

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 10, Issue 4 *2014*

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Chief Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Head of Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Saint Petersburg State Polytechnical University
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University, 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI),
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University,
8 Suhanova Street, Vladivostok
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina,
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering,
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences,
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering,
1, Academicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics, 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint-Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,
190005 Saint-Petersburg, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University, 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043
Almaty, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Saint Petersburg State Polytechnical
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Illizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering,
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,
26-600, Radom, Poland

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University,
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University,
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education,
New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University,
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering,
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, PhD
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

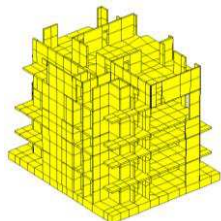


Figure 1.

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

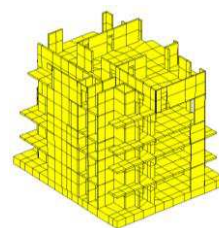


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, доцент, кандидат технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 10, Issue 4

2014

TABLE OF CONTENTS

О XVIII Конкурсе на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН)	<u>14</u>
О XVIII Конкурсе на выполнение фундаментальных научных исследований (ФНИ) Минстроя России и РААСН в области архитектуры, градостроительства и строительных наук	<u>16</u>
К столетию метода перемещений <i>А.В. Перельмутер</i>	<u>18</u>
Проверка устойчивости конструкций, расчет которых выполняется с учетом стадийности монтажа <i>А.В. Перельмутер</i>	<u>22</u>
О моделировании систем «сооружение – жидкость». Библиографический обзор. Часть 1: Постановки и методы математического моделирования поведения сооружения и жидкости <i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева, Ж.И. Мсхалая</i>	<u>29</u>
О методах численного моделирования связанных систем «сооружение жидкость» <i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева, В.В. Вершинин, А.Р. Усманов, С.В. Щербина, Ж.И. Мсхалая</i>	<u>54</u>
Численное моделирование пробивания пластин из алюминиевого сплава 2024-Т3(51) жестким сферическим телом с помощью метода конечных элементов <i>В.В. Вершинин</i>	<u>75</u>
Численное моделирование усиления грунтового основания храма, расположенного на подработанной территории <i>А.В. Воробьев, И.Н. Фаизов, Г.Г. Кашеварова</i>	<u>89</u>
Математическое моделирование усталостной прочности бетона при циклическом нагружении <i>Г.Г. Кашеварова, Р.В. Севастьянов, Ю.Е. Курбатов</i>	<u>96</u>

- О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Часть 2: Четырехточечная краевая задача.** **102**
М.Л. Мозгалева
- Использование редукции неизвестных на примере задачи об изгибе тонкой плиты в рамках дискретно-континуального подхода в базисе Хаара** **111**
М.Л. Мозгалева
- Некоторые алгоритмы, используемые при численной реализации методов локального расчета строительных конструкций на основе двумерного дискретного базиса Хаара** **115**
М.Л. Мозгалева
- Specific Features and Advantages of the Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method as an Alternative for the Traditional Finite Element Method** **121**
Alexander V. Ignatyev, Vladimir A. Ignatyev
- Research on the Impact of Dwelling Design and the Effects of Domestic Gas Explosion on the Deformation and Destruction of Structures** **125**
Galina G. Kashevarova, Andrei A. Pepeliaev, Marina V. Grigorieva
- Harmonic Analysis of Bar Domes Subjected to Wind Loads** **130**
Waldemar Szaniec, Klaudia Zielińska

О XVIII КОНКУРСЕ НА МЕДАЛИ И ДИПЛОМЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК

Президиум Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) объявляет о проведении XVIII ежегодного конкурса на медали и дипломы Академии за 2014 год на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук. Медали и дипломы РААСН присуждаются на конкурсной основе архитекторам, градостроителям, учёным архитектурно-градостроительных и строительных специальностей – гражданам Российской Федерации за лучшие проекты, по которым строительство осуществлено (для архитектурных проектов) или осуществляется (для градостроительных проектов), за научно-исследовательские и проектно-конструкторские разработки, в результате которых получен значительный экономический и социальный эффект; опубликованные научные труды, монографии, учебники и учебные пособия.

На конкурс могут представляться построенные объекты или опубликованные научные работы в течение последних 5 лет. Построенные объекты должны иметь срок эксплуатации не менее 1 года. В соответствии с Постановлением Общего собрания РААСН-2013 в конкурс вводится номинация «За лучший неосуществлённый архитектурный проект» с установлением в качестве награды 1 диплома РААСН.

Работы, удостоенные Государственных премий Российской Федерации, премий Правительства РФ, медалей других государственных академий наук Российской Федерации на соискание медалей и дипломов РААСН не представляются.

В рамках конкурса на медали и дипломы РААСН проводится конкурс на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук для молодых учёных и специалистов в возрасте до 35 лет включительно.

Устанавливаются следующие награды за лучшие работы:

1. Медали РААСН.

– в области архитектуры

1 золотая и 1 серебряная медали за лучший осуществлённый архитектурный проект и лучшую опубликованную работу в области архитектурной науки.

– в области градостроительства

1 золотая и 1 серебряная медали за лучшую работу в области градостроительной науки и лучшую проектную работу в области градостроительства, реализованную или принятую к реализации.

– в области строительных наук

1 золотая и 1 серебряная медали за лучшую опубликованную научную работу и лучший инженерный проект (строительную технологию).

Примечание: золотая и серебряная медали присуждаются на основе конкурса между работами, представленными в отделения в объявленных номинациях. Дополнительно к золотой и серебряной медали РААСН вручается диплом.

2. Дипломы РААСН

4 диплома соответственно в области архитектуры, градостроительства и строительных наук и по 1 диплому за лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию Министерством образования и науки РФ.

1 диплом в номинации «за лучший неосуществлённый архитектурный проект».

2 диплома в области архитектуры, градостроительства и строительных наук для молодых учёных и специалистов в возрасте до 35 лет включительно.

3. Порядок выдвижения кандидатов на соискание медалей и дипломов

На соискание наград РААСН представляются авторы или авторские коллективы в составе основных авторов, но не более 6 человек. Медали и дипломы РААСН присуждаются каждому члену представленного авторского коллектива.

Выдвижение кандидатов на соискание медалей и дипломов Академии производится профессиональными организациями (проектные, научно-исследовательские организации, высшие учебные заведения и др.), а также отделениями РААСН, научно-творческими центрами, профессиональными общественными организациями, академиками и членами-корреспондентами РААСН.

На выдвигаемых кандидатов представляются следующие материалы: представление выдвигающей организации или члена Академии, содержащее основания для выдвижения; аннотации и опубликованные отзывы на представляемую работу; фотографии (ксерокопии) в альбоме (размер А3 или А4) или электронное изображение проектов и построек. Для научных работников – один экземпляр опубликованного научного труда и опубликованные рецензии на научную работу. К материалам прилагаются краткие биографические и профессиональные сведения об авторе (авторах).

Срок представления материалов на конкурс не позднее 15 января 2015 г. (четверг) включительно до 17 часов по адресу: 107 031, Москва, ул. Большая Дмитровка, дом 24, стр. 1 (Российская академия архитектуры и строительных наук).

Материалы представляются в соответствующее отделение РААСН (архитектура, градостроительство и строительные науки). Материалы, отправленные по почте, должны иметь дату отправления не позднее установленного срока. Работы, отправленные позднее установленного срока к рассмотрению не принимаются.

Решение о присуждении медалей и дипломов принимается президиумом Академии.

Опубликованные монографии и учебники, альбомы проектов и построек представленные на конкурс, не возвращаются и передаются в библиотеку РААСН.

Контактная информация:

– Отделение архитектуры РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-14-95, 625-76-84; e-mail: oarch@raasn.ru

– Отделение градостроительства РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-19-91, 625-79-75; 694-07-05; e-mail: grado@raasn.ru

– Отделение строительных наук РААСН:

(т/ф): +7(495) 625-76-80; факс: 625-73-16; e-mail: osn.raasn@mail.ru

КОНКУРС НА ВЫПОЛНЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (ФНИ) МИНСТРОЯ РОССИИ И РААСН В ОБЛАСТИ АРХИТЕКТУРЫ, ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Российская академия архитектуры и строительных наук» (далее – РААСН), по поручению Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации (далее – Минстрой России) (приказ Минстроя России от 12 декабря 2014 года №863/пр) и в соответствии с решением Президиума РААСН (постановление № 13 от 24 декабря 2014 года), объявляет конкурс на выполнение фундаментальных научных исследований (ФНИ) Минстроя России и РААСН в области архитектуры, градостроительства и строительных наук в 2015 году.

Конкурс Минстроя России и РААСН проводится по двум номинациям:

- для членов, советников и почетных членов РААСН, работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений;
- для молодых ученых и специалистов в возрасте до 35 лет (в конкурсе имеют право участвовать персонально ученые и специалисты (или коллективы исследователей) – советники РААСН, работники РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений, которым на момент окончания срока подачи заявки не исполнилось 35 лет).

Начало разработки и продолжительность представляемых на конкурс НИР:

Начало разработки представляемых на конкурс тем НИР – I квартал 2015 г., продолжительность – от одного до двух лет.

Начало разработки представляемых на конкурс тем НИР для молодых ученых и специалистов – I квартал 2015 года, продолжительность – до девяти месяцев.

Условия конкурса

Лица (граждане Российской Федерации), желающие участвовать в конкурсе, должны представить заявку по адресу: 107 031, Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1, в соответствующее отделение РААСН (архитектура, градостроительство, строительные науки) с пометкой: «На конкурсный отбор фундаментальных научных исследований для членов, советников и почетных членов РААСН, работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений» или «На конкурсный отбор фундаментальных научных исследований для молодых ученых и специалистов» в виде следующих документов:

1. Заявка на участие в конкурсном отборе на выполнение фундаментальных научных исследований Минстроя России и РААСН;

2. Анкетные данные участника (участников) конкурсного отбора на выполнение фундаментальных научных исследований Минстроя России и РААСН (для работников РААСН и подведомственных Минстрою России учреждений не требуются).

В конкурсе могут участвовать отдельные исследователи или исследовательские коллективы. Заявки от организаций не принимаются.

Срок окончания подачи заявок на конкурс – до 28 января 2015 года включительно (в том числе и для почтовых отправлений). Заявки, поступившие позже, не рассматриваются.

Мотивы отклонения поступивших заявок заявителям не сообщаются.

Президиум РААСН оставляет за собой право определять количество тем научных исследований по объявленным номинациям, устанавливать объемы финансирования ФНИ в зависимости от содержания и количества поданных заявок.

Результаты конкурсного отбора на выполнение ФНИ Минстроя России и РААСН будут опубликованы на сайте РААСН www.raasn.ru

Контактная информация:

– Отделение архитектуры РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-14-95, 625-76-84; e-mail: oarch@raasn.ru

– Отделение градостроительства РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-19-91, 625-79-75; 694-07-05; e-mail: grado@raasn.ru

– Отделение строительных наук РААСН:

(т/ф): +7(495) 625-76-80; факс: 625-73-16; e-mail: osn.raasn@mail.ru

Информационное обеспечение:

1. Тематика приоритетных направлений фундаментальных научных исследований по архитектуре, градостроительству и строительным наукам на 2015 год размещена на сайте Академии – www.raasn.ru.
2. Подробные условия конкурса в «Положении о планировании фундаментальных научных исследований и о порядке формирования плана фундаментальных научных исследований и государственных заданий РААСН и подведомственным учреждениям Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации» размещены на сайте Академии – www.raasn.ru.

К СТОЛЕТИЮ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

А.В. Перельмутер

НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: Рассматривается история создания и развития метода перемещений в строительной механике. Отмечается вклад ряда отечественных и зарубежных исследователей.

Ключевые слова: строительная механика, метод перемещений, метод конечных элементов.

BY CENTURY OF A DISPLACEMENT METHOD

Anatolii V. Perelmuter

SCAD Soft, Ltd, Kiev, UKRAINE

Abstract: The history of creation and development of a displacement method in the structural mechanics is considered. The contribution of some domestic and foreign researchers is marked.

Keywords: structural building mechanics, displacement method, finite elements method.

Во второй половине 19-го века метод сил определял лицо классической строительной механики. Сегодня эту роль исполняет метод перемещений — один из самых важных оплотов современной строительной механики, который лежит в основе практически всех расчетных программ для ЭВМ. Внутренняя структура этого метода оказалась идеально подходящей для формализованного подхода, ориентированного для выполнения на компьютере.

Метод перемещений для расчета рам разработал в 1914 году датский инженер Аксель Бендинксен [0]. Он предположил, что в прямоугольной раме прямой угол между элементами остается прямым в процессе деформирования рамы, так как зона узла является бесконечно жесткой по сравнению с жесткостью элементов. Поэтому углы поворота соединяемых в узле стержней различаются на 90° как до, так и после появления деформаций. Это геометрическое условие позволяет составить одно уравнение для определения каждого лишнего неизвестного.

Семь лет спустя профессор Копенгагенского технического университета Асгер Остенфельд представил уравнения для смещений в той же самой форме, что и уравнения для метода сил, которые были тогда уже известны. Остенфельд отказался от кинематического подхода Бендиксена и положил в основу рассуждений уравнения равновесия узлов, в которые ввел реакции сходящихся в узле стержней на единичный поворот узла. Заранее изученные реакции отдельных стержневых элементов системы были, по мнению Остенфельда, теми «кирпичиками», которые позволяют не начинать анализ каждый раз с самого начала и, как ясно теперь, были прообразами современных конечных элементов. Остенфельд ввел сам термин "метод перемещений" и указал на его формальную двойственность с методом сил [2].

А в 1927 году практически одновременно Людвиг Манн [3] и Алексей Алексеевич Гвоздев [4], исходя из классических уравнений второго рода в аналитической механике Лагранжа, придали методу перемещений окончательную и сохранившуюся до

сего дня форму. В частности в книге А.А. Гвоздева дана четкая характеристика основной системы метода перемещений, изложены свойства коэффициентов системы канонических уравнений и группировка неизвестных.

Что касается природы двойственности уравнений метода сил и метода перемещений, то она была детально раскрыта в книге Кирпичева [5], в которой приводились обоснования и метода сил и метода перемещений. Второе издание этой замечательной книги [6] вышло спустя 21 год после смерти ее автора.

Нужно отметить, что основополагающая работа А. Бендиксена [0] появилась не на пустом месте, и исследования его предшественников уже содержали некоторые элементы метода перемещений. В первую очередь здесь уместно вспомнить работу Альфреда Клебша, который в своем курсе теории упругости (в отличие от современных курсов он содержал и теорию стержневых систем) писал «... будем рассматривать смещения узлов как первоначально известные параметры, определять от них упругие силы, с которыми стержни реагируют в своих узлах, и, наконец, установим условия равновесия для внешних и упругих сил, действующих в узлах; эти уравнения тогда позволят вычислить смещения. [7, стр. 413]». К сожалению, тогда в 1862 году эта идея не была подхвачена, и для ее практического использования понадобилось еще сорок лет.

В восьмидесятых годах 19-го столетия внимание исследователей привлекла проблема «вторичных напряжений», возникающих вследствие неидеальности шарнирных соединений в узлах ферм. Теория вторичных напряжений, развитая в работах Генриха Мандерла [8], Эмиля Винклера [9], Фридриха Энгессера [10] ввела в анализ в качестве дополнительных переменных углы поворота узлов фермы. Ее завершение в работах Отто Мора [11, 12] стало трамплином для разработки метода перемещений.

После работ Манна и Гвоздева метод перемещений развивался в следующих направлениях:

- была более детально проанализирована связь метода сил и метода перемещений, в 1934 году Г.Крук [13] предложил вариант метода со сложной основной системой, когда в качестве «строительного материала» использовались не отдельные стержни, а стержневые подсистемы, т.е. по сути, были заложены идейные основы метода суперэлементов;
- двойственная природа основных методов строительной механики изучалась в работах П.Пастернака и А.Хертвига [14, 15], а А.Шлейснер анализировал их связь с вариационными подходами [16];
- Е.Флигель расширил область применения метода перемещений на задачи устойчивости [17], а В.Колоушек — на задачи динамики [18].

Заметной вехой в развитии метода перемещений стала работа Ю.М. Риппенбейна [19], по-видимому, впервые применившего метод перемещений к пространственным стержневым системам. Позже в монографии Д.В. Вайнберга и В.Г. Чудновского [20] пространственная задача метода перемещений была представлена в тензорной форме, которая позже была успешно использована в теории упругости и в теории оболочек и послужила одним из путей интеграции строительной механики и теории сплошных сред.

Следующим принципиальным шагом в развитии метода перемещений был переход к матричной формулировке, развитый в 50-х годах Джоном Аргирисом [21, 22], что по сути предопределило последовавший затем переход к методу конечных элементов — безусловному победителю этой столетней гонки.

Три самых важных события научной революции в строительной механике произошли за эти сто лет — матричная переформули-

ровка алгебры вычислений в строительной механике [21], изобретение понятия «конечный элемент» [23] и прямой метод жесткостей, представляющий дальнейшее развитие метода перемещений [24]. Они прорвались через цепи классических фундаментальных дисциплин технических наук и радикальным способом видоизменили расчетные технологии в ряде новых областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bendixsen A.** Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1914.
2. **Ostenfeld A.** Berechnung statisch unbestimmter Systeme mittels der “Deformationsmethode” // Der Eisenbau, 1921, vol. 12, No. 11, — P. 275–289.
3. **Mann L.** Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1927.
4. **Гвоздев А.А.** Общий метод расчета статически неопределимых систем. Теория и примеры ее применения к расчету рамных конструкций — М.: МИИТ, 1927.
5. **Кирпичев В.Л.** Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903.
6. **Кирпичев В.Л.** Лишние неизвестные в строительной механике. — М-Л.: Гостехтеориздат, 1934.
7. **Clebsch A.** Theorie der Elasticitat fester Korper. — Leipzig: V. G. Teubner, 1862.
8. **Manderla H.** Die Berechnung der Sekundarspannungen, welche im einfachen Fachwerk in Folge starrer Knotenverbindungen auftreten. // Allgemeine Bauzeitung, 1880, vol. 45, — P. 27–43.
9. **Winkler E.** Theorie der continuierlichen Trager. Zeitschrift des osterreichischen // Ingenieurund Architekten-Vereines, 1872, vol. 24, — P. 27–32, 61–65.
10. **Engesser F.** Uber die Durchbiegung von Fachwerktragern und die hierbei auftretenden zusatzlichen Spannungen // Zeitschrift fur Baukunde, 1879, vol. 2. — P. 590–602.
11. **Mohr O.** Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen // Zivilingenieur, 1892, vol. 38, P. 577–594.
12. **Mohr O.** Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen // Zivilingenieur, 1893, vol. 39, P. 67–78.
13. **Kruck G.E.** Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter, biegungsfester Tragwerke. Dissertation, Zurich ETH, 1934.
14. **Pasternak P.** Beitrage zur Berechnung vielfach statisch unbestimmter Stabsysteme. // Der Eisenbau, 1922, vol. 13, No. 11. — P. 239–254.
15. **Hertwig A.** Das “Kraftgrosenverfahren” und das “Formanderungsgrosenverfahren” fur die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. // Der Stahlbau, 1933, vol. 6, No. 19. — P. 145–149.
16. **Schleusner A.** Das Prinzip der virtuellen Verruckungen und die Variationsprinzipien der Elastizitatstheorie. // Der Stahlbau, 1933, vol. 6, No. 19, P. — 145–149.
17. **Fliegel E.** Die Elastizitatsgleichungen zweiter Art der Stabwerksdynamik. // Ingenieur-Archiv, 1938, vol. 9. — P. 20–38.
18. **Koloušek V.** Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen und des Reziprozitatssatzes in der Stabwerksdynamik. // Ingenieur-Archiv, 1941. vol. 12, — P. 363–370.
19. **Риппенбейн Ю.М.** К расчету плоских и пространственных статически неопределимых систем // Рамы и фермы, пространственные и плоские — М.: Гостройиздат, 1933.
20. **Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г.** Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений — К.: Гостехиздат Украины, 1948.
21. **Argyris J.H.** Energy Theorems and Structural Analysis. Part I. General Theory. //

- Aircraft Engineering, 1955, vol. 27, — P. 42–58, 80–94, 125–134, 145–158.
22. **Argyris J.H.** Die Matrizentheorie der Statik. // Ingenieur-Archiv, 1957, vol. 25, —P. 174–192.
23. **Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.** Stiffness and deflection analysis of complex structures. // Journal of the Aeronautical Sciences, 1956, vol. 23, No. 9, — P. 805–823, 854.
24. **Turner M.J.** The direct stiffness method of structural analysis. // Structural & Materials Panel Paper, AGARD Meeting, Aachen. 1959.
-

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член РААСН, профессор, доктор технических наук, НПО СКАД Софт, 03037, Украина, г.Киев, ул. Провсящениця, дом 3а, офис 2, e-mail: avp@scadsoft.com.

Anatolii V. Perelmuter, Foreign member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, SCAD Soft, Ltd, Kiev, Ukraine e-mail: avp@scadsoft.com.

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ, РАСЧЕТ КОТОРЫХ ВЫПОЛНЯЕТСЯ С УЧЕТОМ СТАДИЙНОСТИ МОНТАЖА

А.В. Перельмутер

НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: По-видимому, впервые анализируется постановка задачи о проверке устойчивости генетически нелинейных конструкций, при расчете которых выполнено моделирование многостадийного процесса их монтажа. Указываются основные особенности такой задачи, и предлагается один из возможных приемов их решения.

Ключевые слова: устойчивость равновесия, коэффициент запаса, генетическая нелинейность, этап монтажа

STABILITY CHECK OF STRUCTURES ANALYZED WITH THE CONSIDERATION OF ERECTION STAGES

Anatolii V. Perelmuter

SCAD Soft, Ltd, Kiev, UKRAINE

Abstract: Apparently, the problem formulation for the stability checks of the genetically nonlinear structures, the analysis of which involves modeling of a multistage process of their erection, is analyzed for the first time. This paper outlines the main features of this problem and suggests one of the possible methods for solving them.

Keywords: stability of equilibrium, factor of safety, genetic nonlinearity, erection stage.

Задача о статическом расчете конструкции, наращиваемой в поле действия сил тяготения, была впервые поставлена и решена Э.И. Рашбой в пионерной работе [1], где было отмечено, что традиционный подход к расчету массивных объектов соответствует нефизическому режиму, когда упругое тело строится в отсутствие силы тяжести и становится объектом силы тяжести только после своей установки. В этой работе впервые было явно указано на невозможность использования условий совместности деформаций при расчете напряженного состояния наращиваемого тела и на принципиальное отличие этого состояния от состояния тела той же конфигурации, но загруженного после формирования. Эти же выводы были высказаны в работах других ученых [2**Ошибка!**

Источник ссылки не найден., 3] лишь спустя десять лет после опубликования статьи [1**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Позже появились многочисленные работы (см., например [4-14]) в которых развивались идеи статического расчета конструкций с учетом многостадийного процесса их возведения. Для задач такого рода был предложен термин «генетически нелинейные задачи» и указаны их основные особенности, в частности, закон наследования напряженного состояния [15]. Оказалось, что для некоторых задач расхождение в результатах расчета традиционной модели и для модели, учитывающей реальную технологию создания конструкции, может быть очень большим. Сложилось целое направление в теории деформируемого твердого тела – механика

наращиваемых конструкций, которое сосредоточило особое внимание на случае вязкоупругого материала [15-18], где изучаются взаимодействие эффектов генетической нелинейности и реологических процессов. В рамках этого направления решены некоторые задачи об устойчивости процесса ползучести как медленного движения стареющего тела [19-21]. Но в этих задачах основную роль играли эффекты неоднородного старения, обусловленные различным возрастом частей конструкции и, соответственно, разные значения деформации ползучести, а не эффекты от приложения нагрузки к различным конфигурациям тела и соответствующие особенности напряженного состояния, которые характеризуют генетическую нелинейность.

Автору не известны исследования, связанные с оценкой устойчивости упругого равновесия генетически нелинейных систем. Очевидно, что поскольку имеются различия в распределении внутренних усилий в схеме, созданной с учетом стадийности возведения конструкции, и в традиционной схеме, то они (различия) должны сказываться и на результатах проверки устойчивости смонтированной конструкции. Этот факт, вообще говоря, не должен бы вызывать удивления, поскольку во всех случаях проверяется не устойчивость конструкции, как мы говорим по привычке, а устойчивость ее состояния равновесия [22]. Естественно, если меняется состояние равновесия, то может измениться и оценка его устойчивости.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть рассматривается задача, схема которой представлена на рис. 1.а.

На рис. 1.б показано распределение продольных сил, которое вычислено по «одномоментной» схеме. Коэффициент запаса устойчивости, соответствующий такому распределению, определяется как $k_{кр,1} = 33,718$. Если же учесть, что монтаж системы шел в два этапа, на первом из которых были установлены и нагружены наклонные стойки, а на втором присоединен ненапряженный го-

ризонгальный ригель (эпюра продольных сил на рис. 1.б), то окажется что проверка устойчивости следует выполнять для схемы первого этапа монтажа и при этом $k_{кр,2} = 52,109$.

Но коэффициент запаса $k_{кр,2}$ определялся для распределения продольных сил, показанного на рис. 1.в, т.е. полагалось, что эти силы (внутренние) возрастут в 52,109 раза, после чего произойдет потеря устойчивости.

В действительности следует проследить за возрастанием внешней нагрузки, а она будет расти после достижения уровня $P=10$ уже в новой схеме, где работает присоединенный горизонтальный ригель. Иными словами увеличение нагрузки в k раз приведет к распределению сжимающих сил, показанному на рис. 2. Именно для этой схемы следует искать реальное критическое значение k_3 .

Выполнить такой расчет можно воспользовавшись режимом «Проверка устойчивости при совместном действии нагружений», который имеется, например, в ПК СКАД [23]. В этом режиме можно задать некоторое стабильное нагружение, интенсивность которого не возрастает, и действующее на его фоне переменное нагружение, для которого и определяется коэффициент запаса устойчивости. Поскольку оба нагружения относятся к одной и той же расчетной схеме, а нам требуется стабильное нагружение связать со схемой первого этапа расчета, зададим в стабильном нагружении кроме сил $P=10$ еще и взятые с обратным знаком усилия горизонтальном элементе системы (рис. 3). Эффект от их действия эквивалентен изъятию из расчета продольной силы в ригеле, что и характерно для расчетной схемы первого этапа монтажа.

Для рассматриваемого примера расчет по СКАД показал, что найденный таким образом коэффициент запаса $k_{кр,3}=33,311$, что в данном случае не намного отличается от $k_{кр,1}$. Однако качественное изменение подхода при проверке устойчивости наращиваемых систем должно учитываться, и во всех

случаях следует внимательно относиться к идее синхронного роста всех сжимающих

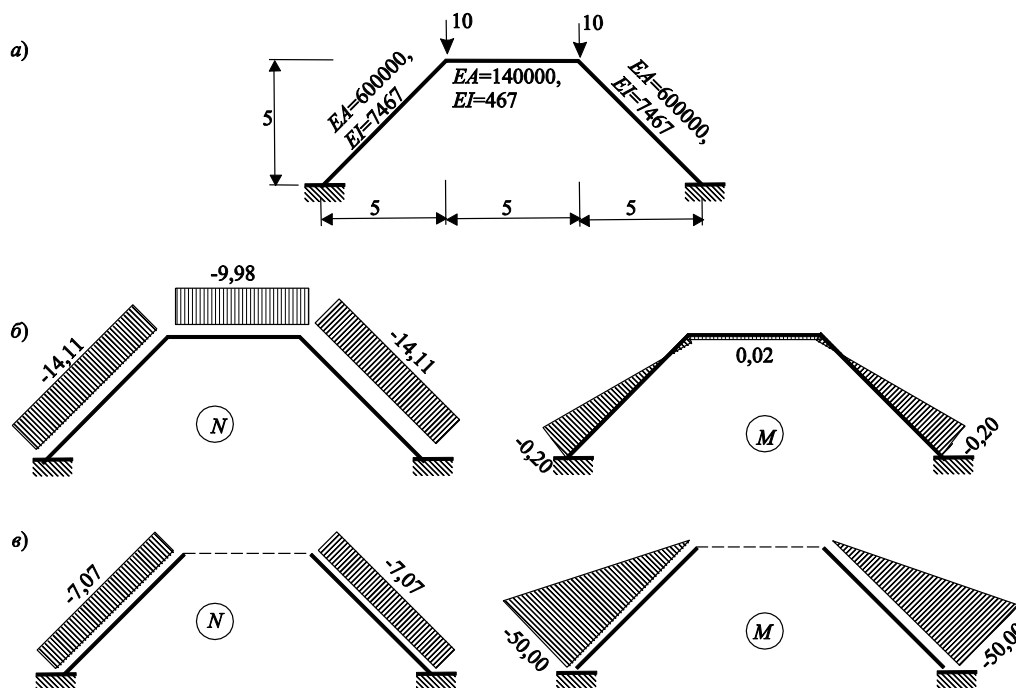


Рис. 1. К проверке устойчивости.

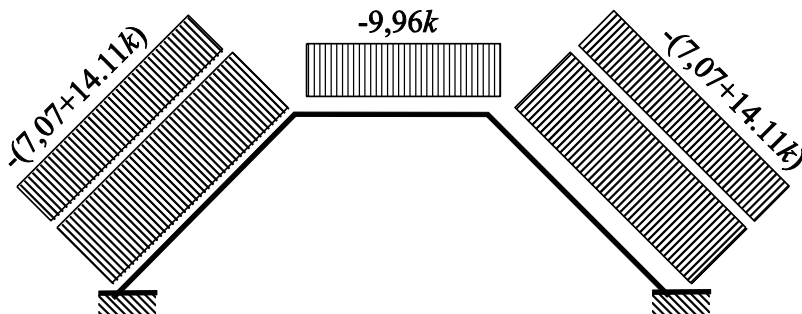


Рис. 2. Распределение усилий сжатия при росте нагрузки в k раз.

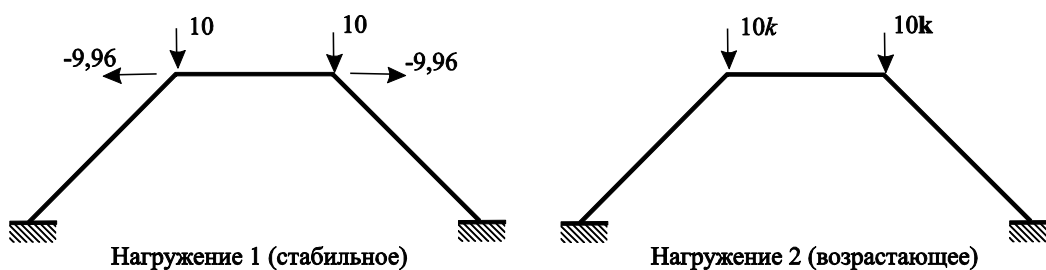


Рис. 3. Два нагружения.

сил системы, проверяя ее соответствие физическому смыслу задачи. Ведь классиче-

ский «одномоментный» подход к решению задачи не учитывает тот факт, что усилий в

горизонтальном элементе схемы создается нагрузка, которая приложена в тот момент, когда этот элемент еще не создан, т.е. является противоречащим физике явления.

Здесь, в первую очередь, следует определить, какую задачу мы пытаемся решить. В классических одномоментных схемах при линейной постановке задачи распределение внутренних усилий не меняется с ростом интенсивности нагружения и поэтому там безразлично за чем следить: то ли за возрастанием нагрузки, то ли за ростом внутренних усилий. В рассматриваемых здесь генетически нелинейных задачах, как показано выше на простом примере, такого соответствия уже нет. И коэффициент запаса по устойчивости нужно разыскивать, предполагая увеличение интенсивности нагрузки. Но нагрузки различных этапов могут возрастать в различной степени, в том числе и вообще не изменятся.

Отсюда следует множественность вариантов постановки задачи, простейшей из которых является предположение о синхронном росте всех нагрузок. Если решать генетически нелинейную задачу многократно при различных значениях интенсивности нагружения, и использовать при этом не только обычную матрицу жесткости, но и матрицу геометрической жесткости (выполнять расчет по деформированной схеме [22, т.2]), то можно найти такую интенсивность общего нагружения при которой происходит вырождение задачи. Указанный подход соответствует поиску предельной точки, в которой происходит потеря устойчивости нелинейной системы. Если при этом завершать моделирование монтажа на различных этапах то, таким способом находят не один, а несколько (по числу этапов монтажа) коэффициентов запаса устойчивости, относящихся к различным стадиям существования конструкции.

Второй вариант исходит из предположения, что возрастают только нагрузки текущего этапа монтажа, а нагрузки, введенные на предыдущих этапах, сохраняют свое значение неизменным. Такая постановка задачи

проиллюстрирована схемой на рис. 4.б ... 4.г. Очевидно, что найденный таким способом коэффициенты запаса устойчивости $k_{1,кр}$, $k_{2,кр}$, и $k_{3,кр}$, относятся к каждой из поэтажных нагрузок соответственно.

Численные значения коэффициентов запаса для задач по схемам 4.б ... 4.г были получены при таких параметрах задачи: пролет $l = 6$ м, высота этажа $h = 4$ м, изгибная жесткость стоек $EI_c = 3200$ тм², изгибная жесткость ригелей $EI_p = 7000$ тм². При нагрузке $q = 20$ т/м оказалось, что $k_{1,кр} = 17,069$, $k_{2,кр} = 5,906$ и $k_{3,кр} = 2,554$.

Однако можно представить себе и другую постановку задачи (см. рис. 4.е ... 4.ж), когда предполагается возможность роста всех нагрузок, имеющих отношение к рассматриваемому этапу, несмотря на то, что нагрузки предыдущих этапов вводились в другие расчетные схемы. По сути, эта цепочка задача близка к привычному рассмотрению проблемы устойчивости, с тем лишь единственным исключением, что рассматривается не только завершенная конструкция, но и ее состояния в процессе монтажа. Расчет по этому варианту дал такие результаты: $k_{1,кр} = 17,069$, $k_{2,кр} = 9,899$ и $k_{3,кр} = 1,608$. Эти результаты совпадают со стандартным подходом потому что распределение усилий, учитывающее технологию монтажа, совпадает с распределением усилий при нагружении уже готовой конструкции. Для таких задач (типичным примером является случай нагруженной собственным весом постепенно наращиваемой по высоте консольной стойки, рассмотренный в [19]). результаты проверки устойчивости равновесия не приводят ни к каким неожиданностям.

Трудно сказать какая из указанных постановок задачи является «более правильной», обе они в той или иной степени условны. Заметим, что условна и классическая постановка задачи, когда при действии составного нагружения с одинаковым темпом наращивают свое значение и мало изменяющиеся компоненты нагрузки от собственного веса,

и более изменчивые компоненты нагрузки (например, ветровые или снеговые).

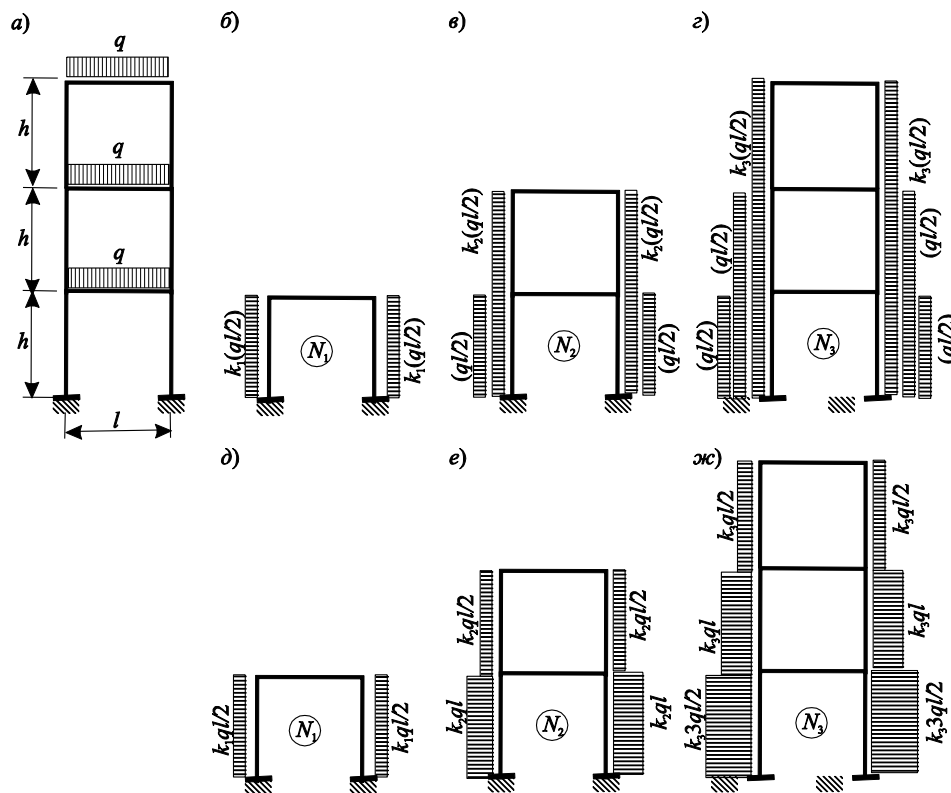


Рис. 4. К отысканию критических значений поэтажных нагрузок.

Можно представить себе кроме сформулированных и другие варианты постановки задач устойчивости. И поскольку сама по себе техника решения задачи в настоящее время не вызывает принципиальных трудностей, именно разумный подход к формулировке проблемы должен явиться предметом исследования специалистов.

ВЫВОДЫ

1. Проблема устойчивости равновесия конструкции, напряженное состояние которой формируется в многоэтапном процессе монтажа, должна решаться с учетом генетической нелинейности задачи.
2. Требуют дальнейшего исследования формулировки задач устойчивости рассматриваемых конструкций и анализ их реалистичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рашба Э.И.** Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения // Сборник трудов института строительной механики АН УССР. 1953. № 18. — С. 23-27.
2. **Brown C.B., Goodman L.E.** Gravitational stresses in accreted bodies // Proceedings of the Royal Society of London, Proceedings A, 1963. Vol. 276, No. 1367. — P. 571-576.
3. **Goodman L.E., Brown C.B.** Dead load stresses and the instability of slopes // Proceedings of the ASCE. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1963. Vol. 8. No. 3. — P. 103-134.
4. **Дятловицкий Л.И., Сеймов В.М.** Температурные напряжения в наращиваемом

- цилиндре // Прикладная механика, 1961, Том 7, Вып.3.— С. 287-394.
5. **Дятловицкий Л.И., Рабинович Л.Б.** Упругая задача для тел с изменяющейся в процессе загрузки конфигурацией // Инженерный журнал, 1962. Том 2, Вып. 2. — С. 287-297.
 6. **Гильман Г.Б., Борисенко В.С.** Расчет пространственных систем с изменяющейся в процессе нагружения расчетной схемой // ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. Вып III.— К.: КиевЗНИИЭП, 1973.— С. 27–37.
 7. **Шульман Г.** Расчеты гидротехнических сооружений с учетом последовательности возведения. — М.: Энергия, 1975. — 168 с.
 8. **Perelmuter A.V., Mikitarenko M.A., Burygin S.G.** Structural Analysis with Layouts Changed during the Action of Load // Engineering Mechanics (Praga), 1996, Vol.3, No 4.— P. 245–251.
 9. **Grabow M.J.** Construction Stage Analysis of Cable-Stayed Bridges. — Hamburg: Technical University of Hamburg, 2004— 267 p.
 10. **Ильичев В.А.** Плоская задача о штампе на упругом основании с учетом технологии его возведения // Основания, фундаменты и механика грунтов, 2008, №4. — С. 12-16.
 11. **Назаров Ю.П., Симбиркин В.Н., Городецкий А.С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла конструкций // Актуальные проблемы исследований по теории сооружений: Сборник научных статей в 2-х частях / ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Часть 2. — М.: ЦПП, 2009. — С. 204-216.
 12. **Сапожников А.К., Григорьев С.М.** Учет последовательности возведения зданий методом конечных элементов с поэтажным формированием расчетной модели // Строительная механика и расчет сооружений, 2010, №.1. — С. 19-26.
 13. **Кабанцев О.В.** Расчет несущих конструкций зданий с учетом истории возведения и поэтапного изменения основных параметров расчетной модели // Промышленное и гражданское строительство, 2012, №7. — С. 33-35.
 14. **Kabantsev O., Perelmuter A.** Modeling Transition in Design Model when Analyzing Specific Behaviors of Structures // Procedia Engineering, 2013, Vol. 57.— P. 479 – 488.
 15. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа— М.: Изд-ва СКАД СОФТ, АСВ и ДМК Пресс, 2011.— 709 с.
 16. **Харлаб В.Д.** Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Механика стержневых систем и сплошных сред: Труды ЛИСИ. — Л.: ЛИСИ, 1966. Вып. 49. — С. 93–119.
 17. **Сергеев М.В.** К решению граничных задач линейной теории упругости с изменяющейся границей // Механика стержневых систем и сплошных сред, Межвузовский сборник трудов. — Л.: ЛИСИ, 1980 — С. 158-162.
 18. **Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.** Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. - М.: Наука, 1987. — 471 с.
 19. **Арутюнян Н.Х., Потапов В.Д.** Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению. // Доклады АН СССР, 1983, Т. 270, N4. — С. 799-803.
 20. **Арутюнян Н.Х., Михайлов М.Н., Потапов В.Д.** Об устойчивости растущего вязкоупругого армированного стержня, подверженного старению // Прикладная механика и техническая физика, 1984. № 5.— С. 143–151.
 21. **Арутюнян Н.Х., Михайлов М.Н., Потапов В.Д.** Устойчивость растущих вязкоупругих оболочек, подверженных старению // Прикладная механика и техническая физика, 1986. № 2. — С. 151–160.
 22. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и

родственные проблемы. В трех томах. — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010-2011.— 1776 с.

23. **Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.** Вычислительный комплекс SCAD.— М.: Изд-во СКАД СОФТ и изд-тво АСВ, 2009 — 656 с.

Перельмутер Анатолий Викторович, доктор технических наук, профессор, иностранный член РААСН, главный научный сотрудник НПО СКАД Софте, Киев, Украина,
e-mail: AnatolyPerelmutter@gmail.com

Anatoly V. Perelmutter, DSc, Professor, Foreign member Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Main scientific employee SCAD Soft Ltd. Kiev, Ukraine,
e-mail: AnatolyPerelmutter@gmail.com

О МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ «СООРУЖЕНИЕ – ЖИДКОСТЬ». БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР. ЧАСТЬ 1: ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СООРУЖЕНИЯ И ЖИДКОСТИ

*А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева,
Ж.И. Мсхалая*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлен библиографический обзор отечественных и зарубежных публикаций, посвященных вопросам моделирования систем «сооружение – жидкость». Кратко рассмотрены современные подходы к описанию движения среды, сеточные и бессеточные методы моделирования поведения среды.

Ключевые слова: система «сооружение – жидкость», постановки задач, методы математического моделирования, сеточные методы, бессеточные методы

ABOUT MODELLING OF SYSTEMS “FLUID – STRUCTURE”. BIBLIOGRAPHIC REVIEW. PART 1: FORMULATIONS OF PROBLEM AND METHODS OF MATHEMATICAL MODELLING

*Alexander M. Belostotsky, Pavel A. Akimov, Taymuraz B. Kaytukov,
Irina N. Afanasyeva, Zhiuli I. Mskhalaya*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to bibliographic review of russian and foreign publications devoted to the issues of modeling of systems “fluid – structure”. State-of-the-art approaches to description of the medium, mesh and meshless methods are under consideration.

Keywords: systems “fluid – structure”, formulations of the problems, methods of mathematical modelling, mesh methods, meshless methods

Задачи взаимодействия конструкций и сооружений с жидкостью (Fluid-Structure Interaction (FSI)) широко распространены в науке, промышленности, медицине. Основная сложность моделирования при этом заключается в необходимости получения совместного согласованного решения уравнений динамики конструкции и уравнений движения жидкости. За последние десятилетия разработано большое количество аналитических и полуэмпирических методов [71, 75, 97, 102, 145,

176]. Однако, данные методы преимущественно применимы для узкого класса задач с простейшей геометрией и рядом ограничений, накладываемых на постановку задачи и граничные условия. В то же время, для решения практических (промышленных) задач требуется учитывать сколь угодно сложную геометрию и граничные условия. Поэтому, одним из основных и наиболее перспективных методов для решения задач является численное моделирование [171].

Вообще, очевидно, что в настоящее время как фундаментальную, так и прикладную науку невозможно представить без использования мощнейшего аппарата прикладной (вычислительной) математики. Непрерывный рост производительности компьютерной техники, а также ее доступность для широкого круга исследователей, обуславливает постоянное увеличение общей доли вычислительного эксперимента в научных исследованиях по сравнению с натурными или лабораторными испытаниями. Здесь, разумеется, сразу следует оговориться, что вычислительный эксперимент не претендует на исключительную роль в научных исследованиях, хотя он, безусловно, позволяет значительно снизить потребность в проведении экспериментальных изысканий, что естественным образом влечет за собой сокращение соответственно как временных, так и финансовых затрат [27]. Рост производительности компьютерной техники отражается не только на экстенсивном использовании вычислительных технологий (уменьшение шага расчетной сетки, более подробная аппроксимация, увеличение количества неизвестных, ускорение расчетов благодаря использованию вычислительных мощностей множества ядер и/или процессоров (параллельные и распределенные вычисления) и др.), но и на повышении их качественных характеристик (разрабатываются новые численные методы, развиваются и совершенствуются уже известные и широко используемые подходы, расширяется сфера их применения и т.д.). Применение современных методов позволяет адекватно моделировать сложные задачи механики сплошной среды, включая и рассматриваемые в настоящей работе связанные задачи «сооружение – жидкость».

Вообще, задачи моделирования поведения связанных систем «сооружение – жидкость» являются предметом давнего интереса как со стороны ученых-исследователей, так и инженеров-проектировщиков в самых разных приложениях (гидродинамика, аэродинамика, автомобилестроение (аквапланирование автомобильной шины), кораблестроение (движе-

ние судна), машиностроение (движение масла через уплотнители, деформации лопаток турбины в потоке) промышленное и гражданское строительство [5], медицина, биомеханика (работа сердца, описание циркуляции крови, проектирование микромеханических устройств и т.д. [100, 106]) и др.). Исследованию процессов взаимодействия твердых и упругих тел с жидкостью посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых, среди которых, в частности, Горшков А.Г. [12], Григолюк Э.И. [12], Зиновьева Т.В. [17], Кондракова Ю.Н. [19], Коробкин А.А. [110], Лавров Ю.А. [22], Логвинович Г.В. [24], Норкин М.В. [29], Попова А.А. [31], Пухначев В.В. [110], Седов Л.И. [35], Терентьев А.Г. [170], Ткаченко О.П. [38], Филиппенко Г.В. [39], Фоменко Н.А. [40], Хакимзянов Г.С. [42], Шахверди Г.Г. [45], Шишаева А.С. [46], Щирицын В.Д. [47], Юдович В.И. [48], Faltinsen O. [179], Greenhow M. [92], Lin W.M. [92], Shao S. [161], Wagner R. [175], Zhao R. [179], Zhu X. [180] и др.

Перечислим ниже еще ряд характерных «нестроительных» примеров. Как известно, важнейшая в аэродинамике проблема флаттера крыла неразрывно связана со сложными явлениями взаимодействия граничного слоя и срыва потока. Важность корректного и высокоточного расчетного обоснования флаттера при моделировании поведения крыльев самолета и лопаток турбин авиационных двигателей отмечалась, в частности, в работе [72]. Динамические отклики перемещаемых резервуаров для хранения топлива с перегородками, гасящими движение жидкости, исследовались в статье [73]. Нелинейная постановка задачи моделирования системы «конструкция – жидкость» использовалась при определении аэроупругих параметров известного истребителя F-16 [82]. В работе [94] изучалась потеря аэроупругой устойчивости, возникающая в современных ветряных турбинах в связи с появлением вибраций, обусловленных срывом потока с лопастей и возникновением классического явления флаттера лопастей. Зарубежные исследователи [136] убедительно обосновали необходимость рассмотрения связанной системы «сооружение – жидкость»

при моделировании поведения большепролетных мостов, высотных зданий, больше-размерных куполов, подверженных колебаниям, обусловленных ветровыми воздействиями, оценке аэродинамической устойчивости указанных объектов. Весьма интересная и практически важная задача многопараметрического исследования поведения труб, наполненных жидкостью решена в [134]. Характерными типовыми проблемами гидродинамики являются задачи моделирования морских трубопроводов (в том числе соединяющих морские платформы (подвижные и неподвижные) и надводные суда со скважинами на дне [70, 79, 109, 116]), определения нестационарных нагрузок на надводные корабли, обусловленных океаническими волнами [85, 86, 164, 177] (сложными аспектами в этой отношении являются моделирование свободной поверхности и учет больших деформаций конструкций и т.д. [103, 104]).

1. КРАТКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ

Как известно, при решении задач расчета систем «сооружение – жидкость» традиционно используются следующие постановки (описание движения среды): постановка Лагранжа (подход Лагранжа), постановка Эйлера (подход Эйлера) и так называемая произвольная постановка Лагранжа-Эйлера (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation (постановка ALE)).

1.1. Постановка Эйлера.

Постановка Эйлера основана на изучении параметров движения сплошной среды в каждой фиксированной точке пространства в различные моменты времени. Внимание наблюдателя как бы фиксируется не на самих частицах среды, а на точках пространства, через которые они проходят. Иными словами, методы, основанные на подходе Эйлера, используют стационарную, чаще всего регулярную сетку, сквозь которую движутся частицы (малые объемы) сплошной среды, а все физические характеристики определяются в узлах

данной сетки, т.е. они не связаны с конкретными материальными частицами, а в каждый момент времени являются характеристиками разных частиц, находящихся в данный момент в данной точке пространства. Методы этого класса позволяют рассчитывать задачи с большими деформациями и широко применяются для решения задач гидро- и газодинамики. Результаты, полученные с их помощью, обладают достаточно высокой точностью, досконально изучены и имеют хорошо проработанное теоретическое обоснование. Сложности применения методов данного класса к решению задач со свободными границами обусловлены заранее неизвестным положением свободной границы и вытекающими отсюда проблемами, связанными с постановкой граничных условий.

Следует отметить, что численные реализации на основе постановки Эйлера встречаются относительно нечасто (по сравнению с постановкой Лагранжа и постановкой ALE). В этом отношении следует отметить разработки, предложенные в статьях Dunne T. [80], Liu C. [123], Rannacher R. [80], Walkington N.J. [123] и др.

1.2. Постановка Лагранжа.

В соответствии с постановкой Лагранжа в начальный момент времени каждая из частиц рассматриваемой среды «маркируется» путем присвоения ей значений координат, а в дальнейшем прослеживается движение каждой частицы индивидуально – путем определения траектории, т.е. координат относительно начальных значений (такие координаты называют координатами (переменными) Лагранжа). Методы, основанные на подходе Лагранжа, используют подвижную сетку, представляющую собой дискретное представление (аппроксимацию) материальной среды. Узлы такой сетки жестко связаны ребрами и вместе с ними образуют ее ячейки (элементы). В этом случае сетка двигается и деформируется вместе со сплошной средой, при этом связи узлов сохраняются. Физические характеристики, определяемые в узлах сетки,

являются характеристиками соответствующих частиц материальной среды. В отличие от подхода Эйлера, данная постановка позволяет легко отслеживать свободные границы и границы раздела, но также не лишена недостатков, наиболее значительный из которых – невозможность решать задачи с большими деформациями расчетной области, поскольку они приводят к значительным деформациям расчетной сетки вплоть до пересечений границ (ребер) ячеек, что, в свою очередь, влечет за собой аварийное завершение соответствующего алгоритма (программно-алгоритмического комплекса).

1.3. Произвольная постановка Лагранжа-Эйлера (Arbitrary Lagrangian – Eulerian (ALE) Formulation).

Итак, при моделировании конструкций и сооружений, как правило, используется постановка Лагранжа, тогда как для жидкости – постановка Эйлера. Кроме того, в настоящее время широкое распространение получили связанные постановки ALE (подход ALE) [77] для жидкости в сочетании с постановками Лагранжа для конструкций и сооружений. Как следует из названия, подход ALE [146] относится к комбинированным лагранжево-эйлеровым методам. В данном методе используется сетка, которая может двигаться произвольно, т.е. она не остается фиксированной, как эйлерова сетка, но и не подчиняется законам движения лагранжевой сетки, как, например, в методе конечных элементов (Finite Element Method (FEM); МКЭ), откуда и слово «произвольный» (arbitrary) в названии метода. Алгоритм рассматриваемого подхода разбивается на три основных этапа [124]: первый этап – перемещение сетки, второй этап – перестройка (актуализация) сетки, третий этап – интерполяция значений со старой сетки на новую. Удобство данного подхода заключается в том, что можно перестраивать сетку лишь в тех местах, где это необходимо, например, там, где лагранжева сетка сильно деформирована (что само по себе могло бы повлиять на точность получаемых

результатов, либо и вовсе способствовать аварийному завершению работы алгоритма и/или соответствующего реализующего программно-алгоритмического комплекса). Недостатком подхода является наличие процедуры интерполяции, которая способствует сглаживанию результатов. Кроме того, для отслеживания свободных поверхностей и границ раздела типа «жидкость – жидкость» и «жидкость – тело» сетка в подходе ALE вблизи них должна вести себя подобно обычной лагранжевой сетке, что в свою очередь приводит к общему недостатку сеточных лагранжевых методов – возможному перехлесту границ элементов. Данный метод часто используется для решения задач о взаимодействии жидкости с погруженными телами.

2. КРАТКИЙ ОБЗОР СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СРЕДЫ

2.1. Метод конечных элементов.

Метод конечных элементов получил существенное развитие начиная с середины прошлого века [5, 15, 16, 20, 26, 30, 34, 36, 44, 56-59, 76, 77, 113, 136, 144, 163, 181-183]. Расчетная область в МКЭ в простейшем случае представляет собой сетку, узлы которой сохраняют между собой жесткие связи и двигаются вместе с материальной средой, а ячейки сетки в методе принято называть конечными элементами. Достоинства МКЭ заключаются в относительно несложном задании граничных условий, достаточно высокой точности, возможности проследить всю эволюцию свободной границы и высокой степенью универсальности. К преимуществам метода также можно отнести наличие хорошо проработанной теоретической базы, большое количество доступной отечественной и зарубежной литературы как по теории метода, так и по его приложениям, широкий спектр решаемых с использованием МКЭ задач. Следует отметить, впрочем, что непродуманное применение метода может сделать невозможным

проведение расчетов в областях со сложным поведением свободной поверхности ввиду перехлеста границ ячеек расчетной сетки за счет сильных деформаций расчетной области. Заметим также, что наиболее полное описание метода и его приложений для задач теории упругости и гидродинамики можно найти в трехтомной монографии, написанной Zienkiewicz O.C. и Taylor R.L. [181-183].

МКЭ в рамках постановки ALE широко применяется для задач со свободной поверхностью, подвижными границами, значительными деформациями и контактными взаимодействиями. Наиболее полное описание состояния вопроса с соответствующим библиографическим обзором представлено в статье Белостоцкого А.М., Акимова П.А., Кайтукова Т.Б., Афанасьевой И.Н., Вершинина В.В., Усманова А.Р., Щербины С.В. [6]. Соответствующие исследования представлены также в работах Bathe K.J. [56-60], Braess H. [66], Cho J.R. [73], de Borst R. [113], Engel M. [81], Griebel M. [81], Hron J. [100], Hulshoff S. [113], Ji S. [58], Kuhl E. [113], Lee S.Y. [73], Mádlík M. [100], Wriggers P. [66], Zhang H. [58] и др. Целый набор публикаций связан с развитием методов и решателей для численного моделирования жидкости и (или) сооружения. Так, например, Cavagna L., Quaranta G., Ghiringhelli G.L. и Mantegazza P. в [68] сделали попытку разработки специальных алгоритмов и процедур для проведения аэроупругих расчетов с использованием стандартного программного обеспечения (CFD, FLUENT), в том числе в части корректного и эффективного решения задач аэроупругости при околозвуковых скоростях для современных промышленных объектов. Bletzinger K.-U., Wüchner R. и Kupzok A. [63] использовали закрытый конечноэлементный код (для конструкций, сооружения) в сочетании с программным комплексом CFD (CFX-5) (для жидкости) при моделировании легких и тонкостенных конструкций, испытывающих значительные деформации и подверженных мощным турбулентным потокам воздуха. Sigrüst J.-F. и Garreau, S. [163] разработали

эффективный численный метод моделирования поведения связанной системы «сооружение – жидкость», интегрированный в программный комплекс ANSYS, причем для соответствующей конечноэлементной аппроксимации жидкости использовались конечные элементы с неизвестными узловыми давлениями (постановка в давлениях), тогда как для сооружения применялись модальные / спектральные методы.

2.2. Метод граничных элементов.

Определенное распространение также получил метод граничных элементов (Boundary Element Method (BEM); МГЭ) [4, 8, 9, 14, 23, 37], в том числе одна из его реализаций – комплексный метод граничных элементов (КМГЭ) [14, 23]. Удобство использования МГЭ обусловлено тем, что, по сути, дискретизации подвергается лишь граница расчетной области (сокращается мерность задачи), поэтому соответствующие элементы называются граничными. Далее в любой точке области решение может быть получено по соответствующим значениям на границе. Заметим, что данный метод может обладать все тем же, отмеченным ранее недостатком – невозможность решения задач с сильными деформациями границы расчетной области. Достаточно подробный сравнительный анализ МКЭ и МГЭ приведен, в частности, в [8].

2.3. Метод конечных разностей.

Метод конечных разностей (Finite Difference Method (FDM); МКР) широко распространен и весьма хорошо изучен к настоящему времени [1, 11, 26, 63]. Традиционный МКР основан на подходе Эйлера, а для получения разностных схем решаемых дифференциальных уравнений используют разложение в ряды Тейлора характеристик, входящих в эти уравнения. Имеется огромное разнообразие разностных схем, с их помощью решено и до сих пор решается большое количество прикладных задач, существенным образом проработана теория, досконально изучены аппроксимационные характеристики схем, их

устойчивость и сходимость. В настоящее время МКР используются для моделирования поведения жидкости, в том числе и в рамках постановки ALE.

2.4. Метод конечных объемов.

Классический метод конечных (контрольных) объемов (Finite Volumes Method (FVM); МКО) основан на интегральных законах сохранения [34, 99]. На первом этапе для любого конечного объема формулируется закон сохранения. Затем расчетная область покрывается сеткой, в узлах которой будут рассчитываться физические характеристики (параметры) моделируемого процесса. Далее выбираются контрольные объемы, чаще всего, с центрами в узлах расчетной сетки и границами, проходящими через центры ребер ячеек сетки. Для каждого полученного контрольного объема записывается дискретный аналог закона сохранения на основе баланса всех потоков через границы рассматриваемого объема. Метод конечных объемов в большинстве случаев позволяет получать консервативные схемы, допускает дискретизацию расчетных областей со сложной геометрией, а также позволяет строить более точные схемы вблизи границ области по сравнению с МКР. Эти достоинства метода обусловлены возможностью использовать нерегулярные сетки, равно как и контрольные объемы произвольной формы. Отличительной особенностью данного метода является то, что законы сохранения применяются на этапе построения численных схем, а не на более раннем этапе вывода дифференциальных уравнений, как, например, в МКР. Кроме того, физические законы сохранения выполняются не в предельно малых объемах (частицах) среды, а в конкретных конечных подобластях.

Заметим, что ряд специалистов отдадут предпочтение МКО при аппроксимации жидкости и МКЭ при аппроксимации сооружения [91]. Shi X. и Lim S.P. [162] успешно исследовали движение жидкости с помощью метода решетчатых уравнений Больцмана при одновременном применении МКЭ для описания

поведения твердого тела. В рамках метода распределенных множителей Лагранжа (Distributed Lagrange Multiplier Method (DLM)) накладываются кинематические ограничения на сооружение или на фиктивную область, занимаемую жидкостью. В работе Lv X., Zhao Y., Huang X.Y., Xia G.H. и Su X.H. [133] выполнена дискретизация задачи Коши для уравнений динамики сооружений при этом поведение жидкости описывалось в рамках метода конечных объемов. В статье Xia G., Lin C.-L. [178] был предложен новый метод вихрей в ячейке в рамках неструктурированного МКО (Cell-Vortex Unstructured FVM), ориентированный на использование в динамике сооружений в части исследования отклика на движение жидкости (что, очевидно, является эффективной альтернативой традиционному МКЭ).

2.5. Метод объема жидкости.

Для отслеживания (аппроксимации) свободной поверхности или контактных границ МКО может комбинироваться с методом объема жидкости (Volume of Fluid (VOF)). Метод VOF был разработан в Национальной лаборатории Лос-Аламоса (Los Alamos National Laboratory (LANL), США) в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого столетия [99]. Одна из главных особенностей метода – возможность расчета течений в многосвязных областях с наличием разрывов характеристик и больших деформаций свободной поверхности. В данном методе в качестве маркера, позволяющего определять положение свободной поверхности, используется функция объемной концентрации среды в ячейке [28]. Традиционно метод VOF относится к классу эйлеровых методов, которые характеризуются сеткой, которая является стационарной или движется согласно изменяющейся форме поверхности по определённому заданному закону.

2.6. Метод частиц в ячейках и его модификации.

Появление метода частиц в ячейках (Particle-in-Cell, PIC), используемый для моделирова-

ния процессов газовой динамики и гидродинамики, а также при моделировании плазмы, относится к середине прошлого столетия. Этот метод, разработанный группой ученых во главе с Harlow F.H. [96] в лаборатории Лос-Аламоса, сочетает в себе оба уже рассмотренных выше подхода к описанию движения сплошной среды – используется как неподвижная эйлерова сетка, так и набор движущихся сквозь нее лагранжевых частиц. На эйлеровом «этапе» рассчитываются предварительные значения скоростей с учетом лишь вклада давления, затем, на лагранжевом «этапе», рассматривается поток частиц через границы ячеек и, таким образом, учитывается вклад конвективных членов [13, 43, 99]. Давление определяется на основе уравнения состояния. Метод предназначен для моделирования течений сжимаемой среды, однако, в силу постоянства массы частиц, уравнение неразрывности (сохранения массы) во внимание не принимается. Несмотря на то, что изначально метод был разработан для решения уравнений Эйлера, он также позволяет решать уравнения движения при наличии вязкого трения. В зависимости от рассматриваемой задачи в уравнения также можно включить и искусственную вязкость. Кроме того, допускается проводить расчеты в любой ортогональной криволинейной системе координат [13]. Метод позволяет моделировать многофазные течения без каких-либо ограничений на степень деформации границ раздела и свободных поверхностей.

Несмотря на то, что метод частиц в ячейках позволил значительно расширить класс моделируемых численными методами физических явлений, он, тем не менее, был несвободен от недостатков. В частности, результаты расчетов, полученные с его помощью при относительно малом числе расчетных частиц были не вполне точны – наблюдались значительные осцилляции гидродинамических величин. Использование же в расчетах большого числа частиц оказывалось неразумным для вычислительной (компьютерной) техники тех лет. В связи с этим были разработаны экономичные

модификации метода, а именно метод жидкости в ячейках (Fluid-in-Cell, FLIC) [88] и метод крупных частиц [7]. Упомянутые методы являются весьма схожими и на эйлеровом этапе не отличаются от метода, предложенного Harlow F.H. На лагранжевом же этапе вместо перемещения дискретного набора частиц используется поток массы через границы ячеек. Еще одна модификация – метод Fluid-Implicit-Particle (FLIP) [100], представляющий собой обобщение метода PIC на случай подвижной адаптивной эйлеровой сетки в целях повышения локальной точности решения. Наиболее полный материал по методу частиц в ячейках и его модификациям, содержащий в том числе как математические основы метода, так и конкретные его приложения в современных расчетах, включая коды программ на алгоритмическом языке высокого уровня Фортран (Fortran) можно найти в монографии [13]. Достаточно подробный и качественный обзор метода PIC, его модификаций и приложений содержится также в работе [96].

2.7. Метод маркеров и ячеек и его модификации.

Для расчета течений несжимаемой жидкости со свободными границами в 1965 году, также под руководством Harlow F.H., был разработан метод маркеров и ячеек (Marker-and-Cell, MAC) [96]. Это один из наиболее эффективных алгоритмов для решения нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости со сложной геометрией и большими деформациями свободных границ. Особенностью метода является использованием смешанного эйлерова-лагранжева подхода, при котором изучаемая область разбивается неподвижной разнесенной эйлеровой сеткой на ячейки, и одновременно для определения положения свободной поверхности и визуализации течения используется лагранжева сетка частиц-маркеров, переносимых полем скоростей (в отличие от метода PIC частицы здесь в расчете физических характеристик не участвуют, представляя собой лишь маркеры свободной границы). Используется полная си-

система уравнений Навье-Стокса для простейших физических переменных – составляющих скорости и давления. Разностная схема для уравнений количества движения основана на разностях вперед по времени и на центральных разностях по пространственным переменным. В методе применяется схема расщепления, на каждом шаге по времени итерационными методами решается разностное уравнение Пуассона для давления, удовлетворяющее условию несжимаемости (схема расщепления метода MAC очень схожа с проекционной схемой Chorin A.J. [74]). Позднее появилось множество модификаций метода маркеров и ячеек, совершенствующих определенные части его численного алгоритма и ориентированных на конкретные классы задач: Simplified MAC (SMAC) [51], Stanford-University-Modified MAC (SUMMAC) [69], Semi-Implicit MAC (SIMAC) [53], MAC-Reynolds-Low (MACRL) [151] и др.

2.8. Метод функций уровня.

Метод функций уровня (Level Set Method) был предложен в работе Osher S. и Sethian J.A. 1988 года [148]. В качестве маркера свободной поверхности или границы раздела вместо дискретного набора частиц служит линия уровня некоторой функции. Достоинством метода является относительная простота описания разного рода кривых, прямое вычисление геометрических характеристик свободных поверхностей и границ раздела (кривизны, касательной, нормали и т.д.). Кроме того, применение метода к решению трехмерных задач не сопряжено с какими-либо дополнительными трудностями. Подробное описание метода Level Set можно найти в монографиях [147, 160].

3. КРАТКИЙ ОБЗОР БЕССЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СРЕДЫ

Известные (и отмеченные выше) недостатки сеточных методов, в особенности методов

лагранжевой природы, способствовали появлению так называемых бессеточных методов, которые в последнее время получают все более широкое распространение. Несмотря на употребляемый термин «бессеточные», следует, тем не менее, понимать, что не все методы, относящиеся к этому классу, вообще не используют сетку при расчетах. Ввиду того, что строгого, устоявшегося определения бессеточных методов не существует, будем следовать терминологии, предложенной в монографии Liu G.R. [124] и определять бессеточные методы как методы, не требующие использования связанной сетки, по крайней мере, для построения функций формы (например, в МКЭ, как известно, для данной процедуры традиционно используется сетка). К таковым относятся в том числе и бессеточные методы, основанные на слабой форме уравнений, поскольку для ее интегрирования все же требуется наличие сетки. «Идеальным» же требованием к бессеточному методу является отказ от сетки на любом этапе численного решения задачи. К данному классу относятся методы, использующие дифференциальную форму соответствующих уравнений механики жидкости.

Основное отличие бессеточных методов от классических лагранжевых состоит в том, что сетка строится на каждом шаге по времени по новому набору узлов. Это означает, что, в процессе проведения вычислений, узлы расчетной области могут свободно перемещаться ввиду отсутствия между ними жестких топологических связей. Такой подход приводит к ряду преимуществ бессеточных методов перед традиционными сеточными при решении задач с большими деформациями расчетных областей [27]:

- отсутствует необходимость в применении сложных и ресурсоемких алгоритмов адаптации сетки, с целью избежания самопересечения ее ребер, что в обычных случаях приводит к аварийному завершению расчетов; отсутствует необходимость использования стандартной в таких случаях процедуры интерполяции, результатом которой является

неизбежное понижение точности результатов;

– имеется возможность решать с заведомо более высокой точностью задачи с разрывами характеристик (параметров), ввиду того, что поверхность разрыва не должна проходить строго по границам элементов, как требуется в стандартном МКЭ;

– имеется возможность использования простых адаптивных процедур добавления и удаления узлов в локальных областях, поскольку в бессеточных методах такая процедура не влечет за собой нарушения связности сетки.

Рассмотрим далее более подробно основные особенности наиболее распространенных численных методов, относящихся к классу бессеточных. Заметим, что при составлении предлагаемого обзора бессеточных методов использовались материалы работ [27, 61, 87, 119, 124, 127].

3.1. Метод Moving Least Squares.

Метод Moving Least Squares (MLS) был предложен в работе Lancaster P. и Salkauskas K. [115]. Аппроксимация функции в точке находится путем минимизации функционала, представляющего собой сумму взвешенных квадратов отклонений значений аппроксимированной функции от точных значений этой функции в узлах сетки. В классическом методе наименьших квадратов в качестве весовой функции используется функция-константа равная 1, тогда как в методе MLS – функция, имеющая форму гауссовой кривой и обладающая компактным носителем. Глобальная аппроксимация функции получается путем перемещения точки максимума весовой функции по точкам аппроксимации в пределах расчетной области. Эта особенность метода добавила к названию метода наименьших квадратов слово «перемещение» (Moving). Компактность носителя весовой функции позволяет использовать для аппроксимации функции в точке лишь ближайшие узлы, а ее форма дает возможность по-разному оценивать вклад в аппроксимацию

различных узлов. Следует заметить, что MLS не является «в чистом виде» методом численного моделирования физических процессов, а лишь способом построения функций формы, весьма распространенным во многих бессеточных методах, в частности, MLSPH, DEM, EFG, которые будут рассмотрены далее. Основным недостатком метода заключается в том, что функции формы, построенные на основе метода MLS, не удовлетворяют условию Кронекера [27]. Как следствие, общей проблемой для всех методов, построенных на MLS, являются сложности задания (учета) главных граничных условий, поскольку значения аппроксимированной функции не совпадают с точными значениями даже в узловых точках. Следует также отметить, что существует и метод MLS для комплексных переменных [122].

3.2. Метод точечной интерполяции и его модификации.

Разумеется, метод MLS, несмотря на довольно широкое его использование при построении функций формы в бессеточных методах, не является единственным инструментом для достижения соответствующих целей. В статье Liu G.R. и Gu Y.T. [126] был предложен новый численный метод – метод точечной интерполяции (Point Interpolation Method (PIM)), который использует слабую форму уравнений, и процедура построения функций формы в котором отличается от MLS. Поясним, что новая процедура устраняет принципиальный недостаток метода MLS – уже упомянутое выше нарушение условия Кронекера. Другим важным отличием является то, что размер полиномиального базиса (количество одночленов в базисе) для метода PIM должен соответствовать количеству точек в области-носителе, на которой строится функция формы. К общим недостаткам процедур MLS и PIM относится необходимость обращения во многих случаях вырожденных матриц. Как уже отмечалось ранее, бессеточные методы, основанные на слабой форме уравнений, требуют на этапе интегрирования по-

строения глобальной сетки на всей расчетной области, что является существенным недостатком этого класса методов. С целью его устранения, метод точечной интерполяции был модифицирован для локальной слабой формы уравнений [125], что подразумевает построение сетки интегрирования лишь в малой подобласти расчетной области. Разумеется, этот процесс является существенно менее трудоемким с точки зрения объема вычислительной работы. Далее будут рассмотрены и другие методы, также основанные на локальной слабой форме уравнений.

Несмотря на удобство использования полиномиальных базисов в методе PIM, матрица, полученная в ходе построения интерполяции и требующая последующего обращения, может оказаться вырожденной, что, очевидно, является принципиальной проблемой, не позволяющей продолжить процесс вычислений. В связи с этим, в [128] было предложено вместо полиномиальных базисных функций использовать радиальные, т.е. зависящие не от координат узлов, а лишь от расстояния между ними. Применение радиальных базисных функций приводит к симметрической матрице, которая, как известно, является всегда обратимой. Модификация метода PIM, использующая радиальные базисные функции, получила название RPIM (Radial PIM).

Как уже отмечалось выше, МГЭ имеет ряд преимуществ перед МКЭ. Идея использования граничных интегральных уравнений для построения новых методов, по аналогии с МГЭ, привела к появлению метода граничной точечной интерполяции (Boundary PIM) [93]. Как следует непосредственно из названия этого метода, для построения функций формы используется процедура метода PIM, а дискретизации, как и в МГЭ, подвергается лишь граница области расчета.

3.3. Методы класса Partition of Unity Methods и hp-clouds.

Вышеизложенные методы построения функций формы не учитывают локальные особенности решения, которые, во многих случаях,

могут быть заранее известны: поверхности разрыва, области с большими градиентами искомыми характеристиками и т.д. Решение данной проблемы – использование методов класса Partition of Unity Methods (PUM) [55, 135] и hp-clouds [78]. Функции формы в упомянутых методах строятся на основе произведения базисных функций, представляющих собой разложение единицы, а также дополнительных функций, называемых внешним базисом. Этот внешний базис может служить для повышения степени получаемых функций формы, либо учитывать локальный характер решения, посредством включения в базис некоторых специальных функций, например, гармонических (в случае решения уравнения Лапласа), Хевисайда (в случае наличия разрывных характеристик) и т.д. Положительной чертой такого подхода является использование внешнего базиса лишь в некоторых подобластях расчетной области – там где это действительно необходимо. Еще одно важное достоинство рассматриваемых подходов – это отсутствие необходимости в обращении матриц большой размерности. Вместе с тем, следует отметить, что общий объем памяти, необходимой для хранения всех используемых переменных, увеличивается за счет дополнительных неизвестных в узловых точках, необходимых для построения внешнего базиса [27].

3.4. Метод Diffuse Element Method и его модификации.

В 1992 году в статье Nayroles B., Touzot G., Villon P. [144] был предложен метод, названный Diffuse Element Method (DEM), являющийся с некоторых позиций определенным «обобщением» МКЭ. В основу предложенного метода была положена идея о расширении понятия элемента, который стал трактоваться как некоторая подобласть вблизи рассматриваемого узла (отсюда и слово «размытый» (Diffuse) элемент в названии метода), а для построения функций формы на элементе-подобласти вместо привычных для МКЭ процедур было предложено использовать уже рассмотренный выше метод наименьших

квадратов с весовой функцией, имеющей компактный носитель. Такое «обобщенное» понятие элементов допускает наличие между ними непустых пересечений. Классический МКЭ, таким образом, по сути, с некоторых позиций является частным случаем DEM, если весовую функцию в методе наименьших квадратов выбирать постоянной на элементе. Для интегрирования слабой формы в методе используется связанная сетка.

В 1994 году Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. [62] внесли ряд изменений в концепцию DEM, назвав новый метод Element Free Galerkin (EFG). В методе EFG сохраняются все достоинства метода DEM, а основные его отличия от предшественника заключаются в способе вычисления производных, корректной процедуре учета (задания) главных граничных условий на основе метода множителей Лагранжа и в использовании процедуры ортогонализации вместо процедур обращения матриц большой размерности в каждом узле расчетной области.

3.5. Метод Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG).

Как уже отмечалось выше, при рассмотрении метода PIM, использование локальной слабой формы дает огромные преимущества, которые заключаются как в простоте реализации алгоритма, так и в последующих временных затратах на выполнение вычислений. Метод Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), предложенный в работе Atluri S.N., Zhu T. [54], как видно из названия, использует локальную форму метода Петрова-Галеркина. MLPG является скорее методологией, нежели численным методом математического моделирования. При соответствующем выборе тестовых и пробных функций данная методология приводит к различным бессеточным методам, в том числе и ко многим уже рассмотренным [87].

3.6. Бессеточный метод конечных элементов и метод естественных соседей.

В так называемом бессеточном методе конечных элементов [76] и методе естествен-

ных соседей (интересно, что последний был первоначально предложен для решения задач теории упругости) [168] для интерполяции функций, входящих в решаемую систему уравнений, используются функции формы Лапласа и Сибсона (главным преимуществом интерполяции Сибсона является ее четкая определенность, независимость построения и устойчивость на неравномерном распределении расчетных узлов), базирующиеся на понятии естественных соседей, определяемых с помощью диаграмм Вороного [27]. Данные методы обладают всеми преимуществами классического МКЭ (простота учета (задания) граничных условий, согласованность элементов (межэлементная непрерывность функций формы), стандартная процедура построения функций формы), но, одновременно с этим, дают возможность решать задачи с большими деформациями границ расчетной области даже после нарушения ее связности. Такие преимущества методов объясняются тем, что для построения функций формы необходима информация лишь о положении узлов, но не о связях между ними. Тем не менее, для интегрирования слабой формы, а также для определения узлов интерполяции требуется сетка (диаграмма Вороного либо триангуляция Делоне), что является алгоритмически достаточно сложным и ресурсозатратным процессом, особенно в трехмерном случае. Численному моделированию течений жидкости со свободными границами методом естественных соседей посвящены, например, работы [3, 18, 32].

3.7. Метод частиц А.М. Франка.

В основе так называемого [27] метода частиц Франка [41] лежит принцип наименьшего принуждения Гаусса. Область расчета представляется набором частиц, а функции формы строятся на прямоугольной фоновой сетке на основе линейной комбинации B-сплайнов. Метод позволяет рассчитывать задачи с большими деформациями границ расчетной области, не требователен к ресурсам в случае численного моделирования пространствен-

ных задач. Недостаток метода состоит в том, что в решаемых уравнениях давление в явном виде не присутствует, что не позволяет рассчитывать гидродинамические нагрузки [27].

3.8. Метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)) и его модификации.

Особое положение среди всех бессеточных методов занимает метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) и его более поздние модификации (MLSPPH, RKPM, MPS, ISPH и др.), рассмотрению которого будет посвящена оставшаяся часть настоящего обзора.

Предшественником метода сглаженных частиц считается метод Particle-and-Force (PAF), разработанный, как и многие из упомянутых выше методов, в лаборатории Лос-Аламоса под руководством Harlow F.H. в 1961 году [95]. Данный метод, представляющий собой, по сути, аппроксимацию метода Монте-Карло для задач газодинамики, не требует использования связанной сетки ни на одном из этапов решения задач. Сплошная среда представляется набором частиц, между которыми действуют силы парного взаимодействия. Закон сохранения массы выполняется точно ввиду постоянства массы каждой отдельной частицы во времени. За счет симметричности парных взаимодействий (в соответствии с третьим законом Ньютона) полный импульс системы также сохраняется. Для постановки условий на твердой границе используется набор частиц и силы отталкивания. Такой подход к постановке граничных условий позднее стал классическим для метода сглаженных частиц. Радиус взаимодействия частиц ограничен, а давление рассчитывается из уравнения состояния. Все эти идеи позднее и легли в основу метода SPH.

Метод SPH был предложен в 1977 году учеными университета Монаша (г. Мельбурн, Австралия) Gingold R.A. и Monaghan J.J. [89, 90], а также независимо от них ученым Колумбийского университета (г. Нью-Йорк, США) Lucy L.B. [132].

Первоначально сфера применения метода была ограничена задачами космологии и астрофизики, однако, позже она была значительно расширена, в чем немаловажную роль сыграл один из его авторов Monaghan J.J., вклад которого в последующее развитие метода трудно переоценить. Именно он адаптировал метод для применения в численных расчетах широкого круга задач, предложил множество модификаций, позволивших улучшить его аппроксимационные характеристики и устойчивость, выполнил расчеты множества задач из различных областей. Во многом, именно работы Monaghan J.J. сделали метод сглаженных частиц исключительно популярным среди ученых и инженеров.

В 1994 году группа ученых во главе с Monaghan J.J. применила метод сглаженных частиц для расчета течений жидкости со свободными границами [139, 142]. В основу работ Monaghan J.J., Thompson M.C. и Hourigan K. легла идея представления несжимаемой жидкости слабосжимаемой средой с подходящим уравнением состояния (см., например, [21]). Таким образом рассматривалась система уравнений движения, характерная для задач газовой динамики. Был решен представительный набор тестовых задач, произведено сравнение полученных при этом результатов с эталонными аналитическими решениями (выполнена верификация метода). Кроме того, возможности метода были также продемонстрированы и на решении целого ряда реальных, практически важных задач, одна из которых, задача о разрушении плотины, ставшая ныне уже классической при тестировании методов частиц. Продолжая перечисление примеров практических приложений метода, отметим, например, что в исследованиях Antoci C., Delorme, L., Gallati M. и Sibilla S. [52] был рассмотрен предохранительный клапан для снижения давления, причем под действием давления воды происходила деформация упругой плиты. Пассивный гаситель бортовой качки для успокоительных цистерн надводного рыболовецкого судна, подверженного воздействию волн

большой амплитуды и прибойных волн, был изучен в статьях Souto Iglesias A. [165, 166], Abril Pérez S. [165, 166], Delorme L. [166], Pérez Rojas L. [165, 166], Zamora Rodríguez R. [165] и др.

В 1995 году Monaghan J.J., Kocharyan A. [140] опубликовали результаты расчетов задачи о распространении звуковой волны в газе со взвесью. В работе были описаны различные модификации стандартного метода сглаженных частиц, которые позволили применить его для расчета задач такого рода, что положило начало дальнейшему развитию метода в качестве инструмента численного моделирования многофазных течений. Несмотря на то, что на тот момент их исследования не включали в себя расчеты задач с четкой границей раздела двух фаз, уже в 1996 вышли работы, посвященные гравитационным потокам, где рассматривалось взаимодействие двух жидкостей, имеющих различную массовую плотность [137, 138]. Модифицированный (адаптированный) метод позволил проводить расчеты задач с отношением плотностей рассматриваемых сред лишь порядка 0.5, однако в дальнейшем, достигнутые результаты были значительно улучшены. В работах [149, 158, 172] излагаются модификации метода, позволившие эффективно применять его для задач с отношением плотностей рассматриваемых сред порядка 0.001. Значительные успехи в данном направлении были достигнуты Мюллером с коллегами. В работе [143] приводятся результаты моделирования многофазных течений, включающих поверхностное натяжение и межфазные переходы. Работа [101] посвящена моделированию многофазных течений методом сглаженных частиц на основе схемы расщепления по физическим факторам.

Еще одно из современных приложений метода – магнитная гидродинамика, для решения задач которой он был впервые применен в оригинальной публикации Gingold R.A. и Monaghan J.J. [90], в которой метод тестировался (верифицировался) на задачах с известными аналитическими решениями, исполь-

зующих политропные модели звезд в однородном магнитном поле [27]. В [150] Phillips G.J. применил метод к решению задач о формировании звезд в неоднородном магнитном поле. В работе [64] изучается распространение ударных волн в проводящей жидкости. В серии работ Price D.J. и Monaghan J.J. [152-154] можно найти подробное описание метода для задач магнитной гидродинамики.

Следует отметить, что для решения задач механики деформируемого твердого тела метод сглаженных частиц был впервые применен Libersky L.D. и Petschek A.G. в статье [121], за которой в дальнейшем последовало множество других публикаций, посвященных деформациям и разрушениям твердых тел, в том числе при высокоскоростных ударах в двумерных и трехмерных постановках [120, 131, 155-157], а также ряд работ отечественных авторов [25, 67].

Рассматривая метод сглаженных частиц не как метод математического моделирования задач гидродинамики, а, прежде всего, с позиций численного метода решения дифференциальных уравнений, Laguna P. [120] применил его для решения уравнений параболического и гиперболического типов.

В последние годы [27] метод сглаженных частиц стал широко применяться для расчета турбулентных течений [173, 174], решения задач релятивистской механики [50, 141], решения задач о подводных взрывах [130, 169], задач о течении жидкости сквозь пористые материалы [107, 108] и т.д.

Разумеется, любой численный метод обладает определенным набором не только недостатков, но и преимуществ перед альтернативными подходами. В этом смысле очевидно, что одним из естественных направлений дальнейшего развития, совершенствования, повышения эффективности, расширения сферы применения методов является их совместное использование с другими подходами при решении конкретных задач. Таким образом, появился целый ряд работ, использующих в расчетах своего рода гибриды методов, основанных на методе сглаженных частиц, с дру-

гими численными подходами и алгоритмами: MPS-FEM [117], MPS-FVM [129], SPH-Level Set [98], MPS-ALE [167] и т.д. Так, например, полунявный метод движущихся частиц (Moving Particle Semi-Implicit (MPS)), разработанный группой ученых из Японии в составе Koshizuka S. [111, 112], Nobe A. [111], Oka Y. [111, 112], Tamako H. [112], имеет ряд важных отличий от классического метода сглаженных частиц: для интегрирования по времени уравнений движения применяется схема расщепления по физическим факторам, вместо физической плотности вводится понятие количественной плотности частиц, используется отличная от классической формула аппроксимации градиента функции. Тем не менее, базисом для построения метода MPS служит именно метод сглаженных частиц. Существует также ряд других методов, основанных на идеях метода сглаженных частиц [27].

К настоящему моменту метод сглаженных частиц оброс значительным количеством разнообразных модификаций, улучшивших качественные характеристики метода и его эффективность и позволивших ему завоевать твердые позиции в области численного моделирования задач механики сплошной среды. Метод занимает особое место в классе бессеточных благодаря тому, что не использует связную сетку ни на одном этапе решения задач (и, следовательно, является полностью бессеточным). Эта специфика метода определила ряд его преимуществ перед другими бессеточными методами: простота программно-алгоритмической реализации (ввиду отсутствия потребности в сложных алгоритмах численного интегрирования и построения сетки), использование простейших алгоритмов определения свободных и контактных границ, непосредственный переход к решению трехмерных задач без привлечения дополнительных, не характерных для двумерных случаев, алгоритмов. Все перечисленное позволило методу сглаженных частиц занять особое положение и вывело его в авангард бессеточных методов [27].

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. – М.: Мир, 1990. – т. 1. – 384 с.
2. **Андреев А.Н.** Механика от дискретного к сплошному (отв. ред. Фомин В.М.). Российская академия наук. Сибирское отделение, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2008. – 344 с.
3. **Афанасьев К.Е., Рейн Т.С.** Моделирование задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами бессеточным методом естественных соседей. // Вычислительные технологии, 2008, т. 13, №4, с. 7-24.
4. **Баженов В.Г., Игумнов Л.А.** Методы граничных интегральных уравнений и

- граничных элементов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 352 с.
5. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин: Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.07. МГУП. М., 1998. – 367 с.
 6. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Афанасьева И.Н., Вершинин В.В., Усманов А.Р., Щербина С.В.** О моделировании связанных систем «сооружение – жидкость»: Постановки задач, конечноэлементные аппроксимации и алгоритмы решения. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №17, 2014, с. 203-228.
 7. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
 8. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
 9. **Березин Е.Н.** Численное моделирование задач идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами методом граничных элементов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Кемерово, Кемеровский государственный университет, 2006. – 146 с.
 10. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
 11. **Годунов С.К., Рябенский В.С.** Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
 12. **Григолюк Э.И., Горшков А.Г.** Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
 13. **Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.** Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004. – 360 с.
 14. **Громадка Т., Лей Ч.** Комплексный метод граничных элементов. – М.: Мир, 1990. – 304 с.
 15. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
 16. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
 17. **Зиновьева Т.В.** Колебания морских сооружений как упругих тонкостенных конструкций, взаимодействующих с жидкостью и буровой установкой. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела». Санкт-Петербург, ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2005. – 168 с.
 18. **Карабцев С.Н.** Метод естественных соседей для решения задач идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Кемерово, ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», 2008. – 18 с.
 19. **Кондракова Ю.Н.** Моделирование процессов взаимодействия упругих соосных цилиндрических оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью, находящейся между ними. Диссертация

- ция на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела». Саратов, ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет», 2011. – 172 с.
20. **Коннор Дж., Бреббия К.** Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
21. **Коул Р.** Подводные взрывы. – М.: Издательство иностранной литературы, 1950.
22. **Лавров Ю.А.** Аналитические методы расчета взаимодействия жидкости с упругими стенками резервуаров. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела». Санкт-Петербург, ГОУ ВПО «Петербургский государственный университет путей сообщения», 2003. – 330 с.
23. **Линьков А.М.** Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
24. **Логвинович Г.В.** Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев: Наукова думка, 1969. – 208 с.
25. **Лукьянов А.А., Пеньков В.Б.** Моделирование деформирования твердого тела с использованием бессеточных методов. // Вестник СамГУ. Сер. естественнонаучная, 2007, №6(56), с. 62-70.
26. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
27. **Марчук Р.С.** Математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами методом сглаженных частиц. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы». Кемерово, ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», 2012. – 177 с.
28. **Минаков А.В.** Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Красноярск, ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», 2008. – 20 с.
29. **Норкин М.В.** Смешанные задачи удара твердых тел, плавающих на поверхности несжимаемой жидкости. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы». Казань, Казанский государственный университет, 2010. – 32 с.
30. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
31. **Попова А.А.** Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальностям 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела» и 01.02.06 – «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры». Саратов, Саратовский государственный технический университет, 2008. – 174 с.
32. **Рейн Т.С.** Численное моделирование движения вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами обобщенным методом естественных соседей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое

- моделирование, численные методы и комплексы программ». Кемерово, ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», 2008. – 19 с.
33. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
34. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
35. **Седов Л.И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
36. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
37. **Стуколов С.В.** Решение нелинейных волновых задач гидродинамики идеальной жидкости комплексным методом граничных элементов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы». Кемерово, Кемеровский государственный университет, 1999. – 125 с.
38. **Ткаченко О.П.** Внешняя и внутренняя задачи динамики изогнутого трубопровода: построение математических моделей и приближенное решение их уравнений. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела». Хабаровск, Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, 2012. – 314 с.
39. **Филиппенко Г.В.** Колебания мембран и пластин, частично погруженных в жидкость. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела». Санкт-Петербург, Институт машиноведения Российской академии наук, 2000. – 92 с.
40. **Фоменко Н.А.** Математическое моделирование гидродинамических воздействий на конструкции при наличии поверхностных волн в мелководных водоемах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Таганрог, Южный федеральный университет, 2012. – 156 с.
41. **Франк А.М.** Дискретные модели несжимаемой жидкости. – М.: Физматлит, 2001. – 208 с.
42. **Хакимзянов Г.С.** Численное моделирование на адаптивных сетках течений жидкости с поверхностными волнами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Новосибирск, Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2000. – 29 с.
43. **Харлоу Ф.** Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. – М.: Мир, 1967, с. 316-342.
44. **Шайдуров В.В.** Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
45. **Шахверди Г.Г.** Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью. – СПб.: Судостроение, 1993. – 256 с.
46. **Шишаева А.С.** Численное моделирование взаимодействия подвижных и деформируемых элементов конструкции с потоком жидкости или газа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Москва, Москов-

- ский физико-технический институт (государственный университет), 2010. – 143 с.
47. **Щипицын В.Д.** Экспериментальное исследование вибрационной динамики цилиндрического тела в вязкой жидкости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы». Пермь, Пермский государственный педагогический университет, 2011. – 121 с.
 48. **Юдович В.И.** Вертикальный удар по твердому эллипсоиду, полупогруженному в жидкое полупространство. // Деп. в ВИНТИ 19.11.93, №2870-B93.
 49. **Яненко Н.Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука - Сибирское отделение, 1967. - 197 с.
 50. **Aguiar C.E. etc.** Smoothed particle hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions. // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 2001, 27, pp. 75-94.
 51. **Amsden A.A., Harlow F.H.** The SMAC method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows. // Los Alamos Scient. Lab. Rep. NLA-4370, 1970.
 52. **Antoci C., Gallati M., Sibilla S.** Numerical simulation of fluid – structure interaction by SPH. // Computers & Structures, 85, 2007, pp. 879-890.
 53. **Armenio V.** An improved MAC method (SIMAC) for unsteady high-reynolds free surface flows. // Int. J. Numer. Meth. Fl., 1997, 24, pp. 185-214.
 54. **Atluri S.N., Zhu T.** A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics. // Comput. Mech., 1998, 22, pp. 117-127.
 55. **Babuska I., Melenk J.M.** The Partition of Unity Method. // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1997, 40, pp. 727-758.
 56. **Bathe K.J.** Finite Element Procedures, Prentice-Hall, New York, 1996.
 57. **Bathe K.-J., Zhang H.** Finite element developments for general fluid flows with structural interactions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60, 2004, pp. 213-232.
 58. **Bathe K.J., Zhang H., Ji S.** Finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions. // Computers & Structures, 1999, Vol. 72, pp. 1-16.
 59. **Bathe K.J., Zhang H., Wang M.H.** Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions. // Computers & Structures, 1995, Vol. 56, pp. 193-213.
 60. **Bathe K.J., Zhang H., Zhang X.** Some advances in the analysis of fluid flows. // Computers & Structures, 1997, Vol. 64, pp. 909-930.
 61. **Belytschko T., Chen J.S.** Meshfree and Particle Methods. John Wiley and Sons Ltd, 2007. – 384 pages.
 62. **Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.** Element-free Galerkin Methods. // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1994, 37(2), pp. 229-256.
 63. **Bletzinger K.-U., Wüchner R., Kupzok A.** Algorithmic treatment of shells and free form-membranes in FSI. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 53, 2006, pp. 336-355. Springer.
 64. **Borve S., Omang M., Trulsen J.** Regularized Smoothed Particle Hydrodynamics: A New Approach To Simulating Magnetohydrodynamic Shocks. // Astrophys. J., 2001, 561, pp. 82-93.
 65. **Brackbill J.U., Ruppel H.M.** FLIP: A method for adaptively zoned, Particle-in-Cell calculations of fluid flows in two dimensions. // J. Comput. Physics., 1986, 65(2), pp. 314-343.
 66. **Braess H., Wriggers P.** Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element analysis of free surface flow. // Computer Meth-

- ods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 2000, pp. 95-109.
67. **Buruchenko S.K.** Smooth Particle Hydrodynamics: Some Results. // Вычислительные технологии, 2002, т. 7, №1, pp. 41-53.
68. **Cavagna L., Quaranta G., Ghiringhelli G.L., Mantegazza P.** Efficient application of CFD aeroelastic methods using commercial software. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD-2005, Germany, 2005.
69. **Chan R.K.-C., Street R.L.** A computer study of finite-amplitude water waves. // J. Comput. Phys., 1970, 6, pp. 68-94.
70. **Chaplin J.R., Rainey R.C.T., Yemm R.W.** Ringing of a vertical cylinder in waves. // Journal of Fluid Mechanics, 350, 1997, pp. 119-147.
71. **Chen X., Zha G., Hu Z.** Numerical simulation of flow induced vibration based on fully coupled fluid-structural interactions. // 34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Portland, Oregon, 2004, pp. 2004-2240.
72. **Chen X., Zha G.-C., Yang M.-T.** Numerical simulation of 3-D wing flutter with fully coupled fluid – structure interaction. // Computers & Fluids, 36, 2007, pp. 856-867.
73. **Cho J.R., Lee S.Y.** Dynamic analysis of baffled fuel-storage tanks using the ALE finite element method. // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 41, 2003, pp. 185-208.
74. **Chorin A.J.** Numerical solution of the Navier-Stokes equations. // Math. Comput. 1968, 22, pp. 745-762.
75. **Cunningham H.J.** Flutter analysis of flat rectangular panels based on three dimensional supersonic potential flow. // AIAA Journal, 1963, v. 1, №8, pp. 1795-1801.
76. **Del Pin F.** The meshless finite element method applied to a lagrangian particle formulation of fluid flows. // Instituto de Desarrollo tecnologico para la industria quimica (INTEC) universidad nacional del litoral noviembre. 2003. – 157 pages.
77. **Donea J., Giuliani S., Halleux J.P.** An arbitrary Lagrangian – Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 33, 1982, pp. 689-723.
78. **Duarte C.A., Oden J.T.** H-p clouds an h-p meshless method. // Numer. Meth. Part. D. E., 1996, 12, pp. 673-705.
79. **Duggal A.S., Niedzwecki J.M.** Dynamic response of a single flexible cylinder in waves. // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 117, 1995, pp. 99-104.
80. **Dunne T., Rannacher R.** Adaptive finite element approximation of fluid – structure interaction based on an Eulerian variational formulation. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2006, 53, pp. 110-145. Springer.
81. **Engel M., Griebel M.** Flow simulation on moving boundary-fitted grids and application to fluid-structure interaction problems. // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 50, 2006, pp. 437-468.
82. **Farhat C., Geuzaine P., Brown G.** Application of a three-field nonlinear fluid – structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of an F-16 fighter. // Computers & Fluids, 32, 2003, pp. 3-29.
83. **Feng Z., Soulaïmani A.** Nonlinear aeroelasticity computations in transonic flows using tightly coupling algorithms. // 2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, Canada.
84. **Feng Z., Soulaïmani A.** Nonlinear aeroelasticity modeling using a reduced order model based on proper orthogonal decomposition. // 2007 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, USA.
85. **Fonseca N., Guedes Soares C.** Time-domain analysis of large-amplitude verti-

- cal ship motions and wave loads. // *Journal of Ship Research*, 42, 1998, pp. 139-153.
86. **Fonseca N., Guedes Soares C.** Validation of a time-domain strip method to calculate the motions and loads on a fast monohull. // *Applied Ocean Research*, 26, 2004, pp. 256-273.
87. **Fries T.-P., Matthies H.-G.** Classification and Overview of Meshfree Methods. // Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig Brunswick, Germany. 2004. – 64 pages.
88. **Gentry R.A., Martin R.E., Daly B.J.** An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems. // *J. Comput. Phys.*, 1966, 1(1), pp. 87-118.
89. **Gingold R.A., Monaghan J.J.** A Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical star. // *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 1977, 181, pp. 375-389.
90. **Gingold R.A., Monaghan J.J.** Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 181, 1977, p. 375.
91. **Glück M., Breuer M., Durst F., Halfmann A., Rank E.** Computation of fluid structure interaction on lightweight structures. // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 89, 2001, pp. 1351-1368.
92. **Greenhow M., Lin W.M.** Non-linear free surface effects: Experiments and theory. // Rep. No. 83-19, Dept. of Ocean Engineering, MIT, Cambridge, MA. 1983.
93. **Gu Y.T., Liu G.R.** A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. // *Comput. Mech.*, 2002, 28(1), pp. 47-54.
94. **Hansen M.H.** Aeroelastic instability problems for wind turbines. *Wind Energy*, 10, 2007, pp. 551-577.
95. **Harlow F.H., Meixner B.D.** The Particle-And-Force Computing Method for Fluid Dynamics. // Los Alamos National Laboratory Report LA-MS-2567, 1961.
96. **Harlow F.H., Welch E.** Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluids with Free Surface. // *Phys. Fluids*, 1965, 8(12), pp. 2182-2189.
97. **Heil M.** An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluidstructure interaction problems. // *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 2004, vol. 193, pp. 1-23.
98. **Hieber S.E., Koumoutsakos P.** An immersed boundary method for smoothed particle hydrodynamics of self-propelled swimmers. // *J. Comput. Phys.*, 2008, 227, pp. 8636-8654.
99. **Hirt C.W., Nichols B.D.** Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. // *J. Comput. Phys.*, 1981, 39(1), pp. 201-225.
100. **Hron J., Mádlík M.** Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. // *Nonlinear Analysis*, 8, 2007, pp. 1431-1458.
101. **Hu X.Y., Adams N.A.** An incompressible multi-phase SPH method. // *J. Comput. Phys.*, 2007, 227, pp. 264-278.
102. **Hübner B., Walhorn E., Dinkler D.** A monolithic approach to fluid-structure interaction using spacetime finite elements. // *Comput. Methods App. Mech. Engrg.* Elsevier, 2004, vol. 193, pp. 2087-2104.
103. **Idelsohn S.R., Marti J., Limache A., Onate E.** Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid – structure interaction problems via the PFEM. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 2008, pp. 1762-1776.
104. **Idelsohn S.R., Marti J., Souto Iglesias A., Onate E.** Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the PFEM. // *Computational Mechanics*, 43, 2008, pp. 125-132.

105. **Idelsohn S.R., Onate E., Del Pin F., Calvo N.** Fluid – structure interaction using the particle finite element method. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 2006, pp. 2100-2123.
106. **Ishihara D., Yoshimura S.** A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure Poisson equation. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 2005, pp. 167-203.
107. **Jiang F. etc.** Mesoscale SPH modeling of fluid flow in isotropic porous media. // *Comput. Phys. Commun.*, 2007, 176, pp. 471-480.
108. **Jiang F., Sousa A.C.M.** Smoothed Particle Hydrodynamics Modeling of Transverse Flow in Randomly Aligned Fibrous Porous Media. // *Transp Porous Med.*, 2008, 75, pp. 17-33.
109. **Kirk C.L., Etok E.U., Cooper M.T.** Dynamic and static analysis of a marine riser. // *Applied Ocean Research* 1, 1979, pp. 125-135.
110. **Korobkin A.A., Pukhnachov V.V.** Initial stage of water impact. // *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1988, 20, pp. 159-185.
111. **Koshizuka S., Nobe A., Oka Y.** Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method. // *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1998, 26, pp. 751-769.
112. **Koshizuka S., Tamako H., Oka Y.** A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation. // *Computational Fluid Dynamics Journal*, 1995, 4(1), pp. 29-46.
113. **Kuhl E., Hulshoff S., de Borst R.** An arbitrary Lagrangian Eulerian finite element approach for fluid – structure interaction phenomena. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57, 2003, pp. 117-142.
114. **Laguna P.** Smoothed Particle Interpolation. // *Astrophys. J.*, 1995, 439, pp. 814-821.
115. **Lancaster P., Salkauskas K.** Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. // *Math. Comput.*, 1981, 37, pp. 141-158.
116. **Le Cunff C., Biolley F., Fontaine E., Étienne S., Facchinetti M.L.** Vortex-induced vibrations of risers: theoretical, numerical and experimental investigation. // *Oil & Gas Science and Technology*, 57, 2002, pp. 59-69.
117. **Lee C.J.K., Noguchi H., Koshizuka S.** Fluid-shell structure interaction analysis by coupled particle and finite element method. // *Computers and Structures*, 2007, 85, pp. 688-697.
118. **Lee E.-S. etc.** Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method. // *J. Comput. Phys.*, 2008, 227, pp. 8417-8436.
119. **Li S., Liu W.K.** Meshfree Particle Methods. Springer, 2004. – 502 pages.
120. **Libersky L.D. etc.** Recent improvements in SPH modeling of hypervelocity impact. // *Int. J. Impact Eng.*, 1997, 20(6-10), pp. 525-532.
121. **Libersky L.D., Petschek A.G.** Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. // In: Trease H.E., Fritts M.J., Crowley W.P. (Eds.), *Advances in the Free-Lagrange Method*. Springer-Verlag. 1990, 395, pp. 248-257.
122. **Liew K.M.** Complex variable moving least-squares method: a meshless approximation technique. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2007, 70, pp. 46-70.
123. **Liu C., Walkington N.J.** An Eulerian description of fluids containing viscoelastic particles. // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2001, 159, pp. 229-252.
124. **Liu G.R.** Mesh free methods: moving beyond the finite element method. CRC Press, 2003. – 712 pages.

125. **Liu G.R., Gu Y.T.** A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. // *Struct. Eng Mech.*, 2001, 11(2), pp. 221-236.
126. **Liu G.R., Gu Y.T.** A point interpolation method for two-dimensional solids. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2001, 50, pp. 937-951.
127. **Liu G.R., Gu Y.T.** An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. Springer, 2005. – 479 pages.
128. **Liu G.R., Yan L., Wang J.G., Gu Y.T.** Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions. // *Struct. Eng Mech.*, 2002, 14(6), pp. 713-732.
129. **Liu J., Koshizuka S., Oka Y.** A hybrid particle-mesh method for viscous, incompressible, multiphase flows. // *J. Comput. Phys.*, 2005, 202, pp. 65-93.
130. **Liu M.B. etc.** Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion. // *Comput. Mech.*, 2003, 30, pp. 106-118.
131. **Liu M.B., Liu G.R., Lam K.Y.** Adaptive smoothed particle hydrodynamics for high strain hydrodynamics with material strength. // *Shock Waves*, 2006, 15(1), pp. 21-29.
132. **Lucy L.B.** A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. // *Astron. J.*, 1977, 82(12), pp. 1013-1024.
133. **Lv X., Zhao Y., Huang X.Y., Xia G.H., Su X.H.** A matrix-free implicit unstructured multigrid finite volume method for simulating structural dynamics and fluid-structure interaction. // *Journal of Computational Physics*, 225, 2007, pp. 120-144.
134. **Maess M.K., Gaul L.** Simulation of structural deformations of flexible piping systems by acoustic excitation. // *Journal of Pressure Vessel Technology*, 129, 2007, pp. 363-371.
135. **Melenk J.M., Babushka I.** The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. // *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996, 139, pp. 289-314.
136. **Mendes P.A., Branco F.A.** Analysis of fluid – structure interaction by an arbitrary Lagrangian–Eulerian finite element formulation. // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30, 1999, pp. 897-919.
137. **Monaghan J.J. etc.** Gravity currents descending a ramp in a stratified tank. // *J. Fluid. Mech.*, 1999, 379, pp. 39-69.
138. **Monaghan J.J.** Gravity currents and solitary waves // *Physica*, 1996, D. 98, pp. 523-533.
139. **Monaghan J.J.** Simulating free surface flows with SPH. // *Journal of Computational Physics*, 110, 1994, pp. 399-406.
140. **Monaghan J.J., Kocharyan A.** SPH simulation of multi-phase flow. // *Computer Physics Communications*, 87, 1995, pp. 225-235.
141. **Monaghan J.J., Price D.J.** Variational principles for relativistic smoothed particle hydrodynamics. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2001, 328, pp. 381-392.
142. **Monaghan J.J., Thompson M.C., Hourigan K.** Simulation of free surface flows with SPH. // *J. Comput. Phys.*, 1994, 110, pp. 399-406.
143. **Muller M. etc.** Particle-Based Fluid-Fluid Interaction. // *Proceedings of SIGGRAPH'05 Symposium on Computer Animation (SCA 2005)*. Los Angeles, USA. July 31 – August 4, 2005, pp. 237-244.
144. **Nayroles B., Touzot G., Villon P.** Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements. // *Comput. Mech.*, 1992, 10(5), pp. 307-318.
145. **Nelson H.C., Cunningham H.J.** Theoretical investigation of flutter of twodimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. // *NACA*. 1956, Report №1280. – 24 pages.
146. **Nithiarasu P.** An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free sur-

- face flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. // *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2005, 48, pp. 1415-1428.
147. **Osher S., Fedkiw R.** Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. Springer. 2002. – 296 pages.
148. **Osher S., Sethian J.A.** Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. // *J. Comput. Phys.*, 1988, 79(1), pp. 12-49.
149. **Ott F.** A modified SPH approach for fluids with large density differences. // Электронный ресурс. Cornell University Library. 2003. – URL: <http://arxiv.org/PScache/physics/pdf/0303/0303112v3.pdf> (дата обращения: 19.06.2009).
150. **Phillips G.J.** Fragmentation in collapsing magnetic gas clouds Non-uniform initial fields. // *Astronomical Society of Australia, Proceedings (ISSN 00669997)*. 1985. Vol. 6, №2, pp. 205-207.
151. **Pracht W.E.** A numerical method for calculating transient creep flows. // *J. Comput. Phys.*, 1971, 7, pp. 46-60.
152. **Price D.J., Monaghan J.J.** Smoothed Particle Magnetohydrodynamics I. Algorithm and tests in one dimension. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2004. 348(1), pp. 123-138.
153. **Price D.J., Monaghan J.J.** Smoothed Particle Magnetohydrodynamics II. Variational Principles and variable smoothing-length terms. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2004, 348(1), pp. 139-152.
154. **Price D.J., Monaghan J.J.** Smoothed Particle Magnetohydrodynamics III. Multidimensional tests and the $B=0$ constraint. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 364(2), 2005, pp. 384-406.
155. **Rabczuk T., Belytschko T.** A three dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. // *CMAME*. 2007, 196(29-30), pp. 2777-2799.
156. **Rabczuk T., Eibl J.** Simulation of high velocity concrete fragmentation using SPH/MLSPH. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2003, 56, pp. 1421-1444.
157. **Randies P.W., Libersky L.D.** Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications. // *Comput. Method. Appl. M.*, 1996, 139, pp. 375-408.
158. **Ritchie B.W., Thomas P.A.** Multiphase smoothed-particle hydrodynamics. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2001, 323, pp. 743-756.
159. **Schäfer M., Heck M., Yigit S.** An implicit partitioned method for the numerical simulation of fluid – structure interaction. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 53, 2006, pp. 171-194. Springer.
160. **Sethian J.A.** Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science. // Cambridge University Press. 1999. – 404 pages.
161. **Shao S.** Incompressible SPH simulation of water entry of a free-falling object. // *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 59, 2009, pp. 91-115.
162. **Shi X., Lim S.P.** A LBM-DLM/FD method for 3D fluid–structure interactions. // *Journal of Computational Physics*, 226, 2007, pp. 2028-2943.
163. **Sigrist J.-F., Garreau S.** Dynamic analysis of fluid-structure interaction problems with modal methods using pressure-based fluid finite elements. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, 2007, pp. 287-300.
164. **Singh S.P., Sen D.** A comparative linear and nonlinear ship motion study using 3-D time domain methods. // *Ocean Engineering*, 34, 2007, pp. 1863-1881.
165. **Souto Iglesias A., Pérez Rojas L., Zamora Rodríguez R.** Simulation of anti-roll tanks and sloshing type problems with smoothed particle hydrodynamics. //

- Ocean Engineering, 31, 2004, pp. 1169-1192.
166. **Souto Iglesias, A., Delorme, L., Pérez Rojas, L., Abril Pérez S.** Liquid moment amplitude assessment in sloshing type problems with smooth particle hydrodynamics. // *Ocean Engineering*, 33, 2006, pp. 1462-1484.
167. **Sueyoshi M.** Validation of a Numerical Code by a Particle Method for Violent Free-surface Problems // *Int J. Offshore Polar.*, 2006, 16(4), pp. 261-267.
168. **Sukumar N., Moran B., Belytschko T.** The natural element method in solid mechanics текст. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1998, Vol. 43, N. 5, pp. 839-887.
169. **Swegle J.W., Attawat S.W.** On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. // *Comput. Mech.*, 1995, 17, pp. 151-168.
170. **Terentiev A.G.** Nonstationary motion of bodies in a fluid // *Proc. Steclov Inst, of Math.*, 1989, 186: Translated. – 1991, Issue 1, pp. 211-221.
171. **Tezduyar T.E., Sathe S., Keedy R., Stein K.** Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. // *Computer Methods in Applied Mechanic Engineering*, 2006, vol. 195, pp. 2002-2027.
172. **Valizadeh A. etc.** Modeling two-phase flows using SPH method. // *Journal of Applied Sciences*, 2008, 8(21), pp. 3817-3826.
173. **Violeau D., Issa R.** Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview. // *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 2007, 53, pp. 277-304.
174. **Violeau D., Piccon S., Chabard J.-P.** Two attempts of turbulence modelling in smoothed particle hydrodynamics. // *Advances in Fluid Modelling and Turbulence Measurements*, 2002, pp. 339-346.
175. **Wagner R.** Über Stoss-und Gleitvorgänge und der Oberfläche von Flüssigkeiten. *Z. And. Math. Und Mech.*, 1932. Band 12. Heft 4, pp. 193-215.
176. **Walhoern E., Hubner B., Kollce A., Dinkier D.** Fluid-structure coupling with in a monolithic model involving free surface flows. // *Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2003, vol. 2, pp. 1560-1563.
177. **Watanabe I., Ueno M., Sawada H.** Effects of bow flare shape to the wave loads of a container ship. // *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 166, 1999, pp. 259-266.
178. **Xia G., Lin C.-L.** An unstructured finite volume approach for structural dynamics in response to fluid motions. // *Computers & Structures*, 86, 2008, pp. 684-701.
179. **Zhao R., Faltinsen O.** Water entry of two-dimensional bodies. // *J. Fluid Mech.*, 246, 1993, pp. 593-612.
180. **Zhu X.** Application of the CIP Method to Strongly Nonlinear Wave-Body Interaction Problems. // *Doctoral thesis for the degree of doktor ingenior*. 2006.
181. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method: vol.1 The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000. – 348 pages.
182. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method: vol.2 Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000. – 479 pages.
183. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method: vol.3 Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 pages.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Кайтуков Таймураз Батразович, кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: tkaytukov@gmail.com

Афанасьева Ирина Николаевна, старший инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: rena1986@mail.ru.

Мсхалая Жиули Ивлианович, кандидат технических наук, доцент; профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: ipm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Taymuraz B. Kaytukov, PhD, Associate Professor; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: tkaytukov@gmail.com

Irina N. Afanasyeva, senior engineer-analyst of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: rena1986@mail.ru.

Zhiuli I. Mskhalaya, PhD, Professor; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: ipm@mgsu.ru

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ «СООРУЖЕНИЕ – ЖИДКОСТЬ»

*А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева,
В.В. Вершинин, Усманов А.Р., Щербина С.В., Ж.И. Мсхалая*
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлен обзор традиционных и современных методов численного моделирования связанных систем «сооружение – жидкость». Рассматривается метод присоединенной массы, подходы Эйлера и Лагранжа, методы моделирования контактного взаимодействия сооружения с жидкостью.

Ключевые слова: система «сооружение – жидкость», численные методы, математическое моделирование, контактное взаимодействие

ABOUT NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF COUPLED FLUID – STRUCTURE SYSTEMS

*Alexander M. Belostotsky, Pavel A. Akimov, Taymuraz B. Kaytukov,
Irina N. Afanasyeva, Vladislav V. Vershinin, Anton R. Usmanov,
Sergey V. Scherbina, Zhiuli I. Mskhalaya*
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to overview of traditional and modern methods for the numerical simulation of coupled systems “fluid – structure”. Added mass method, Euler and Lagrange approaches, modeling of contact interaction of structures with fluid are under consideration.

Keywords: systems “fluid – structure”, numerical methods, mathematical modelling, fluid – structure interaction

Как известно, представляющие интерес при моделировании жидкости величины, такие как давление, скорость, температура являются функциями положения рассматриваемой материальной точки (жидкой частицы) и времени. Так как существует два возможных выбора переменных, характеризующих положение жидкой частицы, основные уравнения могут иметь две различные формы. В подходе Лагранжа (методе Лагранжа) независимыми переменными являются время и начальные координаты материальной точки. Такой подход целесообразен прежде всего для твердых тел, поскольку здесь и деформации, и соответственно перемещения малы. Жидкость, напротив, обычно испытывает значительную деформацию, и в этой связи знание

начального положения, как правило, не представляет сколь-либо существенного интереса. В такой ситуации в качестве независимых переменных более удобно использовать фактические координаты материальной точки и время – это, по сути, и есть подход Эйлера (метод Эйлера).

В настоящей статье, носящей, прежде всего, научно-методический характер, рассматриваются традиционные и достаточно широко распространенные в практических приложениях аналитические и численные методы расчета связанных систем «сооружение – жидкость» (метод присоединенной массы, подход Эйлера, подход Лагранжа), в частности на сейсмические воздействия [1].

1. МЕТОД ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ

Проблема адекватного моделирования поведения связанных систем «сооружение – жидкость» имеет давнюю и весьма содержательную историю. Первые результаты исследований в этом направлении восходят к трудам Вестергарда (Westergaard Н.М.) 1931 года [46], посвященным двумерной задаче сейсмического расчета системы «плотина – водохранилище» (прикладывалась горизонтальная сейсмическая нагрузка). Следует отметить, что плотина при этом полагалась жесткой а водохранилище полубесконечным с постоянной глубиной. При помощи аналитических методов Вестергард получил распределение давлений в жидкости и на границе контакта плотины с водохранилищем. В частности, им было установлено, что силы взаимодействия пропорциональны сейсмическим ускорениям и, таким образом, могут приближенно моделироваться с использованием массовой плотности, распределенной по параболическому закону по высоте плотины. Такого рода подход, получивший название метода присоединенной массы, позволяет проводить вполне корректное расчетное обоснование связанной системы «сооружение – жидкость», и получаемые при этом результаты хорошо согласуются данными, получаемыми по другим, гораздо более современным и «продвинутым» подходам.

Очевидно, что ввиду наличия присоединенной массы собственные частоты связанной системы «плотина – водохранилище», подверженной сейсмическим воздействиям, существенно ниже собственных частот собственно самой плотины. Вместе с тем, при таком подходе не учитываются процессы затухания, обусловленные излучением, и диссипация энергии, по сути, вызвана демпфированием самой конструкции плотины. Тем не менее, именно метод присоединенной массы, ввиду своей относительной простоты и наглядности, является даже в настоящее время наиболее популярным при моделировании

поведения соответствующих связанных систем [2, 17].

2. ПОДХОД ЭЙЛЕРА

Перемещения, являются, как правило, основными неизвестными при конечноэлементном моделировании строительных конструкций, зданий и сооружений, а к основным неизвестным в жидкости традиционно относят давления. Для расчета связанных систем требуются таким образом особые алгоритмы и специализированное программное обеспечение.

2.1. Контактное взаимодействие сооружения с жидкостью.

При реализации метода конечных элементов на основе подхода Эйлера в качестве основных неизвестных в жидкости принимаются давления, скорости или потенциалы скорости. Распределение гидродинамического давления в жидкости описывается уравнением волнового давления. Полагая жидкость линейно сжимаемой и не учитывая ее вязкость, можем описать безвихревое движение жидкости малой амплитуды следующим двумерным волновым уравнением:

$$\nabla^2 \phi(x, y, t) = \frac{1}{V_p^2} \ddot{\phi}(x, y, t), \quad (2.1)$$

где x, y – пространственные координаты; t – время; ∇^2 – оператор Лапласа (по пространственным координатам); ϕ – потенциал скорости; запись типа $\dot{\phi}$ обозначает первую производную по времени от функции ϕ , $\ddot{\phi}$ – вторую и т.д.; V_p^2 – скорость распространения звука в жидкости.

Имеют место следующие соотношения между функциями давления p , вектор-функцией скорости v и потенциалом скорости ϕ :

$$\bar{v} = \nabla \phi; \quad (2.2)$$

$$p = -\rho\dot{\phi}, \quad (2.3)$$

где ∇ – градиент; ρ – плотность воды.

Распределение потенциала скорости в пределах каждого конечного элемента традиционно выражается через вектор узловых неизвестных $\bar{\phi}$ посредством матрицы функций формы N :

$$\phi = N\bar{\phi}. \quad (2.4)$$

В качестве важного практического примера отметим, что при возникновении сейсмического воздействия на границе плотины и водохранилища соответствующие граничные условия, как правило, имеют вид:

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial n} = -\rho a_n(x, y, t), \quad (2.5)$$

где p – давление, определяемое по формуле (2.3); $a_n(x, y, t)$ – соответствующая составляющая ускорения границы, ориентированная вдоль внутренней нормали к границе. Конечноэлементная аппроксимация уравнения (2.1) имеет вид:

$$G\bar{P} + H\bar{P} = \bar{F}, \quad (2.6)$$

где элементы матриц G , H и вектора \bar{F} определяются соответственно по следующим формулам (с использованием техники известного метода конечных вкладов – суммирование с накоплением [1, 3, 5]):

$$G_{i,j} = \sum G_{i,j}^e; \quad H_{i,j} = \sum H_{i,j}^e; \quad F_i = \sum F_i^e, \quad (2.7)$$

G^e , H^e и \bar{F}^e – соответствующие элементные матрицы и вектор,

$$G_{i,j}^e = \frac{1}{V_p^2} \int_{A_e} N_i N_j dA;$$

$$H_{i,j}^e = \int_{A_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA;$$

$$F_i^e = \int_{S_e} N_i \frac{\partial P}{\partial n} ds; \quad (2.8)$$

A_e – область, занимаемая элементом; S_e – заданная длина границы элемента.

2.2. Учет деформируемого дна водохранилища.

В практических приложениях на границе контакта водохранилища с основанием (дном), как правило, задаются условия осадки. По результатам проведенных исследований [8], в частности, было установлено, что наличие деформируемого грунтового основания (или осадочных отложений) на дне водохранилища оказывает существеннейшее влияние поведение гравитационной плотины при сейсмических воздействиях. Слои слабого грунта ведут себя отнюдь не как полностью отражающие границы (в отличие от скальных грунтов) и возникает взаимодействие между водохранилищем и нижележащим грунтовым основанием.

На дне водохранилища задаются следующие граничные условия, корректность которых была обоснована [27, 31]:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n - q \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.9)$$

где q – коэффициент демпфирования, характеризующий влияние грунта основания,

$$q = \frac{1 - a_b}{c(1 + a_b)}; \quad a_b = \frac{1 - (\rho V_p)/(\rho_r V_r)}{1 + (\rho V_p)/(\rho_r V_r)}; \quad (2.10)$$

ρ_r и V_r – соответственно плотность и скорость продольной волны в материале дна водохранилища.

Учет деформируемого дна водохранилища в рамках рассматриваемой задачи ведет к следующему определяющему конечноэлемент-

ному уравнению (см. также в сопоставлении с (2.1)):

$$G\ddot{\bar{P}} + C\dot{\bar{P}} + H\bar{P} = \bar{F}, \quad (2.11)$$

где C – диагональная матрица демпфирования, элементы которой содержат коэффициент демпфирования q .

2.3. Условия выделения расчетной области.

Для моделирования течения бесконечного массива воды в водохранилище, как правило, выделяется относительно небольшая область массива, примыкающая к плотине (так называемая «ближняя» область) и удаленная от нее (так называемая «дальняя область»), простирающаяся от границы ближней области до бесконечности. Также, разумеется, могут задаваться и иные физические условия, имеющие место на практике. В том случае, если при моделировании сознательно пренебрегают рассмотрением «дальней» области (например, исходя из соображений удобства численной реализации) вводится так называемая фиктивная граница по направлению течения, на которой задаются условия выделения расчетной области (расчетная область при таком подходе очевидным образом существенно сокращается по сравнению с реальной). На практике используются различные способы задания такого рода граничных условий:

– условия излучения Зоммерфельда (Sommerfeld) [27]

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\dot{p}}{V_p}; \quad (2.12)$$

– граничные условия, предложенные Sharan [41]

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\pi}{2h} p - \frac{1}{V_p} \dot{p}; \quad (2.13)$$

– граничные условия в «дальней» области [35]

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{p}{h} Z; \quad (2.14)$$

где

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \exp(-f_k x) \cos(\lambda_k y)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)f_k} \exp(-f_k x) \cos(\lambda_k y)}; \quad (2.15)$$

$$f_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \left(\frac{\omega}{V_p}\right)^2}; \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что все приведенные выше условия задавались, исходя из предположения, что рассматривается сжимаемая жидкость. В случае несжимаемой жидкости значение V_p становится бесконечным и соответствующие граничные условия вырождаются [16, 28].

2.4. Колебания поверхности жидкости.

Колебания поверхности жидкости обусловлено наличием гравитационных поверхностных волн, поведение которых отличается от известных акустических волн. Следует отметить, что сами по себе гравитационные волны являются неконсервативными, и их скорость зависит от длины волны. В работе Taylor R.E. [43] было показано, что для большинства железобетонных плотин на практике условиями колебания поверхности жидкости можно пренебречь. Тем не менее, в случае продолжительного возбуждающего воздействия на рассматриваемую систему необходимо учитывать наличие поверхностных волн посредством задания соответствующих граничных условий на свободной поверхности водохранилища.

Следует отметить, что даже в относительно недалеком прошлом исследователи традиционно пренебрегали наличием поверхностных волн. Соответствующие подходы излагались в работах Bettess P. [40], Ghaemian M. [19, 20], Ghobarah A. [19, 20], Küçükarslan S. [27],

Lee G.C. [45], Maity D. [19], Saini S.S. [40], Tsai C.S. [45], Zienkiewicz O.C. [40]. В таких случаях давление на всей свободной поверхности полагалось нулевым:

$$p = 0. \quad (2.17)$$

Вместе с тем, в последние годы стали появляться работы, в которых принимались во внимания колебания свободной поверхности путем задания специальных граничных условий [22, 33]:

$$\ddot{p} + g \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (2.18)$$

Более того, поверхностные волны достаточно подробно рассматривались в рамках исследований, посвященных проектированию резервуаров с жидкостью и усовершенствованных жидкостных демпферов, испытывающих динамические воздействия. В такого рода работах задавались более «продвинутые» варианты граничных условий, позволяющие учесть реальное влияние поверхностных волн.

2.5. Учет наличия осадочных отложений.

В работе [14] изучалось влияние осадочных отложений на дне водохранилища, причем указанные отложения моделировались поропругим материалом. Было установлено, что при относительно небольшом объеме отложений и слабом насыщении пор водой наблюдается существенное изменение гидродинамических характеристик (параметров).

3. ПОДХОД ЛАГРАНЖА

При использовании подхода Лагранжа поведение жидкости и сооружение описывается в терминах перемещений. В связи с этим условия совместности и равновесия выполняются автоматически во всех узлах на поверхности контакта сооружения с жидкостью. Это обстоятельство предопределяет большую при-

влекательность метода конечных элементов, реализующего подход Лагранжа – соответствующие алгоритмы могут быть сравнительно просто интегрированы в стандартные программные комплексы, предназначенные для расчета строительных конструкций (здесь не требуется использовать сложные уравнения на контактной поверхности).

3.1. Контактное взаимодействие сооружения с жидкостью.

В рамках конечноэлементной реализации подхода Лагранжа уравнение движения жидкости выводится на основе энергетических принципов (в отличие от реализации на основе подхода Эйлера, когда определяющие уравнения решаются на сеточной области). В традиционном подходе Лагранжа жидкость полагается линейно упругой, невязкой и безвихревой. При моделировании поведения жидкости в трехмерной постановке уравнение, определяющее напряженно-деформированное состояние, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} p \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

или, что тоже самое, в более компактном представлении

$$\bar{p} = C_f \bar{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

где $\bar{p} = \begin{bmatrix} p \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix};$

$$C_f = \begin{bmatrix} C_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4,4} \end{bmatrix}; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_v \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

p – давление; $C_{1,1}$ – модуль объемной деформации воды ($C_{1,1} = K$); ε_V – объемная деформация; p_x , p_y и p_z – поворотные давления; $C_{2,2}$, $C_{3,3}$ и $C_{4,4}$ – характеристики (параметры) связей; w_x , w_y и w_z – вращения вокруг осей x , y и z соответственно.

Условие безвихревого поведения жидкости в общем случае не проверяется, а изначально задается. В противном случае в решении могут присутствовать паразитические формы, и по результатам спектрального анализа могут быть выявлены формы, соответствующие нулевым частотам. Для наложения указанного условия следует принять значения параметров $C_{2,2}$, $C_{3,3}$ и $C_{4,4}$ в 10-1000 раз больше, чем значение $C_{1,1}$ [38].

С использованием техники метода конечных элементов можем записать следующее выражение для энергии деформации массива жидкости:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \bar{U}_f^T K_f \bar{U}_f, \quad (3.4)$$

где \bar{U}_f – вектор узловых перемещений; K_f – соответствующая матрица жесткости, традиционно формируемая с использованием локальных матриц жесткости элементов на основании метода конечных вкладов (суммирование с накоплением);

$$K_f = \sum K_f^e. \quad (3.5)$$

Локальная матрица жесткости каждого конечного элемента K_f^e определяется по формуле

$$K_f^e = \int_{V_e} (B_f^e)^T C_f B_f^e dV_e, \quad (3.6)$$

где B_f^e – матрица, задающая условия связи деформаций с перемещениями на элементе.

Заметим, что важнейшим специфическим свойством жидкости является возможность перемещаться без изменения объема. Такого рода перемещение известно как поверхностные волны, в которых перемещение осуществляется в вертикальном направлении. Увеличение потенциальной энергии системы (жидкости), обусловленное движением свободной поверхности может быть определено выражением

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \bar{U}_{sf}^T S_f \bar{U}_{sf}, \quad (3.7)$$

где

$$S_f = \sum S_f^e; \quad (3.8)$$

$$S_f^e = \rho g \int_{A_e} \bar{h}_s^T \bar{h}_s dA_e; \quad (3.9)$$

\bar{h}_s – вектор, составленный из интерполяционных функций для элемента свободной поверхности; \bar{U}_{sf} – вектор вертикальных узловых перемещений.

Окончательно имеем следующую формулу для кинетической энергии системы (жидкости):

$$T = \frac{1}{2} \bar{U}_f^T M_f \bar{U}_f, \quad (3.10)$$

где

$$M_f = \sum M_f^e; \quad (3.11)$$

$$M_f^e = \rho \int_{V_e} H^T H dV_e; \quad (3.12)$$

H – матрица составленная из интерполяционных функций для элемента жидкости; \bar{U}_f – вектор узловых скоростей жидкости.

Объединяя (3.4), (3.7) и (3.10) на основе уравнения Лагранжа будем иметь [4, 15]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi_s}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.13)$$

откуда получаем систему уравнений вида

$$M_f \ddot{\bar{U}}_f + K_f^* \bar{U}_f = \bar{R}_f, \quad (3.14)$$

где K_f^* – матрица жесткости системы (жидкость), учитывающая в том числе и жесткость свободной поверхности; \bar{U}_f – вектор узловых ускорений; \bar{R}_f – вектор узловых нагрузок на систему (жидкость), зависящий от времени; q_i – обобщенная координата; Q_i – обобщенная нагрузка; Π_i – полная потенциальная энергия системы,

$$\Pi_i = \Pi_e + \Pi_s. \quad (3.15)$$

На поверхности контакта плотины с водохранилищем (границе) задаются условия непрерывности перемещений, т.е. соответствующие узловые перемещения водохранилища приравниваются к соответствующим узловым перемещениям плотины:

$$\bar{U}_n^- = \bar{U}_n^+, \quad (3.16)$$

где \bar{U}_n – нормальные к поверхности контакта составляющие перемещений.

В конечном итоге переходим к связанным матричным дифференциальным уравнениям, описывающих перемещение плотины и удерживаемой воды.

3.2. Условия выделения расчетной области.

В рамках постановки задачи в перемещениях, очевидно, не можем использовать условия выделения расчетной области, приведенные ранее для подхода Эйлера. В случае акустического характера возникающих волн уравнение Зоммерфельда вполне корректно описывает задачу об исходящих волнах. Вместе с тем, задачи динамики жидкостей при учете свободной поверхности, характеризуются одновременным наличием акустических и гравитационных (поверхностных) волн. Акустические волны отличает то, что их скорость распространения не зависит от соответствующей частоты, тогда как поверхностные волны, напротив, являются диспергирующими, и

их скорость зависит от частоты и глубиной воды. Скорость гравитационной волны определяется выражением

$$V_s = \lambda_s f, \quad (3.17)$$

$$\text{где } f = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda_s} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda_s}\right)}; \quad (3.18)$$

λ_s – длина поверхностной волны; h – глубина водохранилища.

В самом деле, очевидно, что скорость поверхностной волны зависит от длины волны и, следовательно, от частоты. Таким образом условия Зоммерфельда являются некорректными для задач, в которых рассматривается распространение акустических и поверхностных волн.

Первоначально вполне адекватные неотражающие граничные условия были предложены в работе Higdon R.L. [24]. Указанные граничные условия могут быть использованы как для постановки в давлениях, так и в перемещениях. Условия Зоммерфельда с определенных позиций могут рассматриваться как первое приближение к таким неотражающим граничным условиям.

Полагая, что ось x ориентирована по нормали к границе расчетной области (границе, на которой задаются условия выделения расчетной области) для произвольного поля переменных $\phi(x, y)$ (давления, перемещения и т.д.) можем определить поглощающую границу порядка J согласно Higdon R.L. следующим образом:

$$\left[\prod_{j=1}^J (\partial_t + c_j \partial x) \right] \phi(x, y) = 0. \quad (3.19)$$

Граничные условия Higdon R.L. согласно (3.19) налагаются на компоненты перемещений u_x и u_y вдоль осей x и y соответственно. Наивысшая (абсолютная) точность будет достигнута при условии, что набор параметров c_j , $j = 1, 2, \dots, J$ содержит все возможные

скорости волн для рассматриваемой задачи [38].

4. ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СООРУЖЕНИЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Существующие методы сейсмического расчета плотин весьма и весьма разнообразны, начиная от простейшего псевдостатического метода, предложенного Вестергардом в далеком 1931 году и заканчивая гораздо более «продвинутыми» численными методами, к которым, в частности, относятся метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), гибридные МКЭ-МГЭ подходы и разного рода полуаналитические методы. Разумеется, существует также и целый класс подходов, занимающих в указанной иерархии промежуточное положение, между двумя перечисленными, по сути, полярными группами методов. Здесь, прежде всего, имеется в виду метод, предложенный в статье Fenves G.L. и Chopra A.K. [18] и являющийся модификацией (усовершенствованием) уже упомянутого выше псевдостатического метода (так называемый «метод эквивалентной горизонтальной нагрузки»), а также методика, разработанная организацией US Corps of Engineers в 2007 году.

В методе, предложенном Вестергардом, полагается, что гидродинамическое воздействие на жесткую плотину эквивалентно заданию инерционных сил, возникающих вследствие распределения присоединенной к плотине массы. В модифицированном псевдостатическом методе принимается во внимание влияние взаимодействия с основанием, коль скоро оно рассматривается как нежесткое. В соответствии с рекомендациями, изложенными в методике организации US Corps of Engineers, при развитии растягивающих напряжений в основании плотины, следует провести конечноэлементное моделирование с целью оценить как влияет трещинообразование в этой

зоне на период собственных колебаний. Во всех случаях, когда вышеперечисленные допущения не выполняются, следует обратиться к передовым методам численного моделирования всей связанной системы «сооружение – основание – водохранилище».

Метод присоединенной массы является, по сути, основополагающим при сейсмических расчетах бетонных плотин. Несмотря на видимую простоту, он довольно часто используется на практике, особенно в ситуациях, когда применение более совершенных методов численного моделирования связанной системы «плотина – водохранилище» сопряжено со значительным объемом вычислительной работы. Следует подчеркнуть, что подобные ситуации широко распространены в соответствующих приложениях, тем более, когда учитывается нелинейный характер соответствующего контактного взаимодействия [10]. Характерными примерами в этом отношении являются нетривиальные с позиции численной аппроксимации процессы проскальзывания и поднятия основания. Гидродинамические воздействия со стороны жидкости при этом могут описываться с использованием присоединенных масс. Специализированная «продвинутая» модель, использующая аппарат теории пластичности, была предложена в работе Lee J. и Fenves G.L. [29]. Непосредственная аппроксимация области, занимаемой жидкостью, чревата огромными вычислительными затратами, а потому здесь также нашел применение метод присоединенной массы. Влияние взаимодействия секций бетонирования плотины на общую динамическую реакцию бетонной гравитационной плотины исследовалось в статье Ghobarah A., El-Nady A., Aziz T. [21], где соответствующие секции моделировались балочными элементами, соединенными связями, работающими на срез. Гидродинамические воздействия задавались в рамках метода присоединенной массы. Таким образом, очевидно, что исключительно сложно переоценить значение метода присоединенной массы, особенно в части его приложения для расчета плотин

сложной формы, плотин, возведенных из отдельных секций бетонирования, а также для решения задач, в которых контактное взаимодействие плотины с основанием характеризуется существенными нелинейностями. В любом случае, удастся достичь значительного снижения объема вычислительной работы и реализовать редукцию соответствующих задач.

В работе Chen B.F. [13] метод конечных разностей и метод конечных элементов (использовались изопараметрические четырехузловые четырехугольные конечные элементы) были применены при моделировании плотины Пайн-Флэт (Pine Flat Dam) для определения нелинейного гидродинамического давления на поверхность плотины и соответствующей динамической реакции сооружения. Следует отметить, что проводились различные варианты расчетов – с учетом и без учета поверхностных волн, с учетом и без учета конвективных ускорений и т.д. Четыре характерных записи землетрясений использовались в качестве соответствующих расчетных исходных данных. Полученные при этом результаты включают в себя горизонтальные перемещения плотины как жесткого целого, горизонтальные перемещения нежесткого сооружения и перемещения нежесткого сооружения при одновременном действии горизонтальных и вертикальных движений земной поверхности. Коэффициент гидродинамического воздействия на жесткую поверхность плотины может быть вычислен по формуле

$$C_F = 0.525 \cdot a_h + a_v, \quad (4.1)$$

где a_h и a_v – соответственно отношения горизонтальной и вертикальной составляющих ускорения земли к ускорению, обусловленному силой тяжести.

Следует отметить, что автор [13] также изучал зависимости между коэффициентом гидродинамического воздействия, подъемом поверхности воды и временем движения земли. В частности, были установлены следующие факты:

– гибкость плотины может существенно увеличивать коэффициент гидродинамического воздействия, особенно в тех случаях, когда горизонтальная и вертикальная составляющие ускорения земли возбуждаются одновременно;

– вибрация поверхности плотины и вертикальная составляющая ускорения земли не оказывают никакого влияния ни на величину, ни на форму профиля подъема поверхности воды у поверхности плотины;

– в задачах динамического расчета бетонной гравитационной плотины можно не учитывать поверхностные волны и нелинейные конвективные ускорения жидкости;

– исключительно актуальной задачей является разработка методов определения (оценки) уровня подъема поверхности воды.

В 1997 году в работе Guan F. и Mooge I.D. [23] был предложен гибридный численный метод для решения задач расчета плотины из грунтовых материалов на многослойном основании. Следует отметить, что авторами была использована новая оригинальная техника определения присоединенных масс (зависящих от частоты) и нагрузок, обусловленных влиянием водохранилища на наклонную (навстречу потоку) поверхность плотины. Для задачи расчета системы «сооружение – водохранилище» на основе метода взвешенных невязок Галеркина были построены функция Грина и матрица функций Грина (матрица влияния). Подчеркнем, что предложенная техника не предполагает какой-либо аппроксимации жидкости, располагающейся перед поверхностью плотины. В ходе моделирования контактного взаимодействия сооружения с основанием сопротивление многослойного основания было вычислено с использованием так называемых матриц послойного перехода, а сама плотина аппроксимировалась ансамблем конечных элементов. Специальная функция контактного взаимодействия, построенная с использованием интерполяционных полиномов, обеспечивает выполнение условий равновесия во всех внутренних узлах и условий совместности

перемещений на контактных поверхностях. В упомянутой статье были представлены интересные численные результаты, иллюстрирующие моделирование связанных систем «сооружение – водохранилище» и «сооружение – основание» (в частности, применительно к плотине La Villita, расположенной в Мексике, при задании акселерограммы землетрясения S90W El Centro (18 мая 1940 года)). При проведении расчетов коэффициенты затухания для жидкости и твердого тела принимались равными 5%.

В работе Tiliouine B. и Seghir A. [45] были рассмотрены четыре различных конечноэлементных модели системы «плотина – водохранилище» (стандартная жесткая плотина и несжимаемая модель жидкости; нежесткая плотина и несжимаемая модель жидкости; жесткая плотина и сжимаемая модель жидкости; нежесткая плотина и сжимаемая модель жидкости), адаптированных для прямого интегрирования по времени в рамках сейсмического расчета бетонной гравитационной плотины с учетом динамического контактного взаимодействия. Прежде всего, отметим, что дискретная система конечноэлементных уравнений, вытекающая из вариационной постановки метода Галеркина (в давлениях и перемещениях), разумеется, была получена для каждой модели. Далее были получены распределения коэффициента динамического давления на поверхность (ориентированную навстречу потоку) бетонной гравитационной плотины и значения гидродинамических давлений в основании плотины в различные моменты времени. Материал плотины и жидкость полагались линейно упругими. Рассматривалось двумерное движение системы «плотина – водохранилище» с малыми амплитудами. Жидкость считалась невязкой, а соответствующий размер водохранилища бесконечным (считая от поверхности плотины). Вместе с тем, учитывались эффекты, обусловленные наличием поверхностных волн, сжимаемостью жидкости, нежесткостью плотины, затуханием излучения на поверхности водохранилища, конструктивными

особенностями плотины и т.д. В качестве основных узловых неизвестных для жидкости (водохранилище) использовались давления, тогда как для твердого тела (плотина) – перемещения. Области, которые занимают водохранилище и плотина, таким образом, моделировались отдельно, а на их контактной поверхности возникали связывающие усилия, обусловленные гидродинамическим давлением жидкости на поверхность плотины и ускорениями сооружения, оказывающими обратное влияние на жидкость.

В работе Houqun C., Xiuli D. и Shunzai H. [25] изучалось поведение высокой арочной плотины при сейсмических воздействиях с учетом динамического взаимодействия плотины с основанием. В рамках проведенных авторами исследований исследуется распространение волны в неоднородной и локально нелинейной среде на основе явной схемы метода конечных элементов с пропускающими границами. Рассматриваемая в упомянутой работе плотина Xiawan располагается в верховье реки Lanchuang провинции Yunnan. Это параболическая плотина двоякой кривизны высотой 292 метра. Проект плотины рассчитан на 9-бальную сейсмичность с максимально допустимым горизонтальным ускорением равным $0.308 \cdot g$ (g – коэффициент свободного падения) и максимально допустимым вертикальным ускорением, составляющим $2/3$ от максимально допустимого горизонтального. Наиболее опасная зона сооружения располагалась на расстоянии 76 метров от пяты плотины, для исследования этой зоны была применена нелинейная модель Друкера-Прагера. Использовалась автоматически сгенерированная программой сетка из 1364 трехмерных восьмиузловых конечных элементов. В целях упрощения взаимодействие плотины с водохранилищем моделировалось в рамках метода присоединенной массы, сжимаемость жидкости в водохранилище пренебрегли. При проведении расчетов в качестве исходных данных (поперечные и продольные сейсмические волны) использовалась акселерограмма землетрясения и авершока в ки-

тайском городе Таншане (Tangshan) провинции Хэбэй, произошедшего 28 июля 1976 года с амплитудой, масштабированной до значения составляющего половину от соответствующей проектной величины для рассматриваемого сооружения. В целях проведения сопоставлений исследовались три различных варианта задания исходных данных: задается одна компонента по направлению потока, задается одна компонента перпендикулярная потоку, все три компонента задаются одновременно. В целях адекватного анализа и учета влияния указанной выше опасной зоны плотины рассматривались отдельно три расчетных случая: модель, не содержащая опасной зоны; модель, содержащая опасную зону с линейными свойствами; модель, содержащая опасную зону с нелинейными свойствами.

Nasserzare J., Lei Y. и Zeigler F. в 2003 году разработали алгоритм определения частот и форм собственных и вынужденных колебаний в вакууме гравитационной арочной плотины в условиях частично заполненного водохранилища [37]. Для учета гидродинамического давления был предложен весьма эффективный алгоритм. Его верификация осуществлялась посредством условной замены плотины некоторой достаточно простой конструкцией с известными в вакууме свойствами. Далее в качестве подпорной стены плотины была рассмотрена тонкая прямоугольная пластина, шарнирно опертая по трем сторонам с одним свободным краем. Для ее моделирования использовалась техника метода подконструкций, аппроксимация водохранилища производилась в рамках трехмерной линейной постановки, жидкость полагалась невязкой. Расчетный резонанс для изученных примеров сопоставлялся с соответствующими данными практических изысканий. Отдельно рассматривался эффект поглощения волны на дне и берегу водохранилища. Гидродинамическое давление водохранилища вычислялось с привлечением метода граничных элементов. Результаты решения обратной задачи были

сопоставлены с соответствующими точными аналитическими реакциями пластины.

В статье Akkose M., Dumanoglu A.A. и Tuna M.E. [7] исследовались контактные взаимодействия в рамках сейсмического расчета систем «плотина – водный массив», «плотина – скальное основание», «плотина – водный массив – скальное основание» в линейной и нелинейной постановках. При определении реакции плотины на гидродинамические воздействия со стороны водохранилища водный массив моделировался ансамблем специализированных восьмиузловых конечных элементов, реализующих подход Лагранжа. Оригинальный конечный элемент, учитывающий сжимаемость и колебания поверхности жидкости, был интегрирован в программно-алгоритмический комплекс промышленного типа NONSAP. Численное решение уравнений движения осуществлялось методом шагового интегрирования (step-by-step метод). Движение земли задавалось акселерограммой землетрясения в Эль-Центро (El-Centro; США, N – S, 1940 год). Реакция плотины характеризовалась амплитудными значениями перемещений и огибающими максимальных растягивающих напряжений. Анализ результатов исследований позволил сформулировать следующие выводы:

– гидродинамические воздействия оказывают существенное влияние на линейную и нелинейную реакции плотины при сейсмическом движении основания;

– метод шагового интегрирования может быть весьма эффективным как при линейных, так и при нелинейных сейсмических расчетах гравитационной арочной плотины, причем водный массив может быть корректно аппроксимирован трехмерными восьмиузловыми конечными элементами, реализующими подход Лагранжа;

– одновременный учет гидродинамических воздействий и гибкости основания существенным образом увеличивает линейную и нелинейную реакции плотины при сейсмических расчетах;

- характер контактного взаимодействия плотины и водного массива в рамках линейной и нелинейной постановок практически одинаков для жесткого и гибкого (нежесткого) оснований;
- гидродинамические воздействия оказывают влияние на распределение максимальных растягивающих напряжений на напорной и низовой гранях плотины, причем это указанное влияние одинаково для жесткого и гибкого оснований;
- контактное взаимодействие плотины с водным массивом оказывает более сильное воздействие на реакцию плотины с гибким основанием, чем на реакцию плотины с жестким основанием, причем такая ситуация имеет место как в линейной, так и в нелинейной постановках;
- в значительной части напорной и низовой граней плотины имеются чрезмерные растягивающие напряжения, обусловленные гидродинамическими воздействиями со стороны водного массива, причем такая ситуация имеет место как в линейной, так и в нелинейной постановках.

В работе Anghileri M., Castelletti L.M.L. и Tirrelli M. [9] были представлены разработанные авторами численные модели для аппроксимации колебания поверхности жидкости в резервуаре во время сейсмического воздействия. Верификация (валидация) указанных моделей производилась посредством сопоставлений соответствующих результатов с данными экспериментов. Следует отметить, что стандартный способ разработки численных моделей состоит именно в анализе результатов экспериментальных исследований. При отсутствии указанных результатов необходимо провести целый ряд тестов. В связи с этим в 1998 году в достаточно сжатые сроки на кафедре аэрокосмического проектирования Политехнического университета Милана (Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale (DIA) of the Politecnico di Milano) была проведена целевая программа тестов, призванная оценить влияние наполненного резервуара и основания. По результатам исследований было

заявлено, что для моделирования сооружения наиболее целесообразно использовать метод конечных элементов, тогда как для водного массива – метод сглаженных частиц. Вместе с тем, очевидно, что при моделировании связанной системы «сооружение – жидкость» можно использовать постановку Эйлера и постановку Лагранжа – Эйлера (это наиболее целесообразно при условии, что учет воздуха (при его наличии) влечет за собой значительное изменение результатов).

В публикации Vouaapani N., Paultre P. и Proulx J. [12] читателям были представлены некоторые результаты, касающиеся динамического поведения бетонных плотин, взаимодействующих с покрытым льдом водохранилищем. Специализированный метод решения соответствующих задач был запрограммирован и интегрирован в конечноэлементный программный комплекс, предназначенный для сейсмического расчета плотин на основе метода подконструкций. В качестве модельного объекта для численных исследований была выбрана гравитационная плотина Outardes-3. В рамках многопараметрического анализа систем «отдельная плотина», «лед – плотина», «лед – плотина – водохранилище» было проанализировано влияние различных факторов, оказывающих влияние на динамическое поведение системы «лед – плотина – водохранилище». В качестве соответствующих параметров, в частности, были рассмотрены амплитудно-частотная характеристика ускорений для ускорений в гребне плотины, амплитудно-частотная характеристика гидродинамических нагрузок в водохранилище, распределение гидродинамических давлений по напорной грани плотины. Следует отметить, что и сама плотина, и ледовое покрытие моделировались четырехугольными изопараметрическими конечными элементами, при этом для корректного учета работы на сдвиг также учитывались несовместные формы перемещений. Несогласованность граничных условий на поверхности контакта льда с водохранилищем связана в том числе и с возможным демпфированием, характеризую-

щемся параметром вязкого демпфирования β . Полагается, что водохранилище и ледовый покров простираются бесконечно далеко от плотины. Вместе с тем, очевидно, что при построении конечноэлементной модели для такой задачи, требуется задать некоторые граничные условия в соответствующих удаленных на значительное расстояние от плотинах точках. В идеале указанное граничное условие должно учитывать трение льда о границу водохранилища и допускать диссипацию энергии (посредством задания подходящей импедансной функции). Этого же эффекта с достаточной точностью можно достичь, ограничивая размеры рассматриваемой области ледяного покрова (задается расстояние от поверхности плотины) и подбирая корректные излучающие границы. В целом, затронутые вопросы являются весьма непростыми, в силу сложного динамического поведения ледового покрова и его взаимодействия с водохранилищем и острой недостатка данных о соответствующих натуральных наблюдениях. Для упрощения полагается, что ледяной покров закреплен в реальных условиях эксплуатации на достаточно большом удалении от поверхности плотины (по причине весьма небольших деформаций, возникающих в ледовом покрове). В целях учета диссипации энергии в системе коэффициент гистерезисного демпфирования принимают равным 3.0%, а коэффициент вязкостного демпфирования – 1.5%. Гидродинамическое давление внутри затагнутого льдом водохранилища определялось как сумма бесконечного числа соответствующих гармоник. Указанная сумма, разумеется, должна быть принудительно ограничена некоторым конечным количеством учитываемых членов разложения N_w . Заметим, что с одной стороны величина N_w должна быть достаточно малой, чтобы позволить сократить время вычислений, а с другой – достаточно большой, чтобы учесть все возможные формы колебаний, существенно влияющие на соответствующие динамические характеристики в рассматриваемом частот-

ном диапазоне. По результатам проведенных исследований было убедительно доказано, что ледяной покров оказывает самое существенное влияние на динамическое поведение всей системы «лед – плотина – водохранилище». В частности, при наличии ледяного покрова меняется характер амплитудно-частотных характеристик, появляются дополнительные формы резонансных колебаний с менее ярко выраженными экстремумами, при этом соответствующие амплитуды, как правило, меньше тех, которые имеют место для плотин при отсутствии ледяного покрова. Следует отметить, что именно последний является причиной гидродинамического давления, увеличивающегося в окрестности контактной поверхности льда с водохранилищем и, напротив, уменьшающегося вблизи дна водохранилища.

В статье Maity D. [39] представлен алгоритм расчета связанной системы «плотина – водохранилище».

Указанная система рассматривалась как объединение двух подсистем – водохранилище и упругая плотина. Вода полагалась невязкой и сжимаемой, использовалась постановка задачи в давлениях. При проведении расчетов учитывалось конструктивное демпфирование материала плотины и радиационное демпфирование воды. Решение для связанной системы было получено посредством раздельного решения двух вышеперечисленных подсистем с итерационным процессом, аппроксимирующем контактное их взаимодействие. Недивергирующее давление и поле перемещений были определены одновременно за конечное число итераций. В целом в статье предложен экономичный и вычислительно устойчивый метод, позволяющий проводить практически важные расчеты систем произвольной геометрической формы. По результатам многофакторных параметрических исследований было установлено определяющее значение высоты воды в резервуаре и механических характеристик материала плотины. В работе Bayraktar A., Hancer Ebru и Akkose Mehmet [38] изучалось влияние характери-

стик скального основания на стохастические динамические характеристики системы «плотина – водохранилище – основание» под действием сейсмических нагрузок в рамках подхода Лагранжа. В качестве характерного практически важного объекта рассматривалась плотина Сарыйер (Sarıyer) на реке Сакарья (Sakarya), расположенной на расстоянии в 120 километров северо-западнее турецкого города Анкара. В качестве исходных использовались данные о сейсмическом воздействии на плотину Росоита в Калифорнии во время землетрясения Сан-Фернандо в 1971 году. В рамках проведенных исследований использовались различные модели задания сейсмического воздействия: стандартная модель с жестким основанием, модель с безынерционным основанием и так называемая модель *deconvolved-base-rock* [8] (в данном случае использовалась специализированное программное обеспечение SHAKE91, основанное на одномерной волновой теории). Жидкость полагалась невязкой, обеспечивалась непрерывность нормальных компонент перемещений точек на поверхностях контакта «плотина – водохранилище» и «плотина – основание». Последнее достигалось посредством использования коротких и практически жестких в продольном направлении ферменных элементов по нормали к указанным поверхностям. Ввиду значительной протяженности водохранилища, необходимо было ограничить расчетную область на достаточно удаленном от плотины расстоянии. Так, для адекватного моделирования гидродинамического воздействия на плотину длина расчетной области должна быть в три раза больше глубины водохранилища. Заметим, что узлы, расположенные на удаленной от плотины границе расчетной области, могут свободно перемещаться только лишь в вертикальном направлении. Глубина расположения основания принималась равной глубине водохранилища. Задача решалась в условиях плоской деформации, материал плотины полагался линейно упругим, однородным и изотропным. Коэффициент демпфирования всей си-

стемы принимался равным 5%. При проведении модального анализа в рамках подхода Лагранжа приходится иметь дело с колебаниями поверхности жидкости, изменением объема и вращательными частотами и корректный выбор форм имеет таким образом определяющее значение. Следует отметить, что количество форм, связанных с колебаниями поверхности жидкости, индивидуальное для каждой конечноэлементной модели водохранилища, становится весьма значительным даже для начального частотного диапазона. Вместе с тем, эти формы, по сути, не оказывают сколь-либо существенного влияния на поведение плотины. Авторы принимали во внимание первые 30 форм. По результатам проведенных исследований были сделаны следующие выводы:

- максимальные значения перемещений, напряжений и гидродинамических давлений полученные при использовании модели *deconvolved-base-rock*, меньше тех, что получены в рамках остальных моделей;
- при использовании стандартной модели с жестким основанием значения интересующих величин получаются существенно завышенными;
- представляется, что стандартную модель с жестким основанием нецелесообразно (в силу некорректности) использовать для определения динамических характеристик системы «плотина – водохранилище – основание» под действием случайной нагрузки;
- несмотря на то, что модель с безынерционным основанием не позволяет получить столь же точные результаты как при использовании модели *deconvolved-base-rock*, ее, тем не менее, можно использовать в расчетной практике.

В статье Kianoush M.R., Mirzabozorg H. и Ghaemian M. [26] был предложен новый метод сейсмического расчета резервуаров в трехмерной постановке, при этом на рассматриваемом временном интервале принимаются во внимание импульсные и конвективные составляющие и соответствующее демпфирование. Было проведено целевое изучение по-

ведения бетонного прямоугольного резервуара под действием вертикальных и горизонтальных смещений основания, моделирующих, с учетом масштабирования, известное землетрясение в Эль-Центро (El-Centro) 1940 года. Рассматривалась задача расчета резервуара в двумерной постановке. Полученные результаты были сопоставлены данными натурных наблюдений и конечноэлементного расчета в рамках модели с сосредоточенными массами. Результаты конечноэлементного расчета с присоединенными массами и жесткими стенками хорошо согласовывались с данными натурных наблюдений и сведениями, накопленными в практике расчетов (согласно которым получаем несколько завышенную реакцию резервуара по сравнению с определенной по предложенному методу). Вертикальное возбуждение приводит к значительной обратной реакции резервуара, однако сочетания горизонтальных и вертикальных возбуждений влечет за собой общее снижение реакции сооружения в рассматриваемой системе. В рамках двумерной постановки моделировалось поведение полосы резервуара толщиной в 1 метр. Использовалось допущение о том, что резервуар стоит на жестком основании, контактное взаимодействие «резервуар – основание» не рассматривалось. Авторы полагали, что резервуар достаточно прочно прикреплен к основанию, создающее подъемную силу давление во внимание не принималось. В целом, метод предложенный в [26] является корректным и эффективным и может быть обосновано рекомендован к практическому применению. В публикации Livaoglu R. и Dogangun A. [32] был приведен обзор упрощенных подходов к сейсмическому расчету водонапорных резервуаров и применению для расчетного обоснования соответствующих связанных систем «сооружение – жидкость – основание» программных комплексов общего назначения. В рамках метода конечных элементов были изучены 10 моделей, описано применение метода присоединенных масс для моделирования контактного взаимодействия сооруже-

ния с жидкостью, а также метод безынерционного основания и метод подконструкций для моделирования контактного взаимодействия сооружения с основанием. Применимость упомянутых 10 моделей, используемых при сейсмических расчетах, была наглядно продемонстрирована посредством моделирования поведения водонапорных баков на многослойном основании. По результатам исследований было установлено, что модели с одной сосредоточенной массой дают несколько заниженную оценку величины сдвигового напряжения и опрокидывающего момента в основании сооружения.

В статье Akkose M., Bayraktar A. и Dumanoglu A.A. [7] исследовалось влияние уровня воды в водохранилище на нелинейное динамическое поведение арочных плотин. Нелинейное поведение бетона плотины описывалось с использованием идеализированной упругопластической модели Друкера-Прагера. Для изучения эффекта демпфирования, возникающего вследствие распространения волн давления в водохранилище, вместо задания условия неотражающей границы, расчетная длина рассматриваемого водохранилища была принята равной его утроенной глубине. Скальное основание полагалось упруго линейным и аппроксимировалось (на определенной области, примыкающей к плотине) с помощью восьмиузловых трехмерных конечных элементов. В целях недопущения отражения расходящихся сейсмических элементы считались безмассовыми. Дискретизация скального основания была проведена с помощью 164 трехмерных конечных элементов сплошной среды. Жидкость полагалась линейно упругой, невязкой и безвихревой. Модуль объемной деформации и массовая плотность жидкости были приняты равными $0.207 \cdot 10^7$ кН/см² и 1000 кг/м³ соответственно. Вода в водохранилище была аппроксимирована 512 восьмиузловыми «жидкостными» конечными элементами. Параметры ограничения завихрения жидкости по каждой оси декартовой системы координат принимались равными увеличенному в 1000 раз модулю объемной деформа-

ции. Здесь следует заметить, что «оптимальные» значения указанных параметров, вообще говоря, различны для различных задач и материалов. С одной стороны значение параметра должно быть достаточно большим, чтобы не допустить завихрения жидкости, а с другой – достаточно малым, чтобы воспрепятствовать плохой обусловленности (вычислительной сингулярности) формируемой матрицы жесткости. Исходя из этих соображений, значение параметра, как правило, принимается равным увеличенному в 100 раз модулю объемной деформации для двумерных задач расчета связанных систем «сооружение – жидкость» и в увеличенному 1000 раз модулю объемной деформации для соответствующих трехмерных задач. В силу отсутствия вязкости жидкость может лишь передавать нормальные усилия на контактных поверхностях каньона (твердое тело) и плотины. Условия проскальзывания на контакте твердого тела с жидкостью могут моделироваться посредством задания соответствующих уравнений связей, использования специализированных контактных элементов или коротких практически жестких в продольном направлении связевых элементов по направлению нормали к контактной поверхности.

На контакте водохранилища с каньоном один узел соответствующего связевого конечного элемента, относящийся к каньону, полностью закрепляется, тогда как другой, напротив, может поступательно перемещаться. На поверхности контакта плотины с водохранилищем все узлы связевых элементов допускают поступательные перемещения. Длина и модуль упругости этих элементов полагались равными 0.001 м и $2 \cdot 10^{16}$ кН/м² соответственно.

Нелинейный динамический расчет исследуемой арочной плотины проводился в условиях принятия гипотезы, что основание плотины движется равномерно вдоль соответствующей контактной поверхности. В качестве исходных (движение земли) использовались данные землетрясения в Эль-Центро (El-Centro) 1940 года (в условиях подобного

скальному основанию). В ходе проведенных расчетных исследований были рассмотрены лишь первые 6.5 секунд землетрясения. Соответствующий шаг по времени (шаг интегрирования) был принят равным 0.001 секунды.

Начальные (статические) напряжения и перемещения могут оказывать существенное влияние на нелинейные динамические характеристики системы «плотина – водохранилище – основание». Результаты статического расчета последней на действие собственного веса и гидростатического давления были использованы для задания своего рода начальных приближений для последующего динамического расчета, который был выполнен в линейной и нелинейной постановках. Для изучения влияния уровня воды в резервуаре на динамические характеристики арочной плотины последовательно проводились расчеты при различных уровнях воды – 40, 60, 80, 100 и 120 метров.

По результатам анализа было установлено, что уровень воды в резервуаре следует учитывать при выполнении сейсмического расчета арочной плотины в упругопластической постановке. Адекватные и вполне реалистичные результаты (напряжения) могут быть получены, в частности, при использовании модели Друкера-Прагера. В целом, упругопластический расчет плотины является исключительно важным с позиции выявления пластических зон в теле плотины.

В работе Lemos J.V., Oliveira S. и Mendes P. [30] была предложена трехмерная дискретная модель для динамического расчета плотины Кабрил (Cabril) с учетом наличия температурно-усадочных швов. Результаты расчета с использованием данной дискретной модели были сопоставлены с аналогичными результатами трехмерного конечноэлементного моделирования в условиях гипотезы о сплошности сооружения. Исследование плотины проводилось при различных уровнях воды в водохранилище. Исследование влияния этого фактора на динамические характеристики связанной системы осуществлялось посред-

ством анализа собственных частот и форм колебаний. Проводилось сопоставление данных экспериментальных и численных (компьютерных) изысканий. При проведении численного моделирования использовались две модели: трехмерная конечноэлементная модель плотина в рамках гипотезы о ее сплошности (полагалось, что какие-либо швы отсутствуют) и дискретная элементная модель, позволяющая учесть наличие температурно-усадочных швов в плотине и ее нелинейное поведение. Учет контактного взаимодействия плотины с водохранилищем для обеих постановок и соответствующего их реализующего программного обеспечения осуществлялся на основе задания присоединенных масс на лобовой части плотины (в рамках гипотезы Вестергарда).

В публикации Poursartip B. и Lotfi V. [41] были рассмотрены два подхода к модальному анализу бетонной плотины на определенном временном интервале. Результаты соответствующих расчетов сопоставлялись с результатами, полученными с использованием прямого метода, которые рассматривались в качестве точного (эталонного) решения. Раздельный модальный анализ был основан на независимом рассмотрении форм колебаний плотины и водохранилища, тогда как совместный модальный анализ был, очевидно, необходим для определения форм колебаний связанной системы. Как следствие возникает весьма и весьма непростая с позиции численного решения и соответствующей программно-алгоритмической реализации несимметричная проблема собственных значений. Вместе с тем, разрешающей при раздельном модальном анализе является уже симметричная проблема собственных значений (несимметричные компоненты исключаются из исходного уравнения). Найденные после ее решения собственные формы были использованы для последующего динамического расчета. В качестве практически важного примера был рассмотрен расчет бетонной арочной плотины Shahid Rajaei, для обоих исследуемых подходов к модальному расчету было

определено количество собственных форм, которые необходимо учитывать для обеспечения должного уровня точности.

В работе Marcelo P., Ribeiro Vieira, Augusto Carlos, Melo Elias, Pedroso Lineu José [37] 2009 года был описан полуаналитический подход к расчету связанной системы «плотина – водохранилище», основанный на так называемых основных формах колебаний. Основная частота колебаний была определена посредством использования так называемого подхода обобщенных координат в сочетании с аналитическим решением волнового уравнения для упругой границы. Результатом в итоге является частотное уравнение для связанной системы. После его решения было получено поле давлений в жидкости и определены соответствующие распределенные массы. В результате проведенных сопоставлений было выявлено хорошее соответствие конечноэлементного решения для связанной системы и решения, найденного с использованием метода присоединенной массы. В целом, предложенный авторами подход является весьма полезным для расчета систем типа «плотина – водохранилище» и может быть рекомендован к использованию в инженерной практике.

В публикации Shariatmadar H. и Mirhaj Adel [44] исследовались гидродинамические давления, возникающие вследствие действия сейсмических нагрузок и решение связанной задачи «сооружение – жидкость». Контактные взаимодействия плотины, водохранилища и скального основания моделировались с использованием многоцелевого универсального программного комплекса промышленного типа ANSYS. Результаты многочисленных расчетов бетонной гравитационной плотины в двумерной постановке убедительно показали, что корректность и точность моделирования системы «плотина – сооружение – основание» с учетом соответствующих контактных взаимодействий оказывает самое непосредственное влияние на периоды и формы собственных колебаний, а также на

модальное распределение гидродинамических давлений.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин: Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.07. МГУП. М., 1998. – 367 с.
2. **Бирбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость. – СПб.: Наука, 1998. – 255 с.
3. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
4. **Клаф Р., Пензиен Дж.** Динамика сооружений, М.:Стройиздат, 1979. – 320 с.
5. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
6. **Akkose M., Bayraktar A., Dumanoglu A.A.** Reservoir Water Level Effects On Nonlinear Dynamic Response Of Arch Dam. // Journal of Fluids And Structures, 24, 2008, pp. 418-435.
7. **Akkose M., Dumanoglu A.A., Tuna M.E.** Investigation of Hydrodynamic Effects on Linear and Nonlinear Earthquake response of Arch Dams By The Lagrangian Approach. // Turkish J. Eng. Env. Sci. 28, 2004, pp. 25-40.
8. **Amina Tahar Berrabah.** Dynamic Soil – Fluid – Structure Interaction Applied for Concrete Dam. Doctorate Degree in Civil Engineering Thesis. Universite Aboubekr Belkaid Tlemcen, 2012, 172 pages.
9. **Anghileri M., Castelletti L.M.L., Tirelli M.** Fluid Structure Interaction of Water Filled Tanks During the Impact With the Ground. // International Journal of Impact Engineering 31, 2005, pp. 235-254.
10. **Arabshahi H., Lotfi V.** Earthquake response of concrete gravity dams including dam – foundation interface nonlinearities. // Engineering Structures, 30, 2008, pp. 3065-307.
11. **Bayraktar A., Hancer Ebru, Akkose Mehmet.** Influence of base-rock characteristics on the stochastic dynamic response of dam-reservoir-foundation systems. Elsevier, 2005.
12. **Bouaanani N., Paultre P., Proulx J.** Dynamic Response of a Concrete Dam Impounding an Ice – Covered Reservoir: Part II. Parametric and Numerical Study. // Can. J. Civ. Eng. 31, 200, pp. 965-976.
13. **Chen B.F.** Nonlinear Hydrodynamic Effects On Concrete Dam. // Engineering Structures, Vol. 18, No. 3, 1996, pp. 201-212.
14. **Cheng Hsing Chen, Shang Yi Hsu.** Using a simple model to investigate the effects of soil structure interaction. // The sixteenth KCCNN symposium on civil engineering, Korea, 2003.

15. **Clough R.W., Penzien J.** Dynamics of Structures. Second ed., McGraw-Hill, Singapore, 1993.
16. **Fan S.C., Li S.M.** Boundary finite-element method coupling finite element method for steady-state analyses of dam-reservoir systems. // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 134(2), 2008, pp. 133-142.
17. **Feltrin G.** Absorbing Boundaries for the Time-Domain Analysis of Dam-Reservoir-Foundation Systems. Doctorate thesis. Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1997.
18. **Fenves G.L., Chopra A.K.** Earthquake analysis of concrete gravity dams including reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction. // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12, 1984, pp. 663-680.
19. **Ghaemian M., Ghobarah A.** Nonlinear seismic response of concrete gravity dams with dam – reservoir interaction. // *Engineering Structures*, 21, 1991, pp. 306-315.
20. **Ghaemian M., Ghobarah A.** Staggered solution schemes for dam reservoir interaction. // *Journal of Fluids and Structures*, 12, 1998, pp. 933-948.
21. **Ghobarah A., El-Nady A., Aziz T.** Simplified dynamic analysis for gravity dams. // *ASCE Journal of Structural Engineering*, 120(9), 1994, pp. 2697-2716.
22. **Gogoi I., Maity D.** Influence of sediment layers on dynamic behavior of aged concrete dams. // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 133(4), 2007, pp. 400-413.
23. **Guan F., Moore I.D.** New techniques for modelling reservoir-dam and foundation-dam interaction. // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 16, 1997, pp. 285-293.
24. **Higdon R.L.** Radiation boundary condition for dispersive waves. // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31, 1994, pp. 64-100.
25. **Houqun C., Xiuli D., Shunzai H.** Application of Transmitting Boundaries to Non Linear Dynamic Analysis of an Arch Dam Foundation Reservoir System. Elsevier, 1998.
26. **Kianoush M.R., Mirzabozorg H., Ghaemian M.** Dynamic Analysis of Rectangular Liquid Containers In Three Dimensional Space. // *Can. J. Civ. Eng.* 33, 2006, pp. 501-507.
27. **Küçükarslan S.** An exact truncation boundary condition for incompressible – unbounded infinite fluid domains. // *Applied Mathematics and Computation*, 163, 2005, pp. 61-69.
28. **Küçükarslan S.** Dam-reservoir interaction for incompressible-unbounded fluid domains using an exact truncation boundary condition. // *Proceedings of 16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, July 16-18, 2003, University of Washington, Seattle.
29. **Lee J., Fenves G.L.** A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams. // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, 1998, pp. 937-956.
30. **Lemos J.V., Oliveira S., Mendes P.** Analysis of The Dynamic Behaviour Of Cabril Dam Considering The Influence Of Contraction Joints. // *7th European conference on Structural Dynamics*, EUROYN 2008, Southampton.
31. **Li X., Romo M.P.O., Aviles J.L.** Finite element analysis of dam reservoir systems using an exact far-boundary condition. // *Computers & Structures*, 60(5), 1996, pp. 751-762.
32. **Livaoglu R., Dogangun A.** Simplified Seismic Analysis Procedures For Elevated Tanks Considereing Fluid Structure Soil Interaction. // *Journal of Fluids And Structures*, 22, 2006, pp. 421-439.
33. **Maity D.** A novel far-boundary condition for the finite element analysis of infinite reservoir. // *Applied Mathematics and Computation*, 170, 2005, pp. 1314-1328.
34. **Maity D., Bhattacharyya S.K.** A parametric study on fluid – structure interaction problems. // *Journal of Sound and Vibration* 263, 2003, pp. 917-935.

35. **Maity D., Bhattacharyya S.K.** Time-domain analysis of infinite reservoir by finite element method using a novel far-boundary condition. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 32, 1999, pp. 85-96.
36. **Marcelo P., Ribeiro Vieira, Augusto Carlos, Melo Elias, Pedrosa Lineu José.** Semi-analytical solution of dam-reservoir interaction in the fundamental mode shape. // *Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, ISBN 978-85-85769-43-7, 2009.
37. **Nasserzare J., Lei Y., Zeigler F.** Inverse Identification of Dam Reservoir Interaction Including the Effect of Reservoir Bottom Absorption. // *Asian Journal Of Civil Engineering*, Vol. 4, Nos. 2-4, 2003, pp. 101-113.
38. **Parrinello F., Borino G.** Lagrangian finite element modelling of dam – fluid interaction: Accurate absorbing boundary conditions. // *Computers and Structures*, 85, 2007, pp. 932-943.
39. **Poursartip B., Lotfi V.** Modal analysis of concrete arch dams in time domain including dam-reservoir interaction. // *The 14th world conference on Earthquake Engineering*, October 12-17. Beijing, China, 2008.
40. **Saini S.S., Bettess P., Zienkiewicz O.C.** Coupled hydrodynamic response of concrete gravity dams using finite and infinite elements. // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, 1978, pp. 363-374.
41. **Sharan S.K.** Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1985, pp. 1659-1669.
42. **Shariatmadar H., Mirhaj Adel.** Modal response of dam reservoir foundation interaction. // *8th International congress on Civil Engineering*. Shiraz University, Shiraz, Iran, May 11-13, 2009.
43. **Taylor R.E.** A review of hydrodynamic load analysis for submerged structures excited by earthquakes. // *Engineering Structures*, 3, 1981, pp. 131-139.
44. **Tiliouine B., Seghir A.** Fluid-Structure Models For Dynamic Studies of Dam-Water Systems. // *11th European Conference on Earthquake Engineering*. Balkema, Rotterdam, 1998.
45. **Tsai C.S., Lee G.C.** Time-domain analyses of dam-reservoir system. II: Substructure method. // *Journal of Engineering Mechanics*, 117(9), 1991, pp. 2007-2026.
46. **Westergaard H.M.** Water pressure on dams during earthquakes. // *ASCE Transactions*, 98, 1931, pp. 418-433.
-
- Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru
- Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com
- Кайтуков Таймураз Батразович, кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: tkaytukov@gmail.com
- Афанасьева Ирина Николаевна, старший инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: rena1986@mail.ru.
- Вершинин Владислав Викторович, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компью-

терного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Усманов Антон Равильевич, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Мсхалая Жиули Ивлианович, кандидат технических наук, доцент; профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: ipm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Taymuraz B. Kaytukov, PhD, Associate Professor; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: tkaytukov@gmail.com

Irina N. Afanasyeva, senior engineer-analyst of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State

University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: rena1986@mail.ru.

Vladislav V. Vershinin, Junior Research Scientist of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Anton R. Usmanov, Engineer of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey V. Scherbina, Engineer of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Zhiuli I. Mskhalaya, PhD, Professor; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: ipm@mgsu.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОБИВАНИЯ ПЛАСТИН ИЗ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА 2024-T3(51) ЖЕСТКИМ СФЕРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Вершинин

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

Аннотация: В статье рассматривается возможность численного моделирования пробивания пластин из алюминиевого сплава 2024-T3(51) (зарубежный аналог сплава Д16Т/Д16АТ) жестким сферическим телом с помощью метода конечных элементов в диапазоне скоростей удара $V = 150\text{--}950$ м/с. Моделирование снаряда и мишени осуществляется в лагранжевой постановке. Материал снаряда задается упругим, а мишени – упругопластическим упрочняемым с учётом зависимости его свойств от температуры и скорости деформирования. Разрушение материала мишени при превышении деформациями предельных значений учитывается путём исключения «разрушенных» элементов из расчётной схемы с сохранением присоединённых к ним узлов в виде «свободно плавающих» сосредоточенных масс. Результаты численного моделирования сравниваются с доступными в научной литературе экспериментальными данными по баллистическому пределу пластин из сплава 2024-T3(51). Отмечается, что, несмотря на достигнутое качественное совпадение результатов численного моделирования и эксперимента, имеет место несистематическое количественное расхождение, обусловленное, по-видимому, заданными значениями параметров, описывающих механические свойства материала мишени, которые, как оказалось, подходят только для небольшой области множества напряженно-деформированных состояний.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, пробивание пластин, баллистический предел, алюминиевый сплав Д16Т

NUMERICAL SIMULATION OF 2024-T3(51) ALUMINUM ALLOY PLATES PERFORATION BY RIGID SPHERICAL PROJECTILE WITH THE USE OF FINITE ELEMENT METHOD

Vladislav V. Vershinin

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract: In present article numerical simulation of 2024-T3(51) aluminum alloy plates perforation by rigid spherical projectile within velocity range $V = 150\text{--}950$ m/s with the use of FEM is considered. Projectile and target are modeled using traditional Lagrangian formulation. Projectile is assumed to be elastic, while target – elastoplastic with rate- and temperature-dependent hardening. Target material fracture when equivalent plastic deformation exceeds its critical value is modeled via element erosion, while nodes attached to the eroded elements are retained in the calculations as free-floating point masses. Results of numerical simulation are compared with available in literature ballistic limit velocity experimental data for 2024-T3(51) aluminum alloy plates. It is noticed that despite good qualitative agreement of the results non-systematic quantitative difference between numerical results and experimental data exists. This fact may be due to incorrect parameters of the target material constitutive and fracture models, which appears to be valid only for small range of stress-strain states.

Key words: numerical simulation, finite element method, plate perforation, ballistic limit velocity, 2024-T3(51) aluminum alloy

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с численным моделированием высокоскоростного взаимодействия твердых тел, являются актуальными на сегодняшний день, потому что численное моделирование подобных процессов позволяет практически полностью отказаться от натуральных испытаний при решении многих практически важных задач, которые зачастую проводятся на сложном и уникальном оборудовании – метательные установки, вакуумные камеры, системы высокоскоростной съёмки в рентгеновском и видимом диапазонах и т.п. – и сопряжены с большими временными и материальными затратами.

На сегодняшний день наибольшее распространение получили следующие методики численного моделирования процессов пробивания различных преград: вариационно-разностные методы на основе подходов Эйлера, Лагранжа или совместного эйлерово-лагранжева подхода к описанию движения сплошной среды, метод конечных элементов и бессеточный метод сглаженных частиц. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки [1–4].

В настоящей статье предпринимается попытка провести моделирование пробивания пластины жестким сферическим телом с помощью метода конечных элементов. Этот метод, по сравнению с выше перечисленными, получил наибольшее распространение в отечественных и зарубежных коммерческих программных комплексах.

В качестве материала, из которого изготовлена мишень, был выбран алюминиевый сплав Д16Т/Д16АТ (или его зарубежный аналог 2024-T3(51)). Данный сплав широко используется в качестве конструкционного, особенно в авиастроении, где актуален вопрос безопасности пассажиров в случае разрушения лопаток ротора турбины двигателя и поражения их осколками фюзеляжа самолёта. Кроме того, для данного сплава в научной литературе имеется большое количество экспериментальных данных по его деформационным и прочностным характеристикам (см., например, [5–11]).

ционным и прочностным характеристикам (см., например, [5–11]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается прямой центральный удар жесткого сферического тела по круглым свободным пластинам различной толщины (отношение толщины пластины H к диаметру ударника D меняется в пределах от 0.1 до 2.0). Пластины имеют диаметр $d = 81.4$ мм, при котором, согласно [11, 12], влияние граничных условий на баллистический предел составляет менее 5%. Диаметр ударника принимается равным $D = 10.0$ мм.

Для пластин с различными отношениями H/D в несколько итераций с точностью до 1 м/с определяется баллистический предел V_{50} при ударе по ним по нормали жестким сферическим телом. В данном случае под баллистическим пределом V_{50} понимается скорость соударения, при которой вероятность пробивания преграды равна 50%.

3. МЕТОДИКА РАСЧЁТА

Численное моделирование соударения жесткого сферического ударника и круглой свободной пластины осуществлялось с помощью метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе Abaqus® [13], как в трёхмерной, так и в осесимметричной постановках.

Ударник и мишень при трёхмерном анализе разбивались на 8-узловые шестигранные конечные элементы сплошной среды с редуцированной схемой интегрирования и контролем деформаций формы с нулевой энергией (C3D8R) [6], а в осесимметричной постановке – на 4-узловые прямоугольные конечные элементы сплошной среды с билинейной функцией формы, редуцированной схемой интегрирования и контролем деформаций формы с нулевой энергией (CAx4R) [6]. При решении задачи в осесимметричной поста-

новке мишень разбивалась по толщине на 30, 60 или 100 конечных элементов при, соответственно, $H = 1 \div 6, 12$ и 20 мм; при трехмерном анализе мишень разбивалась по толщине на 25, 30, 40, 80 и 120 конечных элементов при, соответственно, $H = 1 \div 2, 3, 6, 12$ и 20 мм. Вблизи места удара конечные элементы мишени задавались кубической формы.

Материал ударника задавался изотропным и линейно упругим, материал мишени – изотропным и упругопластическим с упрочнением. Неупругие свойства материала мишени задавались с помощью модели пластичности Джонсона-Кука [14], в которой применяется поверхность текучести Мизеса и ассоциированный закон пластического течения, прочностные свойства – с помощью критерия разрушения Джонсона-Кука [15]. Описание используемых моделей материалов, их реализация в программном комплексе Abaqus® и задаваемые при моделировании значения параметров этих моделей приведены ниже.

3.1. Явная схема интегрирования.

При интегрировании уравнений движения использовался явный метод решения задач динамики, реализованный в Abaqus/Explicit [13], который базируется на реализации явной схемы интегрирования совместно с использованием диагональной, или “сосредоточенной”, матрицы масс элементов. Уравнения движения тела интегрируются по времени по центрально-разностной схеме:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)} = \dot{\mathbf{u}}^{(i-1/2)} + \frac{\Delta t^{(i+1/2)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)}, \quad (1b)$$

где $\dot{\mathbf{u}}$ – скорость, $\ddot{\mathbf{u}}$ – ускорение. Верхний индекс (i) соответствует номеру шага по времени, а индексы $(i-1/2)$ и $(i+1/2)$ – значениям величин в середине шага. Центрально-разностный оператор является явным в том смысле, что кинематическое состояние си-

стемы на следующем шаге может быть определено с помощью известных для предыдущего шага значение $\dot{\mathbf{u}}^{(i-1/2)}$ и $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$. Явная схема интегрирования сама по себе очень проста, но не является ключом к вычислительной эффективности явного метода решения задач динамики. Эффективность в явном методе достигается за счёт использование диагональной матрицы масс элементов, т.к. вычисление обратной матрицы, которая используется для вычисления ускорений в начале шага, производится для трехмерного случая:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}), \quad (2)$$

где \mathbf{M} – диагональная матрица масс, \mathbf{F} – вектор нагрузки, \mathbf{I} – вектор внутренних сил. В явном методе отсутствуют итерации и матрица касательной жесткости.

Для задания начальных условий, некоторых связей и представление результатов требуется специальная обработка величин скоростей в середине шагов $\dot{\mathbf{u}}^{(i-1/2)}$ и $\dot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)}$. Для представления результатов скорости в расчётных точках по времени вычисляются с помощью линейной интерполяции значений скоростей в серединах шагов:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)} + \Delta t^{(i+1)} \ddot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)}/2. \quad (3)$$

Центрально-разностный оператор не является самоиницирующимся, т.к. необходимо задать значение скорости $\dot{\mathbf{u}}^{(-1/2)}$. Начальные значения (при $t = 0$) скорости и ускорения задаются равными нулю, только если иное не задано пользователем. Постулируется следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(+1/2)} = \dot{\mathbf{u}}^{(0)} + \Delta t^{(1)} \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}/2. \quad (4)$$

Подставляя это соотношение в выражение для $\dot{\mathbf{u}}^{(i+1/2)}$, получаем следующую формулу для определения $\dot{\mathbf{u}}^{(-1/2)}$:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(-1/2)} = \dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \Delta t^{(0)} \ddot{\mathbf{u}}^{(0)} / 2. \quad (5)$$

3.2. Устойчивость явного метода.

Центрально-разностный оператор является условно устойчивым. Предел устойчивости оператора при отсутствии демпфирования можно записать в терминах высшей собственной частотой системы как

$$\Delta t \leq 2 / \omega_{\max}. \quad (6)$$

В Abaqus/Explicit при решении искусственно вводится небольшое демпфирование для борьбы с высокочастотными осцилляциями. Предел устойчивости с учётом демпфирования определяется как

$$\Delta t \leq 2 \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) / \omega_{\max}, \quad (7)$$

где ξ – доля от критического демпфирования для высшей собственной частоты. Т.е. учёт демпфирования уменьшает предел устойчивости оператора. Схема выбора шага по времени в Abaqus/Explicit является полностью автоматической. В Abaqus/Explicit для определения несколько заниженной границы для высшей собственной частоты элемента используется адаптивный алгоритм. Оценка значения наибольшего собственного числа системы может быть произведена путем определения максимальной для всей модели собственной частоты продольных колебаний элемента. Предел устойчивости, основанный на высшей частоте колебаний элемента, будет заниженным в том смысле, что он будет давать меньший устойчивый шаг по времени, чем реальный предел устойчивости, определенный с помощью максимальной частоты собственных колебаний всей модели. В общем случае связи, такие как граничные условия и контактное взаимодействие, “сжимают” спектр собственных частот, что не учитывается при поэлементной оценке. В Abaqus/Explicit реализован алгоритм общей оценки, который определяет

максимальную частоту для всей системы. Этот алгоритм непрерывно уточняет значение максимальной частоты. Сначала используется поэлементная оценка. По ходу расчёта, как только общая оценка всей модели будет давать приемлемую точность, предел устойчивости будет вычисляться с её помощью.

Контрольное значение предела устойчивости вычисляется для каждого элемента с помощью следующего выражения:

$$\Delta t \leq 2 / \omega_{\max}^{element}, \quad (8)$$

где $\omega_{\max}^{element}$ – максимальное собственное значение для элемента. Заниженная оценка предела устойчивости определяется как минимальное значение из полученных для элементов. Приведенный выше предел устойчивости может быть записан как

$$\Delta t = \min(L_e / c_d), \quad (9)$$

где L_e – характерный размер элемента, c_d – текущая скорость распространения объемной продольной волны в материале. Характерный размер элемента определяется из аналитического выражения для верхней границы максимального собственного значения для элемента.

В Abaqus/Explicit текущая скорость распространения объемной продольной волны определяется с помощью вычисления текущего значения модуля гипопругости материала. Текущие значения постоянных Ламе $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ определяются следующим образом. Пусть Δp – приращение эквивалентных объемных напряжений, $p = -Tr(\boldsymbol{\sigma})/3$ (здесь $Tr(\dots)$ – след поля), $\Delta \mathbf{S}$ – приращение девиаторных напряжений, $\Delta \varepsilon_{vol}$ – приращение объемных деформаций, $\Delta \mathbf{e}$ – приращение девиаторных деформаций. Тогда гипопругая зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\Delta p = -\hat{K} \Delta \varepsilon_{vol}, \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{S} = 2\hat{\mu} \Delta \mathbf{e}, \quad (11)$$

где \hat{K} – текущий объемный модуль упругости. Текущие модули теперь могут быть вычислены по формулам

$$\hat{K} = -\Delta p / \Delta \varepsilon_{vol}, \quad (12)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \mathbf{S} : \Delta \mathbf{e}}{\Delta \mathbf{e} : \Delta \mathbf{e}}, \quad (13)$$

где символ $(:)$ означает скалярное произведение матриц, и

$$\hat{\lambda} = \hat{K} - 2\hat{\mu}/3. \quad (14)$$

Если приращения деформаций незначительны, то приведенные соотношения не приводят к количественно значимым результатам. В этом случае Abaqus/Explicit задает в качестве текущих значений постоянных Ламе их начальные значения λ_0 и $2\mu_0$. В случае, когда объемные деформации значительны, а девиаторные – нет, текущий модуль сдвига определяется как

$$2\hat{\mu} = (3(\lambda_0 + 2\mu_0) - 3\hat{K})/2. \quad (15)$$

Текущие модули характеризуют жесткость элемента и определяют текущую скорость распространения объемной продольной волны в элементе как

$$c_d = \sqrt{(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})/\rho}. \quad (16)$$

3.3. Объемная вязкость.

Объемная вязкость вводит демпфирование, связанное с объемными деформациями. Цель ее применения состоит в повышении точности моделирования высокоскоростных динамических процессов.

В Abaqus/Explicit применяются две формы объемной вязкости. Первая применяется во всех типах элементов для борьбы с высоко-

частотными шумами. Этот вид демпфирования вызывает появление давления, связанного с объемной вязкостью, которое линейно зависит от объемных деформаций:

$$p_{bv1} = b_1 \rho c_d L_e \dot{\varepsilon}_{vol}, \quad (17)$$

где b_1 – коэффициент демпфирования (по умолчанию принимается равным 0.06), ρ – текущая плотность материала, c_d – текущая скорость распространения объемной продольной волны, L_e – характерная длина элемента, $\dot{\varepsilon}_{vol}$ – скорость объемных деформаций.

Вторая форма давления, связанного с объемной вязкостью, имеет место только в объемных конечных элементах. Эта форма обладает квадратичной зависимостью от скорости объемной деформации:

$$p_{bv2} = \rho (b_2 L_e \dot{\varepsilon}_{vol})^2, \quad (18)$$

где b_2 – коэффициент демпфирования (по умолчанию принимается равным 1.2). Квадратичная объемная вязкость используется, только если объемные деформации соответствуют сжатию.

Квадратичная объемная вязкость размывает фронт ударной волны по нескольким элементам и вводится для предотвращения эффекта сжатия элементов до нулевого объема при действии экстремально высоких градиентов скоростей. В отсутствии квадратичной объемной вязкости это может произойти, когда скорость деформации элемента в направлении одной из сторон больше или равна скорости объемной продольной волны в материале.

Давление, возникающее вследствие объемной вязкости, не учитывается при определении давления в точках интегрирования, т.к. несет в себе исключительно численный эффект. Давление, возникающее вследствие объемной вязкости, основывается на форме продольных колебаний каждого элемента.

Доля от критического демпфирования для продольной формы колебаний каждого элемента записывается в виде

$$\xi = b_1 - b_2^2 L_e \min(0, \dot{\epsilon}_{vol}) / c_d. \quad (19)$$

При расчётах значения параметров b_1 и b_2 были оставлены равными значениям по умолчанию – 0.06 и 1.2, соответственно.

3.4. Контактное давление.

Возможности моделирования контактного взаимодействия в Abaqus [13] включают в себя доступ к библиотеке “определяющих моделей поверхности”. Частью этой библиотеки является определение контактного давления p между двумя поверхностями в точке как функции от взаимного проникания h контактирующих поверхностей друг в друга. Для определения $p = p(h)$ могут быть использованы несколько доступных в Abaqus [13] моделей. При моделировании пробивания круглых свободных пластин из алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ жёстким сферическим телом была использована модель “жёсткого” контакта.

В этом случае

$$p = 0 \text{ при } h < 0, \quad h = 0 \text{ при } p > 0. \quad (20)$$

Начало контакта обеспечивается множителем Лагранжа, представляющим собой контактное давление в смешанной формулировке. Вклад в виртуальную работу составляет

$$\delta\Pi = \delta p h + p \delta h, \quad (21)$$

а его линеаризованная форма имеет вид

$$d\delta\Pi = \delta p dh + dp \delta h. \quad (22)$$

3.5. Методы обеспечения реализации условия контакта.

В Abaqus/Explicit применяются два метода обеспечения реализации условия контакта

[16], которые обеспечивают выполнение закона сохранения импульса для взаимодействующих тел:

- кинематический метод использует для строго соблюдения условия контакта алгоритм кинематического экстраполятора/корректора (например, запрещено взаимное проникание контактирующих элементов);
- метод штрафов даёт менее строгие условия контакта, но позволяет решать задачи с более общими случаями контактного взаимодействия.

В общем случае контакта (general contact), который задавался при моделировании пробивания круглых свободных пластин из алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ жёстким сферическим телом, всегда применяется метод штрафов.

Рассмотрим чистый случай контактной пары “master – slave”. Для текущего состояния системы ищутся все случаи проникания подчиненных узлов в главную поверхность, включая такие случаи, как “узел в деформируемую грань”, “узел в абсолютно жесткую поверхность” и “ребро в ребро”. Для случая контакта “узел – грань” силы, которые являются функциями, зависящими от проникания, приложены к подчиненным узлам, чтобы препятствовать прониканию, в то время как равные им силы с противоположным знаком действуют на главную поверхность в точке проникания подчиненного узла. Контактные силы, действующие на главную поверхность, распределяются между узлами грани, в которую проникают подчиненные узлы. Масса каждого узла, находящегося в контактной области, так же распределяется между узлами главной поверхности и прибавляется к их массе при определении общей инерциальной массы контактирующих поверхностей. Abaqus/Explicit использует эти распределенные силы и массы для определения поправки к ускорению узлов главной поверхности. Поправки к ускорениям узлов подчиненной поверхности затем определяются с использованием прогнозируемого для

каждого узла проникания, значения шага по времени и поправок к ускорению узлов главной поверхности. Далее Abaqus/Explicit использует эти поправки к ускорению для определения скорректированного состояния системы, в котором обеспечивается реализация условия контакта.

При использовании метода штрафов для случая “симметричной” контактной пары “master – slave” поправки к ускорению определяются как линейная комбинация поправок, вычисленных для чистого случая контактной пары “master – slave”. Один ряд поправок вычисляется для случая, когда одна из контактирующих поверхностей является главной, второй ряд поправок – когда эта же поверхность является подчиненной. Далее определяется их средневзвешенное значение. Весовые коэффициенты могут задаваться пользователем. По умолчанию они равны между собой.

“Упругая” жесткость, которая связывает между собой контактную силу и величину взаимного проникания выбирается в Abaqus/Explicit для случая “жесткого” контакта автоматически таким образом, чтобы оказывалось по возможности минимальное влияние на величину шага по времени, а величина взаимного проникания была малой. Принятая по умолчанию “штрафная жесткость” основана на жесткости элементов, находящихся в области контакта, которая умножается на некоторый масштабный коэффициент (который может быть задан пользователем).

3.6. Кулоновское трение.

В Abaqus [13] при решении любого вида контактных задач существует возможность использования расширенной изотропной модели трения Кулона. Расширение включает в себя ограничение на допустимый уровень касательных напряжений, анизотропию и определение “касательного” коэффициента трения.

В стандартной модели трения Кулона предполагается, что относительное движение

контактируемых тел отсутствует, если эквивалентное напряжение от трения

$$\tau_{eq} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (23)$$

не превышает критического напряжения τ_{crit} , которое пропорционально контактному давлению p :

$$\tau_{crit} = \mu p, \quad (24)$$

где μ – коэффициент трения, который может быть задан в виде функции от контактного давления p , скорости сдвига $\dot{\gamma}_{eq}$, средней температуры поверхности и средних величин некоторых других переменных поля в точке контакта.

Если эквивалентное напряжение равно критическому ($\tau_{eq} = \tau_{crit}$), может произойти сдвиг. В случае изотропного трения направление сдвига и действующих касательных напряжений совпадают, что выражается следующим образом:

$$\frac{\tau_i}{\tau_{eq}} = \frac{\dot{\gamma}_i}{\dot{\gamma}_{eq}}, \quad (25)$$

где $\dot{\gamma}_i$ – скорость сдвига в направлении i , $\dot{\gamma}_{eq}$ – магнитуда скорости сдвига,

$$\dot{\gamma}_{eq} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}. \quad (26)$$

В Abaqus/Explicit при использовании “штрафного” контактного алгоритма при отсутствии сдвига величина относительного смещения равна силе трения деленной на “штрафную” жесткость.

При проведении расчётов принималось $\mu = 0.2$.

3.7. Модель линейно упругого материала.

Полное напряжение определяется через полную деформацию следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{el} \boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \quad (27)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – полное напряжение (“действительное,” или напряжение Коши в задачах с конечными деформациями), \mathbf{D}^{el} – четырёхвалентный тензор упругости, а $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ – полная упругая деформация (действительная деформация в задачах с конечными деформациями).

3.8. Модель пластичности Джонсона-Кука.

Модель пластичности Джонсона-Кука [14, 16] является частным случаем модели пластичности Мизеса с законом упрочнения и зависимостью от скорости деформаций, заданными в аналитическом виде. Данная модель обычно применяется в задачах, где имеют место высокоскоростные деформации материала, адиабатический нагрев и динамическое разрушение материала и т.д. При расчётах модель использовалась совместно с моделью линейно упругого материала.

Модель упрочнения Джонсона-Кука представляет собой частный случай изотропного упрочнения; в ней предполагается, что статическое напряжение текучести σ^0 определяется следующим выражением

$$\sigma^0 = \left[A + B \left(\bar{\varepsilon}^{pl} \right)^n \right] \left(1 - \hat{\theta}^m \right), \quad (28)$$

где $\bar{\varepsilon}^{pl}$ – эквивалентные пластические деформации; A , B , n и m – параметры материала, определенные при температуре θ_{tr} , ниже которой предел текучести материала остается постоянным. $\hat{\theta}$ – безразмерная температура, определяемая следующим образом:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta < \theta_{tr} \\ \frac{(\theta - \theta_{tr})}{(\theta_{melt} - \theta_{tr})} & \text{при } \theta_{tr} \leq \theta \leq \theta_{melt} \\ 1 & \text{при } \theta \geq \theta_{melt} \end{cases}, \quad (29)$$

где θ – текущее значение температуры; θ_{melt} – температура плавления материала; θ_{tr} – температура, ниже которой предел текучести материала остается постоянным.

При $\theta \leq \theta_{melt}$ материал плавится и ведет себя как жидкость; сопротивление сдвигу становится равным нулю, т.к. $\sigma^0 = 0$. При этом, вследствие того что эквивалентные пластические деформации становятся равными нулю, наклеп исчезает. Если в модели заданы остаточные напряжения, они тоже становятся равными нулю.

Предполагается, что имеют место следующие зависимости:

$$\bar{\sigma} = \sigma^0 \left(\bar{\varepsilon}^{pl}, \theta \right) R \left(\dot{\varepsilon}^{pl} \right), \quad (30)$$

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\varepsilon}_0 \exp \left[(R-1)/C \right] \text{ при } \bar{\sigma} \geq \sigma^0, \quad (31)$$

где $\bar{\sigma}$ – предел текучести при ненулевой скорости деформаций; $\dot{\varepsilon}^{pl}$ – скорость эквивалентных пластических деформаций; $\dot{\varepsilon}_0$ и C – параметры материалы, определенные при $\theta < \theta_{transition}$; $\sigma^0 \left(\bar{\varepsilon}^{pl}, \theta \right)$ – статический предел текучести; $R \left(\dot{\varepsilon}^{pl} \right)$ – отношение $\bar{\sigma}$ к σ^0 (так что $R \left(\dot{\varepsilon}_0 \right) = 1.0$).

Таким образом, предел текучести определяется следующей зависимостью:

$$\bar{\sigma} = \left[A + B \left(\bar{\varepsilon}^{pl} \right)^n \right] \times \left[1 + C \ln \left(\dot{\varepsilon}^{pl} / \dot{\varepsilon}_0 \right) \right] \left(1 - \hat{\theta}^m \right). \quad (32)$$

В модели пластичности Джонсона-Кука, которая применяется в задачах, где имеет место высокоскоростное деформирование, изменение температуры определяется в предположении адиабатического нагрева материала (теплопередача между элементами отсутствует). Приращение температуры в результате пластической работы материала определяется по формуле

$$\Delta T = \int (\chi / \rho c_V) \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (33)$$

где ρ – плотность материала, c_V – удельная теплоёмкость, χ – доля от общей рассеиваемой в единице объёма энергии, которая расходуется на выделение тепла.

3.9. Критерий разрушения Джонсона-Кука.

В Abaqus/Explicit реализована [16] модель динамического разрушения материала, применяемая совместно с моделью пластичности Джонсона-Кука в задачах, где имеет место высокоскоростное деформирование металлов. В основе модели динамического разрушения Джонсона-Кука лежат значения эквивалентных пластических деформаций в точках интегрирования; предполагается, что разрушение материала происходит, когда параметр поврежденности материала превышает единицу. Параметр поврежденности ω определяется как

$$\omega = \sum (\Delta \bar{\varepsilon}^{pl} / \bar{\varepsilon}_f^{pl}), \quad (34)$$

где $\Delta \bar{\varepsilon}^{pl}$ – приращение эквивалентных пластических деформаций, $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ – эквивалентные пластические деформации при разрушении, а суммирование осуществляется по всему интервалу $[0, t]$, где t – текущее время (в качестве “времени” в статическом расчёте выступает нагрузка). Предполагается, что $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ зависит от безразмерной скорости деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} / \dot{\varepsilon}_0$, отношения p/q (где p – напряжение от давления, а q – эквивалентное напряжение по Мизесу) и безразмерной температуры $\hat{\theta}$, определенной ранее в модели пластичности Джонсона-Кука:

$$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = [d_1 + d_2 \exp(d_3 p/q)] \times [1 + d_4 \ln(\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} / \dot{\varepsilon}_0)] (1 + d_5 \hat{\theta}), \quad (35)$$

где d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 представляют собой параметры разрушения, определенные при $\theta < \theta_{tr}$, а $\dot{\varepsilon}_0$ – начальная скорость деформаций. Приведенное выражение для $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ отличается от оригинала, представленного в [15], знаком параметра d_3 . Это отличие обусловлено тем фактом, что эквивалентные пластические деформации при разрушении для большинства материалов увеличиваются с ростом отношения p/q ; таким образом, d_3 почти всегда будет положительным.

Если в какой-то точке тела произошло разрушение материала, девиаторные напряжения становятся равными нулю. В зависимости от выбора пользователя, напряжения от давления при разрушении материала могут либо приниматься равными нулю (в этом случае необходимо задать удаление “разрушенных” конечных элементов из расчётной модели), либо оставаться сжимающими до конца расчёта. По умолчанию, “разрушенные” конечные элементы удаляются из расчётной модели, при этом узлы, принадлежащие этим элементам, остаются в расчётной схеме и рассматриваются как “свободные” сосредоточенные массы.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Параметры моделей материалов ударника и мишени, использованные при численном моделировании пробивания круглых свободных пластин из алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ жёстким сферическим телом, приведены в табл. 1 и 2, соответственно. Значения параметров A, B, C, m, n определялись в [6] по результатам испытаний стандартных образцов на растяжение и сжатие с помощью разрезного стержня Гопкинсона при скоростях деформации порядка 10^4 с^{-1} .

Таблица 1. Параметры модели материала ударника (сталь ШХ15 и её зарубежные аналоги)

Параметр	Значение
ρ , кг/м ³ :	7830
E , Па:	$2.1 \cdot 10^{11}$
ν :	0.3

Таблица 2. Параметры модели материала мишени (алюминиевый сплав Д16Т/Д16АТ или его зарубежный аналог 2024-T3(51))

Параметр	Значение [Источник]
ρ , кг/м ³ :	2770 [18]
E , Па:	$74.66 \cdot 10^9$ [17]
ν :	0.3 [17]
c , Дж/(кг·К):	875 [18]
θ_{melt} , °C:	502 [18]
θ_{tr} , °C:	20
A , Па:	$3.69 \cdot 10^8$ [6]
B , Па:	$6.84 \cdot 10^8$ [6]
n :	0.73 [6]
C :	0.0083 [6]
$\dot{\epsilon}_0$, с ⁻¹ :	1
m :	1.7 [6]
d_1 :	0.112 [7]
d_2 :	0.123 [7]
d_3 :	1.5 [7]
d_4 :	0.007 [7]
d_5 :	0.0 [7]
χ :	0.9 [19]

Значения параметров d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 определялись в [7] по результатам трёх типов баллистических испытаний с учётом параметров модели пластичности Джонсона-Кука, определенных в [6].

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

На рис. 1-6 представлены некоторые результаты численного моделирования пробивания круглых свободных пластин различной толщины H диаметром $d = 81.4$ мм, выполненных из алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ, жёстким сферическим телом диаметром $D = 10.0$ мм, выполненном из стали ШХ15. Численное моделирование осуществлялось в Abaqus/Explicit в осесимметричной (рис. 1-3) и в трёхмерной (рис. 4-6) постановках.

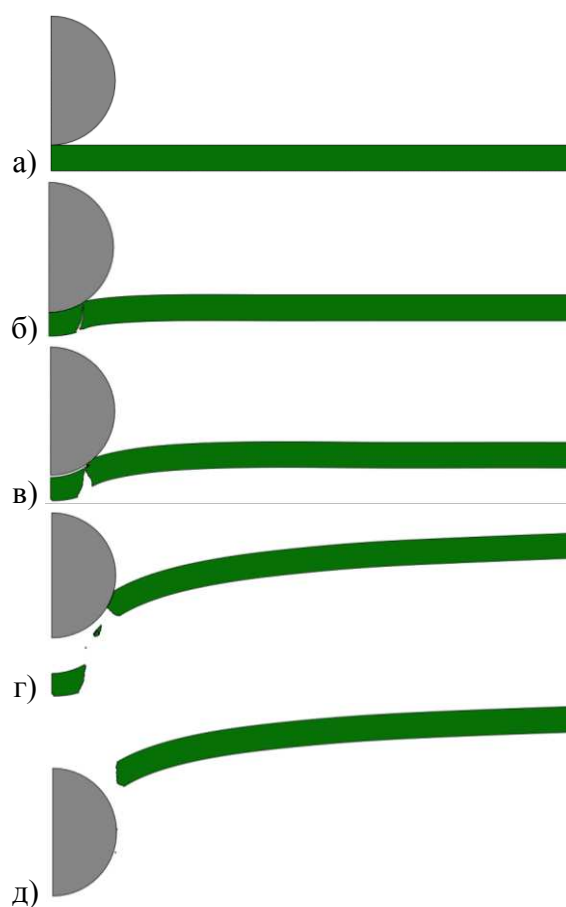


Рисунок 1. Соударение жесткого шара с $V=176$ м/с и круглой свободной пластины с $H=2.0$ мм в различные моменты времени: а) 0 мкс; б) 8 мкс; в) 16 мкс; г) 64 мкс; д) 336 мкс

Имеют место следующие особенности разрушения круглых свободных пластин при

численном моделировании нормального удара по ним жестким сферическим телом:

- при решении задачи в осесимметричной постановке с увеличением безразмерной толщины пластины H/D уменьшается относительная толщина выбиваемой пробки (при $H/D = 2$ пробка фактически отсутствует, а весь материал мишени в пределах диаметра ударника разрушается и исключается из расчётной схемы);
- при решении задачи в осесимметричной постановке качественная картина общей деформации мишени хорошо соответствует получаемой в эксперименте [11, 12] при любых значениях H/D , однако получить потерю устойчивости, образование в мишени радиальных трещин и лепестков при таком подходе не удаётся (что естественно);
- при решении задачи в трёхмерной постановке качественная картина общей деформации мишени почти полностью совпадает с получаемой в эксперименте [11, 12], за исключением небольших различий в формах выбиваемой пробки.

На рис. 7 приведено сравнение полученных численно значений баллистического предела круглых свободных пластин различной толщины, выполненных из алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ, при их пробивании жестким сферическим телом, с результатами экспериментов из [20]. Видно, что результаты численного моделирования носят несистемный характер, что указывает на неадекватное описание используемыми моделями и/или принятыми значениями параметров этих моделей реальных свойств материала мишени.

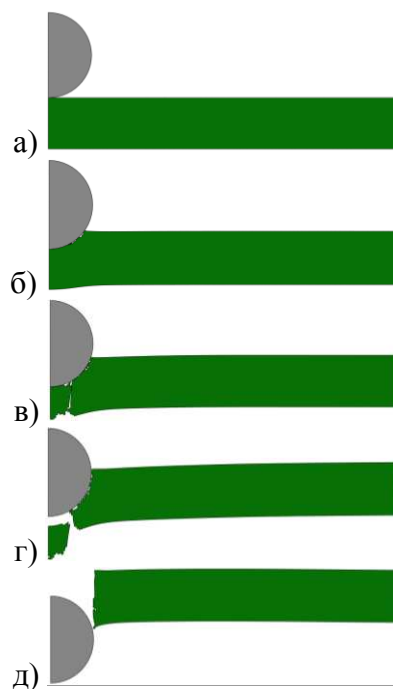


Рисунок 2. Соударение жёсткого шара с $V=362$ м/с и круглой свободной пластины с $H=6.0$ мм в различные моменты времени: а) 0 мкс; б) 6 мкс; в) 12 мкс; г) 24 мкс; д) 120 мкс

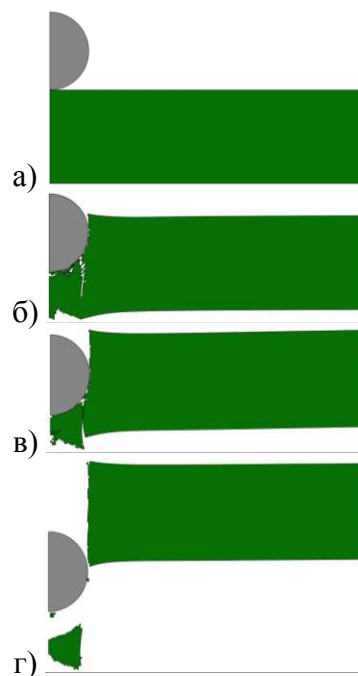


Рисунок 3. Соударение жесткого шара с $V=572$ м/с и круглой свободной пластины с $H=12.0$ мм в различные моменты времени: а) 0 мкс; б) 18 мкс; в) 33 мкс; г) 90 мкс

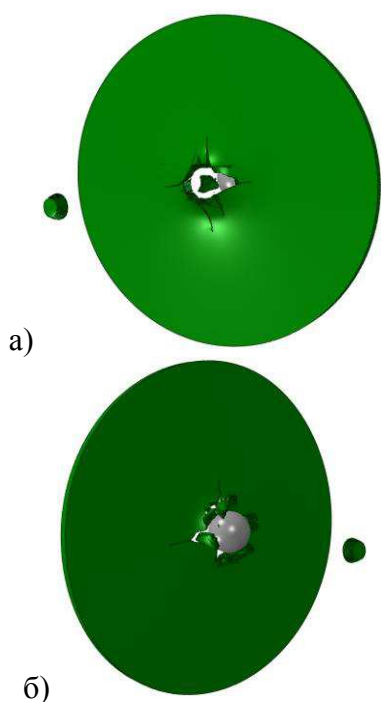


Рисунок 4. Результаты моделирования нормального удара по круглой свободной пластине с $H=2.0$ мм жесткого шара со скоростью: а) 153 м/с; б) 154 м/с

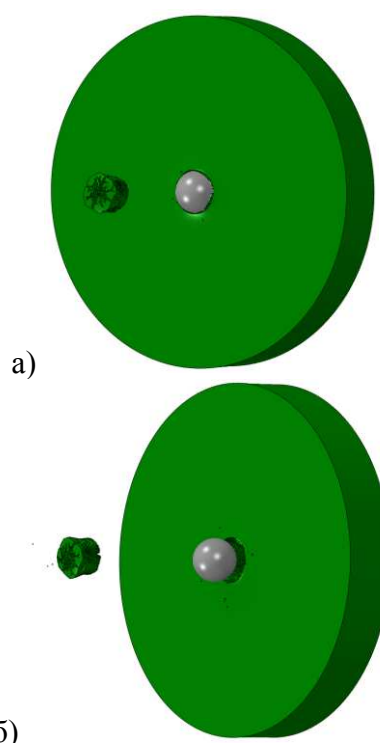


Рисунок 6. Результаты моделирования нормального удара по круглой свободной пластине с $H=12.0$ мм жесткого шара со скоростью: а) 542 м/с; б) 543 м/с

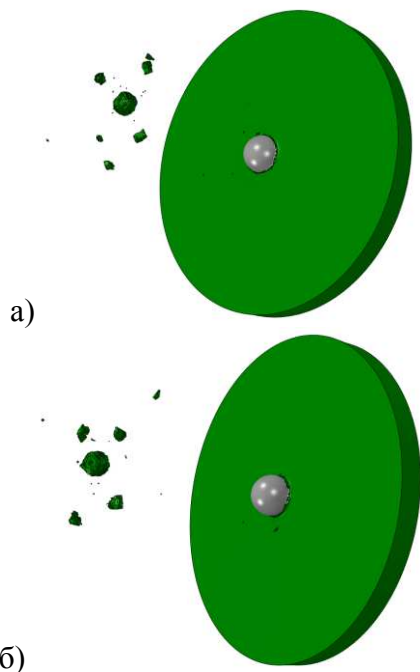


Рисунок 5. Результаты моделирования нормального удара по круглой свободной пластине с $H=6.0$ мм жесткого шара со скоростью: а) 382 м/с; б) 383 м/с

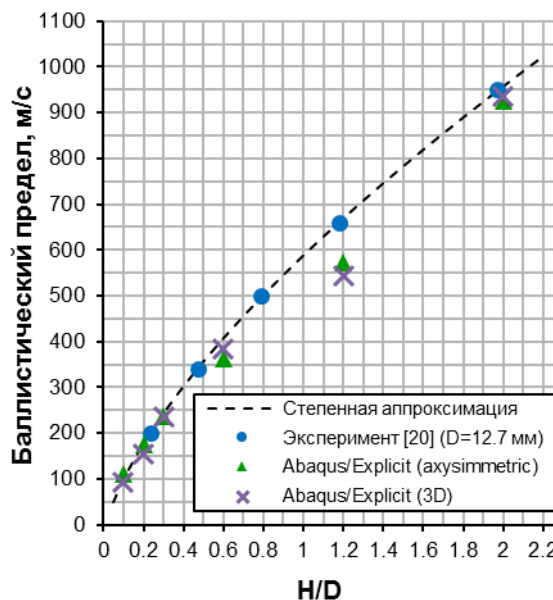


Рисунок 7. Сравнение полученных численно значений баллистического предела круглых свободных пластин различной толщины выполненных из сплава Д16Т/Д16АТ, при их пробивании жестким сферическим телом, с экспериментальными данными из [20]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С учётом указанных выше особенностей можно сделать вывод, что приведенные в табл. 2 параметры модели алюминиевого сплава Д16Т/Д16АТ могут быть использованы при моделировании пробивания круглых свободных пластин, выполненных из этого материала, жестким сферическим телом только в узком диапазоне их безразмерных толщин, а именно $H/D = 0.3 \div 0.6$. При этом для получения качественно достоверной картины общей деформации мишени задачу необходимо решать в трехмерной постановке.

Для получения лучшего количественного совпадения результатов численного моделирования с экспериментальными данными необходимо, по всей видимости, использовать либо более сложные зависимости деформаций разрушения материала от трёхосности напряженного состояния (например, трёхветвевую эмпирическую зависимость, полученную в [21]), либо вообще производить учёт влияния как объёмной, так и дивергентной составляющей напряженного состояния на деформационные и прочностные характеристики материала (как это сделано, например, в [22]). Данный вопрос требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-00016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кукуджанов В.Н.** Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // УМ. 1985. Т. 8, вып. 4. С. 21–65.
2. **Победра Б.Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
3. **Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н.** Обзор контактных алгоритмов // МТТ. 2005. № 1. С. 44–85.
4. **Johnson G.R.** Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations // Int. J. Imp. Eng. 2011. Vol. 38. pp. 456–472.
5. **Johnson G.R., Holmquist T.J.** Test data and computational strength and fracture model constants for 23 materials subjected to large strain, high strain rates, and high temperatures. Technical Report LA-11463-MS, Los Alamos National Laboratory; 1989.
6. **Lesuer D.R.** Experimental Investigations of Material Models for Ti-6Al-4V Titanium and 2024-T3 Aluminum. Lawrence Livermore National Laboratory: Livermore, CA. DOT/FAA/AR-00/25, 2000.
7. **Kay G.** Failure Modelling of Titanium 6Al-4V and Aluminum 2024-T3 with the Johnson-Cook Material Model. Lawrence Livermore National Laboratory: Livermore, CA. DOT/FAA/AR-03/57, 2003.
8. **Bao Y.** Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. Ph.D. thesis. Cambridge, MA: Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology; 2003.
9. **Teng X.** High velocity impact fracture. Ph.D. thesis. Cambridge, MA: Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology; 2004.
10. **Seidt J.D.** Plastic deformation and ductile fracture of 2024-T351 aluminum under various loading conditions. Ph.D. thesis. Columbus, OH: Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University; 2010.
11. **Бивин Ю.К.** Деформация и разрушение круглых пластин при статическом и динамическом нагружении сферическим телом // МТТ. 2008. № 5. С. 130–140.
12. **Бивин Ю.К.** Разрушение круглых пластин при ударе по нормали жестким сферическим телом // МТТ. 2011. № 4. С. 126–140.
13. Abaqus Theory Manual. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2011.

14. **Johnson G.R., Cook W.H.** A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high rates and high temperatures. Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics, Netherlands, Hague, pp. 541–547, 1983.
15. **Johnson G.R., Cook W.H.** Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // *Eng Fract Mech.* 1985. Vol. 21. No. 1. pp. 31–48.
16. *Abaqus Analysis User's Manual.* Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2011.
17. **Teng X., Wierzbicki T.** Effects of fracture criteria on high velocity perforation of thin beams // *Int J Comput Meth.* 2004. Vol. 1. Iss. 1. pp. 171–200.
18. **Chait R.** The strength differential of steel and Ti alloys as influenced by test temperature and microstructure // *Scripta Metallurgica.* 1973. Vol. 7. pp. 351–354.
19. **Teng X., Wierzbicki T.** Evaluation of six fracture models in high velocity perforation // *Eng Fract Mech.* 2006. Vol. 73. pp. 1653–1678.
20. **Senf H., Weimann K.** Die wirkung von stahlkugeln auf dural-einfach-und mehrplattenziele. EMI report no. V6-73 (на немецком языке), 1973.
21. **Bao Y., Wierzbicki T.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxility space // *Int J Mech Sci.* 2004. Vol. 46. pp. 81–98.
22. **Bai Y., Wierzbicki T.** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence // *Int J Plast.* 2008. Vol. 24. pp. 1071–1096.

Civil Engineering, 26 Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia, e-mail address: vlodya_91@mail.ru

Владислав Владимирович Вершинин, аспирант кафедры строительной механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, e-mail: vlodya_91@mail.ru

Vladislav V. Vershinin, Postgraduate student, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСИЛЕНИЯ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ ХРАМА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ПОДРАБОТАННОЙ ТЕРРИТОРИИ

А.В. Воробьев., И.Н. Фаизов, Г.Г. Кашеварова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РОССИЯ

Аннотация: В статье приведены результаты прогнозирования величины оседания земной поверхности подработанными горными работами в зоне расположения исторического памятника - здания храма. Рассматривается вариант усиления грунтового основания с использованием грунтоцементной технологии. Совместная работа усиленного фундамента здания и грунтового основания оценивается методом численного моделирования с использованием программы ANSYS.

Ключевые слова: подработанная территория; оседания поверхности; технология струйной цементации, компьютерное моделирование

NUMERICAL SIMULATION OF IMPROVE SUBGRADE ON THE UNDERWORKED TERRITORY IN THE AREA OF THE TEMPLE

Alexander V. Vorobyov, Igor N. Faizov, Galina G. Kashevarova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract: The article presents results of the prediction value of subsidence underworked surface mining operations in an area of historical monument - the building of the temple. Here is a variant of improve subgrade, using jet-grouting technology. Teamwork of strengthen the foundations of the building and the foundation soil is evaluated by numerical simulation using the program ANSYS.

Key words: underworked territory; surface subsidence; jet grouting technology, computer simulation

1. ВВЕДЕНИЕ

В Пермском крае в потенциально опасной зоне на подработанной территории оказалась церковь Иоанна Предтечи - старейший храм, построенный в 1754 г., являющийся памятником культурного наследия. Общий вид храма представлен на рис. 1.

Фактически церковь расположена на целике, однако в непосредственной близости располагаются два очага оседания, инициированные техногенной аварией.

В результате этого формируется сложная геотехническая ситуация вокруг здания церкви.

Имеются результаты обследования здания храма. В настоящее время здание имеет серьезные повреждения

Необходимо изучить возможность сохранения исторического памятника, разработать и теоретически оценить мероприятия вероятности предотвращения дальнейшего разрушения строительных конструкций по результатам прогнозируемых деформаций земной поверхности.



Рисунок 1. Вид храма со стороны колокольни.

2. ГЕОТЕХНИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБСЛЕДОВАНИЯ ХРАМА

Расположение здания относительно подбортного пространства и изолинии оседаний, реализованных на данный момент, показаны на рис. 2.

Результаты прогноза оседаний на 2020 г. в виде изолиний, представлены на рисунке 3. Из анализа прогноза оседаний следует, что кривизна поверхности в дальнейшем значительно увеличится.

Результаты прогноза горизонтальных формаций земной поверхности представлены на рисунке 4. Из анализа изолиний горизонтальных деформаций следует, что происходит растягивание основания здания по диагонали, в результате чего деформируется надфундаментная конструкция. Величина горизонтальных перемещений земной поверхности к 2020 году по прогнозу достигнет значения 421 мм.

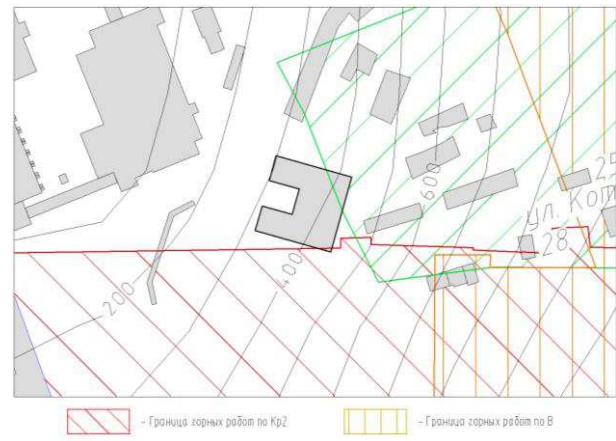


Рисунок 2. Границы горных работ и изолинии оседаний 2013 г.

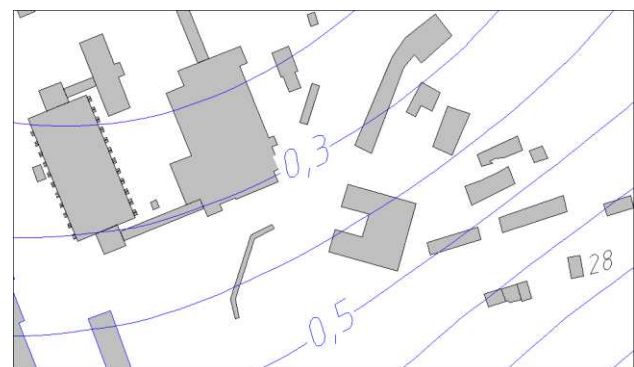


Рисунок 3. Результаты прогноза оседаний на 2020 г.



Рисунок 4. Результаты прогноза горизонтальных деформаций на 2020 г.

Инженерно-геологические элементы составляющие основание фундамента представлены в таблице 1.

Таблица 1. Инженерно-геологические элементы

№	Мощность, м	Описание грунта
ИГЭ-1	0,1	Почвенно-растительный слой
ИГЭ-2	0,9	Насыпной грунт: песок мелкий, бурый плотный, малой степени водонасыщения, с остатками строительного мусора, в кровле слоя до глубины 0,2 м щебень известняка с песчаным заполнителем.
ИГЭ-3	0,9	Песок мелкий, рыжевато-коричневый, плотный, малой степени водонасыщения
ИГЭ-4	2,7	Глина коричневатая-серая, лёгкая пылеватая, полутвёрдая, в подошве слоя с линзами суглинка тяжелого пылеватого, твёрдого, с неравномерным содержанием дресвы и щебня мергеля и известняка
ИГЭ-5	2,9	Дресвяный грунт, дресва и щебень известняка, мергеля 50-60%, участками до 70%. Заполнитель суглинок серовато-коричневый полутвёрдый.
ИГЭ-6	вскр. 7,5	Известняк тёмно серый, в кровле малопрочный, трещиноватый, выветрелый, в интервале глубин 11-13 м с прослоем мергеля.

В зданиях с кирпичными стенами наиболее типичными дефектами являются трещины, характер которых соответствует форме деформаций земной поверхности [1, 2]. Основным источником деформаций здания церкви являются горизонтальные деформации земной поверхности, которые приводят к сложному растяжению церкви относительно продольной оси. Здание церкви построено по канонам и содержит в себе необходимые элементы (строительные объёмы): колокольню, притвор, трапезную, среднюю часть, алтарь. В настоящее время здание имеет повреждения характерные для совместного

действия растягивающих деформаций и изгиба.

Наибольшие повреждения имеют наружные стены средней части, а также внутренние стены средней и трапезной частей. Свод центральной части храма разделён поперечными трещинами на отдельные арки. Ширина раскрытия трещин в своде достигает 12 мм. Строительные конструкции колокольни не имеют видимых дефектов и повреждений.

Наиболее характерные повреждения кирпичных сводов и стен показаны на рисунке 5.



Рисунок 5. Трещины над оконными проёмами средней части, разделяющие свод на отдельные арки.

Таким образом, общая картина напряженно-деформированного состояния здания храма характеризуется комплексным воздействием деформаций изгиба и растяжения грунтового основания. Характер повреждений выявленных в результате визуального осмотра подтверждает выводы, основанные на анализе изолиний оседаний и горизонтальных перемещений поверхности грунта.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимо изучить возможность сохранения исторического памятника с помощью математического моделирования системы

здание – грунтовое основание, разработав мероприятия по предотвращению дальнейшего разрушения строительных конструкций в результате деформаций земной поверхности.

При сдвигении земной поверхности основными показателями, позволяющими прогнозировать и оценивать состояние зданий и сооружений, являются: оседание земной поверхности η , радиус кривизны R и горизонтальные деформации земной поверхности ε в основаниях зданий. Механическая безопасность и эксплуатационная пригодность отдельного здания зависит от его расположения относительно мульды сдвижения.

В настоящее время для оценки несущей способности зданий и прогнозирования развития процесса деформирования применяется численное моделирование и современные программные комплексы. Для выполнения расчетов реальный физический объект заменяется некоторой аппроксимирующей (расчетной) моделью [3, 4].

В программном комплексе ANSYS построена комплексная модель фундамента здания и грунтового основания. К выделенному грунтовому объёму приложены кинематические граничные условия, соответствующие наблюдаемым деформациям земной поверхности.

Расчётные области выбраны на основании прогнозных данных по изолиниям растяжения и оседания на 2020 год (см. рис. 3, 4).

На рис. 6 представлен план расчётной модели, с нанесёнными значениями перемещений соответствующих изолиниям рис.3. Величины горизонтальных перемещений модели составляют 0,5 м и 1,5 м для северной и южной границ соответственно. Граничные условия заданы следующим образом: по граням AD, AB и BC приложены симметричные граничные условия; к грани DC приложены перемещения по нормали к прямой DC (в плоскости OXY) на величину равную разности значений изолиний; на основание модели наложен запрет перемещений по оси Z.

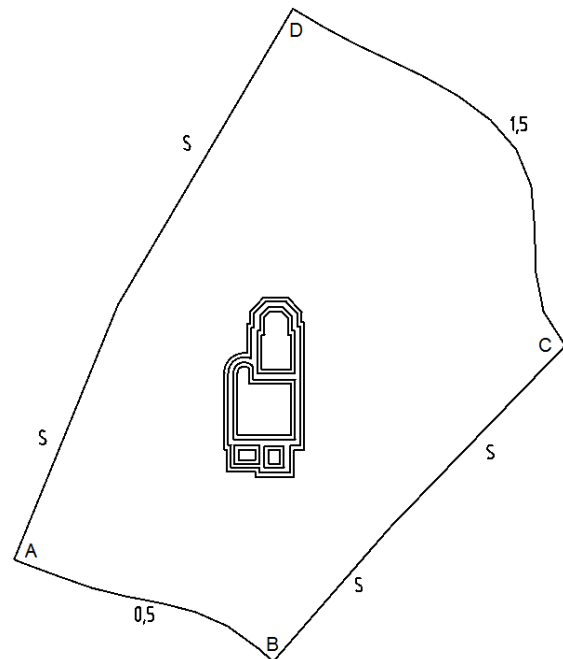


Рисунок 6. План при растяжении.

На рис. 7 представлен план расчётной модели, с нанесёнными значениями оседаний соответствующих изолиниям рис.4.

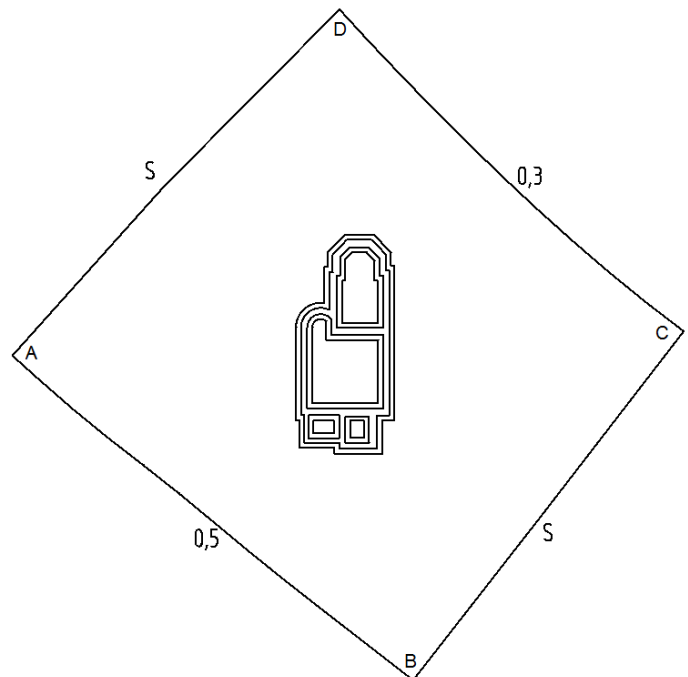


Рисунок 7. План при оседании.

Величины оседаний модели составляют: 0,5 м и 0,3 м для северной и южной границ, соответственно. Граничные условия заданы

Численное моделирование усиления грунтового основания храма, расположенного на подработанной территории

следующим образом: по граням AD, и BC приложены симметричные граничные условия, а также перемещения вдоль оси Z по линейному закону с максимальным значением 0,2м; грань CD жестко закреплена; на грань AB приложены симметричные граничные условия, а также перемещения в направлении оси Z на величину 0,2 м; на основание модели приложены перемещения вдоль оси Z по линейному закону.

4. УСИЛЕНИЕ ГРУНТОВ СТРУЙНОЙ ЦЕМЕНТАЦИЕЙ

Для снижения негативного воздействия деформаций земной поверхности на конструкции здания предлагается выполнить усиление грунтов при помощи технологии струйной цементации [5]. Грунтоцементные элементы диаметром 500 мм выполняются с шагом 400 мм, что обеспечивает сплошность усиления [6 - 8]. Усиление выполняется в виде ленты с поверхности земли до отметки 6 м ниже уровня подошвы бутобетонного фундамента. Общая высота усиления 8 м, ширина 2,8 м. Расчетная схема усиленного фундамента здания показана на рис. 8.

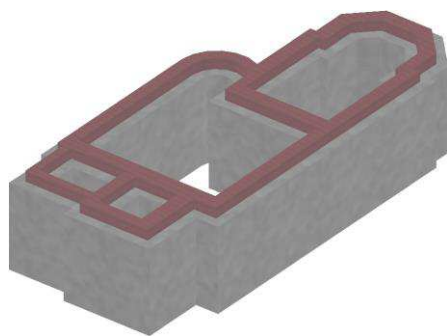


Рисунок 8. Модель усиленного фундамента здания при помощи технологии струйной цементации

Физико-механические характеристики грунтоцементных элементов: $E_{гц} = 700$ МПа – модуль упругости; $R_{гц} = 2$ МПа - предел прочности на одноосное сжатие.

Вмещающий грунтовый массив смоделирован упругим телом с осреднённым модулем упругости грунта равным $E_r = 100$ МПа.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

В программном комплексе ANSYS выполнены независимые расчёты моделирующие процесс растяжения и оседания земной поверхности.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчётов в виде изополей перемещений в грунте при горизонтальных деформациях земной поверхности.

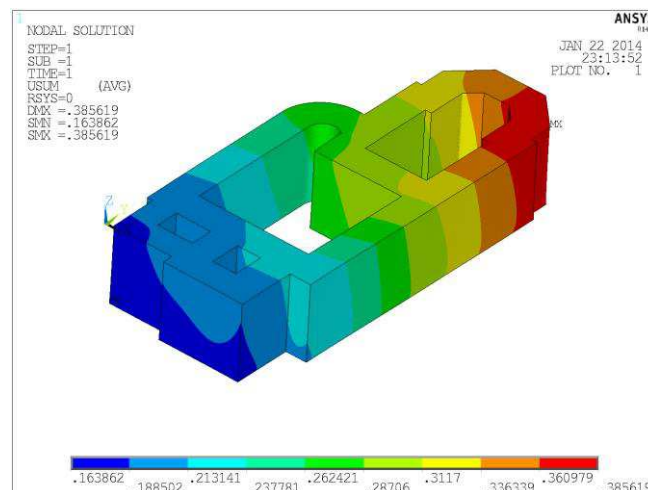


Рисунок 9. Перемещения усиленного грунта при растяжении.

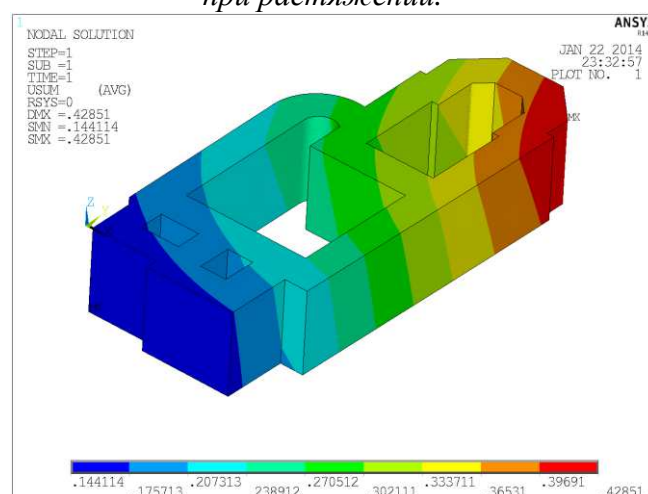


Рисунок 10. Перемещения не усиленного грунта при растяжении.

На рисунках 11, 12 представлены результаты расчётов в виде изополей перемещений при оседании земной поверхности.

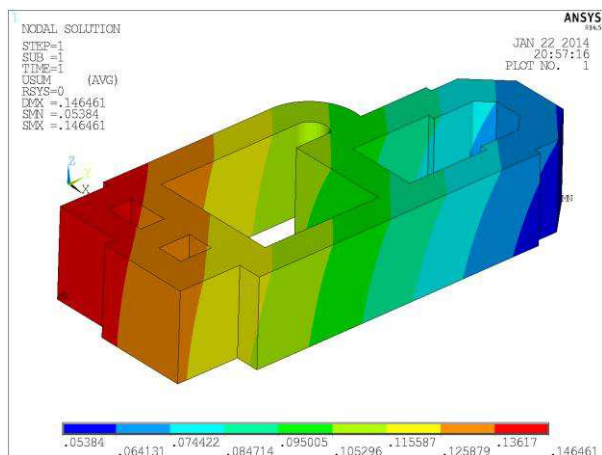


Рисунок 11. Перемещения усиленного грунта при оседании.

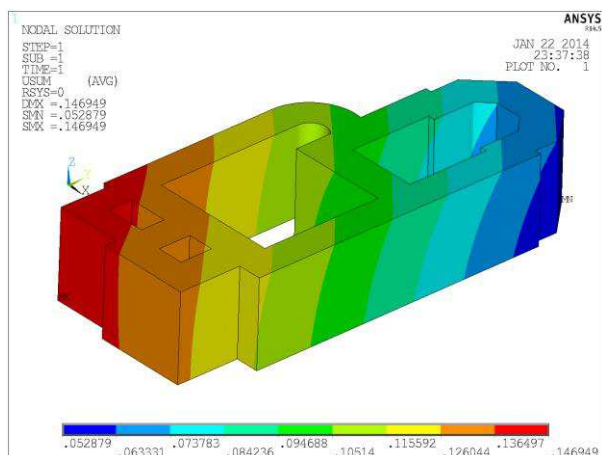


Рисунок 12. Перемещения не усиленного грунта при оседании.

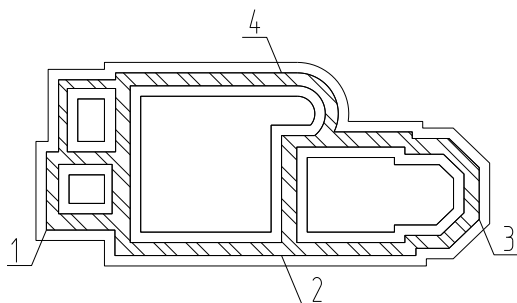


Рисунок 13. Схема расположения контрольных точек.

В таблице 2 приведены величины перемещений в контрольных точках здания, которые указаны на рис. 13.

Таблица 2. Перемещения точек фундамента

	Усиленный фундамент	Не усиленный фундамент	Разница, %
Растяжение вдоль здания, м	0,22	0,29	24,1
Растяжение поперёк здания, м	0,049	0,079	38,0
Оседание, м	0,093	0,094	1,1

ВЫВОДЫ

Из анализа результатов расчётов видно, что при усилении грунтов основания продольные деформации фундамента снижаются на 24%, поперечные деформации снижаются на 38%.

Усиление фундамента церкви путём повышения физико-механических характеристик грунтов основания при помощи технологии струйной цементации эффективно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашеварова Г.Г., Фаизов И.Н., Зобачева А.Ю. Конструктивные меры защиты зданий и сооружений на подработанной территории. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2010. № 1. Изд-во ПГТУ, Пермь. С. 72-77.
2. Ермаков В.В., Патраков А.Н. Мониторинг несущих строительных конструкций жилых зданий, построенных на подработываемых территориях без конструктивных мер защиты. Вестник ПГТУ «Строительство

- и архитектура» №1. Изд-во ПГТУ, Пермь. 2010. с.63-71.
3. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Изд-во «Сталь», 2002. 600 с.
 4. **А.М. Белостоцкий, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов, Г.Г. Кашеварова** Математическое моделирование техногенной безопасности ответственных строительных объектов мегаполисов. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций.* 2010. Т. 06. № 1-2. С. 45-64.
 5. **Малинин А. Г.** Струйная цементация грунтов: Монография / А. Г. Малинин. – Пермь: Пресстайм, 2007. – 168 с.
 6. **Кашеварова Г.Г., Хусаинов И.И., Маковецкий О.А.** Опыт применения струйной цементации для устройства подземных частей комплексов. Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. № 31-2. С. 258-263.
 7. **И.И. Хусаинов, О.А. Маковецкий, Г.Г. Кашеварова.** Сравнительный анализ опытных и расчетных деформаций грунтового массива, закрепленного струйной цементацией. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций.* 2012. Т. 08. № 2. С. 126-131.
 8. **Galina G. Kashevarova, Oleg Makovetsky, Igiz Khusainov.** Experience in Application of “JET Grouting” for Installation of Substructures of Estates. *Frontier in Geotechnical Engineering (FGE) Volume 2 Issue 2, June 2013.*
-
- Воробьев Александр Владимирович, аспирант кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета. 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, e-mail: km02@yandex.ru.
- Фаизов Игорь Николаевич, доцент кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета. 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, e-mail: infaizov@mail.ru.
- Кашеварова Галина Геннадьевна, доктор техн. наук, профессор, зав.кафедрой. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительных конструкций и вычислительной механики, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ggkash@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Г.Г. Кашеварова, Р.В. Севастьянов, Ю.Е. Курбатов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РОССИЯ

Аннотация: Задача прогнозирования долговечности конструкций, зданий и сооружений является одной из наиболее актуальных и важных задач в строительстве. В данной статье авторами предложена математическая модель накопления повреждений для численного моделирования усталостной долговечности бетона, представлены результаты вычислительных экспериментов с разным уровнем прикладываемой к модели нагрузки, построена усталостная характеристика бетонного материала – кривая Вёлера. На основании разработанной методики сформулирован алгоритм исследования усталости строительных конструкций с применением математического и физического моделирования.

Ключевые слова: долговечность конструкций, усталостная прочность бетона, кривая Вёлера, математическое моделирование, численный эксперимент

MATHEMATICAL SIMULATION OF CONCRETE FATIGUE STRENGTH UNDER CYCLIC LOADING

Galina G. Kashevarova, Roman V. Sevastyanov, Yuri E. Kurbatov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: The problem of forecasting the durability of structures, buildings and structures is one of the most urgent and important tasks in construction. In this paper, the authors propose a mathematical model of damage accumulation for the numerical simulation of the fatigue life of concrete. The results of numerical experiments with different levels of the applied load to the model are given, the fatigue characteristics of concrete material - Wohler curve - is built. On the basis of the developed method, the algorithm for research building designs using mathematical and physical modeling is formulated.

Key words: durability of structures, the fatigue strength of concrete, Wohler curve, mathematical modeling, numerical simulation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка долговечности или длительной прочности строительных конструкций является одной из наиболее актуальных и важных задач в строительстве, как в рамках задачи о прогнозировании ресурса конструкции, так и в задаче моделирования прогрессирующего разрушения здания или сооружения, где также требуется использование кинетических уравнений. Одной из составляющих данной задачи является проблема прогнозирования усталостных свойств стро-

ительных конструкций, находящихся под воздействием циклических нагрузок.

Бетон - традиционно применяемый в строительстве конструкционный материал, который можно рассматривать как классический композит, механические свойства которого определяются с позиции аппарата механики композитов. Механика разрушения композиционных материалов представляет собой сложный процесс, обусловленный как рассмотрением компонентов композита на разных масштабных уровнях, так и различными свойствами самих компонентов, входящих в состав композита. В частности, поведение

композиционных материалов под воздействием циклического нагружения зависит от многих факторов, в том числе от состава и структуры материала. Авторами данной статьи была поставлена цель: разработать методику оценки несущей способности бетонных строительных конструкций, находящихся в условиях действия значительных нестационарных нагрузок, путем моделирования структурных механических свойств бетона. Разрушение бетонного материала происходит в результате необратимого накопления повреждений в цементных компонентах бетона. Зная усталостные характеристики цементного материала, полученные опытным путём, можно присвоить их соответствующим элементам численной модели бетона.

2. ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Проведение вычислительного эксперимента позволяет получить поверхность длительной прочности всего композита, формализованную в виде кривой Вёлера [1] для всего бетонного материала в целом и в дальнейшем использовать её при расчетах усталостной долговечности строительных конструкций зданий и сооружений.

Для реализации численного эксперимента была принята упрощенная структурная модель бетона, представленная на рисунках 1 и 2.

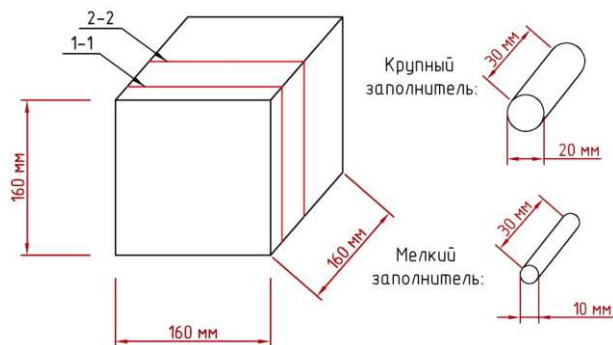


Рисунок 1. Структурная модель бетона.

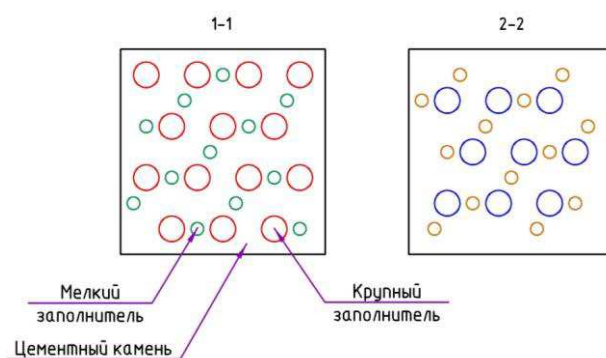


Рисунок 2. Компановка заполнителя.

Постановка краевой задачи в данном случае является традиционной для структурно-феноменологического подхода. Ниже приведены основные соотношения теории упругости и механики разрушения [2].

$$\sigma_{ij,j}(r) + F_i(r) = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(r) = \frac{1}{2}(U_{i,j}(r) + U_{j,i}(r)) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}(r)(I_{ijkl} - \Pi_{ijkl}(r))\varepsilon_{kl}(r) \quad (3)$$

$$\Pi_{ijkl}(r) = \begin{cases} I_{ijkl}, & \text{если } \Pi = 1 \\ 0, & \text{если } \Pi < 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Pi(r) = \int_{\tau} \Pi(r, K, T, H) d\tau \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} \times n_j = F_i \quad (6)$$

$$u|_{\Gamma} = u^* \quad (7)$$

Тензоры жесткости, поврежденности и полей напряжения зависят от радиус-вектора (пространственных координат). Тензор поврежденности 4-го ранга является бинарным и принимает значения нулевого или единичного тензора скачкообразно, в зависимости от того, достигла ли скалярная поврежденность значения единицы.

Механизм усталостного разрушения композиционных материалов напрямую зависит от неоднородности их реальной структуры [3]. Для оценки усталостной долговечности бетона при заданных условиях необходимо постоянно отслеживать процесс накопления повреждений в материале. Накопленные экспериментальные данные говорят о слож-

ном характере физических процессов, протекающих при этом в материале [4].

Описание кинетики разрушения сводится к определению величины повреждений, накопленных за произвольный промежуток времени. В обзорной статье [5] описаны основные подходы к определению величины накопленных повреждений, которую в общем случае принято называть поврежденностью материала.

Множественность элементарных актов разрушения является отличительной особенностью усталостной работы материала. Распределение напряжений и деформаций по объему бетона происходит неоднородно, в результате чего процессы накопления повреждений в отдельных точках объема протекают неодинаково. В процессе циклического нагружения происходит разрушение отдельных структурных элементов. В результате каждого такого разрушения происходит перераспределение напряжений и при определении значения поврежденности материала в каждой точке объема необходимо последовательно менять закон накопления повреждений в соответствии с новой картиной НДС. Таким образом, усталостное накопление повреждений следует рассматривать как процесс наследственного типа.

3. МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Для численного моделирования усталостной долговечности бетона авторами была разработана модель накопления повреждений, которая основана на гипотезе Болотина об автономности данного процесса [6]. С целью упрощения поставленной задачи заполнитель был принят абсолютно неразрушаемым материалом, прочностные характеристики которого на порядок больше цементного компонента. Таким образом, задача определения усталостной долговечности бетона свелась к определению количества цик-

лов, приложенных до момента полного разрушения цементной составляющей бетона.

Поврежденность цементного материала можно представить как функцию, зависящую от критерия нагружения K и текущего времени нагружения T . При этом функция $\Pi = f(K, T)$ в рамках разработанной модели может быть построена на основании реперных кривых, полученных в результате натурных испытаний цементных образцов и изображена в виде поверхности повреждения (рис. 3). Сечение поверхности повреждения плоскостью $\Pi = 1$ по сути своей является усталостной характеристикой цементного материала, т.е. кривой Вёлера

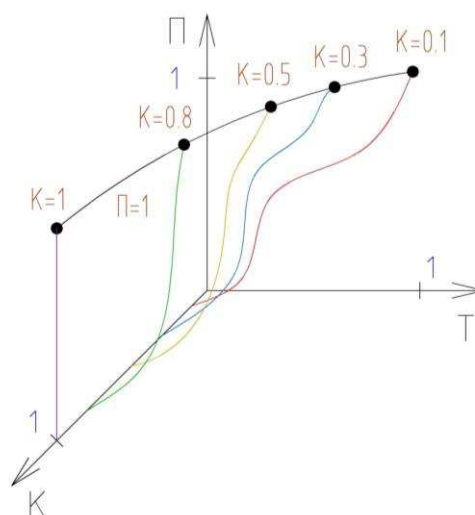


Рисунок 3. Поверхность поврежденности, состоящая из реперных кривых.

Описанная модель накопления повреждений использовалась для вычисления на каждом этапе нагружения текущих поврежденностей цементных элементов бетона, единичные значения которых могут служить индикатором разрушения. Пошаговое моделирование процесса накопления повреждений на ЭВМ с учетом постоянного перераспределения напряжений и уже накопленной поврежденности элементов дает возможность учитывать влияние истории нагружения на усталостную характеристику бетона.

Зерна заполнителя, имеющие форму цилиндров, и цементный камень моделировались в соответствии с [7] путем послойного выдав-

ливания плоских фигур (см. рис. 2). Вид геометрической модели бетона, созданной в ANSYS, показан на рис. 4.

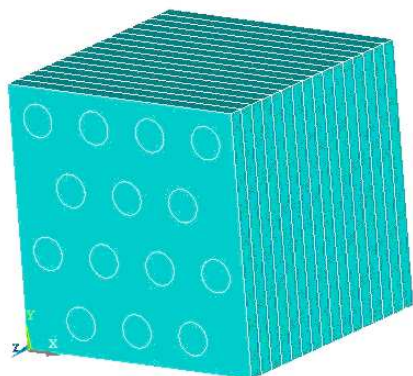


Рисунок 4. Расчетная модель бетона

Для каждого типа материала (в данном случае их 2 – заполнитель и цементный камень) были определены свои физические свойства, необходимые для решения данной задачи. Свойства назначались соответствующим объемам еще до разбиения на конечные элементы. В рамках данной задачи для описания свойств материалов были использованы два показателя – модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ , значения которых приведены в [8] (щебень – $E = 47$ кН/м², $\mu = 0,25$; цементный камень - $E = 25,3$ кН/м², $\mu = 0,28$).

Для реализации построенной модели бетона был выбран конечный элемент SOLID65, предназначенный для моделирования объемных тел. Общее количество конечных элементов после разбиения составило 52682, из них 42188 элементов являлись компонентами цементного камня.

В соответствии с поставленной задачей для построения полноценной кривой Вёлера бетонного материала вычислительный эксперимент необходимо воспроизвести несколько раз при различных значениях (уровнях) нагрузки (см. табл. 1).

Таблица 1. Уровни нагружения

№	1 ($0,1 \sigma_B$)	2 ($0,5 \sigma_B$)	3 ($0,9 \sigma_B$)
Нагрузка, Па	4903350	24516750	44130150

Растягивающая нагрузка прикладывалась в виде равномерно распределенной по одной из плоскостей модели. При этом противоположная сторона модели была закреплена от всех возможных перемещений и поворотов. Для имитации разрушения элементов в процессе выполнения программы расчета применялась опция “Рождение и смерть элемента”, позволяющая активировать или деактивировать конечные элементы. Алгоритм проведения расчета в ПК ANSYS был реализован на параметрическом языке программирования APDL [9].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

В ходе выполнения вычислительного эксперимента было проведено три серии расчетов численной модели бетонного композита. Каждая серия характеризовалась своим значением (уровнем) прикладываемой к модели нагрузки. Значения усталостной долговечности бетонного материала, полученные в результате расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2. Значения усталостной долговечности расчетной модели.

Нагрузка σ		Количество циклов до разрушения N
Нормированные значения (безразмерные)	Натуральные значения (Па)	
0,1	4 903 350	29 622 300
0,5	24 516 750	7 041 450
0,9	44 130 150	114 800

На основании полученных данных можно построить кривую Вёлера (см. рис. 5), которая будет являться усталостной характеристикой бетонного материала и может в дальнейшем использоваться при расчетах кон-

струкций, зданий и сооружений на усталостное разрушение.

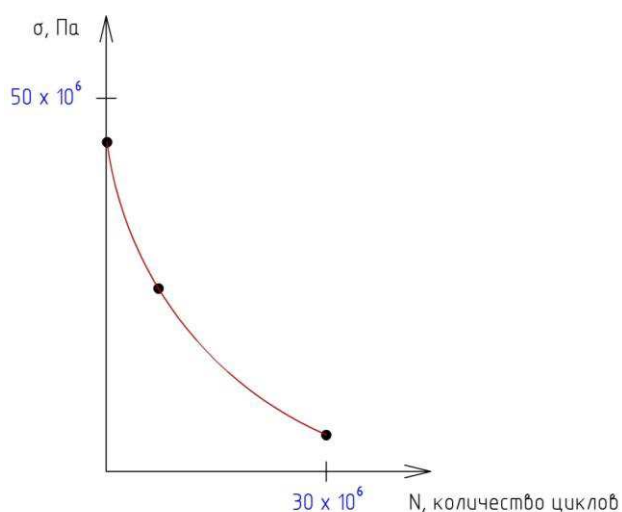


Рисунок 5. Кривая Вёлера для бетонного материала

При разработке гипотезы накопления повреждений было выдвинуто теоретическое предположение о том, что разрушение модели бетона произойдет, когда разрушатся все цементные элементы. На практике при выполнении вычислительного эксперимента было выявлено, что модель теряет свою целостность, прочностные и жесткостные характеристики задолго до разрушения всего цементного камня. Так, на определенном этапе моделирования система выдавала сообщение о том, что происходит движение твердого тела в результате нарушения сплошности модели.

На рисунке 6 приведены поля напряжений, иллюстрирующие кинетику накопления необратимых повреждений, снятую для одной из наружных плоскостей модели в различные моменты нагружения.

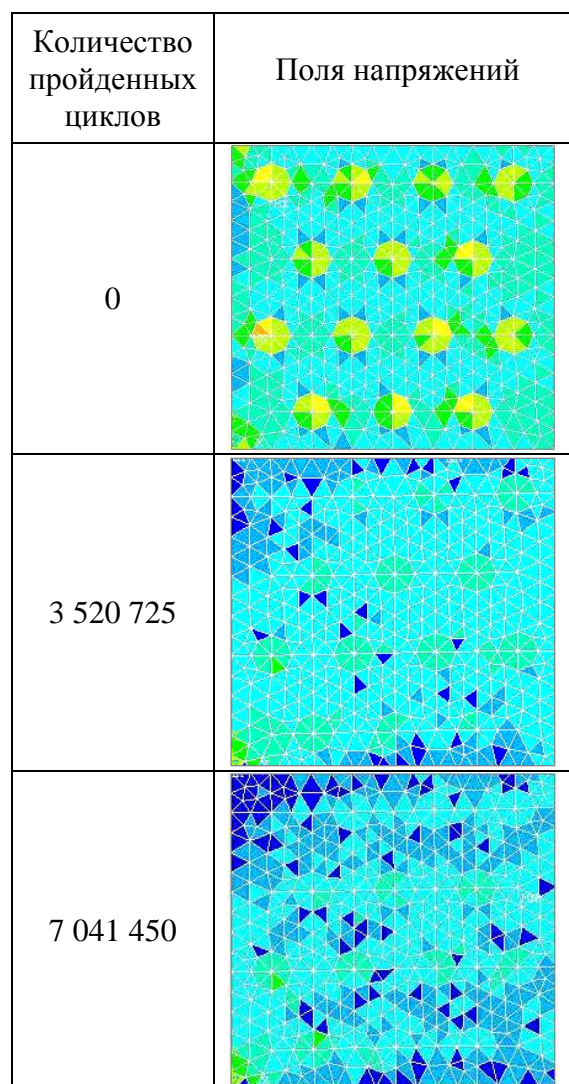


Рисунок 6. Кинетика накопления повреждений на одной из поверхностей “куба”.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании методики, разработанной в данной работе и подтвержденной серией вычислительных экспериментов, можно сформулировать алгоритм исследования усталости строительных конструкций с применением математического и физического моделирования.

1. Проведение полнофакторного натурального эксперимента с целью получения кривых поврежденности цементных образцов;
2. Построение структурно-феноменологической модели, которая

соответствует конкретному классу, марке и прочим характеристикам рассчитываемого бетона;

3. Проведение серии вычислительных экспериментов с целью получения кривой поврежденности для исследуемого бетонного материала;
4. Построение численной модели рассчитываемой конструкции, здания или сооружения;
5. Проведение вычислительного эксперимента (например, в программном модуле ANSYS Fatigue, [10]) с использованием полученной кривой поврежденности и формулирование выводов об усталостной долговечности конструкции.

В результате выполнения указанного расчета можно получить текущие значения накопленной поврежденности в определенных точках конструкции, здания или сооружения. Данная информация позволяет судить о механической безопасности зданий и сооружений на определенном этапе их эксплуатации. Кроме того, разработанная методика может применяться в научных целях для исследования усталостной природы накопления повреждений в композиционных материалах и прогнозирования их разрушения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев А.З. Сопротивление усталости элементов конструкций / А.З. Воробьев, Б.И. Олькин, В.Н. Стебенев и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 240 с.
2. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
4. Фудзии Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
5. Севастьянов Р.В. Модели накопления повреждений строительных материалов при нестационарном термомеханическом воздействии / Р.В. Севастьянов, Ю.Е. Курбатов // Вестник ПНИПУ. Урбанистика. – 2013. - №3(11). – С. 44 – 53
6. Болотин, В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В.В. Болотин. – М., 1984. – 312 с.
7. Чигарев А.В. ANSYS для инженеров / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
8. Каприелов С.С. О регулировании модуля упругости и ползучести высокопрочных бетонов с модификатором МБ-50С / С.С. Каприелов, Н.И. Карпенко, А.В. Шейнфельд, Е.Н.Кузнецов // Бетон и железобетон. – 2003. - №6(525). – С. 8 – 12
9. Котов А.Г. САПР изделий из композиционных материалов. Моделирование процессов деформирования и разрушения в среде ANSYS / А.Г.Котов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 351 с.
10. Берендеев Н.Н. Применение системы ANSYS к оценке усталостной долговечности. / Н.Н. Берендеев. – Нижний Новгород, 2006. – 83 с.

Кашеварова Галина Геннальевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: ggkash@mail.ru .

Севастьянов Роман Валерьевич, старший преподаватель кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: r2777506@yandex.ru.

Курбатов Юрий Евгеньевич, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: malcolm_hawk@mail.ru

О ВЕРИФИКАЦИИ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНОГО СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ЧАСТЬ 2: ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

М.Л. Мозгалева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Статья открывает серию работ, посвященную верификации разработанной авторами усовершенствованной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) применительно к задачам локального расчета трехмерных строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Верификация осуществляется путем сравнения соответствующих результатов (перемещений и напряжений) с данными, полученными с использованием вейвлет-реализации ДКМКЭ без редукции.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, локальный статический расчет, верификация, трехмерные конструкции, кусочно-постоянные физико-геометрические параметры, четырехточечная краевая задача

ABOUT VERIFICATION OF ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF LOCAL STATIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES WITH PIECEWISE CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS ALONG BASIC DIRECTION PART 2: FOUR-POINT BOUNDARY PROBLEM

Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper continues a series of works devoted to the verification of advanced wavelet-based discrete-continual finite element method (wDCFEM) of local structural analysis, proposed by authors. Local static analysis of three-dimensional structures with piecewise constant physical and geometrical parameters along basic direction is under consideration. Verification is performed by comparing the results (displacements and stresses) of linear analysis of three-dimensional structures with the use of wDCFEM without reduction.

Key words: discrete-continual finite element method, finite element method, static analysis, deep beam, piecewise constant physical and geometrical parameters, four-point boundary problem

В настоящей статье продолжено сопоставление решений, полученных с использованием редукции и без нее ([1], [2]), на примере статического расчета трехмерного бруса, состо-

ящего из трех областей. При этом, физико-геометрические характеристики внешних составляющих отличны от серединной части.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Часть 2: Четырехточечная краевая задача

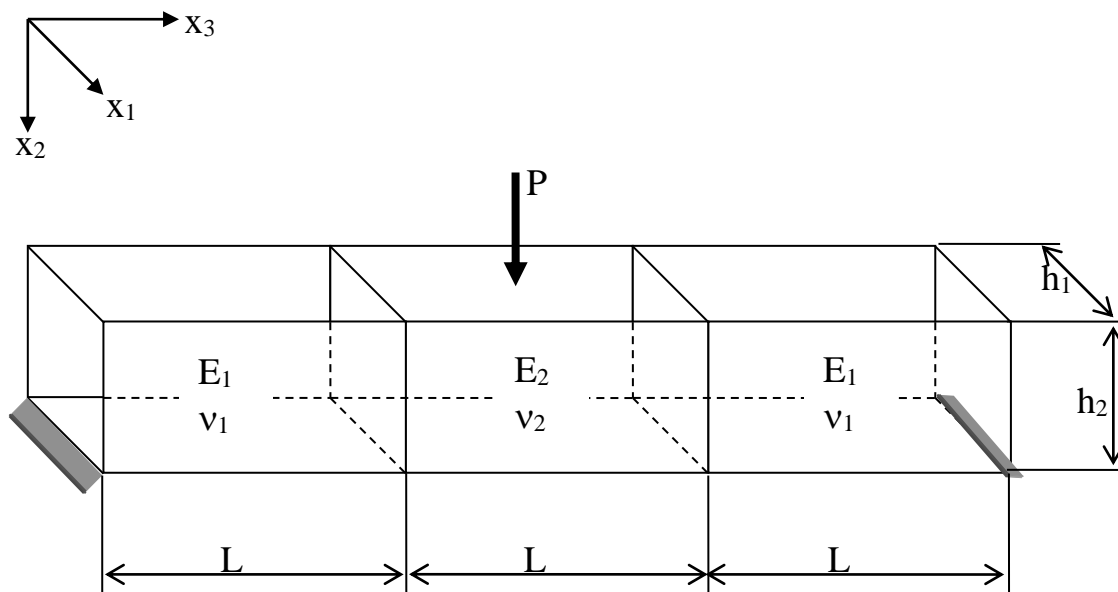


Рисунок 1. К постановке задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется определить НДС трехмерного бруса, закрепленного шарнирно по нижним внешним поперечным ребрам (рис. 1).

Геометрические расчетные параметры одинаковые для каждой составляющей части бруса: $L = 200$ см (длина); $h_1 = 50$ см (ширина); $h_2 = 50$ см (высота). Расчетные параметры материала бруса: для первой и третьей части $E_1 = 3500$ кН/см², $\nu_1 = 0.14$, для второй – $E_2 = 3000$ кН/см², $\nu_2 = 0.16$. Расчетные параметры внешней нагрузки: $P = 100$ кН.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Как уже отмечалось в работе [1], сеточная разбивка поперечного сечения содержит в каждом направлении $N = 2^M$ -узлов. M – максимальный уровень функций Хаара. В рассматриваемом примере $M = 4$. В силу четности количества узлов, в частности по горизонтальному направлению, исходная нагрузка будет сосредоточена в двух центральных узловых точках серединной плоскости поперечного сечения средней части

бруса. Узлы сетки для единичного базиса и задание нагрузки представлены на рис. 2.

N^2 – общее количество узлов сеточной области в единичном базисе для каждой области стыковки, соответственно. В рассматриваемом случае $N^2 = 16^2 = 256$. Каждому узлу соответствует одна базисная сеточная функция-вектор единичного базиса. При решении трехмерной задачи теории упругости дискретно-континуальным методом в каждом узле сосредоточено 6 неизвестных [3], следовательно, общее количество неизвестных для каждой области $6N^2 = 1536$. Таким образом, общее количество неизвестных для всей задачи равно сумме неизвестных по отдельным областям, т.е. $N_s = 3 \cdot 1536 = 4608$.

Сеточная область для рассматриваемого примера при переходе к базису Хаара представлена на рис. 3. При этом получаем 64 узла уровня 0, 16 узлов уровня 1, 4 узла уровня 2 и 1 узел уровня 3. Размерность сеточной области сохраняется, поскольку каждому узлу соответствует три базисные вектор-функции дискретного базиса Хаара, который для полноты дополняется на последнем (3-ем) уровне нормированным константным вектором, т.е.

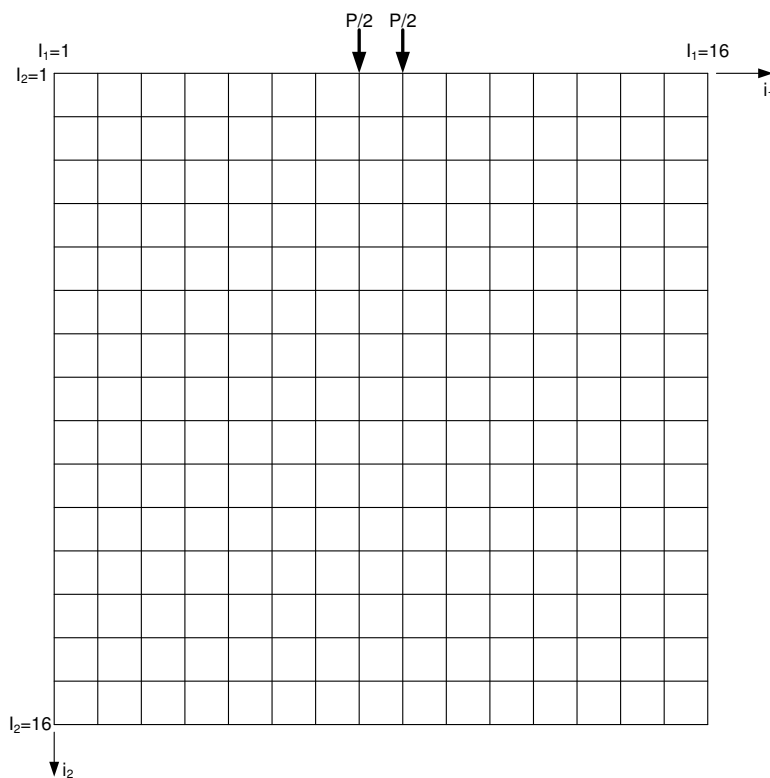


Рисунок 2. Схема приложения нагрузки.

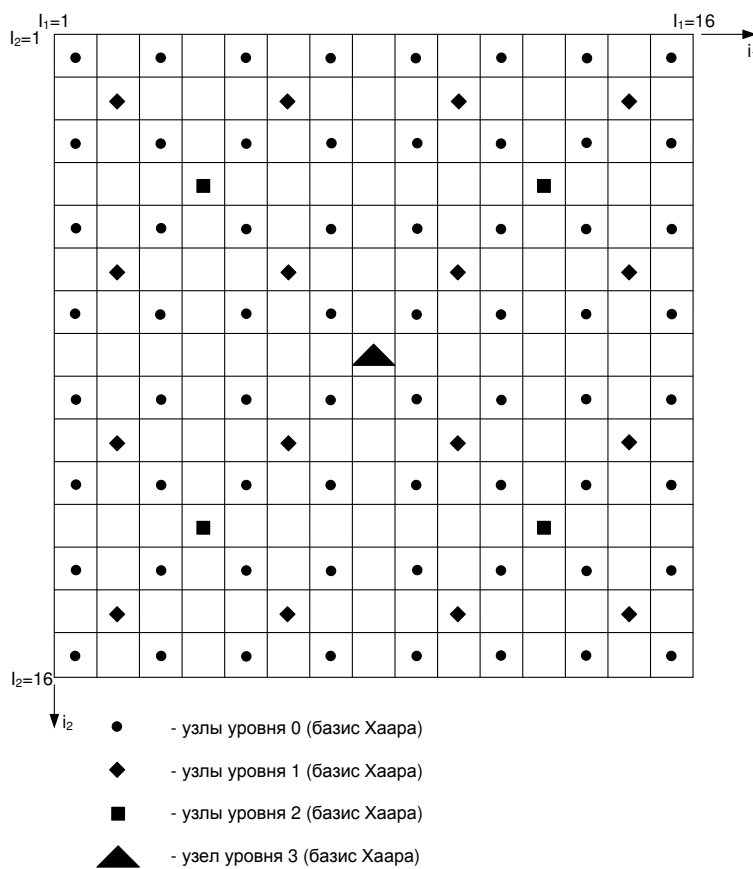


Рисунок 3. Сеточная область при переходе к базису Хаара.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Часть 2: Четырехточечная краевая задача

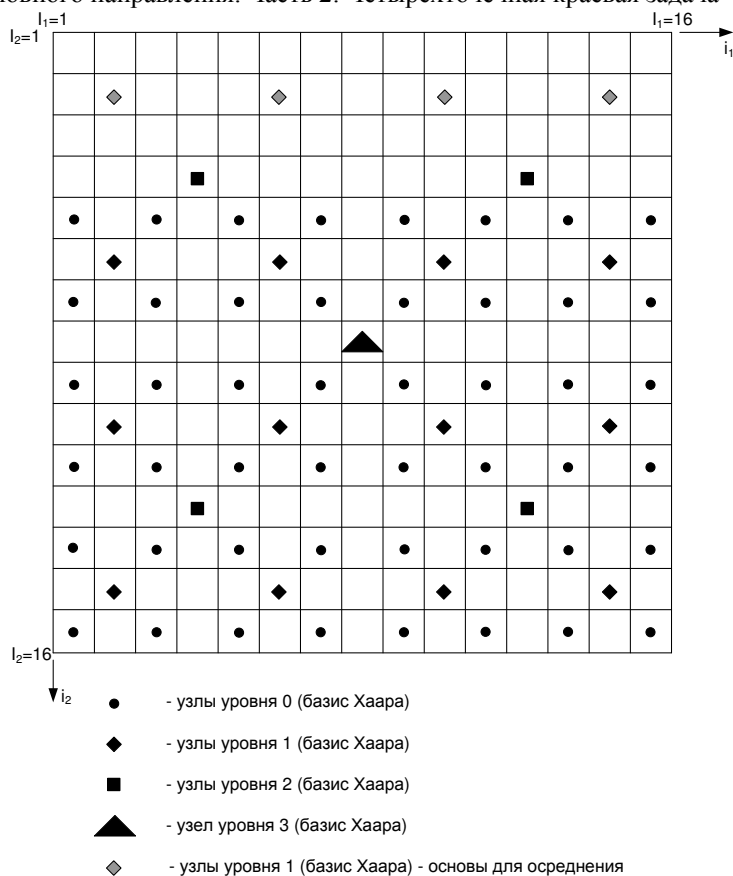


Рисунок 4. Схема редукции задачи.

$$N_H = 3 \cdot (64 + 16 + 4 + 1) + 1 = 255 + 1 = 256.$$

Переход от единичного базиса к базису Хаара является взаимнооднозначным линейным преобразованием. Искомое решение задачи в единичном базисе получаем из результата решения в базисе Хаара, действуя на него обратным преобразованием [3].

3. РЕДУКЦИЯ

Локализация решения для внешних составляющих областей была одинакова – в нижней части сечения, т.к. здесь существенным образом имело место влияние шарнирного закрепления в узлах, расположенных по нижним поперечным ребрам боковых граней (см. рис. 1). Соответственно, редукция была проведена в верхней части сетки. Основами

для осреднения были выбраны узлы 1-го уровня (см. рис. 4).

Для средней части локальное решение рассматривалось в зоне под нагрузкой, т.е. в верхней части сечения. И, следовательно, редукция была проведена для узлов в нижней части сетки. Основами для осреднения были выбраны узлы 1-го уровня (см. рис. 5). Таким образом, размерность сеточной области уменьшилась и составила для каждой из областей значение

$$N_{Hr} = 3 \cdot (48 + 16 + 4 + 1) + 1 = 255 + 1 = 208$$

Соответственно, уменьшилось общее количество неизвестных, т.е.

$$N_{sr} = 3 \cdot 6N_{Hr} = 3 \cdot 6 \cdot 208 = 3744$$

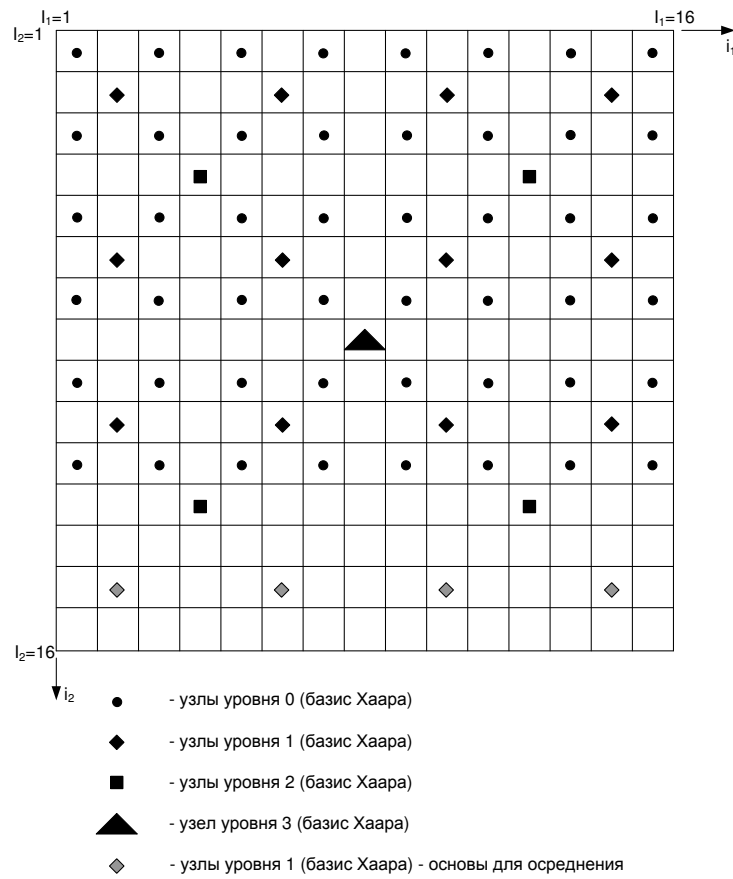


Рисунок 5. Схема редукции задачи.

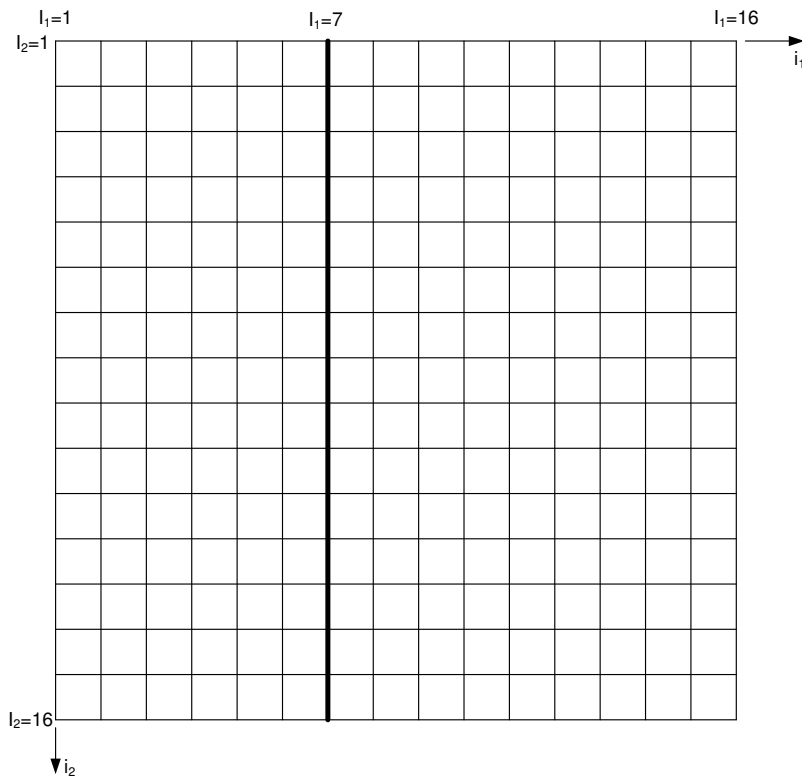


Рисунок 6. Расположение зоны сопоставления результатов.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Часть 2: Четырехточечная краевая задача

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Сопоставление результатов проводилось вдоль высоты сечения, проведенной через седьмой узел по горизонтали (см. рис. 6). Сечение выбрано для каждой из составляющих областей в точке $x_3 = 80\text{ см}$ от начала соответствующей области.

Поскольку для 1-ой и 3-ей областей результаты симметричные, ограничимся представлением графических результатов сравнения компонентов НДС для 1-ой области (см. рис. 7: а), б), в), г), д), е), ж), з)).

Результаты сравнения для средней области (см. рис. 8: а), б), в), г), д), е), ж), з)).

Представленные графические сопоставления позволяют сделать вывод о том, что в зонах локализации в целом имеет место достаточное хорошее совпадение результатов, полученных с использованием редукции и без нее.

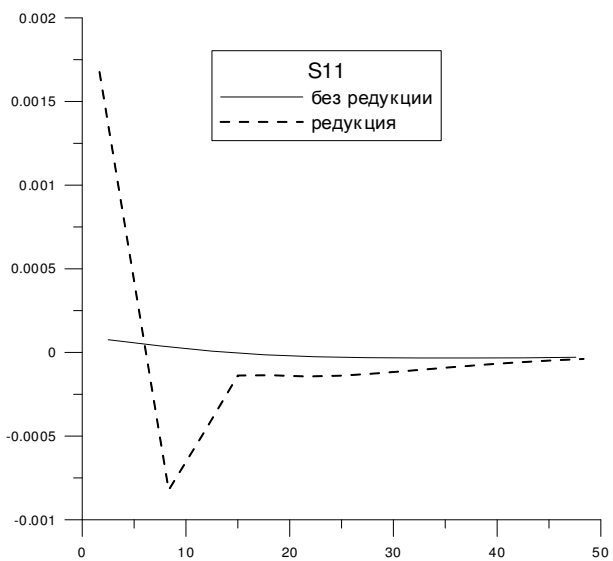
ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

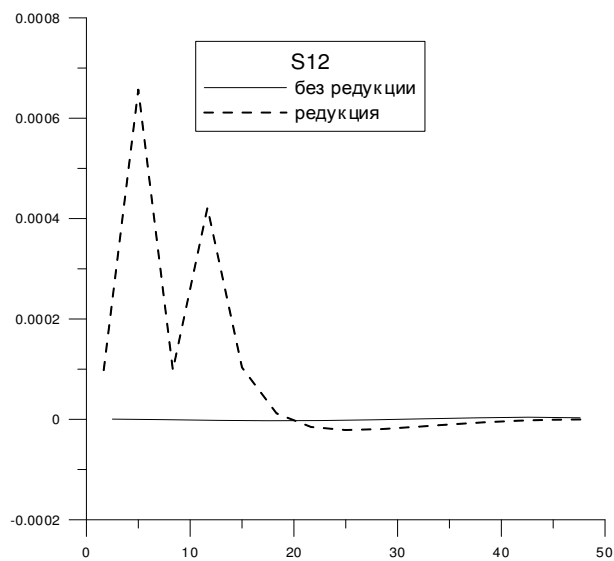
1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

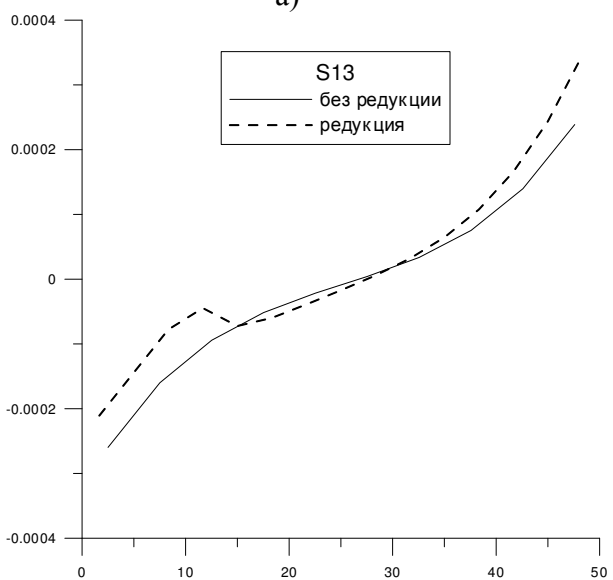
1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problem of Structural Analysis Part 1: Structures with Constant Physical and Geometrical Parameters along Basic Direction. // *Applied Mechanics and Materials* Vol. 709 (2015) pp. 105-108.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problem of Structural Analysis Part 2: Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters along Basic Direction. // *Applied Mechanics and Materials* Vol. 709 (2015) pp. 109-112.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
4. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 3, 2014, pp. 127-136.
5. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 10, Issue 3, 2014, pp. 137-146.



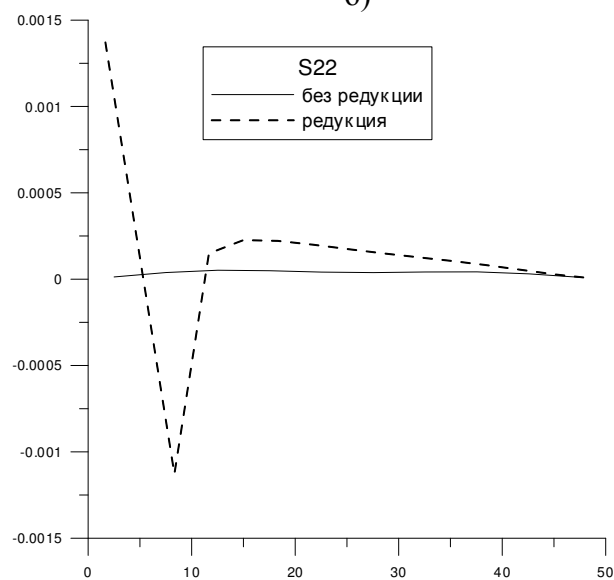
а)



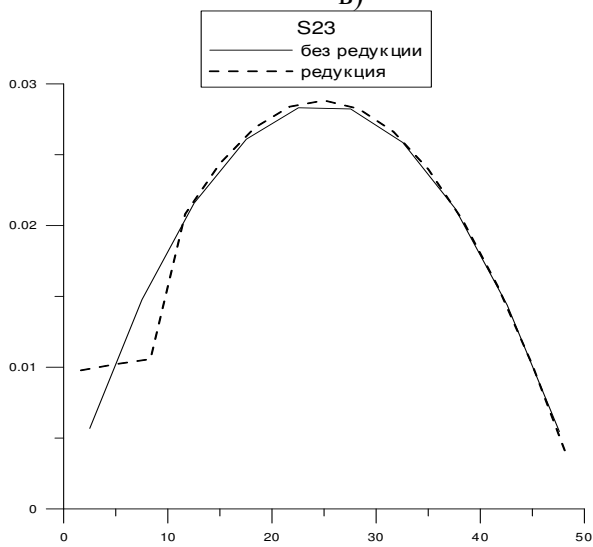
б)



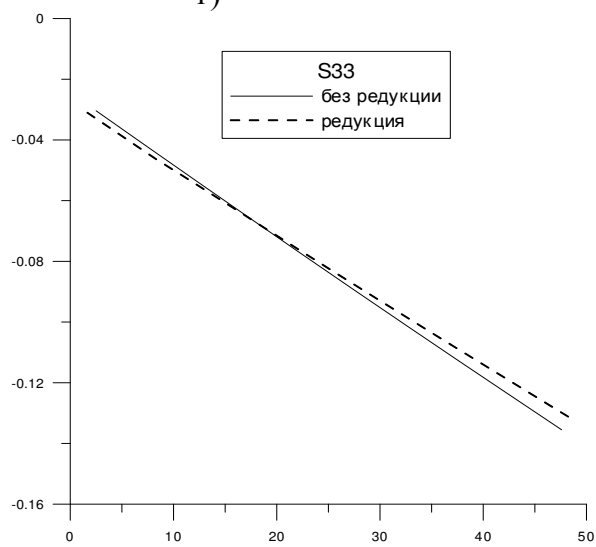
в)



г)



д)



е)

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Часть 2: Четырехточечная краевая задача

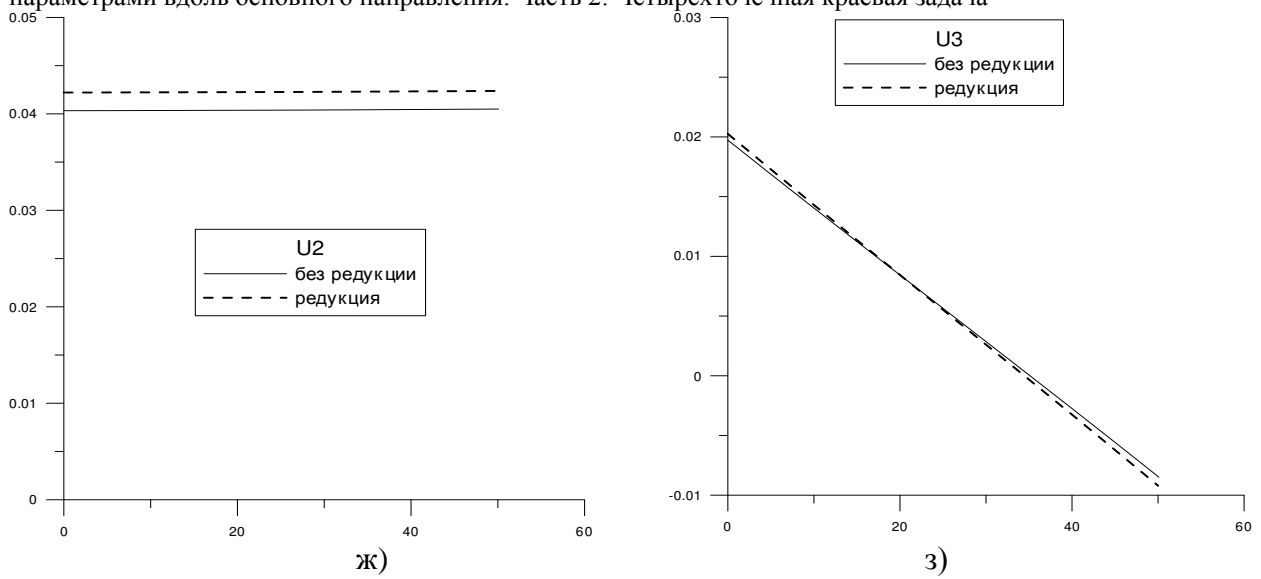
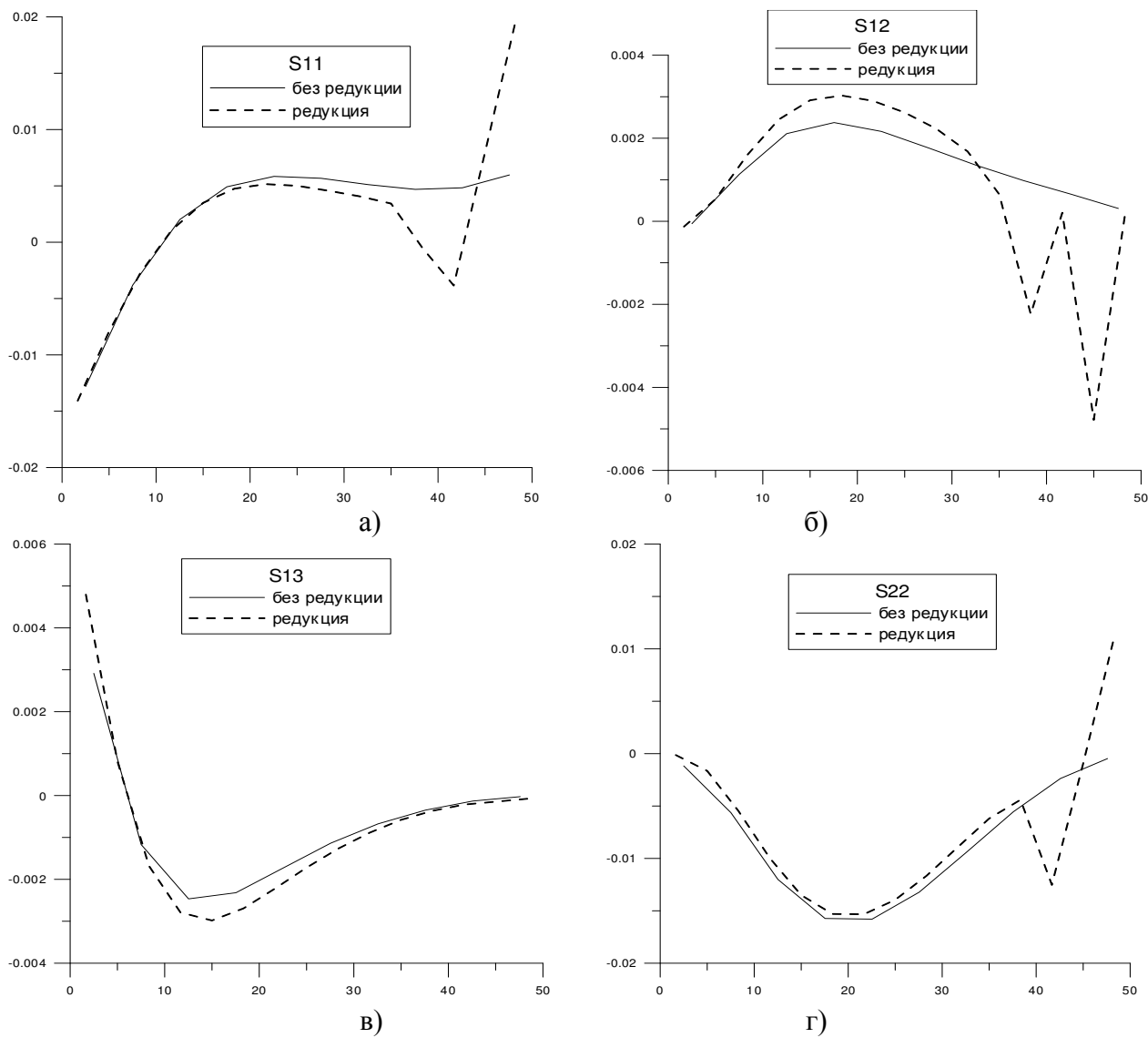
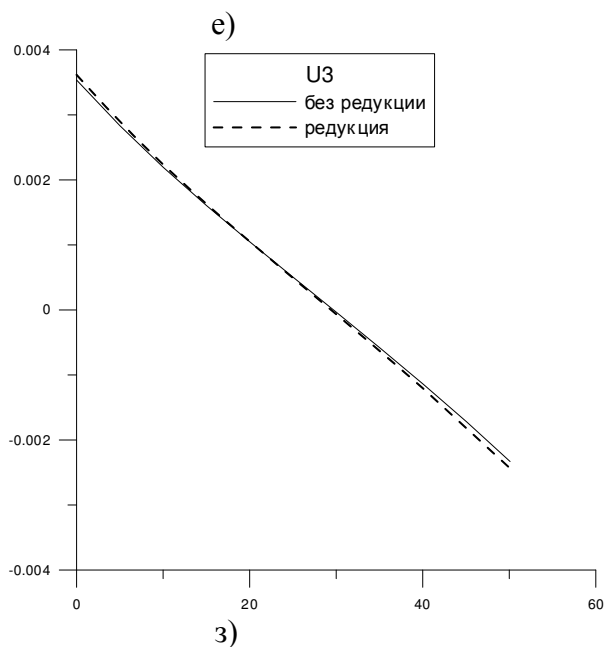
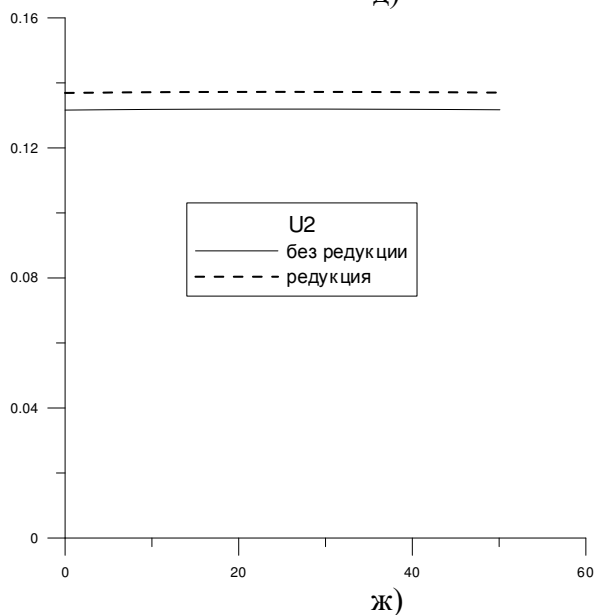
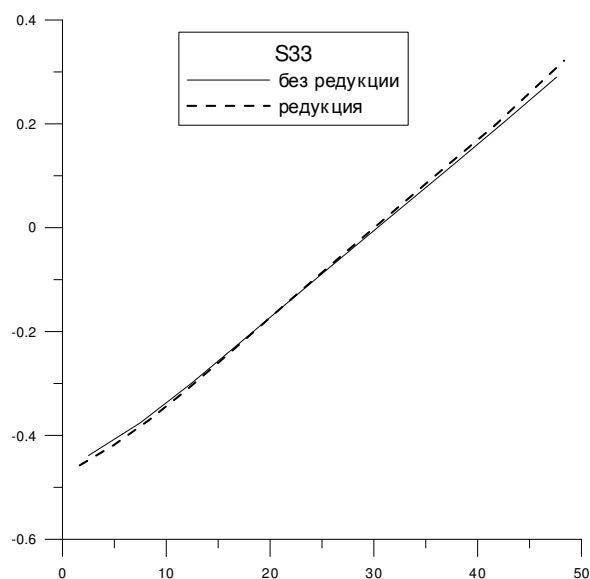
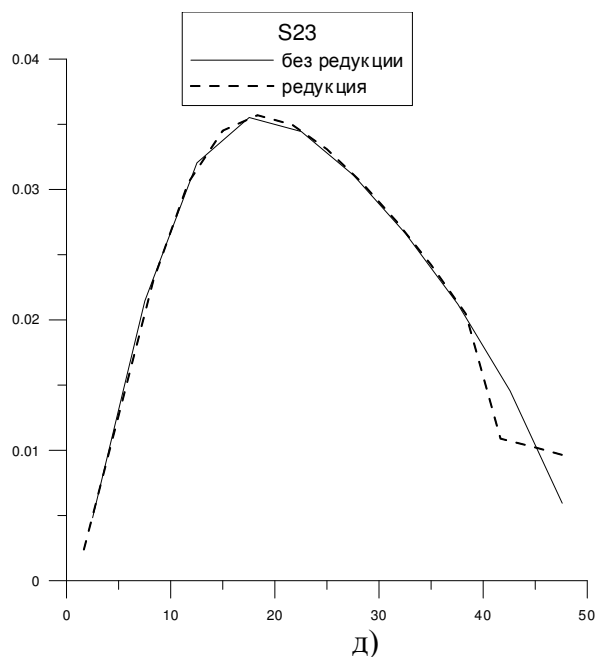


Рисунок 7. Сопоставление результатов.





Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavscoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕДУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЛИТЫ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА В БАЗИСЕ ХААРА

М.Л. Мозгалева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье продолжено сопоставление решений, полученных с использованием редукции и без нее на примере решения задачи об изгибе тонкой плиты. Общий подход к решению такой задачи в рамках дискретно-континуального метода в базисе Хаара, в сочетании с техникой осреднения и редукции изложены в более ранних работах автора.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, локальный статический расчет, верификация, плитные конструкции

USING REDUCTION OF UNKNOWNNS FOR THE PROBLEM OF PLATE ANALYSIS WITHIN DISCRETE-CONTINUAL APPROACH

Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper continues a series of works devoted to comparison of solutions obtained with the use and without reduction for the problems of plate analysis. The general approach to the solution of this problem within wavelet-based discrete-continual approach, in conjunction with the technique of averaging and reduction was presented in earlier papers of the author.

Key words: discrete-continual finite element method, wavelet analysis, local static analysis, verification, plate analysis

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе тонкой квадратной плиты, закрепленной шарнирно в углах под воздействием сосредоточенной в центре нагрузки (рис. 1).

Геометрические расчетные параметры: $L = 2 \cdot 45,72$ см; $h = 4,445$ см (толщина). Расчетные параметры материала плиты: $E = 2860$ кН/см², $\nu = 0.16$. Расчетные параметры нагрузки: $P = 1$ кН.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Основное (континуальное) направление – направление по оси x_2 – продольное сече-

ние. Дискретное направление – направление по оси x_1 – поперечное сечение. Сеточная разбивка поперечного сечения содержит $N = 2^M$ -узлов. M – максимальный уровень функций Хаара. В рассматриваемом примере $M = 5$. В силу четности количества узлов исходная нагрузка будет сосредоточена в двух центральных узловых точках поперечного сечения. Узлы сетки для единичного базиса и задание нагрузки представлены на рис. 2.

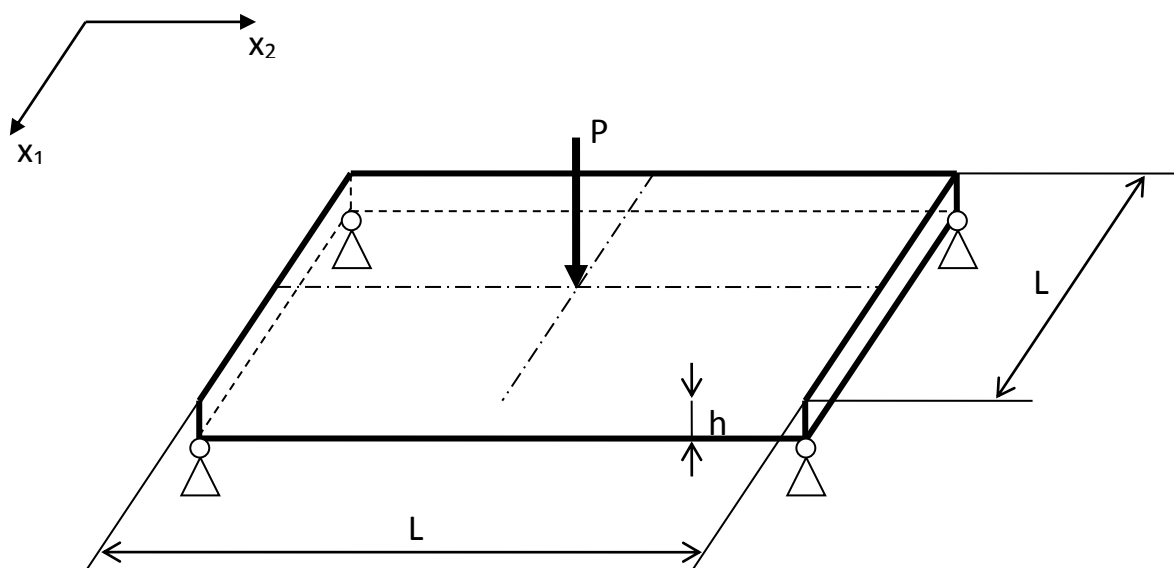


Рисунок 1. Исходная конструкция.

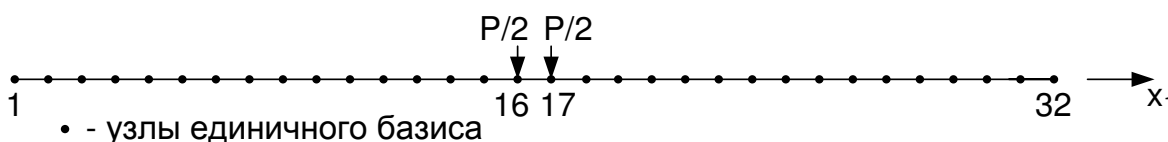


Рисунок 2. Схема приложения нагрузки.

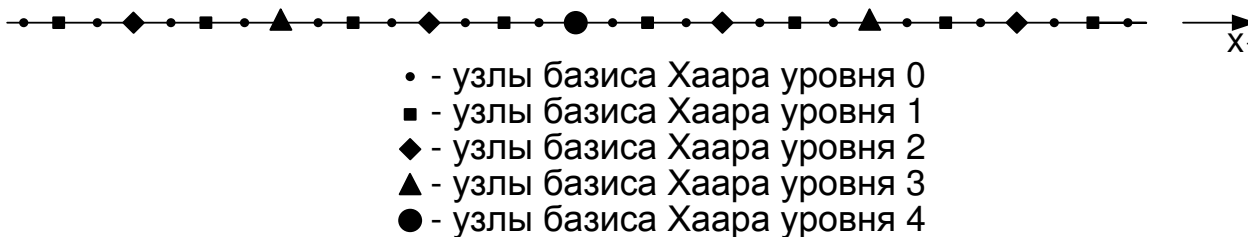


Рисунок 3. Сеточная область при переходе к базису Хаара.

Каждому узлу соответствует одна базисная сеточная функция-вектор единичного базиса. При решении задачи об изгибе плиты дискретно-континуальным методом в каждом узле сосредоточено 8 неизвестных, следовательно, общее количество неизвестных для каждой области $8N = 256$.

Сеточная область для рассматриваемого примера при переходе к базису Хаара представлена на рис. 3.

При этом сохраняется исходная размерность сеточного пространства: получаем 16 узлов уровня 0, 8 узлов уровня 1, 4 узла уровня 2, 2 узла уровня 3, 1 узел уровня 4 и для полноты пространства на последнем (4-ом) уровне к

дискретным функциям Хаара добавляется константный вектор, т.е.

$$N_H = (16 + 8 + 4 + 2 + 1) + 1 = 31 + 1 = 32.$$

Переход от единичного базиса к базису Хаара является взаимнооднозначным линейным преобразованием. Искомое решение задачи в единичном базисе получаем из результата решения в базисе Хаара, действуя на него обратным преобразованием [1].

Использование редукции неизвестных на примере задачи об изгибе тонкой плиты в рамках дискретно-континуального подхода в базисе Хаара

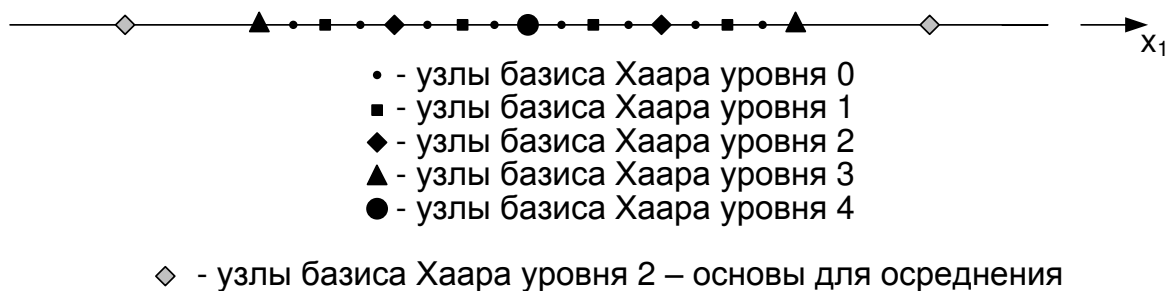


Рисунок 4. Схема редукции задачи.

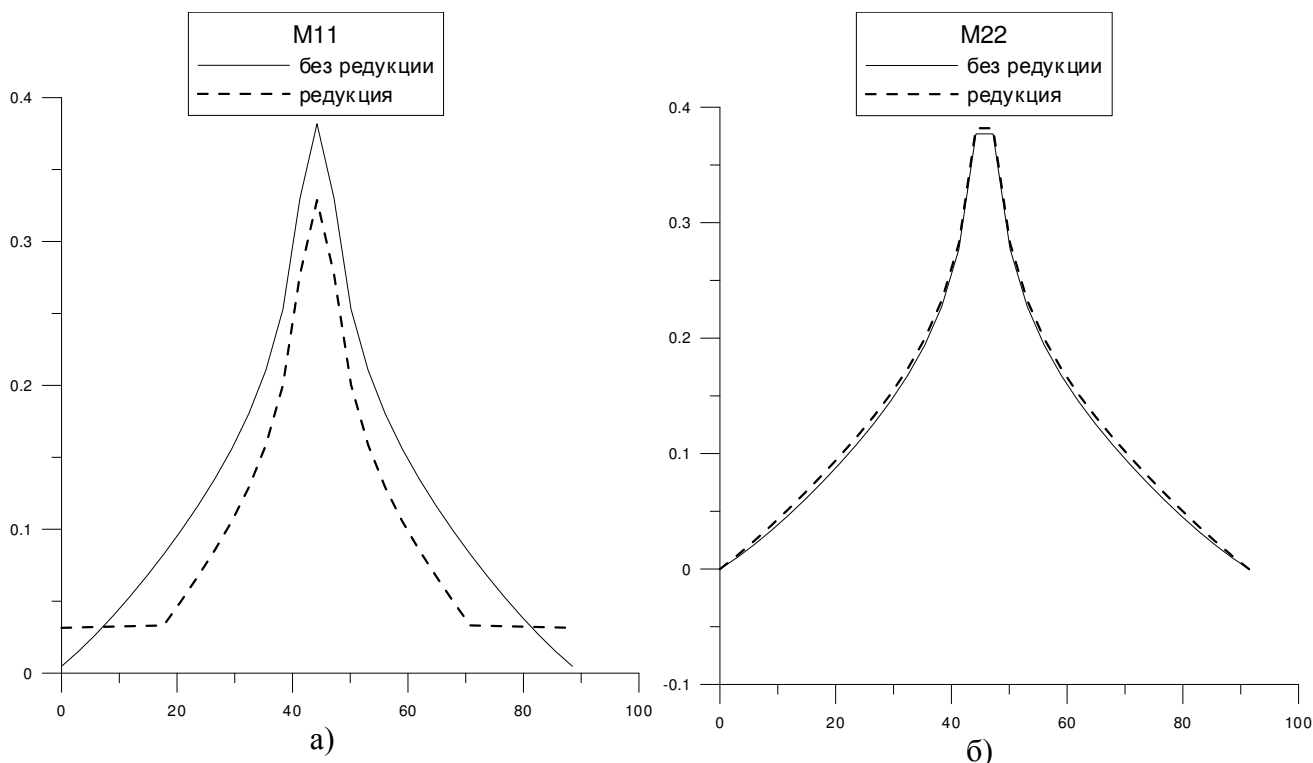


Рисунок 5. Сравнение моментов: а) M_{11} по вертикали в точке $x_2 = 44.245$; б) M_{22} по горизонтали в точке $x_1 = 44.245$.

3. РЕДУКЦИЯ

Локализация решения проводилась в зоне действия нагрузки, т.е. в центральной части сеточной области. Соответственно, редукция была проведена в верхней и нижней части сетки. Основами для осреднения были выбраны узлы 2-го уровня (см. рис. 4). Таким образом, размерность сеточной области уменьшилась и составила

$$N_{Hr} = (8 + 4 + 4 + 2 + 1) + 1 = 19 + 1 = 20$$

Соответственно, уменьшилось общее количество неизвестных, т.е.

$$N_{sr} = 8N_{Hr} = 8 \cdot 20 = 160$$

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Сопоставление результатов проводилось по горизонтали при фиксированной точке $x_1 = 44.245$, соответствующей узлу $i_1 = N/2$ (одна из двух центральных точек) и по верти-

кали при симметрично фиксированной точке $x_2 = 44.245$.

Проведенная редукция сильно осреднила результаты в зоне горизонтальных границ. Это сказало, в частности, на результате для момента M_{11} . В тоже время сопоставление результатов для момента M_{22} дает очень хорошее совпадение.

ударственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский гос-

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА

М.Л. Мозгалева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются некоторые алгоритмы, используемые при построении разрешающей системы уравнений, к которой сводится численная реализация методов локального расчета краевых задач строительной механики с использованием двумерного дискретного базиса Хаара.

Ключевые слова: краевая задача, локальные расчеты строительных конструкций, вейвлет-анализ, численное решение, двумерный дискретный базис Хаара, алгоритмы

SOME ALGORITHMS OF NUMERICAL WAVELET-BASED LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE HAAR BASIS

Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper is devoted to some of the algorithms of numerical construction of resultant system of equations within wavelet-based local structural analysis with the use of two-dimensional discrete Haar basis.

Key words: boundary problem, local structural analysis, wavelet analysis, numerical solution, two-dimensional discrete Haar basis, algorithms

1. ДВУМЕРНЫЙ ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ БАЗИС ХААРА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ.

Пусть задан прямоугольник

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2 \} \quad (1.1)$$

Разделим область (1.1) по горизонтали на $(N-1)$ равных частей и по вертикали на $(N-1)$ равных частей, где $N = 2^M$, M – максимальный уровень функций Хаара (количество уровней): $h_1 = l_1 / (N-1)$; $h_2 = l_2 / (N-1)$.

На основе отцовского и материнского вейвлетов Хаара построим базовые функции

$$\Psi_{s_2 s_1}, s_1, s_2 = 0, 1: \quad \Psi_{s_2 s_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} \Phi(x_2)\Phi(x_1), & s_2 = 0 \wedge s_1 = 0 \\ \Phi(x_2)\Psi(x_1), & s_2 = 0 \wedge s_1 = 1 \\ \Psi(x_2)\Phi(x_1), & s_2 = 1 \wedge s_1 = 0 \\ \Psi(x_2)\Psi(x_1), & s_2 = 1 \wedge s_1 = 1 \end{cases}, \quad (1.2)$$

где $\Phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$
 $\Psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$

– отцовский и материнский вейвлеты, соответственно.

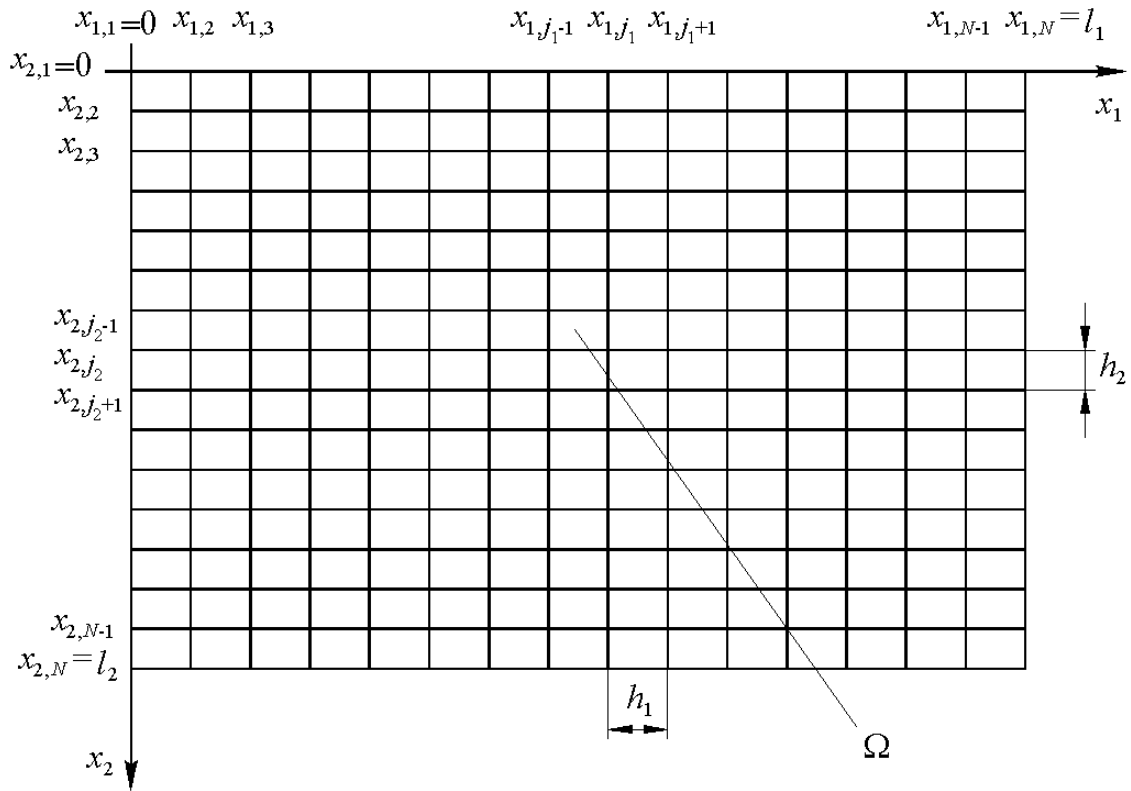


Рис. 1.1. Исходная двумерная прямоугольная область и ее дискретизация.

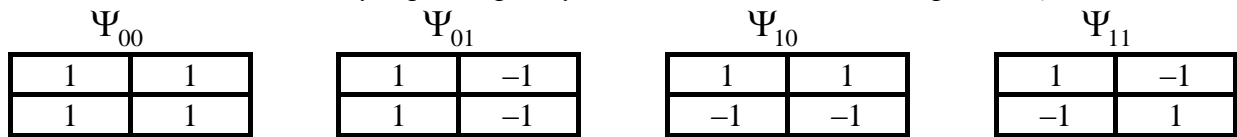


Рис. 1.2. Базовые функции.

Поскольку Φ и Ψ ортогональны, то и порожденные ими $\Psi_{s_2 s_1}$ также ортогональны между собой:

$$(\Psi_{s_2 s_1}, \Psi_{t_2 t_1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{s_2 s_1}(x_1, x_2) \Psi_{t_2 t_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \left(\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_2) \Phi(x_2) dx_2 = 1, \quad s_2 = 0 \wedge t_2 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_2) \Psi(x_2) dx_2 = 0, \quad s_2 = 0 \wedge t_2 = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_2) \Phi(x_2) dx_2 = 0, \quad s_2 = 1 \wedge t_2 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_2) \Psi(x_2) dx_2 = 1, \quad s_2 = t_2 = 1 \end{array} \right) \times$$

$$\left(\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1) \Phi(x_1) dx_1 = 1, \quad s_1 = 0 \wedge t_1 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1) \Psi(x_1) dx_1 = 0, \quad s_1 = 0 \wedge t_1 = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_1) \Phi(x_1) dx_1 = 0, \quad s_1 = 1 \wedge t_1 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_1) \Psi(x_1) dx_1 = 1, \quad s_1 = t_1 = 1 \end{array} \right) = \begin{cases} 1, & s_2 = t_2 \wedge s_1 = t_1 \\ 0, & \neg(s_2 = t_2 \wedge s_1 = t_1) \end{cases}$$

Также значения базовых функций можно записать непосредственно в виде (рис. 1.2):

Некоторые алгоритмы, используемые при численной реализации методов локального расчета строительных конструкций на основе двумерного дискретного базиса Хаара

$$\Psi_{s_2 s_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_1, x_2 < 1/2 \\ (-1)^{s_1}, & 1/2 \leq x_1 < 1 \wedge 0 \leq x_2 < 1/2 \\ (-1)^{s_2}, & 0 \leq x_1 < 1/2 \wedge 1/2 \leq x_2 < 1 \\ (-1)^{s_1+s_2}, & 1/2 \leq x_1 < 1 \wedge 1/2 \leq x_2 < 1 \\ 0, & x_1, x_2 < 0 \vee x_1, x_2 \geq 1 \end{cases},$$

$$s_1, s_2 = 0, 1 \quad (1.3)$$

Семейство дискретных функций Хаара $\Psi_{s_2, s_1, j_2, j_1}^p(i_2, i_1)$ для двумерного случая можно определить через базовые функции:

$$\Psi_{s_2, s_1, j_2, j_1}^p(i_2, i_1) = \alpha_p \Psi_{s_2 s_1} \left(\frac{i_1 - 1}{2^{p+1}} - (j_1 - 1), \frac{i_2 - 1}{2^{p+1}} - (j_2 - 1) \right),$$

$$0 \leq p < M \quad (1.4)$$

где $s_1, s_2 = 0, 1 \wedge \neg(s_1 = s_2 = 0)$,
 $j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N_p$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$;

$$\Psi_{0011}^M(i_2, i_1) = \alpha_M \Psi_{00} \left(\frac{i_1 - 1}{2^M}, \frac{i_2 - 1}{2^M} \right), \quad p = M \quad (1.5)$$

где $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$.

При этом

$N_p \times N_p$ – количество функций Хаара на p -ом уровне:

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M \end{cases}; \quad (1.6)$$

α_p – нормирующий коэффициент функции Хаара на p -ом уровне:

$$\alpha_p = \begin{cases} 1/2^{p+1}, & 0 \leq p < M \\ 1/N, & p = M \end{cases}. \quad (1.7)$$

Семейство функций Хаара (1.4)-(1.5) образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в узлах сетки (рис. 1.1).

2. ПЕРЕХОД К СПЛОШНОЙ НУМЕРАЦИИ

Для удобства обозначим

$$k = 2s_2 + s_1 = \begin{cases} 1, & s_2 = 0, s_1 = 1 \\ 2, & s_2 = 1, s_1 = 0 \\ 3, & s_2 = 1, s_1 = 1 \end{cases}$$

Тогда $\Psi_{s_2, s_1, j_2, j_1}^p(i_2, i_1) \rightarrow \Psi_{k, j_2, j_1}^p(i_2, i_1)$. Таким образом, базисные вектор-функции пронумерованы четырехмерным индексом (p, k, j_1, j_2) , где $k = 1, 2, 3$, $j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ и $p = 0, 1, \dots, M$. При программировании в некоторых случаях потребуются перейти к сплошной нумерации. Рассмотрим такой переход. Пусть задан индекс (p, k, j_1, j_2) . Обозначим индексом « i_k » сплошную нумерацию. Тогда

$$i_k = k + 3 \cdot [j_1 - 1 + N_p(j_2 - 1) + \sum_{r=0}^{p-1} N_r^2]$$

Заметим, что

$$N_r = 2^{M-(r+1)},$$

откуда

$$N_r^2 = (2^2)^{M-(r+1)}.$$

Сумму в правой части равенства можно записать в виде

$$\sum_{r=0}^{p-1} N_r^2 = (2^2)^{M-1} + (2^2)^{M-2} + \dots + (2^2)^{M-p} = \sum_{r=0}^{M-1} (2^2)^r - \sum_{r=0}^{M-(p+1)} (2^2)^r.$$

Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (1.8)$$

Тогда

$$\sum_{r=0}^{p-1} N_r^2 = \frac{1-(2^2)^M}{1-2^2} - \frac{1-(2^2)^{M-p}}{1-2^2} = \frac{1}{3}[(2^2)^M - (2^2)^{M-p}] = \frac{1}{3}[N^2 - N_{p-1}^2].$$

Таким образом, формула перехода от четырехмерного индекса к сплошной нумерации имеет вид

$$(p, k, j_1, j_2) \rightarrow i_k : \\ i_k = N^2 - N_{p-1}^2 + k + 3 \cdot [j_1 - 1 + N_p(j_2 - 1)] \quad (1.9)$$

где $N = 2^M$, $N_{p-1} = 2^{M-p}$, $1 \leq j_1, j_2 \leq N_p$.

Кроме того, для краткости обозначим

$$\psi_0^M(i_2, i_1) = \psi_{0,0,1,1}^M(i_2, i_1) = \alpha_M \quad (1.10)$$

Проверим справедливость этой формулы для пограничных случаев: $p = 0$ и $p = M$:

при $p = 0$

$$N_{0-1} = 2^{M-0} = N, \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq N_0 = 2^{M-(0+1)} = 2^{M-1} = N/2 \\ i_k = k + 3[j_1 - 1 + N_0(j_2 - 1)];$$

при $p = M$

$$N_{M-1} = 2^{M-(M-1+1)} = 1, \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq N_M = 1 \text{ и } k = 1 \\ i_1 = N^2 - 1 + 1 = N^2.$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ N-МЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА В БАЗИСЕ ХААРА (АНАЛИЗ).

Пусть задан вектор $\bar{u} \in R^{N^2}$, $\bar{u} = \{u_{i_2 i_1}\}_{1 \leq i_1, i_2 \leq N}$. Представим его разложение в базисе Хаара в виде

$$\bar{u} = \sum_{p=0}^{M-1} \left(\sum_{j_2=1}^{N_p} \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{k=1}^3 v_{k j_2 j_1}^p \bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p \right) + v_1^M \bar{\psi}_0^M, \quad (1.11)$$

где $v_{k j_2 j_1}^p$ – коэффициенты разложения в базисе Хаара, которые можно получить, используя ортонормированность базисных векторов $\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p$, т.е.

$$v_{k j_2 j_1}^p = (\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p, \bar{u}), \quad k = 1, 2, 3, \\ j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_p, \\ p = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (1.12)$$

$$v_1^M = (\bar{\psi}_0^M, \bar{u}), \quad p = M \quad (1.13)$$

Пусть Q – матрица, столбцами которой являются векторы $\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p$. Исходя из (1.12)-(1.13), определение коэффициентов разложения по базису Хаара $v_{k j_2 j_1}^p$ (анализ) также можно записать в векторно-матричном виде:

$$\bar{v} = Q^T \bar{u}, \quad (1.14)$$

где индекс «Т» означает транспонирование матрицы.

С другой стороны, если известны коэффициенты $v_{k j_2 j_1}^p$, восстановление (синтез) вектора \bar{u} (векторно-матричный аналог (1.11)) имеет вид

$$\bar{u} = Q \bar{v}, \quad (1.15)$$

где $\bar{v} = \{v_{k j_2 j_1}^p\}_{1 \leq k \leq 3, 1 \leq j_1, j_2 \leq N_p, 0 \leq p \leq M}$.

В частности, из (1.14) и (1.15) следует

$$Q Q^T = Q^T Q = E, \quad (1.16)$$

где E – единичная матрица, т.е. $Q^{-1} = Q^T$.

4. ВАРИАНТ ОСРЕДНЕНИЯ (РЕДУКЦИИ)

Очевидно, что в разложении по базису Хаара (см. (1.11)) векторы $\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p$ с меньшим значе-

Некоторые алгоритмы, используемые при численной реализации методов локального расчета строительных конструкций на основе двумерного дискретного базиса Хаара

нием уровня p дают большой вклад в зонах быстро изменяющихся компонент вектора \bar{u} (номера этих компонент совпадают с номерами точек, где $\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p(i_2, i_1) \neq 0$). Исходя из этого, можно было бы вместо точной формулы (1.11) восстанавливать вектор \bar{u} приближенно, т.е.

$$\bar{u} \approx \sum_{p=0}^{p_s-1} \left(\sum_{j_2, j_1 \in J_s^p} \sum_{k=1}^3 v_{k j_2 j_1}^p \bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p \right) + \sum_{p=p_s}^{M-1} \left(\sum_{j_2, j_1=1}^{N_p} \sum_{k=1}^3 v_{k j_2 j_1}^p \bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p \right) + v_1^M \bar{\psi}_0^M \quad (1.17)$$

где p_s – минимальный уровень, при котором достигается удовлетворительное приближение медленно изменяющихся компонент вектора \bar{u} ; J_s^p – последовательность номеров j_q ($q=1,2$), таких, что векторы $\bar{\psi}_{k j_2 j_1}^p$ при $p < p_s$ обеспечивают удовлетворительное приближение быстро изменяющихся компонент вектора \bar{u} . Следовательно,

$$v_{k j_2 j_1}^p = 0 \text{ для } p < p_s \wedge j_2, j_1 \notin J_s^p. \quad (1.18)$$

Однако при численном решении в базисе Хаара, когда величины $v_{k j_2 j_1}^p$ являются неизвестными, такой подход, т.е. использование условия (1.17), не приводит на практике к хорошему приближению решения задачи. Вместо (1.17) предлагается следующее.

Пусть p_s – минимальный уровень, при котором достигается удовлетворительное приближение медленно изменяющихся компонент восстанавливаемого вектора. Тогда положим величину $v_{k j_2 j_1}^{p_s}$ основой для осреднения таким образом, что

$$v_{k r_2 r_1}^{p_s-1} = \beta_k \cdot v_{k j_2 j_1}^{p_s},$$

где $r_1 = 2j_1 - 1$, $r_2 = 2j_2 - 1$, β_k , $k=1,2,3$ – числовые коэффициенты:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}, \beta_3 = \frac{1}{8}$$

(см., например [1]). Далее

$$v_{k z_2 z_1}^{p_s-2} = \beta \cdot v_{k r_2 r_1}^{p_s-1} = \beta^2 \cdot v_{k j_2 j_1}^{p_s},$$

где $z_q = 2(2j_q - 1) - 1$, $2(2j_q - 1)$,

$$2 \cdot 2j_q - 1, \quad 2 \cdot 2j_q, \quad q=1,2$$

или

$$v_{k z_2 z_1}^{p_s-2} = \beta^2 \cdot v_{k j_2 j_1}^{p_s},$$

где $2^2 j_q - (2^1 + 2^0) \leq z_q \leq 2^2 j_q$, $q=1,2$;

и т.д.

В общем случае

$$v_{k z_2 z_1}^{p_s-m} = \beta^m \cdot v_{k j_2 j_1}^{p_s}, \quad (1.19)$$

где

$$2^m j_q - \sum_{r=0}^{m-1} 2^r \leq z_q \leq 2^m j_q \quad (1.20)$$

Поскольку

$$\sum_{r=0}^{m-1} 2^r = \frac{1-2^m}{1-2} = 2^m - 1,$$

формула (1.20) преобразуется к виду

$$2^m (j_q - 1) + 1 \leq z_q \leq 2^m j_q, \quad q=1,2 \quad (1.21)$$

Формула (1.20) представляет диапазон изменения номеров z_q ($q=1,2$), для которых величины $v_{k z_2 z_1}^{p_s-m}$ исключаются из числа неизвестных и количество неизвестных на каждом уровне $p = p_s - m$ ($m=1, \dots, p_s$) уменьшается на величину $3 \cdot [2^m j_q - 2^m (j_q - 1)]^2 = 3 \cdot 2^{2m}$. Общее количество исключенных из числа неизвестных величин $v_{k z_2 z_1}^{p_s-m}$, порожденных $v_{k j_2 j_1}^{p_s}$, составляет

$$l_{p_s} = 3 \sum_{m=1}^{p_s} (2^2)^m = 3 \cdot 2^2 \frac{1 - (2^2)^{p_s}}{1 - 2^2} = 2^2 [(2^2)^{p_s} - 1] \quad (1.22)$$

Пусть N_{vs} – общее количество таких порождающих осреднение величин $v_{k j_2 j_1}^{p_s}$. При программировании может оказаться полезной таблица пронумерованных уровней и индексов, однозначно определяющих $v_{k j_2 j_1}^{p_s}$, т.е.

i	$p_s(i)$	$j_1(i)$	$j_2(i)$
1			
⋮			
N_{vs}			

В этом случае легко определить общее количество величин $v_{k z_2 z_1}^{p_s - m}$, исключенных из числа неизвестных:

$$l_s = \sum_{i=1}^{N_{vs}} l_{p_s}(i), \quad \text{где } l_{p_s}(i) = 2^2 [(2^2)^{p_s(i)} - 1],$$

или

$$l_s = 4 \left(\sum_{i=1}^{N_{vs}} 4^{p_s(i)} - N_{vs} \right) \quad (1.23)$$

Оставшееся количество неизвестных N_r (т.е. порядок разрешающей редуцированной системы) будет, соответственно, равно

$$N_r = N - l_s \quad (1.24)$$

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелиней-

ных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть2: двумерные проблемы.// International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp.47-56.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavlshosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

SPECIFIC FEATURES AND ADVANTAGES OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN THE FORM OF CLASSICAL MIXED METHOD AS AN ALTERNATIVE FOR THE TRADITIONAL FINITE ELEMENT METHOD

Alexander V. Ignatyev, Vladimir A. Ignatyev

¹ Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Volgograd, RUSSIA

Abstract: The paper describes specific features and advantages of the classical mixed FEM, which allow eliminating the traditional FEM problems of taking into account the displacements of finite element taken as a rigid body, of the presence of rigid or very flexible insertions and so forth.

Key words: Finite Element Method, form of classical mixed method, response matrix, problem of rigid body displacements.

ОСОБЕННОСТИ И ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА, КАК АЛЬТЕРНАТИВЫ ТРАДИЦИОННОМУ МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.В. Игнатьев¹, В.А. Игнатьев¹

¹ Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: В статье описаны особенности и преимущества МКЭ в форме классического смешанного метода, позволяющие устранить известные в традиционном МКЭ проблемы учета смещений конечного элемента как жесткого целого, наличия жестких или очень податливых вставок и др.

Ключевые слова: метод конечных элементов, форма классического смешанного метода, матрица откликов, проблема смещений как жесткого целого.

The history of the Finite Element Method development started in the 40s of the 20th century. Today this method (FEM) is one of the most universal numerical methods for the solution of boundary value problems in the sphere of deformed rigid body mechanics and structural mechanics. It has gained popularity due to its simplicity and illustrative nature, to the possibility to analyze bodies of practically any geometrical forms not only for force and deforming actions but also for the impact of thermal, electromagnetic, acoustic and other fields.

When considering the Finite Element Method in structural mechanics and deformed rigid body mechanics, its classical variant in the form of displacement method is meant as a rule. This fact is explained by the displacement method advantage known from the course of structural mechanics as compared to the method of forces, which lies in the possibility of complete formalization of the analysis algorithm and of the software realizing it.

Overwhelming majority of publications, monographs and textbooks are devoted to the

development and application of this very form of the FEM.

A rather small number of publications existing nowadays on the Finite Element Method in the form of force method, of mixed and hybrid methods indicate that these forms couldn't been formalized and presented in the form of algorithm with the same ease as the FEM in the form of displacement method [6].

At the same time it should be mentioned that when the FEM in the form of displacement method is applied some problems and difficulties occur leading to the necessity to verify the analysis results obtained on its basis.

To those problems mentioned one can first of all refer the displacements of finite element as a rigid body, contained in the kinematic boundary conditions and not connected with the work of internal forces. They lead to the degeneracy of stiffness matrix of a finite element, to the conditionality deterioration of the structure's stiffness matrix with increase of elements in number when it is necessary to enhance the solution accuracy for dangerous zones or for iteration solution of non-linear problems.

The difficulties while applying the FEM in displacements also occur in the case of inserting non-deformable or very flexible elements into the structure, emerging of ruptures at the ultimate stages of loading, and carrying out the analysis of geometrically unstable systems in the form of kinematic chain.

The form of FEM suggested and being developed by the authors which is based on the classical mixed method of structural mechanics allows eliminating the abovementioned problems in many cases.

As opposed to the mixed and hybrid FEM formulations based on the application of mixed functionals of potential energy (Reissner, Hu-Washizu, etc.) [1,5] the suggested FEM form is based on a new notion introduced by the authors – “response matrix” which is analogous to the notion of “stiffness matrix” in the traditional FEM in the form of displacement method [2].

Whereas the stiffness matrix elements are the reactions in the nodal constraints of primary

system for a finite element to single displacements of each of those constraints, the response matrix elements are both the reactions in the introduced constraints and the displacements along the directions of the eliminated constraints due to single displacements of the introduced constraints and single force actions applied along the directions of the eliminated constraints.

The structures of response matrix of FE, of response vector to the nodal kinematic and force actions and the vectors of unknown quantities in primary system of the mixed method are given below:

$$[d] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} R_p \\ \Delta_p \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Here $[r]$ is the matrix of the reactions in the introduced constraints due to single displacements in their directions,

$[\tilde{r}]$ - is the matrix of the reactions of these constraints due to single nodal force actions.

$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T$ - is the displacement matrix along the directions of the eliminated constraints due to single displacements of the introduced constraints,

$[\delta]$ - is the displacement matrix along the directions of the eliminated constraints due to single nodal force actions along the directions of these constraints, i.e. the flexibility matrix,

$\{R_p\}$ - is the subvector of reactions in the introduced constraints due to external actions (force, deforming and other ones),

$\{\Delta_p\}$ - are the displacements along the directions of the eliminated constraints due to external actions,

$\{q\}$ - is the vector of unknown displacements along the directions of the introduced constraints

$\{\tilde{q}\}$ - is the vector of unknown strains along the directions of the eliminated constraints

The algorithm of response matrix formation for the whole structure and the system of resolving

equations is based on the same principles characteristic of the traditional FEM in displacements [2].

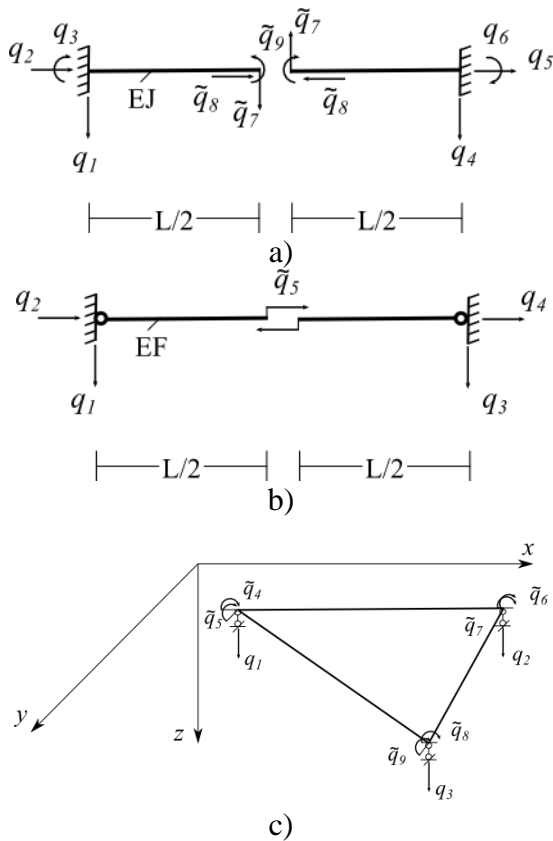


Figure 1. Some types of finite elements and primary systems of the mixed method for them.

Figure 1 displays some types of finite elements and primary systems of the mixed method for them to give a better understanding of the possibilities of the abovementioned problems solution while applying the FEM in the classical mixed form.

For all the three types of FE (a – bending rod of a frame, b- longitudinally compressed or tensed rod of hinged-rod system, c- bending triangular plate FE) primary systems have several significant properties:

- no reaction in the introduced constraints occurs in them during kinematic displacements and as a consequence the corresponding work is not fulfilled, i.e. this means that block $[r]$ in the response matrix (1) is a zero one and the problem of taking

- into account the displacements of FE as a rigid body does not emerge;
- if finite element is a rigid body, i.e. it has a zero flexibility, then block $[\delta]$ in the response matrix vanishes;
- if finite element has a negligibly low rigidity compared to the neighbouring elements, then only stiffness matrix of traditional FEM in displacements is used for it. In this case no problems concerning the joining with neighbouring finite elements appear;
- if a structure is a geometrically unstable system in the form of kinematic chain (thread, one-dimensional system of rigid hinged segments, grids of those one-dimensional systems), then the application of the classical mixed method form of the FEM becomes possible and efficient. At the same time the application of the traditional FEM in displacements is in principle impossible in many problems of this type.

Analogous properties are also characteristic of other finite element types developed by the authors. The analysis carried out applying such finite elements demonstrated high efficiency of the algorithms developed on the basis of the FEM in the classical mixed form [2-4].

CONCLUSION

1. The Finite Element Method in the form of classical mixed method suggested and being developed by the authors allows carrying out the analysis at the same degree of formalization and ease of algorithmization as in the traditional FEM in displacements.
2. The suggested form of FEM is free of some significant shortcomings of the traditional FEM.
3. There is a necessity in coordinated efforts of researchers, aimed at further developing this form of FEM, at creating a library of finite elements, at developing applied software packages.

REFERENCES:

1. **Washizu K.** Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. M.: Mir, 1987. 542 s.
2. **Ignatiev V.A., Ignatiev A.V., Zhidelev A.V.** Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitelnoy mekhaniki / Volgogradsky gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet. Volgograd: Izdatelstvo VolgGASU, 2006, 172s.
3. **Ignatiev V.A., Ignatiev A.V.** K raschetu tonkikh plastin po metodu konechnykh elementov v smeshannoy forme./ Uspekhi stroitelnoy mekhaniki i teorii sooruzheniy. Sbornik nauchnykh statey k 75-letiyu so dnya rozhdeniya V.V. Petrova. Saratovskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet. Rossiyskaya akademiya arkhitektury i stroitelnykh nauk. – Saratov: SGTU, 2010. s. 81-87
4. **Ignatiev A.V., Gabova V.V.** Primenenie smeshannoy formy MKE k raschetu sterzhnevnykh sistem, sodержashikh elementy s rezko razlichnymi zhestkostyami / Vestnik VolgGASU. Seriya: Stroitelstvo i arkhitektura. Vypusk 22 (41). – Volgograd: VolgGASU, 2011 s. 22-25.
5. **Sekulovich M.** Metod konechnykh elementov: per. s serb.. M.: Stroyizdat, 1993. 664 s.
6. **Tyukalov Yu. A.** Reshenie zadach stroitelnoy mekhaniki metodom konechnykh elementov v napryazheniyakh na osnove funktsionala dopolnitelnoy energii i printsipa vozmozhnykh peremeshcheniy: dis. ... d-ra tekhn. nauk. M.: MGSU, 2006.

Игнатъев Владимир Александрович, ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», зав. кафедрой строительной механики, д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, советник РААСН

Aleksander V. Ignatyev, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Associate Professor of Chair of Structural Mechanics, Candidate of Engineering Sciences, phone: +7-905-336-06-14, e-mail: alignat@gmail.com

Vladimir A. Ignatyev, Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering, Head of Chair of Structural Mechanics, Doctor of Engineering Science, Professor, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences

Игнатъев Александр Владимирович, ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», доцент кафедры строительной механики, кандидат технических наук, тел.: +7-905-336-06-14, e-mail: alignat@gmail.com

RESEARCH ON THE IMPACT OF DWELLING DESIGN AND THE EFFECTS OF DOMESTIC GAS EXPLOSION ON THE DEFORMATION AND DESTRUCTION OF STRUCTURES

Galina G. Kashevarova, Andrei A. Pepeliaev, Marina V. Grigorieva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

Abstract: Accidents caused by domestic gas explosion are known to occur regularly. Human factor is the main reason for these accidents and it can hardly be ignored. Explosion accidents inside buildings claim the development of methods to study the viability and collapse prevention of structures. The impact of explosion load on the premises depending on their design, different combinations of physical parameters and the computer-simulated loads is being investigated and the methods for mitigating the destructive effects of such explosions. The intensity of the explosion load was determined by means of the FlowVision programming suite with using the method of finite volumes. To study the effect of domestic gas explosion loads on supporting structures, as well as to identify the most critical parameters ensuring the building safety, computing experiments based on the finite-element programming suite ANSYS were conducted. The analysis of the data obtained proves that when the equivalent static load is taken into account, the results of calculation differ from the results based on the dynamic effect of the load both in qualitative and quantitative terms. The availability of window and door openings allows to decrease shock impact on the structure

Key words: deflagration explosion, domestic gas, building accidents, numerical modeling

INTRODUCTION

Explosion accidents inside buildings claim the development of methods to study the viability and collapse prevention of structures. For the most part, explosion accidents are caused by deflagration. The impact of explosion load on the premises depending on their design, different combinations of physical parameters and the computer-simulated loads is being investigated.

Explosion accidents inside buildings, which more frequently occur compared to other types of explosions, are usually caused by deflagration rather than detonation. This fact determines both the methods of forecasting explosion loads/effects and the methods for mitigating the destructive effects of such explosions. Deflagration explosion is the process of subsonic burning which forms a fast-moving zone (front) of chemical transformations. The energy is transferred in the direction of the motion of the front and results from heat transfer, unlike in the case of detonation, when the transformation zone is

spread at a supersonic speed and the energy transfer is caused by shock compression.

The specific nature of deflagration explosion is the following: where moving, the flame front creates a compression wave ahead of itself. This wave becomes weaker proportionately to the distance it has covered. As the speed at which the flame is spread is much less than that of sound ($3m/sec$), the quasi-static principle of excessive pressure applies here, which means that the explosion load does not depend on the space coordinate. In other words, the pressure that affects any construction element (walls, ceiling, floor, doors etc.) at the moment of explosion, is the same at any point of the room [1].

To study the effect of domestic gas explosion loads on supporting structures, as well as to identify the most critical parameters ensuring the building safety, computing experiments based on the finite-element programming suite ANSYS were conducted. The intensity of the explosion load was determined by means of the FlowVision programming suite, which allows hydrogasdynamic problems to be solved using the method of finite volumes [2] and for

attendant problems – those in which the flow and a deformed body interact – using finite-element computer programs [3].

1. SIMULATION OF PREMISES AND CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE STRUCTURES IN THE EXPLOSION OF DOMESTIC GAS

Different types of premises were considered (fig. 1): a closed room without openings; a room with a window and a closed door; a room with a window and an open door. Apart from doing this, various engineering solutions for intermediate floors were studied: a concrete slab fastend at two opposite sides and a slab fastened on the perimeter.

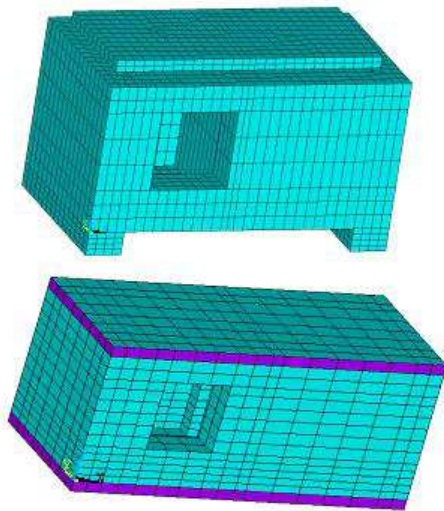


Figure 1. Computer-aided models of kitchen design.

Finite-element models of the rooms where domestic gas explosion occurred were made using volume finite elements, SOLID65, with a bilinear approximation.

When creating a finite-element model we used an effective algorithm which enabled us to easily assign parameters for a finite-element grid. The algorithm consists of the following steps: the selection of the two-dimensional area,

divided into finite elements, and then the assignment of the element size as well as the volume and the pitch of extrusion. As a result, the grid is more regular and individual elements have no sharp angles and shapes which might otherwise cause substantial errors in calculations.

As an indoor deflagration explosion is characterized by the same pressure at any point of the room and at any moment of time, the explosion load of 6 kPa, obtained by the solution of a hydrogasdynamic problem [4 - 6], was applied to all the surfaces of the room.

All calculations were done taking into account the dynamic explosion load in the form of an impulse signal and the equivalent static load taking into account a normative dynamic-response factor of 1,8 [7].

The loads on load-bearing walls caused by upper floors (500 kN/m²), the loads on non-load-bearing walls (100 kN/m²), and the distributed temporary load on the slab (5 kN/m²) were also taken into account. The material of the walls was brick masonry (ceramic brick M 100 and mortar M 50); the material of the slabs was reinforced concrete (concrete class B20).

To calculate the dynamic load effect we used the implicit scheme of integrating the equations of motion. To estimate the time of the dynamic load exposure on the structure, modal analysis of the design model was carried out. The increment in the load in time was calculated using the equation (1):

$$\Delta t = \frac{1}{N \cdot f}, \quad (1)$$

where: $N \geq 20$ is the number of points per cycle; f is the highest frequency which is relevant to.

Another objective of the research was to study the influence of the material destruction process on the type of the stress-strain deformation of structural elements. To take into account the non-linear effects of materials in critical correlation, two computational models were used: the William and Ranke models of

concrete breakdown implemented by means of the ANSYS software suite, and a generalized model of the elastic-brittle failure of brick masonry orthotropic material – the latter was developed by the group of research engineers of Perm State Technical University working under the leadership of professor G.G. Kashevarova [8 - 11].

In the course of tackling this physically non-linear problem, which implies the probability of elastic-brittle destruction, the following values were considered as given: single-axle compression limit of brick masonry equaling $6.38E6$ Pa, single-axle compression limit of concrete equaling $11.5E6$ Pa (concrete class B20); single-axle tensile strength of brick masonry equaling $0.5E6$ Pa, single-axle tensile strength of concrete equaling $0.9E6$ Pa (concrete class B 20); shear transfer coefficient for an open crack – 0.2, and shear transfer coefficient for a closed crack – 0.6. The residual strength after the cracking was taken into account by applying the three-way model of non-linear structural analysis KINH. As a criterion of strength the following was assumed: the destruction in material occurs only when strain intensity (the second invariant of strain tensor) becomes critical. For the material under deformation four types of stress-strain conditions were considered.

2. CALCULATION RESULTS

Figures 2, 3 illustrate the computational experiments results of stress intensity under a dynamic and equivalent static load effect for different constructive solutions. Figures 4 illustrate isofields of stress intensity (a) and cracking and crushing locations in structural elements under dynamic load effect with an allowance for physical non-linearity of material properties (b).

To obtain these results we used computational models applied to different premises for the same moment of time corresponding to the maximum values of stress.

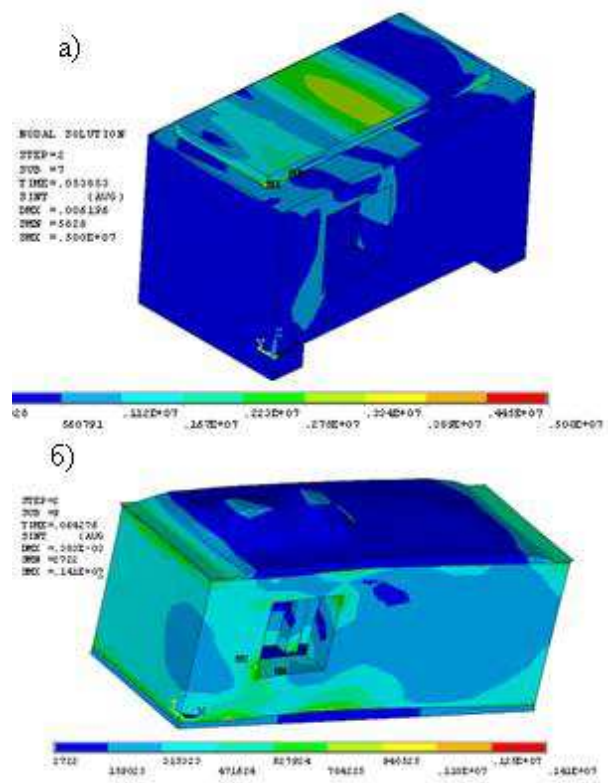


Figure 2. Stress Intensity under dynamic load effect.

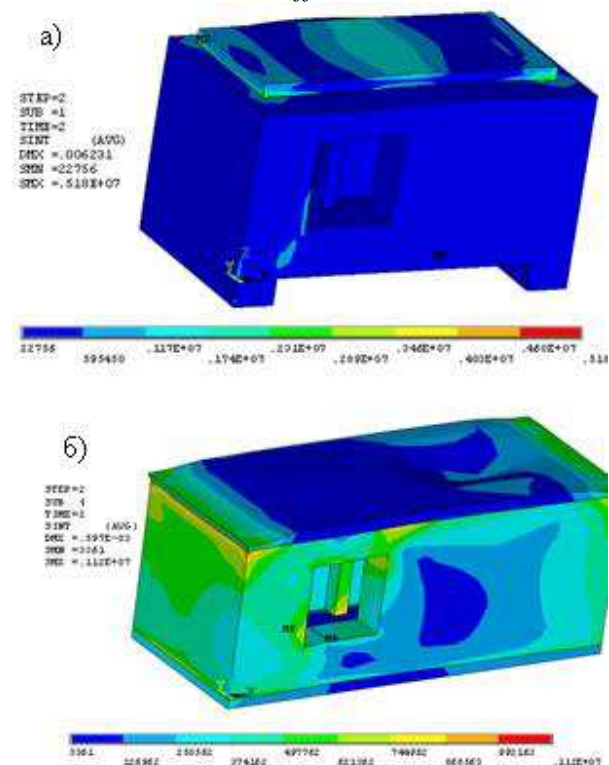


Figure 3. Stress Intensity under equivalent static load effect.

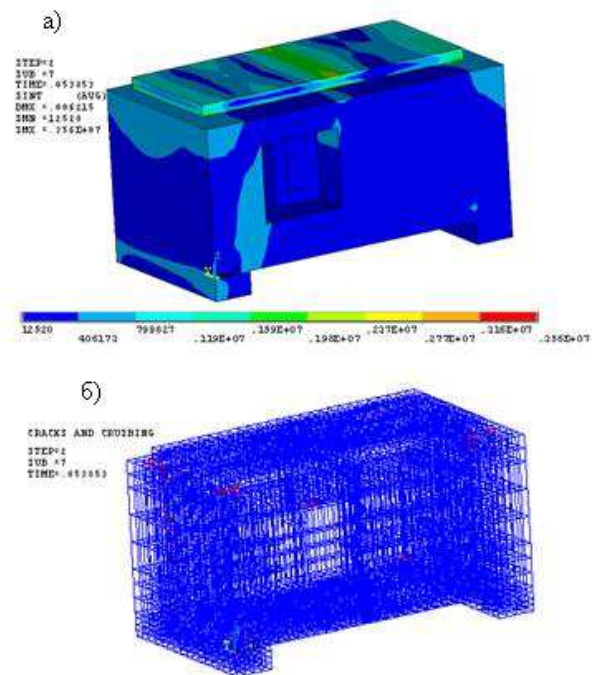


Figure 4. Stress Intensity under dynamic load effect with an allowance for physical non-linearity of material properties (a) and cracking and crushing locations in structural elements (b).

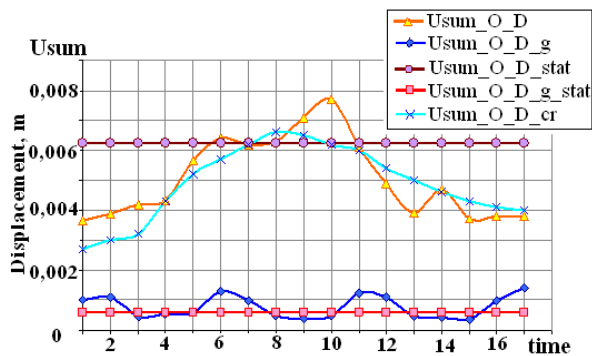


Figure 5. Diagrams show the changes in maximum total displacement of structural elements in rooms of different design within time, critical relations of those and the types of load effect.

Figures 5 and 6 are the diagrams showing the change in maximum total displacement of structural elements in the room (Usum) and the change in maximum values of intensity stress (Sint) within time.

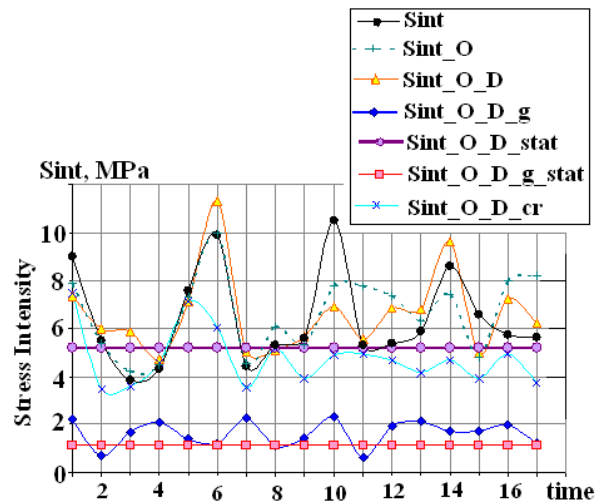


Figure 6. Diagrams show the changes in maximum values of stress intensity in structural elements of rooms of different design, critical relations of those and the types of load effect.

Letter designations in the diagrams (fig. 5,6) are: O – a window opening; D – a door opening; (g) – a stiffly fastened intermediate floor; (cr) – non-linear calculation for destruction; stat. – the calculation for the equivalent static load.

CONCLUSIONS

The analysis of the data obtained proves:

1. When the equivalent static load is taken into account, the results of calculation differ from the results based on the dynamic effect of the load both in qualitative and quantitative terms.
2. The availability of window and door openings allows to decrease shock impact on the structure – the bigger the total space of openings, the weaker the shock impact (the difference is up to 12÷17%).
3. Stiffly fastened intermediate floors also decrease stress in structural elements – approximately, 2 to 5 times.
4. The calculations of the equivalent static load showed lower values of the stress-strain state – twice as low, on average. It is worth noting, that in the case of stiffly fastened intermediate floors, the difference

between the intensity stress and the total displacement under dynamic load and that under static load is smaller (nearly by 25%).

5. The process of material destruction considered, stress-strain state is lower, and the deviation of the results obtained under dynamic load from the results obtained under static load is 19% on average.

REFERENCES

1. **Комаров А.А., Г.В.Чиликина.** Условия формирования взрывоопасных облаков в газифицированных жилых помещениях. Журнал «Пожаровзрывобезопасность», т.11, №4, 2002г. С.24-28.
2. Система моделирования движения жидкости и газа. Flow Vision. Версия 2.5.0. Руководство пользователя. Москва, ООО «ТЕСИС», 2007 г.
3. **Кашеварова Г.Г., Поварницын Д.А.** Программа для строительного проектирования AnSysBuildingBlock (ASBB) -приложение к многоцелевому пакету ANSYS.//Промышленное и гражданское строительство. 2011. Т. 2. № 7-2. С. 25-27
4. **Пепеляев А.А., Кашеварова Г.Г.** Исследование проблемы защиты типовых жилых зданий от прогрессирующего разрушения//International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. -2008. -Vol. 4, Is. 2. -С. 69-70
5. **Кашеварова Г.Г., Пепеляев А.А.** Моделирование и ретроспективный анализ взрыва бытового газа в кирпичном здании. Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений». № 2 с.31-36. Москва, ЦНИИСК им.Кучеренко, 2010.
6. **Пепеляев А.А., Кашеварова Г.Г.** Верификация методики расчета дефлаграционного взрыва бытового газа. Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. 2012. Т. 4. № 1. С. 55-57.
7. Динамический расчёт сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика. - М.: Стройиздат, 1981.
8. **Kashevarova G., Zobacheva A., Leschev I.** Experimental and numerical modeling of the destroying of brick masonry for the analysis of buildings accident. Advanced Materials Research. 2011. Т. 250-253. С. 3670-3673/
9. **Кашеварова Г.Г., Труфанов Н.А.** Численный анализ эффективных упругих свойств материала кирпичной кладки.//Механика композиционных материалов и конструкций. Т.11, №1, с.49-60. 2005.
10. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю., Дубинский С.И.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки зданий в натуральных и численных экспериментах.//Строительная механика и расчет сооружений. №1, 2010. С. 69-73
11. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки.//Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2010. № 1. С. 106-116.

Galina G. Kashevarova, Doctor of technical science, Professor, Department of Mechanics and Computational Technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ggkash@mail.ru.

Andrei A. Pepelyaev, PhD, Department of Mechanics and Computational Technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: smivt@pstu.ru.

Marina V. Grigorieva, post graduate student, Department of Mechanics and Computational Technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: smivt@pstu.ru.

HARMONIC ANALYSIS OF BAR DOMES SUBJECTED TO WIND LOADS

Waldemar Szaniec, Klaudia Zielińska

¹Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

Abstract: The research paper presents the results of the dynamic analysis of an existing bar dome subjected to wind loads. The calculation model of the structure was constructed using the finite element method. The dome was subjected to the standard wind pressure, assuming that it operates in a harmonic manner. The numerical analyses were performed with the application of Autodesk Robot and MES3D. The analysis focussed on the impact of selected factors such as the frequency of forcing, wind gustiness coefficient and structural damping on the behaviour of structures.

Key words: wind load, harmonic analysis, resonance, natural vibrations, forced vibrations

1. INTRODUCTION

Domes are outstanding architectural structures which began to be constructed as early as in the fourth millennium BC. The first structures took the form of reed huts, on a circular or oval plan, covered with a domed roof. Over the centuries domes acquired different shapes: cupola, semi-circular, semi-elliptical, pointed-arch or bulbous. Continuous cupolas built over circular, elliptical, or polygonal compartments were placed on a wall or drum. The construction of domes involved the application of stone blocks or bricks in the shape of a wedge (arch stones/blocks) [1].

Domes can be classified according to several criteria. With respect to their structure, one can distinguish continuous or bar domes.

The continuous dome underwent a gradual transformation from a covering of an opening in the wall, to a covering of a quadrilateral area, to the dome proper with a hemispherical vertical cross section [1].

Bar domes started to be more widely constructed in the 19th century. The idea was to design and build a lightweight structure with a large span, easy to assemble and disassemble.

Bar domes may be classified in different ways. With respect to the arrangement of the bars, domes can be divided into: longitudinal-latitude, lamella, latitude-spiral and geodesic [2].

In the face of frequent weather changes the weight of roofing determines the strength of the whole building. Roofs that are characterized by heavy and dense structure withstand strong gusts of wind very well. In contrast, light roof coverings such as domes subdue to the forces of nature more easily, mainly due to their small weight and relatively low stiffness.

The wind loads affecting the domes are usually defined with the value of the external pressure being given [3]. Its value depends on the ratio of the dome rise to the diameter and slenderness of the base. This value is constant for each of the arches resulting from the intersection of the spherical cupola with a plane perpendicular to the wind direction [4]. If the wind impact does not produce a significant acceleration of the structure or any of its members, it is classified as static load. However, if it generates a significant acceleration of the structure or any of its members, it should be regarded as a dynamic load [5].

Dynamic load may be presented in different ways. In the most general form it is presented as the change in time of the static load value:

$$Q(t) = Q_0 \cdot f(t) \quad (1)$$

where: Q_0 -the static load value, $f(t)$ - functional relation, eg. harmonic function.

It can also be presented by means of a table with the load values assigned to the consecutive

sampling moments. The application of such a form of the dynamic load register permits the calculation that yields a good deal of the information on the effect of such parameters as: the changes in time of displacement, velocity, acceleration in the selected points of the structure [5].

Each elastic body is characterized by normal mode (natural) vibrations of constant periods. The light impulses (shocks) which a vibrating body receives from the outside, may affect the vibration amplitude in different ways. The impulses directed opposite to the velocity cause the vibration damping, whereas those directed in line with the velocity – increase the vibration amplitude [6]. The vibration amplitude increases to infinity, when the impact frequency of the exciting force coincides with the natural frequency of the structure. This results in the occurrence of resonance.

This phenomenon is becoming very dangerous, particularly in the case of light roof coverings. The failures of structures are caused by the increased vibration amplitude resulting from vehicle or human movement, wind pressure or flow, earthquakes and machines operation. In the case of oscillating vibrations, material fatigue is to be observed [7]. As a consequence, structures may collapse and window panes in vehicles or factory halls may crack. A bridge may fail due to the vibrations caused by vehicles or a military column marching in unison.

Preventing the resonance is the responsibility of designers and it generally involves incorporating elasticity in the design to reduce the transmission of vibrations and to damp the already existing ones [8].

2. THE STRUCTURE

The analysis discussed the dome of the CUS (Satellite Services Centre) in Psary. The structure, which rests on a reinforced concrete roof plate, spans 12 metres and has the height of 6 metres. The roofing has the form of a bar

dome with a circular projection. The loadbearing structure is composed of 24 longitudinal supporting members made from RP120x60x4 profiles connected to 2L60x60x6 latitudinal members by means of rigid joints. The following elements of the covering were attached to the loadbearing structure: the inner pane Optifloat 6 mm thick, PVB foil 1.52 mm thick, the outer pane Activ Blue 10 mm thick.



Figure 1. General view of the CUS building in Psary.

The calculation model was developed in the Autodesk Robot programme. The programme used the elements of a spatial frame with six degrees of freedom in the node. The structure was made up of 144 nodes and 280 elements. The weight of the covering was taken into account in the model, the weight of individual elements of the framework was increased. It was assumed that the dome is supported in the nodes in an articulated manner. The modal analysis was performed and the first vibration form is show in Fig. 2.

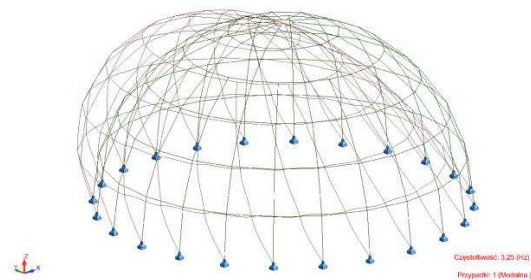


Figure 2. The first form of normal modes – Robot.

Further dynamic analyses were performed in the authors' programme MES3D. The data conversion was conducted, their structure is similar in both programmes and their accuracy

was checked through a comparative modal analysis.

3. CALCULATIONS

The static wind load was adopted on the basis of the Polish standard PN-EN 1991-1-4:2008 [4]. The dome was subjected to a standard wind pressure. It was assumed that its direction coincides with the vibration direction of the first own form. The object is situated in the first wind load zone. The values of the external pressure coefficient assumed in points A,B,C were equal to $C_{pe,10} = 0.8; -1.3; -0.5$, respectively. This load was reduced to the nodal forces pattern (Fig. 4).

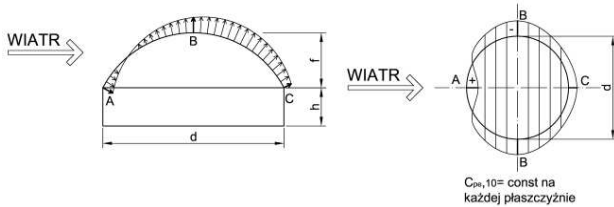


Figure 3. Distribution of standard wind pressure of circular dome [3].

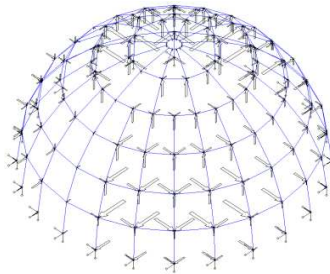


Figure 4. Wind load reduced to concentrated forces – MES3D.

It was assumed that the wind load acts in a harmonic manner as expressed by the formula:

$$Q(t) = P_0[1 + p \cdot \sin(n_0 \cdot t)] \quad (2)$$

where: P_0 – static wind load, p – wind gustiness coefficient, and n_0 – frequency of forcing.

The structure’s response to the harmonic forcing was analyzed. Due to the reliability analysis, which will be performed in the next stage of the procedure, as well as the lack of real wind characteristics for this object, a fairly wide range of load parameters was assumed. The objective of the conducted analysis was to observe dangerous states in the discussed bar dome.

The dynamic equilibrium equation of the system has the following form:

$$K_S \cdot \bar{q}_S + R_S \cdot \dot{\bar{q}}_S + B_S \cdot \ddot{\bar{q}}_S = \bar{F}_S(Q(t)) \quad (3)$$

where: B_S, R_S, K_S – inertia, damping and structure stiffness matrices, \bar{F}_S – load balancers vector which is a load function, $\bar{q}_S(t), \dot{\bar{q}}_S(t), \ddot{\bar{q}}_S(t)$ – coordinates, velocity and general acceleration vectors. The set of equations was solved using the Newmark’s method with the application of the unconditionally stable variant. The two types of calculations were performed: those disregarding the damping and those taking it into account. A model was assumed in which it is proportional to the structure’s stiffness ($R_S = \kappa \cdot K_S, \kappa = 0.005$). The assumed length of the time step was $\Delta t = 0.02s$ and the total calculation time was $T = 40s$.

The p parameter, modelling the wind gustiness, was assumed at the level of **0.1 and 0.3**, and the harmonic forcing frequency n_0 within the range of **0.1 ÷ 1** of the value of the first frequency of natural vibrations ($n_0 = 0.1 \div 1 \cdot \omega_1$).

4. RESULTS ANALYSIS

The displacements and acceleration of the selected points of the structure were analyzed. The first measurement point was assumed in the

highest node of the meridian on the symmetry axis of the first form of natural vibrations, point 2 – in the middle of its length.

Because of the similar nature of the solutions, the paper presents only the solutions for point 1. Figures 5 ÷ 8 show the examples of dynamic waveforms obtained during the calculations. Fig. 9 and 10 present the graphs of the displacements and accelerations of point 1 with $p = 0.1$ and the forcing frequency of $n_0 = 0.9 \cdot \omega_1$, either taking the damping into account or disregarding it. Fig. 7 presents the graph of the acceleration variability of this point with $p = 0.3$ and $n_0 = 0.9 \cdot \omega_1$, and Fig. 8 with $p = 0.1$ and $n_0 = 1 \cdot \omega_1$

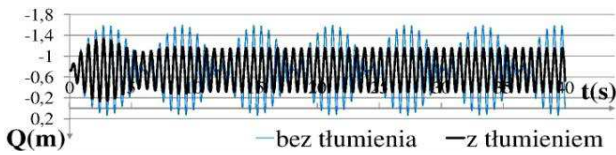


Figure 5. The graph of displacements in time for $p = 0.1$ and $n_0 = 0.9 \cdot \omega_1$.

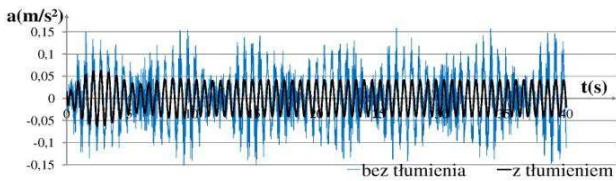


Figure 6. The graph of acceleration in time for $p = 0.1$ and $n_0 = 0.9 \cdot \omega_1$.

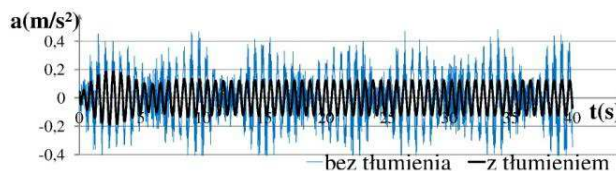


Figure 7. The graph of acceleration in time for $p = 0.3$ and $n_0 = 0.9 \cdot \omega_1$.

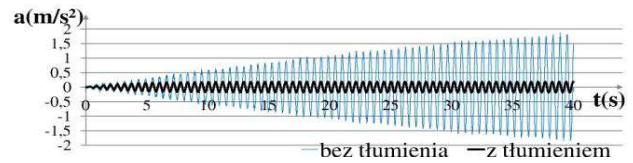


Figure 8. The graph of acceleration in time for $p = 0.1$ and $n_0 = 1 \cdot \omega_1$.

Fig. 9 presents the graph of the relation between the vertical displacement and the forcing frequency n_0 , Fig.10 presents an analogous graph of acceleration for this point.

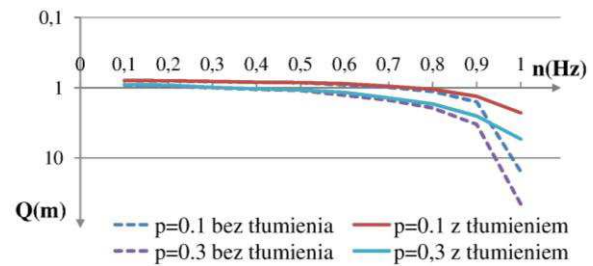


Figure 9. The graph of the relation between the displacement and the natural vibration frequency for $p = 0.1$ and 0.3 .

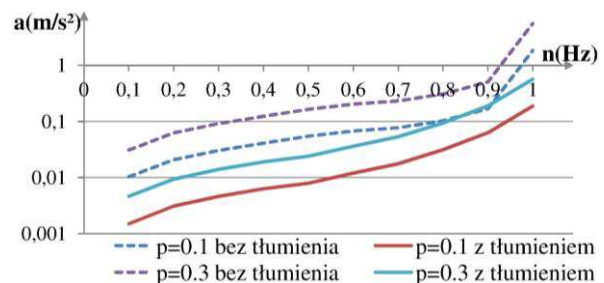


Figure 10. The graph of the relation between the acceleration and the natural vibration frequency for $p = 0.1$ and 0.3 .

5. CONCLUSIONS

The conducted analyses permitted the evaluation of the effect of the discussed parameters on the behaviour of the existing bar dome. As the forcing frequency rises, both the displacement and acceleration increase exponentially (Fig. 9-10). In the case of the

forcing frequency approaching the structure's natural frequency, one can observe the beat phenomenon (Fig. 5-7) or getting into resonance (Fig.8) and quick stabilization of the vibration amplitude when damping is taken into account (Fig.8). The effect of the ρ coefficient taking into account wind gustiness, is similar to that in the static problem. The boundary values of displacements obtained in the two cases are comparable.

It did not pose a major threat to the structure within the analyzed range, since the safety coefficients used in the design of the object reduce the impact of this factor. The case when the forcing frequency approaches a natural vibration frequency poses much more danger. However, in the case of a real object this frequency is so high that the likelihood of resonance evoked by this factor seems insignificant. Damping is an additional factor that enhances the safety of the structure, considerably reducing the amplitude of vibrations, especially near the resonance zone.

REFERENCES

1. **Mirski J.**: Geneza i morfologia kopuł pełnościennych. Kwartalnik Architektury i Urbanistyki. Tom XLVII. Zeszyt 2/2002. Warszawa 2003; s.126-146
2. **Kowal Z.** i inni: Rozdz. 2. Hale o dużych rozpiętościach. Poradnik projektanta konstrukcji metalowych. T. 2. Praca zbiorowa pod kierunkiem W. Boguckiego. Arkady. Warszawa 1982.
3. **Żurański J.A.** Obciążenia wiatrem budowli i konstrukcji. Centralny Ośrodek Badawczo- Projektowy Budownictwa Przemysłowego „Bistyp”. Arkady. Warszawa 1978.
4. Norma PN-EN 1991-1-4:2008 Eurokod 1. Oddziaływania na konstrukcję. Część 1-4: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania wiatru.
5. **Kawecki J.**; Oddziaływania dynamiczne na obiekty budowlane (rozd. 8); Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej; nr 276; seria: Budownictwo i Inżynieria Środowiska, zeszyt 58; nr 3/2011, 2011, str. 115-134
6. **Szaniec W., Biernacka K.**: „Modal analysis of selected bar domes” Structure and Environment, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Nr 4/2013, s. 15-20
7. **Lewandowski R.**, Dynamika konstrukcji budowlanych, Politechnika Poznańska, Poznań 2006.
8. **Lewandowski R.**, Redukcja drgań konstrukcji budowlanych, Wykład obieralny 2002, 03.

Waldemar Szaniec, Department of Mechanics, Metal Structures and Computer Methods, Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology, Kielce, POLAND.
E-mail: waldek.szaniec@tu.kielce.pl

Klaudia Zielińska, Department of Mechanics, Metal Structures and Computer Methods, Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology, Kielce, POLAND.
E-mail: kbiernacka@tu.kielce.pl