponding results are under consideration.

Key words: wavelet-based discrete methods, wavelet-based discrete-continual methods, multilevel structural analysis, discrete-continual finite element method

1. АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Разработка, исследование, развитие, верификация и апробация методов многоуровневого (в том числе локального) расчета строительных конструкций являются исключительно актуальными задачами. Собственно весь современный этап развития строительной механики связан с широким использованием численных (дискретных) методов (прежде всего, метода конечных элементов (МКЭ)), реализованных в универсальных и специализированных программных комплексах промышленного типа с развитым пользовательским интерфейсом (ANSYS,

ABAQUS, NASTRAN, MicroFE, SCAD, Лира, СТАДИО и др.), доминирующих в отечественной и зарубежной расчетной практике, что объясняется целым рядом объективных причин (высокоточные решения многих практически важных многомерных задач могут быть получены исключительно численным путем; экспериментальные исследования являются дорогостоящими и зачастую неполными). Вместе с тем, в последние десятилетия появился некоторый потенциал для развития численно-аналитических (дискретно-континуальных, полуаналитических) методов, связанный со стремительным ростом производительности парка компьютеров (в

том числе с кластерной организацией масштабируемой (наращиваемой) мощности) и наработками в области вычислительной математики, среди которых, в частности, следует особо отметить появление вейвлет-анализа (теории всплесков). Дискретно-континуальные методы позволяют получать решения в корректной аналитической форме, значительно способствующей повышению качества исследования строительных объектов (в том числе в части определения напряженно-деформированного состояния (НДС)), развивают интуицию расчетчика, понимание им работы конструкций, дают возможность качественно и количественно оценить влияние локальных и глобальных факторов. Эти методы наиболее эффективны в зонах краевого эффекта, где часть составляющих решения являются быстроизменяющимися функциями, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена в рамках численных методов.

История развития дискретных и дискретно-континуальных методов показывает, что основной тенденцией является построение алгоритмов, позволяющих рассчитывать сложные конструкции в целом, что приводит к вычислительным схемам большой размерности. Вместе с тем, наиболее опасной с позиции прочности является НДС в относительно небольшом количестве локальных зон, как правило, известных заранее. Это, прежде всего, места концентраций (углы, щели, трещины, места стыковок элементов конструкций и т.д.), локальных изменений в строительном объекте, например, при его реконструкции (пробивка новых проходов, снос опор и т.д.) или конструкции локальных усилений (различные стойки, связи, подкрепляющие балки, металлические стяжки и т.д.). Локальное численное моделирование может привести к значительному сокращению количества неизвестных, что позволяет проводить расчеты с большой точностью даже на персональных компьютерах. Современным, высокоэффективным, динамично развивающимся инструментарием для про-

ведения соответствующих исследований является вейвлет-анализ. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. При этом нередко появляются возможности построения более высококачественных расчетных моделей и внесения обоснованных конструктивных изменений [1-51].

Работа выполнялась в рамках Гранта 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

2. СТЕПЕНЬ РАЗРАБОТАННОСТИ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Преимущества сочетания качественных свойств замкнутых (аналитических) решений и общности численных методов отмечалась многими исследователями, начиная с середины прошлого столетия, но многие из разработок прошлых десятилетий (метод Л.В. Канторовича, метод В.З. Власова, метод прямых и др.) были практически не реализуемыми в общем случае в силу того, что не учитывалась сложная вычислительная специфика соответствующих проблем и необходимость адаптации для компьютерной реализации. Представляемое исследование было ориентировано в том числе и на развитие дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного и исследованного в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова при личном участии автора. В отношении вейвлет-анализа следует отметить, что еще ни одно из направлений фундаментальной и прикладной математики не получало столь широкого распространения в тех-

нических приложениях за стремительно короткий срок, однако в области строительной механики все еще имеется относительно небольшое количество работ, посвященных использованию соответствующего аппарата.

3. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Целью работы является разработка, исследование и верификация корректных дискретных и дискретно-континуальных методов многоуровневого расчета строительных конструкций на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа [1-51].

Для достижения указанной цели были решены следующие задачи:

1. Формулировка корректных операторных и вариационных постановок краевых задач строительной механики для реализации дискретных и дискретно-континуальных методов многоуровневого расчета строительных конструкций.
2. Разработка многоуровневого дискретного метода локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа.
3. Разработка универсального корректного метода точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.
4. Развитие дискретно-континуального метода конечных элементов в части расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными (регулярными) физико-геометрическими параметрами по одному из направлений.
5. Разработка вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для локального расчета строительных конструкций.
6. Программная реализация, верификация и апробация разработанных методов для решения модельных, тестовых и практи-

чески важных задач многоуровневого расчета строительных конструкций.

4. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Строительные конструкции, в том числе с кусочно-постоянными регулярными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений, их наиболее опасные (с позиции прочности) локальные зоны [1-51].

5. ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Многоуровневое напряженно-деформированное состояние строительных конструкций, в том числе локальное, в наиболее опасных (с позиции прочности) зонах [1-51].

6. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе использованы современные достижения математики в области функционального анализа (теория обобщенных функций, теория операторов и др.) и численных методов, связанные с использованием аппарата вейвлет-анализа, решением проблемы собственных значений для несимметричных матриц, имеющих в составе своего спектра жордановы клетки неединичного порядка [1-51]. Разработка, тестирование и апробация авторских программных комплексов проводилась на основе использования языка программирования высокого уровня Fortran. В верификационных целях использовались известные численные методы строительной механики (прежде всего, метод конечных элементов), реализующие программные комплексы ANSYS и СТАДИО.

7. НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ

1. Сформулированы корректные операторные и вариационные постановки краевых задач строительной механики для реализации дискретных и дискретно-континуальных методов многоуровневого расчета строительных конструкций.
2. Разработан многоуровневый дискретный метод локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа.
3. Разработан универсальный корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.
4. Развита дискретно-континуальная методика конечных элементов в части расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными (регулярными) физико-геометрическими параметрами по одному из направлений.
5. Разработана вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального расчета строительных конструкций.

8. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Разработаны, исследованы и верифицированы корректные дискретные и дискретно-континуальные методы многоуровневого расчета строительных конструкций на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа, позволяющие повысить качество исследования строительных объектов в части определения напряженно-деформированного состояния конструкций, в том числе в наиболее опасных (с позиции прочности) локальных зонах [1-51].

9. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Практическая значимость работы.

1. Разработаны методика и алгоритмы, реализующие многоуровневый дискретный метод локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа.
2. Разработаны методика и алгоритмы, реализующие универсальный корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.
3. Разработаны методика и алгоритмы, реализующие дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными (регулярными) физико-геометрическими параметрами по одному из направлений.
4. Разработаны методика и алгоритмы, реализующие вейвлет-реализацию дискретно-континуального метода конечных элементов для локального расчета строительных конструкций.
5. Созданы авторские программные комплексы, которые могут стать составной частью при построении комплексов промышленного типа.
6. Решены модельные, тестовые и практически важные задачи многоуровневого расчета строительных конструкций.

По договорам с рядом научно-исследовательских и проектных организаций (ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (МГСУ), ФГБУ «Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук» (НИИСФ РААСН), ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО» и др.), в рамках грантов и программ Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии архитектуры и строительных наук

(РААСН) выполнены расчеты широкого класса строительных конструкций [1-51].

10. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Разработанные корректные дискретные и дискретно-континуальные методы многоуровневого расчета строительных конструкций, а также реализующее авторское программно-алгоритмическое обеспечение используются в ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО» и ООО «ГК-Техстрой». Достоверность и обоснованность научных положений основана на строгости используемого математического аппарата; сопоставлении полученных результатов с результатами проводимых параллельно контрольных расчетов с привлечением программных комплексов промышленного типа; сопоставлении результатов расчетов с решениями, полученными по другим аналитическим и численным методам; сопоставлении между собой результатов расчетов, полученных по разработанным дискретным и дискретно-континуальным методам многоуровневого расчета строительных конструкций; экспертной оценке точности решений специалистами в области НДС [1-51].

10. АПРОБАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ

Материалы исследования докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях [1-51]: Международная научно-практическая конференция «Строительные конструкции XXI века (Россия, г. Москва, 2000 г.); городская научно-практическая конференция-выставка, посвященная 85-летию МГСУ-МИСИ (Россия, г. Москва, 2006 г.); XVII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII Польско-Словацко-Российский семинар «Теоретические основы строительства» (Польша, г. Варшава, г. Вроцлав, 2008 г.;

Словакия, г. Жилина, 2010 г.; Польша, г. Варшава, г. Вроцлав, 2011 г.; Россия, г. Архангельск, 2012 г.; Словакия, г. Жилина, 2013 г.; Польша, г. Вроцлав, г. Шклярска-Поремба, 2014 г.); I, IV Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы» (Россия, г. Москва, 2008, 2011 гг.); VI, VIII, IX, XI, XII Всероссийская научно-практическая и учебно-методическая конференция «Фундаментальные науки в современном строительстве» (Россия, г. Москва, 2008, 2011, 2012, 2014, 2015 гг.); Научная конференция – II академические чтения «Актуальные вопросы строительной физики – энергосбережение и экологическая безопасность», посвященные памяти академика Осипова Георгия Львовича (Россия, г. Москва, 2010 г.); III, IV, V Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Россия, г. Новочеркасск, 2010 г.; Россия, г. Челябинск, 2012 г.; Россия, г. Иркутск, 2014 г.); Международные академические чтения «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения» (Россия, г. Курск, 2011 г.); I Международная научная конференция «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании» (Россия, г. Москва, 2011 г.); XXIV, XXV Международная конференция «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» /BEM&FEM/ (Россия, г. Санкт-Петербург, 2011, 2013 гг.); Международная научная конференция «Современные проблемы расчета и проектирования железобетонных конструкций многоэтажных зданий», посвященная 100-летию со дня рождения П.Ф. Дроздова (Россия, г. Москва, 2013 г.); II, III, IV Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» /«Золотовские чтения»/ (Россия, г. Москва, 2013-2015 гг.); III Международная научно-

техническая конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Высокие технологии в современной науке и технике» (Россия, г. Томск, 2014 г.); Международная конференция «Физическая мезомеханика многоуровневых систем – 2014. Моделирование, эксперимент, приложения» (Россия, г. Томск, 2014 г.); 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering /14th ICCSBE/ (Russia, Moscow, 2012); The 3rd/2013 International Conference on Civil Engineering, Architecture and Building Materials /CEABM 2013/ (China, Jinan, 2013); The First conference on Technological Innovations in Nuclear Civil Engineering /TINCE/ (France, Paris, 2013); 4th/2014 International Conference on Civil Engineering, Architecture and Building Materials /CEABM 2014/ (China, Haikou, 2014 г.); 1st International Conference on Advanced Material and Structural Mechanical Engineering /ICAMSME 2014/ (South-Korea, Incheon, 2014); 4th International Conference on Applied Mechanics, Materials and Manufacturing /ICA3M 2014/ (China, Shenzhen, 2014); International Conference on Applied Mathematics, Modelling and Simulation /ICAMMS2014/ (China, Xiamen, 2014); 3rd International Conference on Mechanical Design and Power Engineering /ICMDPE2014/ (South-Korea, Jeju Island, 2014); Заседания Ученого совета Отделения строительных наук РААСН (Россия, г. Москва, 2011-2014 гг.); объединенные научные семинары кафедры информатики и прикладной математики МГСУ и Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов МГСУ под руководством чл.-корр. РААСН, проф. П.А. Акимова и чл.-корр. РААСН, проф. А.М. Белостоцкого (Россия, г. Москва, 2014-2015 гг.); научные семинары научно-исследовательского центра «СтаДиО» под руководством чл.-корр. РААСН, проф. А.М. Белостоцкого (Россия, г. Москва, 2014-2015 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** К вопросу построения фундаментальной функции для дифференциального оператора задачи о поперечном изгибе балки Бернулли на двухпараметрическом упругом основании. // Вестник МГСУ, №4, 2011, с. 14-20.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Введение. Одномерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 30-39.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1. Одномерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 39-46.
6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2. Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.
7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе

- использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.
8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1. Понятие о вейвлетах и кратномасштабном вейвлет-анализе. // Вестник МГСУ, №7, 2012, с. 44-50.
 9. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 1: Двумерная задача теории упругости. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 18-25.
 10. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 2: Трехмерная задача теории упругости. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 26-33.
 11. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 34-41.
 12. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 18-32.
 13. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 33-45.
 14. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами.** О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.
 15. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 78-86.
 16. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.

17. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.
18. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением методом базисных вариаций. // *Вестник МГСУ*, №4, 2011, с. 21-28.
19. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.
20. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
21. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.
22. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Дискретизация области, аппроксимация искоемых функций, их частных производных, деформаций и напряжений. // *Вестник МГСУ*, №2, том 2, 2011, с. 74-80.
23. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Построение локальных и глобальных матриц жесткости и векторов нагрузок. // *Вестник МГСУ*, №2, том 2, 2011, с. 81-87.
24. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Задание граничных условий. // *Вестник МГСУ*, №5, 2011, с. 239-247.
25. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 4: Формирование разрешающей многоточечной краевой задачи. // *Вестник МГСУ*, №5, 2011, с. 248-252.
26. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основ-

- ному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 87-110.
27. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 111-131.
28. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 132-151.
29. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
30. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
31. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
32. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Герман А.Ю.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи расчета балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // *Вестник МГСУ*, №4, 2011, с. 29-35.
33. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Герман А.Ю.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи расчета трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // *Вестник МГСУ*, №4, 2011, с. 36-44.
34. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2013. – 416 с.
35. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: МГСУ, 2011. – 368 с.
36. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли. // *International Journal for Computational Civil and*

- Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 97-107.
37. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 3, 2014, pp. 127-136.
 38. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 3, 2014, pp. 137-146.
 39. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
 40. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Multilevel Wavelet-based Numerical and Semianalytical Methods of Local Structural Analysis. // Abstract Volume, 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCBE), Moscow, 27-29 June 2012, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Publishing House "ASV", pp. 150-151.
 41. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 353-356* (2013), pp. 3224-3227.
 42. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169* (2012), pp. 3155-3158.
 43. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583* (2014) pp. 2898-2902.
 44. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 351-352* (2013), pp. 13-16.
 45. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 405-408* (2013), pp. 3165-3168.
 46. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026* (2014) pp. 89-94.
 47. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research, Vols. 1025-1026* (2014) pp. 95-103.
 48. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. //

Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 720-723.

49. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 670-671 (2014) pp. 724-727.
50. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, Vol. 1040 (2014) pp. 664-669.
51. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings 1623, 3 (2014).

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ СООРУЖЕНИЙ И КОНСТРУКЦИЙ ИЗ БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Г.В. Мурашкин¹, В.Г. Мурашкин²

¹ Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, г. Саратов, РОССИЯ

² ООО «КБ «Проект:Куйбышев», г. Самара, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье представлена методика расчета ресурса бетонных и железобетонных конструкций на основе параметров прочности, полученных при обследовании, и с учетом эффекта упрочнения бетона со временем и влияния агрессивной среды на состояние конструкции. Представлено сопоставление процесса снижения прочности бетона по линейной схеме и общепринятой экспоненциальной зависимости.

Ключевые слова: рост прочности бетона, временной фактор, агрессивная среда, деградация бетона, остаточный ресурс, диаграмма деформирования бетона

DURABILITY OF OPERATING CONCRETE AND REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

Gennadiy V. Murashkin¹, Vasiliy G. Murashkin²

¹ Saratov State Technical University named after Y.A. Gagarin, Saratov, RUSSIA

² ООО "КБ "Proekt:Kuibyshev", Samara, RUSSIA

ABSTRACT: The article presents the method of calculation of durability of concrete and concrete structures on the basis of the strength parameters, obtained during examination, and with consideration of the effect of hardening of concrete with time and influence of aggressive environment on the condition of the structure. Presents a comparison of the process of reducing the concrete strength on the linear scheme and the conventional exponential dependence.

Key words: the increase of concrete strength, the time factor, aggressive environment, degradation of concrete, residual life, stress-strain diagram of concrete,

Одним из основных строительных материалов, получившим наибольшее распространение в строительной практике, является бетон. Однако он неоднороден по своей структуре, имеет существенную пористость различных микро и макро диаметров и многочисленные микротрещины, не говоря уже о дислокациях в кристаллической решетке цементного камня и т.д. Именно поэтому оказалось невозможным создать стройную математическую теорию для расчета бетонных и железобетонных элементов, учитывающую все многообразие воздействующих факторов

на исключительно сложный в физико-химическом отношении материал.

Поэтому пока только феноменологический подход, основанный на анализе экспериментальных данных "...позволяет найти компромисс между теоретическим и экспериментальным изучением физических закономерностей взаимодействия материала и агрессивной среды и проблемами прочности, устойчивости и долговечности конструкций..." [1].

В работе [2] показывается теоретический подход к определению ресурса железобетонных конструкций. Однако им можно восполь-

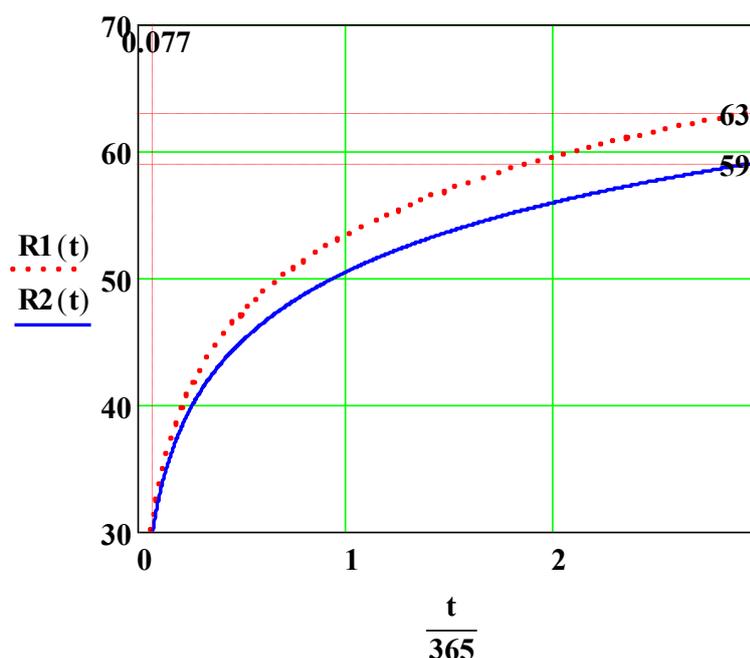


Рис. 1. Нарастание прочности бетона $R(28)=30$ МПа, $R(k)=19$ МПа по $R1(t)$ и $R2(t)$.

пользоваться, когда известна история воздействия на сооружение механических нагрузок, характер изменения свойств материала под действием конкретной агрессивной среды, развитие повреждений и т.д. Для конструкций, которые наблюдаются с особой тщательностью и необходимой периодичностью в процессе эксплуатации (мосты, телевизионные башни и др.), вполне можно реализовать этот принципиальный подход. Но даже и в этом случае без экспериментальных исследований, прогноз может оказаться ошибочным.

Для определения расчетных характеристик бетона используется прочность стандартных кубов или цилиндров, твердевших в нормальных условиях 28 суток. Рост прочности после 28 суток принимается в запас несущей способности и этот запас, как правило, не определяют. Однако, как показано ниже, при определении ресурса эксплуатируемого сооружения необходимо знать величину упрочнение бетона после 28 суточного возраста. Исследований по определению роста прочности бетона и после 28 суток твердения и нашими и зарубежными учеными относительно много.

Но эти исследования были направлены на возможность снижения расхода материалов при более длительном строительстве чем 28 суток.

Чаще всего в зарубежной и отечественной литературе приводится логарифмическая связь упрочнения бетона от временного фактора:

$$R1(t) = R28 \frac{\log(t)}{\log(28)} \quad (1)$$

где $R1(t)$, $R28$ – прочность бетона на сжатие в МПа в возрасте t (в сутках) и 28 суток; $\log(t)$, $\log(28)$ – десятичные логарифмы возраста бетона.

В работе [3] приводится уточнение зависимости (1) с добавлением корректирующего значения прочности бетона в недельном возрасте – $R(k)$:

$$R2(t) = R(t) + (R28 - R(k)) \frac{\log(t) - \log(k)}{\log(28) - \log(k)} \quad (2)$$

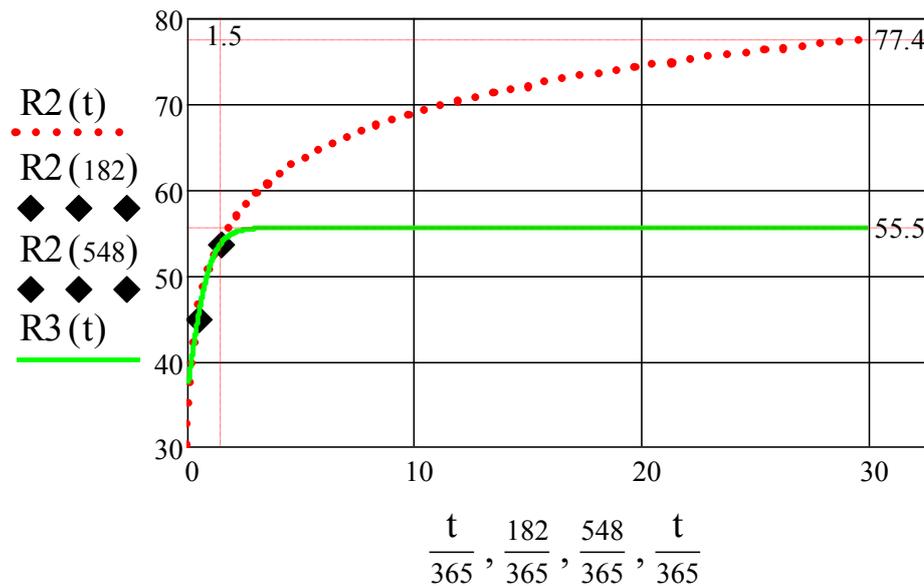


Рис. 2. Изменение прочности бетона за срок в 30 лет по выражениям $R2(t)$, $R3(t)$ и символом \blacklozenge отмечены точки совмещения.

Выражение 2, как и предназначалось в [3], касается возможности использовать при проектировании конструкций из железобетона не расчетную прочность, получаемую на 28 суток, а прочность бетона несколько большую, так как срок строительства монолитных зданий, как правило, не менее 90 - 180 суток. Однако, для определения остаточного ресурса, когда срок эксплуатации 20-30 и более лет, ни выражение 1, ни выражение 2 не подходят, так как дают завышенные результаты по сравнению с фактическими данными. По данным, приведенным в [4] нарастание прочности происходит в бетоне ощутимо до 1.5 -2х лет, а далее лишь на десятые или сотые доли процента. Учитывая это в [5] было предложено для определения повышения прочности бетона выражение:

$$R3(t) = \left(a + b \frac{\exp(t/365) - \exp(-t/365)}{\exp(t/365) + \exp(-t/365)} \right) R_{28} \quad (3)$$

где a и b подбираются или по данным уравнения 2, или определяются на основе экспериментальных замеров.

Пусть, в нашем случае, для исследуемой конструкции соблюдается равенство $R2(t) = R3(t)$ при $t = 182$ суток и $t = 548$ суток (0,5 и 1,5 года). Тогда совместное решение двух уравнений дает: $a = 1.192$ и $b = 0.657$.

Приведенный пример соотносится с результатами обследования парков железобетонных резервуаров нефтепровода «Дружба», эксплуатируемых без капитального ремонта более 30 лет [5]. Для конструкций был использован бетон класса В30. При испытаниях методом выбуривания бетонных цилиндров и ультразвуковым методом большого количества плит было установлено, что средняя прочность бетона в них близка к проектной (на нефтяной базе в г. Брянске – 32 МПа, в г. Самаре 28 МПа). Но плиты подвергались воздействию газовой среды изнутри резервуара и атмосферному воздействию снаружи. Прочность бетона плит изнутри резервуаров оказалась существенно меньшей, чем снаружи. Несмотря на удовлетворительные средние показатели прочности, большая часть плит уже находилась в аварийном состоянии и нуждалась в замене. Обнаруженные на территории нефтебаз

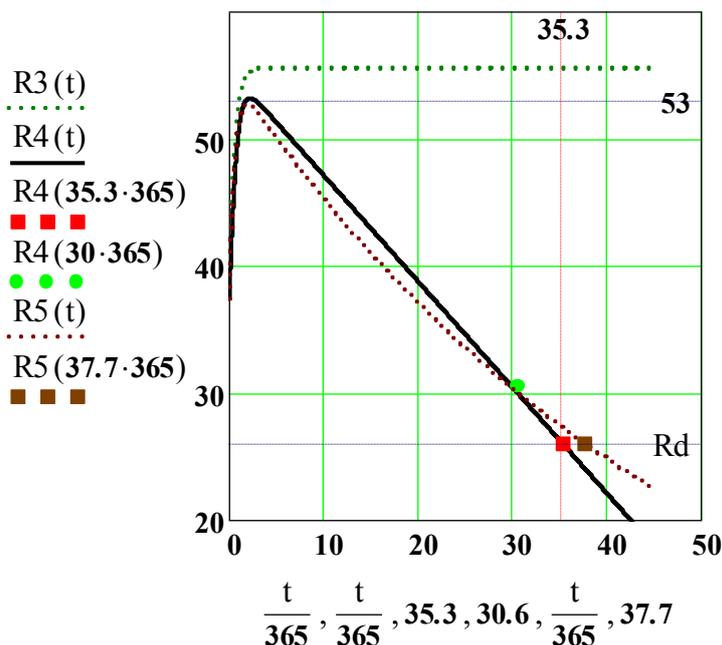


Рис. 3. $R_3(t)$ – изменение прочности бетона, работающего в нормальных условиях без деградационных эффектов; $R_4(t)$ – изменение прочности бетона с деградацией линейно, $R_5(t)$ – изменение прочности бетона при деградации по экспоненте.

плиты закопанные в грунт, которые были отбракованные из-за повреждений при транспортировке, показали прочность бетона около 58 МПа при значительно меньшем разбросе результатов. Это близкий результат к тому, что дает выражение 2 к $t = 3$ годам. Сопоставление прочностей плит подвергшихся агрессивной коррозии и атмосферному воздействию с прочностью плит находящихся в грунте, позволило установить параметры деградационной функции:

$$R_m - R_f = vt, \quad (4)$$

где R_m – прочность бетона с учетом упрочнения при нормальных условиях; R_f – фактическая прочность бетона после эксплуатации за время t ; v – средняя скорость деградации в сутки.

В рассматриваемом примере принято $R_m = 55$ МПа, $R_f = 30$ МПа. Следовательно, $v = 2.283 \cdot 10^{-3}$. Если представить, что деградация прочности бетона будет происходить

по линейному закону, то изменение прочности будет определяться функцией:

$$R_4(t) = R_3(t) - vt. \quad (5)$$

Исследования, проведенные в [6] и других научных школах показывают, что агрессивное воздействие происходит по экспоненциальному закону. Тогда выражение для определения прочности на момент t будет иметь вид:

$$R_5(t) = R_3(t) \exp(-rt). \quad (6)$$

Полагая, что точки на кривых $R_4(t)$ и $R_5(t)$ совпадают при значениях принятых для R_m и R_f , получим значение параметра $r = 5.5 \cdot 10^{-5}$.

В нашем примере было принято, что аварийное состояние железобетонных плит наступит тогда, когда бетон достигнет прочности $R_d = 26$ МПа.

Время t_1 от начала эксплуатации, до наступления аварийного состояния при деградации по линейному закону получим из условия $R_4(t) = Rd$. В данном случае оно будет равно $t_1 = 35.3$ года. Остаточный ресурс после проведения обследования составил $P_1 = 5.3$ года.

Для деградации принятой по экспоненциальному закону из условия $R_5(t) = Rd$ получим $t_2 = 37.7$ года, а остаточный ресурс $P_2 = 7.7$ года.

Для расчетов и визуализации полученных материалов оказалось наиболее удобным использовать ПК MathCAD - [7,8].

Вариант с определением остаточного ресурса с учетом деградации по экспоненте оказался более оптимистичным и АК «Транснефть» приняла решение использовать остаточный ресурс по линейному варианту деградации для замены в этот остаточный ресурс всех железобетонных плит покрытия резервуаров и использовала полученные авторами данные для разработки руководящих документов [9].

Для сокращения расчетного остаточного ресурса железобетонных плит покрытия при испытании на прочность выпиленных образцов из бетона, подверженного агрессивному воздействию паров нефти, были получены данные о значительном повышении хрупкости бетона - практически отсутствие ниспадающей ветви в диаграмме деформирования. Для расчета таких плит использовалась модель деформирования предложенная ранее [10] с ограничениями по деформативности:

$$\sigma(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^b \exp(b\varepsilon / p). \quad (7)$$

Выражение 7, не имеющая разрывов между восходящей и нисходящей ветвей деформационной кривой сжатого бетона, позволяет решать не только прочностные вопросы для неповрежденных конструкций - [11], но и для расчета прочности конструкций с повреждениями в результате агрессивного влияния среды [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петров В.В.** К вопросу построения моделей расчета долговечности конструкций /В.В. Петров // Сб. Долговечность строительных материалов, изделий и конструкций, Саранск, Из-во Саранского Государственного Университета, 2014. С. 136-144.
2. **Чирков В.П.** Основы теории расчета ресурса железобетонных конструкций. // Бетон и железобетон. – 1990. – № 10. с.=35-38,
3. **Баженов Ю.М.** Технология бетона /Ю.М. Баженов // –М.: АСВ. 2002, с. 500
4. **Невилль А.М.** Свойства бетона. –М.: Стройиздат, 1972, с. 384.
5. **Мурашкин Г.В.** Техническое состояние железобетонных резервуаров для нефти / Г.В. Мурашкин, В.В. Власов, К.И. Гимадетдинов, Д.В. Семашкин// Трубопроводный транспорт нефти. М., 2000. №9 С. 24-27
6. **Петров В.В.** Инкрементальная модель взаимодействия нелинейно деформируемых материалов с агрессивными средами /В.В. Петров, П.В. Селяев// Сб. Долговечность строительных материалов, изделий и конструкций, Саранск, Из-во Саранского Государственного Университета, 2014. С. 145-151.
7. **Мурашкин В.Г.** Инженерные и научные расчеты в программном комплексе MathCAD /В.Г. Мурашкин//–Самара: СГАСУ, 2011. С. 84.
8. **Мурашкин Г.В.** Применение программных комплексов для уточненного расчета прогибов железобетонных элементов / Г.В. Мурашкин, Д.А. Панфилов, В.Г. Мурашкин // International Journal for Computation Civil and Structural Engineering. АСВ.-М. , №4 2012
9. Правила технической эксплуатации магистральных трубопроводов. РД 153-39.4-056-00. АК "Транснефть". М., 2001
10. **Мурашкин Г.В.** Моделирование диаграммы деформирования бетона /Г.В.

Мурашкин, В.Г. Мурашкин //Известия высших учебных заведений. Строительство. Новосибирск, 1997, №10. С. 4-6.

11. **Мордовский С.С.** Совершенствование расчета прочности внецентренно сжатых железобетонных элементов / Канд. диссертация // -Казань, 2013г.
12. **Мурашкин Г.В.** Совершенствование диагностики состояния эксплуатируемых железобетонных конструкций /Г.В. Мурашкин, В.Г. Мурашкин, А.И Пятница // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: Сборник статей Международной научно-технической конференции. Пенза, 2003.

Мурашкин Геннадий Васильевич, доктор технических наук, член-корреспондент РААСН, профессор, профессор кафедры Теория сооружений и конструкций ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина»; Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77; Тел.: +7 (845) 99-88-94; e-mail: njkcnsq@bk.ru

Мурашкин Василий Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент; ООО «КБ «Проект:Куйбышев»; Россия, 443030, г. Самара, ул.Чкалова, д. 100п, тел. +7 (846) 222-90-05; e-mail: murvag@mail.ru

Murashkin Gennadiy Vasilevich, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Theory of Structures and Structural Designs; Saratov state technical University named after Y. A. Gagarin; Russia, 410054, Saratov, street Polytechnic, 77. Phone: +7 (845) 99-88-94; email: njkcnsq@bk.ru

Murashkin Vasilii Gennadievich, Candidate of technical sciences, Docent; ООО «КБ “Proekt:Kuibyshev”»; Russia, 443030, Samara, str. Chkalova, 100p; Phone: +7 (846) 222-90-05; e-mail: murvag@mail.ru

К МОДЕЛИРОВАНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ КОНГЛОМЕРАТНЫХ КОМПОЗИТОВ В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Е.М. Чернышов, А.И. Макеев

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье обсуждаются возможности и условия аналитического учета влияния структуры конгломератных композитов на локализацию и концентрацию напряжений в строительных конструкциях из них. Предложены аналитические соотношения для величины локального максимального напряжения в конгломератном композите.

Ключевые слова: конгломератные строительные композиты, строительные конструкции, структура, концентрация напряжений, локализация напряжений

BY MODELING OF STRESS STATE STRUCTURALLY HETEROGENEOUS CONGLOMERATE COMPOSITES IN BUILDING CONSTRUCTIONS

Eugene M. Chernyschov, Aleksey I. Makeev

Voronezh state university of architecture and Civil Engineering, Voronezh, RUSSIA

ABSTRACT: The article discusses the possibilities and conditions of the analytical account the effect of conglomerate structure composites localization and concentration of stresses in structures of them. The analytical relations for the maximum value of the local stress in the composite conglomerate.

Keywords: construction conglomerate composites, building construction, structure, stress concentration, stress localization

ВВЕДЕНИЕ

Структурная неоднородность строительных композитов является общим объективно-субъективным их признаком и должна квалифицироваться в качестве фундаментальной категории [1] материаловедения и технологии, расчета и проектирования композитов и конструкций.

В материаловедении, как науке о свойствах композитов, эта категория занимает центральное положение при раскрытии закономерных связей в системе «состав – структура – состояние – свойства», что предопределяется приоритетным значением признаков не-

однородности при реализации функций композитов, при управлении их качеством в задачах синтеза и конструирования оптимальных структур.

В технологии, как науке о принципах и способах управления процессами структурообразования материалов, эта категория в ее соответствующих характеристиках состава, структуры, состояния оказывается мерилom, критерием оптимальности рецептурно-технологических решений при получении композитов требуемого и задаваемого качества.

В механике композиционных материалов, каковыми являются и строительные материалы, структурная неоднородность принимается как их общий признак, требующий

соответствующего учета при идентификации материалов как деформируемых твердых тел, при математическом моделировании определяющих для них соотношений.

В теории расчета строительных конструкций структурная неоднородность материала, будучи учтенной введением осредненных эффективных (эквивалентных) его характеристик для соответствующей принятой модели сплошной среды, оказывается, наряду с другими, одной из причин необходимости вероятностного подхода при формализации и математическом моделировании напряженно-деформированного состояния, статистической идентификации и интерпретации технических свойств материала.

Таким образом, структурная неоднородность оказывается центральной категорией материаловедения, технологии, механики композитов, теории и практики расчета строительных конструкций. И это является фактором, объединяющим интересы специалистов по механике материалов и теории расчета строительных конструкций, с одной стороны, по материаловедению и технологии композитов, с другой.

1. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА И КАЧЕСТВЕННОЙ КАРТИНЫ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ МЕХАНИЧЕСКОГО ЕГО НАГРУЖЕНИЯ В КОНСТРУКЦИИ

Анализ исходит из положения о том, что локализация и концентрация напряжений, являясь неотъемлемыми чертами энергетического состояния композита, определяются характеристиками его состава, структуры и состояния: структурно-неоднородный композит фактически является трансформатором (преобразователем) энергии внешнего механического воздействия на материал в энергию нагружения его внутренних структурных связей посредством ее диссипации, рассеивания

в структуре, и картина такого рассеивания определяется особенностями «конструкции трансформатора», то есть состава, структуры и состояния материала – «конструкции структуры материала».

В такой трактовке материал принимается как таковой, вне его связи со строительной конструкцией, которая обладает своей структурой и с которой материал с его структурой находится (должен находиться) в определенных отношениях соразмерности – в отношениях конгруэнтности. Иными словами, существует проблема учета роли «структуры материала в структуре конструкции» (проблема мегаструктуры). И ясно, что отмеченное требует развития и соответствующего расширения представлений о механизме и содержании процесса формирования напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородных композитов в системе «материал - конструкция - среда». Отправным моментом здесь является картина напряженного состояния материала в конструкции в увязке со структурой конструкции как системного объекта строительной механики [2, 3]. Имеется в виду идентификация и характеристика эпюр напряжений, которые необходимы для определения величин осредненных напряжений в материале как «стартовых» при силовом нагружении структурно-неоднородного композита, работающего в структуре строительной конструкции.

Обоснованным в этом смысле представляется следующее обобщающее суждение.

Формирование напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородного строительного композита, работающего в строительной конструкции, определяется: а) структурой строительной конструкции с ее механикой формирования зон (объемов), сечений, видов и величин напряжений (эпюр напряжений); б) структурой материала в структуре конструкции в смысле меры конгруэнтности размера структурных элементов материала характеристическим размерам строительной конструкции; в) структурой материала как такового с присущими ему зако-

номерностями трансформации, преобразования посредством диссипации, то есть рассеивания, энергии внешнего механического воздействия в неоднородной многоуровневой по масштабу системе структурных связей материала (в последнем случае начальная, на момент получения по соответствующей технологии, структура материала как такового принимается эволюционирующей во времени вследствие параллельного протекания и наложения, с одной стороны, процессов самоорганизации под влиянием внутренних факторов, а, с другой, - процессов ее преобразования под влиянием внешних факторов с соответствующим изменением характеристик неоднородности строения).

Картина поля напряжений и деформаций в объеме композита, работающего в конструкции, не статична, а динамична. И это является следствием:

- 1) возможного изменения во времени параметров внешнего силового воздействия на конструкцию и собственно материал;
- 2) возможного изменения термодинамического состояния структуры материала в процессе ее самоорганизации и эволюции (под действием внутренних факторов);
- 3) возможного изменения термодинамического состояния структуры материала в процессе ее взаимодействия с внешней средой (под влиянием температурных, влажностных, химических, физических, биогенных и др. факторов среды);
- 4) возможного изменения состояния материала вследствие накопления повреждений в его структуре.

В соответствии с указанным, величина локализованного напряжения в структуре композита

$$\sigma_{loc i} = f(x_i, y_i, z_i, \tau_i) \sigma_{oi}, \quad (1)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты местоположения локализованного напряжения в объеме материала; τ_i – момент времени оценки локализованного напряжения.

$\sigma_{oi} = P_i/F_i$ – величина среднего макроскопического напряжения в расчете на сечение F_i , воспринимающее внешнюю нагрузку P_i .

Максимальное локализованное напряжение $\sigma_{loc max}$ в i -том объеме материала, работающего в конструкции при действии внешней механической нагрузки, будет соответствовать величине

$$\sigma_{loc max i} = \Phi(K_1 \dots K_n; K_{m0}; K_{\Delta 0}; K_{km}; K_{zk}; \tau_i) / \sigma_{oi} \quad (2)$$

здесь $K_1 \dots K_n$ – коэффициенты усиления напряжений от действия структурных элементов как концентраторов напряжений на n -масштабных уровнях структуры материала как такового; K_{m0} – коэффициент усиления напряжений как следствие существования возможных технологических неоднородностей и дефектов материала в конструкции; $K_{\Delta 0}$ – коэффициент усиления напряжений как следствие влияния эксплуатационных изменений, накопленных в материале в конструкции к моменту τ_i под действием явлений самоорганизации структуры и деструктивных факторов среды; K_{km} – коэффициент усиления напряжений как следствие влияния коэффициента конгруэнтности макроструктуры материала в соотношении ее с геометрией конструкции (коэффициент масштабного фактора и масштабного эффекта); K_{zk} – коэффициент усиления напряжений как следствие влияния геометрии строительной конструкции и схем загрузки, предопределяющих по этой причине формирование зон (x_i, y_i, z_i) наибольших напряжений в ней.

В строительной конструкции и в материале, работающем в ней под нагрузкой, всегда есть наиболее вероятные объемы (места) «перенапряжений» и вероятные «слабые звенья» композита, обуславливающие возникновение критических, предельных состояний. Они появляются в зонах наибольшей концентрации напряжений из-за геометрии конструкции, а в этих зонах - в местах технологической неоднородности и эксплуатационной дефектности конструкции; в местах же технологической

неоднородности и эксплуатационной дефектности - в зонах наибольшей структурной неоднородности (субстанциональной, геометрической, статистической) материала; а далее - в местах действия разномасштабных структурообразующих элементов материала, проявляющих себя в качестве концентраторов напряжений на структурных уровнях материала.

Закономерное, детерминированное и одновременно вероятностное, стохастическое сочетание и интегрирование этого и предопределяет потенциал и показатели сопротивления композита разрушению в системе «материал – конструкция – среда».

Постулируемая (1, 2) трактовка процесса формирования напряженного состояния структурно-неоднородных материалов, отвечающая методологическому условию рассмотрения проявления свойств материала не только как такового, а как работающего в структуре конструкции, «задает» содержание (состав) и соответственно алгоритм дальнейших аналитических рассмотрений. И главным здесь является, как раз, вопрос о величине осредненного напряжения σ_o , под действием которого оказывается «конструкция» структурно-неоднородного строительного композита [3].

В соотношении (2) величина σ_{oi} является функцией факторов геометрии конструкции, схемы нагружения конструкции и времени

$$\sigma_{oi}^I = \psi(K_{зк}; P_i/F_i; \tau). \quad (3)$$

Проблема определения величины σ_{oi} в этом смысле решается в рамках положений механики деформируемого твердого тела, механики композиционных материалов; действие фактора времени τ на σ_o выражается в реологическом поведении материала, в развитии в нем процессов ползучести и релаксации, что также относится к их предмету [4-6].

Анализируя формирование величины σ_{oi} в связи с проявлением категории неоднородности строения материала, требуется учитывать

влияние на нее фактора существования макромасштабной неоднородности и анизотропии структуры материала в структуре конструкции. Это может являться следствием недостаточной однородности смешения, неравномерности уплотнения материала при формировании строительной конструкции, макроградиентности степени его отвердевания, образования «пристенной» анизотропии макроструктуры, неоднородности температурно-влажностного состояния объема материала и т.п. В результате чего σ_{oi} оказывается функцией, так сказать, технологической дефектности, усиливающей неоднородность. Соответственно

$$\sigma_{oi}^II = \varphi(K_{мд}; \sigma_{oi}^I). \quad (4)$$

Фактор времени τ с развитием эксплуатационных воздействий среды и соответствующим накоплением дефектов в материале, то есть нарастанием неоднородности во времени, изменяет σ_{oi} , в результате чего имеем

$$\sigma_{oi}^III = \Theta[K_{зд}(\tau); \sigma_{oi}^II]. \quad (5)$$

Очевидно, что $\sigma_{oi}^III > \sigma_{oi}^II > \sigma_{oi}^I > \sigma_{oi}$, поскольку формально вычисленное σ_{oi} в расчете на рабочее сечение в предположении бесструктурности материала (модель сплошной среды) в реально структурированном материале преобразуется в более высокие по сравнению с σ_{oi} внутренние напряжения.

Таким образом, еще до того как будет анализироваться формирование напряженного состояния материала при учете влияния фактора мегаструктуры материала, то есть фактора конгруэнтности его макроструктуры характеристическому размеру конструкции (масштабный фактор), потребуется учесть действие рассмотренных «атрибутов», то есть «появляющихся» у категории неоднородность новых ее признаков, если (и когда) рассматривается система «материал – конструкция – среда».

Учет фактора конгруэнтности дает

$$\sigma^{IV}_{oi} = Z(K_{км}; \sigma^{III}_{oi}). \quad (6)$$

Ясно, что локальное максимальное напряжение в структурных связях материала, работающего в строительной конструкции, $\sigma_{loc.max} \gg \sigma^{IV}_{oi}$, так как величина σ^{IV}_{oi} многократно возрастает при включении в действие концентраторов напряжений $K_1 \dots K_n$ на n -масштабных уровнях конгломератной структуры (внутренней структуры) композита.

Именно на основе рассмотренных положений и постулируется выражение (2), которое вытекает из логического сочленения выражений (3-6). Выражение (2) объединяет в себе все возможные атрибуты категории неоднородность при рассмотрении проявления ее роли в системе «материал – конструкция – среда».

Важно, что выражение (2), интегрирующее концепции и подходы расчетчиков и материаловедов-технологов, позволяет одновременно разделить задачи и тех и других в проблеме повышения качества материала и конструкций по показателям эффективности их (материала в конструкции и конструкции из материала) работы, предопределяемой возможностями управления сопротивлением строительных композитов разрушению на основе оптимизируемых процедур конструирования их структур с учетом доминантного положения и системного расширенного толкования роли категории неоднородность строения в функционирующих системах «материал - конструкция – среда».

В этом смысле в составе задач для материаловедов-технологов выделим:

- 1) задачу идентификации композита как структурно-неоднородного твердого тела в отвлеченности от структуры конструкции;
- 2) задачу идентификации технологической дефектности как атрибута структурной неоднородности композита в строительной конструкции;
- 3) задачу идентификации эксплуатационной дефектности, то есть «наведенной неоднородности» (по терминологии академика В.В.Петрова) при работе композита в конструкции;
- 4) задачу идентификации композита как структурно-неоднородного твердого тела в

структуре конструкции, то есть материала, характеризуемого по параметрам мегаструктуры и критериям ее конгруэнтности структуре конструкции, по параметрам технологической и эксплуатационной дефектности и соответствующей неоднородности;

5) задачу аналитического учета показателей, критериев структурной неоднородности в явлениях, процессах и параметрах формирования напряженного состояния материала в строительной конструкции.

Разрешение этих задач является необходимой предпосылкой для обоснования материаловедческих и технологических условий управления сопротивлением конгломератных строительных композитов разрушению, для обоснования процедур оптимизируемого конструирования их структур с целью повышения эксплуатационных качеств строительных конструкций.

2. ФАКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО УЧЕТА РОЛИ НЕОДНОРОДНОСТИ СТРУКТУРЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Обращаясь к выражению

$$\sigma_{loc\ max\ i} = \Phi [(k_1 \dots k_n); K_{м0}; K_{э0}; K_{км}; K_{эк}; \tau_i]$$

σ_{oi} , охарактеризуем факторы по их содержанию, механизму возможного влияния на формирование напряженно-деформированного состояния композита в строительной конструкции (таблица).

Факторами структуры конструкции, которые в контексте проводимых рассмотрений важны с точки зрения наличия сечений с максимальными деформациями и напряжениями, являются конструктивный тип конструкции, геометрия ее формы, характеристические размеры, вид напряженного состояния, эпюры деформаций и напряжений как следствия

всего этого, армирование и др. Именно эти факторы должны учитываться при определении максимальных величин осредненных напряжений, действующих на материал в рабочих сечениях конструкции. При этом учет факторов структуры конструкции ведется в предположении субстанциональной однородности композита. В реальности же композит проявляет себя в строительной конструкции как структурированное твердое тело, вследствие чего величины силовых нагружений структурных связей композита окажутся выше максимальных величин осредненных напряжений. Такое превышение, качественно учитываемое соответствующим коэффициентом, будет предопределяться системным последовательным или параллельным действием всех других факторов, отражающих однородность - неоднородность структуры материала в структуре конструкции (мегаструктуры) и структуры собственно композита.

Фактор мегаструктуры понимается через соразмерность параметров макроструктуры композита параметрам структуры конструкции, то есть критериальной соответственности, конгруэнтности, прежде всего, максимального размера включений в матрице композита минимальному геометрическому размеру рабочих сечений конструкции. Фактор мегаструктуры является, по существу, масштабным фактором, определяющим проявление действия масштабного эффекта на меру изменения принятой по условиям бесструктурности (квазиоднородности) материала величины осредненного напряжения σ_0 .

При переходе к факторам, относящимся непосредственно к конструкционному материалу, остановимся в первую очередь на **факторе композиционности структуры** как системы «матрица - включение». Фактор композиционности выражается в проявлении включениями роли концентраторов напряжений и в соответствующей локализации напряжений в объеме композита вследствие диссипации, рассеивания энергии внешнего воздействия в нем с участием включений.

Фактор композиционности характеризуется коэффициентом концентрации напряжений на границе раздела матрицы – включение. Величина данного коэффициента зависит от **фактора относительной субстанциональности матрицы и включения** (скачка субстанциональности на границе раздела), **фактора размера, фактора формы, фактора пространственной ориентации включений в матрице** композита, **фактора суммарного объема включений** в объеме композита (фактора наполнения и соответственно типа цементации двухкомпонентной системы «матрица – включение»), обуславливаемого фактором дозировки компонентов, то-есть фактором состава).

Фактор композиционности структуры как отражение ее определенной **детерминированности** сочетается с **фактором конгломератности структуры** как следствия **стохастичности размещения включений** в матрице композита.

Стохастичность размещения, понимаемая в категориях случайности и вероятности, дополняется и усиливается тем, что все физические, механические и иные характеристики взаиморазмещенных компонентов композита являются вероятностными величинами. И это определяет существо **фактора статистической изменчивости** характеристик компонентов, составляющих композит.

Очевидно, что фактор статистической изменчивости будет влиять на параметры формирующегося в композите поля деформаций и напряжений, придавая ему признаки и черты случайности и вероятности. Отсюда следует вывод о том, что аргументы, входящие в аналитические соотношения, отражающие роль структурной неоднородности композитов в их сопротивлении разрушению, должны представляться в виде соответствующих статистических распределений. По этим функциям могут выявляться статистически средние значения аргументов (оценки их математического ожидания) и при необходимости вероятные максимальные или минимальные их (аргументов) значения.

Таблица. Факторы, влияющие на формирование и параметры напряженного состояния структурно-неоднородного композита в строительной конструкции

№ п/п	Факторы влияния	Механизм действия и влияния факторов	Показатель учета влияния факторов
1	Фактор структуры конструкции	Формирование объемов и сечений конструкции с максимальными деформациями и напряжениями	Коэффициент «геометрии» строительной конструкции $K_{зк}$;
2	Фактор мегаструктуры – соразмерности параметров макроструктуры композита параметрам структуры конструкции	Масштабный эффект масштабного фактора (фактора конгруэнтности)	Коэффициент масштабного фактора (коэффициент конгруэнтности мегаструктуры $K_{км}$)
3	Фактор композиционности структуры (фактор двухкомпонентности системы «матрица – включение»)	Проявление включениями роли концентраторов напряжений; влияние включений на локализацию и концентрацию напряжений в объеме композита	Коэффициент концентрации напряжений $k_1...k_n$
4	Фактор гетерофазности и относительной субстанциональности матрицы и включения (фактор наличия скачка субстанциональности в контактной зоне матрицы и включения)	Влияние фактора «скачка» на локализацию и концентрацию напряжений в контактной зоне	Коэффициент разнородности K_s ; градиент разнородности ΔS ; индикатор разнородности I_s - мера (степень) субстанциональной разнородности матрицы и включений $I_s = (S_e - S_m)/S_m $
5	Фактор «диффузности» контактной зоны в системе «матрица – включение»	Влияние импульсности и диффузности скачка на объем локализации и концентрации напряжений, на диссипацию энергии в контактной зоне	Импульсность скачка g_s ; фронтальная протяженность скачка t_s ; диффузность скачка G_s
6	Фактор размера, формы, пространственной ориентации включений в матрице композита	Влияние размера, формы, пространственной ориентации включений в матрице композита на неоднородность формирующегося поля напряжений и деформаций в нем	Размер включений D_e ; величина угла α , оценивающая «остроту» формы включений; пространственная ориентация включений в композите - угол β между направлением главных внутренних напряжений σ и главной осью частицы;

Продолжение таблицы

№ п/п	Факторы влияния	Механизм действия и влияния факторов	Показатель учета влияния фактора
7	Фактор типа цементации в двухкомпонентной системе «матрица – включение»	Влияние объемного содержания и объемного распределения включений в матрице композита на неоднородность формирующегося поля напряжений и деформаций в нем	Объемная доля V_v в композите; толщина межзернового слоя и (или) межпоровой перегородки δ_m ;
8	Фактор конгломератности – фактор стохастичности размещения включений в матрице композита	Влияние стохастичности размещения включений в матрице композита на неоднородность формирующегося поля напряжений и деформаций в нем	Статистический коэффициент изменчивости содержания включений в отдельных объемах композита
9	Фактор статистической изменчивости характеристик компонентов в структуре композита	Влияние статистической изменчивости характеристик компонентов (по составу и субстанциональности матрицы и включений, форме, размеру, ориентации включений в матрице композита и др.) на неоднородность формирующегося поля напряжений и деформаций в нем	Параметры статистических распределений характеристик компонентов (оценка математического ожидания, коэффициент изменчивости, размах значений характеристик и др.)
10	Фактор масштабной многоуровневости структуры как иерархической совокупности «структура в структуре» (фактор полиструктурности композита)	Усиление локализованных напряжений по мере перехода структурных масштабов от больших к меньшим	Коэффициенты концентраций напряжений на масштабных уровнях структуры – от макро- до нано- и атомно-молекулярного уровня (каскад коэффициентов концентрации напряжений $k_1...k_n$)
11	Фактор конгруэнтности в полиструктурном композите	Масштабный эффект меры междуровневой конгруэнтности	Коэффициент масштабного эффекта
12	Фактор кластеризации структуры композита в технологическом цикле	Понижение величины локального максимального напряжения, необходимого для разрушения структуры материала, в сравнении с напряжением разрушения структуры без ее кластеризации	Коэффициент понижения напряжения разрушения от кластеризации структуры в технологическом цикле – $K_{техн. класт.}$
13	Фактор кластеризации структуры композита в эксплуатационном цикле	Понижение величины локального максимального напряжения, необходимого для разрушения структуры материала, в сравнении с напряжением разрушения структуры без ее кластеризации	Коэффициент понижения напряжения разрушения от кластеризации структуры в эксплуатационном цикле – $K_{эспл. класт.}$

Продолжение таблицы

14	Фактор технологической и эксплуатационной дефектности структуры на атомном и кристаллохимическом уровнях	Деформирование твердофазовых составляющих композита на кристаллохимическом уровне их структуры	Коэффициенты концентрации напряжений от вакансий, замещений и дислокаций на атомном и кристаллохимическом уровнях
15	Фактор технологической и эксплуатационной дефектности структуры на нано-, микро-, мезо- и макро-уровне	Появление сильного концентратора напряжений (в виде трещин) в многоуровневой структуре композита	Коэффициенты концентрации напряжений от трещин на соответствующих масштабных уровнях структуры

Формирование напряженно-деформированного состояния конгломератных композитов определяется и действием **фактора их полиструктурности строения** – масштабной многоуровневости структуры как отражения иерархической совокупности разномасштабных двухкомпонентных систем «матрица – включение», размещенных в объеме композита по принципу «структура в структуре». Следствием влияния масштабной многоуровневости структуры является усиление локализованных напряжений по мере перехода в направлении от больших структурных масштабов к меньшим. Такое усиление выражается поуровневым коэффициентом $k_1 \dots k_n$ концентрации напряжений от включений, последовательно (каскадно) вступающих в действие в зонах повышенных напряжений от действия более крупных включений предыдущего масштабного уровня.

Количественно (по величинам коэффициентов концентрации напряжений) такое действие будет предопределяться **фактором межуровневой конгруэнтности** в полиструктурном композите. Действительно, конгломератная структура любого меньшего по масштабу уровня геометрически размещается в объеме между включениями большего масштабного уровня. И такое размещение, например, по показателю числа включений, может соответствовать или, напротив, не соответствовать условию квазиоднородности структуры меньшего масштабного уровня в структуре большего масштабного уровня. А от

этого будет зависеть картина диссипации напряжений и величины коэффициентов концентрации напряжений $k_1 \dots k_n$.

Фактор межуровневой конгруэнтности в полиструктурном композите имеет прямое отношение к масштабному фактору и масштабному эффекту. И в этом смысле он оказывается в одном ряду с фактором мегаструктуры, учитывающим соразмерность параметров макроструктуры композита параметрам структуры строительной конструкции из него.

Свой вклад в меру неоднородности поля напряжений и деформаций конгломератного композита при его нагружении вносит **фактор кластеризации структуры**, развивающейся и в технологическом и в эксплуатационном циклах. Так называемое зонирование формирующейся структуры, ее самопроизвольная или принудительная кластеризация, когда на разных масштабных ее уровнях возникают укрупненные образования, как бы «надструктурные» объемы, изменяет характеристики однородности – неоднородности строения композита. И он фактически дифференцируется на более крупные, как раз, надструктурные объемы. Это изменение сопровождается появлением новых поверхностей и границ раздела, последствием чего оказывается уменьшение площади поверхности границ раздела, появление более слабых структурных связей на этих границах. В итоге

потенциал сопротивления структуры материала разрушению может при кластеризации структуры понижаться.

Наконец, обратимся к *фактору технологической и эксплуатационной дефектности*.

Здесь имеется в виду появление дефектов на разных масштабных уровнях структуры: во-первых, на атомно-молекулярном, кристаллохимическом, во-вторых, на нано- и микроуровне, в-третьих, на мезо-, макро- и мегауровне. В первом случае речь идет о дефектах типа вакансий, замещений, дислокаций, роль которых будет проявляться в явлениях физики разрушения, соотносимых с термофлуктуационным его механизмом. Во втором случае фактор дефектности будет связан с появлением микротрещин, а в третьем, – с образованием мезо- и макротрещин в композите и конструкции [7-10].

Трещины как структурный элемент композита окажутся фактором формирования перенапряжений в структуре первичных его объемов, появления и существования зон локализации и концентрации напряжений, в которых начнут «работать» все другие рассмотренные выше факторы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная систематизация факторов влияния структурной неоднородности на формирование и параметры напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородного композита в строительной конструкции отвечает существованию «дистанции» между осредненными напряжениями σ_{oi} , принимаемыми в предположении бесструктурности (квазиоднородности) материала, и действительными напряжениями $\sigma_{loc\ max\ i}$, которые будут развиваться в структурированном материале.

Содержательное раскрытие и сущностное понимание этой «дистанции» оказывается абсолютно необходимым при постановке и решении материаловедческих задач конструирования оптимальных структур конгломератных

строительных композитов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чернышов Е.М.** Неоднородность структуры и сопротивление разрушению конгломератных строительных композитов: вопросы материаловедческого обобщения и развития теории [Текст]: монография / Е.М. Чернышов, Е.И. Дьяченко, А.И. Макеев; под общ. ред. Чернышова Е.М.; Воронежский ГАСУ. - Воронеж, 2012. – 98 с.
2. **Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф.** Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. – М.: Стройиздат, 1972. – 191 с.
3. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики бетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
4. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
5. **Черепанов Г.П.** Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
6. **Победря Б.Е.** Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. унта, 1984. – 336 с.
7. **Зайцев Ю.В.** Учет макро- и микроструктуры материала и его физической нелинейности в задачах о развитии трещин в бетоне // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1975. - №11. - с.15-20.
8. **Зайцев Ю.В., Леонович С.Н.** Прочность и долговечность конструкционных материалов с трещиной: Монография. – Минск: БНТУ, 2010. – 362 с.
9. **Берг О.Я.** Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М.: Госстройиздат, 1962. – 96 с.
10. **Селяев В.П.** Развитие деградации в эпоксидных композиционных материалах под действием механических нагрузок и агрессивных сред/В.П.Селяев, Т.А.Ни-

зина//Современные проблемы строительного материаловедения: материалы академ. чтений РААСН. – Воронеж, 1999. – С.415-418.

Чернышов Евгений Михайлович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, директор ОТАЦ «Архстройнаука», 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ауд. 4220; e-mail: chem@vgasu.vrn.ru

Макеев Алексей Иванович, доцент, кандидат технических наук, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, каф. технологии строительных материалов, изделий и конструкций, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ауд. 6165; e-mail: makeev@vgasu.vrn.ru

Eugene M. Chernyschov, Full Member of RAACS, Dr.Sc., Professor, Director of Research Center “Arhstroynauka”; Voronezh state university of architecture and Civil Engineering; 84, 20-Letiya Oktyabrya, Voronezh, 394006, Russia; e-mail: chem@vgasu.vrn.ru

Aleksey I. Makeev, PhD, Associate Professor, Department of Technology of Building materials, Products and Construction; Voronezh state university of architecture and Civil Engineering; 84, 20-Letiya Oktyabrya, Voronezh, 394006, Russia; e-mail: makeev@vgasu.vrn.ru