

***International Journal for  
Computational Civil and Structural Engineering***  
*Volume 10, Issue 3* *2014*

---

**EXECUTIVE EDITOR**

**Vladimir I. Travush**, Professor,  
Vice-President of Russian Academy  
of Architecture and Construction Sciences  
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

**EDITOR-IN-CHIEF**

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

**TECHNICAL EDITOR**

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**MANAGING EDITOR**

**Nadezhda S. Nikitina**, Professor  
Director of ASV Publishing House  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**ASSOCIATE EDITORS**

**Pavel A. Akimov**, Professor  
Chief Scientific Secretary of Russian Academy  
of Architecture and Construction Sciences;  
Head of Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Research Center STADYO  
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Lomonosov Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Saint Petersburg State Polytechnical University  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

## **ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS**

**Robert M. Aloyan**, Professor  
Ivanovo State Polytechnical  
University, 20, Ulitsa 8 Marta,  
Ivanovo, 153037, Russia

**Vladimir I. Andreev**, Professor  
Moscow State University  
of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Mukhtaridin M. Batdalov**, Professor  
Makhachkala Branch of Moscow  
Automobile and Road State  
Technical University (MADI),  
1. Imam Shamil Avenue,  
Makhachkala, Russia

**Klaus-Jürgen Bathe**, Professor  
Massachusetts Institute  
of Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Alexander T. Bekker**, Professor  
Far Eastern Federal University,  
8 Suhanova Street, Vladivostok  
690950, Russia

**Jan Buynak**, Professor  
University of Žilina,  
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,  
Slovakia

**Evgeniy M. Chernishov**, Professor  
Voronezh State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,  
394006, Russia

**Victor S. Fedorov**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Sergiy Yu. Fialko**, Professor,  
Cracow University of Technology  
24, Warszawska Street, Kraków,  
31-155, Poland

**Alexander S. Gorodetsky**, Professor  
LIRA SAPR Ltd.,  
Office 212, 7a Kiyanovsky side street  
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

**Vyatcheslav A. Ilyichev**, Professor  
Russian Academy of Architecture  
and Construction Sciences,  
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,  
107031, Moscow, Russia

**Marek Iwański**, Professor,  
Kielce University of Technology,  
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego  
Kielce, 25 – 314, Poland

**Sergey Yu. Kalashnikov**, Professor  
Volgograd State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
1, Academicheskaya Street,  
Volgograd, 400074, Russia

**Nikolay I. Karpenko**, Professor  
Research Institute of Building  
Physics, 21, Locomotive Travel,  
Moscow, 127238, Russia

**Vladimir V. Karpov**, Professor  
Saint-Petersburg State University of  
Architecture and Civil Engineering,  
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,  
190005 Saint-Petersburg, Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Perm National Research Polytechnic  
University, 29 Komsomolsky pros.,  
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

**Vitaly I. Kolchunov**, Professor  
Southwest State University, 94, 50 let  
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

**Markus König**, Professor  
Ruhr-Universität Bochum  
150, Universitätsstraße, Bochum,  
44801, Germany

**Sergey B. Kositsin**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Amirlan A. Kusainov**, Professor  
Kazakh Leading Academy of  
Architecture and Civil Engineering  
29, Toraiyrov str., Almaty, 050043  
Almaty, Republic of Kazakhstan

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mechanics  
of the Russian Academy of Sciences,  
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,  
119526, Russia

**Vladimir V. Lalin**, Professor  
Saint Petersburg State Polytechnical  
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,  
Russia

**Ilyazar T. Mirsayapov**, Professor  
Kazan State University  
of Architecture and Engineering,  
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,  
Republic of Tatarstan, Russia

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
Moscow State University  
of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Nikolai P. Osmolovskii**, Professor  
Kazimierz Pulaski University  
of Technology and Humanities  
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,  
26-600, Radom, Poland

**Alexey N. Petrov**, Professor  
Petrozavodsk State University,  
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,  
185910, Republic of Karelia, Russia

**Vladilen V. Petrov**, Professor  
Yuri Gagarin State Technical  
University of Saratov  
77 Politechnicheskaya Street,  
Saratov, 410054, Russia

**Jerzy Z. Piotrowski**, Professor  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,  
Kielce, 25 – 314, Poland

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing, China

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Moscow State University of Railway  
Engineering, 9, Obraztsova Street,  
Moscow, 127994, Russia

**Eun Chul Shin**, Professor  
Incheon National University,  
(Songdo-dong)119 Academy-ro,  
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

**D.V. Singh**, Professor  
Vice-Chairman all India Council  
for Technical Education,  
New Delhi, India

**Wacław Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wrocław University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wrocław, Poland

**Askar Zhussupbekov**, Professor  
Eurasian National University,  
5, Munaitpassov street, Astana,  
010000, Kazakhstan

## **INVITED REVIEWERS**

**Akimbek A. Abdikalikov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov  
34 Malybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

**Ján Čelko**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Stanislaw Jemioło**, Professor, Dr.Sc.,  
Warsaw University of Technology  
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

**Konstantin I. Khenokh**, Ing.  
General Dynamics C4 Systems,  
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

**Christian Koch**, Dr.-Ing.  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Gaik A. Manuylov**, Professor, PhD  
Moscow State University of Railway Engineering,  
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

**Alexander S. Noskov**, Professor, PhD  
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin  
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

**Nelli N. Rogacheva**, Professor, Dr.Sc.  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

**Josef Vičan**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Artur Zbiciak**, Associate Professor  
Warsaw University of Technology  
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

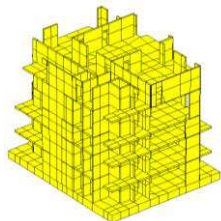


Figure 1.

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

**to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

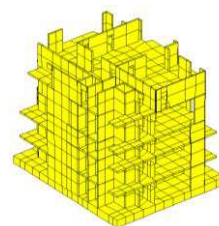


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

#### ➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
кафедра информатики  
и прикладной математики,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

#### ➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
Научно-образовательный центр  
компьютерного моделирования  
уникальных зданий, сооружений  
и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, доцент, кандидат технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* niccm@mgsu.ru.

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 10, Issue 3*

*2014*

**TABLE OF CONTENTS**

<b>О XVIII Конкурсе на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН)</b>	<b><u>14</u></b>
<b>К Юбилею Леонида Семеновича Ляховича</b>	<b><u>16</u></b>
<b>Particle Transportation at the Filter Inlet</b> <i>Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov</i>	<b><u>17</u></b>
<b>Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 1: Верификация методики численного моделирования поведения жидкости</b> <i>И.Н. Афанасьева, И.Б. Ланцова</i>	<b><u>23</u></b>
<b>Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 2: Верификация методики численного моделирования поведения гибкой упругой конструкции</b> <i>И.Н. Афанасьева, И.Б. Ланцова</i>	<b><u>33</u></b>
<b>Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 3: Верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости</b> <i>И.Н. Афанасьева</i>	<b><u>40</u></b>
<b>Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Часть 1: Основы расчетно-экспериментальной методики</b> <i>А.М. Белостоцкий, П.И. Новиков</i>	<b><u>49</u></b>
<b>Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Часть 2: Апробация расчетно-экспериментальной методики</b> <i>А.М. Белостоцкий, П.И. Новиков</i>	<b><u>56</u></b>
<b>Комплексное конечноэлементное моделирование НДС и устойчивости сетчатой оболочки покрытия большепролетного сооружения с эластомерными опорами</b> <i>А.М. Белостоцкий, А.С. Павлов</i>	<b><u>64</u></b>

<b>Численное моделирование ветрового режима территории на примере кампуса технического университета города Эйндховен</b> <i>А.В. Дорошенко</i>	<b><u>71</u></b>
<b>Методы расчета пластин сложной формы</b> <i>Е.Б. Коренева, В.Р. Гросман</i>	<b><u>76</u></b>
<b>Континуальные модели в динамике гранулированных сред</b> <i>С.В. Кузнецов</i>	<b><u>82</u></b>
<b>Кусочно-линейная модель нелинейного объекта управления при безотказной работе и при отказах исполнительного устройства</b> <i>Р.Л. Лейбов</i>	<b><u>105</u></b>
<b>Нестационарная задача теплопроводности в операторном виде и ее численно-аналитическое решение</b> <i>С.М. Мацкевич, В.Н. Сидоров</i>	<b><u>121</u></b>
<b>О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления</b> <i>М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов</i>	<b><u>127</u></b>
<b>О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления</b> <i>М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов</i>	<b><u>137</u></b>
<b>Временной анализ реакции дискретных систем с учетом физической и конструктивной нелинейности</b> <i>А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев</i>	<b><u>147</u></b>
<b>Проблемы реализации в локальной компьютерной сети метода разделения сложных строительных объектов на проектные единицы</b> <i>А.Н. Супрун, Д.И. Кислицын, В.Е. Хромых</i>	<b><u>159</u></b>
<b>Теоретические основы создания свай-дрен в слабых грунтах по технологии роторного уплотнения</b> <i>З.Г. Тер-Мартirosян, А.З. Тер-Мартirosян, О.В. Рубцов, А.В. Манукян</i>	<b><u>165</u></b>
<b>Об истории и основных итогах Пятого международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений»</b> <i>В.И. Травуш, П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, Т.Л. Дмитриева, В.Н. Сидоров</i>	<b><u>176</u></b>

## **О XVIII КОНКУРСЕ НА МЕДАЛИ И ДИПЛОМЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК**

Президиум Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) объявляет о проведении XVIII ежегодного конкурса на медали и дипломы Академии за 2014 год на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук. Медали и дипломы РААСН присуждаются на конкурсной основе архитекторам, градостроителям, учёным архитектурно-градостроительных и строительных специальностей – гражданам Российской Федерации за лучшие проекты, по которым строительство осуществлено (для архитектурных проектов) или осуществляется (для градостроительных проектов), за научно-исследовательские и проектно-конструкторские разработки, в результате которых получен значительный экономический и социальный эффект; опубликованные научные труды, монографии, учебники и учебные пособия.

На конкурс могут представляться построенные объекты или опубликованные научные работы в течение последних 5 лет. Построенные объекты должны иметь срок эксплуатации не менее 1 года. В соответствии с Постановлением Общего собрания РААСН-2013 в конкурс вводится номинация «За лучший неосуществлённый архитектурный проект» с установлением в качестве награды 1 диплома РААСН.

Работы, удостоенные Государственных премий Российской Федерации, премий Правительства РФ, медалей других государственных академий наук Российской Федерации на соискание медалей и дипломов РААСН не представляются.

В рамках конкурса на медали и дипломы РААСН проводится конкурс на лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук для молодых учёных и специалистов в возрасте до 35 лет включительно.

### **Устанавливаются следующие награды за лучшие работы:**

#### **1. Медали РААСН.**

##### **– в области архитектуры**

1 золотая и 1 серебряная медали за лучший осуществлённый архитектурный проект и лучшую опубликованную работу в области архитектурной науки.

##### **– в области градостроительства**

1 золотая и 1 серебряная медали за лучшую работу в области градостроительной науки и лучшую проектную работу в области градостроительства, реализованную или принятую к реализации.

##### **– в области строительных наук**

1 золотая и 1 серебряная медали за лучшую опубликованную научную работу и лучший инженерный проект (строительную технологию).

Примечание: золотая и серебряная медали присуждаются на основе конкурса между работами, представленными в отделения в объявленных номинациях. Дополнительно к золотой и серебряной медали РААСН вручается диплом.

#### **2. Дипломы РААСН**

**4 диплома** соответственно в области архитектуры, градостроительства и строительных наук и по 1 диплому за лучший изданный учебник (учебное пособие), рекомендованный к изданию Министерством образования и науки РФ.

**1 диплом** в номинации «за лучший неосуществлённый архитектурный проект».

**2 диплома** в области архитектуры, градостроительства и строительных наук для молодых учёных и специалистов в возрасте до 35 лет включительно.

### **3. Порядок выдвижения кандидатов на соискание медалей и дипломов**

На соискание наград РААСН представляются авторы или авторские коллективы в составе основных авторов, но не более 6 человек. Медали и дипломы РААСН присуждаются каждому члену представленного авторского коллектива.

Выдвижение кандидатов на соискание медалей и дипломов Академии производится профессиональными организациями (проектные, научно-исследовательские организации, высшие учебные заведения и др.), а также отделениями РААСН, научно-творческими центрами, профессиональными общественными организациями, академиками и членами-корреспондентами РААСН.

На выдвигаемых кандидатах представляются следующие материалы: представление выдвигающей организации или члена Академии, содержащее основания для выдвижения; аннотации и опубликованные отзывы на представляемую работу; фотографии (ксeroкопии) в альбоме (размер А3 или А4) или электронное изображение проектов и построек. Для научных работников – один экземпляр опубликованного научного труда и опубликованные рецензии на научную работу. К материалам прилагаются краткие биографические и профессиональные сведения об авторе (авторах).

**Срок представления материалов на конкурс не позднее 15 января 2015 г. (четверг) включительно до 17 часов по адресу: 107 031, Москва, ул. Большая Дмитровка, дом 24, стр. 1 (Российская академия архитектуры и строительных наук).**

Материалы представляются в соответствующее отделение РААСН (архитектура, градостроительство и строительные науки). Материалы, отправленные по почте, должны иметь дату отправления не позднее установленного срока. Работы, отправленные позднее установленного срока к рассмотрению не принимаются.

Решение о присуждении медалей и дипломов принимается президиумом Академии.

Опубликованные монографии и учебники, альбомы проектов и построек представленные на конкурс, не возвращаются и передаются в библиотеку РААСН.

### **Контактная информация:**

– Отделение архитектуры РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-14-95, 625-76-84; e-mail: oarch@raasn.ru

– Отделение градостроительства РААСН:

(т/ф): +7(495) 629-19-91, 625-79-75; 694-07-05; e-mail: grado@raasn.ru

– Отделение строительных наук РААСН:

(т/ф): +7(495) 625-76-80; факс: 625-73-16; e-mail: osn.raasn@mail.ru



## **К ЮБИЛЕЮ ЛЕОНИДА СЕМЕНОВИЧА ЛЯХОВИЧА**

12 сентября 2014 года исполнилось 80 лет Леониду Семёновичу Ляховичу. От имени редакционного совета международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering” поздравляем его с этим замечательным Юбилеем!

Трудовая и творческая деятельность Л.С. Ляховича на протяжении более чем шести десятилетий – достойный пример для подражания молодому поколению, воспитанию и образованию которого он посвятил свою жизнь. Мы знаем Леонида Семеновича как крупного, признанного в России и за рубежом ученого, автора многочисленных научных и учебно-методических работ, опытного организатора подготовки специалистов и масштабных научных исследований, активного участника международных программ, симпозиумов и конференций. Наряду с руководством кафедрой, он является академиком Российской академии архитектуры и строительных наук, заслуженным деятелем науки и техники Российской Федерации, Почетным строителем России, членом Президиума Российской академии архитектуры и строительных наук, членом редакционного Совета нашего журнала, снискав себе заслуженный авторитет и на этой непростой ниве.

Научно-педагогическая деятельность Л.С. Ляховича была неоднократно отмечена высокими государственными наградами и почетными званиями. Занимая пост проректора по научной работе, он вывел Томский государственный архитектурно-строительный университет на лидирующие позиции в области высшего строительного образования в стране.

Отмечая вклад Леонида Семеновича в развитие современной науки, личный авторитет и профессиональные качества, не сомневаемся, что его знания, инициативность, организаторский талант, высокие духовные и гражданские идеалы позволят успешно решать актуальные задачи развития высшего образования и науки – фундамента общественного, социального и экономического развития!

Мы желаем Л.С. Ляховичу дальнейших творческих успехов, активной жизненной позиции, здоровья и счастья! Надеемся на дальнейшее плодотворное сотрудничество во благо науки и образования!

*Редакционный Совет международного научного журнала  
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*

# PARTICLE TRANSPORTATION AT THE FILTER INLET

*Ludmila I. Kuzmina<sup>1</sup>, Yuri V. Osipov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** A size-exclusion model of solid particle capture for a flow of suspension in a porous media is considered. For a quasi-linear system of equations for the concentration of suspended and retained particles the asymptotic solution is constructed near the filter inlet. For linear filtration coefficient the numerical comparison of the asymptotics and the exact solution is performed.

**Key words:** particle transportation, porous media, diffusion, quasi-linear hyperbolic system, asymptotic solution

## 1. MODEL OF SUSPENSION FLOW IN A POROUS MEDIA WITH PARTICLE CAPTURE

Study of the motion of solid particles through the pores of the filter is an actual problem for many areas of science and technology. In the petroleum industry the movement of small particles of rock may lead to a significant drop in oil production [1-3]. In various technical and biological systems cleaning surface water, sewage and liquid industrial waste particle capture occurs when suspension flows through the filter media [4-6].

In this paper we consider the mathematical model of the motion of particles in the filter based on geometrical and mechanical interaction of particles with a porous media [7-9]. When constructing a model of particle diffusion the influence of the fluid viscosity and electrical interaction of the particles with the pore walls is neglected. The filter is considered to be a tube of finite length and constant cross section. Let the concentration of every kind of filter pores is constant. It is assumed that the mechanism of particle capture in the filter is geometrical: if the particle diameter is greater than the diameter of the pore, the particle is stuck in it; one particle clogs one pore, and vice versa, one pore can accommodate only one particle.

Consider the following simplified model. All solid particles in the suspension have the same diameter  $d$ , the filter having pores of two

different diameters  $D_1$  and  $D_2$  wherein  $D_1 < d < D_2$ . This means that the particle is retained and converted into deposit when it enters the pore of small diameter  $D_1$ . In pores of large diameter  $D_2$  the particles are moving freely in suspension flow.

## 2. SYSTEM OF EQUATIONS FOR PARTICLE TRANSPORT

Consider the basic equations describing the dynamics of suspended and retained particles in the filter. Denote  $C(x, t)$  the concentration of suspended particles, let  $S(x, t)$  is the concentration of retained particles. Concentration of suspended and retained particles satisfy the continuity equation, which in view of the immobility of deposit in the simplest case is

$$\frac{\partial(C+S)}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Growth of deposit is proportional to the concentration of suspended particles from which it is formed, and also depends on the current value of retained particle concentration

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Here  $\Lambda(S) > 0$  when  $S \geq 0$ .

The system of equations (1), (2) is considered in the domain

$$\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}.$$

The boundary condition for the system (1), (2) are set at the filter inlet  $x=0$  and the initial conditions – at  $t=0$ :

$$C(x,t)|_{x=0} = p, \quad p > 0; \quad (3)$$

$$C(x,t)|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

$$S(x,t)|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Detailed derivation of the problem (1) - (5) based on the micro-stochastic diffusion equations, followed by macro-averaging is performed in [10], [11].

Equations (1), (2) form a quasi-linear hyperbolic system with characteristics  $x=0$  and  $t=x$ . Boundary conditions (3) and (4) do not coincide at the origin, hence the solution  $C(x,t)$  has a discontinuity in  $\Omega$ . This gap goes along the characteristic line  $t=x$ . Concentration of suspended particles

$$C(x,t) \begin{cases} = 0, & t < x \\ > 0, & t > x \end{cases}. \quad (6)$$

The concentration of retained particles  $S(x,t)$  is continuous over the entire domain  $\Omega$  and is smooth in  $\Omega$  everywhere except the characteristics  $t=x$ :

$$S(x,t) \begin{cases} = 0, & t < x \\ > 0, & t > x \end{cases}. \quad (7)$$

An exact solution of (1) - (5) is known only for the constant and the linear functions  $\Lambda(S)$  (see [12-14]). For an arbitrary smooth function  $\Lambda(S)$  the exact solution can not be expressed analytically. In this case, an asymptotic solution can be found in the form of a series in powers of

a small parameter. Asymptotics of the general problem of diffusion in the vicinity of the wave front  $t=x$  is constructed in [15]. For the system (1) - (5) corresponding asymptotic formulas are given in [16]. In this paper we construct the asymptotics in the vicinity of the other characteristics  $x=0$ , i.e. near the inlet of the filter.

### 3. ASYMPTOTIC SOLUTION IN THE VICINITY OF THE FILTER INLET

Let us consider a quasi-linear system (1), (2) in the domain

$$\Omega' = \{0 < x < 1, t > x\}.$$

General form of the solution (6), (7) in the domain  $\Omega$  allows to replace two initial conditions (4), (5) by one condition on the characteristic line  $t=x$

$$S|_{t=x} = 0 \quad (8)$$

Solution of the problem (1) - (3), (8) is unique and coincides with the solution of (1) - (5) in  $\Omega'$ .

The first three terms of the asymptotics of (1) - (3), (8) with  $x \rightarrow 0$  are defined below. We seek a solution in the form of a series in powers of  $x$  with coefficients depending on  $w = t - x$ :

$$C(x,t) = c_0(w) + xc_1(w) + x^2c_2(w) + \dots \quad (9)$$

$$S(x,t) = s_0(w) + xs_1(w) + x^2s_2(w) + \dots \quad (10)$$

Then

$$\begin{aligned} \Lambda(S) &= \Lambda(s_0 + xs_1 + x^2s_2 + \dots) = \\ &= \Lambda_0 + xs_1\Lambda'_0 + x^2(s_2\Lambda'_0 + s_1^2\Lambda''_0/2) + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

Where

$$\Lambda_0 = \Lambda(s_0(\omega)), \quad \Lambda'_0 = \Lambda'(s_0(\omega)), \quad \Lambda''_0 = \Lambda''(s_0(\omega)).$$

Substitution of the expansions (9) - (11) into (1), (2) gives

$$\begin{aligned} & (c'_0 + xc'_1 + x^2c'_2 + \dots) + \\ & + (-c'_0 + c_1 - xc'_1 + 2xc_2 - x^2c'_2 + \dots) + \\ & + (\Lambda_0 + xs_1\Lambda'_0 + x^2(s_2\Lambda'_0 + s_1^2\Lambda''_0/2) + \dots)c_0 + \\ & + xc_1(\Lambda_0 + xs_1\Lambda'_0) + x^2c_2\Lambda_0 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & s'_0 + xs'_1 + x^2s'_2 + \dots = \\ & = (\Lambda_0 + xs_1\Lambda'_0 + x^2(s_2\Lambda'_0 + s_1^2\Lambda''_0/2) + \dots)c_0 + \\ & + xc_1(\Lambda_0 + xs_1\Lambda'_0) + x^2c_2\Lambda_0 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Equating the coefficients of the same powers of  $x$ , we obtain a recurrent system of ordinary differential and algebraic equations to determine the unknown functions  $s_k(x,t)$ ,  $c_k(x,t)$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

$$s'_0 = \Lambda_0 c_0; \quad (14)$$

$$c_1 + \Lambda_0 c_0 = 0; \quad (15)$$

$$s'_1 = s_1 \Lambda'_0 c_0 + c_1 \Lambda_0; \quad (16)$$

$$2c_2 + s_1 \Lambda'_0 c_0 + c_1 \Lambda_0 = 0; \quad (17)$$

$$s'_2 = (s_2 \Lambda'_0 + s_1^2 \Lambda''_0 / 2) c_0 + c_1 s_1 \Lambda'_0 + c_2 \Lambda_0 \quad (18)$$

From (3), (8) follow the boundary conditions at the wave front

$$s_0|_{w=0} = 0, \quad s_1|_{w=0} = 0, \quad s_2|_{w=0} = 0, \dots \quad (19)$$

and at the filter inlet

$$c_0|_{x=0} = p. \quad (20)$$

Now we can find consistently the first terms of the asymptotic expansions. From (20)

$$c_0 = p \quad (21)$$

Equation (14) takes the form

$$s'_0 = \Lambda_0 p \quad (22)$$

After integrating and using (8)

$$\int_0^{s_0} \frac{dS}{\Lambda(S)} = pw \quad (23)$$

The solution of (14)

$$s_0(w) = \Phi^{-1}(pw) \quad (24)$$

is the inverse function to

$$\Phi(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{dS}{\Lambda(S)} \quad (25)$$

Note that at the filter inlet  $x=0$  the variable  $w=t$  and (23) coincides with the function found in [11] by the method of potential (when  $p=1$ ). From (15), (21)

$$c_1 = -\Lambda_0 p \quad (26)$$

According to (21), (26) the equation (16) takes the form

$$s'_1 = s_1 \Lambda'_0 p - \Lambda_0^2 p \quad (27)$$

The solution of (27), (19)

$$s_1(w) = -p e^{\Lambda(w)} \int_0^w e^{-\Lambda(w)} \Lambda^2(s_0(w)) dw, \quad (28)$$

where

$$\Delta(w) = p \int_0^w \Lambda'(s_0(w)) dw \quad (29)$$

After substituting (21), (26) into (17)

$$2c_2 + s_1 \Lambda'_0 p - \Lambda_0^2 p = 0 \quad (30)$$

we find  $c_2(w)$

$$c_2 = \frac{p}{2} (\Lambda_0^2 - s_1 \Lambda'_0) \quad (31)$$

or, using (28)

$$c_2 = \frac{p}{2} \left( \Lambda_0^2 + \Lambda_0' e^{\Delta(w)} \int_0^w e^{-\Delta(w)} \Lambda^2(s_0(w)) dw \right). \quad (32)$$

Substitution of (21), (26), (31) into (18) gives

$$s_2' = p(s_2 \Lambda_0' + s_1^2 \Lambda_0'' / 2 - \frac{3}{2} \Lambda_0 s_1 \Lambda_0' + \frac{1}{2} \Lambda_0^3) \quad (33)$$

The solution of (33), (19)

$$s_2(w) = p e^{\Delta(w)} \int_0^w e^{-\Delta(w)} F(w) dw, \quad (34)$$

where

$$F(w) = s_1^2 \Lambda_0'' / 2 - \frac{3}{2} \Lambda_0 s_1 \Lambda_0' + \frac{1}{2} \Lambda_0^3.$$

Formulas (21), (24), (26), (28), (31), (34) specify asymptotic terms of expansions (9), (10) up to second order for the problem (1) - (3), (8).

#### 4. NUMERICAL EVALUATION OF THE APPLICABILITY OF THE ASYMPTOTICS

Consider the linear function

$$\Lambda(S) = \lambda(S_{\max} - S), \quad (35)$$

where  $S_{\max} = const$  is the maximum limit of deposit concentration. In this case, the quasi-linear system (1), (2) with the boundary conditions (3) - (5) has an exact solution

$$C(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \frac{p e^{\lambda p(t-x)}}{e^{\lambda p(t-x)} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1}, & t > x \end{cases}; \quad (36)$$

$$S(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \frac{S_{\max} (e^{\lambda p(t-x)} - 1)}{e^{\lambda p(t-x)} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1}, & t > x \end{cases}. \quad (37)$$

In the domain  $\Omega'$  the solution (36), (37) expressed in variables  $x, \omega = t - x$  has the form

$$C(x, \omega) = \frac{p e^{\lambda p \omega}}{e^{\lambda p \omega} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1};$$

$$S(x, \omega) = \frac{S_{\max} (e^{\lambda p \omega} - 1)}{e^{\lambda p \omega} + e^{\lambda S_{\max} x} - 1}. \quad (38)$$

Substituting (35) into equation (14) - (18) and integrating, we find asymptotic solutions of the zero, first and second order

$$C^{(0)} = p, \quad S^{(0)} = S_{\max} (1 - e^{-\lambda p \omega}) \quad (39)$$

$$C^{(1)} = p - \lambda p S_{\max} e^{-\lambda p \omega} x, \quad (40)$$

$$S^{(1)} = S_{\max} (1 - e^{-\lambda p \omega}) - \lambda S_{\max}^2 (e^{-\lambda p \omega} - e^{-2\lambda p \omega}) x$$

$$C^{(2)} = p - \lambda p S_{\max} e^{-\lambda p \omega} x + \frac{\lambda^2 p S_{\max}^2}{2} (2e^{-2\lambda p \omega} - e^{-\lambda p \omega}) x^2 + \dots \quad (41)$$

$$S^{(2)} = S_{\max} (1 - e^{-\lambda p \omega}) - \lambda S_{\max}^2 (e^{-\lambda p \omega} - e^{-2\lambda p \omega}) x + \frac{\lambda^2 S_{\max}^3}{2} (3e^{-2\lambda p \omega} - 2e^{-3\lambda p \omega} - e^{-\lambda p \omega}) x^2 + \dots$$

Note that formulas (39) - (41) are Taylor series in powers of  $x$  of functions (38). Denote

$$\delta^{(k)}(x, \omega) = \max\{|C - C^{(k)}|, |S - S^{(k)}|\}, \quad k = 0, 1, 2.$$

To estimate the difference between exact and asymptotic solutions we can find the areas at the plane  $\{x, \omega\}$  in which  $\delta^{(k)} < \varepsilon$  for  $\varepsilon = \{0.0001; 0.001; 0.01; 0.1\}$ . For the numerical calculation the following parameter values are chosen:  $\lambda = 1, p = 1, S_{\max} = 1$ .

Calculations show that with the increase of asymptotic expansion order  $k$  the area  $\{x, \omega: \delta^{(k)} < \varepsilon\}$  is getting larger.

It is important to know the intervals  $(0, x_\varepsilon^{(k)})$ ,  $x_\varepsilon^{(k)} > 0$  where the inequality  $\delta^{(k)} < \varepsilon$  holds for all  $\omega > 0$ . Right endpoints of these intervals are the intersection points of graphs with  $x$ -axis (see fig. 1-3). The values of  $x_\varepsilon^{(k)}$  are calculated in table 1.

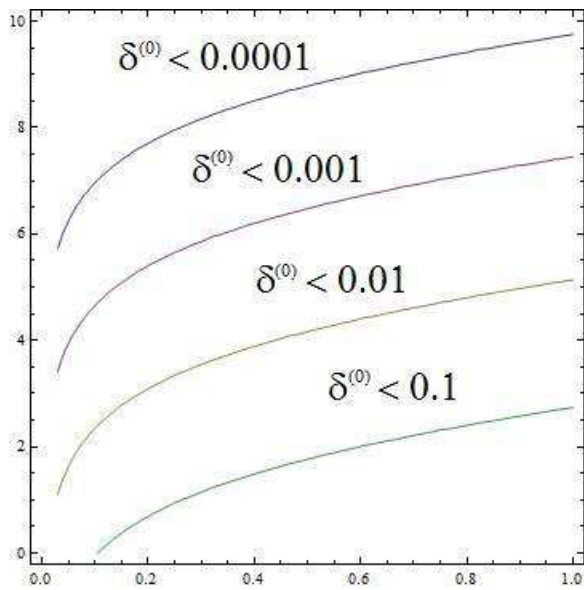


Fig. 1. Areas in which  $\delta^{(0)} < \varepsilon$ .

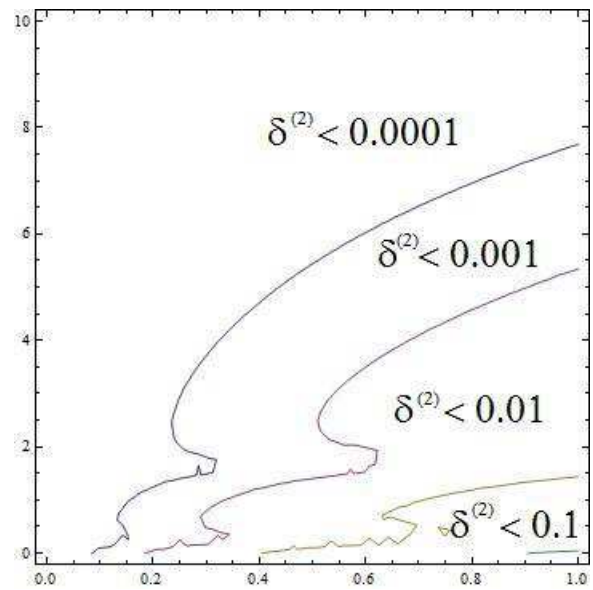


Fig. 3. Areas in which  $\delta^{(2)} < \varepsilon$ .

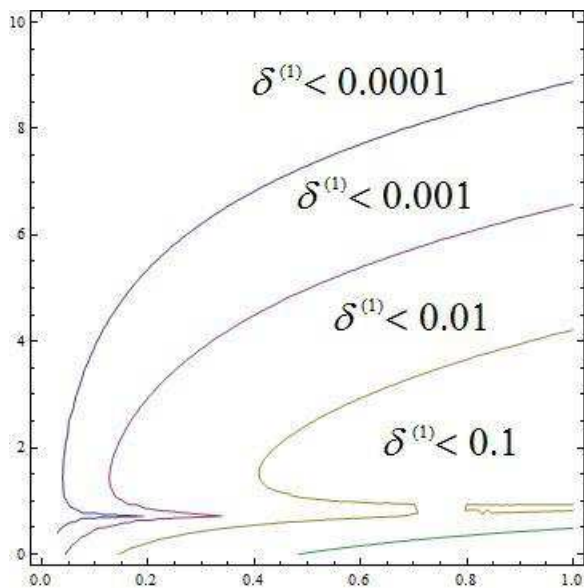


Fig. 2. Areas in which  $\delta^{(1)} < \varepsilon$ .

Table 1. Right endpoints  $x_\varepsilon^{(k)}$ .

$k \setminus \varepsilon$	0.0001	0.001	0.01	0.1
0	-	-	-	0.10536
1	0.01418	0.04506	0.14484	0.48318
2	0.08494	0.18449	0.40450	0.90510

Empty cells in the table 1 indicate that the corresponding  $x_\varepsilon^{(k)} > 0$  does not exist.

Table 1 shows that the length of the intervals  $(0, x_\varepsilon^{(k)})$  increases rapidly with increasing  $k$ .

## 5. CONCLUSIONS

The motion of particles in the filter is described by the system of complicated differential equations that has exact analytical solution only in the simplest cases. The asymptotics found enables to approximate solution near the filter inlet. Numerical calculations show that with the increase of asymptotic expansion order  $k$  its accuracy improves significantly.

The construction of asymptotic solution using the boundary conditions on two different characteristics suggests that this solution can not be treated locally only near one characteristic. Good agreement of the asymptotics with the exact solution in the simple quasi-linear case suggests that the asymptotic solution is applicable in the entire domain between the characteristic lines.

## REFERENCES

1. **Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.** Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.

2. **Bedrikovetsky P.** Mathematical theory of oil and gas recovery with applications to ex-USSR oil and gas fields. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993.
3. **Khilar K.C., Fogler H.S.** Migrations of fines in porous media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
4. **Tien C., Ramarao B.V.** Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols, 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2007.
5. **Baveye P., Vandevivere P., Hoyle B.L., DeLeo P.C., Sanchez De Lozada D.** Environmental impact and mechanisms of the biological clogging of saturated soils and aquifer materials. // *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, vol. 28, pp. 123-191, 1998.
6. **Vidali M.** Bioremediation. An overview. // *Pure and Applied Chemistry*, vol. 73, pp. 1163-1172, 2001.
7. **You Z., Badalyan A., Bedrikovetsky P.** Size-Exclusion Colloidal Transport in Porous Media—Stochastic Modeling and Experimental Study. // *SPE Journal*, vol. 18, pp. 620-633, 2013.
8. **Bedrikovetsky P.** Upscaling of Stochastic Micro Model for Suspension Transport in Porous Media. // *Transport in Porous Media*, vol. 75, pp. 335–369, 2008.
9. **Chalk P., Gooding N., Hutten S., You Z., Bedrikovetsky P.** Pore size distribution from challenge coreflood testing by colloidal flow. // *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 90, pp. 63-77, 2012.
10. **Santos A., Bedrikovetsky P.** A stochastic model for particulate suspension flow in porous media. // *Transport in Porous Media*, vol. 62, 2006, pp. 23-53.
11. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media. // *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, iss. "Mathematical and Computational Analyses of Flow and Transport Phenomena", 9 p., 2013.
12. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.** Flow of suspensions through porous media - application to deep filtration. // *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 62, pp. 8-35, 1970.
13. **Alvarez A.C., Bedrikovetsky P.G., Hime G., Marchesin D., Rodrigues J.R.** A fast Inverse Solver for the filtration function for flow of water with particles in porous media. // *J. of Inverse Problems*, vol. 22, p. 69, 2006.
14. **Vyazmina E.A., Bedrikovetsky P.G., Polyaniin A.D.** New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer. // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, vol.41, no. 5, pp. 556-564, 2007.
15. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. // *Chemical Engineering Journal*, vol. 258, pp. 374-385, 2014.
16. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Matematicheskaya model dbizheniya chastitc v filtre. // *Problems of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 17, Moscow, MGSU, 2014, pp. 295-304.

---

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20, tel. +7(499)2354402, e-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics of Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994, e-mail: yuri-osipov@mail.ru.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ. ЧАСТЬ 1: ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЖИДКОСТИ

*И.Н. Афанасьева, И.Ю. Ланцова*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Статья посвящена верификационным исследованиям методики численного моделирования внешнего обтекания конструкции – цилиндр с жестко прикрепленной к нему гибкой упругой балкой – в связанной постановке (Fluid-Structure Interaction, FSI). Обтекание происходит в ламинарном режиме при числах Рейнольдса  $Re=20$  и  $Re=200$ . По итогам первого этапа верификации представлены результаты многовариантных расчетных исследований, проведенных на различных сетках в стационарной и нестационарной постановке с использованием специализированного программного комплекса ANSYS CFX. На основе сопоставления полученных критериальных параметров с источником выбрана основная расчетная сетка для проведения задачи в связанной аэрогидроупругой постановке.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, гидрогазодинамика, ламинарное течение, численное моделирование, Fluid-Structure Interaction (FSI)

## 2-D MODELING OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION BETWEEN AN ELASTIC STRUCTURE AND TRANSIENT FLOW. PART 1: VERIFICATION OF NUMERICAL TECHNIQUE OF FLUID BEHAVIOR SIMULATION

*Irina N. Afanasyeva, Irina U. Lantsova*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Present paper deals with the verification of a numerical technique of modeling fluid-structure interaction (FSI) problems. The configuration consists of incompressible viscous fluid around an elastic structure in the channel. External flow is laminar (Reynolds numbers  $Re=20$  and  $Re=200$ ). Multivariate steady and unsteady calculations are performed using special software ANSYS CFX. Different types of grids were tested. Main results are showed in tables and plots. Based on obtained results and comparison them with reference data the main grid for future investigations of FSI problem were chosen.

**Key words:** aerohydroelasticity, aerohydrodynamics, laminar flow, numerical simulation, Fluid-Structure Interaction (FSI)

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Немецкими учеными из Университета Дортмунда (Institute for Applied Mathematics and Numerics, University of Dortmund, Dortmund, Germany) [1] в был объявлен «бэнчмарк», посвященный тестированию существующих численных методов решения связанных за-

дач (Fluid-Structure Interaction Benchmark). Объектом исследования выбрана гибкая упругая балка, прикрепленная к неподвижному абсолютно жесткому цилиндру (см. рис. 1). Вся эта конструкция погружена в канал с вязкой несжимаемой жидкостью и взаимодействует с движущимся потоком. Обтекание происходит в ламинарном режиме при

различных числах Рейнольдса ( $Re = (\rho^f \bar{v}_{in}^f D) / \eta$ , где  $\rho^f$  – плотность жидкости,  $\bar{v}_{in}^f$  – средняя скорость потока,  $D$  – диаметр цилиндра,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости среды). При более высоких скоростях потока ( $Re \geq 200$ ) в следе за цилиндром устанавливается периодическое (ламинарное) вихреобразование, способ-

ствующее возникновению подъемной силы (поперек потока), которая действует на балку. Следствием этого являются возникающие периодические колебания конструкции (балки), сопровождающиеся большими перемещениями. А балка в связи с изменением своей геометрической формы влияет на структуру потока.

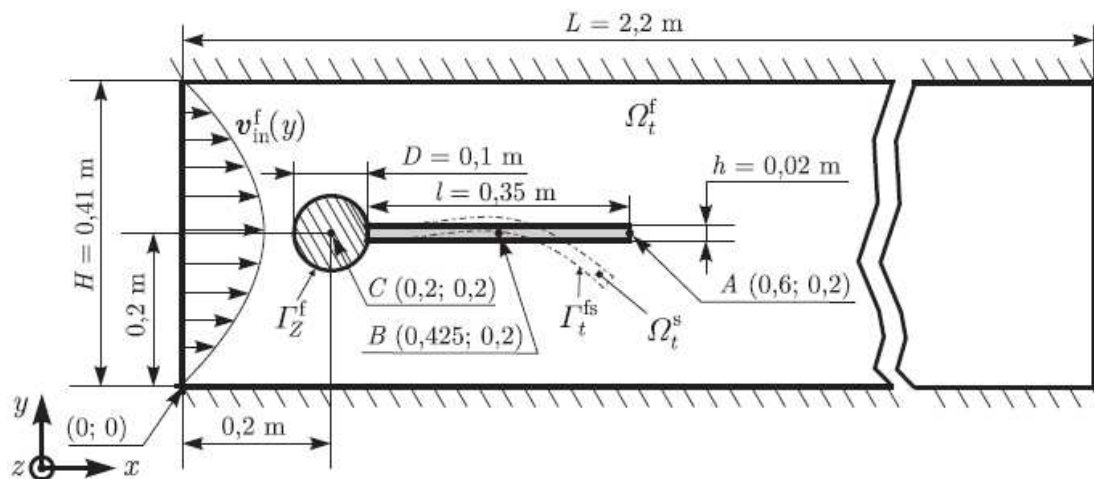


Рис. 1. Геометрические параметры модели.

Материал для гибкой деформируемой конструкции имеет очень маленький модуль сдвига  $\mu$  и, соответственно, модуль упругости  $E$ , поэтому может сжиматься с коэффициентом Пуассона  $\nu$  менее 0.5. Величины используемых физических характеристик материала конструкции и жидкости напоминают эластомер или полибутадиев и глицерин (табл. 1), соответственно.

В качестве контролируемых параметров выбраны величины следующих характеристик аэрогидроупругого взаимодействия конструкции с потоком:

1) Горизонтальная  $x(t)$  и вертикальная координата  $y(t)$  – горизонтальное и вертикальное перемещение,  $u_x(x)$  и  $u_y(x)$  соответственно – точки  $A(t)$ , расположенной на конце балки (рис. 1). Положение точки  $A(t)$  меняется во времени в связи с динамической реакцией балки на воздействие потока. Средние значения перемещений

$(u_{x\_mean}(x), u_{y\_mean}(x))$ , амплитуда  $(u_{x\_ampl}(x), u_{y\_ampl}(x))$  и частота колебаний  $(f_{u_x}, f_{u_y})$  сопоставляются в табличном виде.

2) Интегральные суммарные нагрузки – аэродинамические сила лобового сопротивления  $F_D(t)$  [Н] (вдоль оси X) и подъемная сила  $F_L(t)$  [Н] (вдоль оси Y) для всей конструкции (цилиндр и балка):

$$(F_D, F_L) = \int_S \sigma n dS \quad (1)$$

где  $S$  – поверхность всей конструкции (цилиндра и балки), контактирующая с потоком,  $n$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ ,  $\sigma$  – напряжения вдоль X (для  $F_D$ ) и вдоль Y (для  $F_L$ ).

Средние значения аэродинамических сил  $(F_{D\_mean}, F_{L\_mean})$ , амплитуда  $(F_{D\_ampl}, F_{L\_ampl})$

и частота колебаний ( $f_{F_D}$ ,  $f_{F_L}$ ) сопоставляются в табличном виде.

Средние значения контролируемых параметров (п.1, п.2), амплитуды и частота колебаний вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} mean &= \frac{1}{2} (\max + \min) \\ ampl &= \frac{1}{2} (\max - \min) \\ f &= \frac{1}{T'} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T$  – период колебаний [с].

Поскольку задача аэрогидроупругости по сути состоит из двух связанных между собой частей: моделирование поведения жидкости и моделирование поведения конструкции, – «бэнчмарк» разбивается на три этапа:

1) Верификация и валидация CFD-решателя (Computational Fluid Dynamics, CFD-solver), который вычисляет пространственно-временные характеристики потока (поля скоростей и давления, структуру потока, частоту и картину вихреобразования).

2) Верификация и валидация CSM-решателя (Computational Structural Mechanics, CSM-solver), который вычисляет напряженно-деформированное состояние и динамическую реакцию конструкции (напряжения, деформации, перемещения, формы и частоты вынужденных колебаний).

3) Верификация и валидация FSI-решателя (Fluid Structure Interaction, FSI-solver), который передает данные из одного модуля в другой (из CFD-решателя в CSM-решатель – вычисленные аэродинамические нагрузки с учетом деформированного состояния конструкции, а из CSM-решателя в CFD-решатель – вычисленные перемещения конструкции).

На *первых двух этапах* исследуется зависимость полученного решения от степени дискретизации в пространстве и времени: сопоставляются и анализируются результаты, полученные на различных расчетных сетках и

при разных шагах по времени (для нестационарных постановок). Для *третьего этапа* на выбранных расчетных сетках исследуются параметры расчета, отвечающие за сходимость, точность связанного решения (шаг по времени, коэффициент релаксации для вычисления перемещений и нагрузок на каждой итерации, количество итераций на каждом связанном шаге по времени), и их оптимальная комбинация.

Задача решалась в двумерной постановке (в плоскости OXY). Поэтому в третьем направлении (в направлении оси Z) размер расчетной сетки соответствует размеру одного элемента и равен 0.01 м.

Также следует отметить, что во избежание возникновения осцилляций контролируемых параметров потока, связанных с численными эффектами, расположение обтекаемого объекта в канале немного ассиметрично относительно направления потока.

Многовариантные CFD-расчеты проводились с использованием специализированного программного комплекса ANSYS CFX. Расчеты НДС конструкции и ее динамического отклика выполнялись в программном комплексе ANSYS Mechanical.

## 2. CFD-ТЕСТЫ

### 2.1 Параметры расчетов

Для проведения многовариантных CFD-расчетов вся конструкция принимается абсолютно жестким неподвижным телом, погруженным в канал с несжимаемой вязкой жидкостью. В рамках верификации и валидации CFD-решателя выполнены два типа расчетов: в стационарной (CFD1-тест) и нестационарной (CFD2-тест) постановке. Основные параметры CFD-расчетов с указанием физических характеристик среды и потока ( $\rho^f$  – плотность жидкости,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\bar{v}_{in}^f$  – средняя скорость потока на входе,  $Re$  – число Рейнольдса) показаны в таблице 1.

Таблица 1 Параметры CFD-тестов

	CFD1	CFD2
$\rho^f$ [кг/м <sup>3</sup> ]	1000	1000
$\eta$ [Па с]	1	1
$v_{in}^{-f}$ [м/с]	0.2	2
Re [-]	20	200

Поведение жидкой среды моделируется классическими уравнениями Навье-Стокса [4]. Поскольку режим течения ламинарный, модели турбулентности в расчетах не применяются.

Дискретизация по пространству выполняется Методом конечных объемов (МКО).

Физическое время счета для нестационарных расчетов составило ~20 с. Исследовалась зависимость численного решения от шага по

времени (от числа Куранта,  $C_0 = \frac{v_{in}^{-f} \Delta t}{\Delta x}$ ), где

$\Delta x$  – минимальный размер ячейки по оси X) проводилось при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с и  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с. Применяются схема адвекции (Advection Scheme) High Resolution и неявная схема интегрирования по времени второго порядка (Transient Scheme) Second Order Backward Euler.

Критерием сходимости и окончания счета для *стационарной* постановки являлось достижение заданного уровня максимальных

невязок  $10^{-3}$  и выход на асимптоту зависимостей аэродинамических сил от номера шага (условного времени). Для задач в *нестационарной* постановке – выход на устойчивый режим течения, который отслеживался по временным зависимостям периодической природы аэродинамических сил и достижение заданного уровня максимальных невязок  $10^{-3}$ . При этом максимальное количество итераций на шаге не превышало 10.

## 2.2 Расчетные сетки

Расчетная область (область жидкой среды в канале) разбивалась на элементы в препроцессоре программного комплекса ANSYS Mechanical с использованием разработанного параметризованного макроса, набранного на внутреннем языке программирования APDL (turek\_CFD.mac). Для удобства параметризации макроса, а также построения структурированных ортогональных сеток рабочая область сначала разбивалась на блоки (рис. 2). В каждом блоке задавалось свое значение минимального размера элемента и коэффициент соотношения самого большого элемента области к самому маленькому. Варианты расчетных сеток с указанием варьируемых параметров показаны на рисунке 3 и в таблице 2.

Таблица 2. Параметры\* расчетных сеток для CFD-тестов.

Вариант расчетной сетки (Модель)	Кол-во узлов	Кол-во эл-в	$ds_{cyl,M}$	$dn_{cyl,M}$	$ds_{beam,M}$	$dn_{beam,M}$	$ds_{wall,M}$	$dn_{wall,M}$
D	38760	24650	4.0e-3	4.0e-4	5.0e-3	7.5e-4	5.0e-3	3.0e-3
Da	91460	67200	1.5e-3	2.5e-4	5.0e-3	5.0e-4	5.0e-3	3.0e-3
Db	127110	92525	1.8e-3	2.5e-4	5.0e-3	5.0e-4	5.0e-3	3.0e-3
C	150630	74425	1.5e-3	2.5e-4	2.3e-3	5.0e-4	2.5e-3	2.5e-3
B	438740	217800	7.5e-4	1.0e-4	1.3e-3	2.5e-4	1.5e-3	7.5e-4
A	671980	334000	7.5e-4	7.5e-5	1.0e-3	2.0e-4	1.0e-3	1.0e-3

\* $ds$  – размер элементов на поверхности конструкции,  $dn$  – размер 1-го слоя элементов по нормали к поверхности; индексы *cyl*, *beam* и *wall* – на цилиндре, на балке и на стенках канала, соответственно.

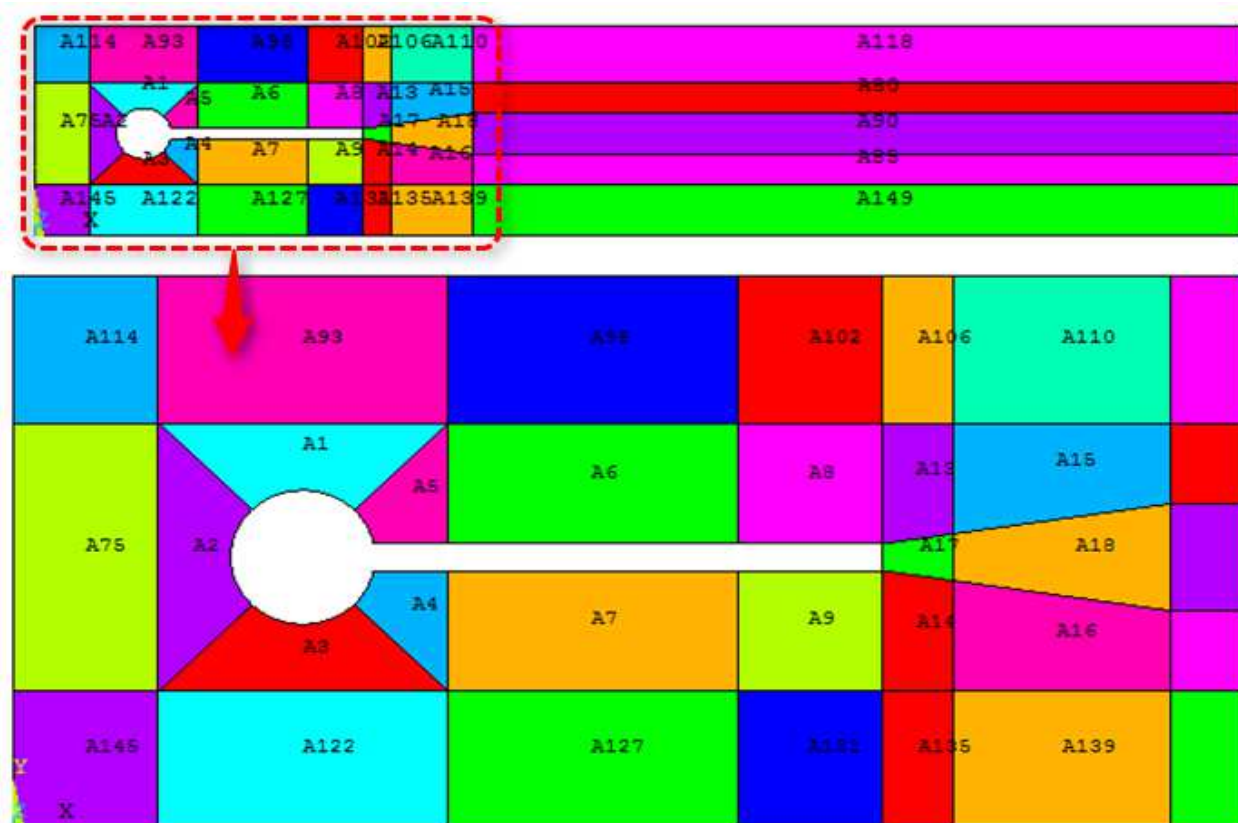


Рис. 2. Блочное разбиение расчетной области.

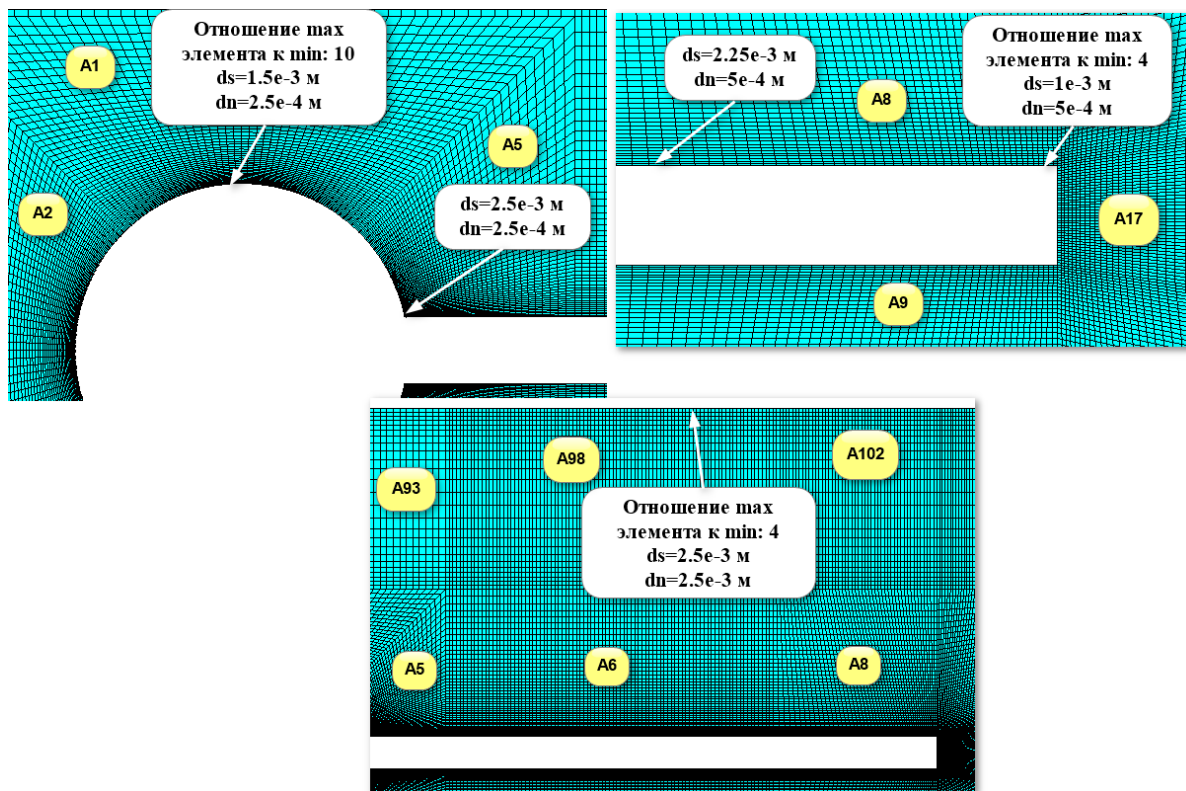


Рис. 3. Расчетная сетка: Модель С (150 630 узлов).

### 2.3 Граничные и начальные условия

На входе (Inlet) канала задается параболический профиль скорости:

$$v_x^f(y)|_{x=0} = 6\bar{v}_{in}^f \frac{y(H-y)}{H^2} \quad (3)$$

где  $\bar{v}_{in}^f$  – средняя скорость [м/с];  $y$  – вертикальная координата [м] (начало координат см. рис. 1), в поперечном направлении потока;  $H$  – вертикальный размер расчетной области (высота канала) [м].

Для задач в нестационарной постановке используется плавное увеличение профиля скорости во времени:

$$v^f(t,0,y) = \begin{cases} v_x^f(y)|_{x=0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{2}, & t < 2c \\ v_x^f(y)|_{x=0}, & t \geq 2c \end{cases} \quad (4)$$

На выходе (Outlet) канала задаются мягкие граничные условия «Opening» с осредненным относительным давлением равным нулю.

Т.к. задача решается в двумерной постановке, на боковых границах области задается условие симметрии «Symmetry».

На стенках канала и на поверхности обтекаемого тела задается условие прилипания на стенке «No Slip Wall».

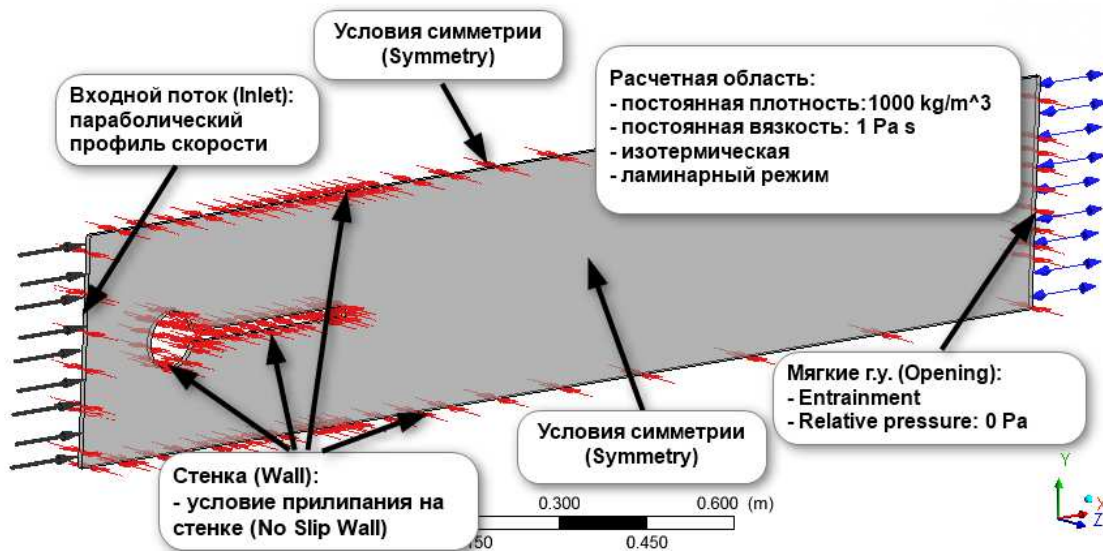


Рис. 4. Расчетная область с указанием граничных условий.

В качестве начальных условий в случае и стационарных и нестационарных расчетов принимается профиль скорости (4) в момент  $t=0$  с.

### 2.4 Результаты расчетов

Ниже представлены результаты многовариантных расчетов в стационарной (CFD1) и нестационарной (CFD2) постановке в сопоставлении с численными результатами авторов «бэнчмарка» [1].

Таблица 3 Сопоставление результатов стационарных расчетов (CFD1) для сеток А, В и С с источником (Ref. [1])

	$F_D$ [Н/м]	$F_L$ [Н/м]
Модель А	14.31	1.115
Модель В	14.31	1.121
Модель С	14.30	1.117
<b>Ref. [1]</b>	<b>14.29</b>	<b>1.119</b>
	$\varepsilon(F_D)$ [%]	$\varepsilon(F_L)$ [%]
Модель А	0.14	0.36
Модель В	0.14	0.18
Модель С	0.10	0.18

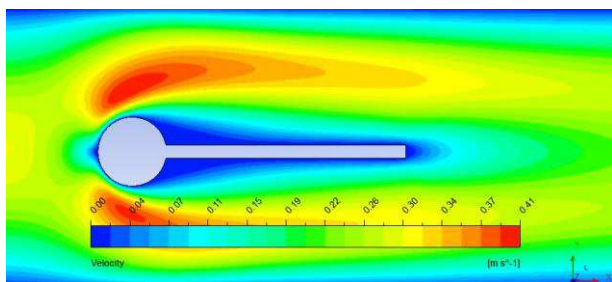


Рис. 5. Модель С. CFD1: расчетное поле скоростей, м/с

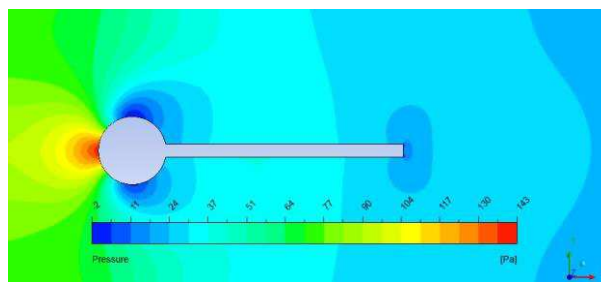


Рис. 6. Модель С. CFD1: расчетное поле давлений, Па

Таблица 4 Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с

	$F_{D\_mean} \pm F_{D\_ampl}$ [H/m]	$f_{FD}$ [Hz]	$F_{L\_mean} \pm F_{L\_ampl}$ [H/m]	$f_{FL}$ [Hz]
Модель А	439.48±6.32	4.348	-5.52±449.52	4.348
Модель В	439.62±7.09	4.348	-5.74±446.93	4.348
Модель С	439.90±6.48	4.348	-7.44±440.63	4.348
Модель Db	440.11±6.38	4.348	-22.91±434.22	4.348
Модель Da	440.00±6.10	4.348	-11.02±422.02	4.348
Модель D	-	-	-	-
<b>Ref. [1]</b>	<b>439.45±5.62</b>	<b>4.396</b>	<b>-11.893±437.81</b>	<b>4.396</b>
	$\varepsilon(F_{D\_mean}); \varepsilon(F_{D\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FD})$ [%]	$\varepsilon(F_{L\_mean}); \varepsilon(F_{L\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FL})$ [%]
Модель А	0.01; 12.48	1.07	-11.89; 2.68	1.07
Модель В	0.04; 26.21	1.07	53.62; 2.08	1.07
Модель С	0.10; 15.31	1.07	51.74; 0.64	1.07
Модель Db	0.15; 13.47	1.07	37.42; 0.82	1.07
Модель Da	0.12; 8.57	1.07	7.37; 3.61	1.07
Модель D	-	-	-	-

Таблица 5 Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с

	$F_{D\_mean} \pm F_{D\_ampl}$ [H/M]	$f_{FD}$ [Гц]	$F_{L\_mean} \pm F_{L\_ampl}$ [H/M]	$f_{FL}$ [Гц]
Модель С	439.32±5.88	4.348	-0.88±431.24	4.348
Модель Db	439.36±5.58	4.348	-4.48±420.06	4.348
Модель Da	439.27±5.32	4.348	-3.26±408.34	4.348
Модель D	-	-	-	-
<b>Ref. [1]</b>	<b>439.45±5.62</b>	<b>4.396</b>	<b>-11.893±437.81</b>	<b>4.396</b>
	$\varepsilon(F_{D\_mean}); \varepsilon(F_{D\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FD})$ [%]	$\varepsilon(F_{L\_mean}); \varepsilon(F_{L\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FL})$ [%]
Модель С	0.03; 4.59	1.07	92.59; 1.50	1.07
Модель Db	0.02; 0.68	1.07	59.28; 4.05	1.07
Модель Da	0.04; 5.31	1.07	72.58; 6.73	1.07
Модель D	-	-	-	-

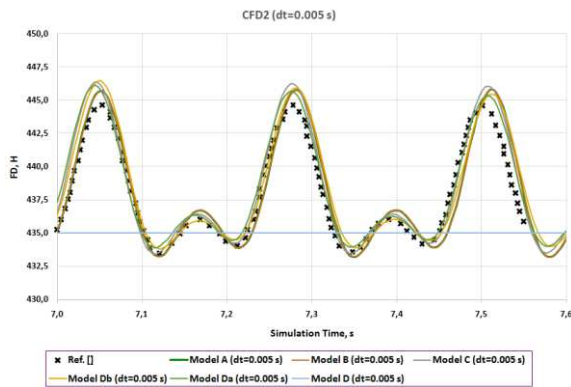


Рис. 7. Сила лобового сопротивления  $F_D$ . Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

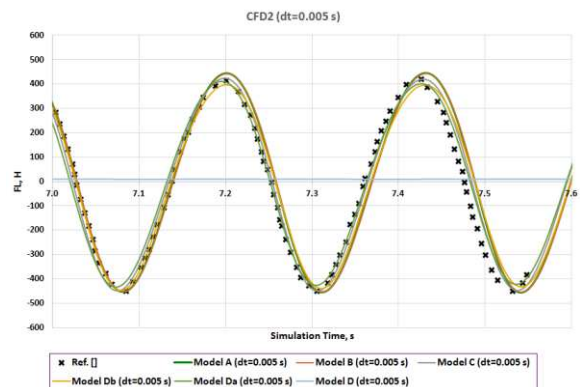


Рис. 9. Подъемная сила  $F_L$ . Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

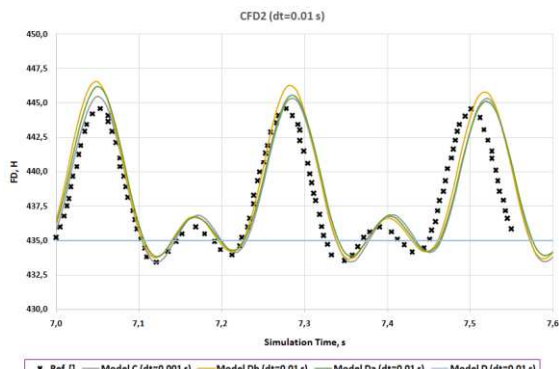


Рис. 8. Сила лобового сопротивления  $F_D$ . Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

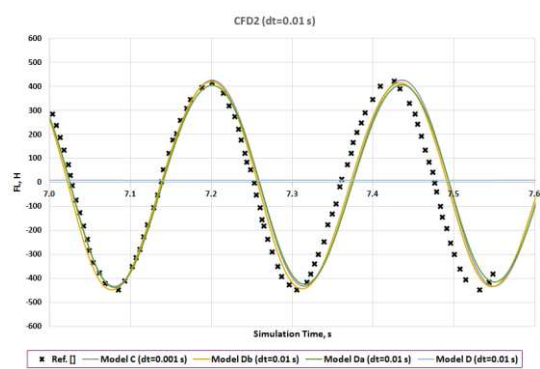


Рис. 10. Подъемная сила  $F_L$ . Сопоставление результатов нестационарных расчетов (CFD2) для сеток A, B, C, D, Da, Db с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

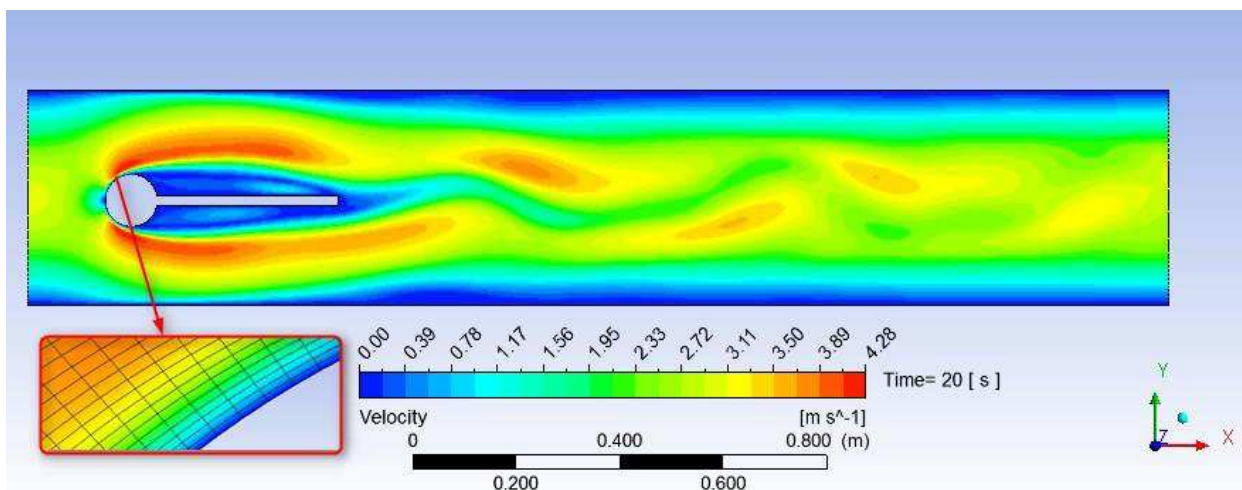


Рис. 11. Модель C. CFD2: расчетное поле скоростей с проявлением ламинарного вихреобразования в момент времени  $t=20$  с, м/с.

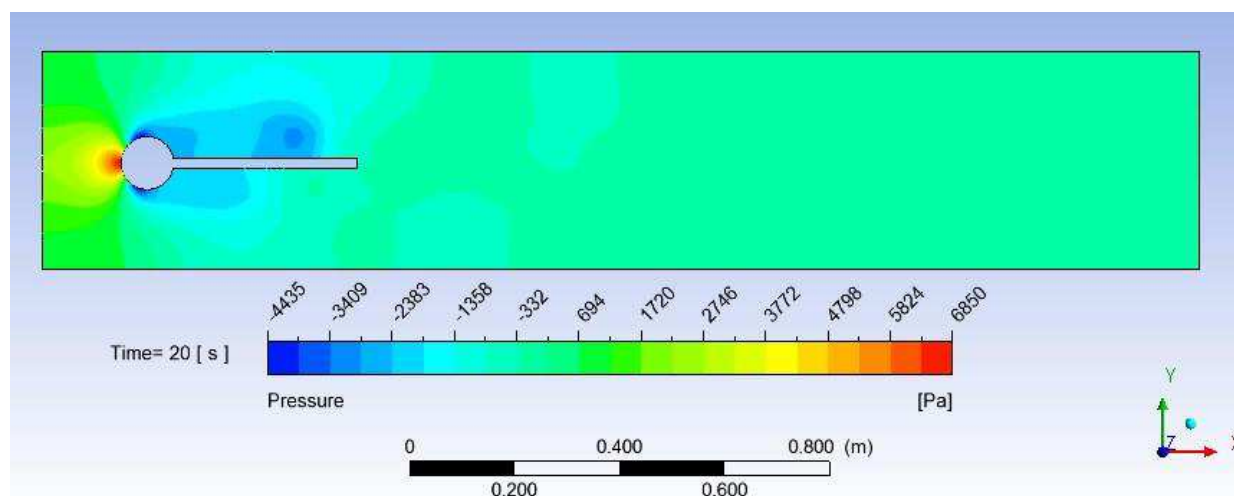


Рис. 12. Модель С. CFD2: расчетное поле давлений в момент времени  $t=20$  с, Па.

### 2.5 Анализ результатов и выводы

Анализируя данные таблицы 3 (CFD1:  $Re=20$ ), можно сделать вывод о независимости результатов стационарного расчета, а именно осредненных величин подъемной силы и силы лобового сопротивления, от степени пространственной дискретизации. Расхождение с источником не превышает 0.4%.

При больших скоростях потока (CFD2:  $Re=200$ ), когда возникает устойчивая картина вихреобразования, наблюдается слабая зависимость полученных результатов от варианта расчетной сетки при достаточном разрешении в зоне цилиндра и шага по времени (таблицы 4 - 5). Следует отметить, что большие значения погрешности для значений  $F_{D\_ampl}$  и  $F_{L\_mean}$  реализуются при малых значениях (близких к нулю) самих контролируемых параметров.

При проведении нестационарного расчета на самой «грубой» расчетной сетке – Модель D, периодического срыва вихрей с цилиндра не наблюдается и решение имеет нереалистичный стационарный характер. При сгущении сетки на поверхности цилиндра (Модель Da) картина обтекания кардинально меняется, и решение становится нестационарным.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам сопоставления расчетных параметров с данными источника [1] наименьшее расхождение по амплитуде подъемной аэродинамической силы показала Модель С. Поэтому для дальнейших расчетных исследований (FSI-тестов, см. статью в настоящем выпуске [5]) примем эту модель как базовую.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turek, S., Hron, J. Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow. In: Bungartz, H.-J. (Hrsg.) ; Schäfer, M. (Hrsg.): Fluid-Structure Interaction Bd. 53. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 371–385.
2. Förster, C., Wall, W.A., Ramm, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Lehrstuhl für Numerische Mechanik der Technischen Universität München. 2006.

3. **Schildhauer M.** Simulation von Fluid-Struktur-Interaktion mit ANSYS CFX, Masterarbeit Nr. 117/10, Berlin, Oktober 2010 - März 2011.
4. ANSYS CFX 14.5 User's Guide. // Canonsburg, 2012.
5. **Афанасьева И.Н.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 3: верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3, 2014.

---

Афанасьева Ирина Николаевна, старший инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: rena1986@mail.ru.

Ланцова Ирина Юрьевна, студентка Института фундаментального образования, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: irina-lanzova@mail.ru

Irina N. Afanasyeva, senior engineer-analyst of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: rena1986@mail.ru.

Irina U. Lantsova, student of Institute of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: irina-lanzova@mail.ru

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ. ЧАСТЬ 2: ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ

*И.Н. Афанасьева, И.Ю. Ланцова*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Статья посвящена верификационным исследованиям методики численного моделирования внешнего обтекания конструкции – цилиндр с жестко прикрепленной к нему гибкой упругой балкой – в связанной постановке (Fluid-Structure Interaction, FSI). Обтекание происходит в ламинарном режиме при числах Рейнольдса  $Re=20$  и  $Re=200$ . По итогам второго этапа верификации представлены результаты многовариантных расчетных исследований, проведенных на различных сетках и с использованием различных типов конечных элементов в статической и динамической постановке. Расчеты напряженно-деформированного состояния конструкции и ее динамического отклика выполнялись в программном комплексе ANSYS Mechanical. На основе сопоставления полученных критериальных параметров с источником выбрана основная расчетная модель для проведения задачи в связанной аэрогидроупругой постановке.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, гидрогазодинамика, ламинарное течение, численное моделирование, Fluid-Structure Interaction (FSI)

## 2-D MODELING OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION BETWEEN AN ELASTIC STRUCTURE AND TRANSIENT FLOW. PART 2: VERIFICATION OF NUMERICAL TECHNIQUE OF ELASTIC STRUCTURE BEHAVIOR SIMULATION

*Irina N. Afanasyeva, Irina U. Lantsova*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Present paper deals with the verification of a numerical technique of modeling fluid-structure interaction (FSI) problems. The configuration consists of incompressible viscous fluid around an elastic structure in the channel. External flow is laminar (Reynolds numbers  $Re=20$  and  $Re=200$ ). Multivariate static and dynamic analysis were carried out using special software ANSYS Mechanical. Different types of grids and finite element types were tested. Main results are showed in tables and plots. Based on obtained results and comparison of them with reference data the main grid for future investigations of FSI problem were chosen.

**Key words:** aerohydroelasticity, aerohydrodynamics, laminar flow, numerical simulation, Fluid-Structure Interaction (FSI)

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В продолжение [6] (см. статью в настоящем выпуске) объектом исследования выбрана гибкая упругая консольная балка, жестко прикрепленная к неподвижному цилиндру и находящаяся в следе за ним.

В настоящей статье представлены результаты *второго этапа* объявленного «бэнчмарка» [1]. Целью этого этапа является верификация и валидация CSM-решателя (Computational Structural Mechanics, CSM-solver), который вычисляет напряженно-

деформированное состояние и динамическую реакцию конструкции (напряжения, деформации, перемещения, формы и частоты вынужденных колебаний). Расчеты НДС конструкции и ее динамического отклика выполнялись в программном комплексе ANSYS Mechanical.

## 2. CSM-ТЕСТЫ

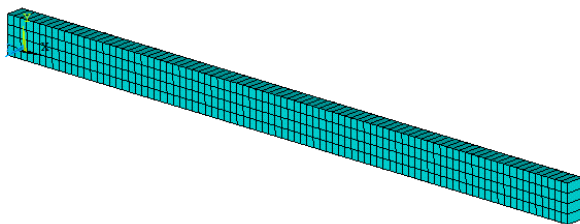
### 2.1 Параметры расчетов

В рамках CSM-тестов выполнены два типа расчетов: статический (CSM1- и CSM2-тесты) и динамический (CSM3-тест), с учетом геометрической нелинейности. Также для дальнейшего исследования влияния потока и деформируемой части конструкции друг на друга (а именно, для анализа частотных характеристик их динамического поведения) при выполнении FSI-тестов проведен модальный анализ балки (CSM1 и CSM2). Основные параметры CSM-тестов с указанием физических характеристик материала показаны в таблице 1.

В качестве нагрузки прикладывалась инерционная сила, путем задания ускорения в вертикальном направлении  $g = 2 \text{ м/с}^2$  (вдоль отрицательной полуоси OY). Динамический расчет проводился с шагом по времени  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

Таблица 1 Физические параметры материалов для CSM-тестов

	CSM1	CSM2	CSM3
$\rho^s$ [кг/м <sup>3</sup> ]	1000	1000	1000
$\nu^s$ [-]	0.4	0.4	0.4
$\mu^s$ [МПа]	0.5	2	0.5
$E^s$ [МПа]	1.4	5.6	1.4



Дискретизация уравнений по пространству осуществлялась методом конечных элементов (МКЭ). Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при проведении статического и динамического анализа выполнялось разреженным методом (решатель SPARSE). Для решения задач в динамической постановке применялся метод Ньюмарка с использованием итерационной процедуры Ньютона-Рафсона с автоматическим изменением шага. Для вычисления собственных частот и форм колебаний балки использовался блочный метод Ланцоша.

### 2.2 Расчетные КЭ-модели

Многовариантные расчетные исследования проводились на трех вариантах конечно-элементных моделей (таблица 2). Расчетная область (балка) разбивалась на элементы в препроцессоре программного комплекса ANSYS Mechanical с использованием разработанного параметризованного макроса, написанного на внутреннем языке программирования APDL (turek\_CSM.mac). Варианты расчетных сеток показаны на рисунке 1.

Таблица 2 Параметры расчетных КЭ-моделей для CSM-тестов.

	Кол-во узлов	Кол-во КЭ	Тип КЭ
Модель 1	890	352	SOLID185
Модель 2	2927	352	SOLID186
Модель 3	12002	5632	SOLID185

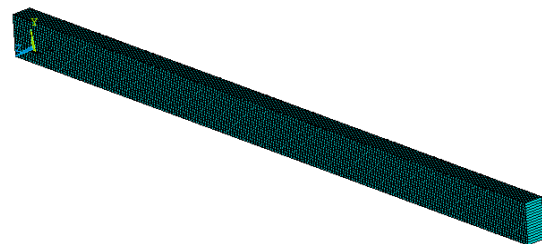


Рис. 1. Расчетная сетка: слева – Модель 1 и Модель 2; справа – Модель 3.

### 2.3 Граничные условия

На левом конце балки жесткое защемление моделируется закреплением по всем направлениям узлов КЭ-модели. В силу двумерной постановки задачи на поверхностях, перпендикулярных оси OZ, ограничено перемещение узлов вдоль этой оси.

### 2.4 Результаты расчетов

Ниже в таблицах 3-5 представлены результаты модального анализа для всех расчетных моделей. В таблицах 6-8

приведены основные результаты (горизонтальное  $u_{x,A}$  и вертикальное  $u_{y,A}$  перемещение точки A) многовариантных статических расчетов (CSM1, CSM2) и динамических (CSM3) в сопоставлении с данными источника (Ref.) [1]. На рис. 2-7 представлены соответствующие картины деформированного состояния балки для Модели 1.

Таблица 3 Расчетные собственные частоты (Гц) для всех расчетных моделей.

№	f [Гц]					
	CSM1, CSM3			CSM2		
	Модель 1	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 2	Модель 3
1	1.063	1.063	1.077	1.076	1.077	1.076
2	6.556	6.556	6.632	6.623	6.632	6.623
3	17.899	17.899	18.076	18.054	18.076	18.054
4	29.262	29.262	29.257	29.251	29.257	29.251
5	33.897	33.897	34.160	34.121	34.160	34.121

Таблица 4. Расчетные собственные формы и частоты (Гц) для трех вариантов расчетной КЭ-модели (CSM1, CSM3)
















Модель 1	Модель 2	Модель 3
 Форма №1 ( $f_1 = 1.063$ Гц)	 Форма №1 ( $f_1 = 1.077$ Гц)	 Форма №1 ( $f_1 = 1.076$ Гц)
 Форма №2 ( $f_2 = 6.556$ Гц)	 Форма №2 ( $f_2 = 6.632$ Гц)	 Форма №2 ( $f_2 = 6.623$ Гц)
 Форма №3 ( $f_3 = 17.899$ Гц)	 Форма №3 ( $f_3 = 18.076$ Гц)	 Форма №3 ( $f_3 = 18.054$ Гц)
 Форма №4 ( $f_4 = 29.262$ Гц)	 Форма №4 ( $f_4 = 29.257$ Гц)	 Форма №4 ( $f_4 = 29.251$ Гц)
 Форма №5 ( $f_5 = 33.897$ Гц)	 Форма №5 ( $f_5 = 34.160$ Гц)	 Форма №5 ( $f_5 = 34.121$ Гц)

Таблица 5. Расчетные собственные формы и частоты (Гц) для трех вариантов расчетной КЭ-модели (CSM2).








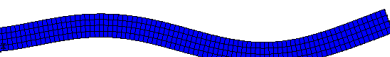




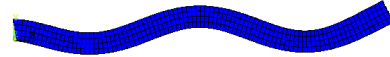
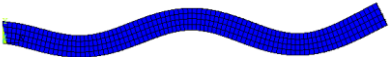

Модель 1	Модель 2	Модель 3
 Форма №1 ( $f_1 = 2.127$ Гц)	 Форма №1 ( $f_1 = 2.154$ Гц)	 Форма №1 ( $f_1 = 2.151$ Гц)
 Форма №2 ( $f_2 = 13.112$ Гц)	 Форма №2 ( $f_2 = 13.263$ Гц)	 Форма №2 ( $f_2 = 13.246$ Гц)
 Форма №3 ( $f_3 = 35.797$ Гц)	 Форма №3 ( $f_3 = 36.152$ Гц)	 Форма №3 ( $f_3 = 36.107$ Гц)
 Форма №4 ( $f_4 = 58.524$ Гц)	 Форма №4 ( $f_4 = 58.513$ Гц)	 Форма №4 ( $f_4 = 58.501$ Гц)
 Форма №5 ( $f_5 = 67.797$ Гц)	 Форма №5 ( $f_5 = 68.319$ Гц)	 Форма №5 ( $f_5 = 68.242$ Гц)

Таблица 6. Сопоставление результатов статических расчетов (CSM1) для трех расчетных КЭ-моделей с источником (Ref. [1]).

	$u_{x,A}$ [мм]	$u_{y,A}$ [мм]
Модель 1	-7.325	-66.780
Модель 2	-6.984	-65.240
Модель 3	-7.017	-65.400
<b>Ref. [1]</b>	<b>-7.187</b>	<b>-66.100</b>
	$\varepsilon(u_{x,A})$ [%]	$\varepsilon(u_{y,A})$ [%]
Модель 1	1.920	1.029
Модель 2	2.825	1.301
Модель 3	2.365	1.059

Таблица 7. Сопоставление результатов статических расчетов (CSM2) для трех расчетных КЭ-моделей с источником (Ref. [1]).

	$u_{x,A}$ [мм]	$u_{y,A}$ [мм]
Модель 1	-0.483	-17.230
Модель 2	-0.459	-16.800
Модель 3	-0.461	-16.850
<b>Ref. [1]</b>	<b>-0.469</b>	<b>-16.970</b>
	$\varepsilon(u_{x,A})$ [%]	$\varepsilon(u_{y,A})$ [%]
Модель 1	2.878	1.532
Модель 2	2.132	1.002
Модель 3	1.706	0.707

Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке.  
 Часть 2: Верификация методики численного моделирования поведения гибкой упругой конструкции

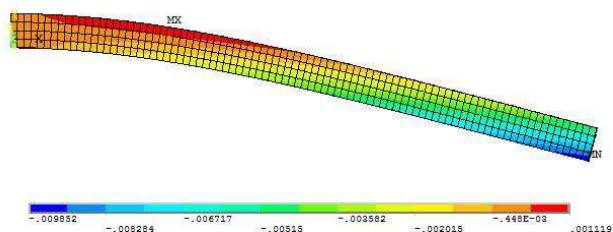


Рис. 2. CSM1 (Модель 1): деформированное состояние балки с отображением горизонтальных перемещений  $u_{x,A}$ , мм

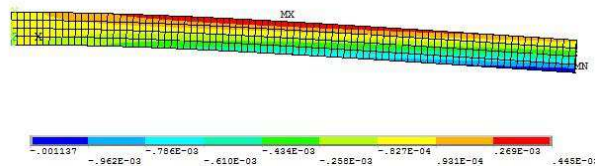


Рис. 4. CSM2 (Модель 1): деформированное состояние балки с отображением горизонтальных перемещений  $u_{x,A}$ , мм

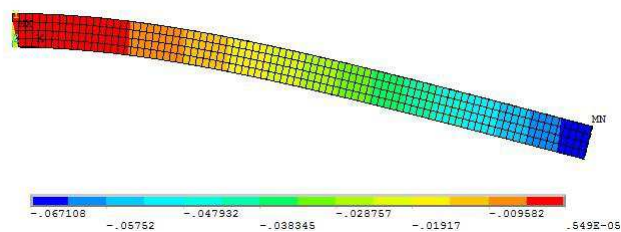


Рис. 3. CSM1 (Модель 1): деформированное состояние балки с отображением вертикальных перемещений  $u_{y,A}$ , мм

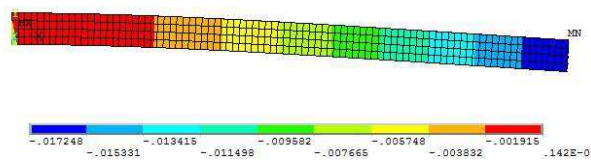


Рис. 5. CSM2 (Модель 1): деформированное состояние балки с отображением вертикальных перемещений  $u_{y,A}$ , мм

Таблица 8. Сопоставление результатов динамических расчетов (CSM3) для трех расчетных КЭ-моделей с источником (Ref. [1]).

	$u_{x,A\_mean} \pm u_{x,A\_ampl}$ [мм]	$f_{U_{x,A}}$ [Гц]	$u_{y,A\_mean} \pm u_{y,A\_ampl}$ [мм]	$f_{U_{y,A}}$ [Гц]
Модель 1	-15.030±15.030	1.081	-65.691±65.678	1.081
Модель 2	-14.345±14.345	1.093	-64.255±64.255	1.093
Модель 3	-14.410±14.410	1.093	-64.442±64.438	1.093
<b>Ref. [1]</b>	<b>-14.305±14.305</b>	<b>1.100</b>	<b>-63.607±65.160</b>	<b>1.100</b>
	$\varepsilon(u_{x,A\_mean}); \varepsilon(u_{x,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{x,A}})$ [%]	$\varepsilon(u_{y,A\_mean}); \varepsilon(u_{y,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{y,A}})$ [%]
Модель 1	5.1; 5.1	1.727	3.3; 0.8	1.727
Модель 2	0.3; 0.3	0.6	1.0; 1.4	0.6
Модель 3	0.7; 0.7	0.6	1.3; 1.1	0.6

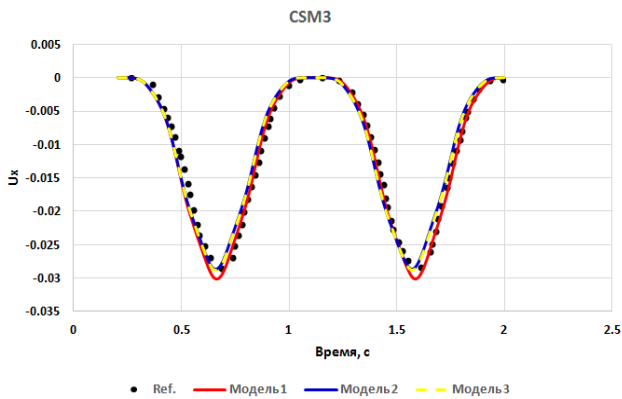


Рис. 6. CSM3: график зависимости горизонтальных перемещений  $u_{x,A}$  от времени, м. Сопоставление результатов расчетов (Модели 1, 2, 3) с источником (Ref.) [1]

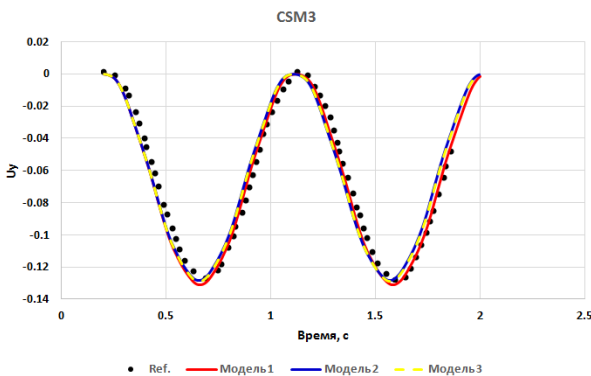


Рис. 7 CSM3: график зависимости вертикальных перемещений  $u_{y,A}$  от времени, м. Сопоставление результатов расчетов (Модели 1, 2, 3) с источником (Ref.) [1]

### 2.5 Анализ результатов и выводы

Результаты как статических (CSM1, CSM2 – таблицы 6, 7), так и динамических (CSM3 – таблица 8) расчетов показали слабую зависимость результатов расчета от варианта расчетной сетки. При этом расхождение по значениям перемещений точки А с источником (Ref.) [1] для CSM1, CSM2 не превышает 2.9%, для CSM3 – 5.1%. При динамическом расчете расхождение по частоте колебаний балки не превышает 1.8%.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для дальнейших расчетных исследований (FSI-тестов, см. статью в настоящем выпуске [6]) в качестве базовой примем *Модель 2* с физическими характеристиками материала, соответствующими CSM2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Turek S., Hron J.** Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow. In: Bungartz, H.-J. (Hrsg.) ; Schäfer, M. (Hrsg.): Fluid-Structure Interaction Bd. 53. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 371–385.
2. **Förster C., Wall W.A., Ramm E.** Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Lehrstuhl für Numerische Mechanik der Technischen Universität München. 2006.
3. **Schildhauer M.** Simulation von Fluid-Struktur-Interaktion mit ANSYS CFX, Masterarbeit Nr. 117/10, Berlin, Oktober 2010 - März 2011.
4. ANSYS CFX 14.5 User's Guide. // Canonsburg, 2012.
5. **Афанасьева И.Н., Ланцова И.Ю.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 1: верификация методики численного моделирования поведения жидкости. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3, 2014.
6. **Афанасьева И.Н.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 3: верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости. //

International Journal for Computational Civil  
and Structural Engineering, Volume 10, Issue  
3, 2014.

---

Афанасьева Ирина Николаевна, старший инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,  
e-mail: rena1986@mail.ru.

Ланцова Ирина Юрьевна, студентка Института фундаментального образования, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: irina-lanzova@mail.ru

Irina N. Afanasyeva, senior engineer-analyst of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,  
e-mail: rena1986@mail.ru.

Irina U. Lantsova, student of Institute of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: irina-lanzova@mail.ru

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ. ЧАСТЬ 3: ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

*И.Н. Афанасьева*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Статья посвящена верификационным исследованиям методики численного моделирования внешнего обтекания конструкции – цилиндр с жестко прикрепленной к нему гибкой упругой балкой – в связанной постановке (Fluid-Structure Interaction, FSI). Обтекание происходит в ламинарном режиме при числах Рейнольдса  $Re=20$  и  $Re=200$ . По итогам третьего этапа верификации представлены результаты многовариантных расчетных исследований, проведенных при различных параметрах деформируемых сеток и параметрах FSI-решателя, отвечающих за сходимость, устойчивость, точность связанного решения и длительность расчета, в сопоставлении с «эталонным» решением. В качестве базового для проведения аэродинамических расчетов использовался программный комплекс ANSYS CFX, для определения НДС конструкции и ее динамического отклика – ANSYS Mechanical.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, гидрогазодинамика, ламинарное течение, численное моделирование, Fluid-Structure Interaction (FSI)

## 2-D MODELING OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION BETWEEN AN ELASTIC STRUCTURE AND TRANSIENT FLOW. PART 3: VERIFICATION OF NUMERICAL TECHNIQUE OF COUPLED AEROELASTIC PROBLEM SIMULATION

*Irina N. Afanasyeva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Present paper deals with the verification of a numerical technique of modeling fluid-structure interaction (FSI) problems. The configuration consists of incompressible viscous fluid around an elastic structure in the channel. External flow is laminar (Reynolds numbers  $Re=20$  and  $Re=200$ ). Multivariate calculations are performed using special software ANSYS CFX and ANSYS Mechanical. Different types of parameters of mesh deformation and solver controls (time step, under relaxation factor, number of iterations at coupling step) were tested. Main results are showed in tables and plots in comparison with reference data.

**Key words:** aerohydroelasticity, aerohydrodynamics, laminar flow, numerical simulation, Fluid-Structure Interaction (FSI)

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На основе ранее проведенных исследований [5, 6] (CFD- и CSM-тестов) для поведения FSI-тестов выбраны основные расчетные сетки:

*Модель С* (для дискретизации жидкой среды) и *Модель 2* (для дискретизации балки).

Физические параметры жидкой среды и упругой гибкой конструкции соответствуют используемым параметрам в CFD2- и CSM2-тестах [5, 6].

В настоящей статье представлены результаты *третьего этапа* объявленного «бэнчмарка» [1]. Целью этого этапа является верификация и валидация FSI-решателя (Fluid Structure Interaction, FSI-solver), который передает данные из одного модуля в другой (из CFD-решателя в CSM-решатель – вычисленные аэродинамические нагрузки с учетом деформированного состояния конструкции, а из CSM-решателя в CFD-решатель – вычисленные перемещения конструкции).

Многовариантные расчетные исследования в нестационарной постановке проводилось при варьировании параметров FSI-решателя, отвечающих за сходимость, устойчивость, точность связанного решения и длительность расчета:

– шаг по времени:  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с и  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с;

– коэффициент релаксации (under relaxation factor) для вычисления нагрузок RF\_f: 0.15, 0.10 и 0.05;

– максимальное количество итераций на связанном шаге  $i$ : 10, 50 и 100.

Многовариантные CFD-расчеты проводились с использованием специализированного программного комплекса ANSYS CFX. Расчеты НДС конструкции и ее динамического отклика выполнялись в программном комплексе ANSYS Mechanical.

## 2. FSI-ТЕСТЫ

### 2.1 Параметры расчетов. Граничные и начальные условия

В качестве начальных условий использовался файл результатов CFD2-теста для Модели С и  $\Delta t_1$ . На входе задавался параболический профиль скорости:

$$v_x^f(y) \Big|_{x=0} = 6v_{in}^{-f} \frac{y(H-y)}{H^2} \quad (1)$$

где  $v_{in}^{-f} = 2$  [м/с] – средняя скорость;  $y$  – вертикальная координата [м], в поперечном направлении потока;  $H$  – вертикальный раз-

мер расчетной области (высота канала) [м]. Общие параметры расчетов принимались такими же, как и в CFD- и CSM-тестах [5, 6].

Критерием сходимости и устойчивости решения являлось достижение заданного уровня максимальных невязок  $10^{-3}$  при максимальном количестве итераций на шаге для CFD-решателя 5.

### 2.2 Параметры деформируемых (подвижных) сеток

Одной из особенностей численного решения связанных задач с подвижными границами, как, например, граница контакта жидкости и балки, является задание параметров деформации сетки (Mesh Deformation), в частности, жесткости сетки (Mesh Stiffness) вблизи подвижных границ, особенно, если на последних присутствуют острые углы.

В ANSYS CFX существует три способа задания жесткости сетки [4]:

– увеличение жесткости сетки вблизи малых объемов (Increase Near Small Volumes) заданием экспоненциального коэффициента жесткости  $C_{stiff}$ ;

– увеличение жесткости сетки вблизи границ (Increase Near Boundaries) заданием экспоненциального коэффициента жесткости  $C_{stiff}$ ;

– увеличение жесткости сетки заданием пользовательской функции.

При параметрах "по умолчанию" ( $C_{stiff}=10$  для 2-х первых способов задания жесткости сетки) при возникновении больших перемещений гибкой конструкции возникает ошибка "Folded mesh" или "Negative element volume", связанных с нарушением топологии сетки вблизи подвижных границ (рис. 1а). Наиболее эффективным методом задания жесткости показал себя 3-ий способ – задание пользовательской функции. На рисунках 1б и 1в показан результат применения пользовательских функций  $f_{MS_{stiff\_1}}$  [2] и  $f_{MS_{stiff\_2}}$ , соответственно:

$$f_{MS_{stiff\_1}} = c \left( \left( \sqrt{(x-x_{p1})^2 + (y-y_{p1})^2} \right)^{-4} + \left( \sqrt{(x-x_{p2})^2 + (y-y_{p2})^2} \right)^{-4} \right),$$

где  $x, y$  – координаты произвольной точки области [м];  $x_{p1}, y_{p2}$  – координаты угловых точек свободного края балки (рис. 1) [м];  $C = 1$  [м<sup>6</sup>/с) – нормирующий коэффициент.

$$f_{Mstiff\_2} = C \left( \frac{\Delta n_1}{\max(Wall\ Distance, \Delta n_1)} \right)^4,$$

где  $\Delta n_1$  – размер области вблизи подвижной границы по нормали к поверхности, где жесткость сетки предполагается максимальной [м];  $Wall\ Distance$  – расстояние от "стенки" [м];  $C = 1$  [м<sup>2</sup>/с) – нормирующий коэффициент.

Также во избежание возникновения ошибки "Folded mesh", связанной с появлением вытянутых, искривленных элементов из-за наличия острых углов, диффузионная схема для вычисления перемещения сетки (meshdisp diffusion scheme), соответствующая параметру 3, была установлена взамен назначенной "по умолчанию" (на рис. 1б – параметр "по умолчанию" и 1в – параметр равен 3).

При назначении уровня максимальных невязок  $10^{-6}$  с максимальным количеством итераций на шаге 10, удалось исправить решение в зоне расчетной области, где наблюдаются значительные перестроения сетки, но вдали от подвижных границ.

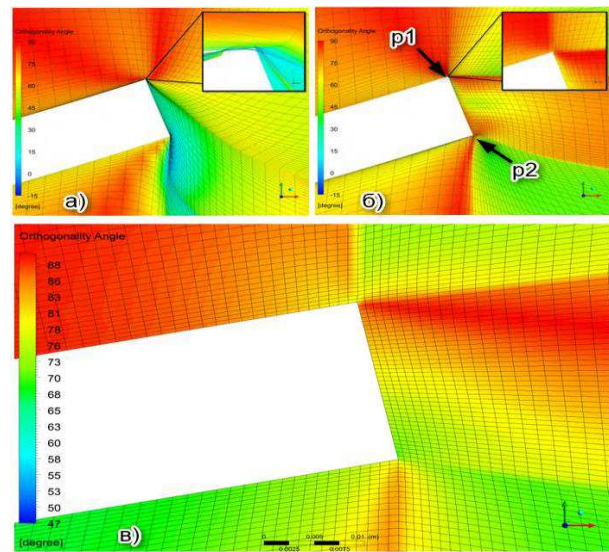


Рис. 1. Топология расчетной сетки вблизи подвижной границы с заданием жесткости сетки различными способами: а) параметры «по умолчанию»; б)  $f_{Mstiff\_1}$ ; в)  $f_{Mstiff\_2}$

### 2.3 Результаты расчетов

Далее на рисунках 3.3.23-3.3.31 представлены результаты многовариантных расчетов в связанной постановке в сопоставлении с данными источника [1], в таблицах 3.3.15-3.3.18 – соответствующие значения контролируемых параметров с указанием степени расхождения в процентном соотношении с «эталонным» решением.

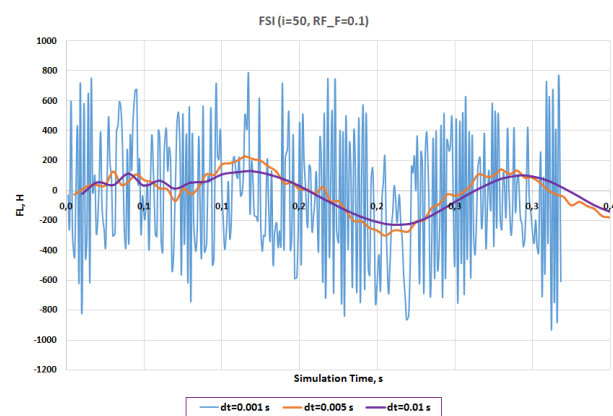
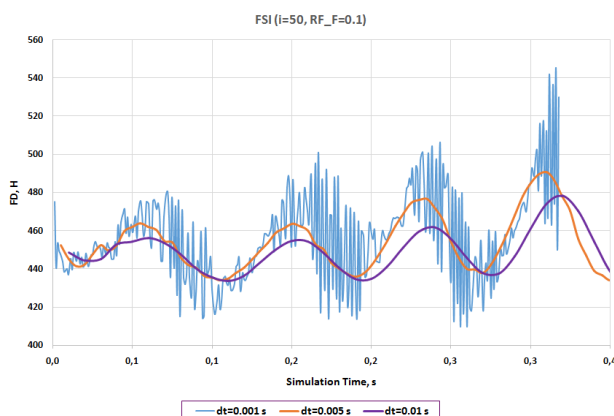


Рис. 2. FSI: графики зависимости сил  $FD$  (сверху) и  $FL$  (снизу) от времени, Н. Сопоставление результатов расчетов (при варьировании шага по времени  $\Delta t - dt$ ) с источником (Ref.) [1] при  $RF\_f = 0.1, i\_max = 50$ .

Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке.  
 Часть 3: Верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости

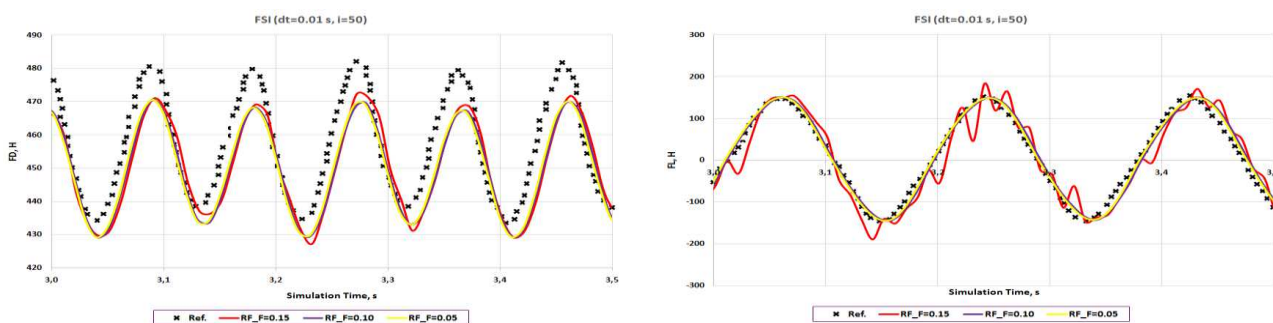


Рис. 3. FSI: графики зависимости сил  $F_D$  (сверху) и  $F_L$  (снизу) от времени, Н. Сопоставление результатов расчетов (при варьировании коэффициента релаксации  $RF\_f$ ) с источником (Ref.) [1] при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

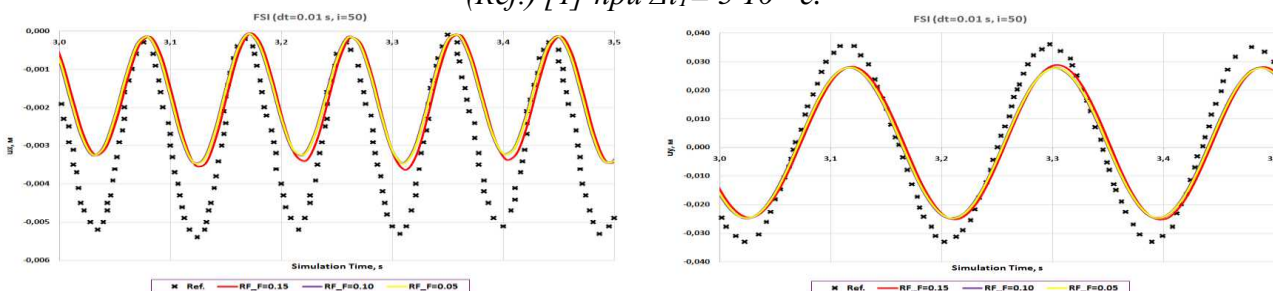


Рис. 4. FSI: графики зависимости перемещений  $u_{x,A}$  (слева) и  $u_{y,A}$  (справа) от времени, м. Сопоставление результатов расчетов (при варьировании коэффициента релаксации  $RF\_f$ ) с источником (Ref.) [1] при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

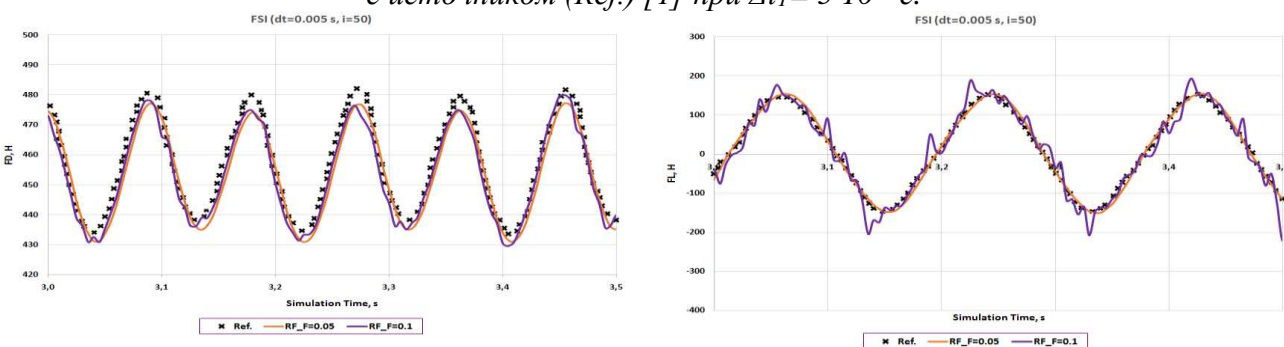


Рис. 5. FSI: графики зависимости сил  $F_D$  (слева) и  $F_L$  (справа) от времени, Н. Сопоставление результатов расчетов (при варьировании коэффициента релаксации  $RF\_f$ ) с источником (Ref.) [1] при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

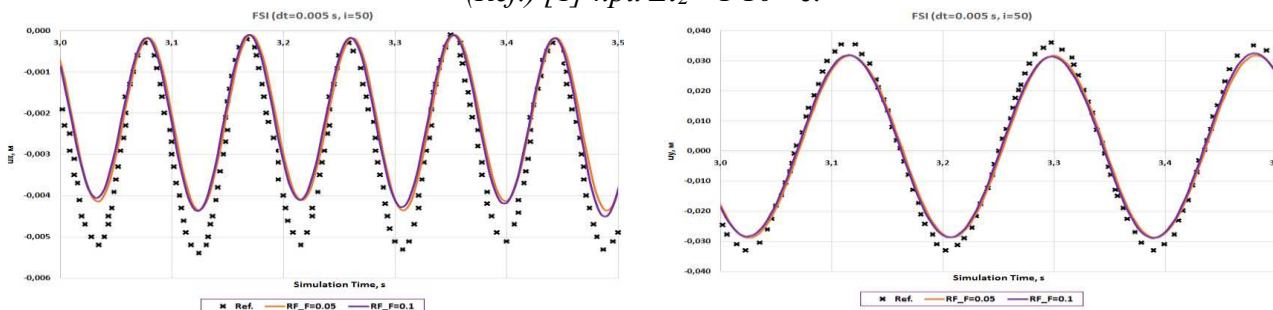


Рис. 6. FSI: графики зависимости перемещений  $u_{x,A}$  (слева) и  $u_{y,A}$  (справа) от времени, м. Сопоставление результатов расчетов (при варьировании коэффициента релаксации  $RF\_f$ ) с источником (Ref.) [1] при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

Таблица 1. Сопоставление результатов ( $F_D$ ,  $F_L$ ) многовариантных связанных нестационарных расчетов (FSI) с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

RF_f;	$i$	$F_{D\_mean} \pm F_{D\_ampl}$ [Н/М]	$f_{FD}$ [Гц]	$F_{L\_mean} \pm F_{L\_ampl}$ [Н/М]	$f_{FL}$ [Гц]
0.10;	50	454.83±25.13	10.00	-8.88±212.87	5.26
0.05;	50	454.11±23.13	10.00	2.17±152.12	5.26
0.05;	100	454.22±23.22	10.00	2.21±152.26	5.26
<b>Ref. [1]</b>		<b>457.30±22.66</b>	<b>10.900</b>	<b>2.22±149.78</b>	<b>5.300</b>
RF_f;	$i$	$\varepsilon(F_{D\_mean}); \varepsilon(F_{D\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FD})$ [%]	$\varepsilon(F_{L\_mean}); \varepsilon(F_{L\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FL})$ [%]
0.10;	50	0.54; 10.91	8.26	500.21; 42.12	0.75
0.05;	50	0.70; 2.06	8.26	2.38; 1.56	0.75
0.05;	100	0.67; 2.49	8.26	0.35; 1.66	0.75

Таблица 2. Сопоставление результатов ( $u_{x,A}$ ,  $u_{y,A}$ ) многовариантных связанных нестационарных расчетов (FSI) с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

RF_f;	$i$	$u_{x,A\_mean} \pm u_{x,A\_ampl}$ [ММ]	$f_{U_{x,A}}$ [Гц]	$u_{y,A\_mean} \pm u_{y,A\_ampl}$ [ММ]	$f_{U_{y,A}}$ [Гц]
0.10;	50	-2.29±2.20	10.00	1.83±30.69	5.26
0.05;	50	-2.22±2.13	10.00	1.53±30.20	5.26
0.05;	100	-2.22±2.13	10.00	1.53±30.20	5.26
<b>Ref. [1]</b>		<b>-2.69±2.53</b>	<b>10.900</b>	<b>1.48±34.38</b>	<b>5.300</b>
RF_f;	$i$	$\varepsilon(u_{x,A\_mean}); \varepsilon(u_{x,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{x,A}})$ [%]	$\varepsilon(u_{y,A\_mean}); \varepsilon(u_{y,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{y,A}})$ [%]
0.10;	50	14.89; 13.03	8.26	23.66; 10.74	0.75
0.05;	50	17.37; 15.86	8.26	3.52; 12.16	0.75
0.05;	100	17.37; 15.86	8.26	3.52; 12.16	0.75

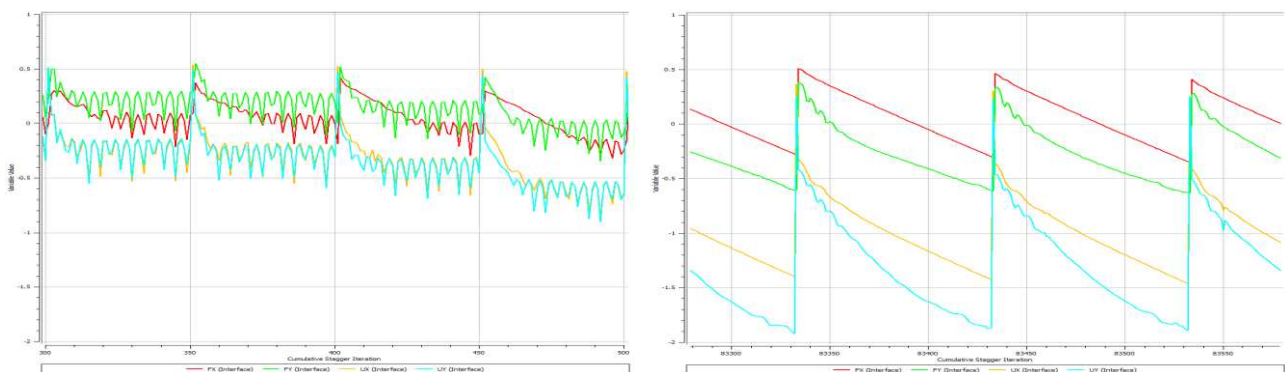


Рис. 7. FSI: графики сходимости при различных коэффициентах релаксации при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  с. Слева –  $RF\_f=0.10$  (сходимость по  $F_D(Fx)$  и  $F_L(Fy)$  не достигается,  $\varepsilon_F > 0$ ; осцилляции); справа –  $RF\_f=0.05$  (сходимость по  $F_D(Fx)$  и  $F_L(Fy)$  достигается,  $\varepsilon_F < 0$  при  $i > 54$ ).

Таблица 3. Сопоставление результатов ( $F_D$ ,  $F_L$ ) многовариантных связанных нестационарных расчетов (FSI) с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

RF_f;	$i$	$F_{D\_mean} \pm F_{D\_ampl}$ [Н/М]	$f_{FD}$ [Гц]	$F_{L\_mean} \pm F_{L\_ampl}$ [Н/М]	$f_{FL}$ [Гц]
0.15;	50	450.48±23.22	10.00	17.99±207.08	5.26
0.10;	50	449.88±20.74	10.00	3.46±147.10	5.26
0.05;	50	449.94±20.74	10.00	3.62±147.28	5.26
0.05;	100	449.90±20.76	10.00	3.57±147.29	5.26
<b>Ref. [1]</b>		<b>457.30±22.66</b>	<b>10.900</b>	<b>2.22±149.78</b>	<b>5.300</b>
RF_f;	$i$	$\varepsilon(F_{D\_mean}); \varepsilon(F_{D\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FD})$ [%]	$\varepsilon(F_{L\_mean}); \varepsilon(F_{L\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{FL})$ [%]
0.15;	50	1.49; 2.46	8.26	710.38; 38.26	0.75
0.10;	50	1.62; 8.46	8.26	56.02; 1.79	0.75
0.05;	50	1.61; 8.49	8.26	62.96; 1.67	0.75
0.05;	100	1.62; 8.38	8.26	61.00; 1.66	0.75

Таблица 4. Сопоставление результатов ( $u_{x,A}$ ,  $u_{y,A}$ ) многовариантных связанных нестационарных расчетов (FSI) с источником (Ref. [1]) при  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.

RF_f;	$i$	$u_{x,A\_mean} \pm u_{x,A\_ampl}$ [ММ]	$f_{U_{x,A}}$ [Гц]	$u_{y,A\_mean} \pm u_{y,A\_ampl}$ [ММ]	$f_{U_{y,A}}$ [Гц]
0.15;	50	-1.85±1.79	10.00	1.58±27.27	5.26
0.10;	50	-1.77±1.71	10.00	1.61±26.33	5.26
0.05;	50	-1.77±1.71	10.00	1.61±26.33	5.26
0.05;	100	-1.77±1.70	10.00	1.61±26.33	5.26
<b>Ref. [1]</b>		<b>-2.69±2.53</b>	<b>10.900</b>	<b>1.48±34.38</b>	<b>5.300</b>
RF_f;	$i$	$\varepsilon(u_{x,A\_mean}); \varepsilon(u_{x,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{x,A}})$ [%]	$\varepsilon(u_{y,A\_mean}); \varepsilon(u_{y,A\_ampl})$ [%]	$\varepsilon(f_{U_{y,A}})$ [%]
0.15;	50	31.35; 29.37	8.26	7.06; 20.68	0.75
0.10;	50	34.14; 32.60	8.26	8.82; 23.40	0.75
0.05;	50	34.14; 32.60	8.26	8.82; 23.40	0.75
0.05;	100	34.14; 32.60	8.26	8.82; 23.40	0.75

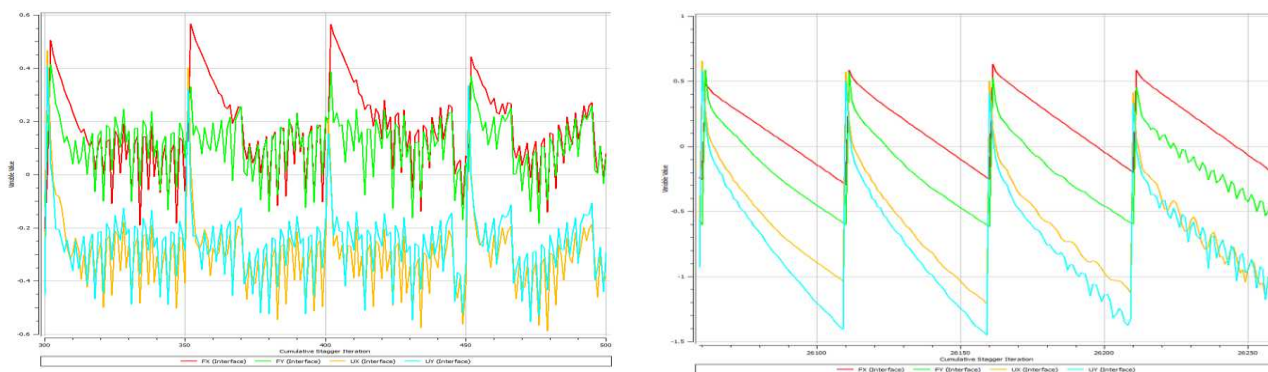


Рис. 8. FSI: графики сходимости при различных коэффициентах релаксации  $\Delta t_2 = 1 \cdot 10^{-2}$  с.  
 Слева –  $RF\_f=0.15$  (сходимость по  $F_D(F_x)$  и  $F_L(F_y)$  не достигается,  $\varepsilon F > 0$ ; осцилляции);  
 справа –  $RF\_f=0.1$  (сходимость по  $F_D(F_x)$  и  $F_L(F_y)$  достигается,  $\varepsilon F < 0$  при  $i > 33$ ).

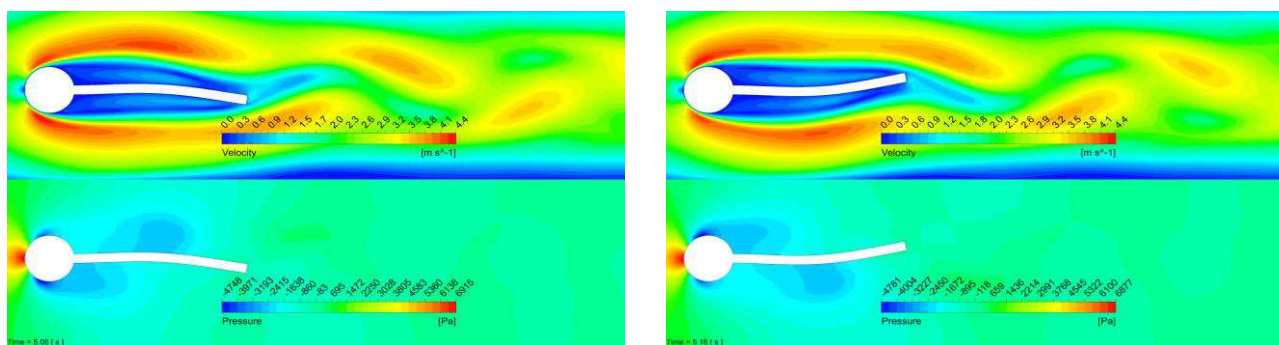


Рис. 9. FSI: расчетное поле скоростей (сверху, м/с) и давлений (снизу, Па) с отображением деформированного состояния балки в моменты времени  $t=5.06$  с (слева) и  $t=5.16$  с (справа).

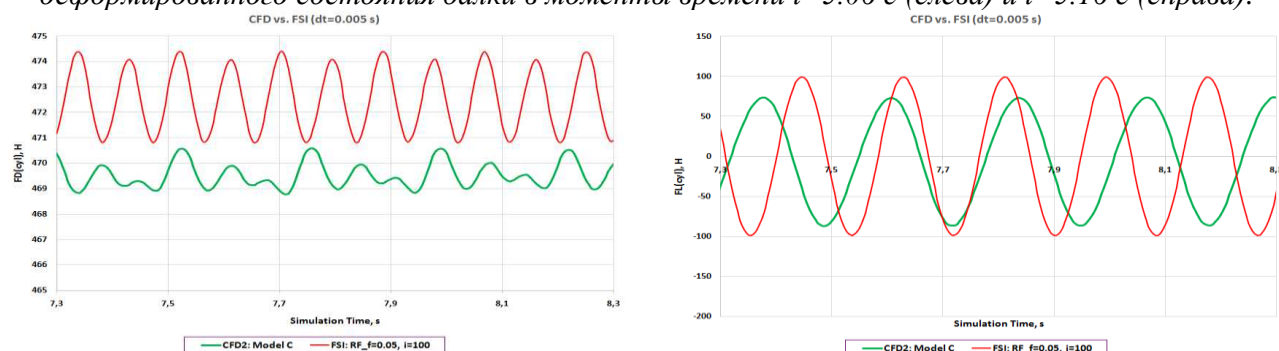


Рис. 10. Графики зависимости аэродинамических сил  $F_{D\_cyl}$  (слева) и  $F_{L\_cyl}$  (справа) для цилиндра от времени, Н. Сопоставление результатов расчетов в связанной (FSI) и несвязанной (CFD) постановках при  $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  с.

#### 2.4 Анализ результатов и выводы

При проведении расчетов в связанной постановке (FSI), во избежание ошибок, связанных с топологией сетки (особенно вблизи подвижных границ с острыми углами), необходимо определять параметр «жесткости сетки» с помощью разработанной пользовательской функцией. Для сохранения ортогональности сетки рекомендуется выбирать диффузионную схему для вычисления перемещения сетки, соответствующую параметру 3. Для корректного перестроения сетки, а именно обновления новых координат сетки,

рекомендуется назначать уровень максимальных невязок порядка  $10^{-6}$  с максимальным количеством итераций на шаге 5-10. Многовариантные расчетные исследования показали значимую зависимость устойчивости связанного решения от выбранного коэффициента релаксации (RF\_f) для вычисления аэродинамических нагрузок, следовательно, и от количества итераций, необходимых для обеспечения сходимости численного решения ( $i\_converged$ ) (таблица 5).

Таблица 5. Обеспечение устойчивости и сходимости численного решения в зависимости от выбора расчетных параметров.

$\Delta t$ , с	RF_f	$i\_max$	$i\_converged$
0.010	0.15	50	нет (не устойчивое решение)
0.010	0.10	50	>33
0.010	0.05	100	>62
0.005	0.10	50	нет (не устойчивое решение)
0.005	0.05	100	>54
0.001	0.10	50	нет (не устойчивое решение)

Также показана зависимость средней составляющей и амплитуды колебаний аэродинамических сил и перемещений балки (особенно для силы лобового сопротивления  $F_D$  и горизонтального перемещения  $u_{x,A}$ ) и независимость частотных характеристик сигнала от выбранного расчетного шага по времени в сопоставлении с «эталонным» решением [1]. При наилучшем сочетании исследуемых расчетных параметров ( $\Delta t=0.005$  с,  $RF\_f=0.05$ ,  $i\_max=100$ ,  $i\_converged>54$ ) расхождение с источником [1] по аэродинамической суммарной нагрузке составляет не более 2.5%, по перемещениям точки А – не более 15.9%, по частотам колебаний в направлении потока – 8.26%, поперек потока – 0.75%.

Следует отметить изменение частотных характеристик потока (в частности, частота срыва вихрей с цилиндра) при учете взаимного влияния гибкой конструкции и потока друг на друга. На рисунке 10 показаны временные зависимости аэродинамических сил, действующих на неподвижный жесткий цилиндр, по результатам расчетов как в связанной (FSI), так и несвязанной (CFD) постановках. Заметим, что частота вихреобразования ( $f_{FD,FL}=4.348$  Гц – см. статью [5] в настоящем выпуске) в случае «чистого» аэродинамического расчета (CFD) лежит между двумя низшими собственными частотами колебаний балки ( $f_1=2.154$  Гц,  $f_2=13.263$  Гц – см. статью [6] в настоящем выпуске). При взаимодействии с потоком балка начинает изгибаться. По картинкам деформирования (рис. 9) видно, что колебания возбуждаются по 2-й форме собственных колебаний (см. [6]). Этим может объясняться тот факт, что частота колебаний в направлении потока ( $f_{FD,U_{x,A}}=10$  Гц) меняется ближе к  $f_2$ , а частота колебаний поперек потока ( $f_{FD,U_{x,A}}=5.26$  Гц) тяготеет к низшей  $f_1$ .

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На тестовой задаче (объявленном «бэнчмарке» [1]) верифицирована методика численного моделирования задач аэрогидроупругости на примере взаимодействия гибкой упругой балки, находящейся в следе жесткого неподвижного цилиндра, с потоком вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме ( $Re=200$ ).

Следующим этапом расчетных исследований планируется изучение аэрогидроупругого взаимодействия рассматриваемой конструкции с потоком в турбулентном режиме в трехмерной постановке.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Turek S., Hron J.** Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow. In: Bungartz, H.-J. (Hrsg.) ; Schäfer, M. (Hrsg.): Fluid-Structure Interaction Bd. 53. Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 371–385.
2. **Förster C., Wall W.A., Ramm E.** Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows, Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Lehrstuhl für Numerische Mechanik der Technischen Universität München. 2006.
3. **Schildhauer M.** Simulation von Fluid-Struktur-Interaktion mit ANSYS CFX, Masterarbeit Nr. 117/10, Berlin, Oktober 2010 - März 2011.
4. ANSYS CFX 14.5 User's Guide. // Canonsburg, 2012.
5. **Афанасьева И.Н., Ланцова И.Ю.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 1: верификация методики численного моделирования поведения жидкости. // International Jour-

nal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3, 2014.

6. **Афанасьева И.Н., Ланцова И.Ю.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 2: верификация методики численного моделирования поведения гибкой упругой конструкции. . // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 3, 2014.

---

Афанасьева Ирина Николаевна, старший инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,  
e-mail: rena1986@mail.ru.

Irina N. Afanasyeva, senior engineer-analyst of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,  
e-mail: rena1986@mail.ru.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЖЕСТКОСТНЫХ СВОЙСТВ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АДАПТИРУЕМЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ. ЧАСТЬ 1: ОСНОВЫ РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МЕТОДИКИ

*А.М. Белостоцкий<sup>1,2</sup>, П.И. Новиков<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> ЗАО «Инжиниринговый центр ГОЧС «БАЗИС», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье описываются основы расчетно-экспериментальной методики идентификации и локализации изменений жесткостных характеристик конструктивных элементов натуральных объектов на основе адаптивных математических моделей рассматриваемых объектов. Методика заключается в последовательном варьировании уровней модуля упругости для различных связей рассматриваемого объекта с последующим анализом локальных экстремумов функции сравнения собственных векторов. В функции используется коэффициент сравнения форм  $k_i$ , процедура поиска которого основана на применении метода наименьших квадратов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, частоты и формы собственных колебаний, натурные динамические характеристики, адаптивные процедуры, метод стоячих волн, метод наименьших квадратов

## IDENTIFICATION OF REAL STIFFNESS PROPERTIES FOR STRUCTURAL ELEMENT OF ADAPTIVE FINITE ELEMENT MODELS. PART 1: CALCULATION-EXPERIMENTAL TECHNIQUE

*Alexander M. Belostotsky<sup>1,2</sup>, Pavel I. Novikov<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Engineering Center GOCHS "BASIS", Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The paper presents calculation-experimental technique of identification and localization structure damage by variation of stiffness properties for structural element of real object based on adaptive mathematical models of objects. The technique consists in successive variation of levels of the elastic modulus for different links of the object followed by an analysis of local extremums of the comparison function of eigenvectors. The function is used a coefficient  $k_i$  of mode shape comparison. The coefficient  $k_i$  is calculated using the least squares technique.

**Key words:** mathematical modeling, modal frequencies and mode shapes, real dynamic characteristics, adaptive procedures, the "standing waves" method, least square technique

### ВВЕДЕНИЕ

Безопасная эксплуатация уникальных и технически сложных зданий (сооружений)

предъявляет высокие требования к проектированию, строительству и процессу эксплуатации. Практика внедрения систем мониторинга становится неотъемлемым

сопровождением жизненного цикла подобных строительных объектов. Мониторинг несущих конструкций перестаёт быть самодостаточной процедурой, призванной обеспечивать только лишь фиксирование изменений выбранных контролируемых параметров здания. От систем, осуществляющих мониторинг состояния несущих конструкций, ожидают все более конкретных результатов и выводов, на основе которых при необходимости, возможно корректировать режим и особенности эксплуатации здания, разумно уменьшая риск возникновения аварийных ситуаций на протяжении всего жизненного цикла. Отсутствие математически формализованных подходов к задачам мониторинга зданий и сооружений, как к отдельным задачам математического моделирования, не позволяет в полной мере ответить на вопрос о текущем состоянии инженерного сооружения.

## 1. РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА

Предлагаемая методика идентификации действительных жесткостных свойств применима для общих расчетных схем зданий, реализующих классическую стержневую схему конструктивных «узлов» и «связей». Путем варьирования жесткостными параметрами «связей» и применения специального подхода к сравнению форм собственных колебаний по натурным измерениям и по результатам математического моделирования, выявляются те «связи», влияние которых обуславливает наблюдаемые отличия.

Применение расчетных моделей рассматривается в ряде работ 1, 2, 3 как обязательная составляющая часть системы мониторинга несущих конструкций здания. Главное место занимает математическая модель, адекватно отображающая динамические характеристики объекта. Интегральные характеристики

модели должны соответствовать интегральным характеристикам объекта моделирования.

В настоящей методике выделяют 2 типа математических (конечно-элементных) моделей. Первым типом является КЭ-модель, адекватно отражающая проектные свойства, параметры и использованные для проектирования коэффициенты. Такая модель, как правило, используется для обоснования несущей способности актуального проектного варианта здания. Будем называть данную модель «стартовой». Вторым типом является динамическая мониторинговая КЭ-модель, в которой учитываются данные инструментальных наблюдений и вносятся изменения, целью которых является адаптация и верификация модели по натурным экспериментальным данным. Будем называть данную модель «мониторинговой».

«Стартовая» модель преобразуется в «мониторинговую» по средствам модификации, верификации и адаптации по имеющимся данным инструментальных наблюдений. В качестве основного критерия соответствия мониторинговой модели натурным данным является близость расчетного и измеренного спектра частот и форм собственных колебаний во всём диапазоне, значимом как для оценки общесистемных изменений, так и для идентификации-локализации возможных дефектов.

$$\begin{aligned} \{\lambda\}_{\text{модели}} &\rightarrow \{\lambda\}_{\text{объекта}} \\ [\{f\}_1 \dots \{f\}_n]_{\text{модели}} &\rightarrow [\{f\}_1 \dots \{f\}_n]_{\text{объекта}} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda$ ,  $\{f\}$  обозначают частоту собственных колебаний и вектор собственных колебаний. Для «улучшения» соответствия модели зданию применяют различные инструменты 1, позволяющие корректировать параметры модели  $\theta_i$ .

$$\{\theta\} = \{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_n\} \quad (2)$$

К подобным параметрам допустимо относить:  $\theta_1$  – динамические характеристики основания здания;  $\theta_2$  – реальные физико-механические свойства строительных материалов (бетона, арматуры, закладных деталей);  $\theta_3$  – реализованные при строительстве геометрические параметры несущих конструкций (эксцентриситеты, крены, наклоны);  $\theta_4$  – измеренные нагрузки и воздействия;  $\theta_5$  – жесткость и масса номинально несущих конструкций (прегородок, стен, фасадных и фахверковых конструкций);  $\theta_6$  – работа узлов и соединений по схемам, отличным от принятых в проекте (например, упругая заделка вместо шарнира);  $\theta_7$  – учет значимых текущих инерционных параметров здания.

После того, как получена «мониторинговая» модель, которая наилучшим образом описывает натурные измерения, проводится процедура адаптации (идентификации) КЭ-модели по данным инструментальных наблюдений.

При выявлении факта наличия отклонения для жесткостных параметров модели  $x_i$  используется анализ локальных экстремумов функции  $P(x)$  по «тестируемым» уровням модуля упругости  $E$  для различных связей зданий, в качестве которых могут выступать колонны, балки, диафрагмы жесткости, ригели и перекрытия.

$$\underset{x}{\text{Min}} \quad P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\| k_i \cdot \{f\}_i - \{\hat{f}\}_i \right\|^2 \quad (3)$$

при условии  $R(x) \geq 0$

где  $x$  – параметр системы (зависит от расположения стержня и применяемого уровня модуля упругости  $E$ ),  $P(x)$  – функция сравнения векторов форм собственных колебаний,  $n$  – количество рассматриваемых форм собственных колебаний,  $k_i$  – коэффициент соответствия  $i$ -ой формы собственных колебаний,  $\{f\}_i$  – вектор формы собственных колебаний, полученной по КЭ-модели,  $\{\hat{f}\}_i$  – вектор формы собственных

колебаний, полученной по результатам натурального эксперимента. В качестве метрики используется (4).

$$\rho(\{x\}, \{y\}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{DOF} (x_j - y_j)^2} \quad (4)$$

где  $DOF$  обозначает количество степеней свободы, которые получены для каждой точки измерений  $i$ -й формы собственных колебаний.

Полецовательное варьирование параметрами происходит поэтапно. На каждом этапе необходимо проведение процедуры модального анализа для поиска значимой «порции» частот  $\lambda_i$  и форм  $\{f\}_i$  собственных колебаний динамической системы. Поиск проводится спомощью решения частной (частичной) проблемы собственных значений (5).

$$\begin{aligned} [K(x_i)][\Phi] &= [\Lambda][M(x_i)][\Phi] \\ [\Phi] &= \{\{f\}_1 \dots \{f\}_n\} \\ [\Lambda] &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $[K(x_i)]$  – глобальная матрица жесткости, при варьировании параметра  $x_i$   $[M(x_i)]$  – глобальная матрица масс при варьировании параметра  $x_i$ . В качестве инструмента поиска коэффициента соответствия  $k_i$  для форм собственных колебаний используется метод наименьших квадратов, обеспечивающий нахождение вектора  $k_i \cdot \{f\}_i$ , имеющего максимальную близость к вектору  $\{\hat{f}\}_i$  по выбранной метрике. Метод в частности обеспечивает наименьшее средне-квадратичное отклонение двух  $i$ -х векторов  $\{f\}_i$  и  $\{\hat{f}\}_i$ . Суть применяемого в данном случае метода наименьших квадратов заключается в нахождении значений прямой  $\{y\}_i = k_i \cdot \{f\}_j + \{b\}$ , наилучшим образом согласующейся с опытными значениями  $\{\hat{f}\}_i$ . Необходимо найти такие значения  $k_i$ , при которых минимизируется сумма квадратов

отклонений (ошибок)  $e_i = \{\hat{f}\}_i - (k_i \cdot \{f\}_i + \{b\}_i)$ . Рассмотрим случай сравнения для  $i$ -ой пары векторов  $\{\hat{f}\}_i$  и  $\{f\}_i$ .

$$S_j = \sum_j e_j^2 = \sum_{j=1}^{DOF} (\hat{f}_j - (k_i \cdot f_j + b_i))^2 \quad (6)$$

$S_j \rightarrow \min$

где  $j$  обозначает индекс суммирования по размерности  $DOF$  вектора  $\{f\}_i$ ,  $e$  – функция ошибки,  $\hat{f}_j$  и  $f_j$  –  $j$ -ую компоненту векторов  $\{\hat{f}\}_i$  и  $\{f\}_i$ . Условиями минимума в данном случае будут выступать:

$$\frac{\partial S_j}{\partial k_i} = 0; \quad -2 \sum_{j=1}^{DOF} (\hat{f}_j - k_i \cdot f_j - b_i) f_j = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial S_j}{\partial b_i} = 0; \quad -2 \sum_{j=1}^{DOF} (\hat{f}_j - k_i \cdot f_j - b_i) = 0$$

Условия записываются в виде СЛАУ, из которой находятся искомые значения  $k_i$  и  $b_i$ .

$$\sum_{j=1}^{DOF} \hat{f}_j f_j = k_i \sum_{j=1}^{DOF} f_j^2 + b_i \sum_{j=1}^{DOF} f_j \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{DOF} \hat{f}_j = k_i \sum_{j=1}^{DOF} f_j + DOF \cdot b_i$$

Полученное значение коэффициента  $k_i$  предлагается использовать при сравнении двух форм собственных колебаний. Следует отметить, что введение коэффициента  $k$  не нарушает общий физический смысл сравнения собственных форм колебаний, поскольку получаемый вектор  $k_i \cdot \{f\}_i$  также является собственным вектором для исходной задачи модального анализа (5).

Как было показано выше процедура адаптации основана на сравнении форм собственных колебаний КЭ-модели и найденных экспериментально. Поскольку поиск решения задачи выполняется на основе

экспериментальных данных, в качестве которых выступают натурные динамические характеристики объекта (формы собственных колебаний) данная задача относится к классу обратных задач. При достаточно общей постановке подобная задача является некорректной в смысле нарушения условий существования, единственности и устойчивости решения. Поиск безусловного минимума в большинстве случаев связан с рядом дополнительных сложностей, присущим обратным некорректно поставленным задачам (9).

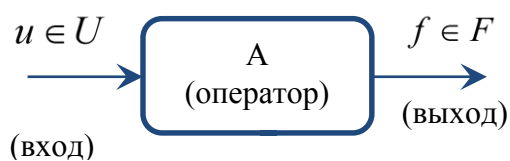
$$Au = f \quad (9)$$

где  $A: U \rightarrow F$  – линейный оператор, осуществляющий отображение элементов  $u$  на  $f$ ;  $U, F$  – гильбертовы пространства, где элемент  $u \in U$  является активным воздействием, изменением объекта исследования, а элемент  $f \in F$  является откликом объекта исследования на вводимое изменение.

Задача (10) называется *корректной по Адамару*, если:

- 1) область значений оператора  $A$  совпадает с множеством  $F$  (условие разрешимости);
- 2) равенство  $Au_1 = Au_2$  для некоторых  $u_1, u_2$ , принадлежащих области определения оператора  $A$ , влечет равенство  $u_1 = u_2$  (условие единственности);
- 3) обратный оператор  $A^{-1}$  непрерывен на  $F$  (условие устойчивости).

Задача (9) называется *некорректной*, если нарушается хотя бы одно из условий 1-3 корректной задачи: условия 1, 2 отвечают за математическую определенность, условие 3 – за физическую детерминированность (устойчивость). В силу того, что правая часть задачи (10) известна приближенно (данные эксперимента), вопросы построения устойчивого решения для некорректных задач приобретают первостепенное значение при решении практических задач 5.



Для преодоления некорректности задачи используют различные подходы, описанные в работах А.Н. Тихонова 4, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, В.П. Танана, А.О. Ватульяна 5. Основными способами преодоления некорректности являются 4, 5:

### Метод квазирешений.

Суть метода состоит в том, что результаты экспериментов приближенно описывают правую часть  $f$  уравнения (9). При выполнении соответствующих условий 5, метод квазирешений позволяет находить приближенное решение  $u_\delta$  по приближенному значению правой части  $f_\delta$  уравнения (9) и величине погрешности  $\delta$ :

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta$$

которое стремилось бы к точному решению  $u$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Задача поиска решения сводится к задаче поиска минимума функционала невязки  $J[u]$  (10).

$$J[u] = \|Au - f\|_F^2 \quad (10)$$

В свою очередь элемент  $u_k$ , минимизирующий функционал невязки (6), называется квазирешением уравнения (5). Для построения процедуры квазирешения необходимо предусмотреть сужение пространства  $U$  до компакта  $M \subset U$ .

### Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Метод предусматривает использование стабилизирующего функционала (11) при решении задачи минимизации. Построение функционала осуществляется на основе (10), пу-

тем добавления вспомогательного неотрицательного (сглаживающего) функционала, который определен на некоторой части  $U_0 \subseteq D_A$  и обеспечивает непрерывность и единственность решения задачи минимизации.

$$M^\beta [u] = \|Au - f\|_F^2 + \beta \|u\|_U^2 \quad (11)$$

$$M^\beta [u] \rightarrow \inf, \quad u \in U$$

где  $\beta$ ,  $A$ , соответствует коэффициент регуляризации, вполне непрерывный оператор, осуществляющий отображение элементов  $u \in U$  на  $f \in F$  соответственно. Вид сглаживающего функционала может быть различным в зависимости от типа задачи.

Предлагаемая процедура (3) не является строгой с точки зрения решения обратных задач, так как при сравнении применяется коэффициент соответствия формы, который вычисляется по методу наименьших квадратов. Применение метода наименьших квадратов рассматривается как альтернативный подход. Метод наименьших квадратов может быть рассмотрен как упрощенная форма регуляризации, которая позволяет балансировать между соответствием натурным данным и наименьшей нормой разности рассматриваемых форм.

Следует отметить, что для реализации функции сравнения  $P(x)$  необходимо выполнение следующих положений:

- *Форма колебаний и для натуральных данных и для данных, полученных по КЭ-модели, должна иметь одинаковую размерность.* Для выполнения данного положения следует провести группировку узлов для собственных векторов КЭ-модели. При выполнении группировки производится сокращение количества рассматриваемых узлов. Проблема оценки параметров механической системы по данным измерений напрямую связана с количеством (полнотой) получаемой информации. Практические и физические ограничения не

позволяют получить полные (континуальные) данные о формах собственных колебаний при исследовании объекта. В этом случае для анализа большого количества параметров системы (как независимых переменных) может понадобиться значительное время. Кроме того, проведение вычислений, на основе таких данных, может привести к неустойчивости решения особенно в тех случаях, когда данные представлены с погрешностью. Для проведения анализа параметров системы необходимо уменьшать размерность форм колебаний, что позволяет рассматривать существенно меньше степеней свободы объекта как при натурных измерениях, так и при сравнении собственных векторов. Размерность собственных векторов, полученных по КЭ-модели, должна соответствовать формам собственных колебаний, полученным на основе натурных данных.

- *Варьирование параметра системы  $x$  должно выполняться для всех «связей» объекта.* Жесткость каждой связи должна варьироваться в зависимости от значения параметра системы  $x_i$ . В качестве параметров, которые непосредственно оказывают влияние на жесткость «связи», могут выступать жесткостные параметры элемента(ов) КЭ-модели, которые принадлежат рассматриваемой «связи». В случае строительного объекта в качестве «связей» могут выступать конечные элементы модели, принадлежащие балкам, ригелям, колоннам.

## 2. МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ НАТУРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для получения частот и форм собственных колебаний объекта исследования предлагается использовать метод детального инженерно-сейсмологического изучения зданий и сооружений – метод стоячих волн б. Основой метода является восстановление когерентных составляющих естественных микросейсмических шумов сооружения. Метод позволяет

изучать сейсмостойкость строительных объектов, отыскивать частоты и формы собственных колебаний зданий и сооружений с высокой разрешающей способностью, минуя одновременную установку большого количества измерительной аппаратуры.

При достаточно плотном шаге измерений, а также при введении в натурный эксперимент дополнительных опорных точек удается добиться необходимой подробности форм собственных колебаний. Методика пересчета и выявления собственных пар позволяет строить формы высоких порядков б. Таким образом, можно составить детальную картину, описывающую динамические характеристики реального объекта, который спроектирован, возведен и эксплуатируется в настоящий момент.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Значительный объем проведенных исследований убедительно показывает, что несоответствия между ожидаемыми динамическими характеристиками здания и динамическими характеристиками, которые выявлены при расчете проектной математической модели, носят системный характер.

Предложена расчетно-экспериментальная методика выявления и локализации отклонения жесткостных параметров для здания. Методика базируется на большеразмерных КЭ-моделях, которые могут быть параметризованы на всех этапах «жизненного цикла» объекта и адаптируются по данным инструментальных наблюдений. Применение данной методики совместно с методом стоячих волн позволяет идентифицировать и локализовывать отклонения жесткостных параметров реального строительного объекта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Математическое моделирование как основа и в составе системы мониторинга несущих конструкций зданий и сооружений / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава // Вестник МГСУ, 2010, №4, с.191-197.
2. **Белостоцкий А.М.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2012, Volume 8, Issue 3, с.19-27.
3. Методика мониторинга состояния несущих конструкций зданий и сооружений. Общие положения. – М.: ФЦ ВНИИ ГОЧС, 2008. – 36 с.
4. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
5. **Ватульян А.О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
6. **Еманов А.Ф.** Восстановление когерентных составляющих волновых полей в сейсмике. Дис. ... д-ра техн. наук: 25.00.10; Новосибирск, 2004. – 279 с.

ственный строительный университет, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26.  
тел/факс: +7 (499) 929-50-17;  
e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17;  
e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel I. Novikov, Engineer, Engineering Center GOCHS "BASIS"; Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17;  
e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

---

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17;  
e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Новиков Павел Игоревич, инженер, ЗАО «Инжиниринговый центр ГОЧС «БАЗИС»; Московский государ-

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЖЕСТКОСТНЫХ СВОЙСТВ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АДАПТИРУЕМЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ. ЧАСТЬ 2: АПРОБАЦИЯ РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МЕТОДИКИ

*А.М. Белостоцкий<sup>1,2</sup>, П.И. Новиков<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> ЗАО «Инжиниринговый центр ГОЧС «БАЗИС», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье представлены результаты апробации разработанной расчетно-экспериментальной методики [1] идентификации и локализации изменений жесткостных характеристик конструктивных элементов натуральных объектов на основе адаптивных математических моделей рассматриваемых объектов. Апробация проведена для стенда «Конструктор» (Центр мониторинга МГСУ) по конечно-элементной модели. Показано, что предложенная методика уверенно идентифицирует предусмотренный экспериментом конструктивный дефект.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, частоты и формы собственных колебаний, динамические испытания, натурные динамические характеристики, адаптивные процедуры, метод стоячих волн, метод наименьших квадратов

## IDENTIFICATION OF REAL STIFFNESS PROPERTIES FOR STRUCTURAL ELEMENT OF ADAPTIVE FINITE ELEMENT MODELS. PART 2: APPROBATION CALCULATION-EXPERIMENTAL TECHNIQUE

*Alexander M. Belostotsky<sup>1,2</sup>, Pavel I. Novikov<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Engineering Center GOCHS "BASIS", Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The paper presents results of approbation of calculation-experimental technique [1] of identification and localization variation of stiffness characteristics for structural elements of real object based on adaptive mathematical models of the objects. The approbation was performed for MSUCE Monitoring Center stand named «Constructor» by finite element model of the stand. The defect is identified by the procedure.

**Key words:** mathematical modeling, modal frequencies and mode shapes, real dynamic characteristics, adaptive procedures, the "standing waves" method, least-square technique

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Отсутствие соответствия собственных пар математической модели и объекта моделиро-

вания является важной проблемой при идентификации текущего состояния реального объекта. Для решения задачи идентификации изменений требуется, чтобы значения дина-

мических характеристик объекта моделирования коррелировались со значениями динамических характеристик математической модели. В этом случае возможно успешно интерпретировать и идентифицировать наблюдаемые изменения реального объекта будь то появление значимых дефектов конструкции, увеличение массы объекта и т.д. Различают несколько подходов к идентификации изменений. «Интуитивно-инженерные» процедуры основаны на относительно простом сравнении значений частот и общем (в большинстве случаев визуальном) сравнении расчетных и реальных форм собственных колебаний. Математически формализованные процедуры основаны на векторном сравнении собственных пар. Общий вид математически формализованных процедур зависит от особенностей реализующего алгоритма. Это могут быть алгоритмы выявления «особых» узлов модели, решение задачи минимизации целевой функции или постановка и решение задачи оптимизации с применением различных стабилизирующих функционалов (регуляризаторов). Для успешного выполнения процедуры идентификации необходима математическая модель, которая бы точно описывала динамические характеристики объекта моделирования. В настоящей статье приводятся результаты апробации предложенной расчетно-экспериментальной методики 1. Методика позволяет успешно идентифицировать и локализовать конструктивный дефект на основе натуральных динамических характеристик стенда МГСУ «Конструктор».

## 2. РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА

В статье [1] предложена методика идентификации дефекта по жесткостным параметрам  $x_i$  КЭ-модели, как параметрам системы. Для идентификации используется анализ локальных экстремумов функции  $P(x)$  (1) по «тестируемым» уровням модуля упругости  $E$

для различных связей объекта, в качестве которых могут выступать колонны, балки, диафрагмы жесткости, ригели и перекрытия.

$$\text{Min}_x P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|k_i \cdot \{f\}_i - \{\hat{f}\}_i\|^2 \quad (1)$$

при условии  $R(x) \geq 0$

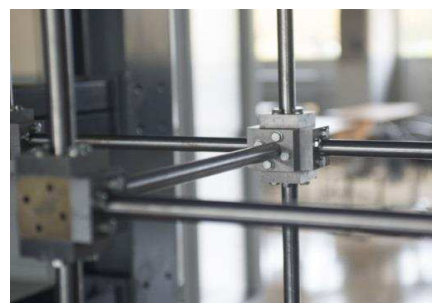
где  $x$  – параметр системы, который зависит от расположения стержня и применяемого уровня модуля упругости  $E$ ,  $P(x)$  – функция сравнения векторов форм собственных колебаний,  $n$  – количество рассматриваемых форм собственных колебаний,  $k_i$  – коэффициент соответствия  $i$ -ой формы собственных колебаний,  $\{f\}_i$  – вектор формы собственных колебаний, полученной по КЭ-модели,  $\{\hat{f}\}_i$  – вектор формы собственных колебаний, полученной по результатам натурального эксперимента. В настоящей статье приводится материал по апробации методики на основе стендовых испытаний, проведенных в МГСУ 2.

## 3. ОПИСАНИЕ СТЕНДА

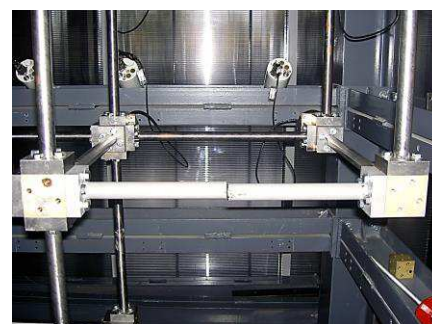
Стенд «Конструктор» 3 состоит из стальных стержней кругового сечения ( $\varnothing 24$  мм), запрессованных в призматические фланцы. Длина «стержень + 2 фланца» составляет 440 мм. Стержни соединяются друг с другом и с фундаментной рамой на болтах через узловые элементы «кубики» размером 60х60х60 мм. Число элементов и пространственная конфигурация системы «стержни + кубики» может варьироваться в широком диапазоне. Конструкция стенда (рис. 1) позволяет провести подробный конечно-элементный анализ для выбранного набора геометрико-жесткостных, инерционных и нагрузочных характеристик. Вносимый дефект (рис. 1в) является разрывом горизонтального стержня в консольной части на 3-м ярусе.



а) общий вид стенда



б) устройство типового узла



в) вносимый дефект

Рис. 1. Общий вид стенда «Конструктор». Указан вносимый дефект.

В качестве проявлений дефекта можно рассматривать снижение на 10% низшей частоты собственных колебаний, снижение на 35% четвертой и на 22% пятой частоты собственных колебаний. На четвертой и пятой форме колебаний в наибольшей степени проявляется изменение жесткости и потеря симметрии системы.

#### 4. ОПИСАНИЕ КЭ-МОДЕЛИ

Для процедуры идентификации дефекта выбрана конечноэлементная модель стенда «двухтавр – стержни с массами» 2. Модель выполнена в программном комплексе *ANSYS Mechanical*. Стальные стержни заданы элементами BEAM188. Фланцы заданы с помощью элементов MPC184, используемых в качестве абсолютных жестких вставок, и элементов MASS21, с помощью которых задаются требуемые инерционные характеристики узлов. Модель состоит из 400 элементов и 354 узлов (рис. 2). Свойства материала заданы для стальных стержней BEAM188.

Модуль упругости  $E$  составляет  $2 \cdot 10^{11}$  Па, плотность  $\rho$  составляет  $7826 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона составляет 0.28.

Идентификация дефекта по предложенной методике происходит в результате варьирования жесткостными характеристиками  $x_i$  связей КЭ-модели стенда.

Варьирование реализовано с помощью изменения модуля упругости двух элементов по середине стержня, примыкающих к узлам, отмеченным на рисунке 2б.

После каждого изменения КЭ-модели необходим поиск значимой порции собственных пар измененной механической системы. Элементы, приуроченный к узлам (рис. 2б), располагаются посередине стальных стержней. Для варьирования выбрано 10 уровней модуля упругости с  $10^{10}$  Па по  $10^1$  Па включительно.

Формы колебаний и для натурных данных и для данных, полученных по КЭ-модели, приведены к одинаковой размерности. За основу при группировке узлов и соответствующим им степеней свободы принята реализованная схема натурных измерений.

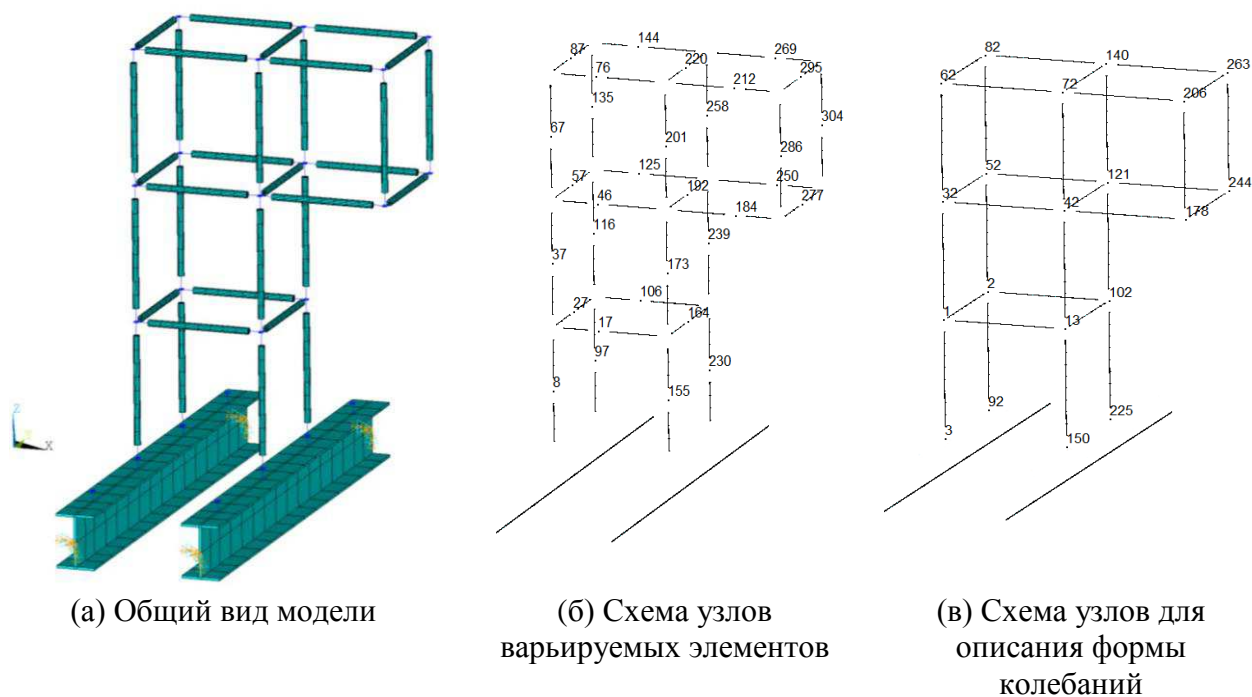


Рис. 2. КЭ-модель стенда «Конструктор».

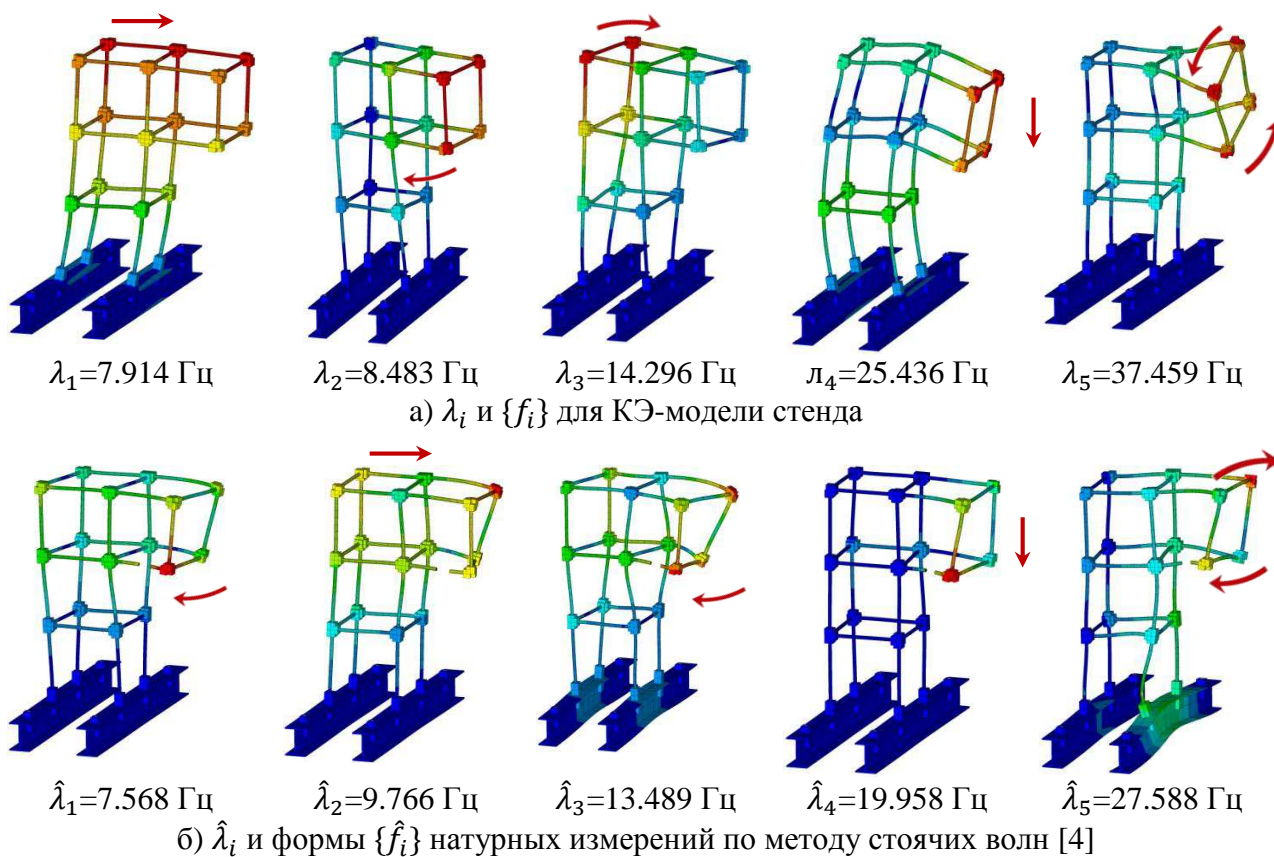


Рис. 3. Частоты  $\lambda$  и формы  $\{f\}$  собственных колебаний. Показаны суммарные перемещения: min (zero) max. Для удобства стрелками показано общее направление для формы собственных колебаний стенда.

Для поиска частот и форм собственных колебаний стэнда использовался метод стоячих волн [3]. Данный метод предусматривает получение значений формы собственных колебаний для каждой точки измерений по трем степеням свободы локальной системы координат  $x, y, z$  точки измерений (датчика). Система координат измерений соответствует системе координат КЭ-модели. Схема измерений предусматривала съем данных для 20 точек стэнда, которые показаны на рисунке 2в. Предложенная схема позволяет подробно описывать общий вид формы собственных колебаний. При апробации методики осуществлялся поиск 5-ти наименьших частот и форм собственных колебаний. Порядок форм собственных колебаний, полученных в ходе эксперимента, был приведен в соответствие формам, вычисленным по КЭ-модели. Для 5-й формы скорректирована фаза колебаний. Результаты визуализации вычисленных и натуральных форм приведены на рисунке 3.

## 5. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сравнение вычисленных и натуральных динамических характеристик по формуле (1) представлено в виде набора графиков для различных уровней модуля упругости  $E$ . На рисунке 4 показаны значения функции разности собственных форм  $P(x)$  в зависимости от вносимых изменений, места которых отображаются по номерам узлов (рис. 2б). В результате вычислений получены графики  $P(x)$  для различных уровней  $E$  и различных точек варьирования параметрами модели  $x_i$ .

Для идентификации дефекта предлагается следующий критерий: «Если экстремум (минимум) функции  $P(x)$  повторяется для одного узла при близких уровнях  $E$ , то рассматриваемый узел содержит искомый дефект». Данный критерий позволяет идентифицировать искомый дефект при  $E = 10^5$  Па.

На рисунке 4 показано распределение значений функции  $P(x)$  в зависимости от значения

и расположения вносимых в модель возмущений параметров системы.

Под значением вносимых возмущений подразумевается уровень модуля упругости для изменяемых элементов. Под расположением вносимых возмущений подразумевается стержень стэнда, обозначаемый номером узла согласно рисунку 2б. График показывает, что сравнение форм собственных колебаний с помощью коэффициента соответствия форм  $k_i$  приводит к удовлетворительному результату идентификации дефекта. Графики для уровней модуля упругости с  $10^6$  Па по  $10^1$  Па совпадают. Уверенно выявляется стержень с узлом №184, который при измерениях действительно содержал искомый дефект. Идентификация выполнена корректно.

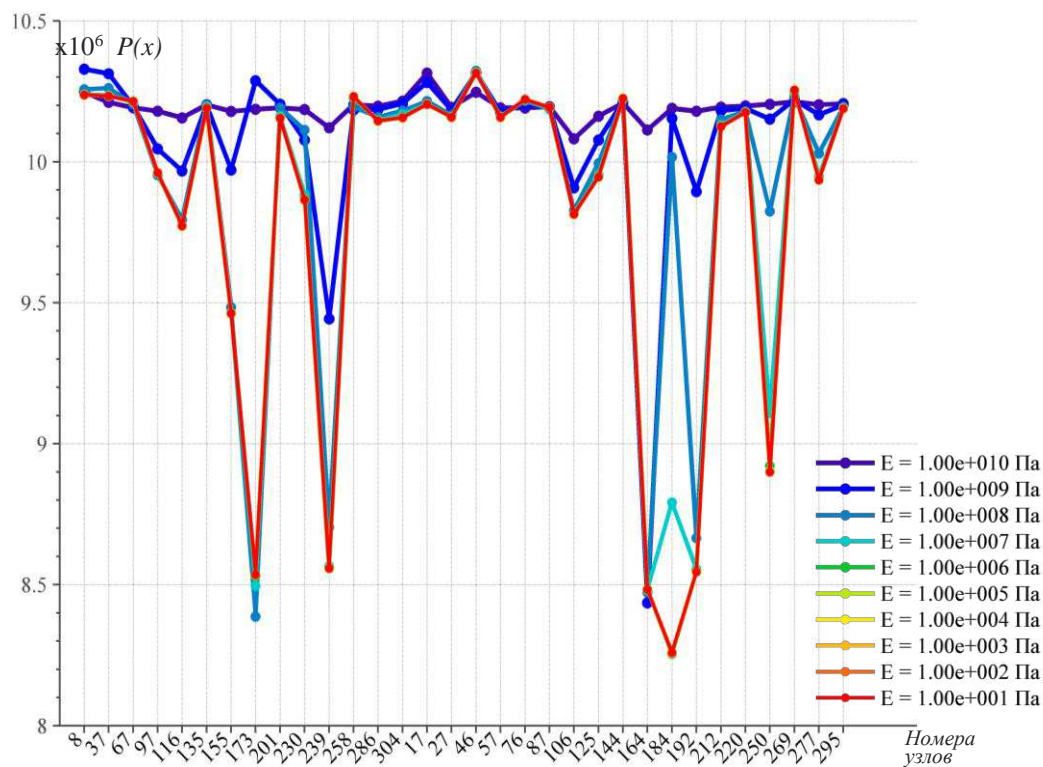
Для сравнения на рисунке 5 приведены результаты сравнения по функции  $P(x)$  (1) без использования коэффициента соответствия форм  $k_i$ .

На рисунке 5 показано распределение значений функции  $P(x)$  без использования коэффициента соответствия форм  $k_i$  в зависимости от значения и расположения вносимых в модель возмущений параметров системы.

График показывает, что сравнение форм собственных колебаний без коэффициента  $k_i$  приводит к неудовлетворительному результату. Графики для уровней модуля упругости с  $10^5$  Па по  $10^1$  Па совпадают. Выявляется стержень с узлом №164, который при измерениях не содержал дефекта. Идентификация выполнена некорректно.

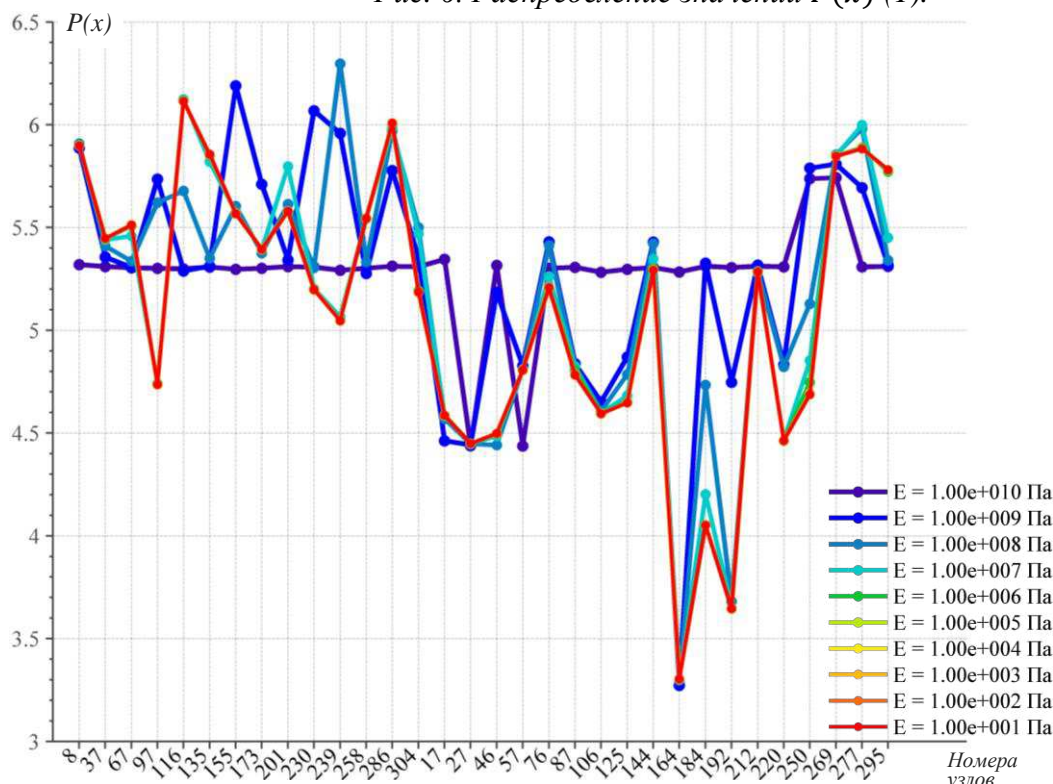
При выполнении сравнения с коэффициентом  $k_i$  (рис. 4) можно отметить «вспомогательные» пики для узлов 173, 239, 164, 184, 192, 250 (рис. 2б). Стержни, которым принадлежат узлы, образуют подобие «зоны влияния». К зоне влияния стержня с узлом 184 можно отнести:

- узел 173 принадлежит смежному стержню. Между стержнем с узлом 184 и стержнем с узлом 173 находится узел №42 (концентратор напряжений);
- узел 250 принадлежит стержню, аналогичному стержню с узлом 184, на параллельной Р-образной раме;



Уровень модуля упругости $E$ , Па	№ узла с мин. значением $P(x)$
$10^{10}$	106
$10^9$	164
$10^8$	173
$10^7$	164
$10^6$	184
$10^5$	184
$10^4$	184
$10^3$	184
$10^2$	184
$10^1$	184

Рис. 6. Распределение значений  $P(x)$  (1).



Уровень модуля упругости $E$ , Па	№ узла с мин. значением $P(x)$
$10^{10}$	57
$10^9$	164
$10^8$	164
$10^7$	164
$10^6$	164
$10^5$	164
$10^4$	164
$10^3$	164
$10^2$	164
$10^1$	164

Рис. 7. Распределение значений функции  $P(x)$  без коэффициента соответствия  $k_i$ . Вектора  $\{f\}_i$  и  $\{\hat{f}\}_i$  нормированы по метрике (4).

- узел 239 принадлежит стержню, аналогичному стержню с узлом 173, на параллельной Р-образной раме;
- узлы 192 и 164 принадлежат горизонтальным стержням, которые соединяют Р-образные рамы. Стержень с узлом №192 приурочен к узлам 42 и 121 (концентраторы напряжений). Стержень с узлом 164 располагается под стержнем с узлом 192.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам МГСУ проф. Коргину А.В. и Кухте А.В. за организацию экспериментов на стендовой модели «Конструктор», работникам Геофизической службы СО РАН (г. Новосибирск) Альтерману М.В. и Красникову А.А. за проведение, обработку и предоставление результатов измерений спектра собственных частот и форм колебаний по методу стоячих волн.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложена процедура апробации методики [1] на основе натурального эксперимента. Методика и предложенный критерий позволяет на основе конечно-элементной модели экспериментального стенда уверенно идентифицировать стержень с дефектом на основе натуральных динамических характеристик стенда.
2. Показаны результаты идентификации дефекта для стенда на основе КЭ-модели и натуральных динамических характеристик, выявленных по методу стоячих волн.
3. Упрощенное сравнение форм собственных колебаний (без использования коэффициента соответствия  $k_i$ ) приводит к неудовлетворительному результату. В качестве стержня с дефектом идентифицируется стержень, не содержащий дефект.

4. Распределение экстремумов функции  $P(x)$  образуют “зону влияния” стержня с дефектом. Конфигурация зоны согласуется с физическим смыслом процедуры идентификации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М., Новиков П.И.** Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечно-элементных моделей зданий и сооружений. Часть 1. Основы расчётно-экспериментальной методики. / А.М. Белостоцкий, П.И. Новиков // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 11, Issue 3.
2. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Нагибович А.И. и др.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2012, Volume 8, Issue 3, pp. 28-42.
3. **Кухта А.В.** Экспериментальные стенды «Конструктор», «Плита» и «Створ» научно-образовательного центра мониторинга МГСУ // Журнал «Предотвращение аварий зданий и сооружений» [Электронный ресурс]. – Магнитогорск, 2012. – Режим доступа: [http://www.pamag.ru/pressa/designer-plate\\_target](http://www.pamag.ru/pressa/designer-plate_target).
4. **Еманов А.Ф.** Восстановление когерентных составляющих волновых полей в сейсмике. Дис. ... д-ра техн. наук : 25.00.10; Новосибирск, 2004. – 279 с.

---

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного

Идентификация действительных жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Часть 2: Апробация расчетно-экспериментальной методики

центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Новиков Павел Игоревич, инженер, ЗАО «Инжиниринговый центр ГОЧС «БАЗИС»; Московский государственный строительный университет, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26. тел/факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel I. Novikov, Engineer, Engineering Center GOCHS “BASIS”; Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

# КОМПЛЕКСНОЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС И УСТОЙЧИВОСТИ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ПОКРЫТИЯ БОЛЬШЕПРОЛЕТНОГО СООРУЖЕНИЯ С ЭЛАСТОМЕРНЫМИ ОПОРАМИ

*А. М. Белостоцкий, А. С. Павлов*

ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ  
Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье рассматривается методология и результаты КЭ-моделирования комплексного (статического, температурного и сейсмического) напряженно-деформированного состояния, устойчивости и процесса деформирования при аварийном воздействии покрытия большепролетного сооружения в виде стальной сетчатой оболочки с эластомерными опорами.

**Ключевые слова:** большепролетное покрытие, сетчатая оболочка, эластомерные опоры, сейсмика, прогрессирующее обрушение

# COMPLEX FINITE ELEMENT SIMULATION OF STRESS-STRAIN STATE AND STABILITY OF BRACED SHELL WITH ELASTOMERIC BEARINGS

*Alexander M. Belostotsky, Andrei S. Pavlov*

StadyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA  
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This article reviews the experience of modeling and evaluation stress-strain behavior, stability of braced shell with elastomeric bearing under static, seismic and extreme loads.

**Key words:** long-span construction, braced shell, elastomeric bearing, seismic, progressive collapse

## ВВЕДЕНИЕ

Сетчатые оболочки представляют собой специфический класс строительных конструкций, сочетающих в себе ряд как положительных, так и отрицательных особенностей. К первым можно отнести в высокую перевязанность конструкций. В результате, при выключении из работы одного элемента происходит перераспределение усилий на соседние. К отрицательным свойствам относится, прежде всего, чувствительность к неравномерным осадкам. Рассматриваемое покрытие представляет собой сетчатую оболочку с крупными ромбовидными

ячейками, заполняемыми более мелкими элементами, которые образуют треугольную сетку. Для компенсации деформаций и перемещений сооружения в процессе статического и сейсмического нагружения стыковка с нижележащими железобетонными конструкциями производится через эластомерные (резинометаллические) опоры. Само сооружение при этом поделено на шесть деформационных блоков на единой фундаментной плите.

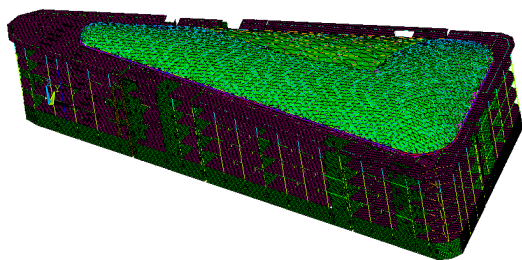


Рис. 1. Общий вид расчетной модели с «покрытие-эластомеры-ж/б конструкции-основание».

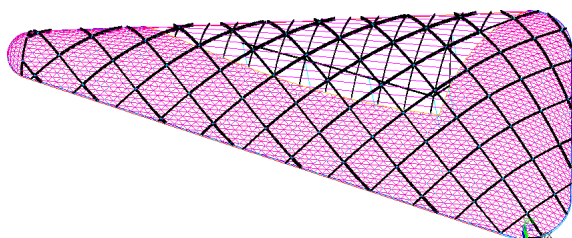


Рис. 2. Общий вид расчетной модели покрытия сооружения.

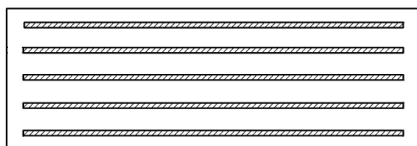


Рис. 3. Типовой разрез по ламинированному эластомерному блоку (узлы крепления условно не показаны).

## 1. ПРЕДПОСЫЛКИ И ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ

Реализуемый подход включал разработку как базовых оболочечно-стержневых моделей системы «покрытие-эластомеры-железобетонные конструкции-основание» для получения предварительных результатов, так и уточненных оболочечных с учетом геометрии сечений и стыковки элементов (в программном комплексе ANSYS).

В качестве основных конечных элементов принимались стержневые BEAM188 и оболочечные SHELL181. Нагрузки, массы и коэффициенты постели прикладывались посредством элементов SURF154. Для материала

стальных конструкций применялась билинейная модель с кинематическим упрочнением. Эластомеры вводились в систему через одномерные пружинные конечные элементы COMBIN14 [3], отвечающие за реализацию отдельных степеней свободы. Жесткости принимались на основании проведенных испытаний [2]. Использование подобных КЭ в линейной постановке возможно с учетом достаточно узкой гистерезисной кривой деформирования (см. рисунок 5) применяемой опоры. Как следствие этого конструктивного решения, соединение обладает низкими демпфирующими свойствами [1].

Расчет системы с учетом возможной податливости опор и их влияния на процесс деформирования производился в геометрической и физической нелинейных постановках.

Отдельно проводились расчетные исследования конструкции на сейсмическое воздействие, заданное синтезированной трехкомпонентной акселерограммой (приведены на рисунке 7). За базовое значение демпфирования принята величина 5%, как рекомендуемая для конструкций на болтах.

Решение задач сеймики и прогрессирующего обрушения производится с применением метода прямого интегрирования уравнений динамики во времени Ньюмарка (шаг интегрирования 0.005 с). Для прогрессирующего обрушения величина демпфирования принята эквивалентной сейсмической. Для двух случаев является характерным развитие значительных пластических деформаций, которые сопутствуют высвобождению энергии системой.

Решение динамических задач производилось в два этапа:

- 1) квазистатическое нагружение при повышенном демпфировании для гашения кинетической энергии системы;
- 2) динамический расчет во времени.

Исследованные сценарии гипотетических локальных разрушений:

- 1) выход из строя двух смежных блоков эластомерных опор;



Рис. 4. Испытание эластомерной опоры на сдвиг.

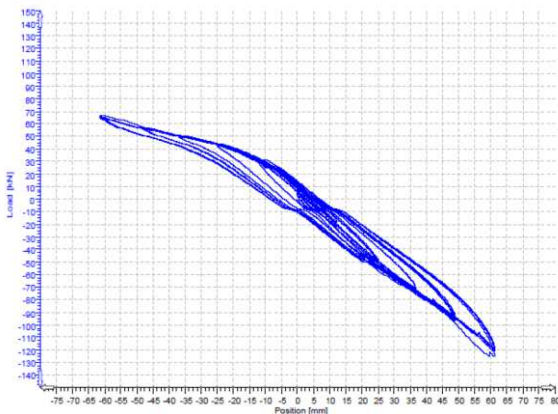


Рис. 5. Диаграмма циклического нагружения эластомерной опоры.

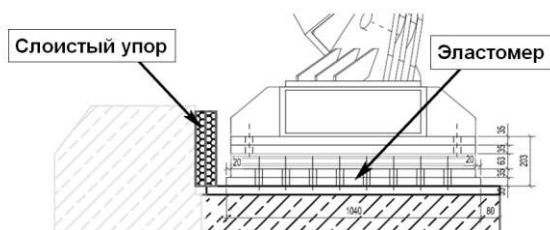


Рис. 6. Схема опирания конструкций покрытия на ж.б. конструкции.

- 2) выход из строя шарнирного узла крепления арки из коробчатого профиля 200x600 к опорному контуру 600x200;
- 3) потеря устойчивого положения железобетонной опорной колонной 800x800, которая служит опорой покрытия;
- 4) разрушение узла арки 200x600 в зоне опирания на двутавровую балку 600;
- 5) разрушение опорного контура из элементов 600x200.

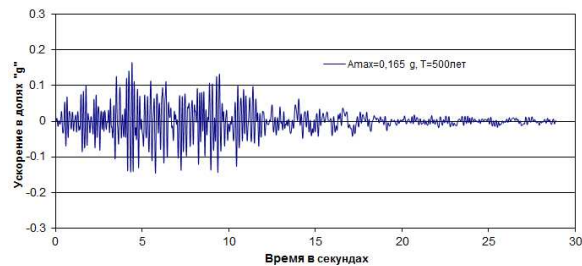
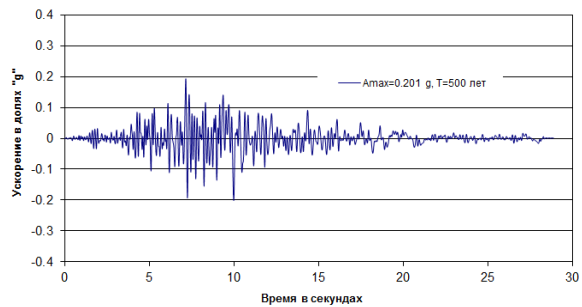
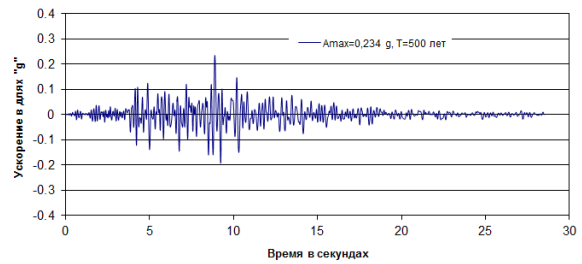


Рис. 7. Синтезированная трехкомпонентная акселерограмма.

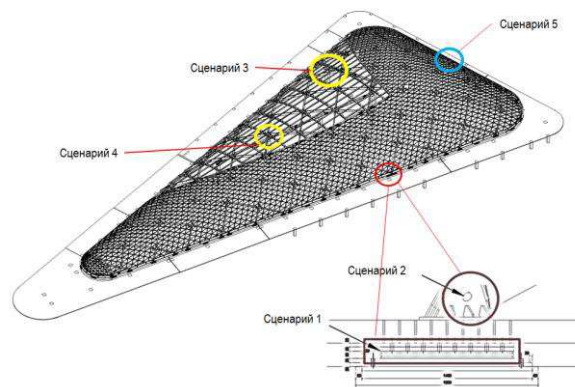


Рис. 8. Схема расположения отключаемых элементов.

При расчете на прогрессирующее обрушение влияние скоростей деформирования на предельную несущую способность элементов в запас не учитывалось. Удаление элемента производится путем постепенного снижения жесткости элемента в 10 000 раз.

Комплексное конечноэлементное моделирование НДС и устойчивости сетчатой оболочки покрытия большепролетного сооружения с эластомерными опорами

В качестве основных критериев затухания процесса деформирования приняты:

- снижение и отсутствие роста кинетической энергии на продолжительном промежутке времени;
- стабилизация динамических перемещений и усилий в стержнях элементов.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПОКРЫТИЯ И НДС ЭЛАСТОМЕРОВ

Важной стадией анализа стал учет податливости узлов крепления стержневых элементов заполнения ромбических ячеек. Рассмотренный вариант с шарнирным креплением, подтвержденный на основании требований Еврокода 3 по эквивалентным погонным жесткостям, приводил к локальной потере устойчивости в виде «прощелкивания». С учетом этого принято жесткое конструктивное решение узла.

Следующий этап – определение критических величин нагрузок потери устойчивости по уточненным оболочечным моделям. В качестве основных форм подтверждено локальное «прощелкивание» при жестком сопряжении элементов, но на больших коэффициентах по нагрузке (от 1.3 и выше) нежели при шарнирной стыковке.

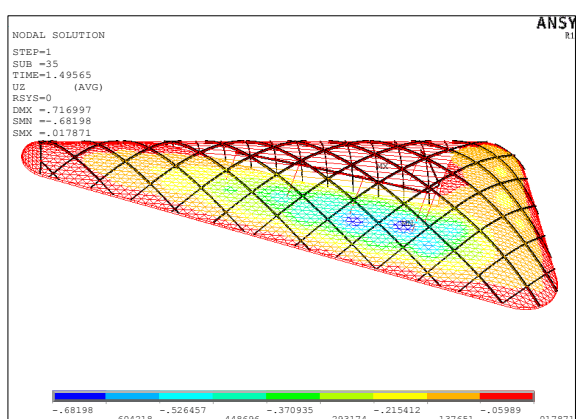


Рис. 9. Локализация вертикальных перемещений конструкций в зонах «прощелкивания», м.

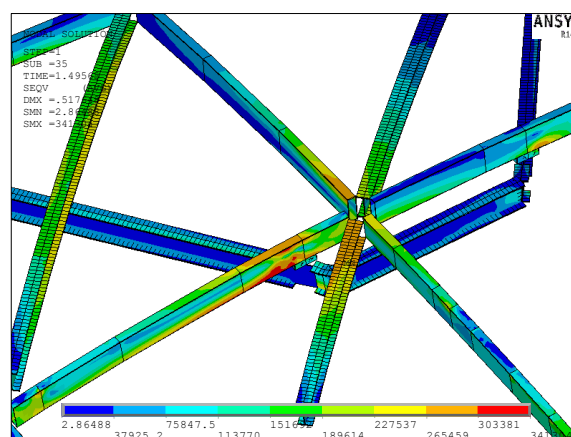


Рис. 10. Эквивалентные напряжения по Мизесу в элементах покрытия при  $K=1.5$ , кПа. Макс. 341304 кПа.

В качестве отдельных локальных линейных форм потери устойчивости конструкции выделяется локальная деформация стенок основных перекрестных арок (коэффициенты по нагрузке от 3.5 и выше) в зоне опорных конструкций (см. рисунок 11).

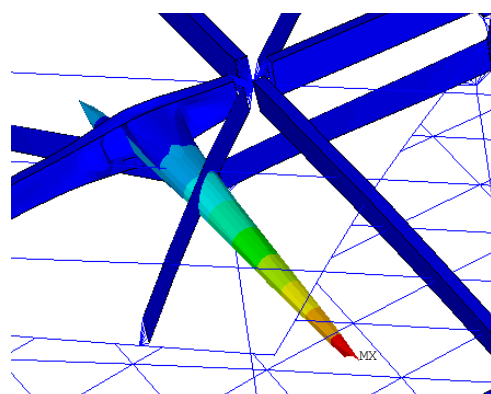


Рис. 11. Форма линейной локальной потери устойчивости стенкой трубы.

## 3. СЕЙСМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В исследованиях НДС конструкции при сейсмическом воздействии критериальными являются перемещения верхних узлов эластомерных опор относительно нижних – они не должны превышать значений, определенных на основании лабораторных данных по испытаниям, и не допускать соударение с «барьерными» железобетонными конструкциями сооружения (см. рисунок 6).

По результатам проведенного анализа на основные статические комбинации максимальное сдвигающее усилие составило 118 т, что эквивалентно 5.9 см сдвига верхней крышки эластомера. Максимальное осевое сжатие 144 т. В таблице 1 приведена выборка максимальных значений перемещений по сейсмическому воздействию, согласно которой превышение рассматриваемого параметра от динамического воздействия над амплитудным статическим составило 1.72 см при максимальном значении 7.62 см (предельное значение 8 см).

Таблица 1. Максимальные перемещения верхних узлов эластомеров

№ п.п.	X <sub>min</sub> , см	X <sub>max</sub> , см	Y <sub>min</sub> , см	Y <sub>max</sub> , см
1	-3.44	0.47	-7.62*	2.16
2	-5.1	1.54	-6.34*	0.83
3	-5.33	2.25	-6.38*	1.77
4	-2.78	6.87*	-3.57	3.88
5	-3.56	7.00*	-3.3	3.96
6	-3.31	6.95*	-3.21	4.01
7	-1.64	7.19*	-4.29	3.86
8	-2.65	2.82	1.62	6.21*
9	-2.59	2.69	-1.96	6.86*
10	-2.58	2.62	-1.65	6.27*

\* – отмечены экстремумы и близкие к ним значения

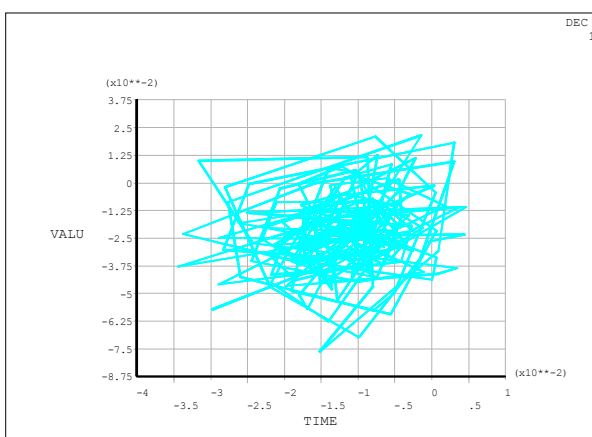


Рис. 12. Статика+Сейсмика. График перемещений в пространстве X (шкала TIME) и Y (шкала VALUE) верхнего узла эластомера в процессе нагружения, м (Y – направление в сторону упора).

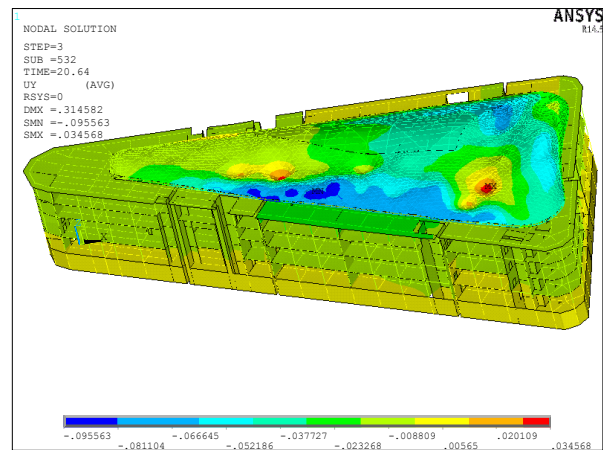


Рис. 13. Статика+Сейсмика. Общие перемещения (м) по Y для момента времени 20.64 с.

#### 4. ПРОГРЕССИРУЮЩЕЕ ОБРУШЕНИЕ

По результатам расчета несущих конструкций покрытия по 5-ти сценариям локального разрушения получены данные, подтверждающие устойчивость конструкций к указанным типам аварийных воздействий.

В процессе выключения элементов по определенным сценариям проявляется значимое возрастание перемещений, скоростей деформирования и кинетической энергии по схеме. При этом уровень напряжений в несущих элементах не превосходят допускаемых. В дальнейшем за счет повышенной связности конструкций происходит стабилизации с перераспределением усилий и падением кинетической энергии.

#### ВЫВОДЫ

На пространственных оболочечно-стержневой и уточненной оболочечной КЭ-моделях выполнено исследование напряженно-деформированного состояния и коэффициента запаса по устойчивости конструкций покрытия с учетом физической и геометрической нелинейностей. Наименьший коэффициент запаса несущих конструкций покрытия по устойчивости составил 1.3.

Комплексное конечноэлементное моделирование НДС и устойчивости сетчатой оболочки покрытия большепролетного сооружения с эластомерными опорами

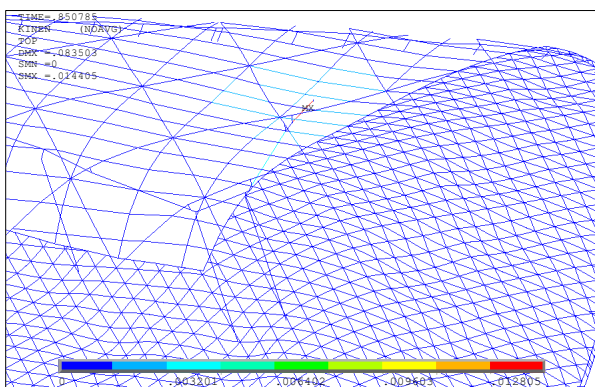


Рис. 14. Сценарий 3. Распределение кинетической энергии по системе в момент времени  $T = 0.850$  с (макс  $0.014405$ ).

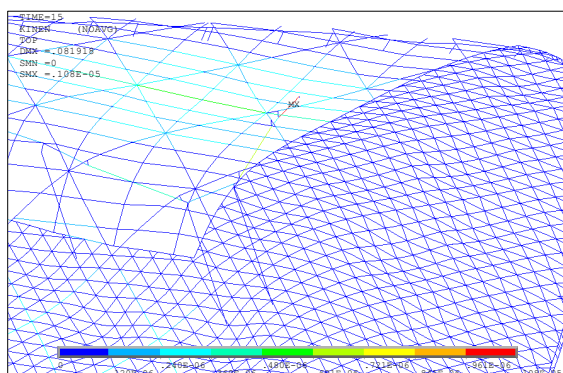


Рис. 15. Сценарий 3. Распределение кинетической энергии по системе в момент времени  $T = 15.0$  с (макс  $0.108 \times 10^{-5}$ ).

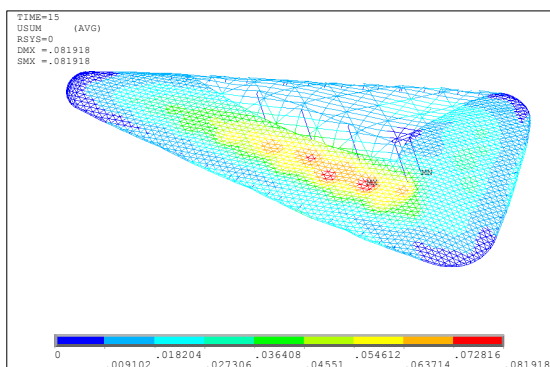


Рис. 16. Сценарий 3. Суммарные перемещения в момент времени  $T=15$  сек.

Расчетная оценка применимости эластомерных опор при статических и сейсмических нагрузках показала возможность их использования. Сдвиговые смещения узлов находятся в лимитированном диапазоне, соударения с упорными железобетонными конструкциями не происходит.

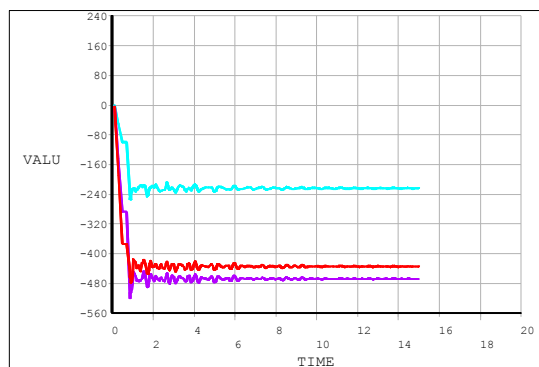


Рис. 17. Сценарий 3. График изменения продольной силы в элементах смежных с зоной удаленного элемента, кН.

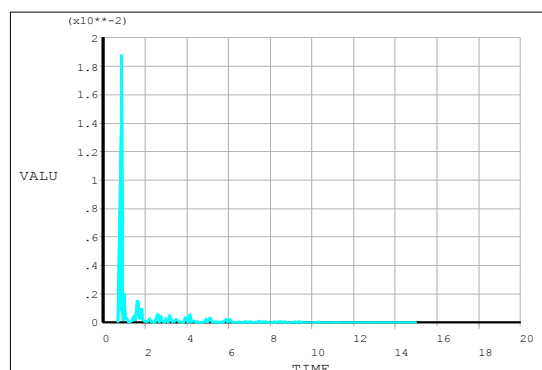


Рис. 18. Сценарий 3. График изменения кинетической энергии в узле стыковки удаленной колонны с балкой.

Проведены исследования устойчивости конструкций покрытия к прогрессирующему обрушению по пяти сценариям гипотетического инициирующего локального разрушения в динамической постановке с учетом физической и геометрической нелинейностей. Во всех исследованных случаях устойчивость обеспечивается со значимым запасом.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках работ по Гранту 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач

деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ISO 22762-3:2010. Elastomeric seismic-protection isolators – Part 3: Applications for buildings – Specifications. ISO. 2010 г.
2. Krasnaya Polyana AVM. Elastomeric Bearing Test Report. METU. 2013 г.
3. ANSYS, Inc. (2013), “ANSYS 14.5 Help”. ANSYS, Inc. (2013), “Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench”.
4. Рекомендации по проектированию работающих на сдвиг болтовых соединений стальных строительных конструкций. ВНИПИ Промстальконструкция, ЦНИИ-ПСК им. Мельникова. Москва, 1990 г.
5. EN 1993-1-8: Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-8. Design of joints. CEN. 2005 г.

---

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Павлов Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; старший научный сотрудник ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», Россия, 125040, г. Москва, ул. Верхняя, д. 34, офис 412, тел./факс: +7 (495) 737-40-81, +7 (499) 257-77-61, e-mail: a.pvlv@yandex.ru

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВОГО РЕЖИМА ТЕРРИТОРИИ НА ПРИМЕРЕ КАМПУСА ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ГОРОДА ЭЙНДХОВЕН

*А.В. Дорошенко*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Работа посвящена исследованию ветровой аэродинамики на территории технического университета г. Эйндховен с помощью численного моделирования в программном комплексе Ansys CFX. Ветровой режим территории рассматривался с учетом и без учета пульсационной составляющей. Рассмотрены результаты оценки пешеходной комфортности по различным методикам и нормам.

**Ключевые слова:** численное моделирование, пешеходная комфортность, ветровая аэродинамика, Ansys CFX

## NUMERICAL SIMULATION OF WIND MODE AREA FOR CAMPUS OF TECHNICAL UNIVERSITY OF EINDHOVEN AS AN EXAMPLE

*Anna V. Doroshenko*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to the wind aerodynamics on the territory of the Technical University of Eindhoven with the help of numerical simulation software package Ansys CFX. Wind mode of the territory is considered with and without consideration of the fluctuating component. The results of assessment of pedestrian comfort by different methods and standards are presented.

**Key words:** numerical simulation, pedestrian comfort, wind aerodynamics, Ansys CFX

Ветровой режим территории является одним из наиболее важных природных факторов, который необходимо учитывать при строительстве зданий и сооружений. Воздействие ветровых потоков в городской застройке может приводить к негативному изменению микроклиматических условий воздушной среды, а также способно служить источником возникновения неблагоприятных ситуаций. Это связано как с образованием зон застоя воздуха с повышенным уровнем загрязнения приземного слоя атмосферного воздуха, так и с увеличением скорости ветровых потоков [1-3]. В настоящей работе рассмотрен пример численного моделирования ветрового режима на

территории кампуса Технического университета г. Эйндховен, который расположен на юге Нидерландов. Его координаты: 51,26 с.ш. и 5,30 в.д.

Рельеф данной местности плоский. До ближайших холмов и Северного моря, по меньшей мере, 80 км. Преобладающие направления ветра: западный и юго-западный. По данным Метеостанции Эйндховена была сделана выборка архива погоды с 2011 года и создана таблица направления и повторяемости ветров на высоте 10 м. (в %), которая потом использовалась при оценке пешеходной комфортности.

Главное здание кампуса расположено к северу от центра города. Оно имеет следующие

размеры: высота  $H = 44,6$  м, ширина  $W = 167$  м и глубина  $D = 20$  метров и точную ориентацию на север-юг, фасады здания: западный и восточный

Для рассматриваемого университета проводились натурные испытания в 1994-1997 гг., но результаты этих испытаний в литературе не встречаются. К.П.В. Гертсом в 1997 году была проведена серия экспериментов в аэродинамической трубе Лаборатории Строительной Аэродинамики, Бохум, Германия. Результаты, полученные в ходе эксперимента в аэродинамической трубе отражены в работе [65]. Модель была сконструирована в масштабе 1: 350. Тест проводился при средней скорости ветра 14м/с. На наветренной стороне было установлено 42 датчика давления на высотах  $0.97H$ ,  $0.72H$  и  $0.61H$ .

Для численного моделирования скоростей ветра в пешеходных зонах кампуса технического университета Эйнховена была построена модель, которая составила примерно 1.5 миллиона узлов и 4.32 миллиона ячеек (2.3 миллиона тетраэдральных, 2 миллиона призматических и 0.02 млн. гексаэдральных ячеек) (рис. 1).

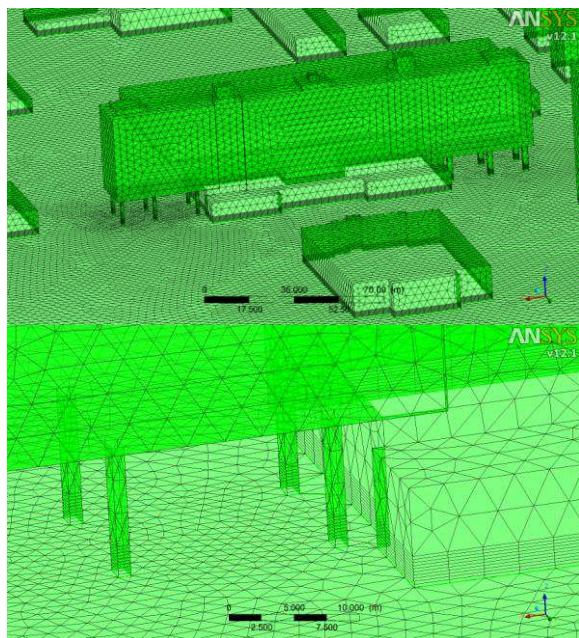


Рис. 1. Кампус технического университета Эйнховена. Поверхностная сетка.

Сетка в приземной области была получена "выдавкой" до нулевой высоты (10 элементов общей высоты 2,5 м). Такой подход обеспечил достаточную и экономичную дискретизацию потоков в пешеходных зонах. Полная расчетная область представляет собой цилиндр радиусом 793 м и высотой 577 м.

Для области расчета задан тип среды – идеальный газ при температуре 285К и давлении 1 атм. Задача рассматривалась в изотермической постановке.

При подготовке модели в препроцессоре ANSYS всем группам поверхностей (компонентам) были присвоены соответствующие наименования для удобства присвоения в CFX граничных условий. В частности на боковой поверхности создано 16 компонент (участки по  $22.5^\circ$ ).

Для каждого направления ветра выбирается восемь компонент для граничного условия типа «вход» (INLET в терминах CFX), для иных восьми – условие, позволяющее потоку как выходить из расчетной области, так и входить в нее (OPENING в терминах CFX). На условии OPENING задано избыточное давление 0 Па.

На верхней поверхности расчетной области (высота 577 м) задано условие симметрии, обеспечивающее горизонтальность потока. На нижней поверхности расчетной области и на поверхности сооружения заданы условия непротекания и прилипания "no slip".

Масштаб турбулентности принят равным 100м в соответствии с рекомендациями Eurocode [57] для открытой местности

В задаче на "входе" в область задается скорость потока и кинетическая энергия турбулентности (изменяющиеся по высоте в соответствии с положениями СНиП).

Нижней поверхности (поверхности земли) задается условие типа "no slip" с типичной высотой шероховатостей. По опыту расчетов и по результатам вычислительных экспериментов назначена величина 0.1м.

Расчеты проводились с использованием модели турбулентности SST вплоть до достиже-

ния всеми неизвестными относительной среднеквадратичной нормы невязок  $10^{-5}$ . Выбор модели турбулентности и методики построения сетки описаны в [7].

По результатам предварительных расчетов сетка была скорректирована в ряде зон, а также было подобрано значение эквивалентной шкалы "псевдовремени", монотонно ускоряющее сходимость. "Хорошая" сходимость (около 70-80 итераций) позволила сделать вывод о рациональности принятой сетки и параметров итераций.

Были назначены необходимые параметры и переменные для мониторинга в процессе счета и удобства обработки результатов.

При верификации использовалась модель без окружающей застройки, только те здания, которые "продувались" в аэродинамической трубе. Для верификации задачи сначала рассматривался западный ветер. Рассогласование расчетных и экспериментальных результатов составило до 11.17%.

После верификации был проведен расчет остальных 15 направлений ветра.

Расчеты выполнялись на кластере НОЦ КМ МГСУ.

Количество вычислительных узлов – 25, количество вычислительных ядер – 300. Объем ОЗУ – 600 Гб. Емкость основной СХД – 7,8 Тб.

Для хранения данных используется параллельная файловая система PanFS, интерконнект – QDR Infiniband.

Параметры вычислительного узла: Два процессора Intel Xeon с 6 ядрами каждый с тактовой частотой 2,93 ГГц, 24 Гб ОЗУ. Имеется два GPGPU вычислителя Tesla S2050.

После расчета 16 направлений ветра были сгенерированы файлы \*.csv для обработки в разработанном программном модуле. Обработка результатов была проделана для всех норм, заложенных в программном модуле с учетом пульсационной составляющей скорости и без нее.

Следующим шагом модель кампуса была расширена, была смоделирована окрестность университета. Модель составила примерно

2.6 миллиона узлов и 6.25 миллиона ячеек (2.2 миллиона тетраэдральных, 4 миллиона призматических). Полная расчетная область представляет собой цилиндр радиусом 1693 м и высотой 615 м. Для полученной модели также оценивались результаты пешеходной комфортности по различным методикам и нормам с учетом и без учета пульсационной составляющей, т.к. для предыдущей модели результаты с учетом пульсационной составляющей были более некомфортны, для новой модели проанализируем только результаты с учетом пульсационной составляющей. Далее была проведена оценка ощущаемой температуры воздуха при температуре  $4^{\circ}\text{C}$ . Результаты представлены на рис. 2.

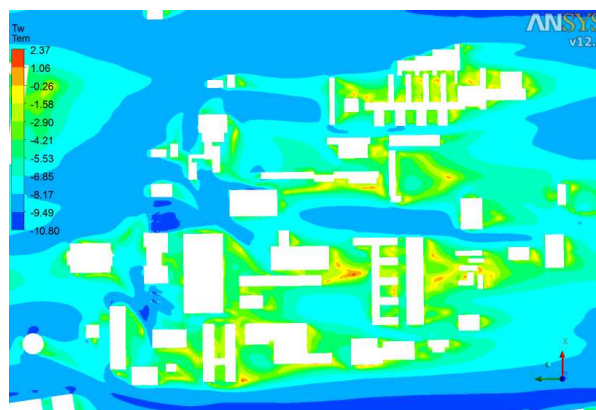


Рис. 2. «Ощущаемая» температура воздуха в пешеходных зонах кампуса с учетом ветра при температуре воздуха  $-4^{\circ}\text{C}$ .

По результатам для шкалы Бофорта, в новой модели бальность по шкале на территории кампуса составляет 4-7, что можно считать неудовлетворительным, в районе главного корпуса у колонн бальность составляет 8-10, что можно считать критичным. В целом обстановку на территории кампуса университета (с учетом близлежащей территории) по шкале Бофорта с учетом пульсационной составляющей можно охарактеризовать неудовлетворительной.

По результатам для норм Нидерландов (где и расположен комплекс зданий), которые изменяются от 0 до 4, практически на всей терри-

тории балл по шкале равен двум, что интерпретируется самими нормами как «хорошо» для быстрой ходьбы, «удовлетворительно» для прогулок и «плохо» для сидения на открытом воздухе.

Нормы для оценки пешеходной комфортности, разработанные Т.В. Лоусоном и используемые в RWDI, соответствующие прогулке пешеходов не выполняются практически на всей территории кампуса.

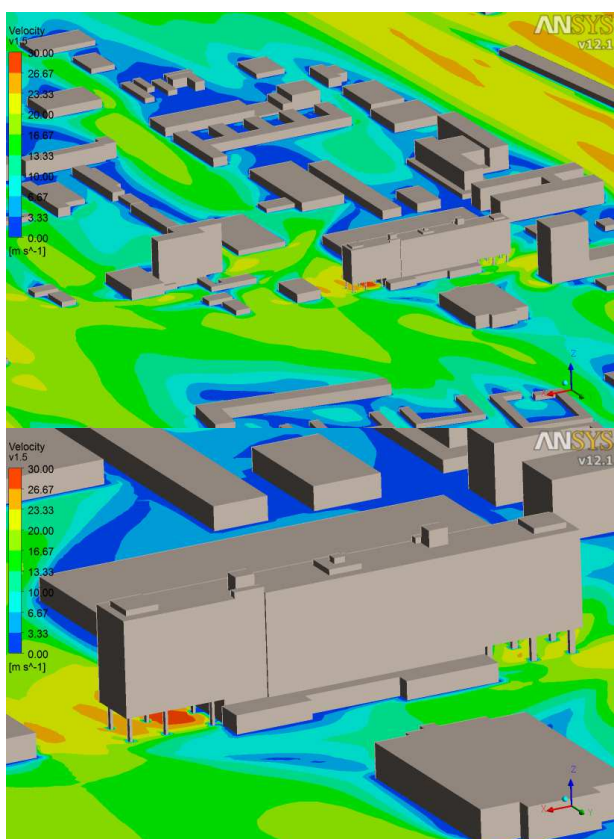


Рис. 3. Скорости ветра в пешеходных зонах кампуса при западном направлении ветра.

Рассмотрим результаты оценки по МДС. Первый критерий (скорость ветра более 6 м/с повторяется не более 1000 часов в год) выполняется на всей территории кампуса. Второй критерий (скорость ветра более 12 м/с повторяется не более 50 часов в год) выполняется на всей территории кампуса кроме зон у колонн главного корпуса.

Третий критерий (скорость ветра более 20 м/с повторяется не более 5 часов в год) также выполняется на всей территории кампуса кроме зон у колонн главного корпуса.

В целом по МДС можно говорить о том, что условия на территории кампуса благоприятные.

По методике Вайса и Пенвардена, которая изменяется от 0 до 3, большая часть территории находится в зоне 0-2, в районе у колонн балл равен 3. В целом ситуация неудовлетворительная.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. В целом по всем нормам и методикам кроме МДС ветровой режим с учетом пульсационной составляющей на территории кампуса можно назвать неблагоприятным для пешеходов.
2. Ветровой режим с учетом пульсационной составляющей на территории кампуса с учетом прилегающей территории благоприятнее, чем ветровой режим без учета прилегающей территории.
3. Критичными можно назвать зоны у колонн главного здания по всем нормам (рис. 3).

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, стипендия Президента РФ молодым ученым и аспирантам (СП-5024.2013.1)*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ретгер Э.И. Архитектурно-строительная аэродинамика. Москва: Стройиздат, 1984.
2. Серебровский Ф.Л. Аэрация населенных мест. Москва: Стройиздат, 1985.
3. Исаев С.А., Баранов П.А., Жукрва Ю.В., Терешкин А.А., Усачев А.Е. Моделирование ветрового воздействия на ансамбль высотных зданий с помощью многоблочных вычислительных технологий. // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. №1. С.107-118.

4. **Akimov P.A.** Correct indirect discrete-continual boundary element method of structural analysis. // *Advanced Materials Research*. 2013. Т. 671-674. С. 1614-1618.
5. **Дубинский С.И., Усманов А.Р., Афанасьева И.Н.** Численное моделирование поля скоростей ветра как класса случайных процессов. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Т. 9. № 4. С. 143-148.
6. **Дорошенко А.В.** Влияние топографии местности на ветровые потоки. В сборнике: Современная российская наука глазами молодых исследователей Материалы III Международной научно-практической конференции молодых ученых и специалистов. Научно-Инновационный Центр. Красноярск, 2013. С. 232-236.
7. **Дубинский С.И., Дорошенко А.В.** Методика оценки аэродинамической комфортности пешеходных маршрутов в городе москва с использованием численного моделирования. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Т. 9. № 4. С. 137-142.

---

Дорошенко Анна Валерьевна, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pochta.avd@gmail.com.

Anna V. Doroshenko, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: pochta.avd@gmail.com.

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

*Е.Б. Коренева, В.Р. Гросман*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Предлагается аналитическая методика расчёта пластин переменной толщины. Изучаемая конструкция ограничена в плане двумя дугами окружностей и двумя радиусами. Пластина лежит на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Материал пластины является ортотропным или изотропным. На изучаемую конструкцию действуют сосредоточенные силы. Используется теория расчёта секториальных пластин. Полученные решения обобщаются на случаи действия на конструкции нагрузок, равномерно распределённых по дугам окружностей и по отрезкам радиусов. Дается пример расчёта. Решения получены в замкнутом виде.

**Ключевые слова:** секториальные пластины, упругое основание, переменная толщина, сосредоточенные силы

## ANALYSIS OF PLATES HAVING COMPLICATED SHAPE

*Elena B. Koreneva, Valerij P. Grosman*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Analytical technique for calculation of plates of variable thickness having complicated shape is proposed. The construction under study is limited in plan by two circumferences' arcs and by two radii. The plate rests on an elastic subgrade which properties are described by Winkler's model. The plate is made from orthotropic or isotropic material. The construction under examination is subjected to an action of concentrated forces. The theory of sector plates is used. The received solution is generalized on the cases of loads uniformly distributed along lengths of arcs and along lengths of radii. The numerical example is given. The results are given in closed forms.

**Key words:** sector plates, elastic subgrade, variable thickness, concentrated forces

В настоящее время возводятся многочисленные сооружения, имеющие в плане сложную форму. Ниже будет рассмотрен расчёт пластины, имеющей форму кругового прямоугольника, т.е. конструкция в плане ограничена двумя дугами концентрических окружностей и двумя радиусами. Толщина пластины изменяется вдоль радиуса. Примем, что цилиндрическая жёсткость пластины представлена следующим образом:

$$D = D_0 x^4, \quad x = \frac{r}{r_0}; \quad (1)$$

подобная жёсткость соответствует толщине

$$h = h_0 x^{4/3}, \quad (2)$$

которая близка к толщине, изменяющейся по линейному закону.

Здесь  $D_0$ ,  $r_0$ ,  $h_0$  - постоянные.

Материал пластины является изотропным или ортотропным. Конструкция лежит на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Ниже будет предложена методика расчёта указанных выше пластин под действием нагрузок, передающихся на них через колонны. Изучается действие сосредоточенных сил и нагрузок, распределённых по дугам окружностей и по отрезкам радиусов. В данной работе используется теория расчёта пластин, имеющих форму сектора или кругового прямоугольника [1]. В ряде публикаций рассматриваются пластины переменной толщины, лежащие на упругом основании, например, в [1-5].

Радиальные края изучаемой конструкции шарнирно оперты, дуговые имеют любые условия опирания.

Приведём сначала дифференциальное уравнение, описывающее несимметричный изгиб круглой ортотропной пластины:

$$D_m \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{n^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{n^2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2(c_0 + \sigma)}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2(c_0 + \sigma)}{r^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2(c_0 + \sigma + n^2)}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{n^2}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] + \frac{dD_m}{dr} \left[ 2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{(2 + \sigma)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2(c_0 + \sigma)}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2(c_0 + \sigma) + n^2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{d^2 D_m}{dr^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - q_z + cw = 0. \quad (3)$$

Параметры  $n^2 = n_1 n_2$  определяются из соотношений:

$$E_r = \frac{E}{n_1}, \quad E_\theta = E n_2, \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{n_2}, \quad \sigma_\theta = \sigma. \quad (4)$$

Здесь  $E$  и  $\sigma$  – приведённые модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для изотропной пластины

$$n_1 = n_2 = 1; \quad c_0 = 2(n^2 - \sigma^2) \frac{G_{r\theta}}{E n_2};$$

$q_z$  – составляющая внешней силы, приходящейся на единицу площади по направлению оси  $z$ ;  $c$  – коэффициент постели.

Положим, что внешняя нагрузка представлена следующим образом [1]:

$$q(x, \theta) = \sum_j \sum_k q_{j,k} x^j \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}. \quad (5)$$

Имеем решение соответствующего однородного дифференциального уравнения в виде

$$w(x, \theta) = \sum_k w(x) \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}. \quad (6)$$

Для случая изотропной пластины разрешающее уравнение с учётом (1) и (6) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{10}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{1}{x^2} (19 + 4\sigma - 2\ell^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{3}{x^3} (1 - 4\sigma + 2\ell^2) \frac{dw}{dx} + \frac{\ell^2}{x^4} (8 - 12\sigma + \ell^2) w + \beta^4 w = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \ell^2 = \frac{k^2 \pi^2}{(2\alpha)^2}, \quad \beta^4 = \frac{c r_0^4}{D_0}.$$

Это уравнение является уравнением Эйлера.

В результате замены  $x = e^z$  (7) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + 4 \frac{d^3 w}{dz^3} - 2[\ell^2 - 2\sigma] \frac{d^2 w}{dz^2} - 4[2(1 - \sigma) + \ell^2] \frac{dw}{dz} + [\ell^2 [4(2 - 3\sigma) + \ell^2] + \beta^4] w = 0; \quad (8)$$

его характеристическое уравнение имеет вид

$$S^4 + 4S^3 - 2[\ell^2 - 2\sigma]S^2 - 4[2(1 - \sigma) + \ell^2]S + [\ell^2 [4(2 - 3\sigma) + \ell^2] + \beta^4] = 0 \quad (9)$$

Положив  $\lambda = S(S + 2)$ , получим из (9) квадратное уравнение

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0, \quad (10)$$

где

$$a = -[2(1 - \sigma) + \ell^2], \quad b = \ell^2[4(2 - 3\sigma) + \ell^2] + \beta^4,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = [2(1 - \sigma) + \ell^2] \pm \sqrt{4(1 - \sigma)^2 - 4\ell^2(1 - 2\sigma) - \beta^4};$$

после этого находим  $S_i (i=1, \dots, 4)$  из уравнений, имеющих вид

$$S^2 + 2S - \lambda_{1,2} = 0. \quad (11)$$

Решение рассматриваемого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$w(x, \theta) = (A_{1,k}x^{S_1} + A_{2,k}x^{S_2} + A_{3,k}x^{S_3} + A_{4,k}x^{S_4}) \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}. \quad (12)$$

Поскольку корни характеристического уравнения являются попарно комплексно-сопряжёнными, то, используя следующие обозначения:

$$S_{1,2} = \varepsilon \pm \delta i, \quad S_{3,4} = \varepsilon - 2 \pm \delta i, \quad (13)$$

запишем решение однородного дифференциального уравнения в виде

$$w(x, \theta) = \{x^\varepsilon [B_{1,k} \sin(\ln \delta n) + B_{2,k} \cos(\ln \delta n)] + x^{\varepsilon-2} [B_{3,k} \sin(\ln \delta n) + B_{4,k} \cos(\ln \delta n)]\} \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}. \quad (14)$$

Аналогичным образом определяются решения для ортотропной пластины; в этом случае в квадратном уравнении (10)  $a$  и  $b$  принимают следующие значения:

$$a = \frac{1}{2}[-3 - n^2 - 2\ell^2(c_0 + \sigma) + 4\sigma], \quad b = \ell^2[6(c_0 - \sigma) + n^2(2 + \ell^2)] + \beta^4. \quad (15)$$

Решение однородного дифференциального уравнения имеет также вид (12), в котором  $S_i (i=1, \dots, 4)$  следует определять с учётом (15).

Далее перейдём к решению задачи о действии на конструкцию внешних нагрузок, передающихся через колонны. Будем рассматривать это влияние как действие системы сосредоточенных сил. Для этого определим функции Коши, в частности  $Z_{4,k}(x_1; x)$ , и функции влияния, в частности  $w_{4,k}(x_1; x)$ , свойства которых описаны в [1], [6], [7]. Используя определители Вандермонда и формулы Крамера, получим:

$$Z_{4,k}(x_1; x) = \frac{1}{4\delta\eta(\eta^2 + \delta^2)} \left\{ -x_1^{-\eta} x^{\eta-1} \{[\delta\gamma(x_1) + \eta\alpha(x_1)]\gamma(x) - [\eta\gamma(x_1) - \delta\alpha(x_1)]\alpha(x)\} + x_1^\eta x^{-\eta-1} \{[\delta\gamma(x_1) - \eta\alpha(x_1)]\gamma(x) + [\eta\gamma(x_1) + \delta\alpha(x_1)]\alpha(x)\} \right\}, \quad (16)$$

где  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$  и  $\eta$  определены зависимостями:

$$\sin(\ln \delta x) = \alpha(x), \quad \cos(\ln \delta x) = \gamma(x), \quad \eta = \varepsilon + 1. \quad (17)$$

Фундаментальная функция, служащая для учёта влияния поперечных сил для изотропной пластины, имеет вид

$$w_{4,k}(x_1; x) = -\frac{1}{D(x_1)} Z_{4,k}(x_1; x). \quad (18)$$

Для ортотропной пластины она определяется выражением

$$w_{4,k}(x_1; x) = -\frac{1}{n_2 D(x_1)} Z_{4,k}(x_1; x). \quad (19)$$

Предположим, что на пластину, имеющую форму кругового прямоугольника, ограниченного внутренней дугой радиуса  $a_0$  и внешней дугой радиуса  $a$ , действует по дуге радиуса  $x_1$  равномерно распределённая нагрузка  $Q$ , имеем  $a_0 < x_1 < a$ . При  $a_0 \leq x \leq x_1$  прогибы пластины определяются по формуле (12) или (14).

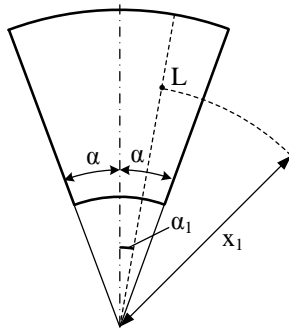


Рис. 1. Действие на пластину сосредоточенной силы, точка приложения которой не лежит на биссектрисе.

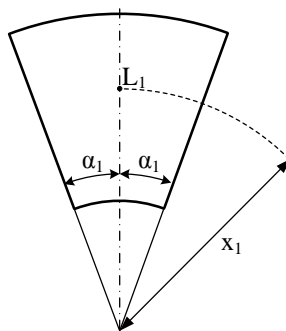


Рис. 2. Действие на пластину сосредоточенной силы, точка приложения которой лежит на биссектрисе.

Запишем выражение для прогибов при  $x_1 < x \leq a$ :

$$w(x, \theta) = w_1(x, \theta) + Qr_0^3 \sum_{k=1}^{\infty} w_{4,k}(x_1, x) \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}. \quad (20)$$

Здесь постоянные  $A_{i,k} (i=1, \dots, 4)$  находятся из условий на дуговых опорах.

Перейдём к рассмотрению действия сосредоточенной силы. Для этого разложим нагрузку  $q(\theta)$ , приложенную по длине дуги окружности, не совпадающей с контуром, в ряд

$$q(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}, \quad (21)$$

тогда получим:

$$a_k = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} q(\theta) \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha} d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha} d\theta}. \quad (22)$$

Производя вычисления, получим, что интеграл, стоящий в знаменателе (22), равен  $\alpha$ . Интеграл, находящийся в числителе (22), зависит от вида внешней нагрузки. Таким образом, имеем:

$$a_k = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} q(\theta) \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha} d\theta}{\alpha}. \quad (23)$$

Пусть нагрузка, действующая на пластину, представляет собой сосредоточенную силу  $P$ , точка приложения которой  $L$  не лежит на биссектрисе (рис. 1).

Тогда, учитывая (23), получим следующее выражение для прогибов при  $x > x_1$ :

$$w(x, \theta) = w_1(x, \theta) + Pr_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi(\alpha_1 + \alpha)}{2\alpha} \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}}{\alpha} w_{4,k}(x_1, x) \quad (k=1,2,3\dots) \quad (24)$$

Если на пластину действует сосредоточенная сила  $P$ , точка приложения которой лежит на биссектрисе (рис. 2), то прогибы определяются следующим образом:

$$w(x, \theta) = w_1(x, \theta) + Pr_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi(\alpha + \theta)}{2\alpha}}{\alpha} w_{4,k}(x_1, x) \quad (k=1,3,5\dots). \quad (25)$$

Рассмотрим случай, когда пластина загружена нагрузкой  $q$ , равномерно распределённой по дуге длиной  $2\alpha_1 x_1$  (рис. 3)

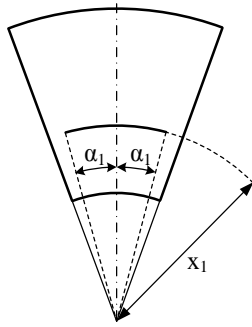


Рис. 3. Действие на пластину нагрузки, равномерно распределённой по дуге.

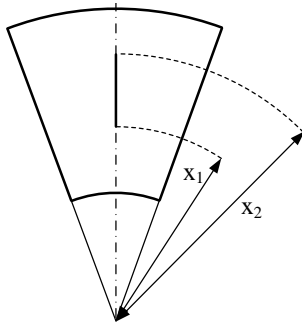


Рис. 4. Действие на пластину нагрузки, равномерно распределённой по части радиуса.

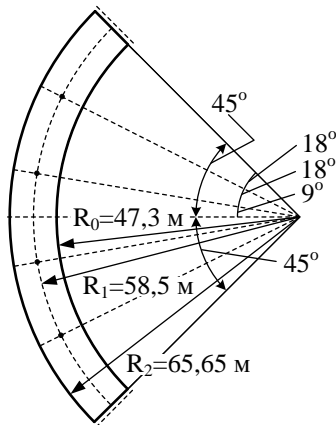


Рис. 5. Пластина, имеющая форму кругового прямоугольника.

Тогда выражение для прогибов с учётом (23) имеет вид

$$w(x, \theta) = w_1(x, \theta) + \frac{4qr_0^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \sin \frac{k\pi\alpha}{2\alpha} \sin \frac{k\pi(\theta + \alpha)}{2\alpha} w_{4,k}(x_1, x) \quad (k=1,3,5\dots). \quad (26)$$

Далее можно изучить действие нагрузки  $q$ , равномерно распределённой по части радиуса (рис. 4). Для получения решения в этом случае следует использовать зависимость (25), интегрируя второй член.

Рассмотрим пример расчёта пластины с жёсткостью (1), лежащей на упругом винклеровском основании и имеющей форму кругового прямоугольника. Конструкция находится под действием нагрузки, передающейся на неё через четыре колонны. Размеры показаны на рис. 5. Через каждую из колонн на пластину передаётся нагрузка  $P = 8000$  кН. Дуговые края имеют следующие условия закрепления: край  $x = R_0 = 47,3$  м - защемлён, край  $x = R_0 = 65,65$  м - свободен. Радиальные края опёрты шарнирно.

Определяются радиальные и тангенциальные изгибающие моменты.

В расчётах принято, что угол  $2\alpha = 90^\circ$ ; пластина находится под действием четырех равных и равноотстоящих сил  $P$ , точки приложения которых находятся на окружности с радиусом  $R_0 = 58,5$  м. На внутреннем контуре толщина пластины равна 1,1 м, на наружном контуре – 1,75 м.

При расчёте принято: модуль упругости  $E = 29 \cdot 10^6$  кН/м<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона  $\sigma = 1/6$ ; коэффициент постели  $c = 5000$  кН/м<sup>3</sup>;  $r_0 = 65,65$  м.

В таблице 1 приведены величины изгибающих моментов  $M_r$  и  $M_\theta$ , изменяющиеся в окружном направлении на внутреннем контуре.

Таблица 1. Значения изгибающих моментов  $M_r$  и  $M_\theta$  на внутреннем контуре

$\theta$	0	$\pi/16$	$\pi/8$	$3\pi/16$	$\pi/4$
$M_r$ , кНм/м	3263	3012	1936	1112	0
$M_\theta$ , кНм/м	544	476	305	179	47

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коренева Е.Б.** Аналитические методы расчёта пластин переменной толщины и их практические приложения. М. : АСВ, 2009. 237 с.
2. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Обобщение решения Конуэя на некоторые задачи статики и колебаний круглых пластин, сделанных из ортотропного материала // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. № 6. С. 31-35.
3. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины переменной толщины, лежащей на упругом основании // Вестник МГСУ. 2011. № 8. С. 156-159.
4. **Гросман В.Р.** Неосесимметричные задачи статики и колебаний круглых ортотропных и изотропных пластин // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. № 2. С. 26-30.
5. **Marcus G.** Kreis und Kreisringplatten unter Antisymmetrischer Belastung. Budapest, Academiai Kiado, 1973, 294 p.
6. **Koreneva E.B.** Supports of high-rise structures with circular base // Proc. of IASS Symposium 1995 – Spatial Structures: Heritage, Present and Future. Milan, Italy, vol. 2, pp. 1345-1352.
7. **Koreneva E.B.** The flexure of orthotropic and isotropic semi-infinite rectangular plates of varying thickness subjected to an action of discontinuous loading // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2005, vol. 1, Issue 2, pp. 43-49.

Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»), 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,  
e-mail: ipm@mgsu.ru.

Elena B. Koreneva, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (MGSU), 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation,  
e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru;

Valerij R. Grosman, Assistant Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (MGSU), 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation,  
e-mail: ipm@mgsu.ru.

---

Коренева Елена Борисовна, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»), 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,  
e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru;

Гросман Валерий Романович, старший преподаватель кафедры информатики и прикладной математики,

## КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ДИНАМИКЕ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕД

*С.В. Кузнецов*

Институт проблем механики Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Дается обзор математических моделей и методов, применяемых в динамике гранулированных сред при моделировании и исследовании процессов циклического нагружения, формирования гистерезисных петель, а также при исследовании распространения волновых фронтов.

**Ключевые слова:** гранулированная среда, циклическое нагружение, пластичность, гиперупругость

## CONTINUUM MODELS IN DYNAMICS OF GRANULAR MATERIALS

*Sergey V. Kuznetsov*

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Mathematical models and methods used in dynamics of granular materials are reviewed, with emphasis to modeling cyclic loadings, forming hysteresis loops, and propagation of wave fronts.

**Keywords:** granular material, cyclic loading, plasticity, hyperelasticity

Гранулированные материалы представляют собой один из самых распространенных классов материалов, включающего в себя как материалы естественного происхождения (примером могут служить всевозможные виды грунтовых и скальных пород, включая песок, глину, илистые и лессовые грунты и др.), а также многие виды материалов искусственного происхождения.

Далее анализируются методы и подходы, применяемые для построения определяющих соотношений при решении динамических задач механики гранулированных сред.

Ниже, в порядке общности, будут рассматриваться гиперупругие, упругие, гипоупругие, упруго-пластические модели. В большинстве из рассматриваемых в обзоре моделей предполагается, что деформации – инфинитезимальные.

### 1. УПРУГИЕ МОДЕЛИ

Эти модели основаны на концепции обратимости (или инкрементальной обратимости) соотношений между напряжениями и деформациями.

*1.1. Гиперупругие модели.* В этих моделях связь между напряжениями и деформациями задается уравнением состояния вида

$$\sigma = \lambda(I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon})I_{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu(I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon}) \varepsilon \quad (1)$$

где константы Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  являются функциями инвариантов тензора деформаций

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon} &\equiv \text{tr}(\varepsilon), & II_{\varepsilon} &\equiv \frac{1}{2}(I_{\varepsilon}^2 - \varepsilon \cdot \varepsilon), \\ III_{\varepsilon} &\equiv \det(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2)$$

Наряду с инвариантом  $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  применяют также инварианты

$$\begin{aligned} II_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\sim} &\equiv \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 - 2II_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ II_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\approx} &\equiv I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 - 3II_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(3\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2) \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнении состояния (1)  $\mathbf{I}$  - единичная диагональная матрица. В дальнейшем предполагается, что энергия деформирования среды, определяемой уравнением состояния (1), - положительно определенная. Это накладывает следующие ограничения на константы Ламе

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad (4)$$

Подстановка определяющих соотношений (1) в уравнения движения с учетом линеаризованных соотношений Коши, дает уравнения Ламе в терминах перемещений

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla_x \operatorname{div}_x \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \mathbf{u} + \\ + (\nabla_x \lambda) \operatorname{div}_x \mathbf{u} + \\ + \nabla_x \mu \cdot (\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^t) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5)$$

где, ввиду (1)

$$\begin{aligned} \nabla_x \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \nabla_x I_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \lambda}{\partial II_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \nabla_x II_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ + \frac{\partial \lambda}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \nabla_x III_{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (6)$$

Градиент  $\nabla_x \mu$  определяется аналогично.

В дополнение к условию (1) для гиперупругого изотропного материала требуется существование скалярного потенциала  $\Psi(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ , такого, что [1]

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (7)$$

При учете соотношений (2), условие (7) может быть представлено в виде [2]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_{\boldsymbol{\varepsilon}}} (I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}) + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon} + II_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнение выражений (1) и (8) дает представление упругих констант в терминах гиперупругого потенциала

$$\begin{aligned} \lambda(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\partial \Psi}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} II_{\boldsymbol{\varepsilon}} I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$2\mu(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}}) = -\frac{\partial \Psi}{\partial II_{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} (\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} - I_{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

Условия (9) накладывают ограничения на потенциал  $\Psi$ . В частности, поскольку константы Ламе, в предположении их непрерывной зависимости от инвариантов, должны быть ограничены при  $I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow 0$  при  $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ , из (9) вытекают следующие асимптотические оценки

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} = O(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow 0; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} = O(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} = O(III_{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad III_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10)$$

*Замечания* 1. а) Надо отметить, что, если  $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  может обращаться в нуль при некотором отличном от нуля тензоре  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , то инвариант  $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\sim}$ , совпадая с шуровской нормой, уже в отличен от нуля и положителен при любом ненулевом действительном тензоре  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Инвариант  $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\approx}$  положителен при любом симметричном тензоре  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , отличном от  $c\mathbf{I}$ , где  $c \neq 0$  - произвольное действительное число.

б) Уравнения движения в форме (5) одинаковы для упругих и гиперупругих изотропных сред.

в) Уравнения (5) показывают, что в среде с определяющими уравнениями (1) распространение продольной и поперечной волн вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \chi(r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)) \quad (11)$$

где  $\mathbf{m}$  - векторная амплитуда  $r$  - волновое число,  $\mathbf{n}$  - волновая нормаль, а  $c$  - скорость распространения,

вообще говоря, зависит от волновой функции  $\chi$ , в отличие от изотропной упругой среды с  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ , для которой скорости инвариантны по отношению к виду волновой функции  $\chi$  [3]. Действительно, для динамического поля смещений (11) тензор деформаций имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{r\chi'}{2} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \quad (12)$$

В случае продольной волны  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  тензорные инварианты в (2) представимы в виде

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = r\chi', \quad II_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad III_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (13)$$

В условиях (11) - (13) уравнения движения (5) дают

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \chi' \quad (14)$$

Для поперечной волны ( $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) тензорные инварианты (2) уже другие

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad II_{\boldsymbol{\varepsilon}} = -r\chi', \quad III_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (15)$$

Из уравнений (11), (15), по аналогии с предыдущим случаем, получаем скорость поперечной волны

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial III_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \chi' \quad (16)$$

При решении задач динамики гранулированных сред гиперупругие модели применяются весьма часто [4-10], причем в большинстве этих работ для построения решений использовалась концепция разномодульности, в аналогичном контексте применявшаяся в [11-13] с использованием упругого потенциала вида

$$\Psi(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \equiv \alpha I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + \beta II_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \gamma I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \sqrt{II_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (17)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - упругие постоянные, не зависящие от инвариантов  $I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , где  $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  определен формулой (3).

Введение параметра  $\gamma$  в потенциал (17) позволяет учесть зависимость свойств среды от знака первого инварианта.

Отметим также, что с помощью экспоненциально убывающих потенциалов вида

$$\begin{aligned} \Psi(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \Psi_1(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}}) (1 - \exp(-\chi(II_{\boldsymbol{\varepsilon}}))) \\ \chi(II_{\boldsymbol{\varepsilon}}) &\rightarrow 0 @ II_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow 0 \\ \chi(II_{\boldsymbol{\varepsilon}}) &\rightarrow \infty @ II_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\Psi_1(I_{\boldsymbol{\varepsilon}}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}})$  - некоторый потенциал, могут исследоваться среды с ниспадающей кривой деформирования [14].

*1.2. Упругие модели.* Упругие модели в случае изотропной среды при инфинитезимальных деформациях определяются законом состояния

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(I_{\boldsymbol{\sigma}}, II_{\boldsymbol{\sigma}}, III_{\boldsymbol{\sigma}}) I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} + 2\mu(I_{\boldsymbol{\sigma}}, II_{\boldsymbol{\sigma}}, III_{\boldsymbol{\sigma}}) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (19)$$

Предполагается, что неравенство (4), обеспечивающее положительность энергии деформирования, выполняется.

По аналогии с (5), линейризованное уравнение движения в перемещениях представимо в виде

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla_x \operatorname{div}_x \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \mathbf{u} + \\ + \frac{1}{\rho} \nabla_x \lambda \cdot \operatorname{div}_x \mathbf{u} + \\ + \frac{1}{\rho} \nabla_x \mu \cdot (\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T) + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (20)$$

Надо отметить, что, наличие слагаемых, содержащих градиенты упругих констант существенным образом, сужает круг аналитических решений: даже для безграничной среды получить фундаментальное решение уравнений (10) в замкнутом виде не удалось. Однако, с помощью главного символа этих уравнений

$$A(\boldsymbol{\xi}, \omega) \equiv 4\pi^2 \left( \frac{\lambda + \mu}{\rho} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + \left( \frac{\mu}{\rho} |\boldsymbol{\xi}|^2 - \omega^2 \right) \mathbf{I} \right) \quad (21)$$

может быть построен параметрикс [15]

$$E(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} (f_1 \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + f_2 \mathbf{I}) \quad (22)$$

где

$$f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = -\frac{\lambda + \mu}{\rho} \left( \frac{\mu}{\rho} |\boldsymbol{\xi}|^2 - \omega^2 \right)^{-1} \times \\ \times \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} |\boldsymbol{\xi}|^2 - \omega^2 \right)^{-1} \quad (23) \\ f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \left( \frac{\mu}{\rho} |\boldsymbol{\xi}|^2 - \omega^2 \right)^{-1}$$

Далее, с помощью итерационного процесса по параметриксу (22) может быть построено фундаментальное решение для безграничной среды [15].

Несмотря на очевидную большую общность концепции упругой среды, по сравнению с гиперупругой, упругие среды для описания динамики гранулированных сред применяются реже. В [16, 17] рассматривались вопросы определения скоростей распространения акустических волн в системе, состоящей из упругих шаров, взаимодействие между которыми описывается решением задачи Герца. В [18, 19] для описания разномодульной среды предлагалось использовать уравнения теории упругости анизотропного тела. При этом надо отметить, что в [18, 19] нарушался принцип изотропии, проявляющийся при смене знака у нормальных компонент тензора деформаций.

*1.3. Гипоупругие модели.* Следуя [20 – 22], скорость напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  в гипоупругой среде определяется линейной зависимостью от скорости деформаций  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . При описании процессов, связанных с большими деформациями, значительную роль в этом определении играет выбор тензора скорости напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ . Однако, в контексте инфинитезимальных деформаций, закон состояния гипоупругой изотропной

сжимаемой среды при изотермическом нагружении упрощается и может быть записан в виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(I_{\boldsymbol{\sigma}}, II_{\boldsymbol{\sigma}}, III_{\boldsymbol{\sigma}}) I_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{I} + \\ + 2\mu(I_{\boldsymbol{\sigma}}, II_{\boldsymbol{\sigma}}, III_{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (24)$$

где  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}$  (полная производная по времени совпадает с частной в инфинитезимальном случае),  $\lambda$  и  $\mu$  - функции соответствующих инвариантов тензора напряжений,  $\mathbf{I}$  - единичная матрица. Тензорные инварианты в (24) определяются по формулам (2). Сравнение законов состояния гипоупругой (24) и упругой сред (19) показывает, что единственное различие заключается в инкрементальной записи уравнений состояния для гипоупругой среды.

В [23, 24] установлено, что уравнениями (24) может определяться упруго-пластическая среда с изотропным упрочнением, причем в [25] показано, как в рамках гипоупругой среды можно описать механизм переключения законов состояния при активном нагружении и разгрузке. Отметим также, что предположение о положительности энергии деформирования дает условие, аналогичное соответствующему условию для изотропных гипоупругих моделей (4) [26]. Инфинитезимальные уравнения движения, записанные в терминах скоростей напряжений, принимают вид

$$\text{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \rho \ddot{\mathbf{v}} \quad (25)$$

где  $\rho$  плотность среды, предполагается, что  $\dot{\rho} = 0$ ;  $\dot{\mathbf{b}}$  - поле скоростей массовых сил. Подстановка уравнения состояния (24) в уравнения движения (25) с учетом линейризованных соотношений Коши

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{v} + \nabla_x \mathbf{v}^T) \quad (26)$$

дает уравнения движения в терминах скоростей

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \nabla_x \operatorname{div}_x \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \mathbf{v} + \\ & + \nabla_x \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div}_x \mathbf{v} + \\ & + \nabla_x \frac{\mu}{\rho} \cdot (\nabla_x \mathbf{v} + \nabla_x \mathbf{v}^T) + \dot{\mathbf{b}} = \ddot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\nabla_x \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \lambda}{\partial I_\sigma} \nabla_x I_\sigma + \frac{\partial \lambda}{\partial II_\sigma} \nabla_x II_\sigma \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial III_\sigma} \nabla_x III_\sigma \end{aligned} \right) \quad (28)$$

Градиент  $\nabla_x \mu$  определяется аналогичным образом.

Распространение объемных ударных волн в безграничной гипопругой среде при неинфинитезимальных деформациях исследовалось в [27, 28] с помощью построения асимптотических оценок вблизи ударного фронта. Случай слоистых гипопругих сред и гармонических SH-волн рассматривался в [29], а в [30] при тех же условиях исследовались волны Лява. Надо отметить, что дисперсионные уравнения в [29, 30] удалось получить лишь для одного частного случая гипопругой среды. В заключение заметим, что в случае больших деформаций и циклических нагрузок применение гипопругих модели может приводить к появлению в решении нефизических осцилляций [31 – 33].

*1.4. Обобщения упругих и гиперупругих моделей для учета гистерезиса.* Для учета эффекта гистерезиса, обнаруживаемого при циклических воздействиях, в рассмотренные выше упругие и гиперупругие модели вводят модификации. Эти модификации основаны, в основном, на двух подходах.

*1.4.1. Гистерезис при малом числе циклов.* Этот подход применяется для описания

эффекта Маллинса и проявляющегося при малоцикловом деформировании эластомеров [34]. В подходе используют концепции изменения пути деформирования при разгрузке и уменьшения потерь энергии упругого деформирования при повторных нагружениях за счет исчерпания способности полимеров к размягчению [35 – 38].

Основная идея, реализованная в подходах [35, 37], состоит в выборе (i) гиперупругой модели деформирования с потенциалом  $\Psi$  и (ii) введении в уравнение (7) дополнительного параметра  $\eta$ , характеризующего как вид нагружения, так и возможное изменение гиперупругого потенциала при последующих нагружениях; см. также [37, 38]. Эта концепция, фактически, повторяет идею [25] переключения законов состояния при активном нагружении и разгрузке, предложенную для гипопругих сред.

Гиперупругий потенциал в этом подходе разбивается на три составляющие [35, 38]:

$$\begin{aligned} \Psi(I_\varepsilon, II_\varepsilon, \eta) = & \eta \Psi_{dev}(II_\varepsilon) + \\ & + \Psi_{vol}(I_\varepsilon) + \psi(\eta) \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) уравнение состояния приобретает вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta \mathbf{d}_\sigma(II_\varepsilon) - p(I_\varepsilon) \mathbf{I} \quad (30)$$

где  $\mathbf{d}_\sigma$  - девиатор тензора напряжений. Таким образом, в рассматриваемом подходе возможная неупругая часть соответствует только девиаторной составляющей. Далее в этом подходе формулируется условие для определения параметра  $\eta$ :

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left( \frac{\Psi_{dev}^{\max} - \Psi_{dev}}{m + \beta \Psi_{dev}^{\max}} \right) \quad (31)$$

где  $r > 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  - материальные параметры, причем в [35] параметр  $\beta$  принимался нулевым;  $\Psi_{dev}^{max}$  - максимальное значение потенциала  $\Psi_{dev}$  за все время нагружения, на начальном этапе нагружения принимается  $\Psi_{dev}^{max} = \Psi_{dev}$ . Надо отметить, что значение  $\beta = 0$  при численных реализациях приводило к численной неустойчивости, в особенности при малых значениях  $m$ ; в дальнейшем параметр  $\beta \Psi_{dev}^{max}$  в знаменателе формулы (31) был введен для обеспечения численной устойчивости.

Одним из очевидных достоинств этого метода является возможность вариации в широких пределах параметров  $r > 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  для «подгонки» численной модели к данным экспериментальных исследований при циклических воздействиях. Недостатки этой модели являются продолжением ее достоинств: параметры  $r > 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , фактически, не связаны с физикой процесса деформирования и механизмами диссипации энергии при циклических воздействиях, а играют роль «подгоночных» параметров.

В заключение отметим, что подходы [35 – 38] для моделирования динамики гранулированных сред, по-видимому, не применялись.

*1.4.2. Гистерезис при большом числе циклов.* Для исследования процессов, связанных с моделированием гистерезиса при большом числе циклов, может использоваться методика, предложенная в [39], и развитая в работах [40, 41].

Также как и при моделировании эффекта Маллинса, в подходе [39 – 41] неупругая часть энергии ассоциируется только с девиаторной частью. Однако, если при моделировании эффекта Маллинса, неупругая часть энергии была связана с уменьшением девиаторной составляющей напряжений за счет введения масштабного

параметра  $\eta$  в формулу для потенциала (29), то в рассматриваемом подходе появление гистерезиса обусловлено (i) разбиением тензора деформаций на две составляющие

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_B \quad (32)$$

связанные с молекулярными цепочками  $A$  и  $B$ ; и (ii) предположениями о гиперупругих деформациях в цепочке  $A$  и деформациях ползучести в цепочке  $B$ :

$$\dot{\mathbf{d}}_{\varepsilon_B} = A(\lambda_B^{creep} - 1 + E)^C (II_{\sigma_B})^{m-1} \mathbf{d}_{\sigma_B} \quad (33)$$

где  $\mathbf{d}$  - соответствующие девиаторы;  $A > 0$ ,  $-1 < C < 0$ ,  $m > 1$ ,  $E$  - материальные параметры, необходимые для согласования численной модели с экспериментальными данными.

В динамике гранулированных сред рассматриваемая модель, по-видимому, не применялась из-за наличия большого числа «подгоночных» параметров, а также невозможности моделирования быстропротекающих волновых воздействий, при которых реология материала не оказывает существенного влияния.

## 2. НЕУПРУГИЕ МОДЕЛИ

Далее, анализируются методы, основанные на упруго-пластических моделях, применяемые для описания поведения гранулированных сред при инфинитезимальных деформациях.

*2.1. Общие вопросы теории малых упруго-пластических деформаций.* Как отмечено в разделе 1.3, уравнения состояния (24) может определяться произвольная упруго-пластическая среда с изотропным упрочнением, уравнения движения которой описываются уравнениями (27), (28). Однако, на практике учет упруго-пластических свойств материала

осуществляют с помощью несколько иной техники.

В основе всех обсуждаемых в этом разделе моделей, лежит разбиение (инфинитезимального) тензора деформаций на упругую ( $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ ) и пластическую ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$ ) составляющие

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \quad (34)$$

а также разложение тензоров напряжений и деформаций на шаровую и девиаторную составляющие

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \mathbf{d}_\sigma, \quad p = -\frac{I_\sigma}{3}, \quad \mathbf{d}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\theta}{3}\mathbf{I} + \mathbf{d}_\varepsilon, \quad \theta = I_\varepsilon, \quad \mathbf{d}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3}\mathbf{I} \end{aligned} \quad (35)$$

Связь между напряжениями и деформациями в упругой зоне в большинстве моделей задается соотношениями линейной теории упругости. При достижении предела упругости, появляются пластические деформации. Предельная поверхность пластичности описывается уравнением

$$f(I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma, I_{\varepsilon_{pl}}, II_{\varepsilon_{pl}}, III_{\varepsilon_{pl}}) = 0 \quad (36)$$

где  $f$  - выпуклая функция тензорных инвариантов.

В большинстве из рассматриваемых ниже моделей, функция  $f$  предполагается независимой от третьего инварианта тензора напряжений и третьего инварианта тензора пластических деформаций:

$$f(I_\sigma, II_\sigma, I_{\varepsilon_{pl}}, II_{\varepsilon_{pl}}) = 0 \quad (37)$$

С учетом разложения (35) тензоров на шаровую и девиаторную части, а также введения девиаторных норм

$$q_\sigma \equiv \|\mathbf{d}_\sigma\|, \quad q_{\varepsilon_{pl}} \equiv \|\mathbf{d}_{\varepsilon_{pl}}\| \quad (38)$$

Уравнение поверхности пластичности (37) можно записать в виде следующего уравнения

$$f(p, q_\sigma, \theta_{\varepsilon_{pl}}, q_{\varepsilon_{pl}}) = 0 \quad (39)$$

С помощью поверхности пластичности описывается состояние материала. Предполагается, что при  $f < 0$  материал работает упруго, а при  $f = 0$  находится в зоне пластичности.

*2.1.1. Теории пластического течения для идеально-пластических сред.* В отсутствие упрочнения или размягчения считают, что напряжения полностью определяются упругой частью тензора деформации

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda_e \theta_e \mathbf{I} + 2\mu_e \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad \theta_e = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \quad (40)$$

где  $\lambda_e$  и  $\mu_e$  - упругие константы Ламе.

В дополнение к уравнению состояния (40) в большинстве из рассматриваемых моделей предполагают, что функция  $f$  является либо потенциалом скорости пластических деформаций в случае ассоциированных законов течения [42]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \Lambda \nabla_\sigma f \quad (41)$$

где  $\Lambda$  - параметр, определяющий магнитуду инкремента пластических деформаций, либо, в случае неассоциированных законов течения, считается, что скорость пластической деформации может быть выражена с помощью линейных соотношений через градиент  $\nabla_\sigma f$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \Lambda \mathbf{Q} \cdot \nabla_\sigma f \quad (42)$$

где  $\mathbf{Q}(I_{\varepsilon_{pl}}, II_{\varepsilon_{pl}})$  - тензор поворота, зависящий от соответствующих инвариантов тензора пластических деформаций и

характеризующий отклонение  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}$  от градиента  $\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f$ . Угол отклонения определяется выражением

$$\gamma = \arctan \frac{\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\|\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f\|^2} \quad (43)$$

Неассоциированные законы течения могут также записываться с помощью потенциала пластического течения  $g(p, q_{\boldsymbol{\sigma}}, \theta_{\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}}, qI_{\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}})$ , причем, по аналогии с потенциалом (39)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \Lambda \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g \quad (44)$$

Заметим, что в теориях пластичности параметр  $\Lambda$  весьма часто обозначают как  $d\lambda$ .

В рассматриваемых теориях при наличии пластического течения формулируют условие согласования Гейрингер [42]

$$\dot{f} = 0 \quad (45)$$

Условие (45) выражает собой условие принадлежности инкремента напряжений к поверхности пластичности. Рассматриваемое условие в случае ассоциированного закона течения может записано в виде

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (46)$$

В случае ассоциированного закона течения (41) условие (46) вместе с условием  $\Lambda \neq 0$  (при пластическом течении) означают, что работа приращения напряжений на приращениях пластических деформаций равна нулю

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (47)$$

При неассоциированном законе течения (44) считают, что условие (47) выполняется для потенциала (44):

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (48)$$

Условие (47) позволяет определить неизвестный параметр  $\Lambda$ . Для этого уравнение состояния (40) записывается в терминах инкрементов тензоров полной и пластической деформаций (34)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underbrace{\Lambda \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}}) \quad (49)$$

где  $\mathbf{C}_e$  -четырёхвалентный тензор упругости, отвечающий изотропному упругому материалу

$$\mathbf{C}_e = \lambda_e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{I} \hat{\otimes} \mathbf{I} \quad (50)$$

В (50) знак  $\hat{\otimes}$  означает пермутацию индексов.

В уравнении (49) используется потенциал неассоциированного пластического течения (44); в случае ассоциированного закона течения с потенциалом (41) уравнение (49) очевидным образом видоизменяется. Уравнение состояния (49) является уравнением Прандтля-Рейсса [42].

Подстановка инкремента напряжений, определяемого правой частью формулы (49), в уравнение (48) дает

$$\Lambda = H(f) \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g}{\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g}; \quad (51)$$

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f < 0 \\ 1, & f = 0 \end{cases}$$

Функция Хэвисайда  $H(f)$  учитывает упругую работу материала при  $f < 0$  и пластическое течение при  $f = 0$ . В случае ассоциированного закона течения (41), в уравнении (51) градиент  $\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} g$  заменяется на  $\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f$ .

Полученное выражение для параметра  $\Lambda$  позволяет записать уравнение состояния (49) в виде

$$\dot{\sigma} = \left( \mathbf{C}_e - \frac{H(f)}{\nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\sigma} g} \nabla_{\sigma} g \otimes \nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \right) \cdot \dot{\epsilon} \quad (52)$$

где выражение в скобках может рассматриваться, как некоторый (секущий) четырехвалентный тензор упругости [39, 40]:

$$\mathbf{C}_{\text{secant}} \equiv \mathbf{C}_e - \frac{H(f)}{\nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\sigma} g} \nabla_{\sigma} g \otimes \nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \quad (53)$$

Также, как и в предыдущих уравнениях, в случае ассоциированного закона течения (41) градиент  $\nabla_{\sigma} g$  в уравнениях (52), (53) заменяется на  $\nabla_{\sigma} f$ .

*2.1.2. Теории пластического деформирования для сред с упрочнением.* В пластической зоне условие, определяющее вид нагружения, может быть представлено в виде

$$\left. \dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}_{pl} = \dot{\sigma} \cdot \underbrace{(d\lambda \nabla_{\sigma} g)}_{\dot{\epsilon}_{pl}} \right\} \geq 0 \quad (54)$$

где знак неравенства  $>$  отвечает активному нагружению в зоне с упрочнением; знак  $=$  соответствует нейтральному нагружению в случае пластического течения, или же разгрузке, осуществляемой по упругой модели (в последнем случае  $\dot{\epsilon}_{pl}=0$ ). В

обсуждаемых ниже моделях считается, что уравнения состояния при разгрузке описываются законом Гука.

Весьма часто в теориях пластичности в дополнение к уравнению (54), применяют постулат Друкера

$$\dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (55)$$

где  $\dot{\epsilon}$  - скорость полной деформации:  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{pl}$ .

В теориях пластичности с упрочнением и наличием поверхности пластичности используют, также как в теориях без упрочнения, уравнения (41) или (42) – (44), определяющие с точностью до множителя  $\Lambda$  тензор скорости пластических деформаций. В зоне упрочнения закон состояния записывают в виде линейного инкрементального уравнения упрочнения Прагера:

$$\dot{\sigma} = c \dot{\epsilon}_{pl} \quad (56)$$

где параметр  $c$  играет роль модуля упрочнения. Модуль упрочнения предполагают независимым от выбранной меры пластических деформаций. Подстановка в уравнение состояния (56) вместо  $\dot{\epsilon}_{pl}$  выражения (42) или (44) позволяет, по аналогии с (51), найти множитель  $\Lambda$  из условия согласования (46)

$$\Lambda = \frac{H(f)}{c} \times \frac{\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\sigma} g}{\nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\sigma} g}; \quad (57)$$

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f < 0 \\ 1, & f = 0 \end{cases}$$

В случае ассоциативной пластичности градиент  $\nabla_{\sigma} g$  заменяется на  $\nabla_{\sigma} f$ . Наконец, по аналогии с (52), получаем уравнение состояния упруго-пластической среды с упрочнением

$$\dot{\sigma} = \underbrace{\left( \mathbf{C}_e - \frac{H(f)}{c} \times \frac{\nabla_{\sigma} g \otimes \nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e}{\nabla_{\sigma} g \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\sigma} g} \right)}_{\mathbf{C}_{\text{secant}}} \cdot \dot{\epsilon} \quad (58)$$

В теориях пластичности с упрочнением и поверхностью пластичности (36) – (39), обычно рассматривают два типа упрочнения.

(i) Изотропное упрочнение, характеризуемое равномерным (изотропным) расширением поверхности пластичности и, соответственно, расширением упругой зоны, см. рис.1.а в зависимости от интегральной меры пластической деформации

$$q_{\varepsilon_{pl}} = \int \psi(\|\dot{\varepsilon}_{pl}\|) d\tau \quad (59)$$

где  $\psi$  - некоторая неубывающая функция,  $d\tau$  - инкремент квази времени. Интегральная мера (59) учитывается в выражении для поверхности пластичности (39). Несмотря на очевидные ограничения, связанные с «исчерпанием» пластичности при большом числе циклов и переходу в упругое состояние, модели на основе изотропного упрочнения находят применение при решении задач динамики гранулированных сред.

(ii) Кинематическое упрочнение, характеризуемое сдвигом поверхности пластичности в зависимости от меры пластической деформации, при этом расширение упругой зоны обычно исключается, рис.1.б. При записи кинематического упрочнения функцию течения  $f$ , следуя Прагеру, обычно записывают в разностном виде

$$f(\boldsymbol{\sigma} - c\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}) = 0 \quad (60)$$

где параметр  $c$  играет роль модуля упрочнения,  $c$  предполагается независимым от меры пластических деформаций. Тензор  $c\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$  определяет собой сдвиг кривой пластичности в пространстве напряжений. Этот тензор называют кинематическим, или остаточным тензором напряжений. При моделировании циклических процессов

нагружения гранулированных средах, модели с кинематическим упрочнением предпочтительнее моделей с изотропным упрочнением, в основном из-за возможности учета накопления пластических деформаций при большом числе циклов.

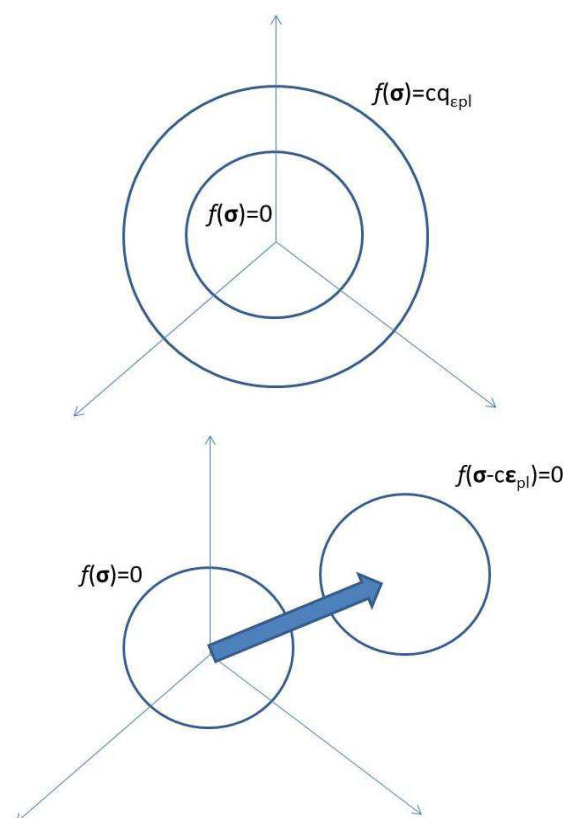


Рис.1. Деформации поверхностей пластичности в пространстве напряжений  
(а) изотропное упрочнение;  
(б) кинематическое упрочнение

Замечания 2. а) В случае, если функция  $f$  в уравнениях (36) не дифференцируема по  $\boldsymbol{\sigma}$ , скорости пластической деформации определяются на соответствующих подмножествах гладкости. б) Заметим, что в некоторых теориях пластичности, включая большинство теорий кэп-пластичности, постулат (55) на некоторых этапах деформирования может нарушаться, - это связано с необходимостью учета размягчения материала гранулированных сред, обычно учитываемого в теориях кэп-пластичности. в) Необходимо отметить [44, 45], что при численных реализациях для подавления неустойчивости, проявляющейся при смене типа уравнений с эллиптического для квазистатических процессов в упругой зоне к гиперболическому в зоне

пластического течения, равенство нулю в постулате Друкера (55) исключается. Аналогичное условие формулируется для моделей кэп-пластичности с упрочнением и размягчением в зоне кэп-пластичности.

г) В теориях пластичности главные напряжения обычно не предполагаются ранжированными по убыванию; это обстоятельство имеется ввиду в дальнейшем.

д) В некоторых работах (см. [43]) выражение (51) для параметра  $\Lambda$  при неассоциативной пластичности получают из комбинации уравнений (46) и (48), это дает

$$\Lambda = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f} \quad (61)$$

Соответствующим образом меняются и уравнения (52) и (53).

е) Надо иметь ввиду, что в моделях идеальной пластичности (без упрочнения), силовое нагружение, как правило, не рассматривается из-за невозможности описания поведения материала при напряжениях, превышающих предел текучести, однако, при кинематическом нагружении модели без упрочнения находят применение. Модели пластичности с упрочнением могут применяться как при силовом, так и при кинематическом нагружении.

ж) Для моделирования нелинейного упрочнения, в динамике пластических сред применяются модели с двумя и более поверхностями пластичности [46 – 50]. При этом между  $k$  и  $k+1$  поверхностью упрочнение описывается линейной моделью Прагера (56) с когезией (модулем упрочнения)  $c_k$ , а при достижении второй поверхности  $k+1$  упрочнение описывается модулем  $c_{k+1}$ . Предполагается, что в месте контакта поверхностей пластичности соответствующие нормали к ним совпадают и выполняется условие непрерывности пластических деформаций:

$$\Lambda_k \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f_k = \Lambda_{k+1} \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f_{k+1} \quad (62)$$

Условие (62) записано в предположении ассоциативности пластических деформаций. Надо отметить, что модели с несколькими поверхностями течения могут применяться как для изотропного, так и для кинематического упрочнения. Особенно простым оказывается использование этих моделей в сочетании с моделями Мора-Кулона и Друкера-Прагера – там, где условие равенства нормалей к соответствующим поверхностям пластичности выполняется автоматически.

## 2.2. Подходы на основе модели Мора-Кулона.

В подходах на основе модели Мора-Кулона применяют либо теорию пластичности без упрочнения, либо пластичность с изотропным упрочнением. В этих подходах в качестве девиаторной нормы (38) принимаются напряжения Треска

$$q_{\sigma} \equiv \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (63)$$

где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  - главные напряжения.

Линейные соотношения между  $p$  и  $q_{\sigma}$ , описывающие поверхность пластичности, задаются в виде

$$f(p, q_{\sigma}, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) \equiv R(\Theta, \varphi) q_{\sigma} - c (\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) - p \tan \varphi = 0 \quad (64)$$

где  $c$  - константа (когезия), характеризующая переход от упругой к пластической зоне при  $p=0$ , причем эта константа может сдвигаться, определяя собой изменение когезии в зависимости от накопленных пластических деформаций, характеризуемых соответствующей нормой  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|$ ;  $\varphi$  - угол внутреннего трения;  $R(\Theta, \varphi)$  - коэффициент, зависящий от угла внутреннего трения  $\varphi$  и угла  $\Theta$ , определяющего угол между меридиональной плоскостью и одной из осей главных напряжений (обычно  $\sigma_1$ ). Для моделей Мора Кулона коэффициент  $R(\Theta, \varphi)$  определяется следующим выражением

$$R(\Theta, \varphi) = \frac{\sin\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3} \cos \varphi} + \frac{1}{3} \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right) \tan \varphi \quad (65)$$

В случае неассоциированного закона упрочнения в этих моделях вместо угла  $\gamma$  вводится угол  $\psi$ , называемый углом дилации (растяжения) и характеризующий отклонение вектора  $\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f$  от девиаторной плоскости  $\mathbf{d}_{\sigma}$ . Обозначая нормаль к

девиаторной плоскости через  $\mathbf{v}_{d\sigma}$ , получим следующее выражение для угла дилации

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mathbf{v}_{d\sigma} \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\sigma} f}{\|\nabla_{\sigma} f\|}\right) \quad (66)$$

С учетом (64) закон деформирования в пластической зоне при активном нагружении описывается уравнениями вида (5б), а при разгрузке уравнениями теории упругости (1), причем при разгрузке обычно используются уравнения линейной теории упругости.

В заключение надо отметить, что исследование динамических процессов для пластических сред, описываемых обсуждаемыми моделями Мора-Кулона, наталкивается на определенные ограничения: (i) невозможность учета зависимости упругих модулей от объемной составляющей упругой деформации; (ii) невозможность исследования эффектов диссипации энергии, связанных с образованием гистерезиса, при силовых циклических воздействиях с большим числом циклов; (iii) невозможность моделирования эффекта Баушингера, образования «рэтчетинга», а также (iv) не учет среднего главного напряжения в норме (63). В то же время, при кинематическом циклическом нагружении и диаграмме без упрочнения эффекты образования гистерезиса могут моделироваться и в рамках рассматриваемых моделей Мора-Кулона.

*Замечания 3.* а) Наличие множителя  $\frac{1}{2}$  в девиаторной норме (63) накладывает необходимость уменьшения в два раза когезии (напряжений, отвечающих началу пластических деформаций), по сравнению с соответствующими значениями в других теориях пластичности.

б) Для того, чтобы избежать потери гладкости, появляющейся при выборе девиаторной нормы (63), при численном анализе применяют сглаживание шестиугольника, определяемого нормой (63) в девиаторной плоскости (при  $p=0$ ). При этом,

вместо сглаживания нормы (63), применяют сглаживающий коэффициент вида [45]

$$\begin{aligned} R_e(\Theta, \varphi) &= \frac{P_e(\Theta)}{Q_e(\Theta)} \times \frac{3 - \sin \varphi}{6 \cos \varphi} \\ P_e(\Theta) &= 4(1 - e^2) \cos^2 \Theta + (2e - 1)^2 \\ Q_e(\Theta) &= 2(1 - e^2) \cos \Theta + \\ &+ (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \Theta + 5e^2 - 4e} \end{aligned} \quad (67)$$

В (67) сглаживающий параметр  $e$  меняется в диапазоне  $\frac{1}{2} < e \leq 1$ , причем при  $e \rightarrow \frac{1}{2}$  сглаженная

кривая стремится к треугольнику Рэнкина.

в) В меридиональном направлении также применяют сглаживание, для того чтобы избежать потери гладкости в вершине пирамиды, появляющейся при  $\varphi > 0$ . Для этого, вместо потенциала (64) вводят гиперболический (в меридиональной плоскости) потенциал вида [43]

$$\begin{aligned} g(p, q_{\sigma}, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) &\equiv \\ &\equiv \sqrt{(R_e(\Theta, \varphi) q_{\sigma})^2 + (\varepsilon c(0) \tan \varphi)^2} - \\ &- p \tan \varphi = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

где  $\varepsilon$  - параметр сглаживания, меняющийся в диапазоне  $0 < \varepsilon < 1$ ; при  $\varepsilon \rightarrow 0$  гиперболическая аппроксимация (68) стремится к исходной (64), но со сглаживающим коэффициентом  $R_e(\Theta, \varphi)$ .

г) В качестве нормы  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|$  в рассматриваемой модели обычно принимается интегральная норма

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\| = \int_0^t \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}}{q_{\sigma}} dt \quad (69)$$

Надо отметить, что при любых нагружениях выполняется неравенство  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} \geq 0$ .

д) Обобщение моделей Мора-Кулона для учета, кэп-пластичности обсуждается в разделе, посвященном моделям Друкера-Прагера.

е) Несмотря на известные ограничения, подходы на основе рассмотренной здесь модели Мора-Кулона, применялись для исследования задач динамики гранулированных сред, в частности, в [52] моделировалась задача зарождения и начала схода

лавины; см. также [53], где рассмотрены другие классы задач динамики гранулированных сред.

**2.3. Подходы на основе модели Друкера-Прагера.** В подходах на основе модели Друкера-Прагера, также как и в подходах на основе модели Мора-Кулона, применяют либо теорию пластичности без упрочнения, либо пластичность с изотропным упрочнением. В этих подходах в качестве девиаторной нормы (38) принимаются напряжения ф.Мизеса

$$q_{\sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Pi_{\sigma}^{\approx}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Pi_d^{\approx}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i < j} (\sigma_i - \sigma_j)^2} \quad (70)$$

где  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  - главные напряжения; тензорные инварианты  $\Pi_{\sigma}^{\approx}$  и  $\Pi_d^{\approx}$  определяются по (3) с заменой тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  на  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{d}$  соответственно.

В модели Друкера-Прагера поверхность течения определяется линейными соотношениями

$$f(p, q_{\sigma}, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) \equiv q_{\sigma} - d(\|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) - p \tan \beta = 0 \quad (71)$$

В (71) роль параметров  $d$  и  $\beta$  аналогична соответствующим параметрам в теории Мора-Кулона.

В подходах, основанных на модели Друкера-Прагера, сохраняются ограничения (i) - (iii), отмеченные при обсуждении модели Мора-Кулона; ограничение (iv) очевидным образом снимается ввиду вида девиаторной нормы (70).

*Замечания 4.* а) Пластическое течение (упрочнение) определяется также, как и в теории Мора-Кулона либо ассоциированным законом течения с углом  $\psi = \beta$ , либо при неассоциированным законом течения с помощью формул (66) или с помощью введения потенциала, аналогичного потенциалу (68).

б) В меридиональной плоскости при численных реализациях и  $\beta > 0$ , также как и в методе Мора-

Кулона, осуществляется гиперболическое сглаживание вида

$$g(p, q_{\sigma}, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\|) \equiv \sqrt{q_{\sigma}^2 + l_0^2} - p \tan \beta - d' = 0 \quad (72)$$

где  $l_0 = \varepsilon(d(0) - p_t(0) \tan \beta)$ ,  $p_t(0)$  - начальная гидростатическая прочность,  $d'(q_{\sigma})$  - параметр упрочнения на текущем этапе нагружения;  $\varepsilon$  - аппроксимационный параметр, меняющийся в диапазоне  $0 < \varepsilon < 1$ ; при  $\varepsilon \rightarrow 0$  гиперболическая аппроксимация (72) стремится к исходной (71).

в) В ряде случаев модель Друкера-Прагера дополняют кэп-пластичностью, позволяющей замкнуть конус пластичности в области больших значений давлений с помощью кэп-поверхности. В области небольших и средних значений давления поверхность течения описывается уравнением (71) или сглаженным вариантом (72), а в области больших давлений кэп-поверхность описывается следующим уравнением

$$f_c \equiv \sqrt{(p - p_a)^2 + \left( \frac{Rt}{1 + \alpha - \frac{\alpha}{\cos \beta}} \right)^2} - R(d + p_a \tan \beta) = 0 \quad (73)$$

где  $R$  - параметр, определяющий форму кэп-поверхности;  $0 \leq \alpha \leq 0.05$  - малый параметр, вводимый для соединения кэп-поверхности и конуса Друкера-Прагера;  $p_a$  - параметр, определяющий давление при объемной пластической деформации:

$$p_a = \frac{p_b - Rd}{1 + R \tan \beta} \quad (74)$$

В (74)  $p_b$  - предел текучести при объемной деформации. На переходном участке между конусом и кэп-поверхностью определяется вспомогательная переходная поверхность

$$f_t \equiv \sqrt{(p - p_a)^2 + \left( t - \left( 1 - \frac{\alpha}{\cos \beta} \right) (d + p_a \tan \beta) \right)^2} - \alpha(d + p_a \tan \beta) = 0 \quad (75)$$

Аналогичным образом определяется кэп-пластичность для модели Мора-Кулона.

г) Несмотря на ограничения, присущие методу Друкера-Прагера, он применяется в задачах динамики

гранулированных сред для исследования динамических процессов при однократных ударах [54], а также при исследовании (не знакопеременных) движений гранулированной среды [55]. Модели кэп-пластичности также находят применение в механике гранулированных сред, в частности, при исследовании деформирования, учитывающего деградацию свойств материала при больших давлениях; см. следующий раздел, а также работы [56, 57].

*2.4. Подходы на основе моделей критического состояния.* В этих подходах, как правило, применяется концепция изотропного упрочнения совместно с ассоциированным законом пластического течения. Необходимость применения этих моделей диктуется появлением зон разупрочнения, наблюдаемых в большинстве гранулированных материалах при больших значениях давления.

На рис. 2 показано сечение меридиональной плоскостью поверхности пластичности в модели Кэм-клей (Cam-clay). Пластичность в этой модели описывается двумя соединенными между собой полуэллипсоидами: первый - характеризует пластичность в области докритического «сухого» состояния, когда при достижении поверхности пластичности объемная составляющая пластических деформаций уменьшается ( $\dot{\theta}_{pl} < 0$ ) и происходит упрочнение с одновременным увеличением поверхности пластичности (внешний пунктирный эллипсоид на рис.2). Второй полуэллипсоид характеризует работу материала во «влажной» области, связанной с разупрочнением. В этой зоне пластическая составляющая объемной деформации увеличивается ( $\dot{\theta}_{pl} > 0$ ) и происходит сжатие поверхности пластичности (внутренний пунктирный эллипсоид на рис.2). В месте соединения эллипсоидов (критическое состояние) объемная деформация не меняется и, при ассоциированном законе течения, пластическое деформирование происходит только за счет девиаторных составляющих ( $\dot{\theta}_{pl} = 0$ ).

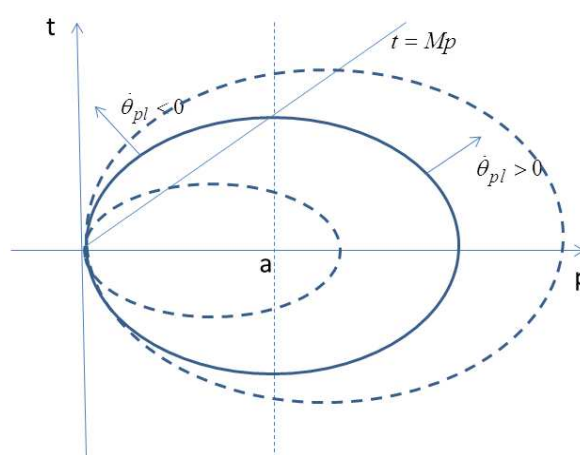


Рис.2. Меридиональное сечение поверхности пластичности для модели критического состояния Cam-clay: вертикальная пунктирная линия – критическая линия, разделяющая в начальном состоянии зоны упрочнения (слева) и размягчения (справа)

В рассматриваемых теориях уравнения поверхностей пластичности в докритической и закритической зонах описываются одним уравнением

$$f(p, q) \equiv \frac{1}{\beta} \left( \frac{p}{a} - 1 \right)^2 + \left( \frac{t}{Ma} \right)^2 - 1 = 0 \quad (76)$$

где  $\beta$  - параметр, характеризующий вид эллипсоида: для докритического состояния («сухая» зона) обычно  $\beta = 1$ , а в закритической зоне принимают  $\beta < 1$ ; параметр  $a$  представляет собой проекцию на ось  $p$  точки пересечения критической линии  $t = Mp$  с начальной поверхностью пластичности;  $M$  - тангенс угла наклона критической линии к оси  $p$ ; наконец,  $t \equiv q$  для классической Кэм-клей модели и  $t = q/g$ , где

$$g = \frac{2K}{1 + K + (1 - K)(r/q)^3} \quad (77)$$

для модифицированной модели. В последней формуле  $K$  - безразмерная материальная константа, лежащая в диапазоне  $0.778 \leq K \leq 1.0$  (случай  $K = 1$  отвечает классической Кэм-клея модели); в (77) параметр  $r = \sqrt[3]{\Pi d_\sigma}$ .

При динамических (или квазистатических) воздействиях эволюция поверхности пластичности задается с помощью кусочно-линейной аппроксимации пластической составляющей давления  $p_{pl}$  от  $\theta_{pl}$ , определяемой по экспериментальным данным, и параметром  $a$ , определяемым формулой

$$a = \frac{p_{pl}}{1 + \beta} \quad (78)$$

*Замечания 5.* а) Фактически, модели кэп-пластичности на основе модели Друкера-Прагера, рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть отнесены к моделям критического состояния, поскольку в области кэп-пластичности деформирование ассоциативно и сопровождается разупрочнением (объемная пластическая деформация в этой зоне возрастает).

б) При моделировании циклических процессов модели критического состояния приводят к тем же ограничениям, что и рассмотренные выше модели. В случае, когда материал находится в докритической зоне петли гистерезиса как при силовом, так и при кинематическом нагружении со временем исчезают. Это явление связано с разбуханием поверхности пластичности, вызванном изотропным упрочнением. В рамках этих подходов моделирование в закритической зоне многоциклового кинематического нагружения, вообще, может оказаться проблематичным из-за уменьшения поверхности пластичности.

в) Несмотря на эти ограничения, модели критического состояния находят применение при моделировании процессов нагружения (в том числе и малоцикловых) различных гранулированных сред [58 – 61]. Известны обобщенные модели критического состояния, применяемые для описания нелинейного упрочнения/разупрочнения и определяемые несколькими поверхностями пластичности, состоящими из двух и более, вложенных друг в друга полу-эллипсоидов с общей точкой в начале координат [62, 63].

г) В случае динамических нагрузок, включая циклические воздействия, модели критического состояния естественно применять в задачах, где необходимо учитывать возможное разрушение гранул при больших давлениях, приводящее к размягчению материала [64, 65].

*2.5. Подходы на основе моделей с распределенными поверхностями пластичности и без поверхностей пластичности.* В основе всех рассматриваемых в этом разделе подходов применяется либо концепция кинематического упрочнения совместно с ассоциированным законом пластического течения, либо применяется модель материала без упрочнения также с ассоциированным законом пластического течения.

*2.5.1. Микропластичность.* В качестве одномерной модели в теориях микропластичности [66, 67] обычно рассматриваются параллельно соединенные элементы Прандтля (Дженкинса). В случае бесконечного числа элементов Прандтля закон состояния может быть записан в виде

$$\sigma = \int_0^\infty E(h)(\varepsilon - \varepsilon_{pl}(h))dh \quad (79)$$

где  $E(h)$  - распределение жесткостей пружин. В большинстве рассматриваемых в теориях микропластичности случаев  $E(h) = E_0$  ( $E_0 = const$ ), тогда уравнение состояния (79) может быть представлено в виде

$$\sigma = E_0 \left( \varepsilon - \int_0^\infty \varepsilon_{pl}(h) p(h) dh \right), \quad (80)$$

$$p(h) = \frac{H(h)}{E_0}$$

где  $H(h)$  - распределение пределов текучести,  $p(h)$  - распределение безразмерных пределов текучести. Предполагается, что

$$p(h) \geq 0, \quad \int_0^{\infty} p(h)dh = 1 \quad (81)$$

Уравнение состояния необходимо дополнить условием пластического течения

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{pl}(h) &= 0, & \sigma(h) < H(h) \\ \dot{\varepsilon}_{pl}(h) &\neq 0, & \sigma(h) = H(h) \end{aligned} \quad (82)$$

Замечания 6. а) Известны обобщения моделей микропластичности (без упрочнения) с одномерного случая на случай пространственных деформаций [67, 68]. В этих работах объемная деформация предполагается упругой, а девиаторные составляющие описываются уравнениями вида

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\sigma} &= 2G_0 \left( \mathbf{d}_{\varepsilon} - \int_0^{\infty} p(h) \mathbf{d}_{\varepsilon_{pl}}(h) dh \right); \\ p(h) &= \frac{H(h)}{2G_0} \end{aligned} \quad (83)$$

где  $H(h)$  - распределение размерных пределов текучести. Уравнения (83) необходимо дополнить уравнениями пластического течения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_{\varepsilon_{pl}}(h) &= 0, & \|\mathbf{d}_{\sigma}(h)\| < H(h) \\ \dot{\mathbf{d}}_{\varepsilon_{pl}}(h) &\neq 0, & \|\mathbf{d}_{\sigma}(h)\| = H(h) \end{aligned} \quad (84)$$

б) В некоторых работах по одномерной микропластичности [69, 70] с помощью дополнительных пружин, установленных параллельно к пластическим элементам, учитывается упрочнение.

в) Модели микропластичности могут рассматриваться как модели с распределенными поверхностями течения, которые при упрочнении плавно перетекают друг в друга. В моделях без упрочнения поверхности течения должны обеспечивать непрерывность деформирования.

г) С помощью микропластических моделей удалось описать некоторые, наблюдаемые в экспериментах, особенности деформирования при циклических

процессах нагружения. В частности, с помощью исследований на одномерных моделях в [68] было показано, что (i) при циклическом деформировании гистерезисная петля не зависит от среднего напряжения; (ii) рассеяние энергии не зависит от частоты; (iii) в [67, 68] получено выражение для диссипация энергии за один цикл деформирования

$$E_{pl} = -A^{\alpha} \quad (85)$$

где  $A$  - амплитуда внешнего циклического воздействия,  $\alpha > 0$  - параметр материала. Заметим, что в литературе по теории колебаний выражение (85) известно, как формула Давиденкова для потерь энергии в гистерезисной петле; см. [71]. Еще одной особенностью моделей микропластичности является возможность точного описания формы гистерезисной петли, что делает эти модели особенно привлекательными для решения задач, связанных с исследованием динамических процессов в условиях циклических нагружений; см. рис.3.

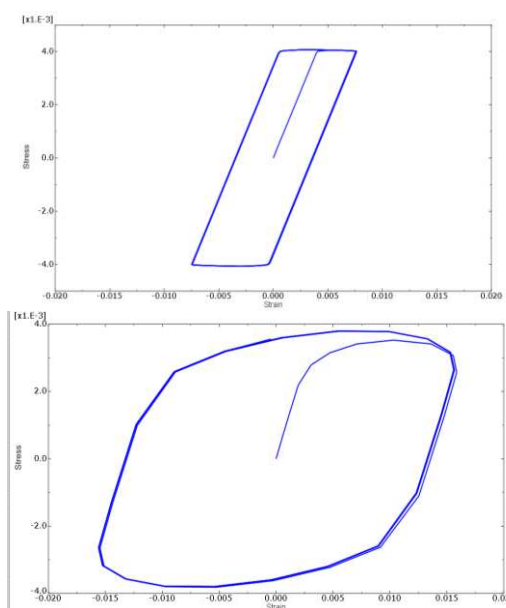


Рис.3. Гистерезисные петли  $\sigma - \varepsilon$  при одноосном нагружении с гармонической кинематической нагрузкой: определяющие соотношения Треска (слева); определяющие соотношения микропластичности для упрощенной модели «билинейного гистерезиса» (справа).

д) Известны упрощенные модели микропластичности, в которых континуальное распределение пределов текучести заменяется дискретным. В частности,

получила распространение модель «билинейного гистерезиса», которая описывается двумя параллельными элементами Прандтля с пружинами одинаковой жесткости и элементами сухого трения с различной когезией [72].

2.5.2. *Гипопластичность*. В основе этих моделей лежит, предложенная в [71] концепция представления определяющих уравнений в виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (86)$$

Можно показать, что для изотропного материала в случае малых скоростей деформаций уравнения (86) должны совпадать с уравнениями гипопластичности (24): это легко установить раскладывая правую часть (86) в ряд по  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , удерживая линейные по  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  части и учитывая ограничения, накладываемые изотропией.

Уравнения гипопластичности (86) с небольшими видоизменениями за счет введения дополнительных переменных состояния применялись в ряде исследований по моделированию гранулированных сред при различных воздействиях; см. [74, 75]. В частности, в [76] уравнения (86) были дополнены дополнительными переменными состояния и представлены в виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{f_1}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2} \left( f_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + f_3 \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 \boldsymbol{\sigma} + f_4 \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (87)$$

где  $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\text{tr}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}$  - шуровская норма двухвалентного тензора  $\mathbf{a}$ , коэффициенты  $f_k, k = 1, \dots, 4$  предполагаются функциями инвариантов тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  и переменной состояния, определяемой коэффициентом пористости  $e$

$$e = \frac{V_{\text{void}}}{V} \quad (88)$$

Надо отметить, что, как и уравнениям гипопластичности (24), уравнениям (86)

присущи те же ограничения, связанные с невозможностью моделирования петель гистерезиса при циклических процессах деформирования: при отсутствии поверхности пластичности разгрузка осуществляется по тому же пути, что и нагружение.

2.5.3. *Бародезия*. Для преодоления трудностей, связанных с отсутствием критериев активного нагружения и разгрузки, в [76, 77] предложено обобщение, которое, как утверждается в [76], хотя и не вводит в уравнения состояния (86) поверхность пластичности, позволяет в некоторых случаях нагружения учесть изменение знака нагрузки

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = h(\|\boldsymbol{\sigma}\|) \left( c_2 \exp(c_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0) + c_3 \boldsymbol{\sigma}^0 \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (89)$$

где для произвольного тензора  $\mathbf{a}$  обозначено  $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} / \|\mathbf{a}\|$  ( $\|\mathbf{a}\| \equiv \sqrt{\text{tr}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}$  обозначает шуровскую норму);  $c_k, k = 1, 2, 3$  материальные коэффициенты, зависящие от инвариантов тензора напряжений и переменной состояния (88).

Замечания 6. а) Уравнения состояния гипопластичности в форме (87) и бародезии (89) не удовлетворяют условию изотропии [3], в соответствии с которым нелинейные определяющие соотношения в зонах упругости и упрочнения (размягчения) должны иметь вид уравнений гипопластичности (24).

б) Несмотря на утверждение [76] о возможности учета характера нагружения (активное и разгрузка) в уравнениях (89), в литературе отсутствуют данные о применении уравнений состояния (89) для моделирования циклических воздействий.

2.7. *Гидродинамические модели*. Гидродинамические модели применяются для описания течения гранулированных сред в условиях, когда можно пренебречь упругой составляющей сдвиговых деформаций. Таким образом, гидродинамические модели применяются лишь для случаев, когда

пластическое течение превалирует над остальными видами деформаций.

В рассматриваемых ниже гидродинамических моделях в качестве уравнения состояния принимаются уравнения движения жидкости. В наиболее общем случае, эти уравнения должны учитывать возможную сжимаемость, а также сдвиговую и объемную нелинейные вязкости. Для изотропной жидкости уравнения состояния могут быть записаны в следующем виде [3]

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda(I_{\mathbf{d}}, II_{\mathbf{d}}, III_{\mathbf{d}}))\mathbf{I} + 2\mu(I_{\mathbf{d}}, II_{\mathbf{d}}, III_{\mathbf{d}})\mathbf{d} \quad (90)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  - объемный модуль и сдвиговая вязкость соответственно,  $\mathbf{d}$  - девиатор скоростей деформаций,  $p$  - давление.

При исследовании движений в условиях, близких к адиабатическим процессам, в уравнение состояния (90) вводится дополнительная переменная состояния, связанная с температурой. Возможно введение и других переменных состояния, например пористости, по аналогии с уравнениями (87) - (89). Далее, для описания процессов пластического течения, уравнение (90) дополняется уравнениями, связанными с введением термодинамического потенциала, обычно принимаемого равным плотности свободной энергии [3]

$$\eta = -\partial_{\theta}\Psi; \quad \varpi = -\partial_{\nu}\Psi \quad (91)$$

где  $\eta$  - плотность калории;  $\varpi$  - термодинамическое давление;  $\Psi$  - плотность свободной энергии;  $\theta$  температура;  $\nu = \|\mathbf{d}\|$  - какая-либо норма девиатора скоростей.

Замечания 7. а) В исследованиях по моделированию течения гранулированных материалов в уравнение состояния (90) вносятся упрощения. Эти упрощения связаны, в основном, с отказом от учета зависимости объемного модуля  $\lambda$  от второго и третьего

инвариантов, а зависимость от первого инварианта предполагается линейной; таким образом, для моделирования течений гранулированных материалов применяется наиболее простая модель сжимаемой жидкости вида

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda\theta)\mathbf{I} + 2\mu(I_{\mathbf{d}}, II_{\mathbf{d}}, III_{\mathbf{d}})\mathbf{d} \quad (92)$$

Вводятся ограничения и на зависимость вязкости  $\mu$  от инвариантов девиатора скоростей деформаций. В этих исследованиях гранулированные среды моделируются либо Ньютоновой жидкостью с вязкостью не зависящей от девиаторных инвариантов, либо применяются модели с вязкостью, зависящей лишь от первого и второго инварианта; см. [78 – 81].

б) Гидродинамические модели оказываются неприменимыми для описания эффектов, связанных с начальными этапами пластического течения, и, в частности, для описания циклических процессов деформирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные выше упругие, гипер- и гипопругие модели находят применение при исследовании динамических процессов в гранулированных средах, позволяя анализировать некоторые нелинейные эффекты, связанные с разномодульностью среды, например распад разрывов на фронте волны [8, 9]. Однако, с помощью этих подходов не удастся изучать образование гистерезисных петель и, связанные с этим, потери энергию. Исключение составляют подходы [34 – 40], основанные на введении специфических потенциалов, учитывающих изменение знака нагрузки, но только при одноосных нагружениях.

Среди всего многообразия неупругих моделей, рассмотренных выше и применяемых для описания деформирования гранулированных сред, модели микропластичности без упрочнения, позволяют получить наиболее реалистичные результаты с точки зрения описания динамических циклических процессов. Это, в первую очередь, связано с возможностью моделирования петель гистерезиса,

максимально точно повторяющих экспериментальные данные.

В то же время, надо отметить, что в рассмотренных моделях микропластичности отсутствуют механизмы описания более тонких эффектов. Отметим, следующие эффекты, возможность учета которых, отсутствует в моделях микропластичности: (i) эффект Мэйзинга [82], наблюдаемый при деформировании некоторых полимерных материалов, и состоящий в совмещении верхних ветвей гистерезисных петель, отвечающих различным амплитудам нагружений; заметим, что этот эффект удается учесть в специфических методах гипопругости, применяющихся для моделирования эффекта Маллинса [34]; (ii) эффект «рэтчетинга» [83], проявляющийся в накоплении пластических деформаций при циклическом нагружении с замкнутым циклом; (iii) связанный с «рэтчетингом» специфический эффект размягчения [84], вызванный увеличением «рэтчетинга» при увеличении числа циклов; (iv) эффект упрочнения, вызванный уменьшением «рэтчетинга» при увеличении числа циклов. В заключение отметим, что перечисленные эффекты, будучи, безусловно важными для описания циклического деформирования металлов, по-видимому, не играют столь важной роли в динамике гранулированных сред [85].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Truesdell C., Toupin R.** The classical field theories. In: *Handbuch der Physik*, vol. III/1, ed. by S. Flügge, Springer, 1960.
2. **Ericksen J.L.** Tensor Fields. In: *Handbuch der Physik*, vol. III/1, ed. by S. Flügge, Springer, 1960.
3. **Wang C.-C., Truesdell C.** Introduction to Rational Elasticity. Springer, 1973.
4. **Jackson R.** Some mathematical and physical aspects of continuum models for the motion of granular materials // In: R.E. Meyer (Ed.), *Theory of Dispersed Multiphase Flow*, Academic Press, San Diego, 1983, pp. 291-337.
5. **Nesterenko V.F.** Dynamics of Heterogeneous Materials. Springer-Verlag, New York, 2001.
6. **Nesterenko V.F. et al.** Strongly nonlinear behavior of granular chains and granular composites // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008, vol. 123, pp. 3271.
7. **Herbold E.B. et al.**, Particle size effect on strength, failure, and shock behavior in polytetrafluoroethylene-Al-W granular composite materials // *Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 104, pp. 103903 1-11.
8. **Sen S. et al.** Solitary waves in the granular chain // *Phys. Rep.*, 2008, vol. 462, pp. 21 – 66.
9. **Molinari A., Daraio Ch.** Stationary shocks in periodic highly nonlinear granular chains // *Phys. Revu* 2009, vol. E 80, pp. 056602 1-15.
10. **Sun J., Sundaesan S.** Radial hopper flow prediction using a constitutive model with microstructure evolution // *Powder Technology*, 2013, vol. 242, pp. 81–85.
11. **Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.** Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1978. № 6, с.29-34.
12. **Ломакин Е.В.** Нелинейные деформирования материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. №4, с.92-99.
13. **Маслов В.П., Мосолов П.П.** Общая теория решений уравнений движения разномодульной упругой среды // *ПММ*, 1985, т.49, с. 419-437.
14. **Volokh K.Y.** Hyperelasticity with softening for modeling materials failure // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, , 20076 vol.55, pp. 2237-2264.
15. **Kuznetsov S.V.** Direct boundary integral equation method in the theory of elasticity, *Quart. Appl. Math.*, 2005 **63**, 455-467.

16. **Norris A.N., Johnson D.L.** Nonlinear elasticity of granular media // *J. Appl. Mech.*, 1997, vol. 64, pp. 39–49.
17. **Coste C., Gilles B.** On the validity of Hertz contact law for granular material // *European Physical Journal B*, 1999, vol. 7(1), pp. 155–168.
18. **Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.** Основные уравнения теории упругости для материалов, разнo сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Инженерный журнал. МТТ*. 1966. N2. - с. 44-53.
19. **Амбарцумян С.А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
20. **Truesdell C.** The simplest rate theory of pure elasticity // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, pp. 123–132.
21. **Truesdell C.** Hypo-elasticity // *J. Rat. Mech. Anal.*, 1955, vol. 4, pp. 83–133, 1019–1020.
22. **Truesdell C.** Remarks on hypo-elasticity // *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1963, vol. B67, pp. 141–143.
23. **Thomas T.Y.** Combined elastic and Prandtl-Reuss stress-strain relations // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 1955, vol. 41, pp. 720–726.
24. **Green A.E.** Hypo-elasticity and plasticity // *Proc. Roy. Soc. London*, 1956, vol. A234, pp. 46–59.
25. **Gurtin M.E.** On the hypoelastic formulation of plasticity using the past maximum of stress // *ASME J. Appl. Mech.*, 1983, vol. 50, pp. 894–896.
26. **Bernstein B., Ericksen J.L.** Work functions in hypo-elasticity // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 396–409.
27. **Varley E., Dunwoody J.** The effect of non-linearity at an acceleration wave // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, pp. 17 – 28.
28. **Nariboli G.A., Juneja B.L.** Wave propagation in an initially stressed hypo-elastic medium // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1971, vol. 6, pp. 13-25.
29. **Chandrasekharaiah D.S.** On hypo-elastic transverse surface waves in an internal stratum // *Applied Scientific Research*, 1976, vol.32, pp. 347-353.
30. **Chandrasekharaiah D.S.** On Love waves in a stratified hypo-elastic solid with material boundary // *Proc. Indian Acad. Sci., Sec. A*, 1977, vol. 86, pp. 383-391.
31. **Szabo L., Balla M.** Comparison of some stress rates // *Int. J. Solids Struct.* 1989, vol. 25, pp. 279–297.
32. **Kleiber M.** On errors inherent in commonly accepted rate forms of the elastic constitutive law // *Arch. Mech.* 1986, vol. 38, pp. 271–279.
33. **Simo J.C., Pister K.S.** Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*. 1984, vol. 46, pp. 201–215.
34. **Mullins L.** Softening of rubber by deformation // *Rubber Chemistry and Technology*, 1969, vol. 42, pp. 339 – 362.
35. **Ogden R.W., Roxburgh D.G.** A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1999, vol. 455, pp. 2861–2877.
36. **Ogden R.W.** Pseudo-elasticity and stress softening // In: *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*, edited by Y. B. Fu and R. W. Ogden Cambridge University Press, Cambridge, 2001, pp. 491–522.
37. **Horgan C.O., Saccomandi G.** Phenomenological hyperelastic strain-stiffening constitutive models for rubber // *Rubber Chem. Technol.*, 2006, vol.73, pp. 152–169.
38. **De Tommasi D. Puglisi G., Saccomandi G.** A micromechanics-based model for the Mullins effect // *J. Rheol.*, 2006, vol.,50 pp. 495-512.
39. **Arruda, E.M., M.C. Boyce.** A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, pp. 389–412.

40. **Boyce M.C., Yeh O., Socrate S., Kear K., Shaw K.** Micromechanics of cyclic softening in thermoplastic vulcanizates // *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, pp. 1343–1360.
41. **Cho H., Renaud G., Rinaldi R.G., Boyce Mary C.** Constitutive modeling of the rate-dependent resilient and dissipative large deformation behavior of a segmented copolymer polyuria // *Soft Matter*, 2013, vol. 9, pp. 6319–6330.
42. **Bruhns O.** The Prandtl-Reuss equations revisited // *Z. angew. Math. Mech.*, 2014, vol. 94, pp. 187–202.
43. **Rakić D., Živković M., Slavković R., Kojić M.** Stress integration for the Drucker-Prager material model without hardening using the incremental plasticity theory // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2008, vol. 2, pp. 80–89.
44. **Kukudzhanov V.N.** Numerical continuum mechanics. de Gruyter Studies in Mathematical Physics 15. Berlin: de Gruyter, 2013.
45. **Belytschko T. et al.** *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, 2 edition. Wiley, 2014
46. **Dafalias Y., Popov E.** A model of nonlinearly hardening materials for complex loading // *Acta Mechanica*. 1975, vol. 21, pp. 173–192.
47. **Chaboche J.** Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic visco-plasticity // *International Journal of Plasticity*. 1989, vol. 5, pp. 247–302.
48. **Chaboche J., Cailletaud G.** Integration methods for complex plastic constitutive equations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996, vol. 133, pp. 125–155.
49. **Wallin M., Ristinmaa M.** Deformation gradient based kinematic hardening model // *International Journal of Plasticity*. 2005, vol. 21, pp. 2025–2050.
50. **Pietryga M., Vladimirov I., Reese S.** A finite deformation model for evolving flow anisotropy with distortional hardening including experimental validation // *Mechanics of Materials*. 2012, vol. 44, pp. 163–173.
51. **Menetrey Ph., Willam K.J.** Triaxial failure criterion for concrete and its generalization // *ACI Struct. J.*, 1995, vol. 92, pp. 311–318.
52. **Rajchenbach J.** Flow in powders: From discrete avalanches to continuum regime // *Phys. Rev. Letters*. 1990, vol. 65, pp. 2221–2224.
53. **Nedderman R.M.** *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge Univ. Press, 2005. ISBN-10: 0521404355.
54. **Borja R.I., Sama K.M., Sanz P.F.** On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol. 192, pp. 1227–1258.
55. **Rycroft Ch.H., Kamrin K., Bazant M.Z.** Assessing continuum postulates in simulations of granular flow // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, vol. 57, pp. 828–839.
56. **Krenk S.** 2000. Characteristic state plasticity for granular materials, Part I: Basic theory // *Int. J. Solids Structures* 2000, vol. 37, pp. 6343–6360.
57. **Khoei A.R., Azami A.R.** A single cone-cap plasticity with an isotropic hardening rule for powder materials // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, vol. 47, pp. 94–109.
58. **Potts D.M., Gens A.** The effect of the plastic potential in boundary value problems involving plane strain deformation // *Int. Jnl. Num. Anal. Meth. Geomech.* 1984, vol. 8, pp. 259–286.
59. **Krenk S.** A generalized Cam-Clay model // *UTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials Solid Mechanics and Its Applications*. 2002, volume 87, pp. 33–38.

60. **Borja R.J.** Cam-Clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004, vol.193, pp. 5301–5338.
61. **Khoei A.R., Azami A.R.** A single cone-cap plasticity with an isotropic hardening rule for powder materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, vol. 47, pp. 94–109.
62. **Das A., Nguyen G.D., Einav I.** Compaction bands due to grain crushing in porous rocks: A theoretical approach based on breakage mechanics // *Journal of Geophysical Research*, 2011, vol. 116, pp. 1–14.
63. **Das A., Nguyen G.D., Einav I.** The propagation of compaction bands in porous rocks based on breakage mechanics // *Journal of Geophysical Research*, 2012, vol. 118, pp. 2049–2066.
64. **Lade P.V., Yamamoto J.A., Wopp P.A.** Significance of particle crushing in granular materials // *J. Geotech. Engineering*. 1996, vol.122, pp. 309–316.
65. **Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P.** A critical state soil model for cyclic loading // In: *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads*. Pande G.N. and Zienkiewicz O.L. (editors). Wiley, 1982, pp. 219 – 252.
66. **Ишлинский А.Ю.** Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел // *Изв. АН СССР. ОТН*. 1944, №9. с. 583–590.
67. **Пальмов В.А.** Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
68. **Пальмов В.А.** Колебания упруго-пластических тел // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1971. №4.
69. **Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.** Об учете микронапряжений в теории пластичности // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1968, №3. с. 82–91.
70. **Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.** О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов // *ПММ*, 1968, № 5. с. 78–89.
71. **Давиденков Н.Н.** О рассеянии энергии при вибрациях // *ЖТФ*, 1938, т.8, №6. с. 483–499.
72. **Karnopp D, Scharon TD.** Plastic deformation in random vibration // *Journal of the Acoustical Society of America*, 1966, vol. 39(6), pp. 1154–1161.
73. **Kolymbas D.** A generalized hypoelastic constitutive law // In: *Proceedings of the eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1985, vol. 5, page 2626.
74. **Gudehus G.** A comprehensive constitutive equation for granular materials // *Soils and Foundations*, 1996, vol. 36(1), pp.1–12.
75. **Wolffersdorff von P.** A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface // *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 1996, vol. 1, pp. 251–271.
76. **Kolymbas D.** Barodesy: The next generation of hypoplastic constitutive models for soils // In: G. Hofstetter (ed.) *Computational Engineering*. Springer International Publishing Switzerland, 2014, pp. 43–58.
77. **Kolymbas D.** Barodesy as a novel hypoplastic constitutive theory based on the asymptotic behaviour of sand // *Geotechnik*. 2012, vol. 35(3), pp. 187–197.
78. **Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P.** Granular solids, liquids, and gases // *Rev. Mod. Phys.*, 1996, vol. 68, pp. 1259–1273.
79. **Midi G.D.R.** On dense granular flows. *Euro. Phys. J. E.*, 2004. vol. 14, pp. 341–365.
80. **Rycroft C.H., Kamrin K., Bazant M.Z.** Assessing continuum postulates in simulations of granular flow // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, vol. 57, pp. 828–839.
81. **Khoei A.R., Mohammadnejad T.** Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: A

- comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams // *Computers and Geotechnics*. 2011, vol. 38, pp. 142–166.
82. **Hashiguchi K.** Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models // *International Journal of Plasticity*. 1993 vol. 9(6), pp. 721-748.
83. **Halama R.** A Modification of Abdel Karim-Ohno model for ratcheting simulations // *Technical Gazette*. 2008, vol. 15 (3), pp. 3-9. ISSN 1330-3651
84. **Vincent L. Calloc S., Marquis D.** A general cyclic plasticity model taking into account yield surface distortion for multiaxial ratcheting // *International Journal of Plasticity*. 2004, vol. 20, pp.1817–1850.
85. **Pande G.N., Pietruszczak S.** (Editors). *Numerical Models in Geomechanics*. Numog. CRC Press, 1997. 766 p. ISBN-13: 978-9054108863
- 

Кузнецов Сергей Владимирович, профессор, доктор физико-математических наук; Институт проблем механики РАН, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101; e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Sergey V. Kuznetsov, Professor, DrSc., Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 119526, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow, Russia, e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

# КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЕ И ПРИ ОТКАЗАХ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

*Р.Л. Лейбов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье представлена методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления при безотказной работе и при отказах исполнительных устройств системы управления. Матрицы статических и динамических линейных моделей оцениваются по переходным процессам координат состояния, первых производных координат состояния и координат управления нелинейной модели. При оценивании матриц динамических линейных моделей с помощью нелинейного программирования используются дополнительные ограничения для того, чтобы их собственные значения были различными, вещественными и отрицательными. Приведены результаты применения предлагаемой методики для построения кусочно-линейной модели авиационного газотурбинного двигателя при безотказной работе и при отказах исполнительного устройства системы управления.

**Ключевые слова:** нелинейный объект, методика построения кусочно-линейной модели, безотказная работа и работа при отказах исполнительных устройств системы управления, переходные процессы координат состояния, первых производных координат состояния и координат управления нелинейной модели, оценивание матриц динамических линейных моделей с помощью нелинейного программирования

# NONLINEAR PLANT PIECE-WISE LINEAR MODEL FORMATION TECHNIQUE FOR NO-FAILURE OPERATION AND OPERATION WITH FAILURES OF CONTROL SYSTEM ACTUATOR

*Roman L. Leibov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This paper presents a nonlinear plant piece-wise linear model formation technique for no-failure operation and operation with failures of control system actuators. The matrices of static and dynamic linear models are estimated using nonlinear model state variables, first derivative state variables and control variables time responses. The dynamic linear model matrix estimation uses nonlinear programming with additional constraints providing different, real and negative eigenvalues. The results of proposed piecewise-linear model formation technique application for aircraft turbofan engine no-failure operation and operation with failures of control system actuator are presented.

**Key words:** Nonlinear plant, piece-wise linear model formation technique, no-failure operation and operation with failures of control system actuators, nonlinear model state variables, first derivative state variables and control variables time responses, dynamic linear model matrix estimation using nonlinear programming

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оценивание матричных параметров кусочно-линейной модели нелинейного объекта при безотказной работе и при отказах исполнительных устройств его системы автоматического управления (САУ) необходимо для разработки алгоритмов обнаружения, локализации, конкретизации и уменьшения влияния этих отказов.

В работе рассмотрен пример построения кусочно-линейной модели авиационного газотурбинного двигателя (ГТД), когда высота и скорость полета летательного аппарата (ЛА) равны нулю. Применение при оценивании матриц динамических линейных моделей дополнительных ограничений для того, чтобы их собственные значения были различными, вещественными и отрицательными, позволяет существенно, хотя и недостаточно повысить точность оценивания при отказах одного из исполнительных устройств САУ.

## 2. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ, ЛИНЕЙНОЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЕЙ

Пусть нелинейная модель объекта управления в замкнутой и в разомкнутой САУ имеет вид [1], [2], [3]

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\text{НЛ}}, \mathbf{u}^{\text{НЛ}}, \mathbf{w}^{\text{НЛ}}), \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\text{НЛ}}, \mathbf{u}^{\text{НЛ}}, \mathbf{v}^{\text{НЛ}}). \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{x}^{\text{НЛ}}$  — вектор состояния,  $\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$  — вектор управления,  $\mathbf{w}^{\text{НЛ}}$  — вектор внешних воздействий,  $\mathbf{v}^{\text{НЛ}}$  — вектор внешних условий,  $\mathbf{f}$  — нелинейная вещественная векторная функция. Координаты вектора состояния (переменные состояния) такого объекта управления, как например авиационный ГТД, это частоты вращения роторов, температуры и давления в различных сечениях проточной части двигателя. Координаты вектора управления (переменные управле-

ния) такого объекта это расход топлива, изменяемые геометрические характеристики проточной части двигателя, в частности, площадь критического сечения реактивного сопла и углы поворота направляющих аппаратов вентилятора и компрессора, а координаты вектора внешних воздействий (переменные внешних воздействий) это угол отклонения рычага управления двигателем (управляющее воздействие), а также высота и скорость полета (переменные внешних условий, входящие в вектор внешних условий). Постоянные управляющее воздействие и внешние условия, входящие в вектор  ${}_s\mathbf{w}^{\text{НЛ}}$ , определяют установившийся режим работы объекта в замкнутой САУ (рабочую точку), которому соответствуют вектор установившихся значений переменных управления  ${}_s\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$  и вектор установившихся значений переменных состояния  ${}_s\mathbf{x}^{\text{НЛ}}$ . Постоянные внешние условия  ${}_s\mathbf{v}^{\text{НЛ}}$  и постоянные значения переменных управления  ${}_s\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$  определяют установившийся режим работы объекта в разомкнутой САУ.

В небольшой окрестности произвольного установившегося режима  $p_1 \dots p_m$  нелинейный объект управления можно [1], [2], [3] приближенно описать с помощью линейной модели

$${}_{p_1 \dots p_m} \dot{\mathbf{x}}^{\text{ЛН}} = {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{ЛН}} + {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{ЛН}}, \quad (2.3)$$

где  ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{ЛН}}$  —  $n$ -мерный и  ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{ЛН}}$  —  $m$ -мерный векторы нормированных переменных состояния и управления в отклонениях от значений, соответствующих установившемуся режиму  $p_1 \dots p_m$ ,  $p_1 \in \{1, \dots, P_1\}$ , ...,  $p_m \in \{1, \dots, P_m\}$ .

Нормированные переменные состояния и управления в отклонениях вычисляются по формулам

$${}_{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{ЛН}} = x_i^{\text{НЛ}} - {}_{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{НЛ}} = \frac{x_i^{\text{НЛ}} - {}_{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{НЛ}}}{m x_i^{\text{НЛ}}} - \frac{{}_{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{НЛ}}}{m x_i^{\text{НЛ}}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

Кусочно-линейная модель нелинейного объекта управления при безотказной работе и при отказах исполнительного устройства

$$\begin{aligned} p_1 \dots p_m u_j^{JLn} &= u_j^{HJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} = \\ &= \frac{u_j^{HJLn}}{m_s^{HJLn}} - \frac{p_1 \dots p_m u_s^{HJLn}}{m_s^{HJLn}}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$m_s x_i^{HJLn} = \max_{p_1 \dots p_m} \left| p_1 \dots p_m x_i^{HJLn} \right|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} m_s u_j^{HJLn} &= \max_{p_1 \dots p_m} \left| p_1 \dots p_m u_j^{HJLn} \right| = \\ &= \max_{p_j} \left| p_j u_j^{HJLn} \right|, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.7)$$

поскольку

$$p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} = \begin{bmatrix} p_1 u_1^{HJLn} \\ \dots \\ p_m u_m^{HJLn} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Поскольку для установившихся значений отклонений нормированных переменных состояния и управления справедливы соотношения

$$p_1 \dots p_m x^{JLn} = p_1 \dots p_m S p_1 \dots p_m u^{JLn}, \quad (2.9)$$

$$0 = p_1 \dots p_m A p_1 \dots p_m x^{JLn} + p_1 \dots p_m B p_1 \dots p_m u^{JLn}, \quad (2.10)$$

то

$$p_1 \dots p_m S = -p_1 \dots p_m A^{-1} p_1 \dots p_m B, \quad (2.11)$$

$$p_1 \dots p_m B = -p_1 \dots p_m A p_1 \dots p_m S, \quad (2.12)$$

где  $p_1 \dots p_m S$  — матрица статической линейной модели, а  $p_1 \dots p_m A$ ,  $p_1 \dots p_m B$  — матрицы динамической линейной модели для установившегося режима  $p_1 \dots p_m$ . Набор линейных моделей для всех выбранных установившихся режимов представляет собой кусочно-линейную модель.

### 3. СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Статическая кусочно-линейная модель объекта управления представляет собой набор векторов нормированных установившихся значений управления и состояния  $p_1 \dots p_m u_s^{HJLn}$ ,  $p_1 \dots p_m x^{HJLn}$  и набор матриц статических линейных моделей  $p_1 \dots p_m S$  для всех выбранных установившихся режимов.

Пусть описание статической кусочно-линейной модели имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 \dots p_m x^{KJLn} - p_1 \dots p_m x_s^{HJLn} &= \\ &= p_1 \dots p_m S \left( p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right), \quad (3.1) \\ p_1 \dots p_m : \min &\left\| p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right\|_2, \end{aligned}$$

где область действия каждой линейной модели определяется с помощью вектора нормированных значений управления кусочно-линейной модели

$$\left\| p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right\|_2 = \sqrt{\left( p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right)^T \left( p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right)}. \quad (3.2)$$

Динамическая кусочно-линейная модель объекта управления включает в себя статическую кусочно-линейную модель и соответствующий набор матриц динамических линейных моделей  $p_1 \dots p_m A$  для всех выбранных установившихся режимов.

Пусть описание динамической кусочно-линейной модели имеет вид

$$\dot{x}^{KJLn} = p_1 \dots p_m A \left( p_1 \dots p_m x^{KJLn} - p_1 \dots p_m x_s^{HJLn} \right) + p_1 \dots p_m B \left( p_1 \dots p_m u_s^{KJLn} - p_1 \dots p_m u_s^{HJLn} \right),$$

или

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left[ \left( \mathbf{x}^{\text{КЛн}}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}}_{p_1 \dots p_m} \right)_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} \left( \mathbf{u}^{\text{КЛн}}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}_{p_1 \dots p_m} \right) \right],$$

$$p_1 \dots p_m : \min_{p_1 \dots p_m} \left\| \mathbf{u}^{\text{КЛн}}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}_{p_1 \dots p_m} \right\|_2. \quad (3.3)$$

#### 4. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Для оценивания матричных параметров линейной модели, соответствующей установившемуся режиму  $p_1 \dots p_m$ , используются переходные процессы нелинейной модели объекта в небольшой окрестности этого режима в разомкнутой САУ, то есть наборы векторов нормированных переменных состояния, их первых производных и нормированных переменных управления  $\mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_k)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k)$ ,  $\mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k)$  в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

При оценивании элементов матрицы статической линейной модели  ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S}$  переходный процесс для переменных управления в разомкнутой САУ состоит из одного или двух наборов разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из  $m$  переменных. В одном наборе прямоугольных импульсов отклонение каждой переменной управления равно разности установившихся значений этой переменной для предыдущего в соответствии с возможным переходным процессом замкнутой САУ и для рассматриваемого установившегося режима. В другом наборе отклонение каждой переменной управления равно разности установившихся значений этой переменной для рассматриваемого установившегося режима и для следующего за ним в соответствии с возможным переходным процессом замкнутой САУ. Если установившиеся значения переменной управления для рассматриваемого и соседнего установившихся режимов совпадают, то используется ближайшее установившееся

значение, которое отличается от установившегося значения для рассматриваемого режима. Элементы соответствующих столбцов матрицы статической линейной модели определяются непосредственно с помощью деления установившихся значений отклонений переменных состояния на значение соответствующего отличного от нуля отклонения переменной управления для каждого из разнесенных по времени прямоугольных импульсов [1], [2], [3]. Далее при использовании двух наборов разнесенных по времени прямоугольных импульсов определяется среднее арифметическое соответствующих значений каждого элемента матрицы статической линейной модели.

При оценивании элементов матрицы  ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A}$  динамической линейной модели используются переходные процессы в разомкнутой САУ, которые представляют собой совмещенные по времени ступенчатые воздействия, включающие в себя линейные функции времени с наклонами, соответствующими переходным процессам замкнутой САУ. Максимальное отклонение каждой переменной управления равно разности установившихся значений этой переменной для предыдущего в соответствии с возможным переходным процессом замкнутой САУ и рассматриваемого установившихся режимов. Если шаг дискретности достаточно мал, то при оценивании матричных параметров в дискретные моменты времени в силу (3.3) можно приближенно считать, что

$$\mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_{k+1}) = \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) + \Delta t {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left[ \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}} \right] + \Delta t {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} \left[ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}} \right], \quad (4.1)$$

или

Кусочно-линейная модель нелинейного объекта управления при безотказной работе и при отказах исполнительного устройства

$$\mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_{k+1}) = \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) + \Delta t \mathbf{A}^{p_1 \dots p_m} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] - \\ & \mathbf{S}^{p_1 \dots p_m} \left[ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.2)$$

Здесь  $k = 0, 1, 2, \dots$  соответствуют дискретным моментам времени  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , причем  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ , где  $\Delta t$  это шаг дискретности.

Оценивание элементов матрицы  $\mathbf{A}^{p_1 \dots p_m}$  динамической линейной модели сводится к задаче нелинейного программирования [4] вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}^{p_1 \dots p_m} : \min \\ & \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^N \left[ \dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) \right]^T \mathbf{W}(t_k) \left[ \dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) \right]} \right\} \\ & \dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}}(t_k) = \left. \begin{aligned} & \mathbf{A}^{q_1 \dots q_m} \left\{ \left[ \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] - \right. \\ & \left. \mathbf{S}^{q_1 \dots q_m} \left[ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] \right\} \left| \right. \\ & \left\| \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right\|_2 \leq \\ & \left\| \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right\|_2, \end{aligned} \right\} \\ & \dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛн}}(t_k) = \left. \begin{aligned} & \mathbf{A}^{p_1 \dots p_m} \left\{ \left[ \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] - \right. \\ & \left. \mathbf{S}^{p_1 \dots p_m} \left[ \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right] \right\} \left| \right. \\ & \left\| \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right\|_2 > \\ & \left\| \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) - \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k) \right\|_2, \end{aligned} \right\} \\ & \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_{k+1}) = \left. \begin{aligned} & \mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_k) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}}(t_k), \\ & k = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \right\}. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{W}(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$  положительно определенные весовые матрицы, матрицы

$$\mathbf{A}^{q_1 \dots q_m}, \quad \mathbf{S}^{q_1 \dots q_m},$$

$q_1 \in \{1, \dots, P_1\}, \dots, q_m \in \{1, \dots, P_m\}$  для предыдущего в соответствии с возможным переходным процессом замкнутой САУ установившегося режима и матрица  $\mathbf{S}^{p_1 \dots p_m}$  считаются известными, а  $\mathbf{x}^{\text{КЛн}}(t_0) = \mathbf{x}^{\text{НЛн}}(t_0)$ . В качестве начального приближения матрицы  $\mathbf{A}^{p_1 \dots p_m}$  используется матрица  $\mathbf{A}^{q_1 \dots q_m}$ . При оценивании используются дополнительные ограничения для того, чтобы собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^{p_1 \dots p_m}$  были различными, вещественными и отрицательными. В качестве элементов постоянной диагональной весовой матрицы используются

$$w_{ii} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \left[ \dot{x}_i^{\text{НЛн}}(t_k) - \dot{x}_i^{\text{НЛн}}(t_0) \right]^2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Процесс оценивания заканчивается, когда ограничения больше не выполняются, или при уменьшении размеров деформируемого симплекса в алгоритме метода скользящего допуска, который используется для решения задачи нелинейного программирования [4]. О качестве оценивания можно судить по достигнутому минимальному значению целевой функции в задаче (4.3), а также по величинам относительной среднеквадратической и максимальной ошибок приближения каждой из координат вектора состояния (переменных состояния)

$$\Delta_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \left[ x_i^{\text{КЛн}}(t_k) - x_i^{\text{НЛн}}(t_k) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left[ x_i^{\text{НЛн}}(t_k) - x_i^{\text{НЛн}}(t_0) \right]^2}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

$$\Delta_i = \max_{k=1, \dots, N} \left| x_i^{\text{КЛн}}(t_k) - x_i^{\text{НЛн}}(t_k) \right|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Максимальные ошибки приближения переменных состояния линейных моделей и кусочно-линейной модели используются при создании алгоритмов обнаружения, локализации и конкретизации отказов исполнительных устройств замкнутой САУ [1].

## 5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для определения матриц статической и динамической кусочно-линейных моделей по переходным процессам нелинейной термогазодинамической модели двухвального двухконтурного турбореактивного авиационного ГТД в разомкнутой системе управления.

В рассматриваемом примере высота и скорость полета ЛА (переменные внешних условий) равны нулю ( $ALT = 0$ ,  $MN = 0$ ). Четыре переменные управления ( $m = 4$ ) соответствуют расходу топлива в основной камере сгорания  $G_{то}$ , площади критического сечения реактивного сопла  $F_{кр}$ , углу поворота направляющих аппаратов вентилятора  $\varphi_{нав}$  и углу поворота направляющих аппаратов компрессора  $\varphi_{нак}$ . Пять переменных состояния объекта управления ( $n = 5$ ) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя  $n_v$ , частоте вращения компрессора двигателя  $n_k$ , давлению торможения за компрессором  $P_k^*$ , давлению торможения за турбиной  $P_t^*$  и температуре торможения за турбиной  $T_t^*$ .

Для построения кусочно-линейной модели выбраны установившиеся режимы замкнутой САУ (рабочие точки), а также установившиеся режимы разомкнутой САУ, для которых значения переменных управления и состояния близки к значениям этих переменных при переходных процессах замкнутой САУ. Пусть для нормированных переменных управления  $u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$  по количеству выбранных установившихся режимов за-

мкнутой САУ (по количеству выбранных рабочих точек)  $P_1 = 9, P_2 = 9, P_3 = 9$  и  $P_4 = 9$ . При этом

$$p_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, p_2 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \\ p_3 \in \{1,6,7,8,9\}, p_4 \in \{1,2,3,4,5,6,9\}.$$

Тогда для 9 установившихся режимов замкнутой САУ (от максимального до минимального) при соответствующих значениях угла отклонения рычага управления двигателем (управляющего воздействия)

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$$

(максимальный режим при  $\alpha_{руд} = 68^\circ$ ),

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 8989 \quad (\alpha_{руд} = 60^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 7979 \quad (\alpha_{руд} = 50^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 6966 \quad (\alpha_{руд} = 40^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 5915 \quad (\alpha_{руд} = 30^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 4914 \quad (\alpha_{руд} = 25^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 3913 \quad (\alpha_{руд} = 20^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 2912 \quad (\alpha_{руд} = 17^\circ),$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = 1111$$

(минимальный режим при  $\alpha_{руд} = 15^\circ$ ).

Выбраны также 10 установившихся режима разомкнутой САУ, для которых значения переменных управления и состояния близки к значениям этих переменных при сбросе в замкнутой САУ, то есть при переходных процессах, соответствующих изменению угла отклонения рычага управления двигателем  $\alpha_{руд}$  от значения, соответствующего максимальному режиму работы ( $\alpha_{руд} = 68^\circ$ ) до значения, соответствующего минимальному режиму работы ( $\alpha_{руд} = 15^\circ$ ). Соответствующие  $p_1 p_2 p_3 p_4$  равны 9999, 8889, 1911, 1811, 1711, 1611, 1511, 1411, 1311, 1211.

Многие из этих установившихся режимов разомкнутой САУ совпадают с режимами, для которых значения переменных управле-

ния и состояния близки к значениям этих переменных после отказов исполнительного устройства изменения площади критического сечения реактивного сопла в замкнутой САУ. Например, режим  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 9999$  совпадает с режимом замкнутой САУ после отказа исполнительного устройства изменения площади критического сечения реактивного сопла при изменении угла отклонения рычага управления двигателем от значения  $\alpha_{руд} = 60^\circ$  до значения  $\alpha_{руд} = 68^\circ$  (площадь критического сечения реактивного сопла после отказа не увеличивается от значения, соответствующего  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 8989$ , до значения, соответствующего  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$ ).

Вначале определим наборы векторов нормированных установившихся значений управления и состояния для 9 установившихся режимов замкнутой САУ:

$$\begin{aligned} {}^{9899}_s \mathbf{u}^n &= [1.0000, 0.4515, 0.0000, 0.0000]^T, \\ {}^{9899}_s \mathbf{x}^n &= [1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000]^T, \\ {}^{8989}_s \mathbf{u}^n &= [0.9442, 0.4441, -0.0893, 0.0000]^T, \\ {}^{8989}_s \mathbf{x}^n &= [0.9741, 0.9834, 0.9656, 0.9783, 0.9790]^T, \\ {}^{7979}_s \mathbf{u}^n &= [0.7713, 0.4441, -0.3741, 0.0000]^T, \\ {}^{7979}_s \mathbf{x}^n &= [0.9176, 0.9414, 0.8355, 0.8618, 0.9225]^T, \\ {}^{6966}_s \mathbf{u}^n &= [0.5724, 0.4441, -0.7402, -0.1072]^T, \\ {}^{6966}_s \mathbf{x}^n &= [0.8449, 0.8991, 0.6724, 0.7125, 0.8507]^T, \\ {}^{5915}_s \mathbf{u}^n &= [0.2880, 0.4441, -1.0000, -0.2264]^T, \\ {}^{5915}_s \mathbf{x}^n &= [0.7231, 0.8399, 0.4505, 0.4787, 0.6900]^T, \\ {}^{4914}_s \mathbf{u}^n &= [0.1864, 0.4441, -1.0000, -0.4019]^T, \\ {}^{4914}_s \mathbf{x}^n &= [0.6202, 0.7929, 0.3348, 0.3788, 0.6114]^T, \\ {}^{3913}_s \mathbf{u}^n &= [0.1301, 0.4441, -1.0000, -0.6450]^T, \\ {}^{3913}_s \mathbf{x}^n &= [0.5719, 0.7472, 0.2571, 0.3216, 0.5667]^T, \\ {}^{2912}_s \mathbf{u}^n &= [0.0824, 0.4441, -1.0000, -0.8739]^T, \\ {}^{2912}_s \mathbf{x}^n &= [0.4259, 0.7000, 0.1843, 0.2741, 0.5213]^T, \\ {}^{1111}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 1.000, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1111}_s \mathbf{x}^n &= [0.3853, 0.6623, 0.1290, 0.2295, 0.4706]^T. \end{aligned}$$

При определении наборов векторов нормированных установившихся значений управления и состояния для остальных 10 выбранных установившихся режимов будем считать заданными  ${}_s u_1^n$ ,  ${}_s u_2^n$ ,  ${}_s u_3^n$  и  ${}_s u_4^n$ :

$$\begin{aligned} {}^{9999}_s \mathbf{u}^n &= [1.0000, 0.4441, 0.0000, 0.0000]^T, \\ {}^{9999}_s \mathbf{x}^n &= [0.9932, 0.9965, 1.0046, 1.0123, 0.9973]^T, \\ {}^{8889}_s \mathbf{u}^n &= [0.9442, 0.4515, -0.0893, 0.000]^T, \\ {}^{8889}_s \mathbf{x}^n &= [0.9837, 0.9861, 0.9622, 0.9677, 0.9806]^T, \\ {}^{1911}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.4441, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1911}_s \mathbf{x}^n &= [0.3510, 0.6268, 0.1140, 0.2463, 0.5137]^T, \\ {}^{1811}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.4515, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1811}_s \mathbf{x}^n &= [0.3519, 0.6277, 0.1144, 0.2458, 0.5126]^T, \\ {}^{1711}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.5299, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1711}_s \mathbf{x}^n &= [0.3605, 0.6361, 0.1179, 0.2417, 0.5017]^T, \\ {}^{1611}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.6082, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1611}_s \mathbf{x}^n &= [0.3677, 0.6440, 0.1212, 0.2384, 0.4922]^T, \\ {}^{1511}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.6866, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1511}_s \mathbf{x}^n &= [0.3733, 0.6504, 0.1239, 0.2358, 0.4846]^T, \\ {}^{1411}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.7649, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1411}_s \mathbf{x}^n &= [0.3776, 0.6551, 0.1259, 0.2337, 0.4791]^T, \\ {}^{1311}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.8433, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1311}_s \mathbf{x}^n &= [0.3807, 0.6584, 0.1273, 0.2320, 0.4753]^T, \\ {}^{1211}_s \mathbf{u}^n &= [0.0497, 0.9216, -1.0000, -1.0000]^T, \\ {}^{1211}_s \mathbf{x}^n &= [0.3832, 0.6607, 0.1283, 0.2306, 0.4726]^T. \end{aligned}$$

Рассмотрим оценивание элементов матриц статических и динамических линейных моделей. Для первого рассматриваемого установившегося режима  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$  матрица статической линейной модели, элементы которой определялись непосредственно с помощью одного набора разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из переменных управления, и матрица динамической линейной модели считаются известными [1]

$${}^{9899}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.4432 & 0.6940 & -0.0939 & 0.0122 \\ 0.2935 & 0.3768 & -0.0274 & -0.1330 \\ 0.6187 & -0.5341 & 0.0374 & 0.0125 \\ 0.5023 & -1.4456 & 0.0484 & 0.0045 \\ 0.4111 & 0.3198 & -0.0392 & -0.0115 \end{bmatrix},$$

$${}^{9899}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.8208 & 1.1770 & & \\ 0.0697 & -1.6507 & & \\ 9.7385 & 11.5191 & & \\ 9.6711 & 3.5115 & & \\ 2.9867 & -6.8163 & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ -20.1171 & -13.1868 & 0 & \\ -5.5917 & -19.3568 & 0 & \\ -3.4159 & -3.1171 & -30.0422 & \end{bmatrix}.$$

Множество собственных значений матрицы

$${}^{9899}\mathbf{A} \quad \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \} = \{-1.4370, -2.0345, -11.1415, -28.3324, -30.0422\}.$$

Также считаются известными [1] матрицы

$${}^{9999}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.4862 & 0.9101 & -0.0894 & 0.0113 \\ 0.2798 & 0.4698 & -0.0278 & -0.1357 \\ 0.6370 & -0.6276 & 0.0394 & 0.0104 \\ 0.5283 & -1.6585 & 0.0512 & 0.0042 \\ 0.3938 & 0.3561 & -0.0407 & -0.0099 \end{bmatrix},$$

$${}^{9999}\mathbf{A} = {}^{9899}\mathbf{A},$$

а матрицы остальных статических линейных моделей за исключением  ${}^{1111}\mathbf{S}_x$  определяются непосредственно с помощью двух наборов разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из переменных управления

$${}^{8989}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.4787 & 0.9893 & -0.1038 & 0.0106 \\ 0.2873 & 0.3749 & -0.0253 & -0.1389 \\ 0.6605 & -0.5017 & 0.0340 & 0.0082 \\ 0.5550 & -1.4415 & 0.0443 & 0.0041 \\ 0.3958 & 0.2648 & -0.0359 & -0.0086 \end{bmatrix},$$

$${}^{8889}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.4805 & 0.7118 & -0.0991 & 0.0116 \\ 0.2924 & 0.3766 & -0.0263 & -0.1376 \\ 0.6532 & -0.5101 & 0.0352 & 0.0094 \\ 0.5441 & -1.4133 & 0.0457 & 0.0044 \\ 0.4027 & 0.3022 & -0.0373 & -0.0094 \end{bmatrix},$$

$${}^{7979}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.5383 & 1.0699 & -0.1101 & 0.0035 \\ 0.2964 & 0.2939 & -0.0168 & -0.1465 \\ 0.7527 & -0.3425 & 0.0211 & -0.0023 \\ 0.6650 & -1.2356 & 0.0280 & 0.0010 \\ 0.3818 & 0.0991 & -0.0230 & -0.0004 \end{bmatrix},$$

$${}^{6966}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.5267 & 0.8052 & -0.0856 & -0.0051 \\ 0.2819 & 0.1321 & -0.0048 & -0.1275 \\ 0.7954 & -0.1354 & 0.0051 & -0.0114 \\ 0.7745 & -0.8865 & 0.0070 & -0.0041 \\ 0.4706 & -0.0778 & -0.0058 & 0.0089 \end{bmatrix},$$

$${}^{5915}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.7535 & 0.5673 & -0.0437 & -0.0050 \\ 0.3984 & 0.0394 & 0.0016 & -0.0771 \\ 0.9663 & -0.0338 & -0.0020 & -0.0089 \\ 0.9069 & -0.6190 & -0.0027 & -0.0045 \\ 0.6618 & -0.1367 & 0.0026 & 0.0089 \end{bmatrix},$$

$${}^{4914}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0.9419 & 0.4913 & -0.0262 & -0.0021 \\ 0.7781 & 0.0220 & 0.0013 & -0.0469 \\ 1.2662 & -0.0002 & -0.0013 & -0.0026 \\ 1.0035 & -0.4175 & -0.0019 & -0.0016 \\ 0.7744 & -0.1264 & 0.0019 & 0.0036 \end{bmatrix},$$

$${}^{3913}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 1.9751 & 0.3751 & -0.0193 & -0.0034 \\ 1.1395 & 0.0440 & 0.0008 & -0.0521 \\ 1.4801 & 0.0418 & -0.0008 & -0.0057 \\ 1.0208 & -0.2687 & -0.0011 & -0.0032 \\ 0.8270 & -0.1586 & 0.0014 & 0.0097 \end{bmatrix},$$

$${}^{2912}\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 2.6850 & 0.1530 & -0.0053 & -0.0019 \\ 1.7794 & 0.0529 & 0.0004 & -0.0358 \\ 1.8637 & 0.0619 & -0.0010 & -0.0055 \\ 0.9356 & -0.1784 & -0.0013 & -0.0026 \\ 0.5439 & -0.1793 & 0.0017 & 0.0104 \end{bmatrix},$$

$${}^{1911}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.2989 & 0.1586 & -0.0017 & 0.0009 \\ 2.4128 & 0.0322 & -0.0005 & -0.0137 \\ 2.1604 & 0.0524 & -0.0007 & -0.0012 \\ 0.8529 & -0.1555 & -0.0006 & 0.0002 \\ 0.1959 & -0.1649 & 0.0010 & 0.0040 \end{bmatrix},$$

$${}^{1811}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.3257 & 0.1677 & -0.0018 & 0.0010 \\ 2.5295 & 0.0338 & -0.0006 & -0.0137 \\ 2.1727 & 0.0530 & -0.0008 & -0.0012 \\ 0.8491 & -0.1332 & -0.0006 & 0.0002 \\ 0.1648 & -0.1515 & 0.0011 & 0.0041 \end{bmatrix},$$

$${}^{1711}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.5499 & 0.2134 & -0.0167 & 0.0312 \\ 2.4609 & 0.0204 & -0.0022 & -0.0180 \\ 2.2111 & 0.0320 & -0.0027 & 0.0026 \\ 0.7951 & -0.1033 & -0.0031 & 0.0052 \\ 0.1309 & -0.1030 & 0.0031 & 0.0005 \end{bmatrix},$$

$${}^{1611}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3.2373 & 0.2072 & -0.0389 & 0.0736 \\ 2.3094 & 0.0055 & -0.0034 & -0.0238 \\ 2.2283 & 0.0099 & -0.0041 & 0.0051 \\ 0.7021 & -0.0841 & -0.0044 & 0.0079 \\ 0.1373 & -0.0600 & 0.0048 & -0.0027 \end{bmatrix},$$

$${}^{1511}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4.0045 & 0.1449 & -0.0366 & 0.0649 \\ 2.1483 & 0.0055 & -0.0025 & -0.0264 \\ 2.2003 & 0.0092 & -0.0029 & 0.0026 \\ 0.6197 & -0.0642 & -0.0024 & 0.0041 \\ 0.1988 & -0.0469 & 0.0038 & -0.0004 \end{bmatrix},$$

$${}^{1411}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4.4915 & 0.1116 & -0.0218 & 0.0337 \\ 2.0173 & 0.0052 & -0.0017 & -0.0290 \\ 2.1780 & 0.0082 & -0.0021 & 0.0007 \\ 0.5551 & -0.0496 & -0.0014 & 0.0019 \\ 0.2543 & -0.0376 & 0.0025 & 0.0025 \end{bmatrix},$$

$${}^{1311}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4.8302 & 0.0857 & -0.0136 & 0.0168 \\ 1.9183 & 0.0043 & -0.0012 & -0.0322 \\ 2.1627 & 0.0069 & -0.0014 & -0.0008 \\ 0.5042 & -0.0390 & -0.0008 & 0.0007 \\ 0.2949 & -0.0289 & 0.0015 & 0.0046 \end{bmatrix},$$

$${}^{1211}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.0666 & 0.0642 & -0.0086 & 0.0072 \\ 1.8483 & 0.0033 & -0.0008 & -0.0353 \\ 2.1528 & 0.0052 & -0.0010 & -0.0018 \\ 0.4638 & -0.0312 & -0.0004 & 0.0001 \\ 0.3227 & -0.0214 & 0.0008 & 0.0057 \end{bmatrix},$$

$${}^{1111}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.2302 & 0.0840 & -0.0070 & 0.0029 \\ 1.8013 & 0.0056 & -0.0007 & -0.0380 \\ 2.1470 & 0.0082 & -0.0009 & -0.0023 \\ 0.4313 & -0.0265 & -0.0003 & -0.0002 \\ 0.3412 & -0.0217 & 0.0008 & 0.0060 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с возможными переходными процессами замкнутой САУ следующими за максимальным режимом  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$  (при  $\alpha_{руд} = 68^\circ$ ) являются установившийся режим  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 8989$  (при  $\alpha_{руд} = 60^\circ$ ) или режим  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 8889$ . Поэтому по переходным процессам, которые соответствуют переходу с одного из этих режимов на другой в разомкнутой САУ, с помощью (4.3) при ограничениях, которые необходимы для того, чтобы собственные значения матрицы динамической линейной модели были вещественными, отрицательными (максимальное отрицательное собственное значение не больше  $-0.5$ ) и различными (расстояния между отрицательными собственными значениями не меньше  $0.5$ ), а их расположение не отличалось существенно от расположения собственных значений матрицы динамической линейной модели для соседнего с рассматриваемым установившегося режима (расстояния между соответствующими отрицательными собственными значениями матриц линейных моделей для соседних установившихся режимов не больше  $1.0$ ) оцениваются

$${}^{8989}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.0548 & 2.0905 & & \\ 0.0250 & -1.6978 & & \\ 8.2825 & 12.1610 & & \\ 7.5475 & 3.5532 & & \\ 4.1503 & -6.8707 & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ -21.1715 & -13.3930 & 0.1826 & \\ -5.5492 & -20.3001 & -0.1934 & \\ -4.0367 & -3.2717 & -29.5114 & \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 & {}^{8989}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \\
 & \quad \{-1.5863, -2.1663, \\
 & \quad \quad -12.1287, -28.8521, -30.0023\}, \\
 & {}^{8989}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0120, 0.0088, 0.0045, 0.0213, 0.0214\}, \\
 & {}^{8989}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0007, 0.0002, 0.0006, 0.0013, 0.0012\}, \\
 & {}^{8889}\mathbf{A} = \\
 & \begin{bmatrix} -1.2116 & 0.3990 & & & \\ 0.0438 & -1.6613 & & & \\ 9.5340 & 11.1755 & & & \\ 9.5447 & 3.4330 & & & \\ 3.0382 & -6.7713 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & -19.9746 & -13.2604 & 0.0971 & \\ & -5.7394 & -19.4107 & 0.0918 & \\ & -3.3396 & -3.0807 & -30.1485 & \end{bmatrix}, \\
 & {}^{8889}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \\
 & \quad \{-1.1756, -1.6973, \\
 & \quad \quad -10.9627, -28.9513, -29.6198\}, \\
 & {}^{8889}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0102, 0.0032, 0.0060, 0.0101, 0.0131\}, \\
 & {}^{8889}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0002, 0.0001, 0.0008, 0.0009, 0.0008\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, оценивание элементов матрицы  ${}^{8989}\mathbf{A}$ . Вначале с помощью (4.3) оцениваются элементы  ${}^{8989}a_{11}$ ,  ${}^{8989}a_{12}$ ,  ${}^{8989}a_{21}$ ,  ${}^{8989}a_{22}$  (элементы  ${}^{8989}a_{13}$ ,  ${}^{8989}a_{14}$ ,  ${}^{8989}a_{15}$ ,  ${}^{8989}a_{23}$ ,  ${}^{8989}a_{24}$ ,  ${}^{8989}a_{25}$  считаются нулевыми). При этом элементы постоянной диагональной весовой матрицы  ${}_x w_{11}$ ,  ${}_x w_{22}$  рассчитываются с помощью (4.4), а  ${}_x w_{33} = 0$ ,  ${}_x w_{44} = 0$ ,  ${}_x w_{55} = 0$ . Затем оцениваются элементы  ${}^{8989}a_{31}$ ,  ${}^{8989}a_{32}$ ,  ${}^{8989}a_{33}$ ,  ${}^{8989}a_{34}$ ,  ${}^{8989}a_{35}$ ,  ${}^{8989}a_{41}$ ,  ${}^{8989}a_{42}$ ,  ${}^{8989}a_{43}$ ,  ${}^{8989}a_{44}$ ,  ${}^{8989}a_{45}$ ,  ${}^{8989}a_{51}$ ,  ${}^{8989}a_{52}$ ,  ${}^{8989}a_{53}$ ,  ${}^{8989}a_{54}$ ,  ${}^{8989}a_{55}$ . При этом элементы  ${}^{8989}a_{11}$ ,  ${}^{8989}a_{12}$ ,  ${}^{8989}a_{21}$ ,  ${}^{8989}a_{22}$  считаются известными, элементы  ${}^{8989}a_{13}$ ,  ${}^{8989}a_{14}$ ,  ${}^{8989}a_{15}$ ,

${}^{8989}a_{23}$ ,  ${}^{8989}a_{24}$ ,  ${}^{8989}a_{25}$  считаются нулевыми,  ${}_x w_{11} = 0$ ,  ${}_x w_{22} = 0$ , а  ${}_x w_{33}$ ,  ${}_x w_{44}$ ,  ${}_x w_{55}$  рассчитываются с помощью (4.4).

Установившийся режим  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 8889$  разомкнутой САУ совпадает с режимом, для которого значения переменных управления и состояния близки к значениям этих переменных после отказа исполнительного устройства изменения площади критического сечения реактивного сопла в замкнутой САУ при изменении угла отклонения рычага управления двигателем от значения  $\alpha_{\text{руд}} = 68^\circ$  до значения  $\alpha_{\text{руд}} = 60^\circ$  (площадь критического сечения реактивного сопла после отказа не уменьшается от значения, соответствующего режиму  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$ , до значения, соответствующего режиму  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 8989$ ).

Затем таким же образом оцениваются

$$\begin{aligned}
 & {}^{7979}\mathbf{A} = \\
 & \begin{bmatrix} -0.8281 & -1.2611 & & & \\ -0.2146 & -1.7076 & & & \\ 8.5484 & 12.4338 & & & \\ 7.8404 & 3.6860 & & & \\ 2.6577 & -7.3442 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & -22.1141 & -14.0828 & 0.6918 & \\ & -6.1371 & -21.1150 & -0.4587 & \\ & -4.5933 & -3.7187 & -28.8252 & \end{bmatrix}, \\
 & {}^{7979}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \\
 & \quad \{-0.5867, -1.9490, \\
 & \quad \quad -12.3866, -28.8005, -30.8672\}, \\
 & {}^{7979}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0331, 0.0072, 0.0158, 0.0258, 0.0343\}, \\
 & {}^{7979}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 & \quad \{0.0035, 0.0006, 0.0053, 0.0076, 0.0048\},
 \end{aligned}$$

$${}^{6966}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.9811 & -0.7217 & & & \\ 0.2807 & -2.7199 & & & \\ 8.6978 & 12.5746 & & & \\ 7.7741 & 3.6510 & & & \\ 2.0803 & -7.3679 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.8293 & -14.1718 & 0.6933 & & \\ -6.1010 & -21.1355 & -0.8194 & & \\ -4.8402 & -3.5756 & -28.6430 & & \end{bmatrix},$$

$${}^{6966}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \{-1.1067, -2.5943, -12.3194, -27.8557, -31.4327\},$$

$${}^{6966}\{{}^2\Delta_1, {}^2\Delta_2, {}^2\Delta_3, {}^2\Delta_4, {}^2\Delta_5\} = \{0.0312, 0.0220, 0.0258, 0.0321, 0.0624\},$$

$${}^{6966}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \{0.0049, 0.0019, 0.0101, 0.0130, 0.0129\},$$

$${}^{5915}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8.5323 & 13.8043 & & & \\ -3.3979 & 5.1746 & & & \\ 9.5935 & 13.3381 & & & \\ 8.0914 & 3.7823 & & & \\ 2.5376 & -6.6051 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.4313 & -13.9401 & 0.8689 & & \\ -6.0505 & -20.6194 & -0.7453 & & \\ -4.7803 & -3.2892 & -28.6195 & & \end{bmatrix},$$

$${}^{5915}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \{-1.4256, -1.9321, -11.9811, -28.1062, -30.5830\},$$

$${}^{5915}\{{}^2\Delta_1, {}^2\Delta_2, {}^2\Delta_3, {}^2\Delta_4, {}^2\Delta_5\} = \{0.0359, 0.0407, 0.0195, 0.0368, 0.0324\},$$

$${}^{5915}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \{0.0111, 0.0070, 0.0135, 0.0191, 0.0223\},$$

$${}^{4914}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8.7983 & 13.5827 & & & \\ -3.0180 & 4.0472 & & & \\ 9.3476 & 13.0961 & & & \\ 7.6069 & 4.4238 & & & \\ 0.8361 & -6.6594 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.3449 & -14.3901 & 1.1755 & & \\ -7.1646 & -20.6658 & -0.5486 & & \\ -4.9718 & -3.2924 & -28.1969 & & \end{bmatrix},$$

$${}^{4914}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \{-1.8665, -2.8846, -10.9881, -28.7004, -30.5192\},$$

$${}^{4914}\{{}^2\Delta_1, {}^2\Delta_2, {}^2\Delta_3, {}^2\Delta_4, {}^2\Delta_5\} = \{0.1790, 0.0674, 0.0344, 0.0591, 0.0294\},$$

$${}^{4914}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \{0.0501, 0.0105, 0.0142, 0.0129, 0.0076\},$$

$${}^{3913}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.4205 & -1.4107 & & & \\ 0.4853 & -2.3649 & & & \\ 9.5859 & 13.3689 & & & \\ 7.8799 & 4.8344 & & & \\ 0.6244 & -6.6922 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.1466 & -14.0930 & 1.0782 & & \\ -6.7976 & -20.1433 & -0.4993 & & \\ -4.9463 & -3.1582 & -27.9662 & & \end{bmatrix},$$

$${}^{3913}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \{-0.8822, -1.9032, -10.9790, -28.6507, -29.6264\},$$

$${}^{3913}\{{}^2\Delta_1, {}^2\Delta_2, {}^2\Delta_3, {}^2\Delta_4, {}^2\Delta_5\} = \{0.1978, 0.0554, 0.0324, 0.0747, 0.1098\},$$

$${}^{3913}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \{0.0212, 0.0048, 0.0077, 0.0136, 0.0119\},$$

$${}^{2912}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.6525 & 1.8502 & & & \\ -0.0536 & -1.4573 & & & \\ 9.1872 & 13.7420 & & & \\ 7.5948 & 4.5828 & & & \\ 1.2753 & -7.5442 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.4343 & -14.7225 & 1.2031 & & \\ -6.9628 & -20.3951 & -0.3539 & & \\ -4.7689 & -2.7111 & -27.0684 & & \end{bmatrix},$$

$${}^{2912}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.6525 & 1.8502 & & & \\ -0.0536 & -1.4573 & & & \\ 9.1872 & 13.7420 & & & \\ 7.5948 & 4.5828 & & & \\ 1.2753 & -7.5442 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -21.4343 & -14.7225 & 1.2031 & & \\ -6.9628 & -20.3951 & -0.3539 & & \\ -4.7689 & -2.7111 & -27.0684 & & \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 &^{2912}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \\
 &\quad \{-0.8044, -1.3054, \\
 &\quad \quad -10.9194, -27.6529, -30.3255\}, \\
 &^{2912}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0993, 0.0702, 0.0566, 0.0833, 0.1282\}, \\
 &^{2912}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0266, 0.0056, 0.0073, 0.0067, 0.0180\}.
 \end{aligned}$$

Установившиеся режимы разомкнутой САУ

$$\begin{aligned}
 p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1911, & p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1811, \\
 p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1711, & p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1611, \\
 p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1511, & p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1411, \\
 p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1311, & p_1 p_2 p_3 p_4 &= 1211
 \end{aligned}$$

совпадают с режимами замкнутой САУ, для которых значения переменных управления и состояния близки к значениям этих переменных после отказа исполнительного устройства изменения площади критического сечения реактивного сопла при его раскрытии во время сброса, то есть при изменении угла отклонения рычага управления двигателем от значения  $\alpha_{\text{руд}} = 17^\circ$  до значения  $\alpha_{\text{руд}} = 15^\circ$  (площадь критического сечения реактивного сопла после этих отказов перестает увеличиваться и не достигает значения, соответствующего режиму  $p_1 p_2 p_3 p_4 = 1111$ ). Отметим, что в работе впервые оцениваются элементы матриц динамических линейных моделей на этих режимах. До сих пор считалось [1], [2], [3], что  $^{1311}\mathbf{A} = ^{1411}\mathbf{A} = ^{1511}\mathbf{A} = ^{1611}\mathbf{A} = ^{1711}\mathbf{A} = ^{1811}\mathbf{A} = ^{1911}\mathbf{A} = ^{2912}\mathbf{A}$  и  $^{1211}\mathbf{A} = ^{1111}\mathbf{A}$ . При этом ошибки приближения переменных состояния были очень значительными (более 0.5). Нелинейный объект на этих режимах, которые близки к минимальному, имеет несколько иные динамические свойства. Поэтому при оценивании элементов  $^{1911}a_{11}, ^{1911}a_{12}, ^{1911}a_{21}, ^{1911}a_{22}$  используются прежние ограничения, а при оценивании элементов  $^{1911}a_{31}, ^{1911}a_{32}, ^{1911}a_{33}, ^{1911}a_{34}, ^{1911}a_{35}$ ,

$^{1911}a_{41}, ^{1911}a_{42}, ^{1911}a_{43}, ^{1911}a_{44}, ^{1911}a_{45}, ^{1911}a_{51}, ^{1911}a_{52}, ^{1911}a_{53}, ^{1911}a_{54}, ^{1911}a_{55}$  ограничения на расстояния между соответствующими собственными значениями матриц для соседних установившихся режимов отсутствуют. При этом используются те же весовые матрицы, что и раньше.

$$\begin{aligned}
 &^{1911}\mathbf{A} = \\
 &\begin{bmatrix} -0.8453 & 0.5343 & & & \\ 0.1084 & -0.6721 & & & \\ 11.2248 & 12.1819 & & & \\ 6.4177 & 1.0029 & & & \\ 1.4573 & -8.4835 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ -20.3613 & -18.6429 & 3.1752 & & \\ -5.3085 & -16.3533 & -1.5499 & & \\ -6.0244 & 0.0007 & -16.1107 & & \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &^{1911}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} = \\
 &\quad \{-0.5029, -1.0145, \\
 &\quad \quad -12.0197, -12.5219, -28.2838\}, \\
 &^{1911}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.1048, 0.1558, 0.0664, 0.1108, 0.4315\}, \\
 &^{1911}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0166, 0.0131, 0.0100, 0.0063, 0.0202\}, \\
 &^{1611}\mathbf{A} = ^{1711}\mathbf{A} = ^{1811}\mathbf{A} = ^{1911}\mathbf{A}, \\
 &^{1811}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.1129, 0.2839, 0.4549, 0.1979, 0.1841\}, \\
 &^{1811}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0001, 0.0001, 0.0003, 0.0004, 0.0004\}, \\
 &^{1711}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.1090, 0.1642, 0.3041, 0.2126, 0.2088\}, \\
 &^{1711}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0015, 0.0012, 0.0026, 0.0029, 0.0029\}, \\
 &^{1611}\{^2\Delta_1, ^2\Delta_2, ^2\Delta_3, ^2\Delta_4, ^2\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.1302, 0.2095, 0.2980, 0.2792, 0.2378\}, \\
 &^{1611}\{\infty\Delta_1, \infty\Delta_2, \infty\Delta_3, \infty\Delta_4, \infty\Delta_5\} = \\
 &\quad \{0.0023, 0.0013, 0.0028, 0.0034, 0.0022\}.
 \end{aligned}$$



2. **Лейбов Р.Л.** Методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта // International Journal for Computational and Structural Engineering. 2013. Vol. 9, Issue 4. P. 186–198.
3. **Лейбов Р.Л.** Кусочно-линейная модель нелинейного объекта // International Journal for Computational and Structural Engineering. 2012. Vol. 8, Issue 1. P. 96–107.
4. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,  
e-mail: r\_leibov@mtu-net.ru

Лейбов Роман Львович, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: r\_leibov@mtu-net.ru.

Roman L. Leibov, Professor, Dr.Sc., Department of Applied Mathematics and Computer Science; Moscow State

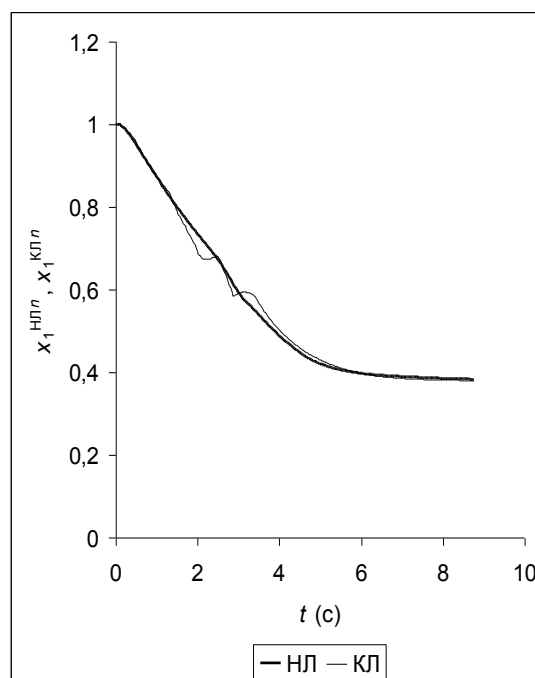


Рис. 1. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_1^n$  (соответствует  $n_B$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой САУ ( ${}^2\Delta_1 = 0.0291$ ,  ${}^\infty\Delta_1 = 0.0462$ ).

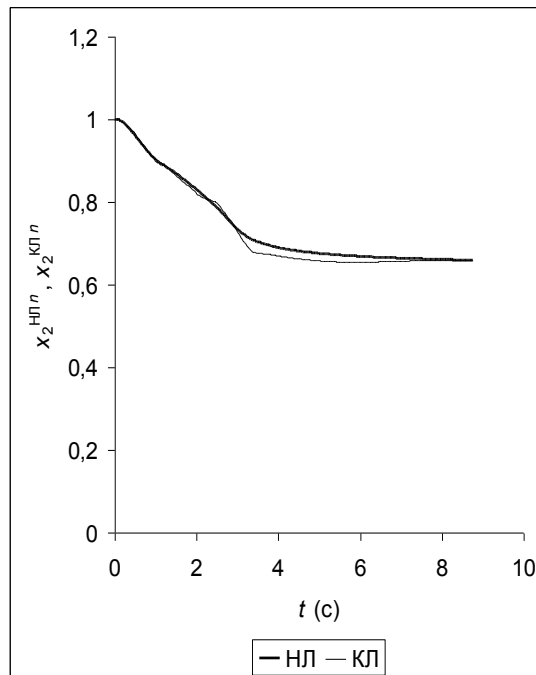


Рис. 2. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_2^n$  (соответствует  $n_k$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой САУ ( ${}^2\Delta_2 = 0.0437$ ,  ${}^\infty\Delta_2 = 0.0297$ ).

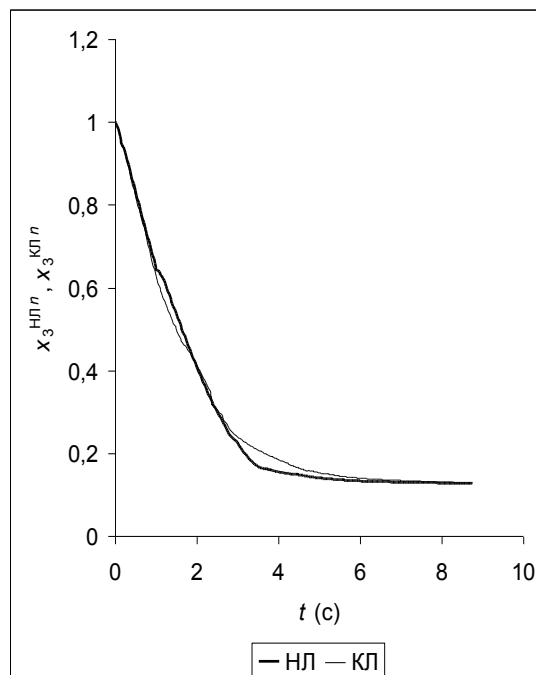


Рис. 3. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_3^n$  (соответствует  $P_k^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой САУ ( ${}^2\Delta_3 = 0.0275$ ,  ${}^\infty\Delta_3 = 0.0537$ ).

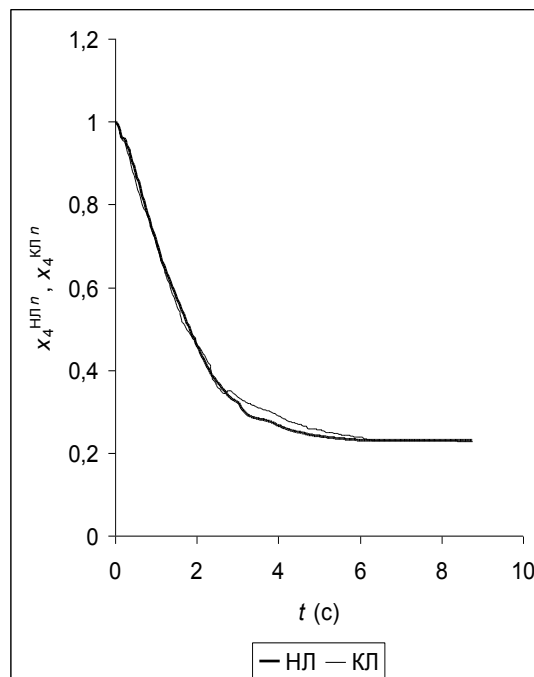


Рис. 4. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_4^n$  (соответствует  $P_T^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой САУ ( ${}^2\Delta_4 = 0.0432$ ,  ${}^\infty\Delta_4 = 0.0651$ ).

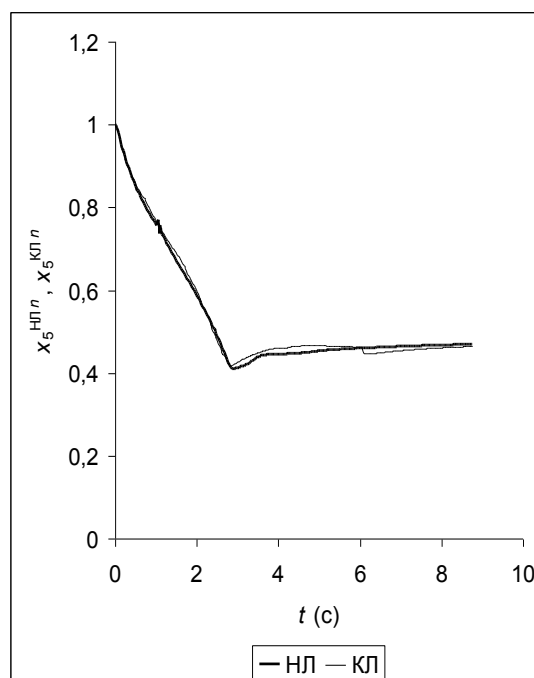


Рис. 5. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_5^n$  (соответствует  $T_T^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой САУ ( ${}^2\Delta_5 = 0.0461$ ,  ${}^\infty\Delta_5 = 0.0581$ ).

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОПЕРАТОРНОМ ВИДЕ И ЕЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

*С.М. Мацкевич, В.Н. Сидоров*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье рассматривается нестационарная неоднородная задача теплопроводности на плоскости в операторной постановке. Математической моделью является дифференциальное уравнение 2 рода с заданными краевыми условиями. Задача рассматривается в произвольной области с использованием характеристической функции области. Итоговая постановка дана в операторном виде, совмещающем в одном уравнении дифференциальное уравнение, заданное внутри области и условия, заданные на границе. В данной статье задача решается с помощью дискретно-аналитического метода. Суть метода состоит в объединении численных и аналитических подходов. Исходная задача разбивается на 2 части: для одних аргументов применяется дискретизация, для других аргументов решается аналитическая задача. Результат представляется в виде дискретного набора аналитических функций. Для «этапа дискретизации» используется метод конечных разностей, а для решения аналитической части – понятие матричной экспоненты.

**Ключевые слова:** задача теплопроводности, операторный вид, характеристическая функция области, дискретно-аналитический метод, дифференциальные уравнения, нестационарность, неоднородность, метод конечных разностей, матричная экспонента

# UNSTEADY-STATE HEAT CONDUCTION TRANSFER PROBLEM IN OPERATOR FORM AND IT'S SOLVING USING DISCRETE-ANALYTIC METHOD

*Sergey M. Matskevich, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The paper presents unsteady-state heat conduction transfer problem for 2 dimensions in operator form. Mathematical model of the process is a differential equation in second order with initial and boundary conditions. The problem is considered on general area with non-orthogonal quadrangular mesh which is topologically equivalent to square mesh. For its statement using characteristic function of area. Final statement is in operator form, which advantage is an able to write common formulas, describing of both relations within the area and boundary conditions. In this paper the problem is solving using discrete-analytic method. The main idea of this method is to combine discrete and analytical method. In this case, initial problem is dividing to 2 stages: in 1 stage I will apply a discrete technique along ones directions; in 2 stage I will apply analytic method along other directions. The result will be a discrete set of analytic functions. For “discrete stage” using a well-known method of finite differences, and for analytical stage is applying the virtue of the matrix exponent.

**Key words:** heat conduction transfer problem; operator form; characteristic function of area; discrete-analytic method; differential equation; unsteady-state; non-uniform; finite differences method; matrix exponent

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается операторная постановка и алгоритм решения нестационарной задачи

теплопроводности. В качестве математической постановки задачи принимается уравнение теплопроводности, основанное на понятии теплового потока.

Уравнение теплопроводности формулирует факт теплового баланса внутренней энергии Фурье:

$$dE = Q_{en} + Q_{mn} \quad \text{или} \\ c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость теплопроводящей среды,  $\rho$  – её плотность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $F$  – мощность возможных тепловых источников.

Исследуется численно-аналитическое решение такого уравнения, являющееся совокупностью численных решений по пространственным координатам  $x$ ,  $y$  и аналитического решения по временному аргументу  $t$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящем докладе излагается алгоритм решения нестационарной, неоднородной, двумерной задачи теплопроводности.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) + F \quad (2)$$

где  $\chi$  – коэффициент температуропроводности ( $\chi = \lambda/c\rho$ ), соответствующий изменяющимся свойствам среды;  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, а  $F$  – функция мощности возможных источников тепла.

Для нестационарного уравнения теплопроводности задается начальное условие  $U(x, y, 0) = \psi(x, y)$  и физически оно означает, что в начальный момент времени распределение температуры известно и имеет вид  $\psi$ . Граничные условия задаются и должны выполняться там, где тело может иметь теплообмен с окружающей средой.

Задача рассматривается в дискретной области, топологически эквивалентной прямо-

угольной области, (метод дискретной аппроксимации с невырожденной деформацией ячеек, изложенный ниже).

## 3. НЕОРТОГОНАЛЬНАЯ СЕТКА ИСХОДНОЙ ОБЛАСТИ

Возьмем рассматриваемую область и разобьем ее на конечные четырехугольные элементы (см. Рис.1). Затем аппроксимируем ее к прямоугольной области с единичными элементами (ячейками единичных размеров) путем невырожденного деформирования её элементов (см. Рис.2).

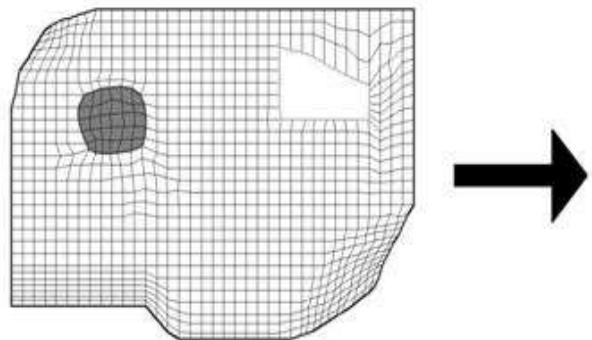


Рис. 1. Аппроксимация исходной области.

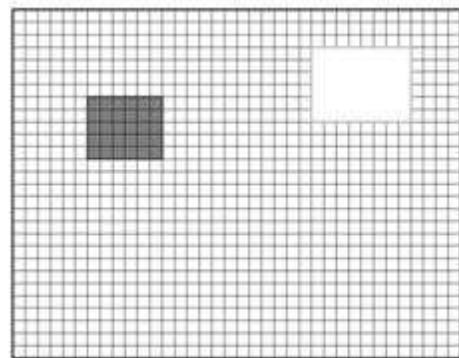


Рис.2. Переход к прямоугольной сетке.

Это можно сделать с помощью перехода от глобальных координат узлов исходной сетки в выбранной системе координат к локальным координатам (см. Рис.3,4).

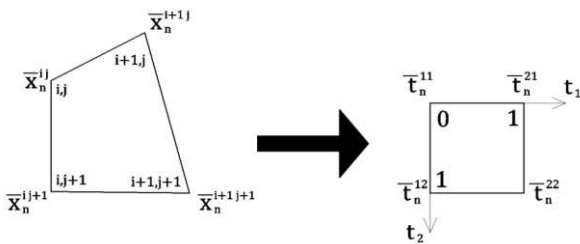


Рис. 3. Замена переменных.

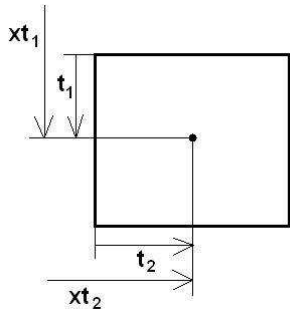


Рис.4. Переход от глобальных координат к локальным.

Преобразование координат можно выполнить по следующему алгоритму:

Пусть  $(x_1, x_2)$  - исходная система координат. Введем новую систему координат, действующую локально внутри каждого элемента  $(t_1, t_2)$ . А также операторы простой разности

$$D_1\varphi = \varphi(i_{s+1}, j) - \varphi(i_s, j), \quad D_2\varphi = \varphi(i, j_{s+1}) - \varphi(i, j_s).$$

Тогда можно записать координаты средней точки внутри элемента  $(xt_1, xt_2)$ , воспользовавшись с помощью линейной функции формы по угловым.

$$\begin{aligned} xt_1 &= [(E + t_1 D_1)x_1(i, j)][(E + t_2 D_2)x_1(i, j)] \\ xt_2 &= [(E + t_1 D_1)x_2(i, j)][(E + t_2 D_2)x_2(i, j)] \end{aligned} \quad (3)$$

После замены переменных операторы разности будут выполняться согласно формулам дифференцирования сложной функции.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial xt_1} \frac{\partial xt_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial xt_2} \frac{\partial xt_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial xt_1} \frac{\partial xt_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial xt_2} \frac{\partial xt_2}{\partial x_2} \end{aligned} \quad \text{или} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial xt_1} \\ \frac{\partial}{\partial xt_2} \end{bmatrix}$$

где  $\alpha_{ps} = \frac{\partial xt_s}{\partial x_p}$  - матрица Якоби, вычисляется как  $\alpha = \beta^{-1}$

То есть

$$\beta_{pq} = \frac{\partial x_p}{\partial xt_q} \approx \tilde{D}_q x_p \quad \text{где} \quad \tilde{D}_p = D_p(E + t_{3-p} D_{3-p}) \quad (5)$$

В итоге находим Якобиан

$$J = \det[\beta] = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} \quad (6)$$

#### 4. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОБЛАСТИ

Важное преимущество операторной постановки – это запись единых формул, одновременно описывающих зависимости внутри области и условия на границе. То есть объединение дифференциального уравнения и краевых условий в одном уравнении с соответствующими весовыми характеристиками. Запишем сначала обычный вид второй краевой нестационарной задачи теплопроводности.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \\ &\quad + F, (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ U &= q, \quad (x, y) \in \partial\Omega \\ U(x, y, 0) &= \Psi, \quad t = 0 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Теперь запишем соответствующие характеристические функции области

$$\theta(x, y, t) = \begin{cases} 1, & (x, y, t) \in \Omega \\ 0, & (x, y, t) \notin \Omega \end{cases} \text{ или} \\ \theta = \theta_{xy}(x, y)\theta_t(t), \quad (8)$$

$$\text{где } \theta_{xy} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

– характеристическая функция области координат

$$\theta_t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

- функция Хэвисайда по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \theta_{xy} \frac{\partial}{\partial t} \theta_t = \theta_{xy} \delta_t; \\ \frac{\partial}{\partial n} \theta = \theta_t \frac{\partial}{\partial n} \theta_{xy} = \theta_t v_n \delta_\Gamma \quad (9)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака

Тогда задача может быть описана в виде единого операторного выражения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta c U) = \frac{\partial}{\partial x} \theta a_{ij} \frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} \theta a_{ij} \frac{\partial}{\partial y} U + \theta F \\ + \theta_t \delta_\Gamma q + \delta_t \theta_{xy} c \Psi \quad (10)$$

где  $c$  – коэффициент объемной теплоемкости,  $a_{ij}$  - коэффициенты теплопроводности

С учетом неортогональной сетки исходной области общая операторная постановка для будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta J c U) = \frac{\partial}{\partial x} \theta J \alpha^* a_{ij} \alpha \frac{\partial}{\partial x} U \\ + \frac{\partial}{\partial y} \theta J \alpha^* a_{ij} \alpha \frac{\partial}{\partial y} U + \theta F \\ + \theta_t \delta_\Gamma q + \delta_t \theta_{xy} c \Psi \quad (11)$$

## 5. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

### 5.1 Аппроксимация.

Выполним конечно-разностную аппроксимацию по пространственным координатам  $x, y$ , а зависимость от времени  $t$  оставим аналитической. Зададим пространственно-временную область в виде 3-х координатных плоскостей, где по осям  $X$  и  $Y$  будет пространство  $(x, y)$ , а по оси  $T$  будет время  $(t)$ .

Рассмотрим сначала аппроксимацию на прямоугольной области. Разобьем область прямоугольной сеткой с шагом  $x_j, y_i$  по осям  $X$  и  $Y$  (см. рис. 5).

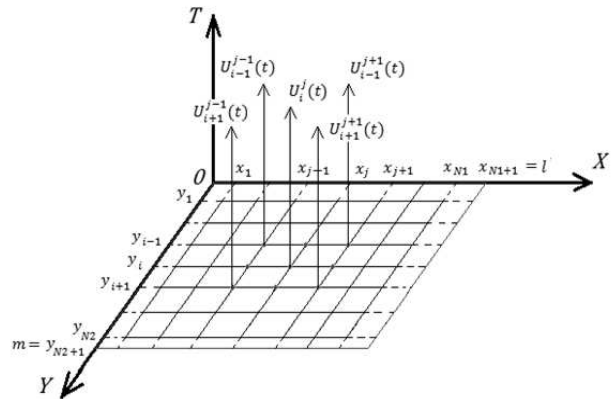


Рис.5. Конечно-разностная аппроксимация области

Выполним конечно-разностную аппроксимацию оператора Лапласа по пространственным координатам  $x, y$ , с учетом неоднородности среды. В этом случае коэффициенты теплопроводности будем брать как их полу-суммы для соседних элементов по соответствующим направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & \frac{\left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i,j}}{2}\right)\left(\frac{U(t)_{i,j+1} - U(t)_{i,j}}{\Delta x_i}\right) - \left(\frac{\chi_{i-1,j-1} + \chi_{i,j-1}}{2}\right)\left(\frac{U(t)_{i,j} - U(t)_{i,j-1}}{\Delta x_{i-1}}\right)}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})/2} \\ & - \frac{\left(\frac{\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}}{2}\right)\left(\frac{U(t)_{i+1,j} - U(t)_{i,j}}{\Delta y_i}\right) - \left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i-1,j-1}}{2}\right)\left(\frac{U(t)_{i,j} - U(t)_{i-1,j}}{\Delta y_{i-1}}\right)}{(\Delta y_i + \Delta y_{i-1})/2} \\ & + F(t)_{i,j} \end{aligned} \quad (12)$$

### 5.2 Метод базисных вариаций.

Для формирования матрицы коэффициентов при неизвестных воспользуемся методом базисных вариаций [1].

Метод базисных вариаций позволяет путем воздействия дискретным линейным оператором не на искомую функцию  $U$ , а на базисную функцию (в данном дискретном случае - воздействия на базисные векторы), записать формулу алгоритмического нахождения всех коэффициентов матрицы в зависимости от индексов.

$$\begin{aligned} A = a_{km} = (Le^{(k)})_m = & \left(\frac{\chi_{i-1,j-1} + \chi_{i,j-1}}{\Delta x_{j-1}(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})}\right) e_{m+1}^{(k)} \\ & + \left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i,j}}{\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})}\right) e_{m-1}^{(k)} \\ & - \left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i,j}}{\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{i-1})}\right) \\ & + \left(\frac{\chi_{i-1,j-1} + \chi_{i,j-1}}{\Delta x_{j-1}(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})}\right) \\ & + \left(\frac{\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}}{\Delta y_i(\Delta y_i + \Delta y_{i-1})}\right) \\ & + \left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i-1,j-1}}{\Delta y_{i-1}(\Delta y_i + \Delta y_{i-1})}\right) e_m^{(k)} \\ & + \left(\frac{\chi_{i-1,j} + \chi_{i-1,j-1}}{\Delta y_{i-1}(\Delta y_i + \Delta y_{i-1})}\right) e_{m+N1}^{(k)} \\ & + \left(\frac{\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}}{\Delta y_i(\Delta y_i + \Delta y_{i-1})}\right) e_{m-N1}^{(k)} \end{aligned} \quad (13)$$

где  $e_m^{(k)} = \delta_{(k,m)}$ ,  $k, m=1, 2, \dots$ ;  $\delta_{(k,m)}$  - символ Кронекера, т.е.  $\delta_{(k,m)} = 1$  (при  $m=k$ ),  $=0$  (при  $m \neq k$ )

Функцию мощностей источников тепла  $F$  также аппроксимируем для каждого узла и записываем в виде вектора правой части  $\bar{F} = F_{i,j}(t)$ .

### 5.3 Нормальная система

#### дифференциальных уравнений.

Вернемся к исходному дифференциальному уравнению (2), подставив в его правую часть найденные аппроксимирующие функции. В итоге это получится нормальная система дифференциальных уравнений. В матричном и векторном виде она может быть представлена как:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A\bar{U} + \bar{F} \quad (14)$$

Известным решением такой системы, согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений является вектор:

$$\bar{U} = e^{At}\bar{\Psi} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\bar{F}(\tau)d\tau \quad (15)$$

где  $\bar{\Psi} = \bar{U}(0)$  - вектор начальных условий

Матричная экспонента  $e^{At}$ , согласно теории функций от матриц, определяется для симметричных матриц в виде разложения Жордана, как:

$$e^{At} = Te^ST^{-1}, \quad e^S = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (16)$$

где  $T$  - матрица собственных векторов  $A$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - собственные числа  $A$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
3. **Сидоров В.Н.** Дискретные постановки и алгоритмы решения краевых задач строительной механики в произвольных областях на регулярных сетках. Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук; 05.23.17. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, М., 1992.

---

Мацкевич Сергей Михайлович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7(495)183-59-94; e-mail: ipm@mgsu.ru

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7(499)183-59-94; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Sergey M. Matskevich, Ph.D. student; Department of Applied Mathematics and Computer Science; Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; tel./fax +7(495)183-59-94; e-mail: ipm@mgsu.ru

Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

# О ВЕРИФИКАЦИИ ВЕЙЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНОГО СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

*М.Л. Мозгалева<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Статья открывает серию работ, посвященную верификации разработанной авторами усовершенствованной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов применительно к задачам локального расчета трехмерных строительных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Верификация осуществляется путем сравнения соответствующих результатов (перемещений и напряжений) с данными, полученными с использованием дискретно-континуального метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, локальный статический расчет, верификация, трехмерные конструкции, постоянные физико-геометрические параметры

## ABOUT VERIFICATION OF ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF LOCAL STATIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES WITH CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS ALONG BASIC DIRECTION

*Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper begins a series of works devoted to the verification of advanced wavelet-based discrete-continual finite element method of local structural analysis, proposed by authors. Local static analysis of three-dimensional structures with constant physical and geometrical parameters along basic direction is under consideration. Verification is performed by comparing the results (displacements and stresses) of linear analysis of three-dimensional structures with the use of discrete-continual finite element method.

**Key words:** discrete-continual finite element method, finite element method, static analysis, deep beam, constant physical and geometrical parameters

### ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм решения трехмерных задач теории упругости дискретно-континуальным методом в базисе Хаара (двумерный случай) подробно рассмотрен, в частности, в работе [1].

Для локализации решения в выбранных зонах (уменьшение количества неизвестных) предложена методика редукции (осреднения) неизвестных и разработан соответствующий алгоритм для численного решения (см., например, работу [2]).

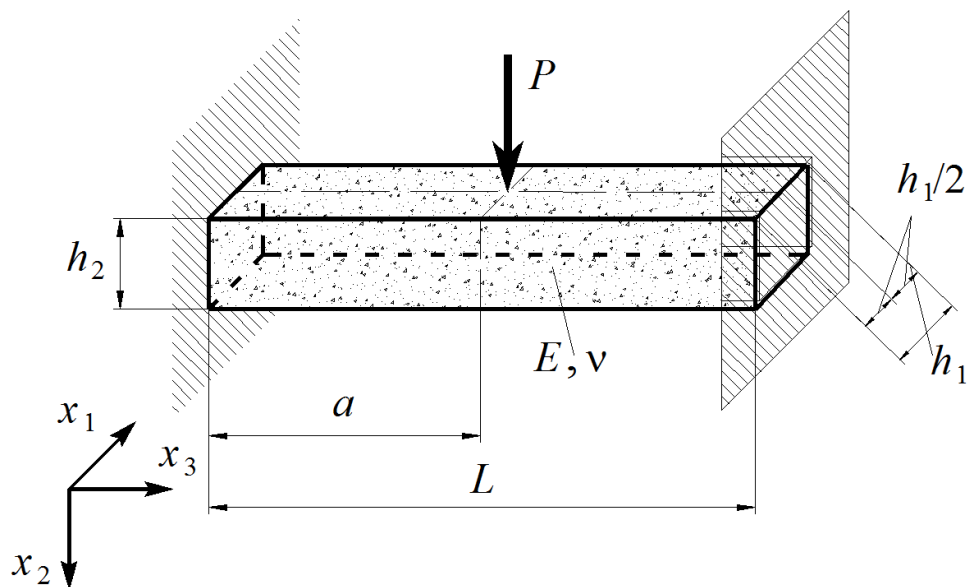


Рис. 1.1. Расчетная схема трехмерного бруса.

В настоящей статье представлено сопоставление решений, полученных с использованием редукции и без нее, на примере статического расчета трехмерного бруса.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется определить напряжения и перемещения трехмерного бруса, боковые вертикальные грани которого шарнирно закреплены (рис. 1.1).

Геометрические расчетные параметры:  $L = 300$  см (длина);  $h_1 = 50$  см (ширина);  $h_2 = 50$  см (высота);  $a = 150$  см. Расчетные параметры материала балки:  $E = 3000$  кН/см<sup>2</sup>,  $\nu = 0.16$ . Расчетные параметры внешней нагрузки:  $P = 100$  кН.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Поскольку численное решение проводится в дискретном двумерном базисе Хаара, сеточная разбивка поперечного сечения содержит в каждом направлении  $N = 2^M$  -узлов.  $M$  – максимальный уровень функций Хаара. В рассматриваемом примере  $M = 3$ . В силу четности количества узлов, в частности по

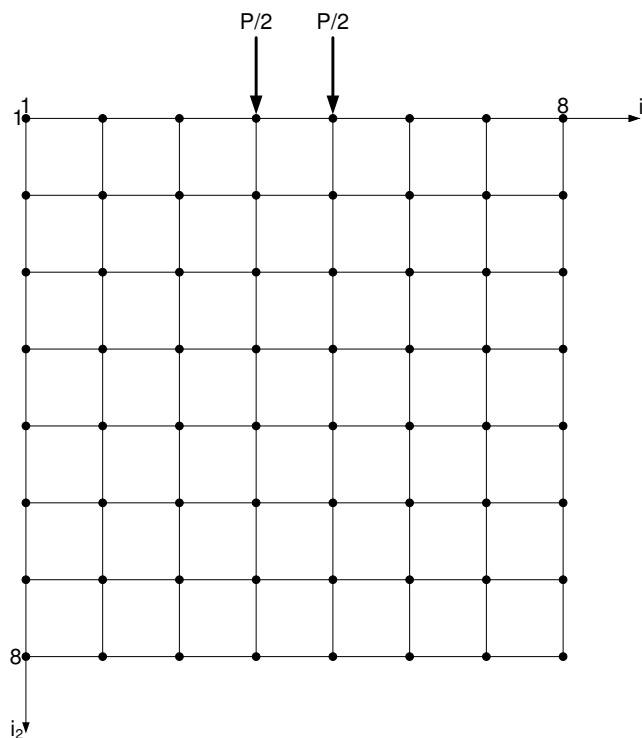
горизонтальному направлению, исходная нагрузка будет сосредоточена в двух центральных узловых точках в серединной плоскости поперечного сечения (рис. 2.1).

$N_2 = N^2$  – общее количество узлов сеточной области в единичном базисе, здесь  $N_2 = 8^2 = 64$ . Каждому узлу соответствует одна базисная сеточная функция-вектор единичного базиса. При решении трехмерной задачи теории упругости дискретно-континуальным методом в каждом узле сосредоточено 6 неизвестных (см., например, работу [3]), следовательно, общее количество неизвестных  $N_s = 6N_2 = 384$ .

Сеточная область для рассматриваемого примера при переходе к базису Хаара представлена на рис. 2.2. При этом получаем 16 узлов уровня 0, 4 узла уровня 1 и 1 узел уровня 2. Несмотря на то, что количество узлов уменьшилось, размерность сеточной области сохраняется, поскольку каждому узлу соответствует три базисные вектор-функции дискретного базиса Хаара, который для полноты дополняется на последнем (2-ом) уровне нормированным константным вектором (см., например, работу [3]), т.е.

$$N_H = 3 \cdot (16 + 4 + 1) + 1 = 63 + 1 = 64 = N_2.$$

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления



• - узлы сеточных функций в единичном базисе

Рис. 2.1. Схема приложения нагрузки.

Переход от единичного базиса к базису Хаара является взаимнооднозначным линейным преобразованием. Искомое решение задачи получаем из полученного решения в базисе Хаара, действуя на него обратным преобразованием. Важным моментом является возможность локализации решения в выбранных зонах. В представленном примере такая локализация была в зоне под нагрузкой. С этой целью верхняя половина сетки была оставлена без изменения. В нижней половине произведена редукция узлов уровня 0 (см. рис. 2.3). Таким образом, размерность сеточной области уменьшилась

$$N_{Hr} = 3 \cdot (8 + 4 + 1) + 1 = 39 + 1 = 40$$

Соответственно, уменьшилось общее количество неизвестных, т.е.

$$N_{sr} = 6N_{Hr} = 240$$

### 3. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

На рисунках 3.1-3.9 представлены выборочные сопоставления напряжений и перемещений, полученных без редукции и с использованием редукции по некоторым характерным сечениям конструкции. При этом номера узлов изменялись в следующих диапазонах

$$1 \leq i_1 \leq 8, \quad 1 \leq i_2 \leq 8, \quad 0 \leq i_3 \leq 30$$

Номера узлов сосредоточения нагрузок (рис. 2.1):

$$\begin{cases} i_1 = 4 \\ i_2 = 1 \\ i_3 = 15 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} i_1 = 5 \\ i_2 = 1 \\ i_3 = 15 \end{cases} .$$

Отсутствующее в легенде графика третье измерение представлено горизонтальной осью координат на графике.

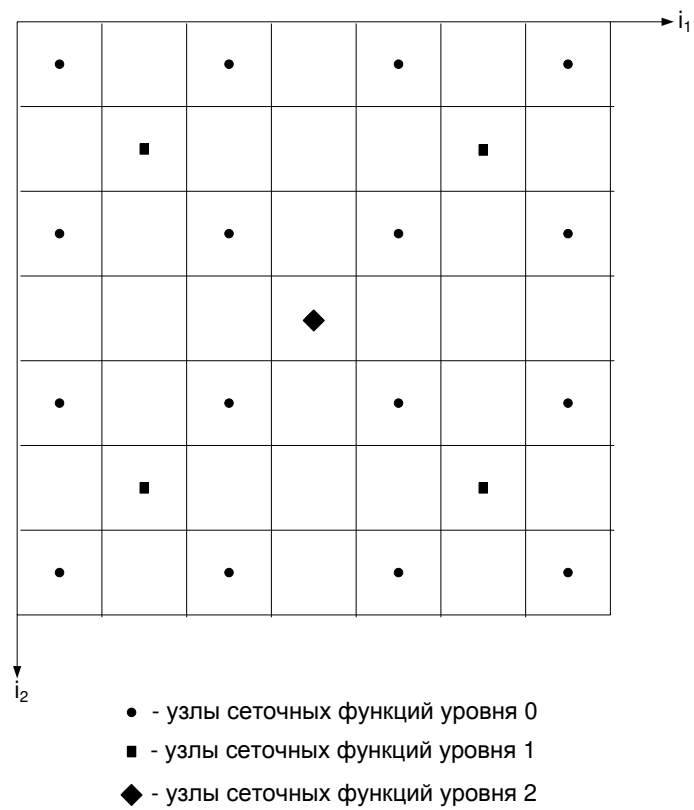


Рис. 2.2. Сеточная область при переходе к базису Хаара.

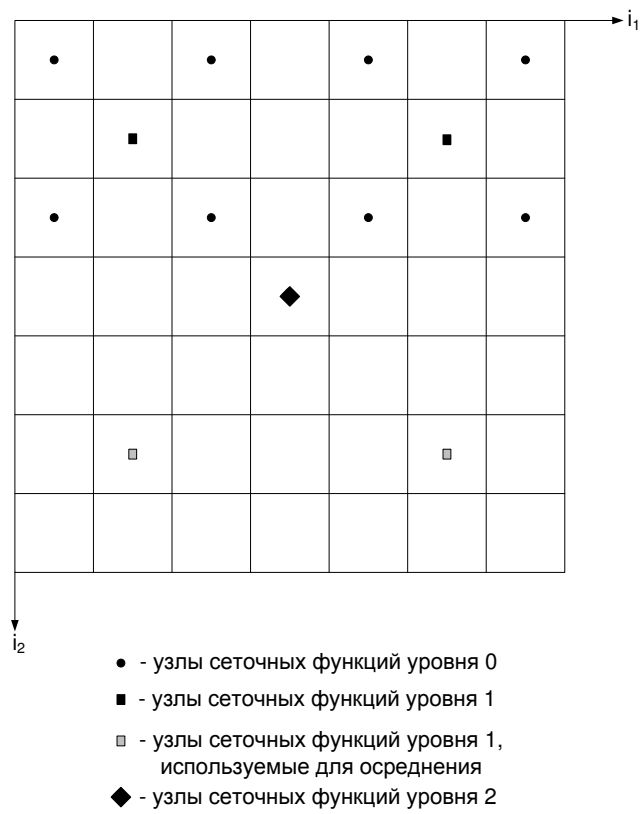


Рис. 2.3. Схема редукции задачи.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

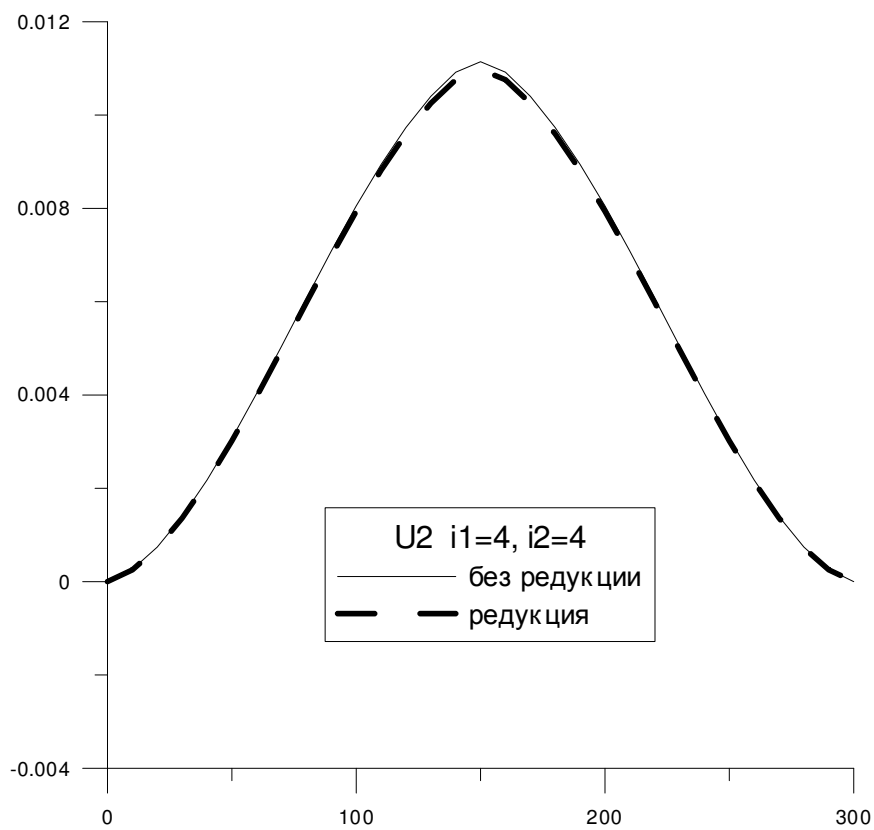


Рис. 3.1. Сопоставление перемещений  $u_2$  бруса.

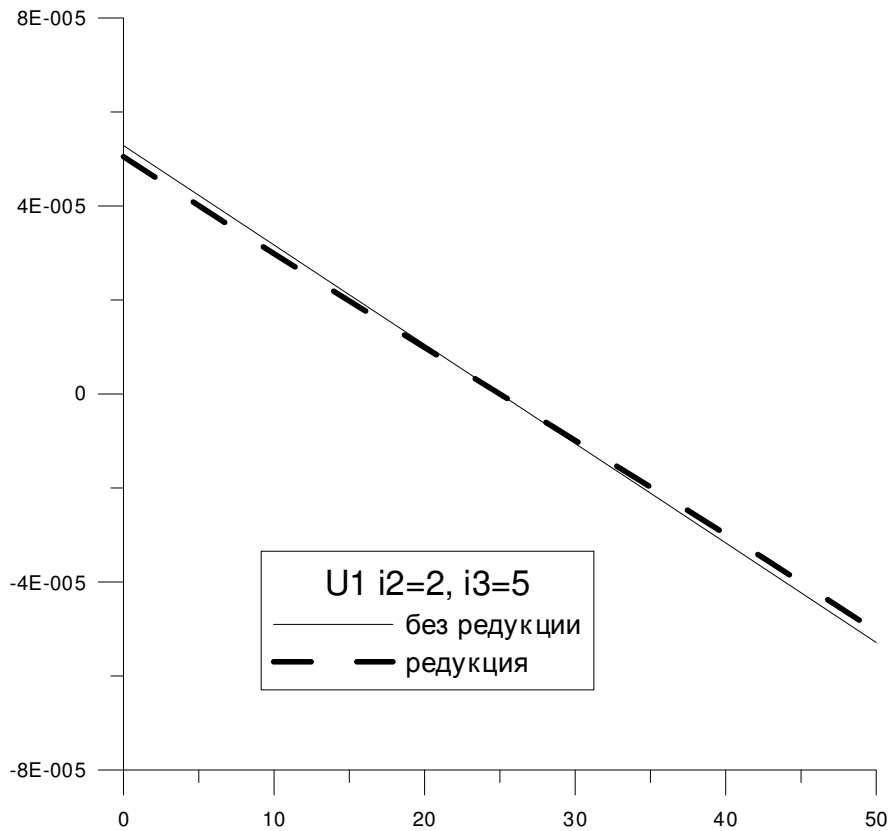


Рис. 3.2. Сопоставление перемещений  $u_1$  бруса.

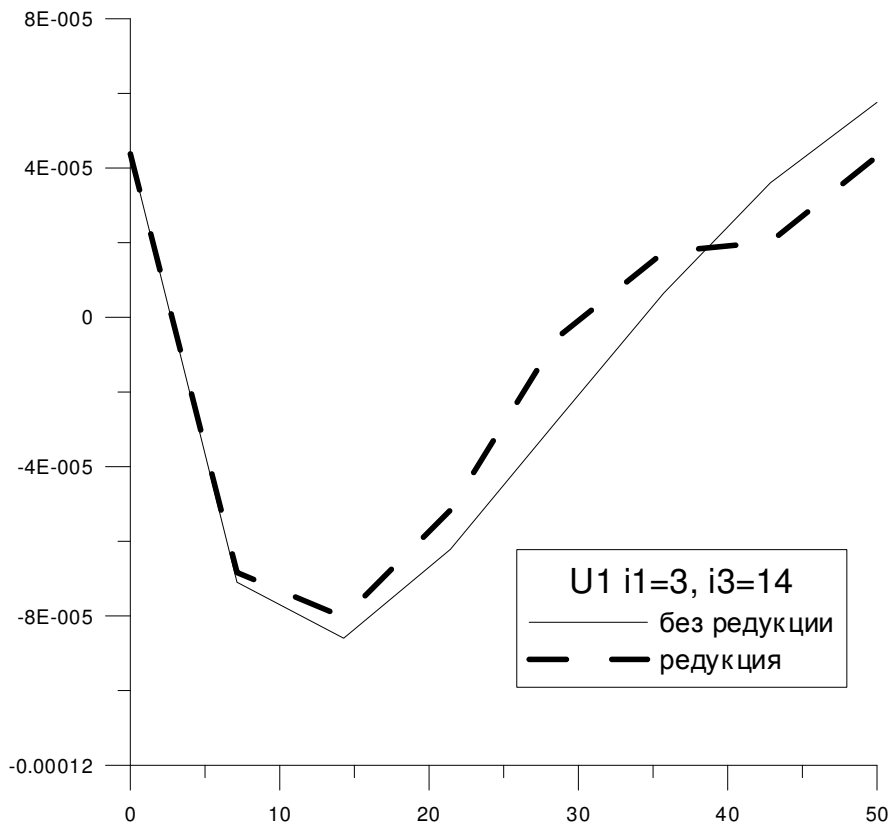


Рис. 3.3. Сопоставление перемещений  $u_1$  бруса.

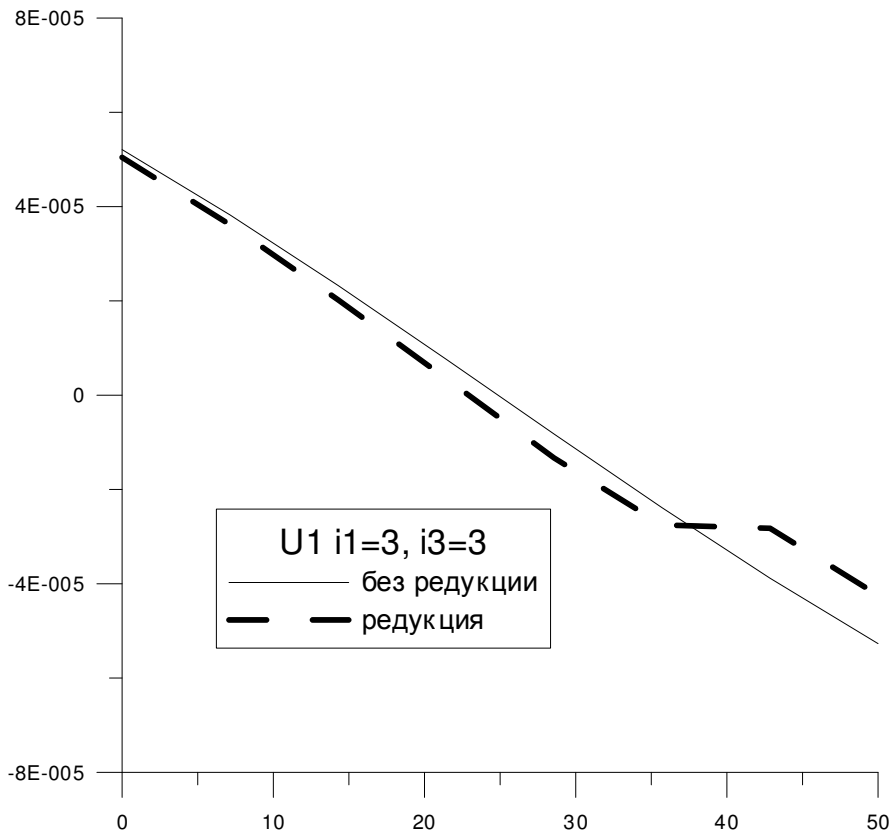


Рис. 3.4. Сопоставление перемещений  $u_1$  бруса.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

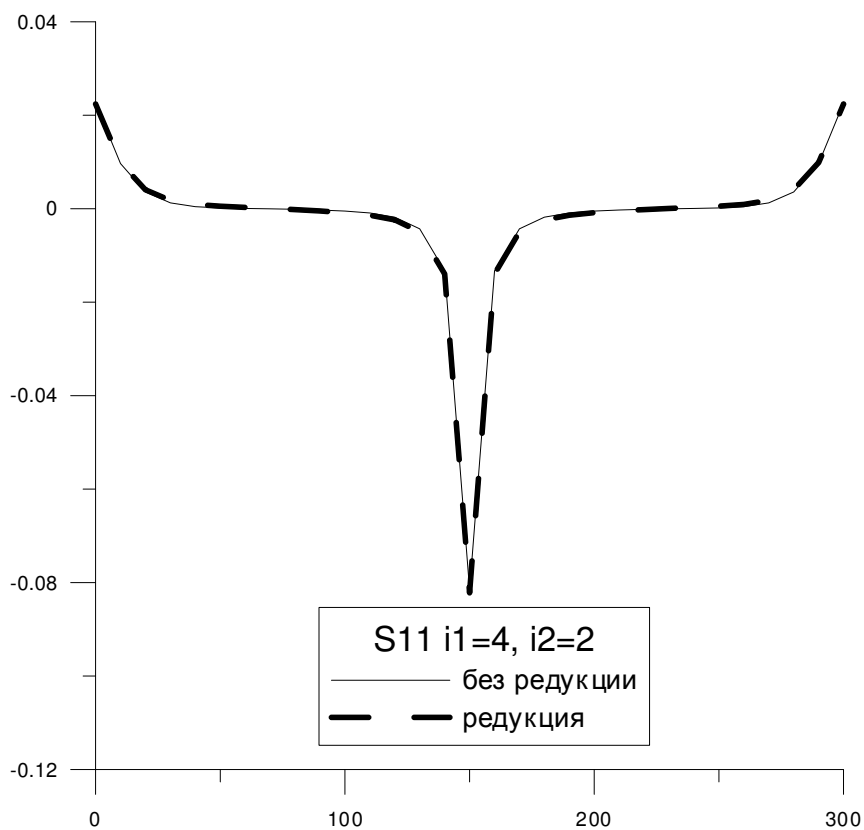


Рис. 3.5. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,1}$  бруса.

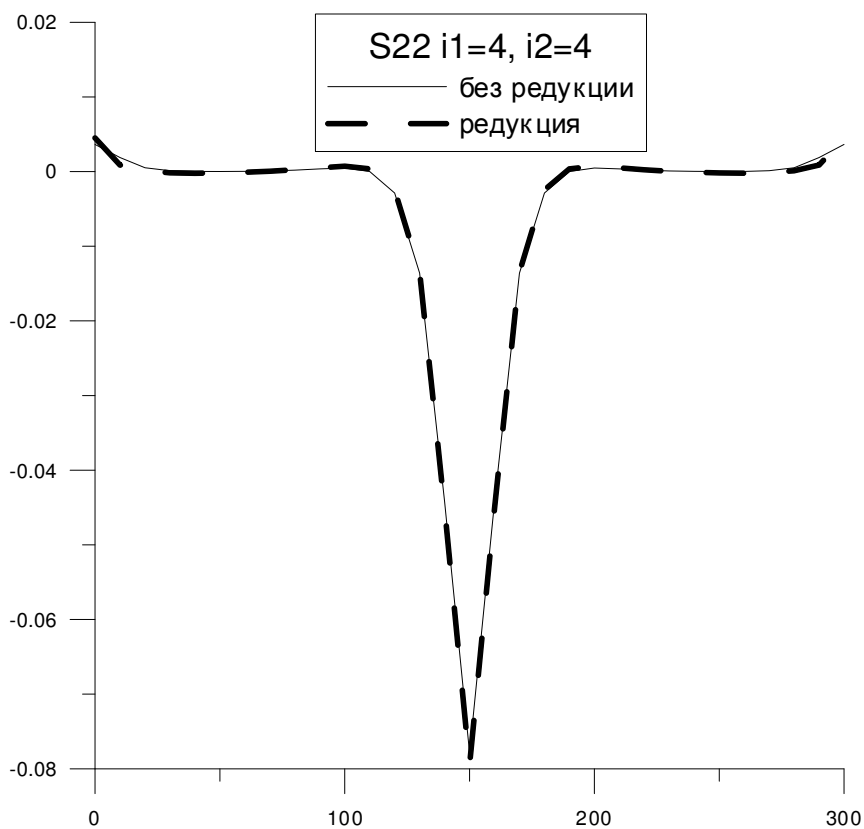


Рис. 3.6. Сопоставление напряжений  $\sigma_{2,2}$  бруса.

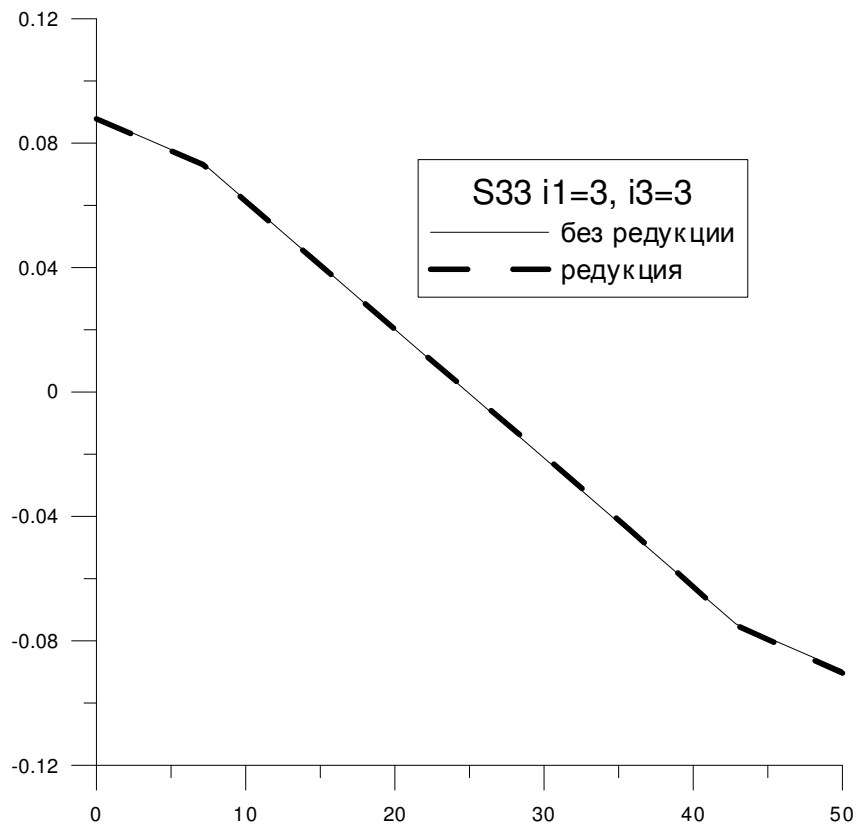


Рис. 3.7. Сопоставление напряжений  $\sigma_{3,3}$  бруса.

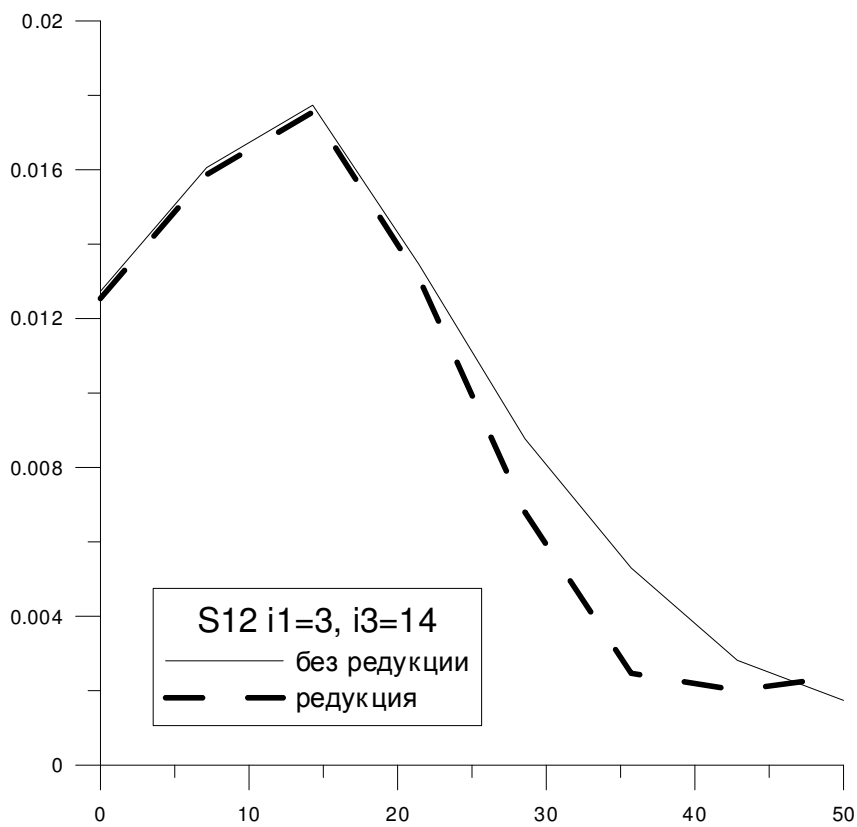


Рис. 3.8. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,2}$  бруса.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

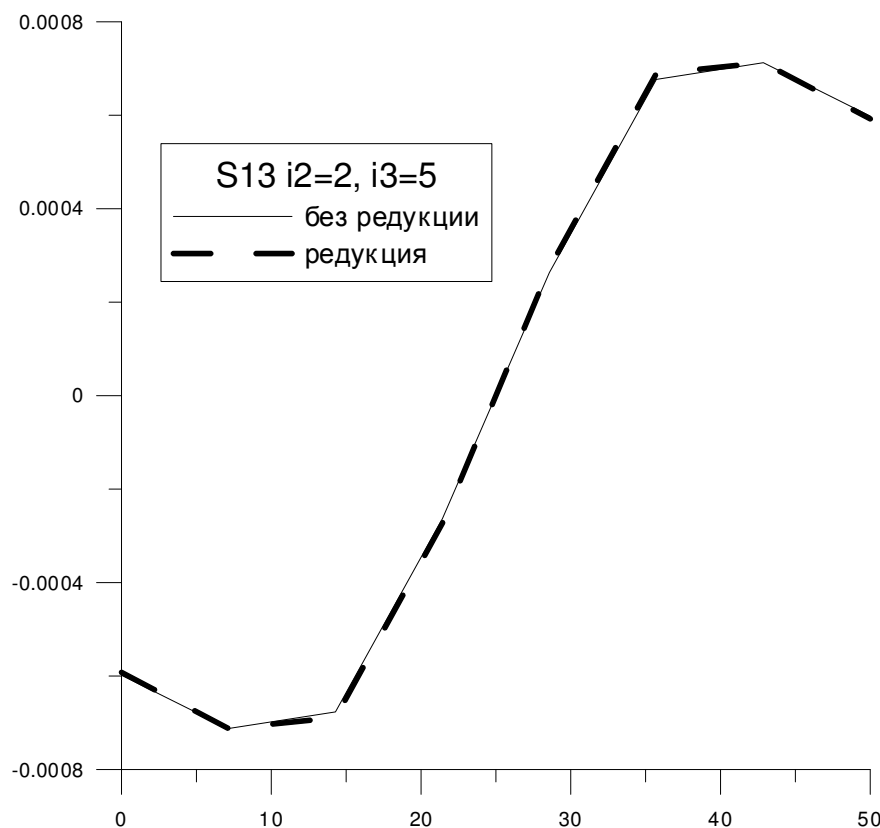


Рис. 3.9. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,3}$  бруса.

Представленные ниже графические сравнительные иллюстрации позволяют сделать вывод о хорошей согласованности результатов в зоне локализации.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-

аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: двумерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and

Structural Engineering, Volume 8, Issue 1,  
2012, pp. 47-56.

3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.

---

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

# О ВЕРИФИКАЦИИ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНОГО СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

*М.Л. Мозгалева<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Статья открывает серию работ, посвященную верификации разработанной авторами усовершенствованной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов применительно к задачам локального расчета трехмерных строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Верификация осуществляется путем сравнения соответствующих результатов (перемещений и напряжений) с данными, полученными с использованием дискретно-континуального метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, локальный статический расчет, верификация, трехмерные конструкции, кусочно-постоянные физико-геометрические параметры

# ABOUT VERIFICATION OF ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF LOCAL STATIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES WITH PIECEWISE CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS ALONG BASIC DIRECTION

*Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This paper continues a series of works devoted to the verification of advanced wavelet-based discrete-continual finite element method of local structural analysis, proposed by authors. Local static analysis of three-dimensional structures with piecewise constant physical and geometrical parameters along basic direction is under consideration. Verification is performed by comparing the results (displacements and stresses) of linear analysis of three-dimensional structures with the use of discrete-continual finite element method.

**Key words:** discrete-continual finite element method, finite element method, static analysis, deep beam, piecewise constant physical and geometrical parameters

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье продолжено сопоставление решений, полученных с использованием редукции и без нее (см., например, работу

[1]), на примере статического расчета трехмерного бруса, состоящего из двух областей. При этом, физико-геометрические характеристики каждой составляющей отличны друг от друга.

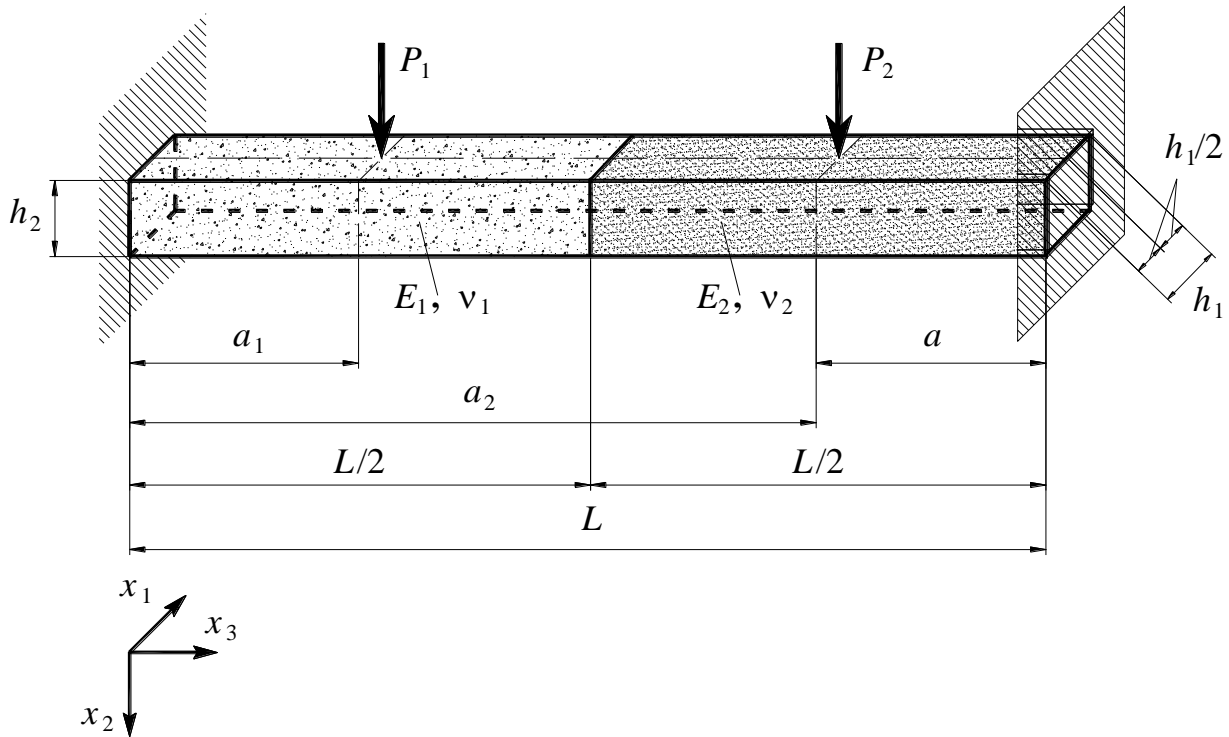


Рис. 1.1. Расчетная схема трехмерного бруса.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется определить напряжения и перемещения трехмерного бруса, боковые вертикальные грани которого шарнирно закреплены (рис. 1).

Геометрические расчетные параметры:  $L = 600$  см (длина);  $h_1 = 50$  см (ширина);  $h_2 = 50$  см (высота);  $a_1 = 150$  см,  $a_2 = 450$  см. Расчетные параметры материала балки: для первой половины  $E_1 = 3000$  кН/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0.16$ , для второй половины  $E_2 = 3500$  кН/см<sup>2</sup>,  $\nu_2 = 0.14$ . Расчетные параметры внешней нагрузки:  $P_1 = P_2 = 100$  кН.

### 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

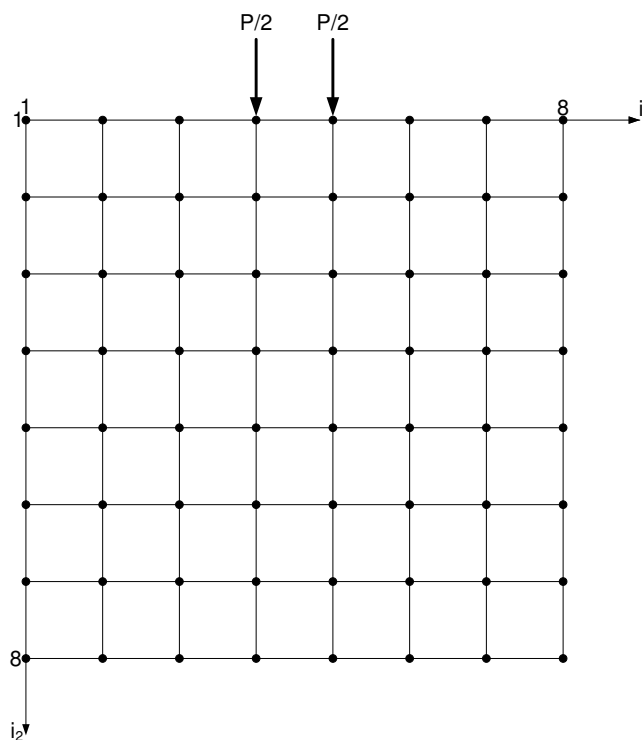
Как уже отмечалось в работе [1], сеточная разбивка поперечного сечения содержит в каждом направлении  $N = 2^M$  -узлов.  $M$  – максимальный уровень функций Хаара. В рассматриваемом примере  $M = 3$ . В силу

четности количества узлов, в частности по горизонтальному направлению, исходная нагрузка будет сосредоточена в двух центральных узловых точках срединной плоскости поперечного сечения каждой половины бруса как это схематично показано на рис. 2.1.

$N_2^1 = N_2^2 = N^2$  – общее количество узлов сеточной области в единичном базисе для 1-ой и 2-ой области стыковки, соответственно. В рассматриваемом случае  $N_2^1 = N_2^2 = 8^2 = 64$ . Каждому узлу соответствует одна базисная сеточная функция-вектор единичного базиса. При решении трехмерной задачи теории упругости дискретно-континуальным методом в каждом узле сосредоточено 6 неизвестных [2], следовательно, общее количество неизвестных для каждой области  $N_s^1 = N_s^2 = 6N^2 = 384$ . Таким образом, общее количество неизвестных для всей задачи равно сумме неизвестных по отдельным областям, т.е.

$$N_s = N_s^1 + N_s^2 = 768.$$

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления



• - узлы сеточных функций в единичном базисе

Рис. 2.1. Схема приложения нагрузки.

Сеточная область для рассматриваемого примера при переходе к базису Хаара представлена на рис. 2.2. При этом получаем 16 узлов уровня 0, 4 узла уровня 1 и 1 узел уровня 2. Размерность сеточной области сохраняется, поскольку каждому узлу соответствует три базисные вектор-функции дискретного базиса Хаара, который для полноты дополняется на последнем (2-ом) уровне нормированным константным вектором, т.е.

$$N_H = 3 \cdot (16 + 4 + 1) + 1 = 63 + 1 = 64.$$

Переход от единичного базиса к базису Хаара является взаимно однозначным линейным преобразованием. Искомое решение задачи получаем из полученного решения в базисе Хаара, действуя на него обратным преобразованием. Локализация решения в представленном примере была в зоне под нагрузкой. Поэтому верхняя половина сетки была оставлена без изменения.

В нижней половине произведена редукция узлов уровня 0 (см. рис. 2.3).

В рассматриваемом случае для каждой области применялась одинаковая редукция, что не является обязательным. Таким образом, размерность сеточной области уменьшилась и составила для каждой из областей значение

$$N_{Hr} = 3 \cdot (8 + 4 + 1) + 1 = 39 + 1 = 40.$$

Соответственно, уменьшилось общее количество неизвестных, т.е.

$$N_{sr} = 2 \cdot 6N_{Hr} = 2 \cdot 240 = 480$$

### 3. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Сопоставление результатов проводилось для продольной оси составного бруса (направление  $x_3$ ), проходящей через узел с номером  $(i_1, i_2) = (4, 4)$  (см. рис. 3.1).

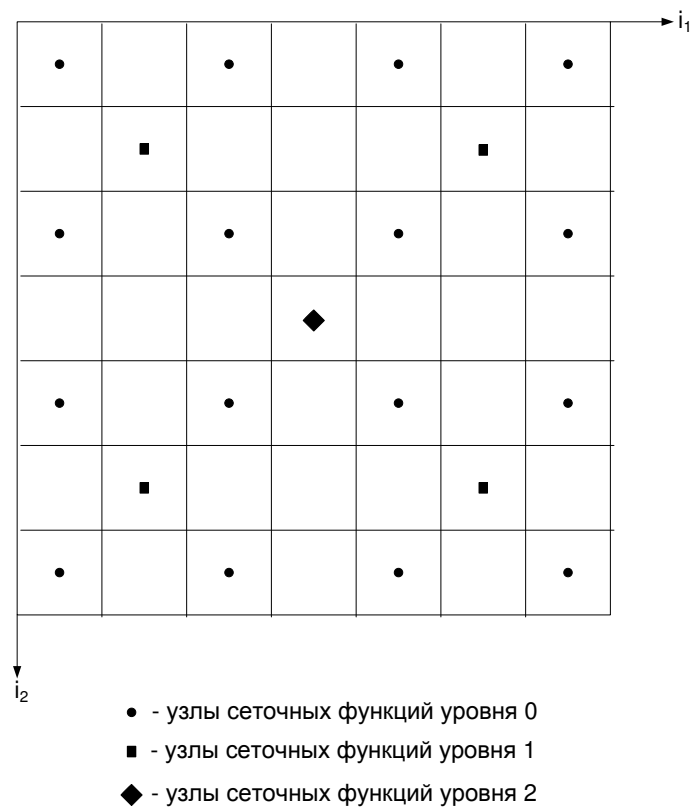


Рис. 2.2. Сеточная область при переходе к базису Хаара.

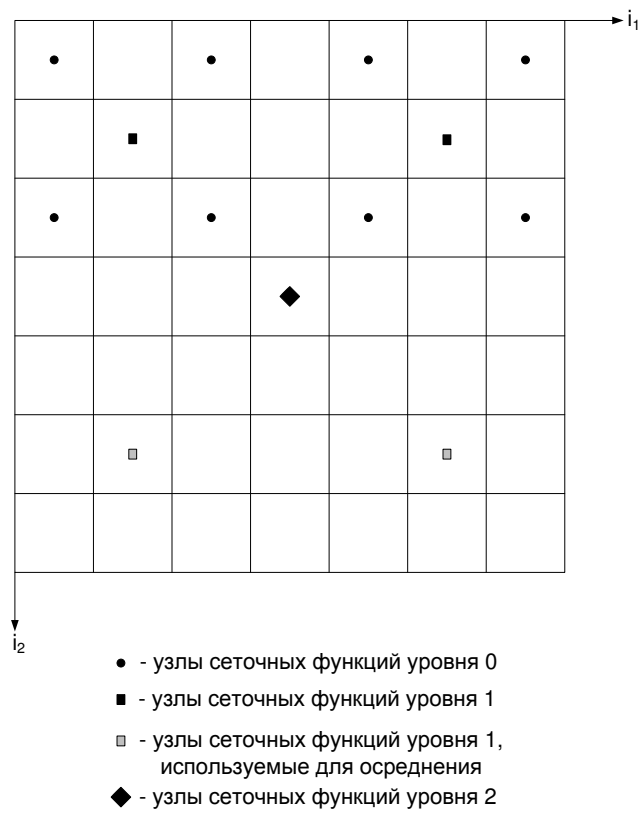


Рис. 2.3. Схема редукции задачи.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

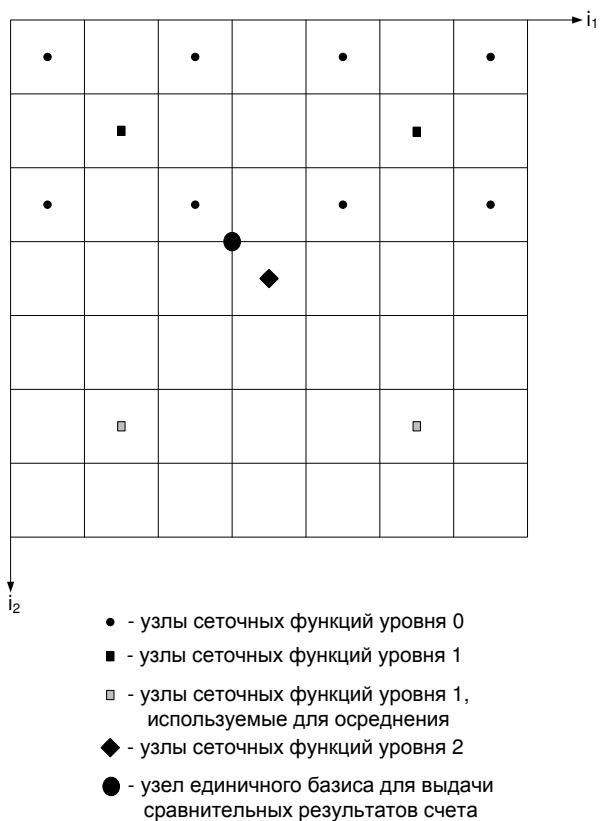


Рис. 2.4. Схема расположения узлов сопоставления.

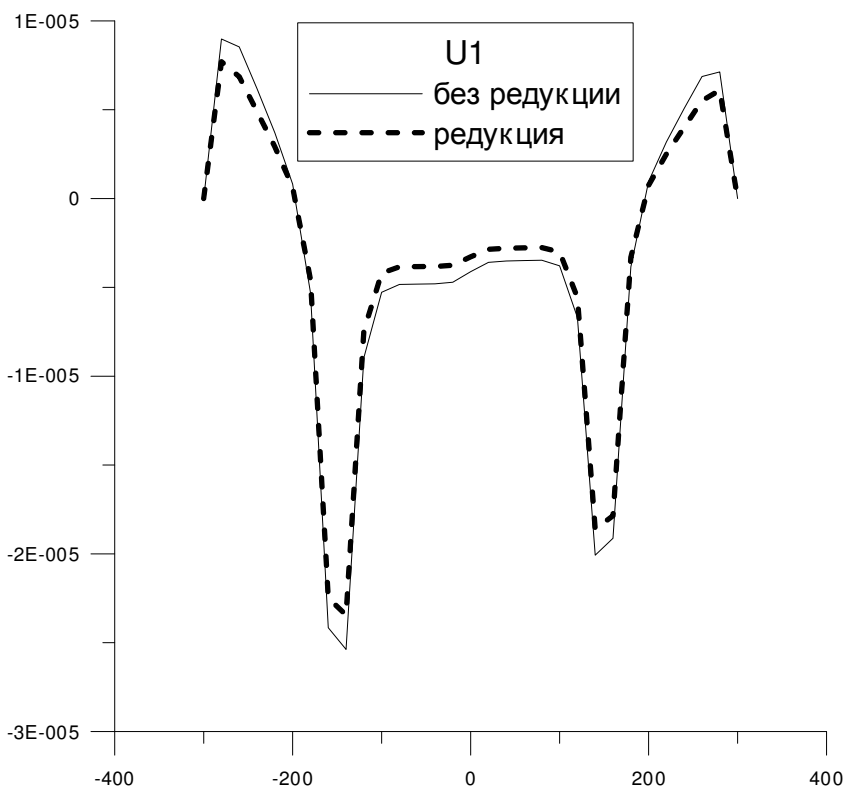


Рис. 3.1. Сопоставление перемещений  $u_1$  бруса.

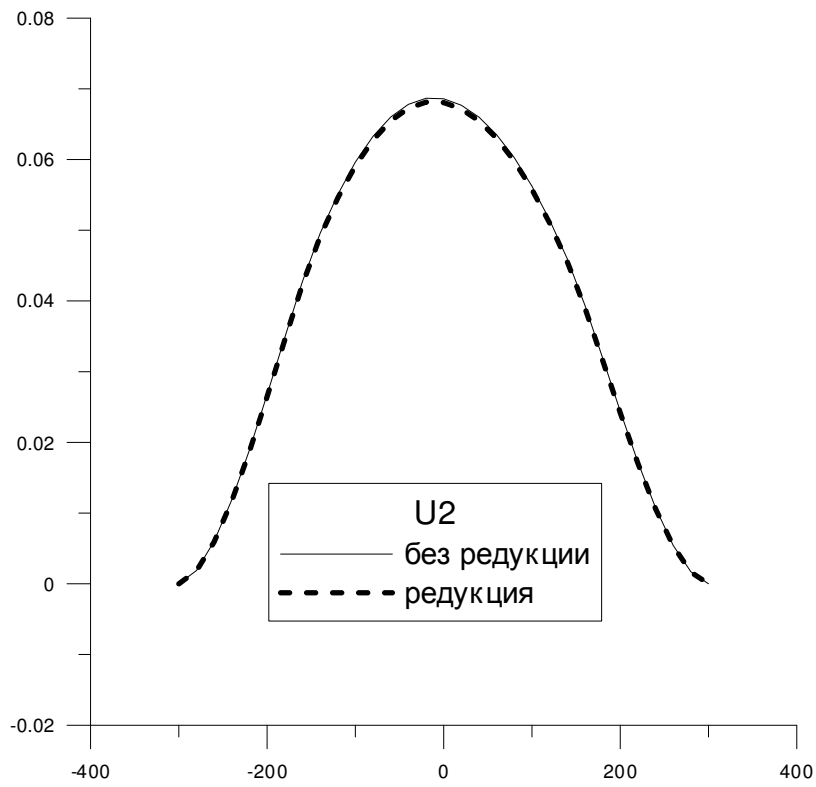


Рис. 3.2. Сопоставление перемещений  $u_2$  бруса.

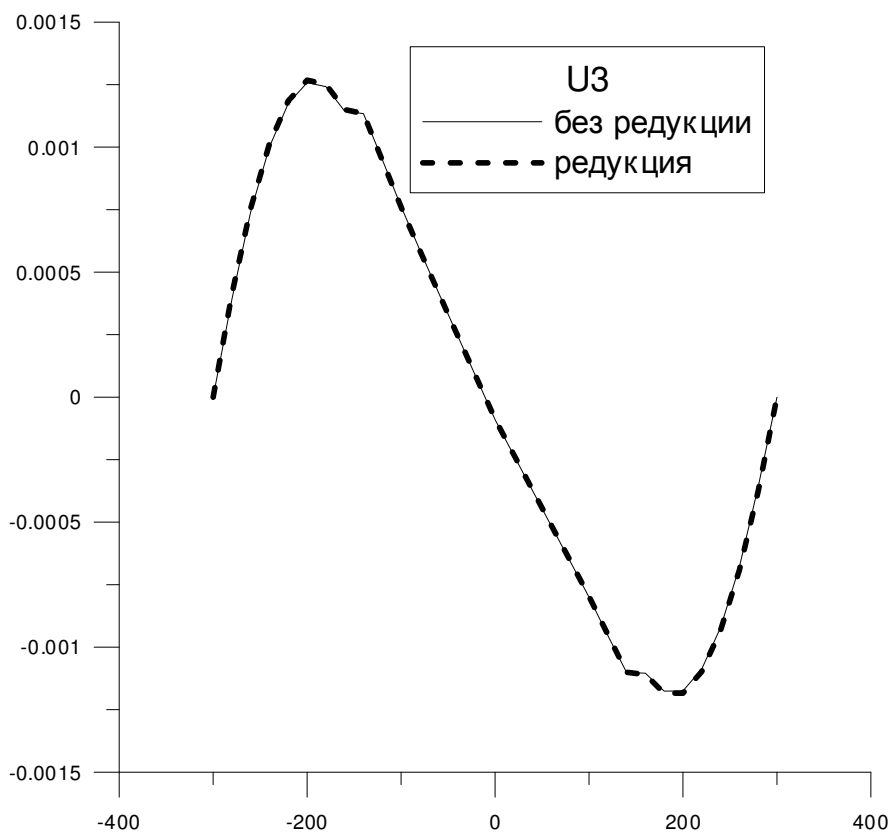


Рис. 3.3. Сопоставление перемещений  $u_3$  бруса.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

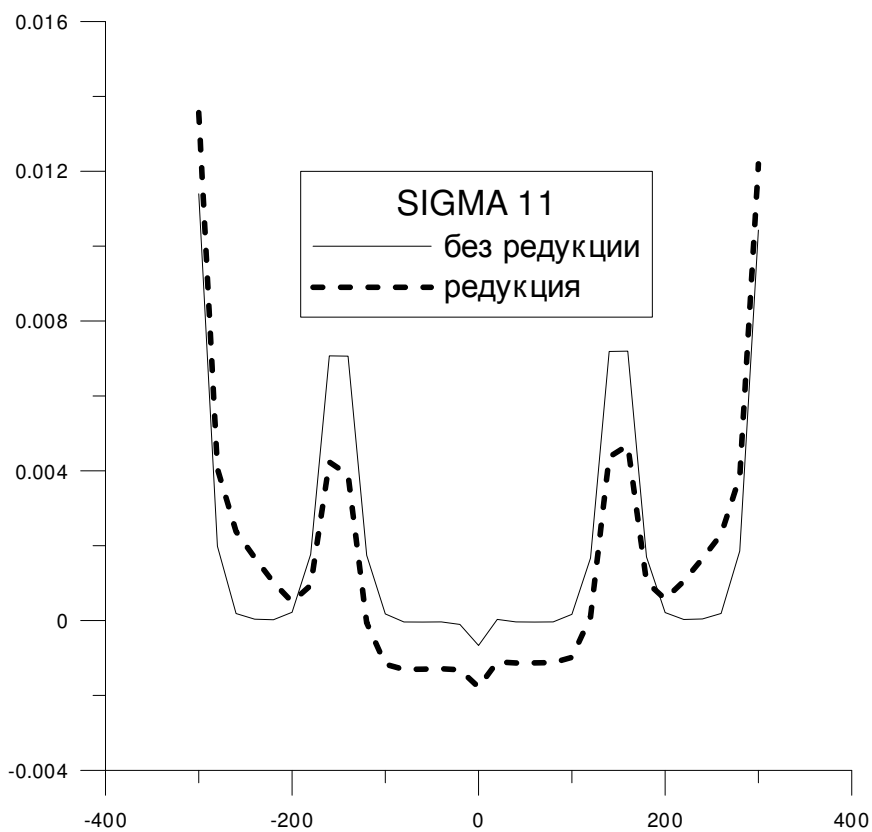


Рис. 3.4. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,1}$  бруса.

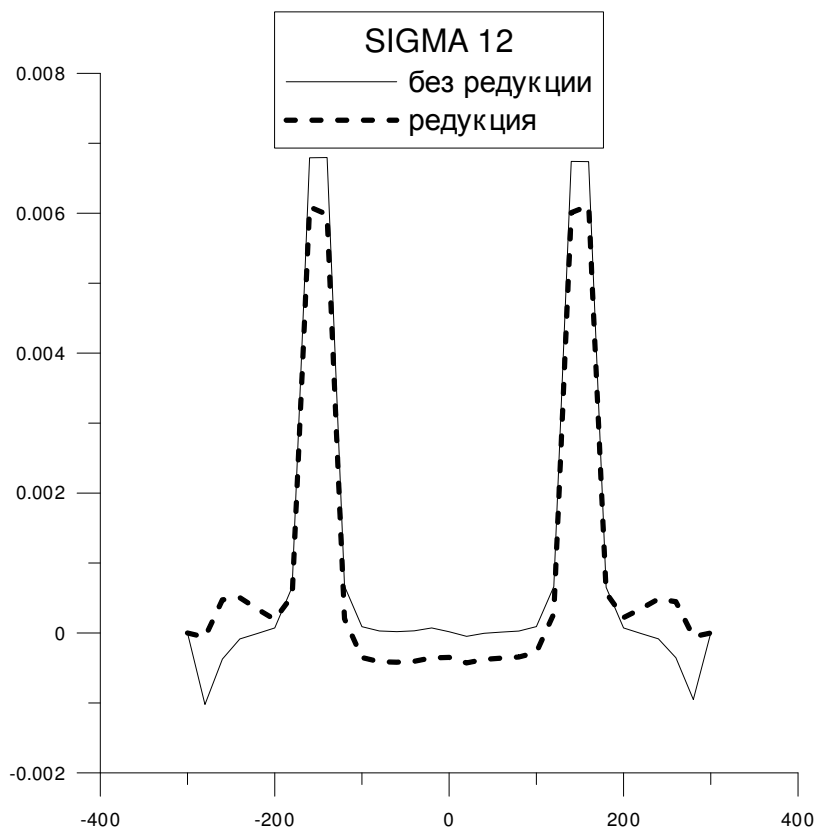


Рис. 3.5. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,2}$  бруса.

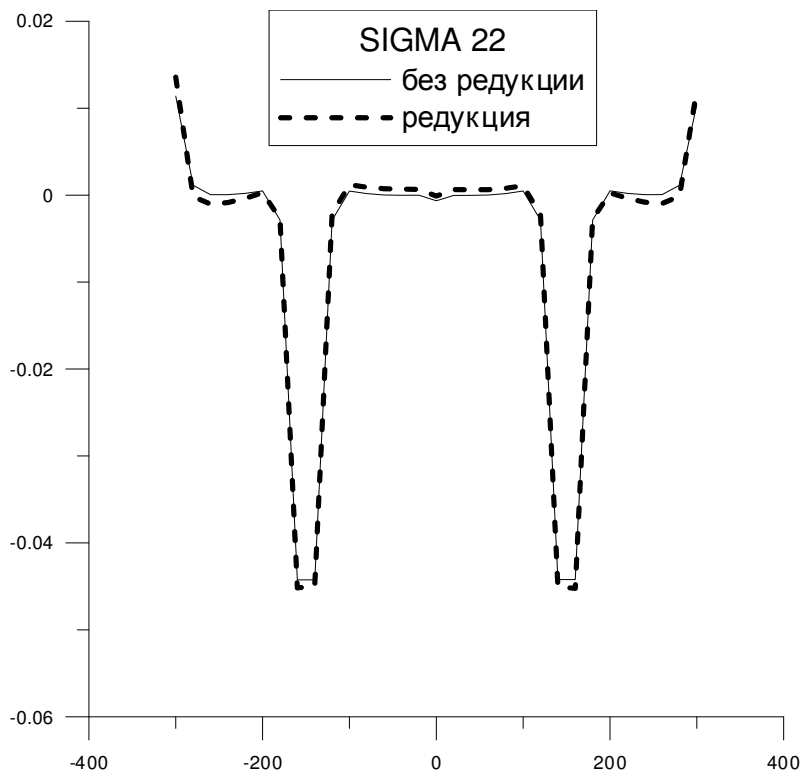


Рис. 3.6. Сопоставление напряжений  $\sigma_{2,2}$  бруса.

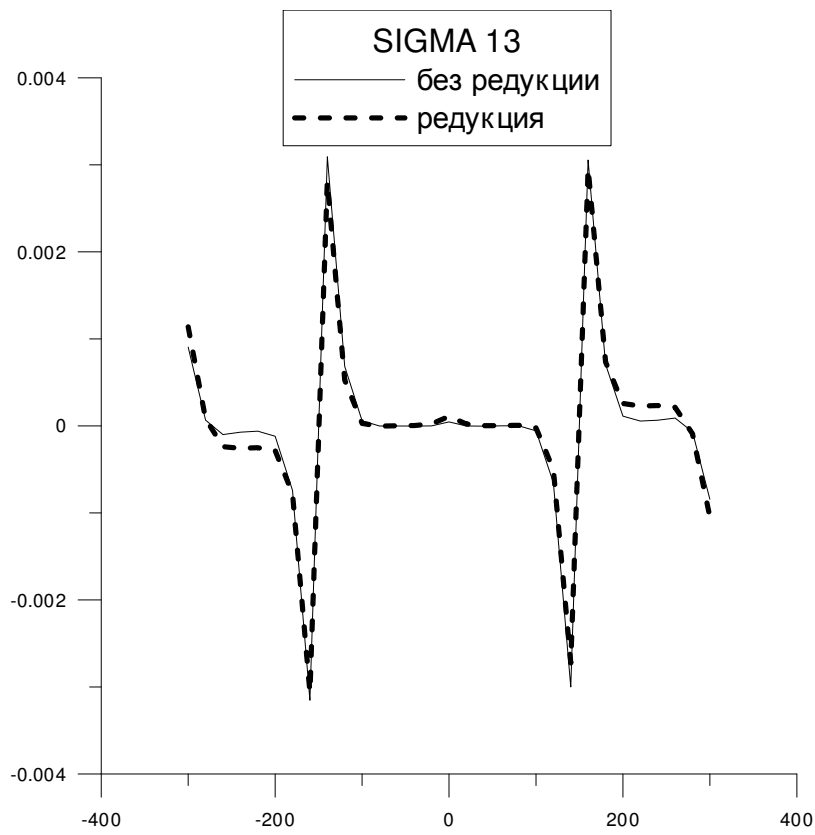


Рис. 3.7. Сопоставление напряжений  $\sigma_{1,3}$  бруса.

О верификации вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач локального статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления

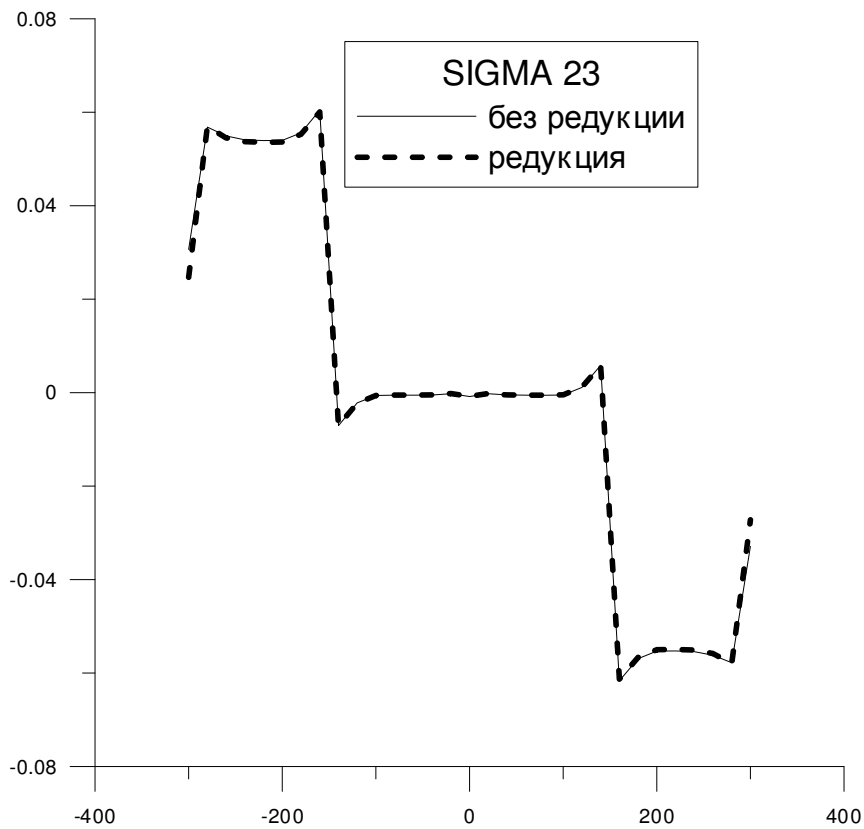


Рис. 3.8. Сопоставление напряжений  $\sigma_{2,3}$  бруса.

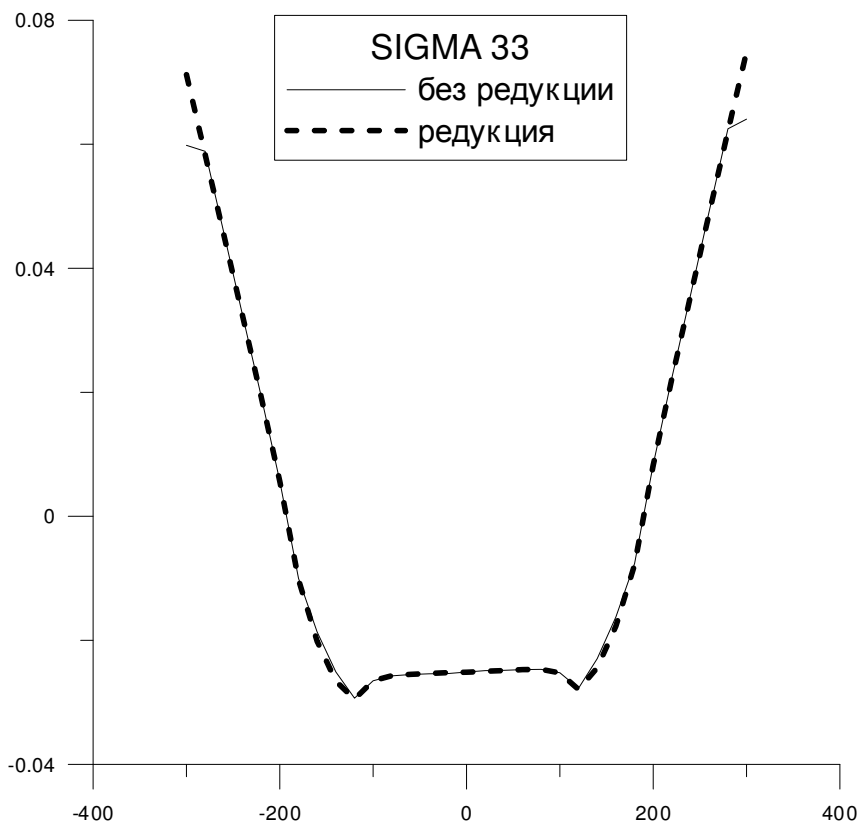


Рис. 3.9. Сопоставление напряжений  $\sigma_{3,3}$  бруса.

Выбранная для сравнения точка, находясь в зоне локализации, максимально близка к зоне осреднения. Тем не менее, представленные в графическом виде сопоставления компонентов напряженно-деформированного состояния, полученных без редукции, с соответствующими компонентами НДС, полученных при применении редукции, в целом позволяют сделать вывод о хорошей согласованности результатов.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть2: двумерный случай.// *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритм осреднения при чис-

ленном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть2: двумерные проблемы.// *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.

3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.

---

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук; Главный ученый секретарь РААСН; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

## ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И КОНСТРУКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*А.Н. Потанов, Е.М. Уфимцев*

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),  
г. Челябинск, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье рассматривается приложение метода временного анализа к задачам динамики дискретных диссипативных систем с учётом физической и конструктивной нелинейности. Приводятся уравнения математических моделей расчёта, позволяющие с единых позиций определять динамическую реакцию системы для указанных видов нелинейности. Показано два примера расчёта конструкций на действие синусоидальной импульсной нагрузки. В первом примере рассматриваются 2 варианта расчёта 3-х-стержневой ферменной конструкции. В одном варианте даётся анализ упругопластических колебаний с построением многоциклового диаграммы деформирования для одного из стержней. В другом варианте – наряду с физически-нелинейной учтена и конструктивно-нелинейная работа системы, связанная с потерей устойчивости одного из сжатых стержней. Во втором примере рассмотрена жёстко защемлённая двутавровая металлическая балка, опорные узлы которой выполнены в виде болтового соединения. Условия жёсткого защемления опор обеспечиваются с помощью предварительного натяжения болтов. Проведён анализ НДС болтового соединения, и показано влияние упругопластического деформирования болтов на жёсткость этого соединения. Выявлены условия, при которых конструктивная нелинейность может проявляться без потери несущей способности (разрушения) болтов.

**Ключевые слова:** метод, временной анализ, математическая модель, матрица, вектор, диаграмма деформирования, колебания, перемещения, восстанавливающая сила, упругопластические деформации, физическая нелинейность, конструктивная нелинейность, ферма, балка, болт, импульсное воздействие

## TIME ANALYSIS OF DISCREET SYSTEMS REACTION WITH ACCOUNTING PHYSICAL AND CONSTRUCTIONAL NONLINEARITY

*Alexander N. Potapov, Eugene M. Ufimtsev*

South-Ural State University, Chelyabinsk, RUSSIA

**ABSTRACT:** The article deals with the application of the method of time analysis to problems of dynamics of discrete dissipative systems, taking into account the material and structural nonlinearity. The mathematical models equations of calculation, which allow a unified position to determine the dynamic reaction of the system for these types of nonlinearity. Shown two examples of calculation of structures on the effect of sinusoidal pulse load. The first example considers two options for calculating 3-rod truss. In one option, the elastoplastic analysis of the oscillations is given to the construction of multi-cycle deformation curve for one of the rods. Alternatively - along with material nonlinearity considered and constructive-nonlinearity operation of the system is associated with a loss of the stability of a compressed rods. The second example shows a rigidly clamped double-tee metal beam, support units of which are in the form of bolted connection. Terms of hard pinching poles are provided with the help of pretension of the bolts. The analysis of deflected mode of bolted joint was carry out, and the influence of elastoplastic deformation of the bolts on the hardness of the compound was shown. The conditions, under which the structural nonlinearity can appear without loss of bearing capacity (fracture) bolts, was exposed.

**Key words:** method, time analysis, mathematical model, matrix, vector, deformation curve, oscillations, displacements, restoring force, elastoplastic deformations, material nonlinearity, constructive nonlinearity, truss, beam, bolt, pulse action

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время растёт интерес к колебаниям систем с физической и конструктивной нелинейностью. Во многом это связано с ростом и усложнением динамических нагрузок (включая аварийные), в результате которых в несущих элементах появляются пластические деформации, а в ряде случаев происходит разрушение отдельных элементов или частей конструкции. Другой стороной проблемы является недостаток исследований теоретического характера в отношении задач колебаний повреждённых конструкций и отсутствие надёжных и эффективных методов расчёта таких конструкций, позволяющих адекватно учитывать эффект разрушения связей [1, 2]. В силу специфичности колебательного процесса нередко возникают такие ситуации, когда один вид нелинейности системы вызывает появление нелинейности другого вида. Так, упругопластические колебания могут сопровождаться проявлением конструктивно нелинейных свойств системы при выключении из работы одного или нескольких несущих элементов. Однако анализ колебаний упругопластических систем показывает, что случаи возникновения конструктивной нелинейности могут происходить и без выключения несущих элементов из работы. Проблемы такого рода связаны с необходимостью учета изменения расчётной схемы сооружения в процессе упругопластического анализа, поэтому они достаточно сложны и труднодоступны для исследования. В статье в рамках теории временного анализа рассматриваются задачи колебаний дискретных диссипативных систем (ДДС) с физической и конструктивной нелинейностью.

## ДИАГРАММА ЖЁСТКОСТИ

Для описания физически нелинейного процесса будем моделировать динамическую восстанавливающую силу (ДВС) билинейной

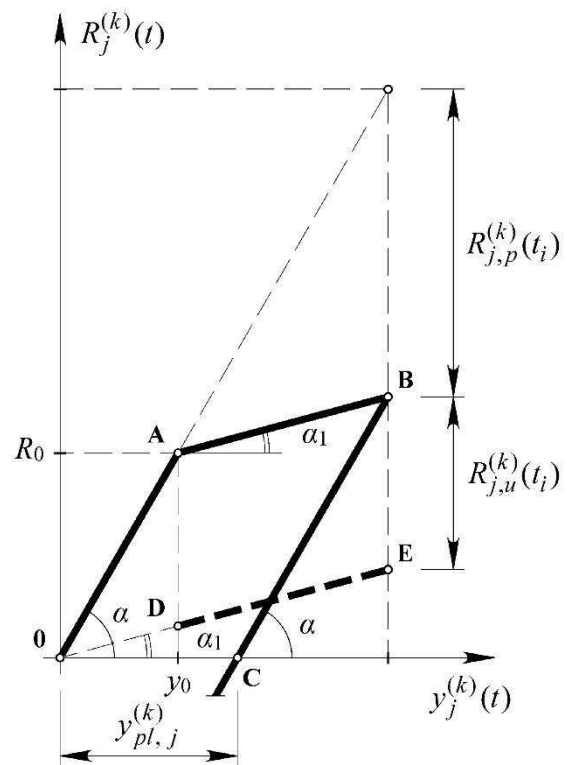


Рис. 1. Диаграмма жёсткости  $R_j^{(k)}(t) \sim y_k(t)$   $k$ -го несущего элемента  $j$ -й компоненты вектора  $R(t)$

зависимостью от перемещений  $OABC$  с нагрузкой (рисунок 1). На рисунке показана диаграмма жёсткости  $j$ -й компоненты вектора ДВС  $R(t)$  в координатах  $R_j^{(k)}(t) \sim y_j(t)$  (восстанавливающая сила – относительное перемещение), где индекс  $k$  относится к  $k$ -му несущему элементу дискретной системы.

В общем случае величина  $R_j^{(k)}(t)$  содержит квазилинейную, предельную и остаточную составляющие ДВС соответственно:  $R_{e,j}^{(k)}(t)$ ,  $R_{u,j}^{(k)}(t)$ ,  $R_{p,j}^{(k)}(t)$ , формируемые в зависимости от  $i$ -го состояния системы.

Введём обозначения:  $r_k = \tan \alpha$ ,  $r_{k,1} = \tan \alpha_1$ . Тогда закон изменения ДВС  $k$ -го несущего элемента будет иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{участок } OA: R_j^{(k)}(t) = R_{e,j}^{(k)}(t) = r_k y_k(t); \\ \text{---//--- } AB: R_j^{(k)}(t) = r_{k,1} y_k(t) + R_{u,j}^{(k)}(t_i); \\ \text{---//--- } BC: R_j^{(k)}(t) = r_k y_k(t) - R_{p,j}^{(k)}(t_i), \end{array} \right\} (1)$$

где:  $\Delta r_k = r_k - r_{k,1}$ ;  $R_{u,j}^{(k)}(t_i) = \Delta r_k y_0$ ;

$$R_{p,j}^{(k)}(t_i) = r_k y_p(t_i).$$

Здесь  $t_i$  – время начала нелинейной работы (соответствует точке  $A$  на диаграмме) или начала разгрузки (точка  $B$ ) в  $k$ -м элементе;  $y_0$  – предельное упругое перемещение (соответствует точке  $A$ );  $y_p(t_i) = y_{pl,j}^{(k)}$  – пластическое перемещение, накопленное в  $k$ -м элементе к моменту времени  $t_i$ .

При внезапном выключении  $k$ -го элемента из работы происходит изменение жёсткости системы, в результате чего её поведение приобретает конструктивно-нелинейный характер. Графически это представляется в виде ломаной линии  $OADE$  на рисунке 1, которая имеет разрыв в т.  $A$ , возникающий в момент выключения элемента  $k$  из работы. При условии отсутствия упругопластических деформаций линия действия отрезка  $DE$  проходит через начало координат.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЁТА

Пусть  $[K]$  – матрица жёсткости исходной дискретной модели, в которой все конструктивные элементы работают упруго, а  $[K_i]$  – матрица жёсткости, формируемая в момент времени  $t_i$ . Такой переход связывается, как отмечалось ранее, с нелинейной работой  $k$ -го элемента (начало текучести или начало разгрузки). Ниже дадим векторную интерпретацию соотношений (1).

Квазилинейная составляющая вектора ДВС  $\{R(t)\}$  равна

$$\{R_e(t)\} = [K_i]\{Y(t)\},$$

где  $\{Y(t)\}$  – вектор перемещений дискретной модели. Если во всех  $k$ -х конструктивных элементах отсутствуют пластические деформации (упругие колебания), то  $[K_i] = [K]$ , а нелинейные составляющие вектора ДВС равны нулю:

$$\{R_u(t_i)\} = \{R_p(t_i)\} = 0.$$

С началом нелинейного деформирования в  $k$ -м элементе конструкции вектор предельных усилий принимает вид

$$\{R_u(t_i)\} = [\Delta K_i]\{Y_u\}, \text{ где } [\Delta K_i] = [K] - [K_i].$$

Вектор предельных перемещений  $\{Y_u\}$  строится в момент перехода системы в новое (промежуточное) состояние  $\{Y_u\} = \{Y(t_i)\}$ . Если в системе до перехода в  $i$ -е состояние уже возникли пластические деформации в других несущих элементах, то вектор предельных усилий следует записывать в виде:

$$\{R_u(t_i)\} = \{R_u(t_{i-1})\} + [\Delta K_i]\{Y_u\},$$

где  $\{R_u(t_{i-1})\}$  строится при  $t_{i-1}$  по рекуррентной схеме.

При разгрузке в  $k$ -м элементе система возвращается к предыдущей жёсткости, предшествовавшей  $i$ -му состоянию:

$$[K_i] = [K_{i-1}]$$

(если до этого в системе отсутствовали пластические деформации, то  $[K_{i-1}] = [K]$ ). Вектор остаточных усилий определяется зависимостью

$$\{R_p(t_i)\} = [K_{i-1}]\{Y_p\},$$

где  $\{Y_p\}$  – вектор остаточных перемещений, формируемый при  $t_i$ . Если разгрузка протекает сразу в нескольких несущих элементах, формула для остаточных усилий будет иметь вид:

$$\{R_p(t_i)\} = \{R_p(t_{i-1})\} + [K_{i-1}]\{Y_p\}.$$

Обобщая результаты, получим выражение вектора ДВС:

$$\left. \begin{aligned} \{R(t)\} &= [K_i]\{Y(t)\} + \{B(t_i)\}, \\ \{B(t_i)\} &= -\{R_u(t_i)\} + \{R_p(t_i)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При колебаниях конструктивно-нелинейной системы, когда происходит внезапное выключение  $k$ -го несущего элемента, величина вектора (3), отвечающего за физически нелинейные свойства вектора ДВС, обращается в нуль.

### УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

На основе формулы (2) можно сформировать дифференциальное уравнение движения квазилинейной системы (4), которое совместно с начальными условиями (5) на любом интервале движения при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} [M_i]\{\ddot{Y}(t)\} + [C_i]\{\dot{Y}(t)\} + [K_i]\{Y(t)\} &= \\ &= \{P(t)\} + \{Q\} + \{B(t_i)\}, \\ \{Y(t_i)\} = \{Y_0\}, \{\dot{Y}(t_i)\} = \{\dot{Y}_0\}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $[M_i]$ ,  $[C_i]$ ,  $[K_i]$  – матрицы масс, демпфирования и жёсткости системы в  $i$ -м состоянии;  $\{P(t)\}$ ,  $\{Q\}$  – векторы динамической и статической нагрузки.

Интегрирование уравнения движения (4) связано с необходимостью построения фундаментальных решений. Матричная функция  $[\Phi(t)] = [e^{S_i t}]$  является фундаментальной матрицей однородного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), соответствующего неоднородному уравнению (4), тогда и только тогда, когда матрица  $[S_i]$  удовлетворяет характеристическому матричному квадратному уравнению (МКУ):

$$[M_i][S_i]^2 + [C_i][S_i] + [K_i] = 0. \quad (6)$$

Матрица  $[S_i]$  является матрицей внутренних динамических характеристик ДДС, поскольку в ней содержится вся спектральная информация о собственных колебаниях дискретной модели в любом  $i$ -м состоянии [3].

При колебаниях физически и конструктивно-нелинейной системы уравнения движения сохраняют свою структуру в форме записи (4). При переходе системы в новое  $(i+1)$ -е состояние происходит корректировка (изменение) параметров расчётной динамической модели (РДМ). В левых частях уравнений (4) и (6) пересчитываются матрицы  $[M_{i+1}]$ ,  $[C_{i+1}]$ ,  $[K_{i+1}]$ , на основе которых вычисляется новое значение  $[S_{i+1}]$ . В правой части уравнения (4) формируются векторы  $\{R_u(t_{i+1})\}$ ,  $\{R_p(t_{i+1})\}$ . Процесс корректировки параметров РДМ завершается обязательной сменой начальных условий (5).

Такое моделирование физически и конструктивно-нелинейного процесса позволяет сводить динамическую задачу к разработанному расчётному алгоритму, при котором неупругий анализ рассматривается как последовательность расчёта упругих систем [3]. При этом уравнения динамической реакции квазилинейной модели ДДС на интервале времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  при произвольном внешнем воздействии записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \{Y(t)\} &= 2\text{Re}\{Z(t)\}, \\ \{\dot{Y}(t)\} &= 2\text{Re}\{[S_i]\{Z(t)\}\}, \\ \{\ddot{Y}(t)\} &= 2\text{Re}\{[S_i]^2\{Z(t)\}\} + \\ &+ [M_{i-1}]^{-1}(\{Q\} + \{P(t)\} + \{B(t_i)\}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} \{Z(\tilde{t})\} &= \{Z_0(\tilde{t})\} + \{Z^{QR}(\tilde{t})\} + \{Z^P(\tilde{t})\}, \\ \{Z_0(\tilde{t})\} &= [\Phi(\tilde{t})][U_i]^{-1}[M_i]\{A_i\}, \\ \{Z^{QR}(\tilde{t})\} &= ([\Phi(\tilde{t})] - [E])\{D_i\}, \\ \{Z^P(\tilde{t})\} &= [U_i]^{-1} \int_{t_i}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь:  $\tilde{t} = t - t_i$ ;  $[\Phi(\tilde{t})] = e^{S_i \tilde{t}}$ ;  
 $\{A_i\} = -[\bar{S}_i]\{Y_0\} + \{\dot{Y}_0\}$ ;

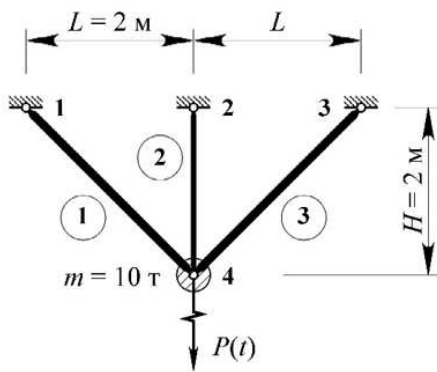


Рис. 2. Расчётная динамическая модель ферменной конструкции.

$$\begin{aligned} \{D_i\} &= ([U_i][S_i])^{-1}(\{Q\} + \{B(t_i)\}); \\ [U_i] &= [M_i][S_i] + [S_i]^T[M_i] + [C_i]. \end{aligned}$$

Система уравнений (7), (8) позволяет с единых позиций определять динамическую реакцию ДДС в  $i$ -м состоянии независимо от вида нелинейности (физической или конструктивной).

Силовые параметры реакции: векторы восстанавливающих, диссипативных и инерционных сил – вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \{R(t)\} &= [K_i]\{Y(t)\} + \{B(t_i)\}, \\ \{F(t)\} &= [C_i]\{\dot{Y}(t)\}, \\ \{I(t)\} &= -[M_i]\{\ddot{Y}(t)\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

### ПОВЕДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕАКЦИИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОМЕЖУТОЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

В моменты перехода физически и конструктивно-нелинейной системы в новое состояние (при  $t = t_i$ ) ускорения, а также силовые параметры (9) претерпевают разрывы. Непрерывность векторов перемещений и скоростей обеспечивается постановкой начальных условий (5).

Аналитические выражения векторов невязок указанных величин в точке разрыва имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \ddot{Y}(t_i)\} &= -[M_i]^{-1}([\Delta K]\{Y_0(t_i)\} + \\ &+ [\Delta C]\{\dot{Y}_0\} + \{B(t_i)\}), \\ \{\Delta R(t_i)\} &= [\Delta K]\{Y_0(t_i)\} + \{B(t_i)\}, \\ \{\Delta F(t_i)\} &= [\Delta C]\{\dot{Y}_0(t_i)\}, \\ \{\Delta I(t_i)\} &= \{\Delta R(t_i)\} + \{\Delta F(t_i)\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $[\Delta K] = K_{i-1} - K_i$ ,  $[\Delta C] = C_{i-1} - C_i$  – невязки матриц жёсткости и демпфирования.

В случае решения упругопластической задачи в формулах (10) невязка  $\{\Delta R(t_i)\} = 0$ , т.к. величина  $[\Delta K]\{Y_0(t_i)\} + \{B(t_i)\} = 0$ , что обусловлено непрерывным характером ломаной линии  $OABC$  на диаграмме (см. рисунок 1).

При решении упругой конструктивно-нелинейной задачи величины, отвечающие за физическую нелинейность (3), обращаются в нуль:  $\{B(t_i)\} = 0$ . Тогда уравнения (10) совпадают с уравнениями, приведёнными в работе [4]. При этом следует обратить внимание на тот факт, что невязка вектора ДВС  $\{\Delta R(t_i)\} \neq 0$ , т.к. ломаная  $OADE$  на рисунке 1 является разрывной линией.

### ПРИМЕР 1

Рассмотрена задача колебаний фермы, РДМ которой имеет две степени свободы в узле 4 (рисунок 2). Стержни имеют квадратное поперечное сечение со сторонами 2,6 см, 1,0 см и 2,5 см, соответственно, и изготовлены из стали 09Г2 (модули упругости: начальный  $E = 210060$  МПа и пониженный –  $E_1 = 743$  МПа).  $Q = [0, mg]^T$  кН – вектор статической узловой нагрузки.

Решение задачи проводилось в 2-х вариантах: без учёта и с учётом потери устойчивости центрального стержня при его упругопластическом деформировании.

Внешняя нагрузка в обоих вариантах – синусоидальный импульс продолжительностью 0,01 с. Вектор амплитуд нагрузки для 1-го варианта решения задачи –  $\{P_0\} = [0, 425]^T$  кН; для 2-го –  $\{P_0\} = [0, 250]^T$  кН.

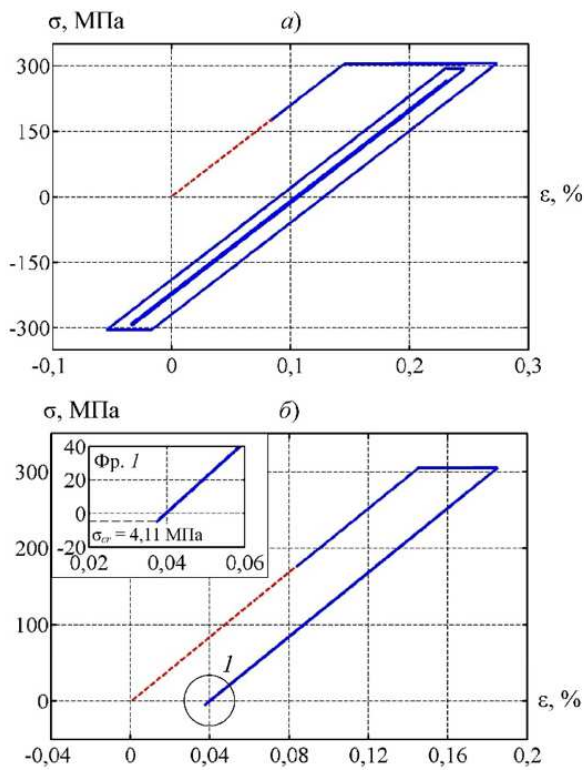


Рис. 3. Диаграммы деформирования стержня № 2 (рис. 2) при учёте: а – физической нелинейности; б – физической и конструктивной нелинейности

Учёт затухания проводился с помощью модели неоднородного демпфирования [3]:

$$[C] = \alpha([K][T] + [T][K])/2 + \beta[M][V] \quad (11)$$

при  $\alpha = 0,973$ ,  $\beta = 1 - \alpha = 0,027$ . Элементы диагональных матриц

$$[T] = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ и } [V] = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$$

определялись по формулам:

$$\tau_i = \gamma \sqrt{\frac{m_i}{r_{ii}}}; \quad v_i = \gamma \sqrt{\frac{r_{ii}}{m_i}},$$

где  $\gamma = 0,0223$  – коэффициент потерь;  $m_i, r_{ii}$  – диагональные элементы матриц  $[M]$  и  $[K]$ , соответственно.

При рассмотрении 1-го варианта задачи на начальном этапе система находится в состоя-

нии циклического упругопластического деформирования 2-го стержня. За наступившими пластическими деформациями следует разгрузка. Этот процесс имеет гистерезисный характер (рисунок 3, а). Представленные математические модели расчёта (2) (3) в процессе компьютерного моделирования задачи позволяют определять параметры петель пластического гистерезиса: ширину и амплитуду. Характерные точки диаграммы находятся в соответствии с временными точками  $t_i$ , разделяющими процесс упругопластической реакции системы на квазилинейные интервалы.

Во 2-м варианте задачи центральный стержень после упругопластического деформирования и разгрузки (рисунок 3, б) выключился из работы вследствие потери устойчивости при критическом сжимающем напряжении  $\sigma_{cr} = 4,11$  МПа (см. фрагм. 1). После этого система начинает работать по конструктивно-нелинейной схеме с попеременным включением и выключением центрального стержня (6 циклов колебаний). Включение происходит при возникновении растягивающих усилий, выключение – сжимающих. Далее в обоих вариантах задачи после завершения нелинейной работы система переходит в стадию упругого деформирования с учётом остаточных деформаций.

На рисунке 4 приведены осциллограммы некоторых параметров реакции для 1-го варианта задачи: перемещений (а), восстанавливающих (б) и инерционных (в) сил.

Осциллограммы перемещений представляют собой непрерывные графики без переломов и имеют ненулевые асимптоты (см. фрагм. 1). При этом их значения изменяются в моменты перехода системы в новое состояние вследствие изменения жесткостных параметров.

Горизонтальные колебания имеют ярко выраженную форму «биения», с периодом  $T = 0,822$  с, что обусловлено близостью частот собственных колебаний:  $\omega_1 = 69,25$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 76,9$  с<sup>-1</sup>. Для вертикальных колебаний этот эффект выражен значительно слабее.

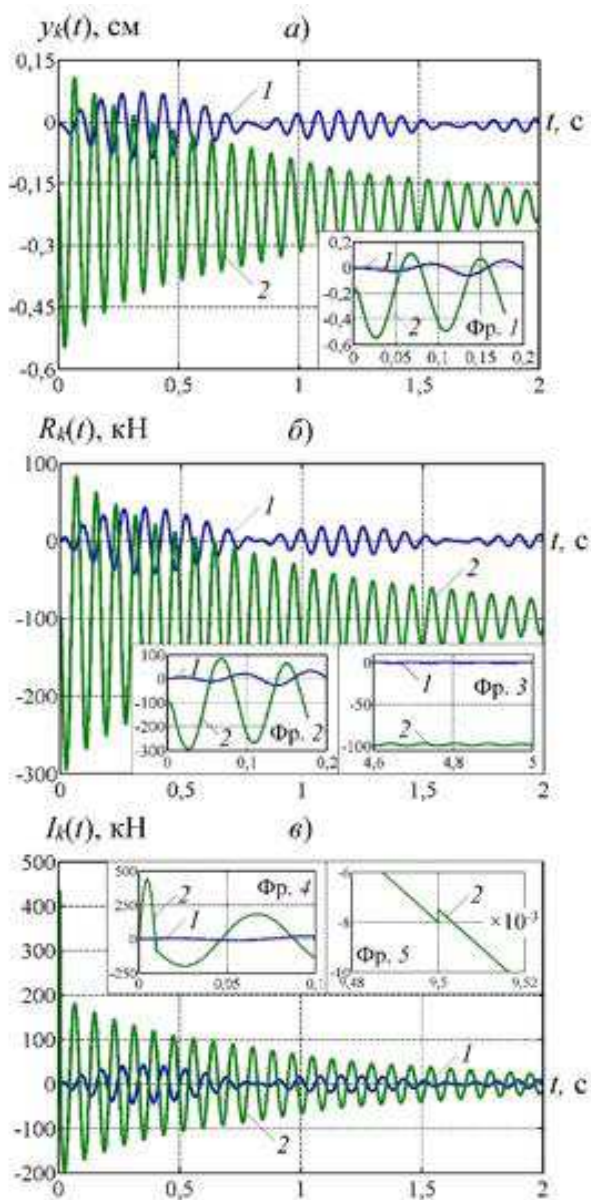


Рис. 4. Осциллограммы параметров реакции для 1-го варианта решения задачи (1 – по горизонтали, 2 – по вертикали): а – перемещения; б – восстанавливающие силы; в – инерционные силы

На графиках восстанавливающих сил (б) нет разрывов (см. фрагм. 2). Вертикальная составляющая имеет асимптоту, высота которой численно равна значению статического усилия  $Q$  (см. фрагм. 3).

График инерционных сил (в) не имеет смещения относительно положения нулевого уровня. На фрагментах графика для вертикальной составляющей при  $t = 0,01$  с можно

видеть перелом, связанный с окончанием действия импульсной нагрузки (фрагм. 4), и один из скачков (фрагм. 5) в момент образования пластических деформаций в центральном стержне при  $t = 0,0095$  с. Численное значение скачка в соответствии с (10) составило 0,5117 кН.

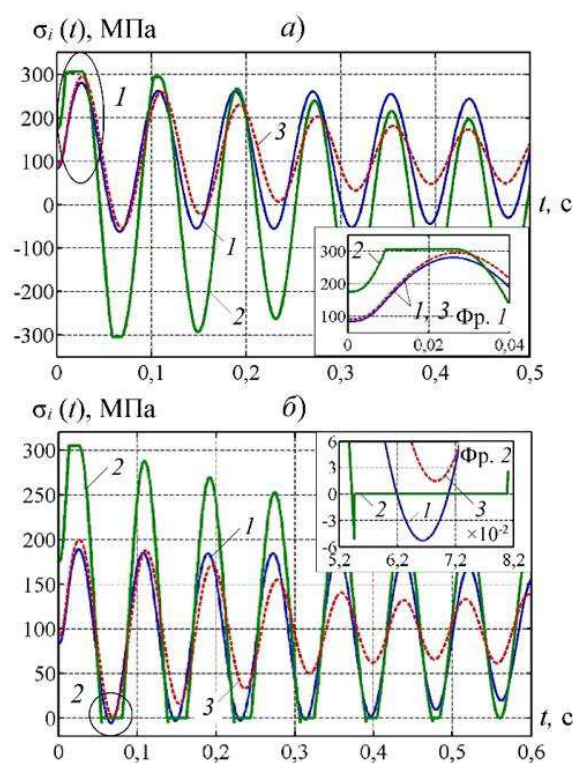


Рис. 5. Осциллограммы нормальных напряжений в стержнях фермы при учёте: а – физической нелинейности; б – физической и конструктивной нелинейности

Для 1-го варианта задачи (рисунок 5, а) осциллограмма нормальных напряжений в центральном стержне содержит 4 пологих участка упрочнения. Эти участки появляются при достижении предела текучести  $\sigma_{yl}$ . Для 1-го полуцикла эта величина составила 305 МПа (см. фрагм. 1), для последующих полуциклов – определялась в соответствии с принципом Мазинга [5].

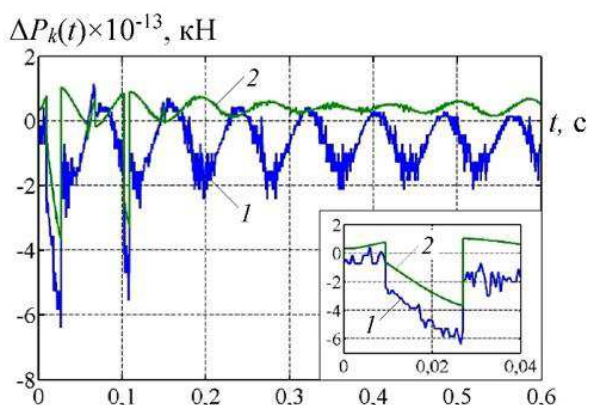


Рис. 6. Невязка уравнения движения (3) (1 – по горизонтали, 2 – по вертикали)

При 2-м варианте решения задачи (рисунок 5, б) первый пологий участок связан с упруго-пластической работой системы, остальные – с её конструктивно нелинейной работой вследствие выключения центрального стержня (см. фрагм. 2). Такое поведение стержня происходит вплоть до  $t = 0,48$  с, после чего система переходит в упругий режим работы с одноименным знаком напряжений.

Для проверки условия динамического равновесия системы полученное решение (7), (8) было подставлено в левую часть уравнения (4). Результат этой проверки для 1-го варианта задачи показан на рисунке 6. Отсюда следует, что невязка уравнения не превышает величины  $\Delta P_k(t) \leq |6,4 \times 10^{-13}|$  кН, что свидетельствует о высокой точности решения. Разрывной характер графиков обусловлен наличием скачков у инерционных и диссипативных сил; восстанавливающие и внешние силы по условию задачи являются непрерывными величинами. При  $t = 0,0095$  с согласно (10) скачки на кривых невязок вектора результирующих динамических сил в направлении обеих степеней свободы составляют

$$\{\Delta P\} = \begin{Bmatrix} -1,7055 \\ -1,4166 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-13} \text{ кН.}$$

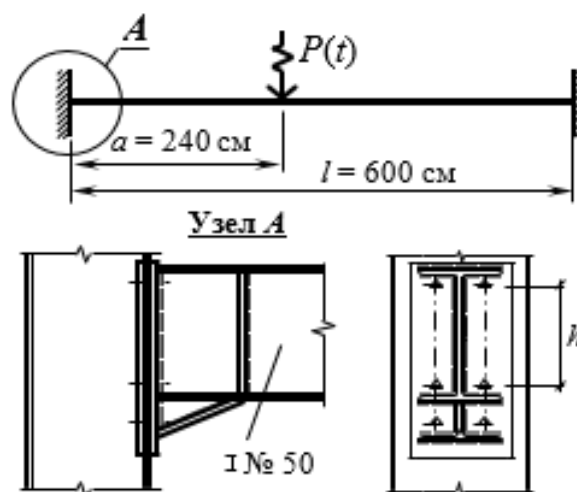


Рис. 7. Расчётная схема балки с болтовым соединением в опорном узле

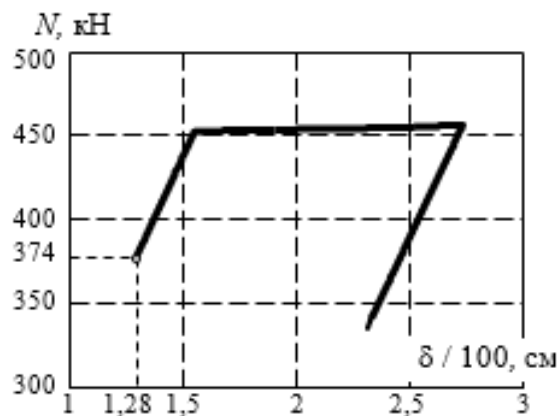


Рис. 8. Диаграмма деформирования материала болтов

## ПРИМЕР 2

На жёстко защемлённую балку (сечение – двутавр № 50) длиной  $l = 6$  м действует синусоидальный импульс  $P(t) = P_0 \sin(\pi t / t_a)$  с амплитудным значением  $P_0 = 60$  кН и продолжительностью  $t_a = 0,2$  с (рисунок 7). Опорное закрепление балки выполнено при помощи предварительно напряжённых болтов с контролируемым натяжением 356 кН (суммарное усилие на два болта).

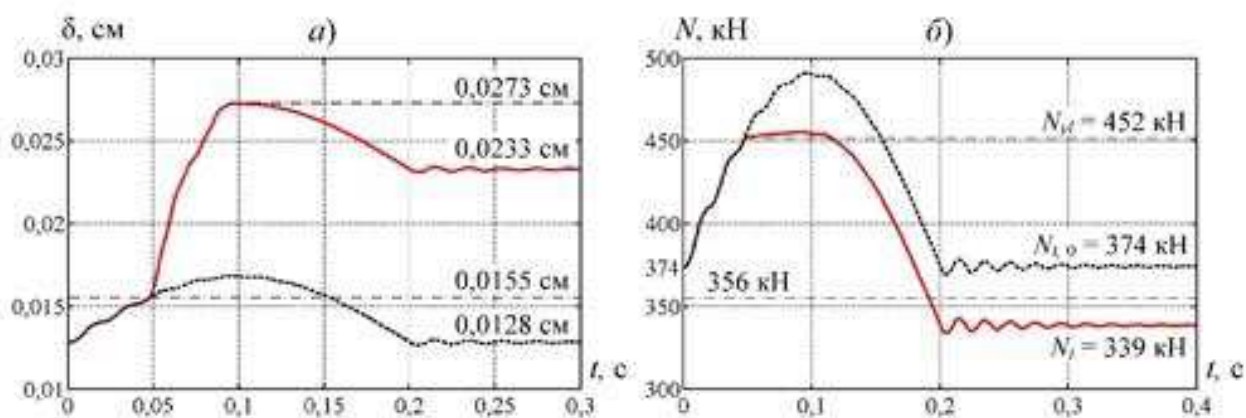


Рис. 9. Упругопластические удлинения (а) и продольные усилия (б) в болтах

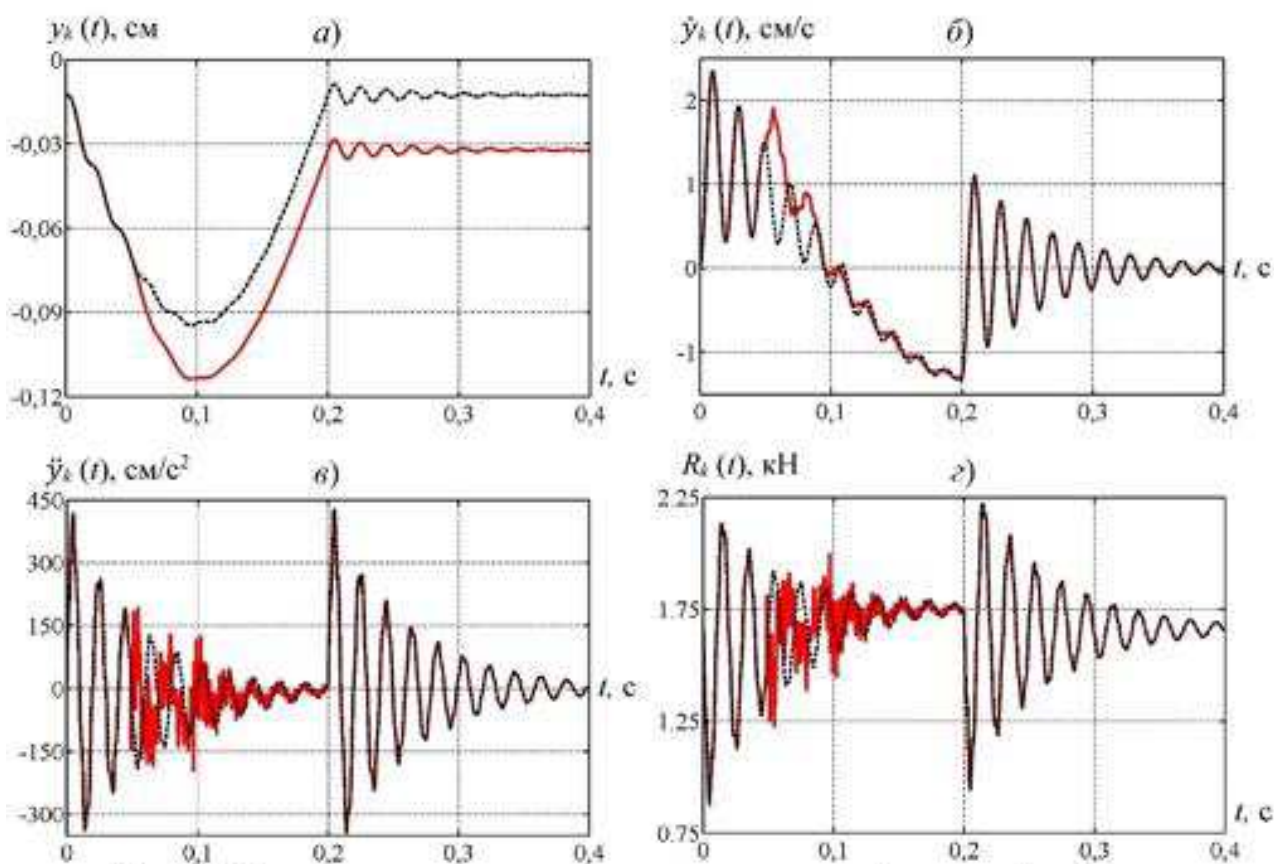


Рис. 10. Осциллограммы параметров реакции в середине пролёта балки: а – перемещения; б – скорости; в – ускорения; г – восстанавливающие силы

Размеры и физико-механические характеристики болтов: класс прочности 8.8, сталь 40Х, диаметр  $d = 24$  мм, рабочая длина 5 см,  $h = 40$  см, модуль упругости  $E = 2,1 \times 10^5$  МПа (на участке упрочнения  $E_1 = 208,1$  МПа), относительные деформации:  $\varepsilon_{yl} = 0,0031$ ;  $\varepsilon_u = 0,4$ .

Удлинение болтов при предварительном натяжении составляет  $\delta = 0,0122$  см. Дискретная модель балки получена путём разбиения пролёта на равные отрезки  $b$ . При этом массы расположены на границах элементарных участков.



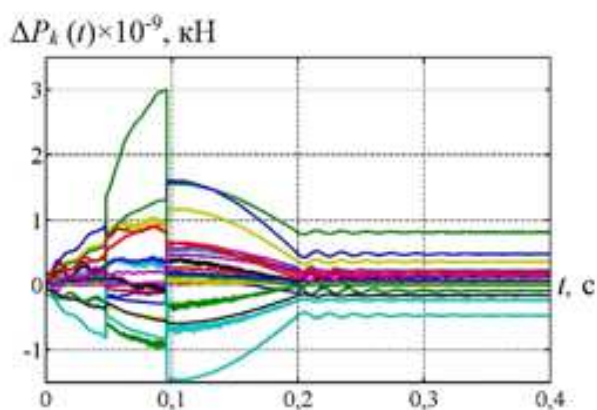


Рис. 11. Невязка уравнения движения (3)

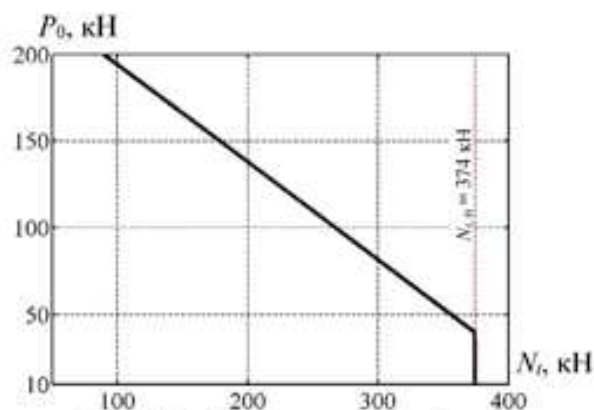


Рис. 12. Зависимость продольных усилий в болтах от величины амплитуды импульсной нагрузки

Число степеней свободы при  $b = 60$  см равно  $n = 20$  и определялось с учётом линейных и угловых перемещений узлов. Узловая нагрузка от собственного веса составила  $Q = 1,662$  кН. Учёт затухания проводился по формуле (11) при  $\alpha = 0,8$ .

На рисунке 8 представлена диаграмма жёсткости предварительно напряжённых болтов, из которой видно, что собственный вес конструкции оказывает дополнительные растягивающие усилия сверх предварительного натяжения. Пластические удлинения болтов, как следует из осциллограммы (рисунок 9, а), составили  $\delta = 0,0117$  см. В результате этих удлинений уменьшения растягивающих усилий в болтах после разгрузки. Кривая продольных усилий на осциллограмме (рисунок 9, б) при  $t \geq 0,2$  с проходит значительно ниже упругой кривой (пунктирная линия).

Для сечения в середине пролёта балки на рисунке 10 приведены осциллограммы кинематических параметров реакции (перемещений (а), скоростей (б) и ускорений (в)) и силового параметра – восстанавливающей силы (г). Пунктирные линии относятся к упругой реакции балки.

Качество полученного решения иллюстрируется на графиках невязок уравнения движения (4), построенных во временной области  $t \in [0; 0,4]$  с (см. рисунок 11).

Анализ НДС предварительно напряжённых болтов, проделанный выше, показывает, что падение растягивающих усилий (и напряжений) вследствие появления пластических деформаций (рисунок 9, б) может оказать влияние на условия опирания балки в жёстко защемленном узле. На графике рисунка 12 представлена зависимость величины растягивающего усилия  $N_t$  в преднапряжённых болтах после разгрузки от амплитудного значения  $P_0$  синусоидального импульса ( $t_a = 0,2$  с). Вертикальная пунктирная прямая на графике соответствует усилию в болтах  $N_{t,0}$  при отсутствии динамической нагрузки.

Преобразование жёстко защемлённого узла происходит последовательно по мере развития пластических удлинений болтов и снижения растягивающего усилия  $N_t$ : от упруго защемлённого до шарнирного опирания. Особенность этого процесса состоит в том, что при невысокой скорости деформирования и пластических удлинениях, не превышающих предельных значений, несущая способность болтов оказывается обеспеченной. Поэтому изменение расчётной схемы сооружения вследствие изменения жёсткости узла происходит без разрушения несущих элементов болтового соединения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках теории временного анализа построена система разрешающих уравнений реакции ДДС для  $i$ -го квазилинейного интервала, позволяющая получить точное решение при учёте физической и конструктивной нелинейности.

Получена многоцикловая диаграмма деформирования элемента конструкции, для которой параметры пластического гистерезиса (ширина и амплитуда петель) строятся на основе приведённых математических моделей. Показано, что в отдельных случаях конструктивно нелинейные свойства системы, вызываемые упругопластическими деформациями, могут проявляться без выключения (разрушения) несущих элементов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремеев П.Г.** Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – М., 2006. – № 2. – С. 65-72.
2. **Чернов Ю.Т.** К расчёту систем с выключающимися связями / Ю.Т. Чернов // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – М., 2010. – № 4. – С. 53-57.
3. **Потапов А.Н.** Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: монография / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.
4. **Потапов А.Н.** Анализ колебаний повреждённых конструкций / А.Н. Потапов // *Интеграция, партнёрство и инновации в строительной науке и образовании: Сб. трудов Международной научной конференции 19–21 октября 2011*. – Москва, МГСУ, 2011. – Т.2. – С. 746-750.
5. **Москвитин В.В.** Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин – М.: Изд-во МГУ, 1965 – 264 с.

---

**Потапов Александр Николаевич**, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), кафедра строительной механики, д.т.н., проф., зав. каф. строительной механики, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, дом 76, тел.: +7(351) 267-90-00, тел./факс: +7(351) 267-47-85, e-mail: potapov.alni@gmail.com.

**Уфимцев Евгений Михайлович**, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), кафедра строительной механики, ассистент, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, дом 76, тел.: +7(351) 267-90-00, тел./факс: +7(351) 267-47-85, e-mail: comtech606@yandex.ru.

**Alexander N. Potapov**, South-Ural State University, Department of Structural Mechanics, Ph.D., Professor, Chairman of Department of Structural Mechanics, 76, Lenin Prospect, Chelyabinsk, 454080, Russia, phone: +7(351) 267-90-00, phone/fax: +7(351) 267-47-85, e-mail: potapov.alni@gmail.com.

**Eugene M. Ufimtsev**, South-Ural State University, Department of Structural Mechanics, Assistant, 76, Lenin Prospect, Chelyabinsk, 454080, Russia, phone: +7(351) 267-90-00, phone/fax: +7(351) 267-47-85, e-mail: comtech606@yandex.ru.

## ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ В ЛОКАЛЬНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПРОЕКТНЫЕ ЕДИНИЦЫ

*А.Н. Супрун, Д.И. Кислицын, В.Е. Хромых*

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, г. Нижний Новгород, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** При инженерном проектировании повышенной сложности (высокая размерность модели, физическая или геометрическая нелинейности, численное моделирование прогрессирующего обрушения здания и т.д.), предложено использовать распределённую вычислительную технику в организации. С этой целью строительный объект при проектировании может быть разделён на проектные единицы. В этой статье мы описываем подход для реализации этого метода.

**Ключевые слова:** параллельные технологии, распределённые вычисления, проектные единицы

## THE PROBLEMS REALIZATION OF THE METHOD OF DIVIDING COMPLEX BUILDING OBJECTS INTO PROJECT DESIGN UNITS IN A LOCAL AREA NETWORK

*Anatoliy N. Suprun, Dmitriy I. Kislitsyn, Vladislav E. Khromykh*

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, RUSSIA

**ABSTRACT:** To perform engineering design tasks of increased complexity (high dimensionality of the model, physical or geometrical nonlinearity, numerical modeling of progressive collapse of buildings, etc.) it is suggested to use a distributed computing technique within the organization. For this purpose the construction object under design can be divided into project design units. In this paper we describe an approach for the realization of this method.

**Key words:** parallel technology, distributed computing, project design units

Решение сложных нестационарных и нелинейных краевых задач, к которым можно отнести моделирование возможных чрезвычайных ситуаций при оценке живучести проектируемых строительных объектов, реконструкцию техногенных катастроф, террористических актов и т.п. в настоящее время на уровне достаточной представительности не обеспечивается современными многопроцессорными вычислительными системами даже с пиковой производительностью в тысячи Tflops. Это связано, прежде всего, с низкой реальной производительностью современных мультипроцессорных систем примени-

тельно к задачам указанного класса, что, в свою очередь, вызвано отсутствием новых математических методов, которые бы позволяли строить вычислительные процессы по технологии массового распараллеливания. В связи с этим, в настоящее время назрела необходимость в переосмыслении традиционных подходов к построению параллельных процедур [1].

Одним из направлений в построении методов, ориентированных на применение массового распараллеливания, явилась разработка метода деления объекта на проектные единицы [2,3].

Суть метода состоит в условном разделении сложного строительного объекта на составляющие элементы - проектные единицы - с последующим построением вычислительного процесса в распределенных вычислительных средах или на многомашиных комплексах в виде параллельных и согласующихся между собой решений задач уменьшенной статической неопределенности. Указанный метод, реализованный для конструкций из стержневых систем, может быть развит и на сплошные среды, а также на широкий класс краевых задач математической физики.

Положим, что некоторая вычислительная система  $CS$  (рабочая станция, кластер рабочих станций и т.п.) использует для решения линейной задачи математической физики прикладной программный комплекс  $P$ . Пусть далее  $p \in P$  - прикладная программа, разработанная на базе некоторого метода дискретизации, обеспечивающего достаточно точное решение корректно поставленной краевой задачи  $B$  с начальными  $C_0$  и краевыми  $C_B$  условиями для допустимых программой  $p$  областей  $\Omega$ . При этом программа  $p$  использует замену областей изменения независимых переменных внутри области ( $\Omega$ ) и на её границе ( $\bar{\Omega}$ ) на дискретные множества точек, соответственно,  $\omega$  и  $\bar{\omega}$ . Тем самым  $p$  будет выполнять преобразование дискретного множества численных значений  $U(x) = \varphi(x)$  на  $\bar{\Omega}$  (обозначим  $\bar{U}_{\bar{\omega}}$ ) в численное множество значений  $U(x)$  на  $\Omega(U_{\omega})$ :

$$U_{\omega} = A\bar{U}_{\bar{\omega}} \quad (1)$$

где  $A$  - линейный оператор,  $U(x)$  - значение потенциала (тензора) в точке  $x$  соответствующей размерности.

Для решения задачи  $B$  разделим  $\Omega$  на конечное множество  $E$  из  $M$  элементов  $e_1, \dots, e_m, \dots, e_M$ , каждый из которых допустим для расчета программой  $p$ . Геометрическую взаимосвязь элементов  $E$  можно иллюстрировать графом смежности (рисунок 1).

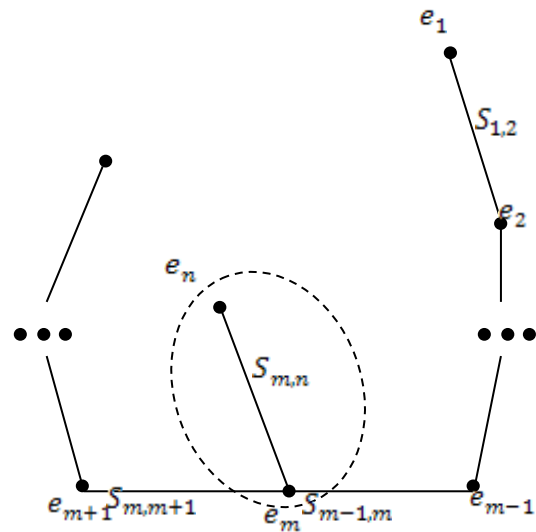
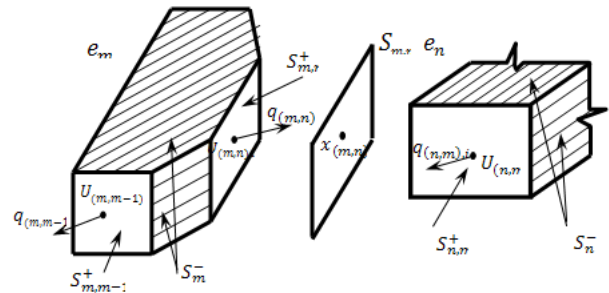


Рис. 1. Граф смежности элементов (вершины – элементы, рёбра – поверхности раздела элементов)

Рассмотрим выделенный пунктиром на рис.1 фрагмент объекта расчёта в условно разделённом состоянии (рисунок 2), где  $S_m^-, S_n^-$  - “свободные” и  $S_{m,n}^+, S_{n,m}^+$  - “смежные” поверхности,  $S_{m,n}$  - поверхность раздела элементов  $m$  и  $n$  ( $m < n$ ).



проксимации решений краевых задач на поверхностях  $S_{m,n}^+$  и  $S_{n,m}^+$ . Решение выполняется поэтапно в соответствии с алгоритмом, описанном в [2,3].

Опыт разработки автоматизированной системы управления расчётом сложных строительных объектов на базе метода разделения объекта на проектные единицы [3 - 5] показал, что практическая реализация системы сводится к решению следующих задач:

- 1) разработка базы данных для централизованного хранения всех необходимых в процессе расчёта численных данных;
- 2) разработка графического интерфейса пользователя;
- 3) организация клиент-серверного взаимодействия между проектировщиками и сервером;
- 4) формирование исходных данных на входном языке базового программного средства;
- 5) управление базовым программным средством;
- 6) графическое отображение структуры и параметров модели;
- 7) формирование и решение систем уравнений, определяющих механическое взаимодействие смежных проектных единиц;
- 8) организация сбора и анализа результатов расчёта.

К настоящему времени в ННГАСУ разработана и проходит тестирование третья версия системы, позволяющая проектным организа-

циям при незначительных финансовых затратах существенно ускорить процесс проектирования сложных строительных объектов. Система была разработана в среде Microsoft Visual C# 3.5. В качестве СУБД в разработанном программном комплексе используется свободно распространяемая версия Microsoft SQL Server 2008 Express.

Структурная схема, иллюстрирующая работу разработанного программного средства, представлена на рисунок 3.

В качестве примера был выполнен расчёт объекта, состоящего из 7 соединённых между собой переходами однотипных секций (рисунок 4). Каждая секция представляла из себя 35-этажный монолитный каркас с перекрытиями на несущих колоннах (рисунок 5). В качестве проектных единиц были приняты секции объекта. Расчёт напряжённо-деформированного состояния каждой секции, состоящей из 190 970 элементов, был связан с необходимостью решения 995 652 уравнений. Таким образом, вся задача сводится к решению системы из 6 969 276 уравнений.

Расчёт модели выполнялся на персональных компьютерах на базе процессора Intel i3 540 (ОЗУ – 4 ГБ), объединённых в локальную сеть. Требуемое время и объём дискового пространства, затрачиваемые на расчёт каждой секции (ПЕ) при работе на однотипных ПК в ансамбле, указаны в табл. 1, 2.

Таблица 1. Затраты времени на расчёт одной секции, затрачиваемые каждым ПК при решении задачи в составе всего вычислительного комплекса.

Параметр \ №ПК	1 ПК	2 ПК	3 ПК	4 ПК	5 ПК	6 ПК	7 ПК
T <sub>ed</sub> , мин.	165.0	162.0	159.0	154.0	152.0	154.0	150.0
T <sub>fc</sub> , мин.	151.0	147.0	118.0	137.0	186.0	120.0	129.0
<b>T, час.</b>	5.5	5.3	4.7	5.0	5.7	4.6	4.7

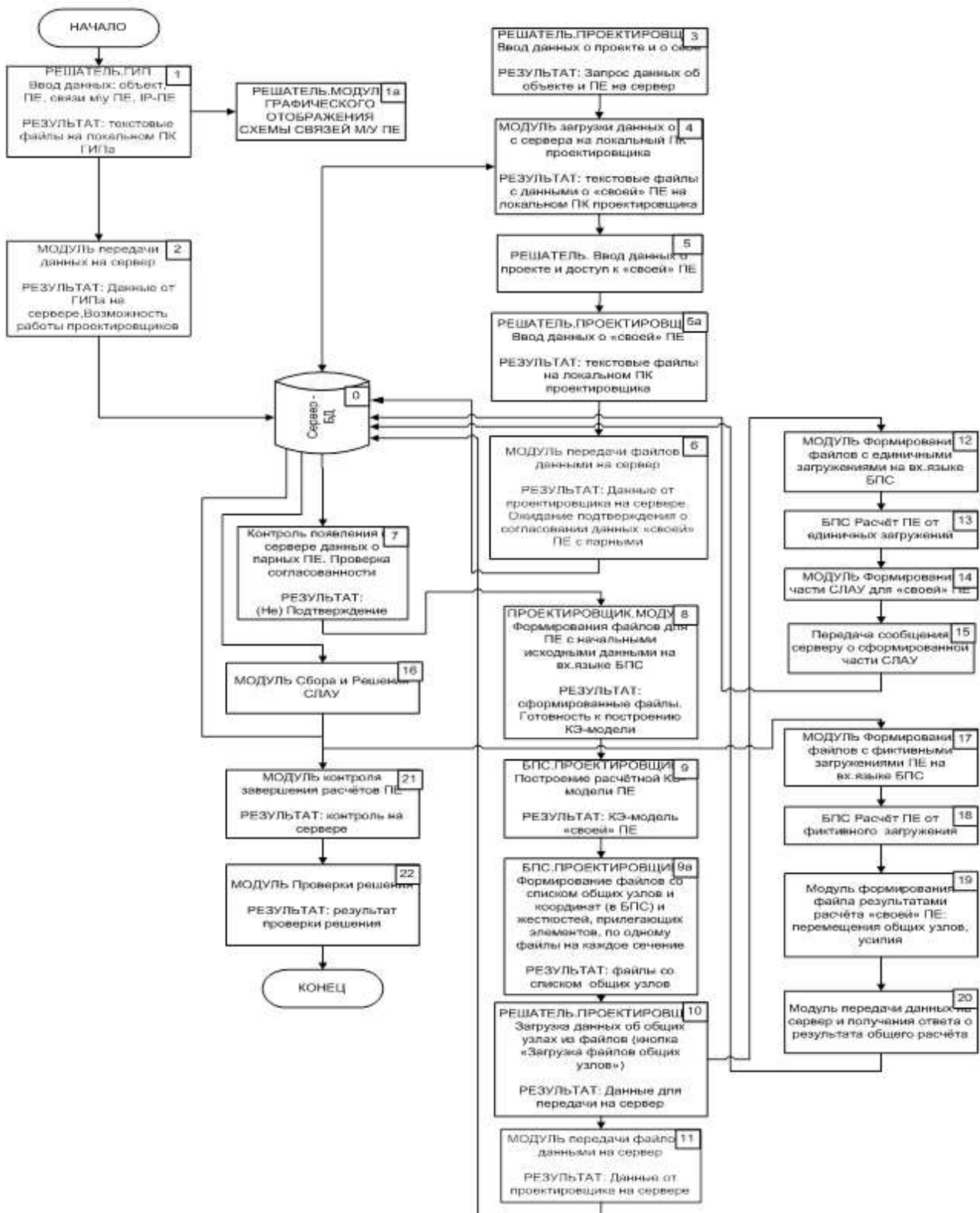


Рис. 3. Структурная схема разрабатываемой системы.

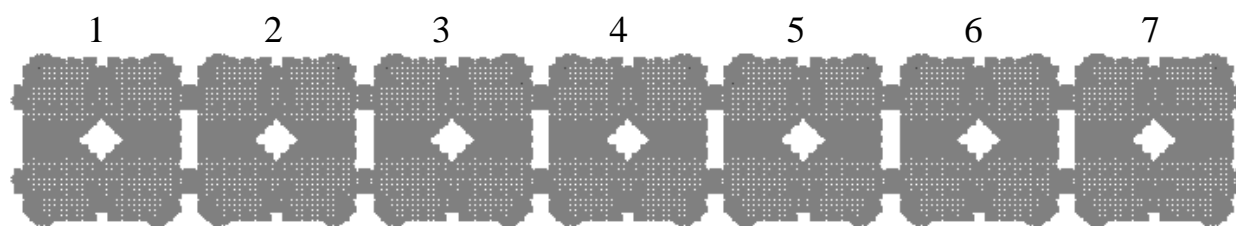


Рис. 4. Схематичный план рассчитываемого объекта.

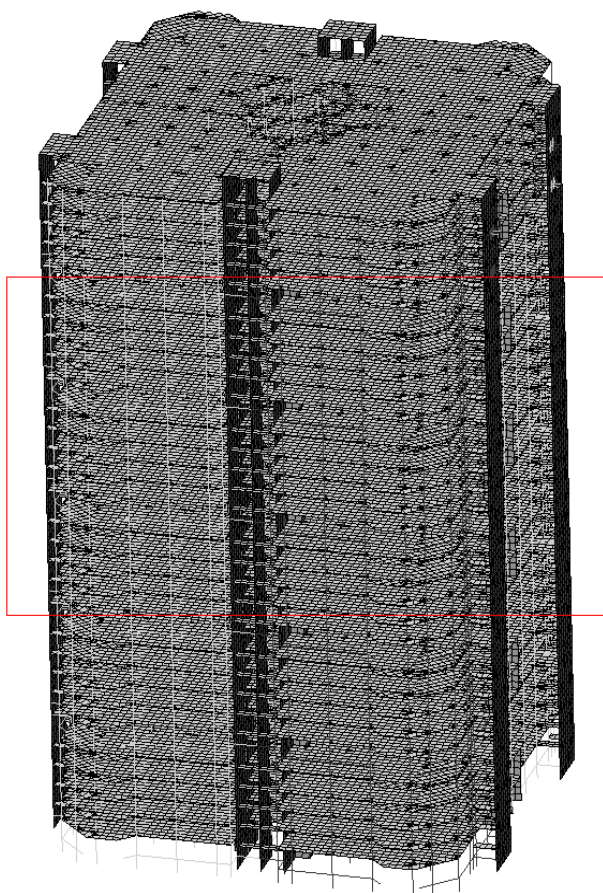


Рис. Типовая секция строительного объекта.

В табл. 1  $T_{ed}$  – время, затрачиваемое каждым компьютером на расчёт секции от тестирующих (единичных) усилий и внешней нагрузки;  $T_{fic}$  – время, затрачиваемое на расчёт от вычисленных усилий взаимодействия секций и внешней нагрузки;  $T$  – суммарное время расчёта одной ПЕ с учётом времени, затраченного на согласование решений. В соответствии с табл. 1 на решение задачи определения НДС всего объекта потребовалось затратить 5.7 часов.

В табл. 2  $HDD_{ed}$  – объём дискового пространства, потребовавшийся на расчёт секций от тестирующих (единичных) усилий и внешней нагрузки;  $HDD_{fic}$  – то же на расчёт секций от вычисленных усилий взаимодействия и внешней нагрузки;  $HDD$  – суммарный объём дискового пространства, потребовавшийся на расчёт секций.

Таблица 2. Объёмы дискового пространства, требующиеся для расчёта каждой секции.

Параметр \ №ПК	№ПК						
	1 ПК	2 ПК	3 ПК	4 ПК	5 ПК	6 ПК	7 ПК
$HDD_{ed}$ , ГБ	14.1	14.2	14.2	14.2	14.2	14.2	14.1
$HDD_{fic}$ , ГБ	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1
$HDD$ , ГБ	28.2	28.3	28.3	28.3	28.3	28.3	28.2

Расчёт объекта только на одном компьютере не мог производиться по причине недостатка аппаратных ресурсов. Однако, если опираясь на известные данные по производительности ПК выполнить экстраполяцию продолжи-

тельности решения рассматриваемой задачи на одном гипотетическом компьютере, то получим, что время расчёта без разделения на ПЕ могло бы быть по крайней мере в 5 –

10 раз больше, чем время с разделением на ПЕ (5.7 часа), т.е. 30 - 50 часов.

Таким образом реализация метода разделения на проектные единицы позволяет решать недоступные для ПК задачи в приемлемое для получения результата время.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Супрун А.Н., Кислицын Д.И.** Распараллеливание вычислительных расчётов строительных конструкций на персональных компьютерах // *Известия ВУЗов. Строительство* - №5. Новосибирск, 2006.
2. **Кислицын Д.И., Супрун А.Н.** Программный модуль для расширения функциональных возможностей вычислительного комплекса «Ли́ра» // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 4, Issue 2, 2008.
3. **Супрун А.Н., Кислицын Д.И., Скороходов В.В.** Проблемы построения автоматизированных систем конструкторского расчёта строительных объектов в распределённых вычислительных средах // *Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: материалы III Международного симпозиума*. Новочеркасск: Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. (НПИ), 2010.
4. **Suprun A.N., Kislitsyn D.I.** Distributed computing for construction project design by division into project design units // *Computing in Civil and Building Engineering*, Proceedings of the International Conference, 30 June - 2 July – Nottingham, 2010.
5. **Suprun A.N., Kislitsyn D.I.** The multilevel parallelization of structural design calculation in distributed computing environment // *14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCSBE)*, 27 - 29 June – Moscow, 2012.

ведущий кафедрой информационных систем и технологий ФГБОУ ВПО «Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета», 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65; e-mail: suprun@nngasu.ru.

Кислицын Дмитрий Игоревич, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий ФГБОУ ВПО «Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета», 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: kislitsyn@nngasu.ru.

Хромых Владислав Евгеньевич, магистрант кафедры информационных систем и технологий ФГБОУ ВПО «Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета», 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: vkh\_2459@mail.ru.

Anatoly N. Suprun, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Head of Department of Information Systems and Technology of Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering; 65 Ilyinskaya St., 603950 Nizhny Novgorod, Russia, e-mail: suprun@nngasu.ru.

Dmitriy I. Kislitsyn, Ph.D., Assistant professor of Information Systems and Technology of Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering; 65 Ilyinskaya St., 603950 Nizhny Novgorod, Russia, e-mail: kislitsyn@nngasu.ru.

Vladislav E. Khromykh, Master student of Information Systems and Technology of Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering; 65 Ilyinskaya St., 603950 Nizhny Novgorod, Russia, e-mail: vkh\_2459@mail.ru.

---

Супрун Анатолий Николаевич, советник РААСН, доктор физико-математических наук, профессор, за-

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОЗДАНИЯ СВАЙ-ДРЕН В СЛАБЫХ ГРУНТАХ ПО ТЕХНОЛОГИИ РОТОРНОГО УПЛОТНЕНИЯ

*З.Г. Тер-Мартirosян<sup>1</sup>, А.З. Тер-Мартirosян<sup>1</sup>, О.И. Рубцов<sup>1</sup>, А.В. Манукян<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup>ОАО «Концерн Монарх», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье излагаются физические и расчетно - теоретические основы уплотнения слабых грунтов вокруг лидирующей скважины с помощью ротора с одновременным изготовлением свай - дрены диаметром, превышающим диаметр лидирующей скважины в два раза за счет создания значительных радиальных напряжений. Приводится описание физической сущности процесса уплотнения грунтовой среды, обладающей ярко выраженными упруго - пластическими свойствами, при однократном и многократном нагружении - разгрузке. Отмечается, что в этом случае в грунте возникает система остаточных напряжений и деформаций, которая способствует снижению осадок уплотненного слоя грунта под фундаментом. Приводятся постановка и решения задачи взаимодействия вращающегося ролика - катка со стенками скважины на основе задачи Герца и Ляме аналитическим и численным методами. Анализируются результаты расчетов НДС в уплотняемом слабом грунте при различных соотношениях радиусов ролика-катка и лидирующей скважины, а также диаметра свай-дрены и окружающего грунта.

**Ключевые слова:** Слабый грунт, свая-дрена, роторное уплотнение грунтов, напряжения и деформации

## THEORETICAL BASIS FOR CREATION THE PILE-DREN IN WEAK SOILS USING TECHNOLOGY ROTARY CONSOLIDATION

*Zaven G. Ter-Martirosjan<sup>1</sup>, Armen Z. Ter-Martirosjan<sup>1</sup>, Oleg I. Rubcov<sup>1</sup>,  
Artur V. Manukjan<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup>ОАО "Koncern MonArx", Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The article describes the physical and settlement - the theoretical foundations of weak soil compaction around the leadership of the well using a rotor with simultaneous production of piles - drains diameter greater than the diameter of the hole in the lead twice through the creation of significant radial stresses. The description of the physical nature of the process of sealing soil environment, has a pronounced elastic - plastic properties, the single and repeated loading - unloading. It is noted that in this case, in the ground, a system of residual stresses and strains, which helps to reduce sediment compacted layer of soil under the foundation. Are posing and solving the problem of the interaction of the rotating roller - skating rink with the walls of the well based on the Hertz and Lamé problem analytical and numerical methods. The results of calculation of VAT in the sealing soft ground at different ratios of the radii of the roller-skating rink and leading well, and the diameter of the pile-drains and the surrounding soil.

**Keywords:** Weak soil, pile-drain, rotary soil consolidation, stress and strain

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при строительстве на слабых песчаных и глинистых грунтах с модулем

деформации менее 5 МПа толщиной более 10 м часто возникает необходимость преобразования их свойств, в том числе плотность, влажность, различными способами с целью

повышения параметров деформируемости и прочности. Одним из эффективных методов скоростного уплотнения слабых грунтов является метод, основанный на создании в лидирующей скважине радиальных циклических напряжений. Роторное уплотнение грунтов (далее "РУГ") позволяет не только создавать значительные радиальные напряжения, но и вдавливать и впрессовывает рабочий материал в пространство между лидирующей скважиной и упруго-пластичной трубой, внутри которой с большой скоростью вращается ролик-каток (рис. 3.1). В результате образуется составной грунтовой цилиндр из песчано-гравийной смеси заданного диаметра и уплотненного грунта вокруг нее. Такой цилиндр в составе преобразованного основания может воспринимать достаточно большие нагрузки от плитных фундаментов зданий и сооружений средней этажности. В зависимости от конструктивных особенностей проектируемых зданий и сооружений (площадь, средняя нагрузка под плитой, допускаемая осадка и несущая способность) назначается соответствующая степень уплотнения слабого грунта (плотность, влажность), которая определяет деформируемость и прочность уплотненного слабого грунта и составного цилиндра в целом. Последние зависят от соотношения диаметра песчаной сваи и слабого грунта, а также от расстояния между осями свай-дрен, расположенных в шахматном порядке.

В настоящей статье излагаются физико-механические и расчетно-теоретические основы изготовления свай - дрены и уплотнения слабого грунта вокруг нее с учетом их взаимодействия. Приводятся постановка и решения задачи для количественной оценки НДС в уплотняемом слабом грунте вокруг лидирующей скважины в процессе изготовления свай - дрены путем создания значительных радиальных напряжений на стенки лидирующей скважины аналитическим и численным методами. Решения этих задач позволяют прогнозировать процесс формирования НДС в уплотняемом грунте, управ-

лять этим процессом и совершенствовать его. По результатам уплотнения определяются параметры деформирования ( $E_0$ ,  $m_v$ ) и прочности ( $c$ ,  $\varphi$ ) уплотненного грунта с учетом результатов лабораторных испытаний грунтов, в том числе компрессионных, трехосных и сдвиговых.

## 2. ОБ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ И НАПРЯЖЕНИЯХ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

Известно, что при одноразовом и многократном циклическом нагружении и разгрузке под штампом в грунте возникают остаточные и радиальные напряжения и осадки, а вокруг прессиометра возникают значительные остаточные деформации и напряжения, причем последние частично релаксируют в зависимости от вида грунта. Физическо - механическая сущность возникновения остаточных деформаций и напряжений (внутренних) приводится в современных теориях упрочняющейся упруго - пластической среды [1-9]. Под остаточными или внутренними напряжениями следует понимать систему напряжений  $\sigma_{ij}$ , которая может существовать внутри грунтового массива, когда на его поверхности не приложены ни нормальные, ни касательные напряжения. Остаточные напряжения могут возникать, если локальный участок или объем грунтового массива подвергается необратимому упруго - пластическому деформированию за пределом упругости в процессе нагружения (штамп, прессиометр, глубинное уплотнение, адресное нагнетание рабочего материала внутрь массива, уплотнение сверхтяжелой трамбовкой и др.). Остаточные деформации после разгрузки частично упруго восстанавливаются (упругая разгрузка), а возникшие при этом избыточные напряжения могут частично или полностью релаксироваться. Остаточные напряжения являются дополнительным положительным фактором, так как могут быть учтены при оценке НДС уплотненного грун-

та под воздействием внешней нагрузки через коэффициенты OCR или PPR [7]. Учет пред-напряженного состояния наряду с учетом измененных параметров деформирования уплотненного слабого грунта может привести к сокращению осадки преобразованного основания под фундаментом. Остаточные напряжения при малых деформациях в следствии нагрузки и разгрузки можно определить как разность между системой напряжений, возникающих при нагружении  $\sigma_{ij}^*$ , и напряжениями, которые действовали бы в грунте, если он был бы идеально упругим  $\sigma_{ij}^e$ . Они выбираются так, чтобы при комбинировании с предыдущей системой получились требуемые значения результирующих сил и моментов. При полной разгрузке последняя система напряжений должна исчезать. Разность системы напряжений  $\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^e$  определяет систему остаточных напряжений. В качестве примера возникновения остаточных деформаций и напряжений можно рассматривать процесс формирования НДС в условиях компрессионного сжатия, а также вокруг лидирующей скважины при нагрузке – разгрузке прессиометром (рис. 2.1).

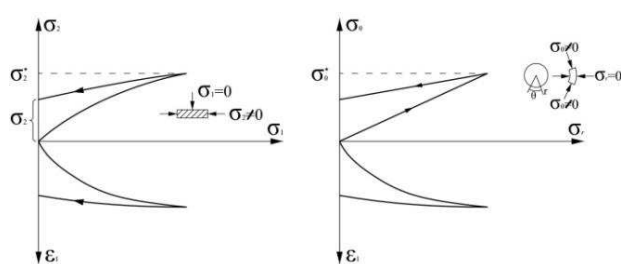


Рис. 2.1. Графическое представление о возникновении остаточных деформаций и напряжений при нагрузке и разгрузке в условиях компрессии (а) и вокруг лидирующей скважины прессиометром (б).

Изложенное выше дает представление о физической и механической сущности возникновения остаточных напряжений и деформаций в грунтовой среде и показывает пути их

определения с использованием теорий упругости и пластичности. Решение таких задач необходимо для количественной оценки процесса формирования НДС вокруг лидирующей скважины под воздействием циклических радиальных напряжений, в том числе с помощью специальной установки с гибкими стенками (типа прессиометра), получившую название «песконасос» [11-17], а также вращающегося внутри лидирующей скважины ротора (рис. 3.1, 3.2).

### 3. РАБОЧИЙ ОРГАН С РОТОРНЫМ ПРИВОДОМ

Разработанный и внедренный рабочий орган с роторным приводом значительно превосходит имеющийся рабочий орган с эластичными цилиндрическими оболочками [11-17] по части скорости и создания интенсивного и концентрированного радиального напряжения. Главным недостатком цилиндрических эластичных рабочих органов является их малая производительность, обусловленная большим временем, затрачиваемым на один цикл впесовывания материала в стенки скважины. Устранить этот недостаток возможно было только за счет сокращения времени цикла. Решить эту задачу удалось путем совмещения во времени стадии втрамбовывания со стадией возврата в исходное положение. Совмещая эти стадии во времени необходимо было разнести их в пространстве. Для обеспечения такого положения был разработан рабочий орган с роторным приводом, в котором был применен принцип, заложенный в работу механических волновых передач [11-17]. Следовательно, нужно создавать устройство, позволяющее создавать дополнительное циклически изменяющееся НДС в грунтовой среде. К таким относятся: трамбовка, песконасос, шнековые сваи и др.

Принцип действия роторного рабочего органа с роторным приводом основан на возможности создания радиальных перемещений цилиндрической оболочки, выполненной из гибкого материала и соответствующей

ших радиальных напряжений и деформаций. Общая схема роторного рабочего органа представлена на рис. 3.1. В гибкую цилиндрическую оболочку 1 помещают устройство (ротор) 2, вращательное движение которого обеспечивается штангой 3. Ротор деформирует оболочку, придавая ей форму эллипса, а в зоне контакта со стенкой скважины создает концентрированное радиальное напряжение и расширяет диаметр скважины. Диаметрально расположенные по большой оси эллиптической оболочки роторы выполняют также функцию втрамбовывания материала в стенки скважины на локальном участке контакта в отличие от эластичного песконасоса [11-17]. Зоны, расположенные по малой оси эллиптической оболочки выполняют функцию эластичного рабочего органа на стадии возврата в исходное положение. При повороте ротора 2 на  $90^\circ$ , т.е. в положение 5, зона возврата становится зоной втрамбовывания, а зона втрамбовывания- зоной возврата.

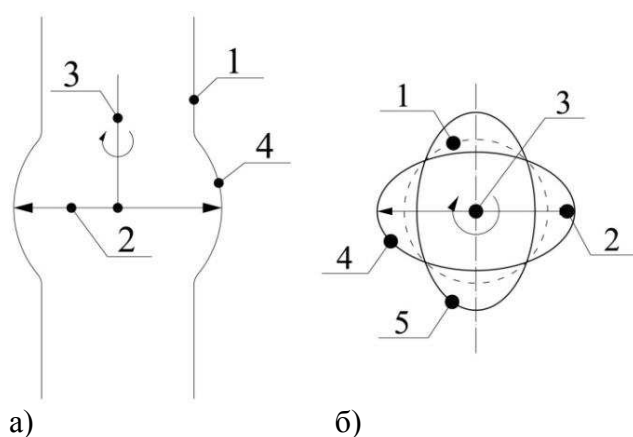


Рис. 3.1. Принцип действия роторного рабочего органа песконасоса.

а – схема разреза по продольной оси,  
б – схема по поперечному разрезу;

1 – гибкая эластичная прочная цилиндрическая оболочка в недеформированном состоянии,  
2 – ротор,

3 – тяга привода ротора,

4 и 5 – деформированная оболочка.

#### 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПЛОТНЕНИЯ ГРУНТОВ ВОКРУГ ЛИДИРУЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ РОТОРОМ

Под воздействием роликов – катков диаметр лидирующей скважины увеличивается, а на месте контакта со стенкой скважины при этом возникает значительное радиальное концентрированное напряжение. Кроме того, крутящиеся ролики – катки с большой скоростью частотой  $1 \div 3$  Гц одновременно вталкивают и впрессовывают рабочий материал сваи – дрены в стенки скважины. Очевидно, что для совершенствования технологии уплотнения грунтов с помощью ротора, выбора его диаметра и скорости вращения, необходима количественная оценка НДС уплотняемого грунта вокруг лидирующей скважины под воздействием крутящегося ролика – катка на контакте со стенкой скважины (рис. 4.1).

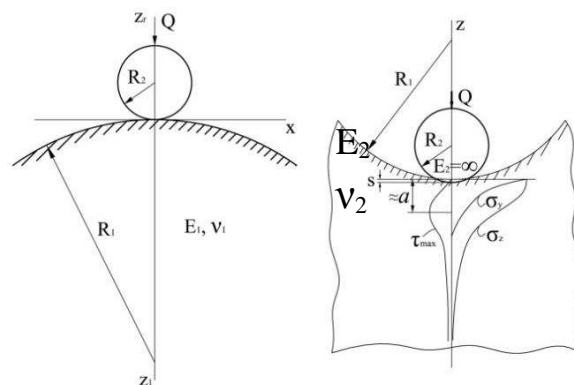


Рис. 4.1. Расчетные схемы взаимодействия цилиндров конечной жесткости (а) и абсолютно жесткого цилиндра с вогнутой поверхностью среды конечной жесткости (б) (задачи Герца).

Для этого в качестве расчетной рассмотрим задачу о взаимодействии абсолютно жесткого цилиндра радиусом  $R_2$  с цилиндром конечной жесткости радиусом  $R_1 \gg R_2$  (задача Герца). Исследования многочисленных авторов о взаимодействии двух параллельных цилиндров показывают, что под воздействием осевой силы  $Q$  (пог. м) возникает узкая прямоугольная площадка шириной  $b=2a$ , на

которой возникает криволинейная контактная эпюра полуэллиптической формы, описываемая зависимостью вида

$$q(x) = q_0 \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad (4.1)$$

где  $a$  – полуширина контактной площадки,  $q_0$  – максимальное контактное напряжение

$$q_0 = \frac{2Q}{\pi a} \quad (4.2)$$

При взаимодействии двух цилиндров конечной жесткости под воздействием силы  $Q$  можно определить ширину контактной площадки  $b=2a$ . По данным Тимошенко С.П. она определяется по формуле

$$a = \sqrt{\frac{4Q(K_1 + K_2)R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \quad (4.3)$$

$$\text{где } K_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi \cdot E_1}, K_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi \cdot E_2} \quad (4.4)$$

$E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$  - параметры деформации двух цилиндров.

В рассматриваемом нами случае будем считать, что  $R_1 \gg R_2$  и соотношением  $R_2/R_1$  можно пренебречь. Кроме того радиус  $R_2$  имеет отрицательный знак (-), а жесткость ролика – катка намного превосходит жесткость грунта, и, следовательно,  $K_2=0$ . Тогда (4.3) принимает вид

$$a = \sqrt{4QK_1R_2} \quad (4.5)$$

Из рис. 4.1б следует, что  $2a=b$  – хорда окружности радиусом  $R_2$ , а стрела этой хорды равна  $S$ , которая задается конструктивно (рис. 3.2). Существует зависимость между длиной хорды  $b$  и стрелой  $S$  следующего вида

$$a = \sqrt{2SR_2 - S^2} \quad (4.6)$$

При заданном  $b=2a$  можно определить глубину внедрения ролика  $S$  и наоборот при заданном  $S$  можно определить ширину хорды. Приравнивая полуширину хорды из (4.6) и (4.5) и пренебрегая величиной  $S^2$  получаем

$$Q = \frac{SR_2 - S^2}{2K_1R_2} \quad (4.7)$$

Пренебрегая отношением  $S^2/R_2$  получаем окончательно

$$Q \cong \frac{S}{2K_1} \quad (4.8)$$

где  $K_1 = (1 - \nu_1^2) / E_1$

Рассмотрим пример:  $\nu_1=0,3; E_1=10000 \text{ кН/м}^2; S=1 \text{ см}$

$$Q = \frac{0,01 \cdot 10000}{2 \cdot 0,91} \cong 50 \text{ кН}$$

Минимальное давление в центре контакта по (4.3) будет равно

$$q_0 = \frac{2 \cdot 50}{3,14 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,01 \cdot 0,02 - (0,01)^2}} = 160 \text{ кН/м}^2$$

Очевидно, что с ростом плотности грунта, окружающего лидирующую скважину, модуль деформации будет расти, и, соответственно, будет расти контактное напряжение  $q_0$ . Натурные эксперименты по уплотнению грунтов с помощью роторной технологии показывают, что между ротором и расширенной лидирующей скважиной образуется кольцо из уплотненного рабочего материала, который в конце изготовления песчаной свай – дрены имеет модуль деформации порядка 40 МПа. В таком случае по (4.6) получаем  $q_0=640 \text{ кН/м}^2$ , что существенно. Из анализа НДС вокруг лидирующей скважины под воздействием контактных напряжений (рис. 4.1б) следует, что радиальные напряжения распространяются на глубину  $(3-4)a$ , причем

на глубине  $z=a$  возникает максимальное касательное напряжение.

Отметим, что такой анализ сделан на основе предположения, что ширина полосы контакта  $b=2a$  намного меньше радиуса  $Rl$ , и что в этом случае в первом приближении можно рассматривать НДС взаимодействия жесткого цилиндра со стенкой скважины  $Kl \gg a$  по расчетной модели Фламана, т.е. по задаче о НДС полупространства под воздействием местной полосовой нагрузки. В рассматриваемом нами случае имеет место полуэллиптическое распределение (4.1) контактных напряжений.

Рассмотрим решение такой задачи. Известно, при действии сосредоточенной силы  $Q$  (пог. м) в условиях плоской деформации напряжения по радиусу  $r$  (рис. 4.2) определяются по формуле Фламана в виде:

$$\sigma_r = \frac{2Q}{\pi \cdot r} \cos \theta \quad (4.9)$$

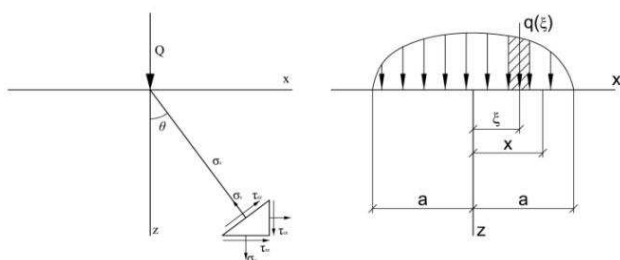


Рис. 4.2. Расчетные схемы по определению НДС в грунтовом полупространстве (плоская деформация  $\epsilon_y=0$ ) под воздействием сосредоточенной силы  $Q$  (а) и распределенной нагрузки  $q(x)$  (б).

Компоненты напряжений при действии сосредоточенной силы  $Q$  определяются по известным формулам Фламана

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2Q}{\pi} \cdot \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_z &= \frac{2Q}{\pi} \cdot \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= \frac{2Q}{\pi} \cdot \frac{z^2 x}{(x^2 + z^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Для определения этих напряжений от распределенной нагрузки по (4.1) получаем

$$\sigma_z = \frac{2z}{\pi} \int q(\xi) \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + z^2} d\xi \quad (4.11)$$

где 
$$q(\xi) = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} \quad (4.12)$$

Аналогичным образом можно определить  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$ .

Интегрирование этого выражения связано с большими трудностями и целесообразно использовать численный метод с помощью MathCAD. Также можно воспользоваться приближенным методом, заменяя площадь эпюры  $q(\xi)$  (4.12) эквивалентной прямоугольной эпюрой площадью  $A=q_0 \cdot 2a$ . С учетом равенства площадей эпюр получаем

$$q_0 = q_0 \cdot \frac{\pi}{4} \quad (4.13)$$

Разница в эпюрах напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{xz}$ , построенных по полуэллиптическим и эквивалентным эпюрам могут отличаться только лишь в контактной зоне (рис. 4.2).

Рассмотренное в этом разделе НДС соответствует контактной зоне взаимодействия роликов – катков с окружающим грунтом. По мере роста толщины кольца из рабочего материала сваи – дрены внутри лидирующей скважины в окружающем сваю грунте возникнет дополнительное напряжение, которое будет уплотнять окружающий слабый грунт. Такой процесс роста толщины внутреннего песчано – гравийного кольца и увеличения диаметра лидирующей скважины можно описать на основе осесимметричной задачи по определению НДС толстостенного цилиндра – задачи Ляме. Таким образом из задачи Герца происходит плавный переход к задаче Ляме.

**5. НДС СОСТАВНОГО ГРУНТОВОГО ЦИЛИНДРА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАСТУЩЕГО ВНУТРЕННЕГО КОЛЬЦА ИЗ ПГС И ОКРУЖАЮЩЕГО СЛАБОГО ГРУНТА С ЗАДАННЫМ ВНЕШНИМ ФИКСИРОВАННЫМ ДИАМЕТРОМ**

В процессе изготовления свай – дрены в окружающем грунте возникает начальное, промежуточное и конечное НДС. Рассмотрим их в отдельности, полагая, что известны физико – механические свойства грунтов свай – дрены и окружающего слабого грунта.

*5.1. Начальное НДС полого грунтового цилиндра*

Начальное НДС полого грунтового цилиндра после бурения лидирующей скважины (рис. 5.1) можно описать известными формулами [7]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \xi_0 \gamma z (1 - r_0 / z_0) \\ \sigma_t &= \xi_0 \gamma z (1 + r_0 / z_0) \\ \sigma_z &= \gamma z, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$u_r = \xi_0 \gamma z (1 + \nu) r_0^2 / (Er) \quad (5.2)$$

где  $\xi$  – коэффициент бокового давления грунта в условиях естественного залегания;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль разгрузки  $E_r < E_0$ ;  $u$  – радиальное перемещение.

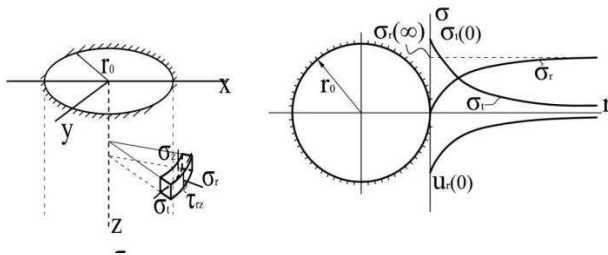


Рис. 5.1. Расчетная схема для определения НДС вокруг лидирующей скважины радиусом  $r_0$  без закрепления (а), и общий вид зависимостей (б)  $\sigma_r - r$ ,  $\sigma_t - r$  и  $u_r - r$

Очевидно, что после бурения радиус скважины уменьшится за счет упругой разгрузки на величину

$$u_r (r = 0) = \xi_0 \gamma z (1 + \nu) r_0 / E \quad (5.3)$$

Устойчивость стенок скважины будет обеспечена при соответствующих параметрах прочности грунта  $\varphi$  и  $c$ . В рассматриваемом нами случае  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  и  $\sigma_t$  сжимающие, причем при  $r=r_0$ ,  $\sigma_t > \sigma_z$ , следовательно, их соотношение определяет прочность стенки скважины, причем  $\sigma_t = 2\sigma_z$ . Из условия прочности Кулона – Мора легко определить критическую глубину  $z^*$ , ниже которой стенки скважины обвалятся. Полагая, что  $\xi_0 \approx 1$ , получаем

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_t - \sigma_z}{\sigma_t + \sigma_z + 2c - tg \varphi} = \frac{\gamma z^*}{3\gamma z^* + 2c \cdot ctg \varphi}$$

$$z_{кр}^* = \frac{2c \cdot \cos \varphi}{\gamma(1 - 3 \cdot \sin \varphi)} \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что глубина устойчивой стенки скважины  $z^*$  растет с ростом сцепления, а при  $c \neq 0$ ,  $\varphi \rightarrow 20^\circ$ ,  $z^* \rightarrow \infty$ . Зависимость (5.4) отличается от формулы для определения глубины устойчивого вертикального откоса (плоская задача), т.е.

$$z_{пл}^* = \frac{2c \cdot \cos \varphi}{\gamma(1 - \sin \varphi)} \quad (5.5)$$

Следовательно, круглая форма котлована при прочих равных условиях более устойчива, чем прямоугольной формы (длинная сторона) в 3 раза при  $\varphi=15^\circ$  и многократно при  $\varphi \rightarrow 20^\circ$ , что объясняется арочным эффектом. Отметим, что на расстоянии  $(r^*-r_0)$  от стенки скважины  $\sigma_t$  становится равной  $\sigma_z$ , причем радиус  $r^*$  не зависит от глубины, а зависит от радиуса скважины  $r_0$  и от  $\xi_0$ , т.е. получаем

$$r^* = r_0 \sqrt{\xi_0 / (1 - \xi_0)} \quad (5.6)$$

5.2. Промежуточное НДС составного цилиндра

В процессе изготовления сваи – дрены радиус лидирующей скважины непрерывно растет в соответствии с ростом толщины внутреннего кольца. Такое НДС следует моделировать следующим образом (рис. 5.2)

**Постановка задачи.** Пусть в грунтовом полупространстве имеется лидирующая скважина диаметров  $2r_0$ . Пусть стенки лидирующей скважины раздвигаются непрерывно в процессе изготовления внутри нее песчаной сваи – дрены, изготовленной по роторной технологии. За счет нагнетания рабочего материала и его впрессовывания с помощью ротора в окружающем слабом грунте возникнет НДС, которое надлежит определению.

Решение такой задачи целесообразно рассмотреть в динамике, то есть с учетом роста диаметра песчаной сваи во времени. Будем считать, что диаметр песчаной сваи во времени растет с затухающей скоростью, т.е.

$$r_2(t) - r_1 = \Delta u(t) = \Delta u [1 - \exp(-at)] \quad (5.7)$$

где  $a$  – параметр, который определяется в зависимости от  $\Delta u^* = r_2^* - r_1$ , где  $r_2^*$  – конечное значение  $r_2$ .

**Граничные условия** в соответствии с поставленной задачей имеют вид:

$$\begin{cases} 1. \ r = r_1; \ u_r(1) = u & 4. \ r = r_1; \ \sigma_r(1) = P_1 = ? \\ 2. \ r = r_2; \ u_r(1) = u_r(2) & 5. \ r = r_3; \ \sigma_r(2) = P_3 = ? \\ 3. \ r = r_2; \ \sigma_r(1) = \sigma_r(2) = \sigma_R & 6. \ r = r_3; \ u_r(2) = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Решение задачи будем рассматривать в линейной постановке, полагая, что в качестве расчетных можно использовать параметры деформируемости  $E_0, \nu_0$ , где индекс “0” означает “общий”, т.е.  $E_0$  – модуль общей (упругой и остаточной) деформации, а  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона. Известно, что при этом

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1}{E_{nl}} + \frac{1}{E_{yn}} \quad (5.9)$$

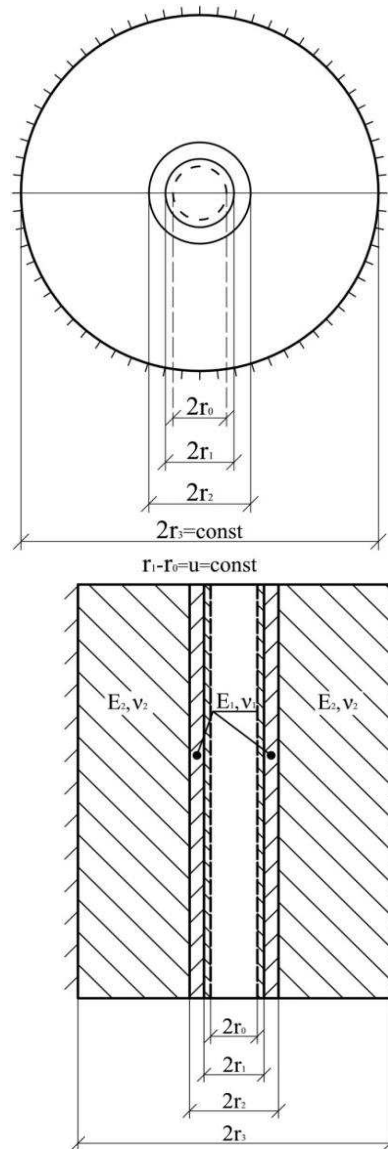


Рис. 5.2. Расчетные схемы для определения НДС составного полого цилиндра в промежуточном этапе.

где  $E_{nl}$  и  $E_{yn}$  – модули пластической (остаточной) и упругой деформаций соответственно. При таком понимании деформирования грунта в процессе активного нагружения не будем делать различий между упруго – пластическим и нелинейно – упругим материалом. Кроме того, это позволяет определить НДС грунтового цилиндра при разгрузке, необходимое для определения остаточных деформаций и напряжений.

*Исходные уравнения*

При решении осесимметричных задач о НДС толстостенных цилиндров (задачи Ляме) используются:

- уравнение равновесия

$$\sigma_t - \sigma_r = r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (5.10)$$

- физические уравнения

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{du}{dz} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \\ \varepsilon_t = \frac{u}{z} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

Решение уравнения (5.10) в общем виде известно и имеет вид:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B; \quad \sigma_t = \frac{A}{r^2} - B \quad (5.12)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные, определяемые из граничных условий (5.11).

Выпишем основные результаты решения поставленной задачи с учетом взаимодействия цилиндров при заданном перемещении на  $r=r_1$

$u_t(1)=u=\text{const}$  и граничных условий (5.11)

- для внутреннего цилиндра

$$\begin{cases} \sigma_z + \sigma_t = 2 \left[ \sigma_\rho + \frac{(\sigma_\rho - \sigma_R)r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right] \\ \varepsilon_r + r_t = \frac{1-\nu_r}{E_r}(\sigma_r + \sigma_t); \quad \sigma_z = 0! \\ \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_t)\nu_1; \quad \sigma_r + \sigma_t + \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_t)(1+\nu_1) \\ u = \frac{r_1}{E_1} \left[ \sigma_\rho(1-\nu_1) + \frac{2(\sigma_\rho - \sigma_R)r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right] \end{cases} \quad (5.13)$$

- для внешнего цилиндра

$$\begin{cases} \sigma_z + \sigma_t = 2 \frac{\sigma_{\rho\rho}r_3^2 - \sigma_{|R}r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \\ \varepsilon_r + r_t = \frac{1-\nu_r}{E_r}(\sigma_r + \sigma_t) \\ \sigma_{\rho\rho} = \sigma_{r/r=r_3} = \sigma_R \cdot \beta \\ u/r = r_2 = \sigma_{\rho\rho}r_3^2 - \frac{\sigma_R r_2^2 + \sigma_{\rho\rho}r_3^2 - \sigma_R r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_r \sigma_R \end{cases} \quad (5.14)$$

где

$$\sigma_R = \frac{E_1}{r_1} u \left[ \frac{\gamma}{\alpha}(1-\nu_1) + \frac{2r_2^2\gamma}{\alpha(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{2r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \right] = \frac{E_1}{r_1} u \cdot \lambda \quad (5.15)$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_R \cdot \beta, \quad \sigma_\rho = \sigma_R \cdot \frac{\gamma}{\alpha};$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{\alpha}(1-\nu_1) + \frac{2r_2^2\gamma}{\alpha(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{2r_2^2}{r_1^2 - r_2^2};$$

$$\beta = \frac{2r_2^2}{(r_3^2 - r_2^2) - \nu_2^2(r_3^2 - r_2^2)};$$

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1} p \left( -\frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \right); \quad (5.16)$$

$$\gamma = \frac{E_2}{E_1} \left( \nu_1 - \frac{2r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \right) + \frac{2Qr_3^2 - r_2^2 - r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_2$$

$$u_r(1)/r = r_2 = \frac{r_2\sigma_R}{E_1} \left[ \beta - \nu_1 + \frac{(\gamma-1)(r_1^2 + r_2^2)}{\alpha(r_1^2 - r_2^2)} \right] = \sigma_R \cdot g$$

где  $g = \frac{r_2}{E_1} \left[ \beta - \nu_1 + \frac{(\gamma-1)(r_1^2 + \alpha \cdot r_2^2)}{\alpha(r_1^2 - r_2^2)} \right]$

При условии, когда граница  $r_2$  расширяется с затухающей скоростью от "0" до  $r_2^*$ , где  $r_2^*$  – предельный радиус расширения, то

$$u_1(t) = u_1^* (1 - e^{-\alpha t}) \quad (5.17)$$

где  $u_1^* = r_2^* - r_1$ ;  $t^* \cong 10/\alpha$ .

Тогда

$$\sigma_R(t) = u_1(t) / g \quad (5.18)$$

Следовательно, с ростом  $u_1(t)$  и  $r_2(t)$  будет расти и давление на внутреннем радиусе  $r=r_1$  ( $p_1$ ) для обеспечения заданной скорости расширения лидирующей скважины, так как

$$p_1 = \sigma_R(t) \frac{\gamma}{\alpha} \quad (5.19)$$

Кроме того, будет расти и давление на внешнем радиусе  $r=r_3$  ( $\sigma_r=p_3$ ).

По результатам решения поставленной задачи можно определить в пределах внутреннего и внешнего цилиндров (1, 2): сумму главных напряжений для условия плоской деформации, т.е.  $\sigma_v = (\sigma_r + \sigma_t)(1 + \nu)$  и объемную деформацию  $\sigma_v = \varepsilon_r + \varepsilon_t$ , т.к.  $\varepsilon_z = 0$ ; а через них объемную деформацию  $K = \sigma_v / \varepsilon_v$  и коэффициент сцепления, зависящие от объемных деформаций при наличии результатов лабораторных испытаний (рис. 5.3).

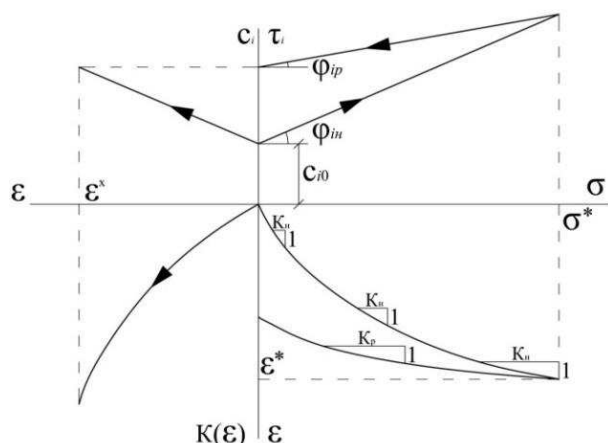


Рис. 5.3. Диаграмма для определения тангенциального модуля объемной деформации и коэффициента сцепления в зависимости от накопленной объемной деформации в уплотненном слабом грунте вокруг песчаной сваи – дрены, определенной по расчету.

## 6. ВЫВОДЫ

Под воздействием ротора в окружающем грунте вокруг лидирующей скважины возникнет концентрированное радиальное напряжение, которое можно описать на основе решения задачи Герца. Показано, что оно зависит от соотношения радиусов ролика – катка и лидирующей скважины, а также от деформационных свойств окружающего грунта.

1. В процессе изготовления свай – дрены по роторной технологии в окружающем грунте возникает сложное НДС, которое описывается на основе задачи Ляме. Показывается, что при расширении лидирующей скважины слабый грунт существенно уплотняется.

2. На основе аналитического решения задачи Ляме получена зависимость объемной деформации от расширяющегося радиуса лидирующей скважины. Показывается, что в этом случае можно определить модуль деформации по результатам лабораторных испытаний по зависимости  $\sigma - \varepsilon$  (трехосные испытания) или  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  (компрессионные испытания).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Безухов Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1961. – 537 с.
2. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
3. **Лехницкий С.Г.** Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
4. **Малинин Н.И.** Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
5. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Том 2. – М.: Мир, 1969. – 863 стр.
6. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
7. **Тер-Мартirosян З.Г.** Механика грунтов. – М.: АСВ, 2009. – 550 с.
8. **Тер-Мартirosян З.Г., Абдулмалек Ала Саид** Напряженно-деформированное со-

- стояние преобразованного основания // Основания, фундаменты и механика грунтов, №2, 2007, с. 8-11.
9. **Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З.** Остаточные напряжения в грунтах при циклическом нагружении // Сборник трудов XVII Польско-Российско-Словацкого семинара «Теоретические основы строительства», Варшава, Жилина, с. 278-283.
  10. **Ухов С.Б.** и др. Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: Высшая школа, 2002. – 566 с.
  11. **Рубцов И.В.** Патент № 2473741 «Способ укрепления грунта и устройство для его осуществления».
  12. **Рубцов И.В., Рубцов О.И., Грошев В.А., Новиков С.Я., Варламов С.К.** Экспериментальное исследование степени повышения несущей способности песчаных грунтов основания при использовании технологии «Песконасос». // Вестник МГСУ, №4, 2010.
  13. **Крыжановский А.Л., Рубцов И.В., Рубцов О.И., Бутырский С.Н.** Применение технологии «Песконасос» в системах мониторинга строительных конструкций. // Прикладные задачи механики. Выпуск 2. Моск. гос. строит. ун-т. – М.: МГСУ, 2005.
  14. **Крыжановский А.Л., Рубцов И.В., Рубцов О.И.** Обеспечение геотехнической безопасности основания фундаментной плиты высотного здания за счет адресной корректировки его напряженного состояния. // Сборник докладов тематической научно-практической конференции «Городской строительный комплекс и безопасность жизнеобеспечения граждан», 9-10 ноября 2005 года, Москва, МГСУ.
  15. **Крыжановский А.Л., Рубцов И.В., Рубцов О.И., Негахдар Моганлу Р.** Технология «Песконасос» // Аргументы и факты. Журнал ПГС №12, 2007.
  16. **Митраков В.И., Жаворонко С.Н., Рубцов И.В., Рубцов О.И.** Патент № 2353728 «Способ создания виброинъекционных свай».
  17. **Рубцов И.В., Рубцов О.И., Крыжановский А.Л.** Патент на изобретение № 2465402. «Установка и способ для уплотнения грунтов».
- 
- Тер-Мартirosян Завен Григорьевич, доктор технических наук, профессор, академик АВН РФ и Нью-Йоркской АН, Почётный член РААСН, Заслуженный деятель науки РФ, почетный строитель РФ и г. Москвы, почетный энергетик РФ, зав. кафедрой механики грунтов, оснований и фундаментов ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; e-mail: mgroif@mail.ru;
- Манукян Артур Ванушевич, доктор технических наук, заместитель генерального директора – технический директор ОАО «Концерн МонАрх»; 125284, Россия, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 31А, стр.1, e-mail: info@mon-arch.ru;
- Тер-Мартirosян Армен Завенович, кандидат технических наук, доцент кафедры механики грунтов, оснований и фундаментов ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет». 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, e-mail: gic-mgsu@mail.ru;
- Рубцов Олег Игоревич, главный инженер по КС, доцент кафедры «Проектирование зданий и градостроительство» ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, e-mail: RubcovOI@mgsu.ru
- Zaven G. Ter-Martirosjan, Professor, Dr.Sc., Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mgroif@mail.ru;
- Artur V. Manukjan, Dr.Sc., ОАО «Концерн МонАрх», 31А, Leningradskiy proezd, 125284, Moscow, RUSSIA, e-mail: info@mon-arch.ru;
- Armen Z. Ter-Martirosjan, Ph.D., Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: gic-mgsu@mail.ru;
- Oleg I. Rubcov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: RubcovOI@mgsu.ru

## ОБ ИСТОРИИ И ОСНОВНЫХ ИТОГАХ ПЯТОГО МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ»

*В.И. Травуш<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>1,2</sup>, А.М. Белостоцкий<sup>2</sup>,  
Т.Л. Дмитриева<sup>3</sup>, В.Н. Сидоров<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В настоящей статье рассматривается история и основные итоги состоявшегося в период с 01 по 06 июля 2014 года в г. Иркутске на базе Иркутского государственного технического университета (национального исследовательского университета) под эгидой Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) V Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений».

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, численное моделирование, конструкции, сооружения, программные комплексы, численные методы, симпозиум

## ABOUT HISTORY AND MAIN RESULTS OF THE FIFTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM “ACTUAL PROBLEMS OF COMPUTER SIMULATIONS IN CIVIL ENGINEERING”

*Vladimir I. Travush<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>1,2</sup>, Alexander M. Belostotsky<sup>2</sup>,  
Tatiana L. Dmitrieva<sup>3</sup>, Vladimir N. Sidorov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Russian Academy of Architecture and Computer Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Irkutsk State Technical University, Irkutsk, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to history and main results of the Fifth International Symposium “Actual Problems of Computer Simulations in Civil Engineering”, which took place in the period from 01 to July 6, 2014 in Irkutsk at Irkutsk State Technical University under the auspices of the Russian Academy of Architecture and Computer Sciences.

**Key words:** computer simulation, numerical simulation, structures, software, numerical methods, symposium

С 01 по 06 июля 2014 года в г. Иркутске на базе Иркутского государственного технического университета (национального исследовательского университета; ИрГТУ) под эгидой Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) состоялся V

Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (основной организатор – советник РААСН, проф., д.т.н. Т.Л. Дмитриева). Соорганизаторами этого крупного научного форума выступили Меж-

дународная ассоциация строительных высших учебных заведений (АСВ), Учебно-методическое объединение (УМО) высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства, Иркутский государственный университет путей сообщения, Московский государственный строительный университет (МГСУ) и Общероссийское межотраслевое объединение работодателей «Российский союз строителей», спонсорскую поддержку оказали Лира Софт и Склад Софт (генеральные спонсоры), Научно-исследовательский центр СтаДиО (официальный спонсор), ТЕКЛА (региональный спонсор). Симпозиум, объединяющий ученых академических институтов и университетов с практикующими специалистами, занятыми в проектировании, расчетном обосновании и строительстве, и поддерживающий тем самым баланс между теоретическими аспектами моделирования и их приложениями, собрал более 120 участников из 35 исследовательских, проектных и образовательных центров России (Владивосток, Волгоград, Екатеринбург, Иркутск, Казань, Красноярск, Москва, Нижний Новгород, Новосибирск, Новочеркасск, Пермь, Ростов-на-Дону, Санкт-Петербург, Томск, Уфа, Челябинск и др.), Италии, Польши и Украины. Особо следует отметить традиционно высокое представительство молодых ученых и специалистов – более 70 человек.

**1. НАУЧНЫЙ СОВЕТ РААСН  
«ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА  
В СТРОИТЕЛЬСТВЕ  
И АРХИТЕКТУРЕ».  
УЧРЕЖДЕНИЕ СИМПОЗИУМА**

Решение о проведении регулярных Международных симпозиумов «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» было принято Научным Советом РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре» (председатель – советник РААСН, проф.,

д.т.н. В.Н. Сидоров (МГСУ), ученый секретарь – чл.корр. РААСН, д.т.н. П.А. Акимов (МГСУ)) в октябре 2006 года.

В задачи Научного совета традиционно входит обсуждение и решение задач, а также выработка рекомендаций по актуальным вопросам научно-исследовательской, научно-технической, проектно-конструкторской, а также образовательной деятельности в области компьютерного моделирования работы зданий и сооружений. К числу научных вопросов, рассматриваемых Научным советом, в частности, относятся следующие: моделирование взаимодействия сооружений с грунтовым основанием; учет физической, геометрической и других нелинейностей; учет конструктивных и технологических особенностей сооружения; компьютерное материаловедение; моделирование ветровых нагрузок; расчет на сейсмические воздействия; расчет на вибрационные воздействия; расчет на прогрессирующее обрушение; совершенствование и разработка численных и численно-аналитических методов расчета конструкций и сооружений и др. Научным советом рассматриваются также вопросы в области экспертизы расчетов зданий и сооружений с использованием программных комплексов (квалификационная проверка и аттестация специалистов; экспертиза и верификация программных средств; экспертиза расчетов ответственных зданий и сооружений). Одной из основных задач почти сразу после его основания в 2005 году стало проведение верификации программных комплексов, используемых российскими проектными, конструкторскими и научно-исследовательскими организациями для выполнения расчетов с целью оценки прочности и живучести строительных конструкций и сооружений. Целью верификации программных комплексов в РААСН является определение состава их возможностей по таким аспектам, как правомерность и точность математических моделей конструкций, элементов, узлов и др., реализуемых в программных комплексах (валидация), точность

численного решения (в сравнении с аналитическими решениями, результатами эксперимента, решениями с использованием других программных средств), наличие и достаточность математического обоснования реализованных конечных элементов и методов решения различных задач, представительность библиотеки конечных элементов, перечень реализованных в программных комплексах нормативов, быстродействие программ, ограничения на количественные параметры комплексов (число узлов, элементов, определяемых собственных частот и форм и др.), возможность решения нелинейных задач (в том числе, моделирующих трение, проскальзывание, конструктивную и физическую нелинейность, нелинейные динамические эффекты и др.), возможность моделирования специальных режимов, например, процесса возведения сооружения, возможность расчета большепролетных, высотных и других сложных конструкций и др., оценить слабо формализуемые характеристики программных средств по таким аспектам, как удобство интерфейса, возможность и удобство внедрения в ПС современных научных результатов. При этом в задачи по верификации программных комплексов входит выявление соответствия действительных возможностей программных декларациям разработчиков, определение правильности решения верификационных задач, выявление и оценка погрешности расчета параметров путем сравнения с экспериментальными данными, расчетными данными, полученными по другим программным комплексам, результатами аналитических тестов, теоретического анализа и обоснование возможности использования программных комплексов в заявленной области применения. Все вышеперечисленное предопределило основные научные направления симпозиума.

## 2. ИСТОРИЯ СИМПОЗИУМА

05-08 июня 2007 года в г. Нижний Новгород на базе Нижегородского государственного

архитектурно-строительного университета прошел Первый Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (основной организатор – советник РААСН, проф., д.т.н. А.Н. Супрун). В мероприятии приняли участие 77 специалистов из 21 города. На симпозиуме обсуждались следующие основные вопросы: моделирование жизненного цикла сооружений в процессе их возведения, под действием нагрузок разных типов, а также вопросы сопротивляемости прогрессирующему разрушению; проблемы сложных расчетных схем, их удачные и неудачные примеры; подготовка и квалификационная аттестация специалистов, выполняющих расчеты на основе программных комплексов промышленного типа; опыт выполнения расчетов ответственных сооружений; нормативные документы (СНиП), противоречия и способы их устранения. В рамках симпозиума происходил обмен опытом (в том числе в хорошо зарекомендовавшем себя формате круглых столов) по использованию конечноэлементных программных комплексов, обсуждались их возможности, недостатки, перспективы развития, в частности присутствовали работчики таких комплексов как Лира, Мономах, SCAD, MicroFE, Ing+, которые рассказывали о возможностях, реализованных в новых версиях соответствующего программного обеспечения. Все участники симпозиума отметили необходимость продолжения подобных научных мероприятий».

08-10 сентября 2008 года в г. Пермь на базе Пермского государственного технического университета прошел Второй Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (основной организатор – советник РААСН, проф., д.т.н. Г.Г. Кашеварова). В мероприятии приняли участие более 140 человек, среди которых академики, члены-корреспонденты РААСН, доктора наук, ученые, представлявшие высшие учебные заведения и научно-исследовательские институты, специалисты конструкторских и

проектных организаций из 18 городов России и стран СНГ: Перми, Москвы, Киева, Алма-Аты, Санкт-Петербурга, Нижнего Новгорода, Казани, Новочеркасска, Хабаровска, Челябинска, Уфы, Екатеринбурга, Магнитогорска, Иркутска, Воронежа, Саратова, Улан-Удэ, Владивостока. Главной целью симпозиума было обсуждение актуальных проблем и достижений в области компьютерного моделирования поведения конструкций, зданий и сооружений, возможностей современных программных комплексов для их расчета и проектирования, вопросов выбора адекватных расчетных моделей исследуемых объектов, а также координация усилий ученых для решения научных и прикладных задач обеспечения безопасности при изысканиях, проектировании, возведении и эксплуатации зданий и сооружений на основе современных математических моделей, вычислительных методов и программных комплексов.

21-23 июня 2010 года в г. Новочеркасск на базе Южно-Российского государственного технического университета прошел Третий Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (основной организатор – советник РААСН, проф., д.т.н. П.П. Гайджуров). В работе симпозиума приняли участие 44 специалиста из 17 городов. В докладах участников рассматривались современные методы моделирования жизненных циклов строительных объектов, включая сценарии сверхнормативного нагружения и прогрессирующего разрушения, а также возможности современных авторизированных и коммерческих программных комплексов. На симпозиуме были представлены научные сообщения молодых ученых – представителей ведущих научных школ России и ближайшего зарубежья, занимающихся разработкой и реализацией конечноэлементных программ в области строительства. Хорошей традицией стало учреждение специальных призов за лучшие стендовые и устные доклады, представленные молодыми участниками. В мероприятии приняли участие разработчики ком-

мерческих расчетно-вычислительных программных комплексов SCAD, MicroFE Ing+, СТАДИО.

19-22 июня 2012 года в г. Челябинск на базе Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) прошел Четвертый Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (основной организатор – советник РААСН, проф., д.т.н. А.Н. Потапов). В работе симпозиума приняли участие 103 специалиста из 19 городов. Целью симпозиума стало обсуждение актуальных проблем в области компьютерного моделирования поведения и управления параметрами конструкций, зданий и сооружений, оценка их прочности, устойчивости и колебаний при нестационарных процессах. В центре внимания было обсуждение возможностей и достижений в области современных программных комплексов по расчету и проектированию конструкций и сооружений с учетом выбора адекватных расчетных моделей исследуемых объектов. В рамках симпозиума рассматривались вопросы координации усилий ученых для решения научных и прикладных задач по обеспечению безопасности при изысканиях, проектировании, возведении и эксплуатации зданий и сооружений на основе современных математических моделей, вычислительных методов и программных комплексов.

### **3. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ, ПЛАН ПРОВЕДЕНИЯ И МЕРОПРИЯТИЯ СИМПОЗИУМА**

Основные научные направления Пятого Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» перечислены ниже.

1. Моделирование жизненных циклов конструкций и сооружений на стадиях их

возведения, нагружений, сопротивляемости прогрессирующему разрушению.

2. Нелинейные модели материалов, конструкций зданий и сооружений при проектировании, оптимизации и реконструкции.
3. Материалы и конструкции в нестационарных физических условиях при сложных воздействиях.
4. Моделирование нагрузок и воздействий на строительные конструкции и сооружения. Задачи аэро- и гидроупругости.
5. Моделирование повреждаемости и разрушения конструкций. Математические модели в системах мониторинга зданий и сооружений.
6. Возможности современных программных средств при анализе и проектировании строительных объектов. Решатели в задачах строительной механики. Проблемы и перспективы.

Программа симпозиума включала пленарные, секционные и стендовые доклады, «круглые столы» для обсуждения актуальных проблем и достижений в области компьютерного моделирования конструкций и сооружений, сообщения об опыте использования современных методов и средств компьютерного моделирования при проектировании и расчетном обосновании уникальных зданий и сооружений (объекты Зимних Олимпийских игр 2014 года в г. Сочи, стадион «Зенит» в г. Санкт-Петербурге, высотные здания и др.), мастер-классы по использованию программных продуктов ведущих отечественных и мировых разработчиков систем компьютерного моделирования сооружений. Первая часть симпозиума (01-03 июля 2014 года) была проведена в конференц-зале ИрГТУ (пленарное заседание) и в гостинице Прибайкальская, расположенной в 62 километрах от г. Иркутск в живописном месте у истока реки Ангара. Вторая часть состоялась в пансионате на острове Ольхон (04-06 июля 2014 года), который является географическим, историческим и сакральным центром озера Байкал. Здесь сконцентрировано все

многообразие природных ландшафтов. Это степи с хорошо прогреваемыми летом заливами, эоловые пески с дюнами, смешанные леса с участками реликтового ельника, живописные береговые скалы.

#### 4. НАУЧНАЯ ПРОГРАММА СИМПОЗИУМА

На пленарном заседании симпозиума после приветствий и.о. ректора ИрГТУ, проф., д.ф.-м.н. А.Д. Афанасьева, директора Института архитектуры и строительства ИрГТУ, проф., д.т.н. В.Р. Чупина, вице-президента РААСН, академика РААСН, проф., д.т.н. В.И. Травуша, председателя Научного Совета РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре», советника РААСН, проф., д.т.н. В.Н. Сидорова и главного ученого секретаря РААСН, чл.-корр. РААСН, д.т.н. П.А. Акимова с докладами выступили профессора В.В. Лалин (об учете жесткостей на растяжение и сдвиг в задачах устойчивости стержней), З. Вуйчицки (о динамических моделях строительных конструкций), А.М. Белостоцкий (о численном моделировании нагрузок и воздействий, напряженно-деформированного состояния (НДС), прочности и устойчивости уникальных конструкций, зданий и сооружений), М.С. Барабаш (о численном моделировании НДС конструкций с учётом стадий жизненного цикла зданий и сооружений) и Д.В. Купцов (об информационном моделировании зданий). В остальном программа симпозиума, включавшая более 80 докладов, была разделена на две секции: «Теоретические основы, алгоритмы и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Секция 1) и «Практика применения методов, алгоритмов и программ численного моделирования конструкций и сооружений» (Секция 2). Вопросам численного моделирования ветровых нагрузок, напряженно-деформированного состояния и прочности строительных конструкций, зданий, сооружений и комплексов, в том числе в связанных постановках, были

посвящены презентации В.М. Агафонова, П.А. Акимова, С.А. Алексеева, А.А. Аула, И.Н. Афанасьевой, А.М. Белостоцкого, Н.А. Бузало, О.С. Бурси, В.В. Вершинина, Ю.В. Гензерского, С.И. Дубинского, М.А. Дудаева, Ю.Н. Дядченко, Г. Занона, Т.Б. Кайтукова, Д.К. Каличавы, Г.Г. Кашеваровой, Ф.М. Котова, А.А. Кудрявцева, К.И. Островского, А.И. Нагибовича, П.И. Новикова, А.С. Павлова, С.Б. Пенькового, Н.О. Петряшева, С.О. Петряшева, Р. Пучинотти, П.С. Созонова, Н. Тондини, А.Р. Усманова, Нгуен Фу Туана, И.И. Хусаинова, Н.Г. Царитовой, Т.Н. Черниговской, С.В. Щербины. Проблемы математического моделирования в материаловедении были затронуты в выступлении А.С. Крылова. Некоторые результаты системного осмысления этапов развития компьютерного моделирования были представлены в докладе Н.П. Абовского, С.В. Деордиева, Л.В. Енджиевского, И.С. Инжутова, О.М. Максимовой, Н.И. Марчука и В.И. Палагушкина. Различные аспекты моделирования поведения железобетонных, металлических и деревянных конструкций, в том числе с учетом разного рода нелинейностей получили развитие в докладах В.В. Адищева, П.Д. Арленинова, Е.Е. Гончарова, А.В. Градобоева, Н.В. Дегтяревой, Г.Г. Кашеваровой, П.А. Косых, С.Б. Крылова, М.В. Лазнюк, М.А. Логуновой, А.Я. Мартынюк, В.М. Митасова, К.П. Пятикрестовского, В.В. Роот, В.И. Соболева. Теоретические основы и алгоритмы метода конечных элементов были затронуты в выступлениях П.П. Гайджурова, Ю.Д. Гераймович, А.С. Городецкого, И.Д. Евзерова, Н.А. Зямбаева, А.В. Игнатьева, В.А. Игнатьева, Д.В. Марченко, Е.В. Онищенко, А.Н. Потапова, В.Н. Ромашкина и Е.М. Уфимцева.

Новые возможности современных программных комплексов для расчета, проектирования и информационного моделирования строительных и иных объектов (АСТРА-НОВА, Лира, СТАДИО, ANSYS, ABAQUS, Autodesk Revit, COMPASS, DIANA, NASTRAN, SCAD, SOLIDWORKS, TEKLA), реализованные в их рамках численные модели, а

также некоторые наукоемкие приложения были представлены в выступлениях И.В. Агеенко, В.В. Адищева, А.В. Беклемишева, А.М. Белостоцкого, Ю.А. Бержинского, Л.П. Бержинской, И.И. Ведякова, М.С. Грачевой, Ле Чан Минь Дата, Г.А. Джинчвелашвили, Д.С. Дмитриева, Т.Л. Дмитриевой, С.В. Доронина, Ю.Н. Дядченко, Л.В. Енджиевского, А.Ю. Зобачевой, И.Н. Зотова, Д.В. Кониная, Д.В. Купцова, А.В. Колесникова, И.В. Кучеренко, А.А. Маляренко, А.С. Мартиросяна, Н.В. Мосиной, Е.В. Носыревой, В.П. Пашкова, И.А. Порываева, А.А. Пыхалова, М.Н. Сафиуллина, А.А. Семенова, Л.С. Сошниковой и А.В. Тарасова.

Проблемы разработки, исследования, развития и верификации аналитических и численно-аналитических (в частности, дискретно-континуальных) методов решения задач строительной механики, механики деформируемого твердого тела и математической физики рассматривались в выступлениях П.А. Акимова, М. Аслами, Д.И. Беляева, В.И. Ишановой, Т.Б. Кайтукова, С.Ф. Кузнецова, Д.А. Кушовой, В.В. Лалина, С.М. Мацкевича, М.Л. Мозгалевой, О.А. Негрозова, К.И. Островского, В.Н. Сидорова, Е.М. Удлера, Л.Ю. Фриштер. Некоторые расчетно-экспериментальные подходы были предложены Ю.А. Бержинским, Н.А. Бузало, В.В. Вершининым, И.В. Гонтаренко, Е.В. Зеньковым, Д.В. Киселевым, А.И. Сагайдаком, В.Н. Сидоровым и Л.Б. Цвиком.

Вопросы расчетного обоснования объектов железнодорожного транспорта рассматривались в выступлениях Ю.В. Вороновой, В.Н. Железняка, Д.В. Запольского, И.Д. Козубенко, С.В. Михальчишина, Е.Г. Санникова, В.В. Тюнькова, Л.Б. Цвика. В докладе Н.П. Абовского, С.В. Деордиева, Л.В. Енджиевского, И.С. Инжутова и В.И. Палагушкина было предложено выделить новое научное направление – формообразование новых пространственных комбинированных строительных конструкций, в котором синтезируются различные дисциплины архитектурного, расчетно-конструкторского, технологиче-

ского, экономического направлений. Актуальным вопросам исследования, разработки, совершенствования и модернизации регламентирующих нормативных документов были посвящены доклады Г.А. Джинчвелашвили, А.В. Колесникова, М.Ф. Кошелева, О.В. Мкртычева и А.Г. Тяпина.

Большой интерес участников симпозиума вызвали сообщения А.М. Белостоцкого и его коллег об опыте использования современных методов и средств компьютерного моделирования при проектировании и расчётном обосновании уникальных зданий и сооружений (объекты Зимних Олимпийских игр 2014 года в г. Сочи, стадионы Чемпионата мира по футболу 2018 года и др.).

## **5. КРУГЛЫЕ СТОЛЫ И МАСТЕР-КЛАССЫ**

В рамках симпозиума было проведено пять круглых столов: «Оптимальное проектирование строительных конструкций» (ведущие – академик РААСН, проф. Л.С. Ляхович; проф. Т.Л. Дмитриева), «Об актуальных проблемах компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (ведущие – советник РААСН, проф. В.Н. Сидоров; советник РААСН, проф. Г.Г. Кашеварова), «Применение программного обеспечения TEKLA и мобильного приложения TEKLA BIM SIGHT для оптимизации процессов информационного моделирования зданий (ведущий – Д.В. Купцов), «Проектирование строительных конструкций с применением программ семейства ЛИРА-САПР: версии 2014 года» (ведущие – проф. Ю.В. Гензерский, Р.Ю. Водопьянов), «Проблемы импорта-экспорта данных между программными комплексами при реализации элементов BIM-технологии, связанные с выполнением прочностных расчетов несущих конструкций (ведущие – проф. В.С. Карпиловский, Н.В. Мосина). Обсуждение большинства вопросов в рамках обозначенных тем круглых столов на определенном этапе сводилось, в частности, к об-

суждению качества подготовки специалистов-расчетчиков, являющегося, по сути, основой обеспечения безопасности при проектировании, возведении и эксплуатации строительных объектов и сложных инженерных систем. Участники симпозиума были едины в оценке того, что будущее компьютерного моделирования конструкций и сооружений зависит от того, какими специалистами станет нынешнее поколение студентов, а совместное влияние профессионального сообщества на всю систему образования – это общая ответственность перед будущим науки, отрасли и страны в целом. По итогам обсуждений было принято решение о создании Рабочей группы по вопросам образования при Научном Совете РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре».

Обе проведенных мастер-класса, «Демонстрация новых программ семейства ЛИРА-САПР: версии 2014 года» (ведущие – проф. Ю.В. Гензерский, Р.Ю. Водопьянов; модератор – академик РААСН, проф. В.С. Федоров) и «SCAD Office 21.1. Начало эксплуатации – основные характеристики и особенности реализации» (ведущие – проф. В.С. Карпиловский, Н.В. Мосина; модератор – советник РААСН, проф. В.А. Игнатъев), вызвали неподдельный интерес участников симпозиума.

## **6. ПУБЛИКАЦИИ**

На основании материалов, подготовленных участниками симпозиума Издательством ИрГТУ был издан сборник тезисов. В состав редакционной коллегии входили профессора В.Н. Сидоров (МГСУ), Т.Л. Дмитриева (ИрГТУ), В.И. Соколов (ИрГТУ), А.А. Пыхалов (ИрГТУ) и доцент А.В. Рудых (ИрГТУ). Далее Программным комитетом симпозиума рекомендовал наиболее значимые и интересные доклады к изданию в тематических номерах рецензируемых научных журналов «Строительная механика и расчет сооружений» и International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering, входящих в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

## 7. ПЛАНЫ НА БУДУЩЕЕ

Уже принято решение о том, что следующий, Шестой Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» состоится в августе-сентябре 2016 года в г. Владивостоке на базе Дальневосточного федерального университета (ДВФУ, остров Русский). С краткой презентацией о ДВФУ и, в частности, об Инженерной школе ДВФУ, на проведенном в рамках симпозиума очередном заседании Научного Совета РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре» выступил проф. А.В. Баенхаев. Надеемся увидеть читателей журнала «International Journal for Computational Civil and Structural Engineering» среди участников грядущего научного форума 2016 года!

---

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, доктор технических наук, профессор; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, Москва, Большая Дмитровка, 24, стр. 1; e-mail: travush@mail.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ); ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7(499)183-59-94; e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирова-

ния уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Дмитриева Татьяна Львовна, д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов и строительной механики ФГБУ ВПО «Иркутский государственный технический университет», Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, e-mail: dmitrievat@list.ru

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7(499)183-59-94; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Vladimir I. Travush, Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 24/1, ul. Bolshaya Dmitrovka, Moscow, 129337, Russia; e-mail: travush@mail.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science; Principal Research Scientist of Research & Education Center of Computation Simulation; Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation; Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Dmitrieva Tatiana Lvovna, PhD, Professor, Department of the strength of materials and structural mechanics, Irkutsk State Technical University, Russia, 664074, Irkutsk city, str.Lermontova, 83, e-mail: dmitrievat@list.ru

Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com