

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 10, Issue 2 *2014*

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenکو, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Saint Petersburg State Polytechnical University
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University, 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI),
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University,
8 Suhanova Street, Vladivostok
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina,
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering,
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences,
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering,
1, Academicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics, 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint-Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,
190005 Saint-Petersburg, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University, 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043
Almaty, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Saint Petersburg State Polytechnical
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Illizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering,
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,
26-600, Radom, Poland

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University,
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University,
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education,
New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University,
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering,
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

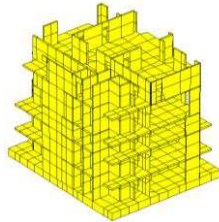


Figure 1.

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

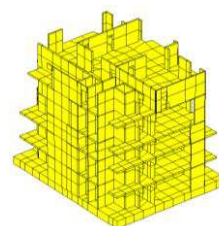


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, доцент, кандидат технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 10, Issue 2

2014

TABLE OF CONTENTS

Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций <i>Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер</i>	<u>14</u>
О моделировании напряжений в неоднородном склоне <i>Э.К. Агаханов, М.К. Агаханов</i>	<u>24</u>
Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами, О.А. Негрозов</i>	<u>29</u>
Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами, О.А. Негрозов</i>	<u>38</u>
Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами, О.А. Негрозов</i>	<u>47</u>
Алгоритм моделирования и расчета конструкций с учетом ползучести бетона <i>М.С. Барабаш, М.А. Ромашкина</i>	<u>56</u>
К вопросу о численном моделировании поведении резервуара с понтоном (плавающей крышей) при сейсмическом воздействии <i>А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева, В.В. Вершинин, А.Р. Усманов, С.В. Щербина</i>	<u>64</u>
Оптимальное проектирование пространственной металлической конструкции с использованием ПК ANSYS <i>Т.Л. Дмитриева, Ле Чан Минь Дат</i>	<u>79</u>
Определение несущей способности легких стальных тонкостенных конструкций на основе компьютерного моделирования <i>Г.Г. Кашеварова, П.А. Косых</i>	<u>85</u>

- О построении функций принадлежности нечеткого множества в контексте задачи диагностики повреждений железобетонных плит** **93**
Г.Г. Кашеварова, М.Н. Фурсов, Ю.Л. Тонков
- Проблема построения спектров с заданной обеспеченностью при расчете за землетрясения** **102**
О.В. Мкртычев, П.И. Андреева
- Проблема неопределенности данных цифрового мониторинга динамических перемещений зданий и сооружений** **105**
В.И. Прокопьев, М.С. Хлыстунов, Ж.Г. Могилюк
- Обоснование квантовых закономерностей формирования порывов ветра в Москве** **111**
М.С. Хлыстунов, В.И. Прокопьев, Ж.Г. Могилюк
- Спектральные фантомы цифровых технологий мониторинга и численного моделирования в строительной механике** **120**
М.С. Хлыстунов, В.И. Прокопьев, Ж.Г. Могилюк

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Л.С. Ляхович¹, А.В. Перельмутер²

¹ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

² НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: Проблемы оптимального проектирования строительных конструкций рассматриваются с точки зрения перспектив использования найденных решений при разработке реальных объектов массового строительства. Указывается на существующие трудности такого внедрения в практику, и намечаются возможные области применения оптимизационных подходов. Сама проблема оптимизации рассматривается в несколько расширенном виде, не только как комплекс задач, относящихся к строительной механике, и тем более не как задача получения решения с некоторым экстремальным свойством (например, конструкция наибольшей жесткости), а как задача выбора идеализированного образа будущего реального объекта строительства. При этом абсолютно не обсуждаются вопросы методики поиска оптимального решения, а основное внимание уделено постановке задач и сфере возможных реальных приложений.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, структурная оптимизация, эффективность, неопределенность данных, стабильность оптимального решения

SOME PROBLEMS OF BUILDING CONSTRUCTIONS OPTIMAL PROJECTING

Leonid S. Lyakhovich¹, Anatoly V. Perelmuter²

¹ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

² НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

ABSTRACT: Problems of building constructions optimal projecting are considered from the perspectives of usage of found solutions point of view by working out of real objects of mass building. Existing difficulties of such incorporation in practice are pointed out and possible spheres of optimizational approaches usage are visible. The optimization problem by itself is considered in broaden view not only as complex of tasks referring to the building mechanics, and moreover not as a task of getting solution with some extreme property (for example, construction of the greatest hardness), but as the task of the choice of idealized image of future building real object. In this case problems of method of optimal solution search are absolutely not discussed and main attention is paid to the task raising and sphere of possible real applications.

Key words: optimal projecting, structural optimization, effectiveness, data uncertainty, stability of optimal solution

НАЛИЧИЕ ПРОБЛЕМЫ

Задачи оптимального проектирования строительных конструкций давно привлекают внимание исследователей. Активно они начали решаться со второй половины 20 века благодаря достижениям теории принятия

решений и теории исследования операций, а также в связи с широким распространением вычислительной техники [16, 5]. Это позволило разработать соответствующие методы, в обозримые сроки просчитывать многочисленные варианты и решать сложные математические задачи. В настоящее время теория

оптимального проектирования является одним из актуальных и развивающихся разделов в механике деформируемого твердого тела, и публикации в этой области, число которых измеряется многими сотнями, продолжает постоянно увеличиваться. Становятся все более разнообразными постановки задач и методы их решения. Оптимизационные подходы в некотором смысле рассматриваются как чуть ли не обязательными. Так в [14] сказано «Этика нашей профессии сегодня не позволяет проектировать конструкции без оптимизации» (В оригинале: «The ethics of our profession today does not allow any design for a structure without optimization»).

Казалось бы все прекрасно, но возникает естественный вопрос: почему методика оптимального проектирования за более чем пятидесятилетний срок не стала обычным рабочим инструментом проектировщика, как, например, появившийся даже несколько позже метод конечных элементов? Что здесь является тормозящим фактором?

Следует отметить, что вопросы такого рода звучат не впервые. Некоторый обзор рассматриваемой проблемы приведен в книге [13], где имеется глава с характерным названием «Почему практикующие инженеры неохотно используют оптимизацию конструкций?». Отвечая на этот вопрос, авторы приводят четыре группы доводов:

1. Почему нужно искать лучший проект, если приемлемое и достаточно хорошее решение, может быть найдено на основании опыта?
2. Немногочисленность запросов от практики и недостаточная реалистичность оптимальных решений.
3. Идущее от Томпсона и Ханта [17] опасение, что процесс оптимизации приводит почти неизбежно к проектам, которые в смысле обеспечения устойчивости равновесия являются весьма чувствительными к начальным несовершенствам.

4. Оптимальные конструкции, полученные с помощью детерминированной оптимизации, не обязательно обладают высокой надежностью, поскольку оптимальное решение часто реализуется при одновременном выполнении многих предельных условий, может привести к отказу сразу по нескольким критериям. Так, например, в работе [7] показано, что оптимальные проекты пластин весьма чувствительны к отклонениям толщин от оптимальных, а для пластин, запроектированных на работу в режиме близком к предельному, даже неполное приложение проектной нагрузки на некоторой части поверхности может привести к разрушению.

Все эти соображения высказаны применительно к авиационной технике [12], если же рассматривать строительные конструкции акценты могут сместиться, но сами эти доводы не исчезнут.

Мы сразу же отбросим иногда звучащие доводы о сложности решения задач оптимизации. Современные компьютерные технологии позволяют если не полностью, то в значительной мере снять эти трудности и в подавляющем числе случаев получить решения разумно сформулированных задач оптимального проектирования. А вот отсутствие у промышленных программных продуктов, ориентированных на строительное проектирование, опций, связанных с поиском оптимальных решений, должно заставить задуматься о причинах этого явления.

Разработчики таких программных комплексов, безусловно, откликнулись бы на реальный спрос на реализацию указанных опций, и если это не произошло, то очевидно, что реальный платежеспособный спрос до сих пор явно не проявился. И вновь встает вопрос о причинах этого.

Более того, если применительно к методу конечных элементов его место в общем технологическом процессе проектирования было сразу четко определено, то о модуле (мо-

дулях) оптимизации этого сказать нельзя. По крайней мере, нам даже не известны реальные проекты систем автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР), где бы четко позиционировались процедуры оптимизации и указывались их связи по управлению и по информации с другими частями САПР.

Представляется очевидным необходимость профессионального обсуждения создавшейся ситуации, и ниже приводятся некоторые соображения, которые безусловно являются субъективными, но, по нашему мнению, могут послужить началом дискуссии

ЭФФЕКТИВНА ЛИ ОПТИМИЗАЦИЯ

Обычно используемые конструктивные решения зданий и сооружений применялись в проектной практике десятки тысяч раз. Эта практика, которую можно рассматривать в качестве некоего поискового эксперимента (возможно плохо организованного, но объективно существующего), привела к набору типичных конструктивных форм, которые достаточно трудно существенно улучшить. Такая практика обычно хорошо исследована и рекомендации, вытекающие из нее, представлена в технической литературе (см., например, [4, 10]).

Сопоставление оптимальных проектов с решениями, построенными на основе опыта, редко указывает на экономию, превышающую единицы процентов. В тех случаях, когда разработчики методов оптимизации говорят о более значительном эффекте, чаще всего выясняется, что в качестве меры для сравнения был выбран заведомо неудачный вариант, или же оптимальное решение еще нуждается в большой «доводке», поскольку не учитывает ряд неформализованных требований.

К сожалению, авторы большинства работ по оптимизации строительных конструкций приводят примеры конструкций, относящиеся к хорошо изученным и проверенным

практикой проектирования. Если целью рассмотрения таких примеров является демонстрация того, что преодолена опасность получения вырожденных или других патологических решений, то такой подход может считаться оправданным. Но если целью является демонстрация эффективности оптимизационного подхода, то следовало бы рассмотреть совсем другие примеры.

Представляется почти очевидным, что имеются три основные области эффективного применения оптимального проектирования строительных конструкций:

а) Разработка конструкций принципиально нового типа или проектирование сооружений для использования в необычных условиях. Естественно, что в таких случаях нельзя (скорее, почти нельзя) опираться на предшествующий опыт, и получение оптимального решения, даже не полностью учитывающего ряд трудно формализуемых условий, может служить хорошим стартом для реальной разработки.

б) Усовершенствование высокосерийных конструкций, когда даже незначительная экономия дает большой эффект в силу многократного повторения. Здесь следует обратить внимание на следующую трудность — условия применения таких конструкций могут сильно варьироваться. Это обстоятельство вынуждает решать еще одну оптимизационную задачу, связанную с разумной унификацией серийного решения [7].

в) Проектирование объектов очень высокой единичной стоимости, где даже небольшое снижение веса заметно перекрывает все затраты на отыскание оптимального решения даже тогда, когда эффект оптимизации относительно невелик.

Нетрудно видеть, что названные направления применения оптимизационных подходов не относятся к массовому строительному проектированию, и здесь трудно рассчитывать на превращение методов оптимизации в рабочий аппарат рядового проектировщика, даже в том случае, когда оптимизация будет представлена в числе функций промышлен-

ных программных систем, как это стало с использованием метода конечных элементов. Однако не только прагматическими установками ограничиваются исследования в области оптимального проектирования. «Оптимальный проект», полученный даже без формализованного учета в процессе оптимизации некоторых ограничений, может оказаться полезным, поскольку при реальном проектировании он может выполнять следующие функции [3].

Во-первых, оптимальный проект может рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Эта функция оптимального проекта позволяет оценивать реальное конструкторское решение по критерию его близости к предельному (например, по материалоемкости, несущей способности, динамическим характеристикам и так далее). Во-вторых, оптимальный проект может использоваться как ориентир при реальном проектировании. При таком подходе реальное проектирование рассматривается как поэтапный процесс отхода от идеального объекта с целью выполнения требований, не учтенных в оптимальном проекте. Возможно и другое построение процесса проектирования – как движение от начального варианта в направлении идеального объекта. При этом на каждом этапе реального проектирования появляется возможность оценки изменения показателя оптимальности объекта по сравнению, как с начальным, так и с идеализированным решением.

Вместе с тем следует отметить, что ряд результатов решенных задач оптимизации имеют теоретическое значение и могут служить основой при выборе вариантов в реальном проектировании. Одним из примеров таких результатов могут служить теоремы о влиянии связей на спектры собственных частот и критических сил [6]. Эти теоремы используются при выборе рациональных схем расстановки связей с целью максимально возможного повышения величины собственной частоты или критической нагрузки.

Некоторые частные задачи оптимизации могут довольно гармонично становиться частью процесса реального проектирования. Примером могут служить задачи о повышении основной собственной частоты до намеченного значения снятием минимального объема грузов и максимально возможного догружения системы при условии снижения первой собственной частоты не ниже допустимой величины [3].

ЦЕЛЕВЫЕ УСТАНОВКИ

Традиционная постановка задач оптимального проектирования конструкций обычно связана с отысканием решения с минимальным весом или минимальной стоимостью при обеспечении условий прочности, жесткости, устойчивости и ограничений на величину основной частоты собственных колебаний. Рассматривается и двойственная постановка, когда вес (стоимость) переводится в ограничение, а в качестве функции цели, которая максимизируется, выступает несущая способность по прочности или критическая нагрузка или собственная частота.

Относительно меньшее развитие получили задачи оптимального проектирования, посвященные совместному рассмотрению требований эффективности, долговечности и технологичности, а также сочетанию этих требований. Пример капитальной работы [10], в которой рассматривался вопрос о комплексном решении проблем эффективности, долговечности и экономичности стальных конструкций производственных зданий, относится, к сожалению, к немногочисленным исключениям.

Следует отметить, что сложность реализации оптимальных проектов во многом обусловлена трудностями, а порой и невозможностью на современном уровне формализовать полный набор разнородных ограничений задачи. В большинстве работ по оптимизации учитывается небольшое число, ограничений, как правило, одно, реже два или три, имею-

щих механический смысл (прочность, жесткость, устойчивость, динамические характеристики). Редко удается учитывать ограничения, реализующие технологические требования при изготовлении, транспортировке, монтаже, эксплуатации.

И, наконец, в работах по оптимизации строительных конструкций основные параметры, определяющие назначение и способ использования объекта, считаются заданными «свыше» и, как правило, не подлежащими ревизии. Полагается, например, что требуется создать проект какого-то здания, где протекает определенный технологический процесс, а вопрос о том, можно ли такой процесс организовать под открытым небом и вообще не строить здание даже не обсуждается.

Вместе с тем иногда полезно нарушить эту традицию и рассмотреть более широкую постановку задачи оптимального проектирования, когда одновременно рассматривается задача оптимизации параметров технологического процесса и проектных решений здания или сооружения, где такой процесс реализуется. В качестве одного из немногих примеров такого подхода можно указать на работу [15], где рассматривалась задача оптимального проектирования ветроэнергетической установки, когда к числу варьируемых параметров проектирования относились не только характеристики конструктивного решения башни (геометрия, толщина оболочки), но и основные рабочие характеристики ветроагрегата (его проектируемая мощность, высота установки и диаметр ветроколеса).

Нетрудно себе представить и расширение классической задачи В.Г. Шухова об оптимальном резервуаре для нефтепродуктов [11], где не считается заданным, а варьируется и объем резервуара, при этом учитываются потери нефтепродуктов от малых и больших «дыханий», возможный ущерб от аварии [9] и другие технико-экономические показатели, зависящие от объема резервуара.

Все сказанное выше относилось к задачам практического плана, но существуют и теоретические проблемы оптимального проектирования, когда исследуются некоторые общие свойства оптимальных решений. Типичным результатом этого направления может служить классическая теорема Мориса Леви о статической определимости конструкции минимального веса при одном нагружении, или установление того факта, что равнопрочные системы не обязательно являются системами минимального веса. Примеры теоретических результатов, имеющих и практическое значение, упоминались в данной статье выше. Важными являются результаты, связанные с выявлением особых свойств оптимальных систем, о чем подробно говорится в [3]. В большинстве работ по оптимизации экстремальное значение функции цели отыскивается в области допустимых решений, выделяемой в пространстве варьируемых параметров системой заданных ограничений. Выявление особых свойств оптимальных систем позволяет решать задачу оптимизации сооружения или его элементов не только методами математического программирования, но и путем создания алгоритмов проектирования систем, обладающих заранее выявленными свойствами. Кроме того, особые свойства оптимальных систем и соответствующие им критерии могут использоваться для оценки традиционных решений задач оптимизации. Представляется, что весьма актуальными могут быть исследования, направленные на анализ определенных правил и приемов принятия проектных решений, которые, как полагают, приводят к оптимальным (может быть лучше сказать — рациональным) решениям. Так, например, в работе [9] было выполнено исследование известной концепции, которая указывает на экономическую целесообразность непрерывного роста единичной мощности промышленных объектов (для сооружений — принцип концентрации материала в основных конструкциях). Оказалось, что если учитывать ограничения, которые

определяются условиями безопасности, то упомянутая концепция имеет границу применимости, что является принципиально важным.

ВЛИЯНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ

Следует учитывать, что выбор решения связан с преодолением неопределенности проектирования, вызванной тем, что этот выбор происходит при неполном знании проектируемого объекта; а число изменчивых и противоречивых установок достаточно велико. В основу проектирования строительных конструкций заложены принципы экономии материала, снижения трудоемкости изготовления и сокращения сроков монтажа. Эти принципы по своей природе противоречивы и их успешное разрешение требует компромисса для создания конструкций минимальной стоимости, которые удовлетворяют условиям удобства эксплуатации, надежности и долговечности.

По большому счету оптимальное проектирование связано:

- с преодолением неопределенности, вызванной тем, что выбор решения, как правило, происходит в условиях неполного знания проектируемой конструкции при наличии ряда неопределенных факторов;
- с большим числом изменчивых и противоречивых целей, с субъективностью лиц, формулирующих задачу;
- многокритериальностью (наличием многих целей проектирования).

Неопределенные факторы могут принадлежать к двум группам [2]:

а) неопределенные факторы, появляющиеся из-за недостаточной изученности каких-либо процессов или величин; такие неопределенности можно назвать природными;

б) неопределенные факторы, отражающие нечеткость цели оптимизации или критерия эффективности.

Типичным примером неопределенности первого типа является неопределенность в законе распределения случайной величины, относительно которой известны только первые моменты (математическое ожидание и дисперсия).

Примером неопределенности второго типа является неопределенность в выборе критерия оценки эффективности конструкции, создание и эксплуатация которой связаны с интересами различных хозяйствующих субъектов.

Действительно, при оценке эффективности инвестиционного проекта соизмерение разновременных показателей первоначальной стоимости и текущих эксплуатационных затрат осуществляется путем дисконтирования (приведения) их к одному моменту времени [18]. Для приведения разновременных затрат, результатов и эффекта используется норма дисконта (E), равная приемлемой норме дохода на капитал. Для дисконтирования разновременные затраты, результаты и эффект умножаются на коэффициент дисконтирования $\alpha_t = 1/(1+E)^t$. Но если инвестор передал объект другому хозяйствующему лицу, которое будет нести эксплуатационные расходы, то приемлемое значение E может иметь для них разные величины.

Например, что может примирить владельца купленной квартиры с тем, что ему придется платить много за отопление, поскольку инвестор не заложил эффективную теплозащиту и таким образом сэкономил на стоимости строительства. Сам инвестор сэкономленные средства может использовать как капитал и получать от них доходы, но фактический пользователь и владелец к этим доходам не имеет отношения. Очевидно, что следует сформулировать условия некоторого компромисса, но постановка такой задачи, насколько нам известно, пока не имеет точной формулировки.

Заметим также, что в условиях стабильно функционирующей рыночной экономики нормы дисконтирования по отдельным периодам практически остаются одинаковыми или меняются незначительно. Иначе обстоит

дело, когда экономика функционирует в условиях инфляции, стагнации, финансового кризиса и т.п. Тогда банки меняют ставку банковского процента на вложенный капитал, и нормы дисконтирования следуют за этими ставками, т.е. подвержены изменениям. И такие изменения могут быть существенными.

По-видимому следует решать оптимизационную задачу многократно, при разных значениях нормы дисконтирования и искать интервалы значений E , внутри которых принципиальные проектные решения не меняются.

Идеальной была бы постановка задачи об *оптимизации жизненного цикла объекта*. Сложности такой постановки очевидны. На разных этапах жизненного цикла могут изменяться как функции цели, так и ограничения. Также на некоторых этапах жизненного цикла функция цели может переходить в ограничения, а некоторое ограничение выступать в качестве функций цели. Кроме того, при такой постановке задачи неопределенность условий как целевых, так и ограничительных существенно возрастает. Например, подлежит существенному уточнению понятие первого предельного состояния конструкции, поскольку определение этого состояния в форме нарушения возможности использования конструкции по назначению не противоречит ее использованию для других целей. В этом смысле стандартная ссылка на пирамиду Хеопса, как на пример весьма надежной конструкции, не выдерживает критики — ее использование по первоначальному назначению невозможно.

СТАБИЛЬНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Многие экономические и технические параметры оптимизационной задачи меняются в достаточно широких диапазонах и это приводит к необходимости качественной оценки последствий *изменений условий задачи* и их влияния на вид оптимального решения. По

сути, здесь проверяется устойчивость полученного оптимального решения по отношению к вариациям условий проектирования.

В качестве наглядного примера такого исследования можно указать на работу [1], в которой была проанализирована роль соотношения между стоимостью материала и стоимостью труда на вид конструктивного решения стальных подкрановых балок. Результаты этого анализа представлены в таблице 1. Использованная программа оптимизации оперировала реальным сортаментом листовой и полосовой стали, а также учитывала все требования норм проектирования. Решения, предлагаемые программой, не нуждались в дальнейшей корректировке.

К сожалению, примеры такого рода чрезвычайно редки, специалисты по оптимизации чаще всего демонстрируют решения некоторых конкретных (подчас достаточно далеких от реальности) задач, хотя качественная оценка «зон притяжения» тех или иных оптимальных решений, рассматриваемых подчас в роли некоторого ориентира, может оказаться намного важнее любого конкретного результата.

В особенности упомянутый анализ оказывается важным в тех случаях, когда «центры притяжения» отличаются качественным образом. Например, они могут быть связаны с разной топологией оптимальных решений, т.е. в тех случаях, когда формулировка задачи не сводится к параметрической оптимизации, а предполагается структурно-схемная оптимизация, и предметом оптимизации являются не только параметры, но и структура объекта. Чаще всего для решения задач структурно-схемной оптимизации используют метод последовательного исследования множеств, когда вначале на основе имеющегося опыта отбирают ограниченное число перспективных структур объекта, каждая из которых может быть описана своей совокупностью параметров.

Таблица 1

Отношение стоимости человеко-часа работы к стоимости килограмма стали	Показатели оптимального решения		Схема оптимальной подкрановой балки
	Масса кг	Трудо-емкость, чел.-час	
0,00	1670	38	
0,58	1752	23	
0,96	1834	22	
1,92	1923	17	

Далее последовательно проводят параметрическую оптимизацию каждой структуры и, наконец, полученные оптимальные варианты сравнивают между собой, выбирая из них наилучший.

Но при варьировании некоторых условий задачи результаты упомянутого сравнения вариантов могут меняться, и здесь было бы весьма желательным разбиение пространства условий проектирования на «зоны притяжения» тех или иных оптимальных вариантов.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Происхождение задач на условный или безусловный экстремум применительно к строительному проектированию связано с тремя источниками:

- законами природы, которые часто формулируются в виде экстремальных принципов;
- осторожностью, которая вынуждает рассматривать наихудшие (экстремальные) из возможных условий существования проектируемого объекта;
- стремлением человека к получению наилучшего возможного результата на том множестве вариантов решения, ко-

торое нам оставляют решения задач двух предыдущих уровней.

Таким образом, хотим мы этого или не хотим, но без решения оптимизационных задач нельзя обойтись, и сама постановка задачи в первых двух случаях практически не зависит от нашего желания. Другое дело в варианте оптимального проектирования, т.е. отыскания проектных решений наилучших в некотором заданном смысле. Здесь остается достаточно широкое поле как в выборе подходов к поиску решения, так и к самой формулировке целей, и все сказанное выше относилось к обсуждению именно этих особенностей задач оптимального проектирования. Мы ни в коем случае не считаем, что наши выводы и рекомендации являются безошибочными и исчерпывающими, и будем полагать свою задачу выполненной, если наша публикация стимулирует дискуссию среди специалистов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гордеев В.Н., Борисенко Ю.С.** Автоматизированное проектирование оптимальных стальных подкрановых балок. // Промышленное строительство и инженерные сооружения, 1971, № 4, с. 34-35.
2. **Гермейер Ю.Б.** Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
3. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. – 372 с.
4. **Никонов Н.Н.** Большепролетные покрытия: Анализ и оценка. – М.: Издательство АСВ, 1998. – 432 с.
5. **Атрек Э., Галлагер Р.Г., Рэгзделл К.М., Зенкевич О.К.** Новые направления оптимизации в строительном проектировании. – М.: Стройиздат, 1989. – 586 с.
6. **Нудельман Я.Л.** Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. – М.: Гостехиздат, 1949. – 175 с.
7. **Очинников И.Г., Бочкарев А.В.** Оптимальные проекты гибких круглых пластин и их практическая реализуемость. // Известия вузов. Строительство, 2003, №6, с. 10-15.
8. **Перельмутер А.В.** Выбор оптимальных параметров для ряда однотипных объектов. // Сборник трудов международной конференции «Теория и практика металлических конструкций», Донецк-Макеевка 1997, Том 2, с. 10-13.
9. **Перельмутер А.В.** Об одной концепции в теории сооружений. // Металлические конструкции, 2010, №4, с. 233-238.
10. **Стрелецкий Н.С., Стрелецкий Д.Н.** Проектирование и изготовление экономичных металлических конструкций. – М.: Стройиздат, 1964. – 359 с.
11. **Шухов В.Г.** Строительная механика. Избранные труды. – М.: Наука, 1977, с. 47-52.
12. **Ashley H.** On making things the best. Aeronautical uses of optimization.[Текст] // Journal of Aircraft, 1982, Vol. 19, No 1, pp. 5-28.
13. **Elishakoff I., Ohsaki M.** Optimization and Anti-Optimization of Structures under uncertainty. – London: Imperial College Press, 2010, 402 p.
14. **Mungan I.** Structural engineering and structures from antiquity to the present. // Proc. IASS Symposium 2001, Nagoya, Japan, pp. 1-3.
15. **Perelmuter A., Yurchenko V.** Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines. // Procedia Engineering, 2013, Vol. 57, pp. 895-905.
16. **Schmit L.A.** Structural design by systematic synthesis. // Proceedings of the Second Conference of Electronic Computation, ASCE. – Pittsburgh (Pennsylvania), 1960, pp. 105-122.

17. **Thompson J.M.T., Hunt G.W.** Dangers of structural optimization. // *Engineering Optimization*, 1974, Vol. 1, pp. 99-110.
18. **Wen Y., Kang Y.** Minimum Building Life-Cycle Cost Design Criteria. I: Methodology. // *J. Struct. Eng.*, 2001, Vol. 127, No 3, pp. 330-337.

Ляхович Леонид Семенович, доктор технических наук, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: lls@tsuab.ru

Перельмутер Анатолий Викторович, доктор технических наук, профессор, НПО «СКАД Софт», Украина, г. Киев; e-mail: anatolyperelmutter@gmail.com

Leonid S. Lyakhovich, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 634003, the city of Tomsk, Solyanaya St., 2;
e-mail: lls@tsuab.ru

Anatoly V. Perelmutter, DSc, Professor, Scientific Industrial Association “SKAD Soft”, Kiev;
e-mail: anatolyperelmutter@gmail.com

О МОДЕЛИРОВАНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОМ СКЛОНЕ

Э.К. Агаханов¹, М.К. Агаханов²

¹ Дагестанский государственный технический университет, г. Махачкала, РОССИЯ

² Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается возможность эквивалентной замены при исследовании напряженного состояния неоднородного склона для допредельного напряженного состояния с помощью вынужденных деформаций, поверхностных и объемных сил, а для предельного напряженного состояния – поверхностных и объемных сил.

Ключевые слова: эквивалентность воздействий, объемная сила, вынужденные деформации, поверхностная сила, компоненты напряжения

ABOUT THE SIMULATION OF STRESSES IN A NON-UNIFORM SLOPE

Elifhan K. Agakhanov¹, Murad K. Agakhanov²

¹ Dagestan State Technical University, Makhachkala, RUSSIA

² Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article considers a possibility of an equivalent change in the process of study of the stressed state of a non-uniform slope for the under-limiting stressed state with the use of forced strains, surface forces and volume forces, and for the limiting stressed state with the use of surface and volume forces. The expression is given for the determination of stresses both for under-limiting and for limiting stressed states of the slope. It is shown that if the slope has a certain stressed state under a real loading, then it may have another stressed state under the influence of an equivalent loading. It allows us to analyze the limiting stressed state through the results of study of the under-limiting stressed state, which is important for the use of experimental methods.

Key words: equivalency of actions, volume force, forced deformations, surface force, stress components

Каковы бы не были причины, вызывающие напряжения в склоне, в конечном счете, в системе уравнений допредельного напряженного состояния это воздействие учитывается с помощью вынужденных деформаций, поверхностных и объемных сил, а в системе уравнений предельного напряженного состояния – поверхностных и объемных сил.

Для определения значений вынужденных деформаций, поверхностных и объемных сил требуется тщательный анализ инженерно-геологической обстановки склона и выполнение некоторых простейших расчетов. В зависимости от конкретной задачи в некоторых случаях действие вынужденных деформаций и поверхностных сил может отсутствовать. Что касается объемных сил, то они,

если даже склон не подвергается воздействию процессов, как силы собственного веса присутствуют всегда.

В случае допредельного напряженного состояния склона можно выполнить эквивалентную замену одного вида воздействия другим по зависимостям [1]

$$\frac{\partial P(t)}{\partial i} = F_i(t), \quad \xi(t) = \frac{1-2\nu}{E} P(t) \quad (1)$$

Тогда напряжения в склоне, вызываемые этими воздействиями, связаны соотношениями

$$\sigma_{ij}^{(F)}(t) = \sigma_{ij}^{(P)}(t) - \sigma_{ij}^{(\xi)}(t) - \delta_{ij} P(t). \quad (2)$$

Теперь установим условия эквивалентности воздействий для предельного напряженного состояния склона. Пусть во всех точках склона под действием объемных сил $F_i(t)$ возникает предельное напряженное состояние. Тогда напряжения в склоне, возникающие от действия объемных сил, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{(F)}(t)}{\partial j} + F_i(t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_1^{(F)}(t) - \sigma_3^{(F)}(t)}{\sigma_1^{(F)}(t) + \sigma_3^{(F)}(t) + 2c(t)ctg\varphi(t)} = \sin \varphi(t), \quad (4)$$

$$\sum_j \sigma_{ij}^{(F)}(t)n_j = 0. \quad (5)$$

Обозначим через $\sigma_{ij}^{(P)}(t)$ напряжения, возникающие в склоне от фиктивных поверхностных сил $P(t)$, распределенных по граничной поверхности и направленных нормально к этой поверхности. В таком случае, очевидно, что эти напряжения удовлетворяют уравнениям

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{(P)}(t)}{\partial j} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_j \sigma_{ij}^{(P)}(t)n_j = P_i(t). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что напряжения в склоне, возникающие от действия объемных сил, представленные в виде

$$\sigma_{ij}^{(F)}(t) = \sigma_{ij}^{(P)}(t) - P\delta_{ij} \quad (8)$$

удовлетворяют граничным условиям (5). Подставляя в (3) формулу для напряжений из (8), получим

$$\frac{\partial P(t)}{\partial i} = F_i(t). \quad (9)$$

Таким образом, задача определения предельных напряжений, возникающих в склоне от действия объемных сил, сводится к задаче определения напряжений от действия фиктивных поверхностных сил определяемых по зависимости (9).

Условие предельного равновесия (4) в случае плоской задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_x^{(F)}(t) - \sigma_z^{(F)}(t) \right]^2 + 4 \left[\tau_{xz}^{(F)}(t) \right]^2 = \\ & = \left[\sigma_x^{(F)}(t) + \sigma_z^{(F)}(t) + 2c(t)ctg\varphi(t) \right]^2 \sin^2 \varphi(t) \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом выражения (8) условие предельного равновесия (10) в напряжениях от фиктивной поверхностной силы принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_x^{(P)}(t) - \sigma_z^{(P)}(t) \right]^2 + 4 \left[\tau_{xz}^{(P)}(t) \right]^2 = \\ & = \left[\sigma_x^{(P)}(t) + \sigma_z^{(P)}(t) - 2P(t) + 2c(t)ctg\varphi(t) \right]^2 \sin^2 \varphi(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Определяя напряжения от фиктивной поверхностной нагрузки, устойчивость склона проверяется по зависимости (11) или по зависимости (10), где значения напряжений от объемных сил определяются с помощью выражения (8), связывающего напряжения от эквивалентных воздействий.

Следовательно, если под воздействием нагрузки склон находится в одном напряженном состоянии (предельном или допредельном), то под воздействием эквивалентной нагрузки он может находиться в другом. Этот результат имеет существенное значение при использовании экспериментальных методов. Он позволяет по результатам исследования допредельного напряженного состояния анализировать предельное напряженное состояние склона.

Сравнивая условия эквивалентности (1) и выражение для напряжений (2) для допредельного состояния склона с условием эквивалентности (9) и выражением для напряжений (8) для предельного состояния склона заметим, что последние совпадают с первыми, если принимать $\nu = 0.5$. Это объясняется тем, что когда во всех точках склона имеется

предельное напряженное состояние, происходит неограниченное развитие пластических деформаций во всех точках склона, т. е. течение всего склона. Очевидно, что коэффициент поперечной деформации грунта склона, находящегося в состоянии течения, равно 0,5. Следовательно, условие эквивалентности воздействий (9) и зависимость, связывающая напряжения от различных видов воздействий (8), для предельного состояния можно было получить на основании простейших соображений, принимая в соответствующих выражениях для допредельного напряженного состояния коэффициент поперечной деформации $\nu = 0,5$.

Так как задача решается для грунтового склона, то, следуя многочисленным исследованиям С.Р. Месчяна [2], примем, что скелет грунта подчиняется закономерностям линейной наследственной теории ползучести.

Предположение о постоянстве во времени коэффициента Пуассона соблюдается для многих грунтов при уплотняющих давлениях до 3 кг/см², что убедительно показано в опытах С.Р. Месчяна.

В таком случае, согласно упругой аналогии [3], напряжения с учетом ползучести $\sigma_{ij}^*(t)$

совпадают с упругомгновенными $\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}$.

Рассмотрим неоднородный склон, состоящий из n слоев, объемные веса которых равны γ_n . Границы между слоями являются неплоскими.

В таком случае объемные силы имеют кусочно-постоянный характер распределения

$$F_x = \gamma_n \text{ и } F_y = F_z = 0, \quad (12)$$

и в пределах каждого слоя склона они обладают свойством потенциальности, т.е. склон находится под действием кусочно-потенциальных объемных сил.

Решение задачи представим в виде суммы решений n задач, в которых в области склона до кровли n -го слоя действие объемных сил равно нулю, а область склона ниже этого

уровня находится под действием объемных сил

$$F_x = \gamma_n - \gamma_{n-1} \text{ и } F_y = F_z = 0 \quad (13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению n однотипных задач.

Для решения этих задач, из поляризационно-оптического материала изготавливаются модели областей склона, находящиеся под действием объемных сил. Далее производится "замораживание" в них напряжений, соответствующие действующим объемным силам.

Для создания объемных сил (13) в областях моделей можно использовать метод центрифугирования. Однако не все лаборатории оборудованы центрифугами. В таком случае можно применить эквивалентность воздействий, согласно которой, напряжения от объемных сил (13) в областях моделей в силу их потенциальности можно представить в виде

$$\sigma_{ij}^{(F)} = \sigma_{ij}^{(P)} - \sigma_{ij}^{(\xi)} - \sigma_{ij}, \quad (14)$$

где

$$P = (\gamma_n - \gamma_{n-1})z$$

– нагрузка нормальная поверхности модели;

$$\xi = \frac{1-2\nu}{E}(\gamma_n - \gamma_{n-1})z$$

– вынужденные деформации;

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\gamma_n - \gamma_{n-1})z.$$

Далее к "замороженным" моделям приклеиваются соответствующие им модели областей склона, в которых действие объемных сил равно нулю, т.е. находящиеся в естественном недеформированном состоянии, после чего производится "отжиг" составленных моделей.

Согласно критериям моделирования, натурные значения напряжений в n -ой задаче определяются по формуле:

– в случае использования метода центрифугирования

$$\sigma_{нат}^{(n)} = \frac{K_l(\gamma_n - \gamma_{n-1})}{K_y \gamma_{мод}} \left(\overline{\sigma}_{мод}^{(F)} - \overline{\sigma}_{мод}^{(F)} \right), \quad (15)$$

– в случае применения эквивалентности воздействий

$$\sigma_{нат}^{(n)} = K_p \left(\overline{\sigma}_{мод}^{(P)} - \overline{\sigma}_{мод}^{(P)} \right) - K_\xi \left(\overline{\sigma}_{мод}^{(\xi)} - \overline{\sigma}_{мод}^{(\xi)} \right) - K_\sigma \left(\overline{\sigma}_{мод} - \overline{\sigma}_{мод} \right) \quad (16)$$

где

$$K_l = \frac{l_{нат}}{l_{мод}}; K_y = \frac{R\omega^2}{g}; K_p = \frac{P_{нат}}{P_{мод}} = \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})z_{нат}}{P_{мод}};$$

$$K_\xi = \frac{(1 - \nu_{мод})E_{нат}\xi_{нат}}{(1 - \nu_{нат})E_{мод}\xi_{мод}} = \frac{(1 - 2\nu_{нат})(1 - \nu_{мод})(\gamma_n - \gamma_{n-1})z_{нат}}{(1 - \nu_{нат})E_{мод}\xi_{мод}};$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{нат}}{\sigma_{мод}} = \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})z_{нат}}{\sigma_{мод}};$$

ω – угловая скорость вращения центрифуги; R – радиус центрифуги; g – ускорение свободного падения; $\gamma_{мод}$ – объемная масса материала модели; $\overline{\sigma}_{мод}^{(F)}$; $\overline{\sigma}_{мод}^{(P)}$; $\overline{\sigma}_{мод}^{(\xi)}$; $\overline{\sigma}_{мод}$ – напряжения в модели области, где действуют объемные силы; $\overline{\sigma}_{мод}^{(F)}$; $\overline{\sigma}_{мод}^{(P)}$; $\overline{\sigma}_{мод}^{(\xi)}$; $\overline{\sigma}_{мод}$ – напряжения в модели, составленной из областей, после отжига.

Тогда значения напряжений в исходной задаче определяются по формуле

$$\sigma_{ij} = \sum \sigma_{нат}^{(n)}. \quad (17)$$

Для иллюстрации предлагаемой методики рассмотрим грунтовую среду, состоящую из n слоев, толщиной каждый h_n , объемные веса которых равны γ_n .

В таком случае объемные силы имеют кусочно-постоянный характер распределения

$$F_x = \gamma_n \text{ и } F_y = F_z = 0, \quad (18)$$

и в пределах каждого слоя грунта они обладают свойством потенциальности, т. е. грунтовая среда находится под действием кусочно-потенциальных объемных сил. Напряжения в данной задаче при условиях

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \text{ и } \sigma_y = \sigma_z$$

на глубине $x = \sum h_n$ определяются, как известно, по зависимостям [4,5]

$$\sigma_x = -\sum \gamma_n h_n, \sigma_y = \sigma_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} \sum \gamma_n h_n, \quad (19)$$

где для слоя грунта, в котором определяются напряжения, h_n обозначает расстояние от кровли этого слоя до рассматриваемой точки, в которой определяются напряжения. Рассмотрим теперь решение данной задачи по предлагаемой методике. Решение задачи представим в виде суммы решений n задач, в которых в области грунтовой среды до кровли n -го слоя действие объемных сил равно нулю, а область ниже этого уровня находится под действием объемных сил

$$F_x = \gamma_n - \gamma_{n-1} \text{ и } F_y = F_z = 0. \quad (20)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению n однотипных задач. Согласно разработанной методике, для решения этих задач, в моделях областей, находящихся под действием объемных сил (20), требуется «замораживание» соответствующих им напряжений.

Выражения для этих напряжений в n -ой задаче имеют следующий вид:

$$\overline{\sigma}_x^{(n)} = -(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} h_k \right), \quad (21)$$

$$\overline{\sigma}_y^{(n)} = \overline{\sigma}_z^{(n)} = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} h_k \right). \quad (22)$$

Очевидно, что напряжения $\overline{\sigma}_x^{(n)}$, $\overline{\sigma}_y^{(n)}$, и $\overline{\sigma}_z^{(n)}$ в точках поверхностей $\left(x = \sum_{k=0}^{n-1} h_k\right)$ в силу того, что они являются плоскими, равны нулю.

Поэтому напряжения, возникающие при «размораживании» составных моделей $\overline{\sigma}_x^{(n)}$, $\overline{\sigma}_y^{(n)}$, и $\overline{\sigma}_z^{(n)}$, в которых к моделям с напряжениями $\overline{\sigma}_x^{(n)}$, $\overline{\sigma}_y^{(n)}$, и $\overline{\sigma}_z^{(n)}$ склеиваются модели областей с нулевыми объемными силами, находящиеся в естественном состоянии, будут также равняться нулю.

Следовательно, в данной задаче целесообразно проведение «мысленного» эксперимента.

В таком случае, согласно разработанной методике, решение n-ой задачи имеет вид

$$\sigma_i^{(n)} = \overline{\sigma}_i^{(n)} - \overline{\overline{\sigma}}_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{когда } x \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_k \\ \overline{\sigma}_i^{(n)} & \text{когда } x > \sum_{k=0}^{n-1} h_k \end{cases} \quad (23)$$

где $i=x, y, z$

Тогда для окончательного решения получаем

$$\sigma_x = \sum \sigma_x^{(n)} = - \sum \gamma_n h_n, \\ \sigma_y = \sigma_z = \sum \sigma_y^{(n)} = \sum \sigma_z^{(n)} = - \frac{\nu}{1-\nu} \sum \gamma_n h_n \quad (24)$$

Таким образом, решение, получаемое по разработанной методике (24), тождественно совпадает с известным решением (19). Этот результат свидетельствует о достоверности разработанной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Савостьянов В.Н., Агаханов Э.К.** Об эквивалентности воздействий в статической задаче механики деформируемого твердого тела. // Известия вузов. Строительство. –Новосибирск, 1995, №10, с. 26-30.
2. **Месчян С.Р.** Некоторые вопросы ползучести глинистых грунтов. // Известия АН Армянской ССР, Серия физ.-мат. наук, 1965.
1. **Хесин Г.Л. и др.** Метод фотоупругости. – М.: Стройиздат, 1975, т.3, 311 с.
3. **Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н.** Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: АСВ, 1994. – 527 с.
4. **Флорин В.А.** Основы механики грунтов. т.1. Госстройиздат, 1959.

Агаханов Элифхан Керимханович, Дагестанский государственный технический университет, кафедра автомобильных дорог, оснований и фундаментов 367015, Республика Дагестан, г. Махачкала, проспект Имама Шамиля, д. 70, (8722) 62-37-61, e-mail: elifhan@bk.ru.

Агаханов Мурад Керимханович, Московский государственный строительный университет, кафедра сопротивления материалов, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, (499) 183-85-59, e-mail: myrad67@mail.ru.

Elifhan K. Agakhanov, Department of Motor Roads, Foundations and Substructures, Dagestan State Technical University, 70 Imam Shamil Avenue, 367015, Makhachkala, RUSSIA, e-mail: elifhan@bk.ru.

Murad K. Agakhanov, Department of strength of materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoe shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: myrad67@mail.ru.

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами,
О.А. Негрозов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, что при отсутствии необходимости в нахождении полного (на всей области занимаемой конструкцией) решения возможно сокращение числа неизвестных (редукция) без существенной потери точности или же с небольшой погрешностью локального решения. Процесс исключения осуществляется на основе применения специальных процедур осреднения и редукции, причем, очевидно, что в наиболее общем случае целесообразно использование различных параметров редуцирования для различных компонент глобального вектора неизвестных (в частности, например, для различных компонент вектора перемещений) разрешающей многоточечной краевой задачи дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Именно такой подход и рассматривается ниже.

Ключевые слова: многоуровневые методы, дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, расчеты строительных конструкций, двумерные задачи, локальные решения

ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov, Mojtaba Aslami,
Oleg A. Negrozov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to advanced wavelet-based discrete-continual finite element method of two-dimensional local structural analysis. The basic idea is that in the absence of the need to find global (in the entire area occupied by structure) solutions may reduce the number of unknowns (reduction) without significant loss of accuracy or with a small error of the local solutions. The process of elimination is based on the use of special procedures of averaging and reduction, and it is obvious that in the most general case, it is advisable to use different parameters of reducing for different components of global vector of unknowns (in particular, for example, for different displacement components) in resultant multi-point boundary problem of discrete-continual finite element method for a system of ordinary differential equations with piecewise constant coefficients. This approach is discussed below.

Key words: multilevel methods, wavelet-based discrete-continual finite element method, local structural analysis, two-dimensional problems

ВВЕДЕНИЕ

При расчете строительных объектов на практике, как правило, не требуется получать решения во всех точках рассматриваемой конструкции – наиболее точное определение напряженно-деформированного состояния необходимо лишь в некоторых заранее известных областях. К последним, в частности, относятся зоны возникновения явлений типа краевого эффекта (эффекта малого параметра), т.е., по сути, те места, где существует риск появления значительных напряжений, потенциально способных привести к разрушению конструкций, а также зоны, к которым предъявляются особые эксплуатационные требования. Мощным, динамично развивающимся аппаратом для выполнения локального расчета в таких ситуациях является многоуровневый вейвлет-анализ [1, 2, 3, 7-10], при котором решение задачи представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет адекватно оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. При отсутствии необходимости в нахождении полного (на всей области занимаемой конструкцией) решения возможно сокращение числа неизвестных (редукция) без существенной потери точности или же с небольшой погрешностью локального решения. В случае решения задачи в базисе Хаара представляется целесообразным исключение из разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) неизвестных, являющихся коэффициентами при базисных функциях, носитель которых достаточно удален от исследуемой зоны. Процесс исключения осуществляется на основе применения процедур осреднения и редукции, описанных, например, в [4, 12, 14]. Вместе с тем, очевидно, что в наиболее общем случае целесообразно использование различных параметров редукционирования для различных компонент глобального вектора неизвестных (в частности, например, для различных компонент вектора перемещений) разрешающей многоточечной краевой задачи дискретно-

континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Именно такой подход и реализован в описанной ниже численной вейвлет-реализации ДКМКЭ, в отличие от описанного, например в [4, 12, 14]. Объектом исследования далее, как и прежде, являются строительные конструкции с регулярными (в частности, постоянными или кусочно-постоянными) физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений (это направление далее условно называется «основным» или «продольным»).

1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

Развиваемый авторами подход на своем начальном этапе состоит, по сути, из двух частей.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению. Будем рассматривать далее статический расчет балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками), т.е. краевую задачу двумерной (плоской) теории упругости. Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,vv}\partial_2^2\bar{u} + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}\partial_2\bar{u} + \mathcal{L}_{k,uu}\bar{u} = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k=1, \dots, n_k-1,$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} = \mathcal{L}_{k,uv} - \mathcal{L}_{k,vu}$; $\mathcal{L}_{k,vu} = \mathcal{L}_{k,uv}^*$; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{L}_{k,uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \partial_1; \quad (1.3)$$

символ «*» здесь и далее обозначает операцию сопряжения; x_1, x_2 – используемые

декартовы координаты; x_2 – переменная, соответствующая основному направлению (заметим, что по переменной x_1 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно); l_2 – длина конструкции по основному направлению ($x_2 \in [0, l_2]$); $x_{2,k}^b$, $k=1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки); Ω_k , $k=1, \dots, n_k-1$ – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}, \quad k=1, \dots, n_k; \quad (1.4)$$

Γ_k , $k=1, \dots, n_k-1$ – соответствующие границы перечисленных фрагментов; $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$ – характеристическая функция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [5, 6],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.5)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе Γ_k ; ω_k , $k=1, \dots, n_k-1$ – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}; \quad (1.6)$$

$\mathcal{L}_{k,vv}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$, $\mathcal{L}_{k,uu}$ – операторы задачи в расширенной области ω_k , причем $\mathcal{L}_{k,uv}^*$ – сопряженный с $\mathcal{L}_{k,uv}$ дифференциальный

оператор, а $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ – кососимметричный оператор; $\bar{\lambda}_k$ и $\bar{\mu}_k$ – параметры Ламе, определенные на расширенной области $\omega_k \supset \Omega_k$ и равны нулю вне Ω_k , т.е.

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (1.7)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s=1, 2; \quad (1.8)$$

$\bar{\mathcal{F}}_k$ – соответствующий вектор правых частей на интервале $(x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = [\mathcal{F}_{k,1} \ \mathcal{F}_{k,2}]^T; \quad \mathcal{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma,k} f_i; \quad (1.9)$$

$\bar{F}_k = [F_{k,1} \ F_{k,2}]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области Ω_k ; $\bar{f}_k = [f_{k,1} \ f_{k,2}]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; \bar{u} – вектор перемещений,

$$\bar{u} = [u_1 \ u_2]^T, \quad (1.10)$$

причем u_1, u_2 – соответствующие компоненты вектора перемещений. Заметим, что

$$\bar{u}_k = \bar{u} = [u_1^{(k)} \ u_2^{(k)}]^T, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b). \quad (1.11)$$

где $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ – компоненты u_1, u_2 вектора перемещений соответственно на интервале $(x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов с использованием техники метода конечных элементов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, где на каждом дискретно-континуальном конечном элементе (ДККЭ) искомая функция по «поперечному» направлению аппроксимируется, как правило, полиномом, а в продольном направлении ее вид остается искомым.

Итак, при рассмотрении двумерной задачи теории упругости переходим от (1.1) к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$-A_{k,vv}\partial_2^2\bar{y} + \tilde{A}_{k,uv}\partial_2\bar{y} + A_{k,uu}\bar{y} = \bar{b}_k, \quad (1.12)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где $A_{k,vv}$, $\tilde{A}_{k,uv}$ и $A_{k,uu}$ – числовые матрицы, представляющие собой дискретизацию операторных коэффициентов $\mathcal{L}_{k,vv}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ и $\mathcal{L}_{k,uu}$ соответственно;

$$\bar{y}_k(x_2) = \bar{y}(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (1.13)$$

$$\bar{y}_k(x_2) = \begin{bmatrix} y_1^{(k)}(x_2) \\ y_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y_{2i-1}^{(k)}(x_2) \\ y_{2i}^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y_{2N-1}^{(k)}(x_2) \\ y_{2N}^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \vdots \\ u_1^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \vdots \\ u_1^{(k)}(x_1^N, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^N, x_2) \end{bmatrix}; \quad (1.14)$$

$$\bar{b}_k(x_2) = \begin{bmatrix} b_1^{(k)}(x_2) \\ b_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ b_{2i-1}^{(k)}(x_2) \\ b_{2i}^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ b_{2N-1}^{(k)}(x_2) \\ b_{2N}^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^N, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^N, x_2) \end{bmatrix}; \quad (1.15)$$

(x_1^i, x_2) , $i = 1, 2, \dots, N$ – координаты узлов сетки дискретно-континуальных элементов по неосновному («поперечному») направлению.

Статические граничные условия учитываются в векторе узловых нагрузок. Следует принять во внимание и кинематические граничные условия.

Граничные условия здесь могут быть записаны в виде:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (1.16)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.17)$$

где

$$\bar{U}_k(x_2) = [\bar{y}_k^T(x_2) \quad \partial_2 \bar{y}_k^T(x_2)]^T, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (1.18)$$

$$\bar{z}_k(x_2) = \partial_2 \bar{y}(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad (1.19)$$

$$k = 1, \dots, n_k - 1;$$

где $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$, $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – матрицы $4N$ -го порядка и векторы правых частей длиной $4N$ граничных условий в граничной точке $x_{2,k}^b$.

2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть Q – матрица базисных функций Хаара, записанных по столбцам, а Q_b – блочная матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а P_{12} – матрица перестановок, определяемая формулой

$$P_{12} \bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_2) \\ \bar{u}_2(x_2) \end{bmatrix};$$

$$\bar{u}_i(x_2) = \{u_i(x_1^j, x_2)\}_{j=1,2,\dots,N}, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

После перехода от единичного базиса к базису Хаара получим:

$$\bar{w}_1(x_2) = Q^T \bar{u}_1(x_2); \quad \bar{w}_2(x_2) = Q^T \bar{u}_2(x_2) \quad (2.3)$$

или $\bar{u}_1(x_2) = Q \bar{w}_1(x_2); \quad \bar{u}_2(x_2) = Q \bar{w}_2(x_2),$

$$(2.4)$$

где $\bar{w}_i(x_2)$ – компоненты разложения вектора $\bar{u}_i(x_2)$ в базисе Хаара. Следуя (2.2)-(2.4), имеем:

$$P_{12}\bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_2) \\ \bar{w}_2(x_2) \end{bmatrix} = Q_b \bar{w}(x_2),$$

где $\bar{w}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_2) \\ \bar{w}_2(x_2) \end{bmatrix}$ (2.5)

$$\text{или } \bar{y}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{w}(x_2), \quad (2.6)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.7)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА.

Рассмотрим без ограничения общности интервал $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$.

Введем обозначения:

$$\bar{w}_i^{(k)} = \bar{w}_i^{(k)}(x_2) = \bar{w}_i(x_2), \quad i=1,2, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (3.1)$$

$$\bar{w}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть $\bar{w}_i^{(k),red}(x_2)$, $i=1,2$ – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов $\bar{u}_i^{(k)}(x_2)$, $i=1,2$ в базисе Хаара, $R_{k,i}$ – прямоугольная матрица размером $N \times N_{red,i}^{(k)}$, которую будем называть матрицей редукции вектора $\bar{w}_i^{(k)}(x_2)$ ($N_{red,i}^{(k)}$ – длины векторов $\bar{w}_i^{(k),red}(x_2)$, $i=1,2$) на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$. Сообразно [4, 12, 14] имеем:

$$R_{k,i} : \bar{w}_i^{(k),red}(x_2) \rightarrow \bar{w}_i^{(k)}(x_2), \quad i=1,2, \quad (3.3)$$

$$\text{т.е. } \bar{w}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \bar{w}_i^{(k),red}(x_2), \quad i=1,2. \quad (3.4)$$

Разумеется, очевидно, что

$$\partial_2 \bar{w}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \partial_2 \bar{w}_i^{(k),red}(x_2), \quad i=1,2. \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{w}_k(x_2) &= \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix} = R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_2); \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{где } R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix}; \quad \bar{w}_k^{red}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

т.е. $R_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $2N \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Таким образом, на основании (1.13), (2.6) и (3.1), получим:

$$\bar{y}_k(x_2) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_2) \quad (3.8)$$

$$\text{или } \bar{y}_k(x_2) = S_k \bar{w}_k^{red}(x_2),$$

$$\text{где } S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}, \quad (3.9)$$

т.е. S_k – прямоугольная матрица размером $2N \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{y}_k), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{y}) &= 0.5 \cdot [(A_{k,vv} \partial_2 \bar{y}_k, \partial_2 \bar{y}_k) + (\tilde{A}_{k,uv} \partial_2 \bar{y}_k, \bar{y}_k) + \\ &+ (A_{k,uu} \bar{y}_k, \bar{y}_k)] - (\bar{b}_k, \bar{y}_k). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразовывая выражение (3.11) с учетом (3.9) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{y}_k) &= 0.5 \cdot [(A_{k,vv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red})] - (\bar{b}_k, S_k \bar{w}_k^{red}) = \\ &= 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,vv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{w}_k^{red}) &= 0.5 \cdot [(A_{k,2,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,1,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,vv} S_k$; $\tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k$;

$$A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad \bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k; \quad (3.13)$$

$A_{k,2,s}$, $\tilde{A}_{k,1,s}$ и $A_{k,0,s}$ – матрицы размером $(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; \bar{b}_s – вектор размером $N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}$.

После редукции (1.12) принимает вид:

$$-A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{w}_k^{red} + \tilde{A}_{k,1,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red} = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.14)$$

Вводя обозначения

$$\bar{t}_k^{red} = \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (3.15)$$

переписываем (3.14) в виде

$$-A_{k,2,s} \partial_2 \bar{t}_k^{red} + \tilde{A}_{k,1,s} \bar{t}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red} = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.16)$$

Объединяя (3.16) и (3.15), получим следующую систему

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & A_{k,2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{w}_k^{red} \\ \partial_2 \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{red} \\ \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

или

$$\begin{bmatrix} \partial_2 \bar{w}_k^{red} \\ \partial_2 \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{red} \\ \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

где E_k – единичная матрица размером $(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; \bar{w}_k^{red} и \bar{t}_k^{red} – векторы размером $N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}$.

Окончательно имеем:

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad (3.20)$$

$$\text{где } A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix};$$

$$\bar{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.21)$$

$$\bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{red} \\ \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix}; \quad \bar{V}'_k = \partial_2 \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{w}_k^{red} \\ \partial_2 \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

причем A_k – матрица размером

$2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; \bar{V}_k и \bar{F}_k – векторы размером $2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Согласно (3.9) и (3.15) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \bar{y}_k(x_2) &= S_k \bar{w}_k^{red}(x_2); \\ \partial_2 \bar{y}_k(x_2) &= S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}(x_2) = S_k \bar{t}_k^{red}(x_2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Следовательно, для вектора (1.18) будем иметь:

$$\bar{U}_k(x_2) = \begin{bmatrix} S_k \bar{w}_k^{red}(x_2) \\ S_k \bar{t}_k^{red}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{red}(x_2) \\ \bar{t}_k^{red}(x_2) \end{bmatrix}$$

или

$$\bar{U}_k(x_2) = S_{b,k} \bar{V}_k(x_2), \quad \text{где } S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

$S_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $2N \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Заметим, что, пользуясь (3.9) и (2.7), трудно получить

$$\begin{aligned} S_k^T S_k &= (P_{12}^T Q_b R_{b,k})^T P_{12}^T Q_b R_{b,k} = \\ &= R_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T Q_b^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k}, \end{aligned}$$

т.е. $S_{b,k}^T S_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k}$. (3.25)

Граничные условия (1.16) и (1.17) с учетом (3.24) могут быть записаны в виде:

$$\tilde{B}_k^- \bar{V}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.26)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.27)$$

где $\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}$, $k = 2, \dots, n_k$; (3.28)

$$\tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1; \quad (3.29)$$

\tilde{B}_k^- – прямоугольные матрицы размером $4N \times 2(N_{red,1}^{(k-1)} + N_{red,2}^{(k-1)})$; \tilde{B}_k^+ – прямоугольные матрицы размером $4N \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Итак, имеем систему $4N(n_k - 1)$ уравнений с количеством неизвестных равным

$$N_{red}^{total} = 2 \sum_{k=1}^{n_k-1} (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}), \quad (3.30)$$

Причем

$$4N(n_k - 1) \geq N_{red}^{total}, \quad (3.31)$$

т.е. система (3.26)-(3.27) является переопределенной и для ее решения следует использовать, например, метод наименьших квадратов.

В частном случае двухточечной краевой задачи ($n_k = 2$) имеем:

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^-, \quad (3.32)$$

где $\tilde{B}_1^+ = B_1^+ S_b$; $\tilde{B}_2^- = B_2^- S_b$; $S_b = S_{b,1}$. (3.33)

Умножая обе части уравнения (3.32) слева на матрицу S_b^T , получим систему из $2(N_{red,1}^{(1)} + N_{red,2}^{(1)})$ уравнений с $2(N_{red,1}^{(1)} + N_{red,2}^{(1)})$ неизвестными:

$$\tilde{\tilde{B}}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{\tilde{B}}_2^- \bar{V}_1(x_{2,2}^b - 0) = \tilde{\tilde{g}}_1^+ + \tilde{\tilde{g}}_2^-, \quad (3.34)$$

где $\tilde{\tilde{B}}_1^+ = S_b^T \tilde{B}_1^+ = S_b^T B_1^+ S_b$;
 $\tilde{\tilde{B}}_2^- = S_b^T \tilde{B}_2^- = S_b^T B_2^- S_b$; (3.35)

$$\tilde{\tilde{g}}_1^+ = S_b^T \bar{g}_1^+; \quad \tilde{\tilde{g}}_2^- = S_b^T \bar{g}_2^-. \quad (3.36)$$

Для решения системы (3.34) могут использоваться как прямые (например, метод Гаусса), так и итерационные методы.

4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.20) совместно с граничными условиями (3.26)-(3.27), заключаем, что при решении двумерной задачи теории упругости в рамках усовершенствованной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов разрешающей является многоточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_k' &= A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_k^- \bar{V}_k(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ &k = 2, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицами A_k , $k=1, \dots, n_k-1$ с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц A_k , $k=1, \dots, n_k-1$ имеет следующие особенности:

- 1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы A_k к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad \text{где } M - \text{большое число}; \quad (4.2)$$

3) в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;

4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [5, 6, 11, 13]. После определения вектора $\bar{V}_k(x_2)$, пользуясь формулой (3.23) находим $\bar{U}(x_2)$ и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2014. – 158 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.

7. **Рассел Д., Кон Р.** Дискретное вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2012. – 72 с.
 8. **Рассел Д., Кон Р.** Вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2013. – 82 с.
 9. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
 10. **Яковлев А.Н.** Основы вейвлет-преобразования сигналов. – М.: Science Press, 2003. – 80 с.
 11. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012)*, pp. 4502-4505.
 12. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012)*, pp. 3155-3158.
 13. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // *Advanced Materials Research Vols. 250-253, 2011*, pp. 3652-3655.
 14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 405-408 (2013)*, pp. 3165-3168.
- ударственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com
- Негрозов Олег Александрович, студент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com
- Oleg A. Negrozov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский гос-

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами,
О.А. Негрозов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, что при отсутствии необходимости в нахождении полного (на всей области занимаемой конструкцией) решения возможно сокращение числа неизвестных (редукция) без существенной потери точности или же с небольшой погрешностью локального решения. Процесс исключения осуществляется на основе применения специальных процедур осреднения и редукции, причем, очевидно, что в наиболее общем случае целесообразно использование различных параметров редукции для различных компонент глобального вектора неизвестных (в частности, например, для различных компонент вектора перемещений) разрешающей многоточечной краевой задачи дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Именно такой подход и рассматривается ниже.

Ключевые слова: многоуровневые методы, дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, расчеты строительных конструкций, трехмерные задачи, локальные решения

ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov, Mojtaba Aslami,
Oleg A. Negrozov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to advanced wavelet-based discrete-continual finite element method of three-dimensional local structural analysis. The basic idea is that in the absence of the need to find global (in the entire area occupied by structure) solutions may reduce the number of unknowns (reduction) without significant loss of accuracy or with a small error of the local solutions. The process of elimination is based on the use of special procedures of averaging and reduction, and it is obvious that in the most general case, it is advisable to use different parameters of reducing for different components of global vector of unknowns (in particular, for example, for different displacement components) in resultant multi-point boundary problem of discrete-continual finite element method for a system of ordinary differential equations with piecewise constant coefficients. This approach is discussed below.

Key words: multilevel methods, wavelet-based discrete-continual finite element method, local structural analysis, three-dimensional problems

1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

Развиваемый авторами подход на своем начальном этапе состоит из двух частей.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению. Будем рассматривать далее статический расчет трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками), т.е. краевую задачу трехмерной (пространственной) теории упругости. Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,vv}\partial_3^2\bar{u} + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}\partial_3\bar{u} + \mathcal{L}_{k,uu}\bar{u} = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$

$$x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k=1, \dots, n_k - 1;$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} = \mathcal{L}_{k,uv} - \mathcal{L}_{k,vu}$; $\mathcal{L}_{k,vu} = \mathcal{L}_{k,uv}^*$; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k \\ 0 & 0 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k \\ \partial_1^*\bar{\mu}_k & \partial_2^*\bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{k,uu} = \sum_{j=1}^2 \partial_j^*\bar{\mu}_k \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\mu}_k \partial_1 & \partial_2^*\bar{\mu}_k \partial_1 & 0 \\ \partial_1^*\bar{\mu}_k \partial_2 & \partial_2^*\bar{\mu}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ \partial_2^*\bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

символ «*» здесь и далее обозначает операцию сопряжения; x_1, x_2, x_3 – используемые декартовы координаты; x_3 – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно

(заметим, что по переменным x_1 и x_2 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно)); l_3 – длина конструкции по основному направлению ($x_3 \in [0, l_3]$); $x_{3,k}^b, k=1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки); $\Omega_k, k=1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\Omega, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \}, \quad k=1, \dots, n_k; \quad (1.5)$$

где S_Ω – область, занимаемая «поперечным» по отношению к основному направлению сечением конструкции (постоянно вдоль x_3); $\Gamma_k, k=1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие границы перечисленных фрагментов; $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2, x_3)$ – характеристическая функция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [4, 5, 6],

$$\theta_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin \Omega_k; \end{cases}$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.6)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2} \ n_{k,3}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе Γ_k ; $\omega_k, k=1, \dots, n_k - 1$ – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \}; \quad (1.7)$$

$\mathcal{L}_{k,vv}, \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}, \mathcal{L}_{k,uu}$ – операторы задачи в расширенной области ω_k , причем $\mathcal{L}_{k,uv}^*$ – со-

пряженный с $\mathcal{L}_{k,uv}$ дифференциальный оператор, а $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ – кососимметричный оператор; $\bar{\lambda}_k$ и $\bar{\mu}_k$ – параметры Ламе, определенные на расширенной области $\omega_k \supset \Omega_k$ и равны нулю вне Ω_k , т.е.

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (1.8)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2, 3; \quad (1.9)$$

$\bar{\mathcal{F}}_k$ – соответствующий вектор правых частей на интервале $(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = [\mathcal{F}_{k,1} \quad \mathcal{F}_{k,2} \quad \mathcal{F}_{k,3}]^T; \quad \mathcal{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma,k} f_i; \quad (1.10)$$

$\bar{F}_k = [F_{k,1} \quad F_{k,2} \quad F_{k,3}]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области Ω_k ; $\bar{f}_k = [f_{k,1} \quad f_{k,2} \quad f_{k,3}]^T$ – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; \bar{u} – вектор перемещений,

$$\bar{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T, \quad (1.11)$$

причем u_1, u_2, u_3 – соответствующие компоненты вектора перемещений.

Заметим, что (ниже $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ – компоненты u_1, u_2, u_3 вектора перемещений соответственно на интервале $(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$):

$$\bar{u}_k = \bar{u} = [u_1^{(k)} \quad u_2^{(k)} \quad u_3^{(k)}]^T, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b). \quad (1.12)$$

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов с использованием техники метода конечных элементов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, где на каждом дискретно-континуальном конечном элементе (ДККЭ) искомая функция по «поперечным» направлениям аппроксими-

руется билинейно, а в продольном направлении ее вид остается искомым. Иными словами, функция фактически определяется своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

Итак, при рассмотрении трехмерной задачи теории упругости переходим от (1.1) к системе дифференциальных уравнений вида:

$$-A_{k,vv} \partial_3^2 \bar{y} + \tilde{A}_{k,uv} \partial_3 \bar{y} + A_{k,uu} \bar{y} = \bar{b}_k, \quad (1.13)$$

$$x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1;$$

где $A_{k,vv}$, $\tilde{A}_{k,uv}$ и $A_{k,uu}$ – числовые матрицы, представляющие собой дискретизацию операторных коэффициентов $\mathcal{L}_{k,vv}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ и $\mathcal{L}_{k,uu}$ соответственно;

$$\bar{y}_k(x_3) = \bar{y}(x_3), \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b); \quad (1.14)$$

или, что эквивалентно,

$$\bar{y}_k = \bar{y}_k(x_3) =$$

$$= [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N,1)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N,2)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,N)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N,N)})^T]^T; \quad (1.15)$$

$$\bar{u}_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,p,q)} \\ u_2^{(k,p,q)} \\ u_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, N;$$

$$\bar{b}_k = \bar{b}_k(x_3) =$$

$$= [(\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,1)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,2)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,N)})^T \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,N)})^T \quad \dots \quad (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,N)})^T]^T; \quad (1.17)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,p,q)} = \bar{\mathcal{F}}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_1^{(k,p,q)} \\ \bar{\mathcal{F}}_2^{(k,p,q)} \\ \bar{\mathcal{F}}_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, N;$$

$$\bar{\mathcal{F}}_i^{(k,p,q)} = \bar{\mathcal{F}}_{k,i}(x_1^p, x_2^q, x_3), \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.19)$$

(x_1^p, x_2^q, x_3) , $p=1, 2, \dots, N$, $q=1, 2, \dots, N$ – координаты узлов сетки дискретно-континуальных элементов по неосновному («поперечному») направлению, т.е. общее количество дискретно-континуальных элементов в модели, аппроксимирующей конструкцию, равно

$$n = N^2; \quad (1.20)$$

$\bar{u}_i^{(k,p,q)} = \bar{u}_i^{(k,p,q)}(x_3)$ – функция, определяющая изменение компоненты перемещения u_i в узле с координатой (x_1^p, x_2^q, x_3) на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$.

Статические граничные условия учитываются в векторе узловых нагрузок. Следует принять во внимание и кинематические граничные условия.

Граничные условия здесь могут быть записаны в виде:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (1.21)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.22)$$

где

$$\bar{U}_k(x_3) = [\bar{y}_k^T(x_3) \quad \partial_3 \bar{y}_k^T(x_3)]^T, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (1.23)$$

$$\bar{z}_k(x_3) = \partial_3 \bar{y}(x_2), \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1; \quad (1.24)$$

$B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – матрицы $6n$ -го порядка и векторы правых частей длиной $6n$ граничных условий в граничной точке $x_{3,k}^b$.

2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть Q – матрица базисных функций

Хаара [1-3, 7-10], записанных по столбцам, а Q_b – блочная матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а P_{12} – матрица перестановок, определяемая формулой

$$P_{12} \bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_3) \\ \bar{u}_2(x_3) \\ \bar{u}_3(x_3) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{u}_i(x_3) = [(u_i^{(1,1)})^T \quad (u_i^{(2,1)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,1)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (u_i^{(1,2)})^T \quad (u_i^{(2,2)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (u_i^{(1,N)})^T \quad (u_i^{(2,N)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,N)})^T]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

– векторы размером (длиной) n .

Выполняя переход от единичного базиса к базису Хаара, можем записать, что

$$\bar{w}_i(x_3) = Q^T \bar{u}_i(x_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{или} \\ \bar{u}_i(x_3) = Q \bar{w}_i(x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

где $\bar{w}_i(x_3)$ – компоненты разложения вектора $\bar{u}_i(x_3)$ в базисе Хаара.

Следуя (2.2)-(2.4), имеем:

$$P_{12} \bar{y}(x_3) = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_3) \\ \bar{w}_2(x_3) \\ \bar{w}_3(x_3) \end{bmatrix} = Q_b \bar{w}(x_3),$$

$$\text{где } \bar{w}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_3) \\ \bar{w}_2(x_3) \\ \bar{w}_3(x_3) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{или } \bar{y}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{w}(x_3), \quad (2.6)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.7)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА

Рассмотрим без ограничения общности интервал $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$.

Введем обозначения:

$$\bar{w}_i^{(k)} = \bar{w}_i^{(k)}(x_3) = \bar{w}_i(x_3), \quad i=1, 2, 3, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b); \quad (3.1)$$

$$\bar{w}_k(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k)}(x_3) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть $\bar{w}_i^{(k),red}(x_3)$, $i=1, 2, 3$ – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов $\bar{w}_i^{(k)}(x_3)$, $i=1, 2, 3$ в базисе Хаара, $R_{k,i}$ – прямоугольная матрица размером $n \times n_{red,i}^{(k)}$, которую будем называть матрицей редукции вектора $\bar{w}_i^{(k)}(x_3)$ ($n_{red,i}^{(k)}$ – длины векторов $\bar{w}_i^{(k),red}(x_3)$, $i=1, 2, 3$) на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$. Сообразно [4, 12, 14] имеем:

$$R_{k,i} : \bar{w}_i^{(k),red}(x_3) \rightarrow \bar{w}_i^{(k)}(x_3), \quad i=1, 2, 3, \quad (3.3)$$

$$\text{т.е. } \bar{w}_i^{(k)}(x_3) = R_{k,i} \bar{w}_i^{(k),red}(x_3), \quad i=1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Разумеется, очевидно, что

$$\partial_3 \bar{w}_i^{(k)}(x_3) = R_{k,i} \partial_3 \bar{w}_i^{(k),red}(x_3), \quad i=1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{w}_k(x_3) &= \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k)}(x_3) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{k,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k),red}(x_3) \end{bmatrix} = T_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_3), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{где } R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{k,3} \end{bmatrix};$$

$$\bar{w}_k^{red}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k),red}(x_3) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

т.е. $R_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $3n \times (n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Таким образом, на основании (1.14), (2.6), (3.2), получим:

$$\bar{y}_k(x_3) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_3) \quad (3.8)$$

$$\text{или } \bar{y}_k(x_3) = S_k \bar{w}_k^{red}(x_3),$$

$$\text{где } S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}, \quad (3.9)$$

т.е. S_k – прямоугольная матрица размером $3n \times (n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{y}_k), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{y}_k) &= 0.5 \cdot [(A_{k,vv} \partial_3 \bar{y}_k, \partial_3 \bar{y}_k) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,uv} \partial_3 \bar{y}_k, \bar{y}_k) + (A_{k,uu} \bar{y}_k, \bar{y}_k)] - (\bar{b}_k, \bar{y}_k). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразовывая выражение (3.11) с учетом (3.9) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{y}) &= 0.5 \cdot [(A_{k,vv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red})] - \\ &- (\bar{b}_k, S_k \bar{w}_k^{red}) = \\ &= 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,vv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{w}_k^{red}) &= 0.5 \cdot [(A_{k,2,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,1,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_{k,2,s} &= S_k^T A_{k,vv} S_k; \quad \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k; \\ A_{k,0,s} &= S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad \bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k; \end{aligned} \quad (3.13)$$

\bar{b}_s – вектор размером $n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}$;
 $A_{k,2,s}$, $\tilde{A}_{k,1,s}$, $A_{k,0,s}$ – матрицы размером $(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}) \times (n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Таким образом, после редукции (1.13) принимает вид:

$$-A_{k,2,s} \partial_3^2 \bar{w}_k^{red} + \tilde{A}_{k,1,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red} = \bar{F}_{k,s}. \quad (3.12)$$

Вводя обозначения

$$\bar{z}_k = \bar{w}_k^{red}; \quad \bar{t}_k = \partial_3 \bar{z}_k = \bar{z}'_k; \quad \bar{t}'_k = \partial_3 \bar{t}_k, \quad (3.13)$$

перепишем (3.12) в виде

$$-A_{k,2,s} \partial_3 \bar{z}_k + \tilde{A}_{k,1,s} \bar{z}_k + A_{k,0,s} \bar{t}_k = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.14)$$

Объединяя (3.13) и (3.14), получим следующую систему

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & A_{k,2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

или

$$\begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.16)$$

где \bar{z} и \bar{t} – векторы размером $n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}$; E_k – единичная матрица размером $(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}) \times (n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Окончательно имеем:

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_k &= \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix}; \\ \bar{F}_k &= - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{V}'_k = \partial_3 \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \partial_3 \bar{z}_k \\ \partial_3 \bar{t}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

причем \bar{V}_k и \bar{F}_k – векторы размером $2(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$; A_k – матрица размером $2(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}) \times 2(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Согласно (3.7) и (3.13) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \bar{y}_k(x_3) &= S_k \bar{z}_k(x_3); \\ \partial_3 \bar{y}_k(x_3) &= \bar{y}'_k(x_3) = S_k \partial_3 \bar{z}_k(x_3) = S_k \bar{t}_k(x_3). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(x_3) &= \begin{bmatrix} \bar{y}_k(x_3) \\ \partial_3 \bar{y}_k(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \bar{z}_k(x_2) \\ S_k \bar{t}_k(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k(x_3) \\ \bar{t}_k(x_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или

$$\bar{U}_k(x_3) = S_{b,k} \bar{V}_k(x_3), \quad \text{где } S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad (3.21)$$

$S_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $6n \times 2(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Заметим, что, пользуясь (3.7) и (2.7), нетрудно получить

$$S_k^T S_k = (P_{12}^T Q_b R_{b,k})^T P_{12}^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T Q_b^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k},$$

т.е. $S_{b,k}^T S_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k}$. (3.22)

Граничные условия (1.21) и (1.22) с учетом (3.21) могут быть записаны в виде:

$$\tilde{B}_k^- \bar{V}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.23)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.24)$$

где $\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}$, $k = 2, \dots, n_k$; (3.25)

$\tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}$, $k = 1, \dots, n_k - 1$; (3.26)

\tilde{B}_k^- – прямоугольные матрицы размером $6n \times 2(n_{red,1}^{(k-1)} + n_{red,2}^{(k-1)} + n_{red,3}^{(k-1)})$; \tilde{B}_k^+ – прямоугольные матрицы размером $6n \times 2(n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)})$.

Итак, имеем систему $6n(n_k - 1)$ уравнений с количеством неизвестных равным

$$N_{red}^{total} = 2 \sum_{k=1}^{n_k-1} (n_{red,1}^{(k)} + n_{red,2}^{(k)} + n_{red,3}^{(k)}), \quad (3.27)$$

причем

$$6N(n_k - 1) \geq N_{red}^{total}, \quad (3.28)$$

т.е. система (3.23)-(3.24) является переопределенной и для ее решения следует использовать, например, метод наименьших квадратов.

В частном случае двухточечной краевой задачи ($n_k = 2$) имеем:

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \tilde{B}_2^- \bar{V}_1(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^-, \quad (3.29)$$

где $\tilde{B}_1^+ = B_1^+ S_b$; $\tilde{B}_2^- = B_2^- S_b$; $S_b = S_{b,1}$. (3.30)

Умножая обе части уравнения (3.29) слева на матрицу S_b^T , получим систему из $2(n_{red,1}^{(1)} + n_{red,2}^{(1)} + n_{red,3}^{(1)})$ уравнений с $2(n_{red,1}^{(1)} + n_{red,2}^{(1)} + n_{red,3}^{(1)})$ неизвестными:

$$\tilde{\tilde{B}}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \tilde{\tilde{B}}_2^- \bar{V}_1(x_{3,n_k}^b - 0) = \tilde{\tilde{g}}_1^+ + \tilde{\tilde{g}}_2^-, \quad (3.31)$$

где $\tilde{\tilde{B}}_1^+ = S_b^T \tilde{B}_1^+ = S_b^T B_1^+ S_b$;
 $\tilde{\tilde{B}}_2^- = S_b^T \tilde{B}_2^- = S_b^T B_2^- S_b$; (3.32)

$\tilde{\tilde{g}}_1^+ = S_b^T \bar{g}_1^+$; $\tilde{\tilde{g}}_2^- = S_b^T \bar{g}_2^-$. (3.33)

Для решения системы (3.31) могут использоваться как прямые (например, метод Гаусса), так и итерационные методы.

4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА.

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.17) совместно с граничными условиями (3.23)-(3.24), заключаем, что при решении трехмерной задачи теории упругости в рамках модифицированной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов разрешающей является многоточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_k' &= A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_k^- \bar{V}_k(x_{3,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{3,k}^b + 0) &= \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ &k = 2, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) &= \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных

дифференциальных уравнений определяется матрицами A_k , $k=1, \dots, n_k - 1$ с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц A_k , $k=1, \dots, n_k - 1$ имеет следующие особенности:

1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы A_k к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad \text{где } M \text{ – большое число; (4.2)}$$

3) в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;

4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [4, 6, 11-13]. После определения вектора $\bar{V}_k(x_3)$, пользуясь формулой (3.21) находим $\bar{U}(x_3)$ и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блатгер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. Захарова Т.В., Шестаков О.В. Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2014. – 158 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л. Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.

7. **Рассел Д., Кон Р.** Дискретное вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2012. – 72 с.
 8. **Рассел Д., Кон Р.** Вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2013. – 82 с.
 9. **Чун К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
 10. **Яковлев А.Н.** Основы вейвлет-преобразования сигналов. – М.: Science Press, 2003. – 80 с.
 11. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012)*, pp. 4502-4505.
 12. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012)*, pp. 3155-3158.
 13. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // *Advanced Materials Research Vols. 250-253, 2011*, pp. 3652-3655.
 14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 353-356 (2013)*, pp. 3224-3227.
- кладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com
- Негрозов Олег Александрович, студент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com
- Oleg A. Negrozov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и при-

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСЧЕТА ТОНКИХ ПЛАСТИН

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров, Моджтаба Аслами,
О.А. Негрозов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В данной статье усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, что при отсутствии необходимости в нахождении полного (на всей области занимаемой конструкцией) решения возможно сокращение числа неизвестных (редукция) без существенной потери точности или же с небольшой погрешностью локального решения. Процесс исключения осуществляется на основе применения специальных процедур осреднения и редукции, причем, очевидно, что в наиболее общем случае целесообразно использование различных параметров редукции для различных компонент глобального вектора неизвестных разрешающей многоточечной краевой задачи дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Именно такой подход и рассматривается ниже.

Ключевые слова: многоуровневые методы, дискретно-континуальный метод конечных элементов, вейвлет-реализация, расчеты тонких пластин, локальные решения

ADVANCED WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR LOCAL PLATE ANALYSIS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov, Mojtaba Aslami,
Oleg A. Negrozov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to advanced wavelet-based discrete-continual finite element method of local plate analysis. The basic idea is that in the absence of the need to find global (in the entire area occupied by structure) solutions may reduce the number of unknowns (reduction) without significant loss of accuracy or with a small error of the local solutions. The process of elimination is based on the use of special procedures of averaging and reduction, and it is obvious that in the most general case, it is advisable to use different parameters of reducing for different components of global vector of unknowns (in particular, for example, for different displacement components) in resultant multi-point boundary problem of discrete-continual finite element method for a system of ordinary differential equations with piecewise constant coefficients. This approach is discussed below.

Key words: multilevel methods, wavelet-based discrete-continual finite element method, local plate analysis

1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

Развиваемый авторами подход на своем

начальном этапе состоит, по сути, из двух частей.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраня-

ющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению. Будем рассматривать далее статический расчет тонкой пластины (в рамках модели Кирхгоффа [4, 5, 6]) с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками). Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,4}\partial_2^4 w + \mathcal{L}_{k,2}\partial_2^2 w + \mathcal{L}_{k,0}w = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$

$$x_3 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где $\mathcal{L}_{k,4} = \theta_k D_k$; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,2} = -[\partial_1^2 \theta_k D_k \nu_k + 2\partial_1 \theta_k D_k (1 - \nu_k) \partial_1 + \theta_k D_k \nu_k \partial_1^2]; \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_1^2 \theta_k D_k \partial_1^2 + \theta_k c_k; \quad (1.4)$$

x_1, x_2 – используемые декартовы координаты; x_2 – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры пластины изменяются кусочно-постоянно (заметим, что по переменной x_1 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно)); l_1 и l_2 – размеры пластины в плане, $x_1 \in [0, l_1]$, $x_2 \in [0, l_2]$; $x_{2,k}^b$, $k = 1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки); Ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}, \quad k = 1, \dots, n_k; \quad (1.5)$$

Γ_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие границы перечисленных фрагментов; $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$ – характеристическая функ-

ция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [4, 5, 6],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.6)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе Γ_k ; ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2): -\infty < x_1 < +\infty, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}; \quad (1.7)$$

$\mathcal{L}_{k,4}$, $\mathcal{L}_{k,2}$, $\mathcal{L}_{k,0}$ – операторы задачи в расширенной области ω_k ; D_k , ν_k и c_k – соответственно цилиндрическая жесткость пластины, коэффициент Пуассона материала пластины и коэффициент отпора упругого основания (при наличии) на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$,

$$D_k = E_k h_k^3 / [12(1 - \nu_k^2)]; \quad (1.8)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2; \quad (1.9)$$

h_k – толщина в области Ω_k ; $\bar{\mathcal{F}}_k$ – функция правых частей (нагрузки) в области Ω_k ,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = \theta_k q_k - \delta_{\Gamma,k} Q - \partial_1(\delta_{\Gamma,k} \mathcal{M}_1) - \partial_2(\delta_{\Gamma,k} \mathcal{M}_2) \quad (1.10)$$

q – плотность нагрузки; Q , \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 – поперечная сила и крутящие моменты на границе; w – прогиб пластины; Заметим, что

$$w_k = w, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad (1.11)$$

где w_k – прогиб пластины на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$.

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов с использованием техники метода конечных элементов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, где на каждом дискретно-континуальном конечном элементе (ДККЭ) искомая функция по «поперечному» направлению аппроксимируется, как правило, полиномом, а в продольном направлении ее вид остается искомым. Иными словами, функция фактически определяется своим поведением на ребрах ДККЭ.

Итак, при рассмотрении задачи об изгибе тонкой плиты переходим от (1.1) к системе дифференциальных уравнений вида:

$$-A_{k,4} \partial_2^4 \bar{u} + A_{k,2} \partial_2^2 \bar{u} + A_{k,0} \bar{u} = \bar{b}_k, \quad (1.12)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где $A_{k,4}$, $\tilde{A}_{k,2}$ и $A_{k,0}$ – числовые матрицы, представляющие собой дискретизацию операторных коэффициентов $\mathcal{L}_{k,4}$, $\mathcal{L}_{k,2}$ и $\mathcal{L}_{k,0}$ соответственно;

(x_1^i, x_2) , $i = 1, 2, \dots, N$ – координаты узлов сетки дискретно-континуальных элементов по неосновному («поперечному») направлению.

$$\bar{u} = \bar{u}(x_2) = [w_1 \ \varphi_1 \ w_2 \ \varphi_2 \ \dots \ w_N \ \varphi_N]^T, \quad (1.13)$$

$$w_i = w(x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\varphi_i = [\partial_1 w](x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.14)$$

$$\bar{u}_k(x_2) = \bar{u}(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (1.15)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2) = [w_1^{(k)} \ \varphi_1^{(k)} \ w_2^{(k)} \ \varphi_2^{(k)} \ \dots \ w_N^{(k)} \ \varphi_N^{(k)}]^T; \quad (1.16)$$

$$b_k = b_k(x_2) = [\mathcal{F}_1^{(k)} \ 0 \ \mathcal{F}_2^{(k)} \ 0 \ \dots \ \mathcal{F}_N^{(k)} \ 0]^T; \quad (1.17)$$

$$\mathcal{F}_i^{(k)} = \mathcal{F}_i(x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.18)$$

Статические граничные условия учитываются в векторе узловых нагрузок. Следует принять во внимание и кинематические граничные условия.

Граничные условия здесь могут быть записаны в виде:

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (1.19)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.20)$$

где $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$, $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – матрицы $4N$ -го порядка и векторы правых частей длиной $4N$ граничных условий в граничной точке $x_{2,k}^b$; \bar{U}_k – вектор длиной $4N$,

$$\bar{U}_k = \bar{U}_k(x_2) = [\bar{u}_k^T \ (\partial_2 \bar{u}_k)^T \ (\partial_2^2 \bar{u}_k)^T \ (\partial_2^3 \bar{u}_k)^T]^T, \quad (1.21)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1$$

– вектор длиной $8N$.

2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть Q – матрица базисных функций Хаара [1, 2, 3, 7-10], записанных по столбцам, а Q_b – блочная матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а P_{12} – матрица перестановок, определяемая формулой

$$P_{12} \bar{u}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}(x_2) \\ \bar{\varphi}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\bar{w} = \bar{w}(x_2) = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T$;

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x_2) = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N]^T; \quad (2.3)$$

Выполняя переход от единичного базиса к базису Хаара, можем записать, что

$$\bar{h}_1(x_2) = Q^T \bar{w}(x_2); \quad \bar{h}_2(x_2) = Q^T \bar{\varphi}(x_2) \quad (2.4)$$

$$\text{или } \bar{w}(x_2) = Q \bar{h}(x_2); \quad \bar{\varphi}(x_2) = Q \bar{h}_2(x_2), \quad (2.5)$$

где $\bar{h}_1(x_2)$ и $\bar{h}_2(x_2)$ – соответственно компоненты разложения векторов $\bar{w}(x_2)$ и $\bar{\varphi}(x_2)$ в базисе Хаара.

Следуя (2.2)-(2.5), имеем:

$$P_{12} \bar{u}(x_2) = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1(x_2) \\ \bar{h}_2(x_2) \end{bmatrix} = Q_b \bar{h}(x_2),$$

$$\text{где } \bar{h}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(x_2) \\ \bar{h}_2(x_2) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\text{или } \bar{u}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{h}(x_2), \quad (2.7)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.8)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА.

Рассмотрим без ограничения общности интервал $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$.

Введем обозначения:

$$\bar{h}_i^{(k)} = \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = \bar{h}_i(x_2), \quad i = 1, 2, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (3.1)$$

$$\bar{h}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть $\bar{h}_i^{(k),red}(x_2)$, $i = 1, 2$ – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов $\bar{w}_k(x_2)$ и $\bar{\varphi}_k(x_2)$ в ба-

зисе Хаара, $R_{k,i}$ – прямоугольная матрица размером $N \times N_{red,i}^{(k)}$, которую будем называть матрицей редукции вектора $\bar{h}_i^{(k)}(x_2)$ ($N_{red,i}^{(k)}$ – длины векторов $\bar{h}_i^{(k),red}(x_2)$, $i = 1, 2$) на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$. Сообразно [4, 12, 14] имеем:

$$R_{k,i} : \bar{h}_i^{(k),red}(x_2) \rightarrow \bar{h}_i^{(k)}(x_2), \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$\text{т.е. } \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \bar{h}_i^{(k),red}(x_2), \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Разумеется, очевидно, что

$$\partial_2 \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \partial_2 \bar{h}_i^{(k),red}(x_2), \quad i = 1, 2; \quad (3.5)$$

$$\partial_2^2 \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \partial_2^2 \bar{h}_i^{(k),red}(x_2), \quad i = 1, 2; \quad (3.6)$$

$$\partial_2^3 \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = R_{k,i} \partial_2^3 \bar{h}_i^{(k),red}(x_2), \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\bar{h}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix} = R_{b,k} \bar{h}_k^{red}(x_2), \quad (3.8)$$

$$\text{где } R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 \\ 0 & R_{k,2} \end{bmatrix}; \quad \bar{h}_k^{red}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

т.е. $R_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $2N \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Таким образом, на основании (1.13), (2.6) и (3.1), получим:

$$\bar{u}_k(x_2) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{h}_k^{red}(x_2) \quad (3.10)$$

или

$$\bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{h}_k^{red}(x_2), \quad \text{где } S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}. \quad (3.11)$$

т.е. S_k – прямоугольная матрица размером $2N \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{u}_k), \quad (3.12)$$

где

$$\Phi(\bar{y}) = 0.5 \cdot [(A_{k,4} \partial_2^2 \bar{u}_k, \partial_2^2 \bar{u}_k) + (A_{k,2} \partial_2^2 \bar{u}_k, \bar{u}_k) + (A_{k,0} \bar{u}_k, \bar{u}_k)] - (\bar{b}_k, \bar{u}_k). \quad (3.13)$$

Преобразовывая выражение (3.13) с учетом (3.11) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(u_k) &= 0.5 \cdot [(A_{k,4} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, S_k \partial_2^2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,2} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, S_k \bar{h}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,0} S_k \bar{h}_k^{red}, S_k \bar{h}_k^{red})] - \\ &+ (\bar{b}_k, S_k \bar{h}_k^{red}) = \\ &= 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,4} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T A_{k,2} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T A_{k,0} S_k \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red})] - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{h}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\Phi_k(\bar{w}_k^{red}) = 0.5 \cdot [(A_{k,4,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}) + (A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red}) + (A_{k,0,s} \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{h}_k^{red}), \quad (3.14)$$

где $A_{k,4,s} = S_k^T A_{k,4} S_k$; $A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,2} S_k$;
 $A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,0} S_k$; $\bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k$, (3.15)

$A_{k,4,s}$, $A_{k,2,s}$ и $A_{k,0,s}$ – матрицы размером $(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; \bar{b}_s – вектор размером $N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}$.

Таким образом, после редукции (1.12) принимает вид:

$$-A_{k,4,s} \partial_2^4 \bar{h}_k^{red} + A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{h}_k^{red} = \bar{F}_{k,s}. \quad (3.16)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^{(k)} &= \bar{h}_k^{red}; \quad \bar{z}_2^{(k)} = \partial_2 \bar{z}_1^{(k)} = \partial_2 \bar{h}_k^{red}; \\ \bar{z}_3^{(k)} &= \partial_2 \bar{z}_2^{(k)} = \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}; \\ \bar{z}_4^{(k)} &= \partial_2 \bar{z}_3^{(k)} = \partial_2^3 \bar{h}_k^{red}, \quad (3.17) \end{aligned}$$

где, разумеется, $\bar{y}_i^{(k)}$, $i=1, 2, 3, 4$ – векторы размером (длиной) $2N_{red}^{(k)}$ каждый, переписываем (3.16) в виде

$$-A_{k,4,s} \partial_2 \bar{z}_4^{(k)} + A_{k,2,s} \bar{z}_3^{(k)} + A_{k,0,s} \bar{z}_1^{(k)} = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.18)$$

Объединяя (3.13) и (3.14), получим следующую систему

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{k,4,s} \end{bmatrix} \partial_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,0,s} & 0 & A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \quad (3.19) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \partial_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,4,s}^{-1} A_{k,0,s} & 0 & A_{k,4,s}^{-1} A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{k,4,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

где E_k – единичная матрица размером $(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$;

\bar{z}_i^k , $i=1, 2, 3, 4$ – векторы размером $N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}$.

Окончательно имеем:

$$\bar{Z}'_k = A_k \bar{Z}_k + \bar{F}_k, \quad (3.21)$$

где $A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,4,s}^{-1} A_{k,0,s} & 0 & A_{k,4,s}^{-1} A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix};$

$$\bar{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{k,4,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.22)$$

$$\bar{Z}_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}'_k = \partial_2 \bar{Z}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{z}_1^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_2^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_3^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (3.23)$$

A_k – матрица размером $4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}) \times 4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$; \bar{Z}_k и \bar{F}_k – векторы размером $4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Согласно (3.11) и (3.17) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(x_2) &= S_k \bar{z}_1^{(k)}(x_2); \quad \partial_2 \bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{z}_2^{(k)}(x_2); \\ \partial_2^2 \bar{u}_k(x_2) &= S_k \bar{z}_3^{(k)}(x_2); \quad \partial_2^3 \bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{z}_4^{(k)}(x_2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{U} = \bar{U}(x_2) &= \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \partial_2 \bar{u}_k \\ \partial_2^2 \bar{u}_k \\ \partial_2^3 \bar{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \bar{z}_1^{(k)}(x_2) \\ S_k \bar{z}_2^{(k)}(x_2) \\ S_k \bar{z}_3^{(k)}(x_2) \\ S_k \bar{z}_4^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{z}_2^{(k)}(x_2) \\ \bar{z}_3^{(k)}(x_2) \\ \bar{z}_4^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или

$$\bar{U}_k(x_2) = S_{b,k} \bar{Z}_k(x_2),$$

где $S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad (3.25)$

$S_{b,k}$ – прямоугольная матрица размером $8N \times 4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Заметим, что, пользуясь (3.11) и (2.8), нетрудно получить

$$\begin{aligned} S_k^T S_k &= (P_{12}^T Q_b R_{b,k})^T P_{12}^T Q_b R_{b,k} = \\ &= R_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T Q_b^T Q_b R_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k}, \end{aligned}$$

т.е. $S_{b,k}^T S_{b,k} = R_{b,k}^T R_{b,k}. \quad (3.26)$

Граничные условия (1.19) и (1.20) с учетом (3.25) могут быть записаны в виде (в смысле поиска обобщенного решения):

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k^- \bar{Z}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{Z}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \\ k &= 2, \dots, n_k - 1; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{Z}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{Z}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \quad (3.29)$$

где $\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad k = 2, \dots, n_k; \quad (3.30)$

$$\tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1; \quad (3.31)$$

\tilde{B}_k^- – прямоугольные матрицы размером $8N \times 4(N_{red,1}^{(k-1)} + N_{red,2}^{(k-1)})$; \tilde{B}_k^+ – прямоугольные матрицы размером $8N \times 4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$.

Итак, имеем систему $8N(n_k - 1)$ уравнений с количеством неизвестных равным

$$N_{red}^{total} = 4 \sum_{k=1}^{n_k-1} (N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)}), \quad (3.32)$$

причем

$$8N(n_k - 1) \geq N_{red}^{total}, \quad (3.33)$$

т.е. система (3.28)-(3.29) является переопределенной и для ее решения следует использовать, например, метод наименьших квадратов.

В частном случае двухточечной краевой задачи ($n_k = 2$) имеем:

$$\tilde{B}_1^+ \bar{Z}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_2^- \bar{Z}_1(x_{2,2}^b - 0) = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_2^-, \quad (3.34)$$

где $\tilde{B}_1^+ = B_1^+ S_b$; $\tilde{B}_2^- = B_2^- S_b$; $S_b = S_{b,1}$.

$$(3.35)$$

Умножая обе части уравнения (3.32) слева на матрицу S_b^T , получим систему из $4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$ уравнений с $4(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)})$ неизвестными:

$$\tilde{\tilde{B}}_1^+ \bar{Z}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{\tilde{B}}_2^- \bar{Z}_1(x_{2,n_k}^b - 0) = \tilde{\tilde{g}}_1^+ + \tilde{\tilde{g}}_2^-, \quad (3.36)$$

где $\tilde{\tilde{B}}_1^+ = S_b^T \tilde{B}_1^+ = S_b^T B_1^+ S_b$;

$$\tilde{\tilde{B}}_2^- = S_b^T \tilde{B}_2^- = S_b^T B_2^- S_b; \quad (3.37)$$

$$\tilde{\tilde{g}}_1^+ = S_b^T \tilde{g}_1^+; \quad \tilde{\tilde{g}}_2^- = S_b^T \tilde{g}_2^-. \quad (3.38)$$

Для решения системы (3.36) могут использоваться как прямые (например, метод Гаусса), так и итерационные методы.

4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.21) совместно с граничными условиями (3.28)-(3.29), заключаем, что при решении задач расчета тонкой плиты (модель Кирхгоффа) в рамках модифицированной вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов разрешающей является многоточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}'_k &= A_k \bar{Z}_k + \tilde{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_k^- \bar{Z}_k(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{Z}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \\ & \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_1^+ \bar{Z}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{Z}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^- \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицами A_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц A_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ имеет следующие особенности:

- 1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы A_k к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad \text{где } M \text{ – большое число; } \quad (4.2)$$

- 3) в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
- 4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [5, 6, 11, 13]. После определения вектора $\bar{Z}_k(x_2)$, пользуясь формулой (3.25) находим $\bar{U}(x_2)$ и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2014. – 158 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
7. **Рассел Д., Кон Р.** Дискретное вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2012. – 72 с.
8. **Рассел Д., Кон Р.** Вейвлет-преобразование. – М.: Книга по требованию, 2013. – 82 с.
9. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
10. **Яковлев А.Н.** Основы вейвлет-преобразования сигналов. – М.: Science Press, 2003. – 80 с.
11. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012)*, pp. 4502-4505.
12. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012)*, pp. 3155-3158.
13. **Akimov P.A., Sidorov V.N.** Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // *Advanced Materials Research Vols. 250-253, 2011*, pp. 3652-3655.
14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // *Applied Mechanics and Materials Vols. 351-352 (2013)*, pp. 13-16.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,

Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин

e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Oleg A. Negrozov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, студент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: genromgsu@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

М.С. Барабаш, М.А. Ромашина

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается вопрос влияния реологических свойств бетона на усилия, возникающие в несущих конструктивных элементах многоэтажного здания. Цель теоретических исследований состоит в разработке метода учета влияния ползучести на напряженно-деформированное состояние несущих конструкций при проектировании. Представлен алгоритм расчета конструкций с учетом ползучести бетона. Приведены некоторые результаты нелинейного расчета с учетом ползучести во времени, полученные при помощи ПК ЛИРА-САПР.

Ключевые слова: моделирование, ползучесть бетона, несущие конструкции, напряженно-деформированное состояние, надежность строительных конструкций

ALGORITHM FOR SIMULATION AND CALCULATION OF STRUCTURES SUBJECT TO CREEP OF CONCRETE

Maria S. Barabash, Marina A. Romashkina

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: The paper considers influence of rheological properties of concrete on the efforts arising in load-bearing structural elements of multistory building. The purpose of theoretical research is to develop a method for account of creep in the stress-strain state of load-bearing structures. The paper outlines calculation algorithm for structures subject to creep of concrete. Nonlinear analysis results with account of creep in time obtained in LIRA- SAPR program are presented.

Key words: modeling, creep of concrete, load-bearing structures, stress-strain state, reliability of building constructions

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с интенсивным развитием строительства зданий и сооружений из монолитного железобетона и сборно-монолитных железобетонных конструкций, возрастает необходимость прогнозирования величины ползучести бетона железобетонных конструкций. При этом проблема безопасности и повышения надежности приобретает первоочередное значение. Современное законодательство и нормативные документы в строительстве регламентируют высокий уровень безопасности зданий и сооружений с высоким уровнем ответственности [1-3].

Повреждения зданий и сооружений с высоким уровнем ответственности могут привести к катастрофическим последствиям, поэтому повышению надежности, безопасности сооружений на основе разработки новых методов расчета и проектирования с учетом реальных свойств материалов, а именно ползучести железобетона, имеет важное практическое значение. Надежность и долговечность железобетонных конструкций не может быть обеспечена без учета важных особенностей деформирования бетона.

Анализ публикаций. Данная проблема рассматривалась многими исследователями,

в том числе в работах Н. И. Безухова [4], Л. М. Качанова [5], Н. Н. Малинина [6], И. Е. Многочисленные экспериментальные исследования, проведенные отечественными и зарубежными учеными, показали, что в бетонных и железобетонных конструкциях, находящихся под длительным действием нагрузок, возникают неупругие деформации, которые могут превышать начальные, мгновенные (упругие) деформации. Как показывают многолетние наблюдения за состоянием эксплуатирующихся конструкций, практически в любой монолитной железобетонной конструкции могут быть обнаружены трещины различных размеров, приводящие к снижению их долговечности [11]. В связи с этим исследователи многих стран продолжают изучать влияние различных факторов на величину усадки бетона и железобетона и разрабатывать уточняющие методики расчета их значений на стадии проектирования конструктивных систем зданий и сооружений. Поэтому вопрос прогнозирования длительного деформирования бетона во времени и связанного с этим перераспределением усилий между бетоном и арматурой является актуальным и имеет важное практическое значение. От правильного учета этих особенностей бетона и железобетона при проектировании зависит надежность и долговечность сооружений, а также соответствие сооружения предъявляемым к нему требованиям.

Анализ методов оценки деформаций ползучести бетона представлен в работах [11-16]. Из этого анализа можно сделать вывод о том, что в настоящее время нет единства во взглядах и в методах расчета конструкций с учетом ползучести бетона и железобетона, причем как на стадии расчета железобетонных конструкций, так и на стадии проектирования.

Цель данной работы является разработка алгоритма моделирования нелинейных

Прокоповича [7], Ю. Г. Работнова [8], В. Д. Харлаба [9], В. В. Тур [10] и других авторов. процессов ползучести бетона согласно EuroCode prEN 1992-1-1.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В Eurocode 2: prEN 1992-1-1 [17] предложен метод расчета ползучести бетона и железобетона при учете влажности окружающей среды, размеров элемента и структуры бетона, возраста бетона с момента приложения нагрузки впервые, ее продолжительность и ускорение нагружения. Как известно, работа железобетонных конструкций носит нелинейный характер. Для выполнения нелинейного расчета [16] в ПК ЛИРА САПР, с учетом степенного закона ползучести во времени, необходимо предварительно вычислить коэффициент ползучести φ_0 и коэффициент β_H , которые зависят от относительной влажности (RH в %) и условного размера сечения (h_0 в мм). Коэффициент ползучести во времени $\varphi(T)$ определяется по формуле:

$$\varphi(T) = \varphi_0 \left(\frac{T}{T + \beta_H} \right)^{0.3}, \quad (1)$$

где T – количество суток (возраст бетона), по прошествии которых требуется учесть влияние ползучести.

Если не требуется большая точность, определение коэффициента ползучести φ_0 и коэффициента β_H производится при помощи схем (рис. 1). Также в качестве предельной характеристики ползучести $\varphi(\infty, t_0)$ может быть принято значение от 0.95, при условии, что бетон в момент времени, соответствующий приложению нагрузки, $t = t_0$, не подвергается сжимающим напряжениям, большим, чем $0,45f_{ck}(t_0)$, где f_{ck} – характеристическая цилиндрическая прочность бетона на сжатие в возрасте 28 сут.

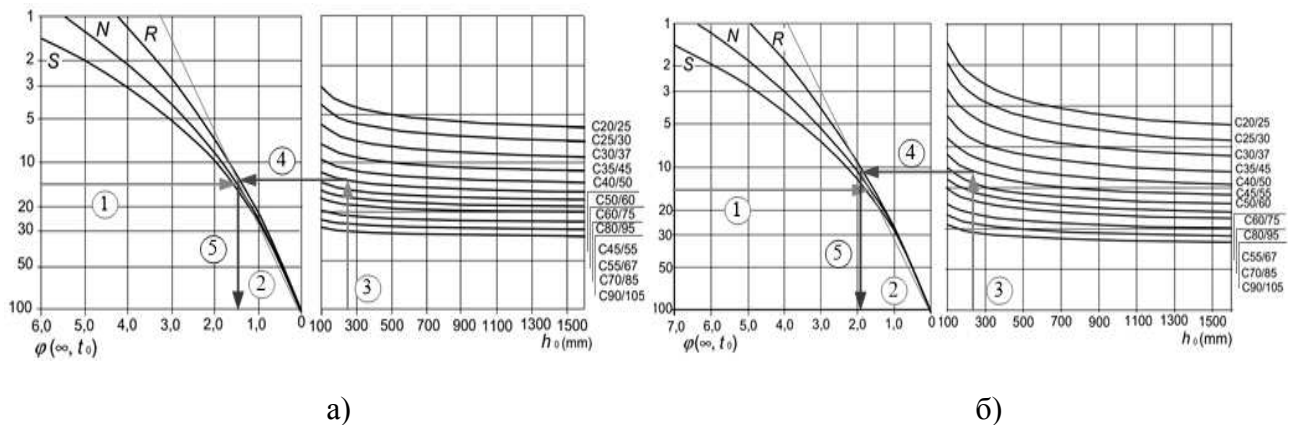


Рисунок 1. Определение коэффициента ползучести для прямоугольной балки сечением (40x60 см) изготовленной из бетона класса C45, N в нормальных условиях эксплуатации: а) внутренние условия – RH=50%; б) внутренние условия – RH=80%.

На рис. 2 представлен алгоритм точного вычисления коэффициента ползучести для бетона φ_0 и коэффициента β_N .

В разработанных алгоритмах учет ползучести реализован на основе модифицированной теории старения согласно которой касательный (тангенциальный) модуль упругости зависит от начального модуля упругости E_{cm} , относительной влажности среды RH, времени эксплуатации t и напряжения в бетоне σ :

$$E_c = f(E_{cm}, RH, t, \sigma), \quad (2)$$

Эту зависимость можно выразить с помощью коэффициента ползучести $\varphi(t, t_0)$:

$$E_c = \frac{E_{cm}}{\varphi(t, t_0)}, \quad (3)$$

На ползучесть и усадку бетона также оказывает влияние геометрические размеры конструктивного элемента и состав бетона, степень зрелости бетона (начальная прочность) при первоначальном приложении нагрузки, а также продолжительность нагружения и величина нагрузки. Коэффициент ползучести $\varphi(t, t_0)$ связан с касательным (тангенциальным) модулем

упругости E_c , который может быть принят равным $1,05E_{cm}$. ($E_c = 1.05 E_{cm}$), где E_{cm} – модуль деформации.

Предлагается следующая методика расчета конструкций в ПК ЛИРА САПР с учетом ползучести бетона [15]:

- выполняется расчет в линейной постановке на все виды нагружений (статические, силовые, статические деформационные, динамические);
- определяются расчетные сочетания усилий или расчетные сочетания нагружений;
- выполняется подбор арматуры в сечениях стержневых или пластинчатых элементов;
- производится унификация армирования элементов;
- по результатам армирования формируются новые жесткостные характеристики конструктивных элементов для последующего нелинейного расчета;
- задаются параметры ползучести бетона, учитывающие влажность и усадку бетона;
- назначается нагружение, на которое будет производиться расчет с учетом ползучести бетона;
- выполняется расчет для заданных промежутков времени.

Алгоритм моделирования и расчета конструкций с учетом ползучести бетона

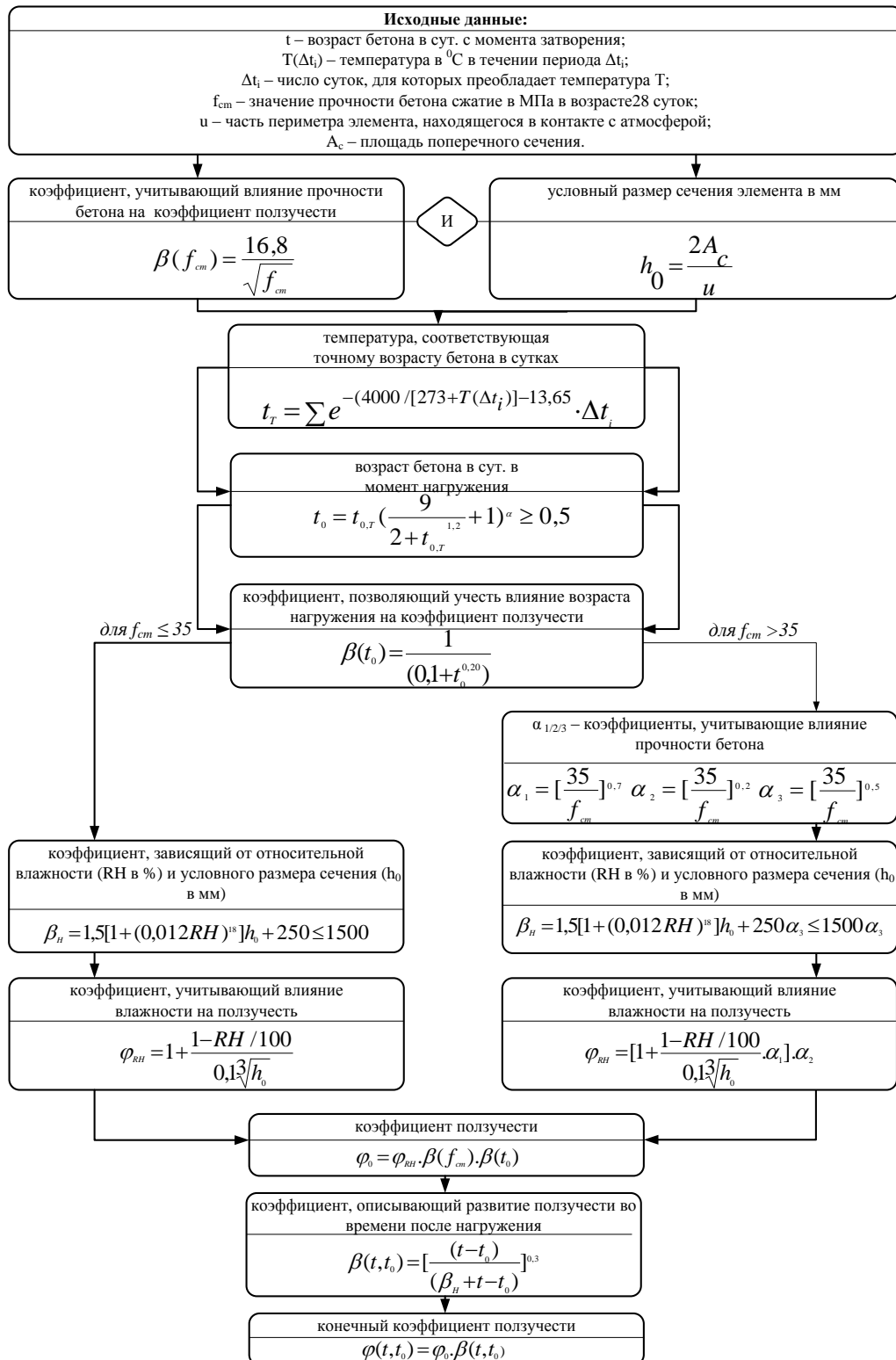


Рисунок 2. Алгоритм вычисления коэффициента ползучести для бетона φ_0 и коэффициента β_H .

На каждом этапе расчета для каждого элемента определяется новая жесткость, которая зависит от напряжения бетона в этом элементе и заданных параметров ползучести. Новые переменные жесткости получаются в точках интегрирования как по сечению, так и по конечному элементу, в соответствии с заданной диаграммой деформирования. На

каждом этапе определяются усилия, перемещения и новые жесткости по касательному модулю деформации для заданного промежутка времени.

На рис. 3 представлена блок-схема описанного алгоритма расчета конструкций с учетом ползучести бетона.

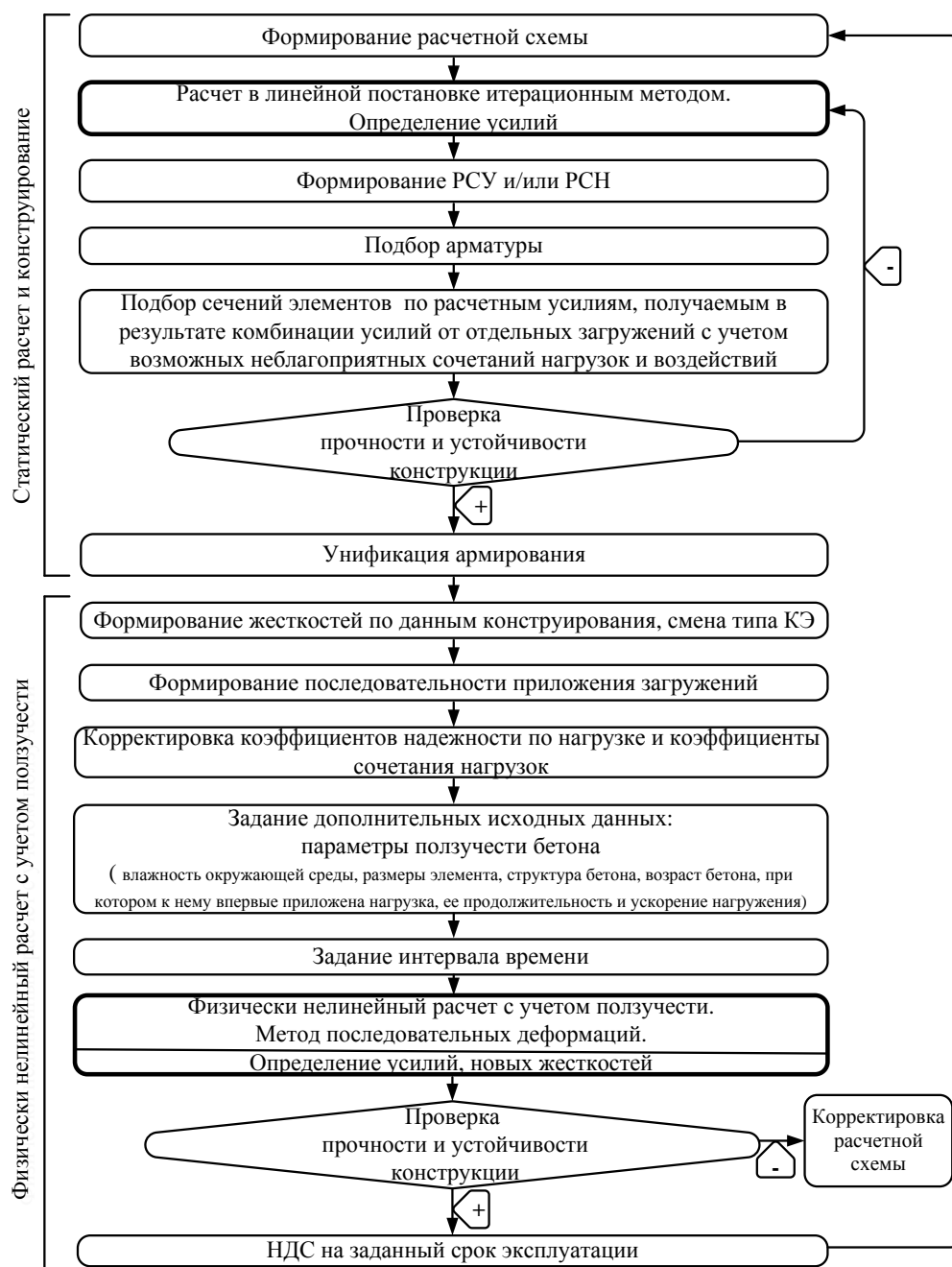


Рисунок 3. Алгоритм расчета конструкций с учетом ползучести бетона.

В качестве примера было рассчитано 9-ти этажное монолитное здание (рис. 4). Получены усилия, перемещения, глубина, ширина раскрытия трещин. Далее приведены некоторые результаты расчета произведенного по приведенной методике. (рис. 5,6), таб. 1.

Раму условно рассмотрим как фрагмент 9-ти этажного монолитного здания. Ригели представляют собой вырезанные полосы перекрытий шириной 6м и толщиной 0,2 м. Колонны имеют прямоугольное сечение 50х50см. Длительная нагрузка на ригель составляет 9 т/м.

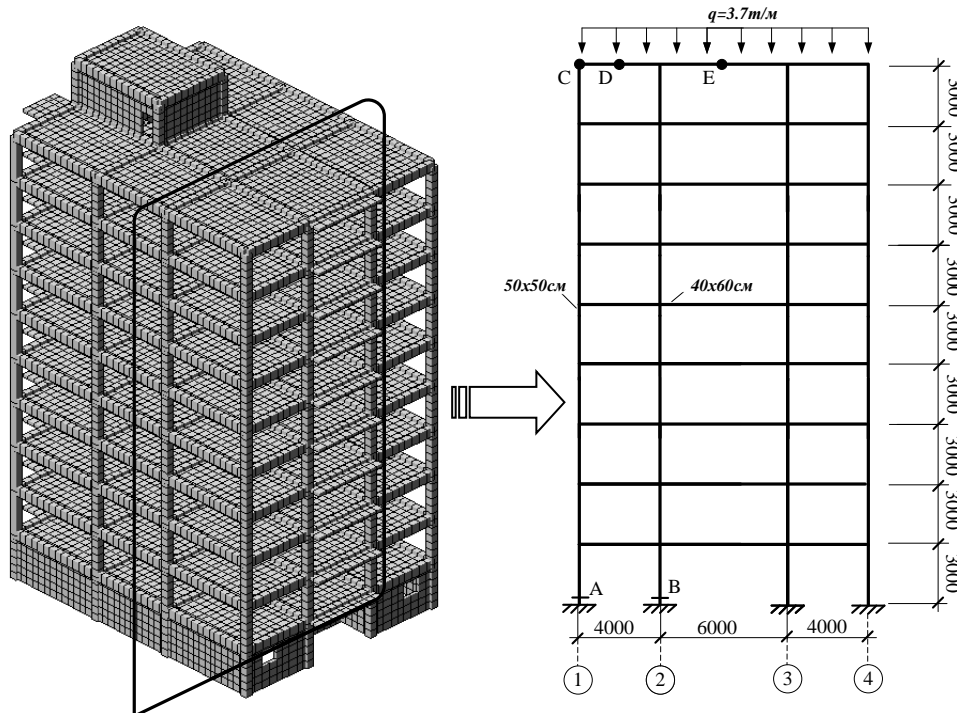


Рисунок 4. Расчетная схема 9-ти этажного монолитного здания

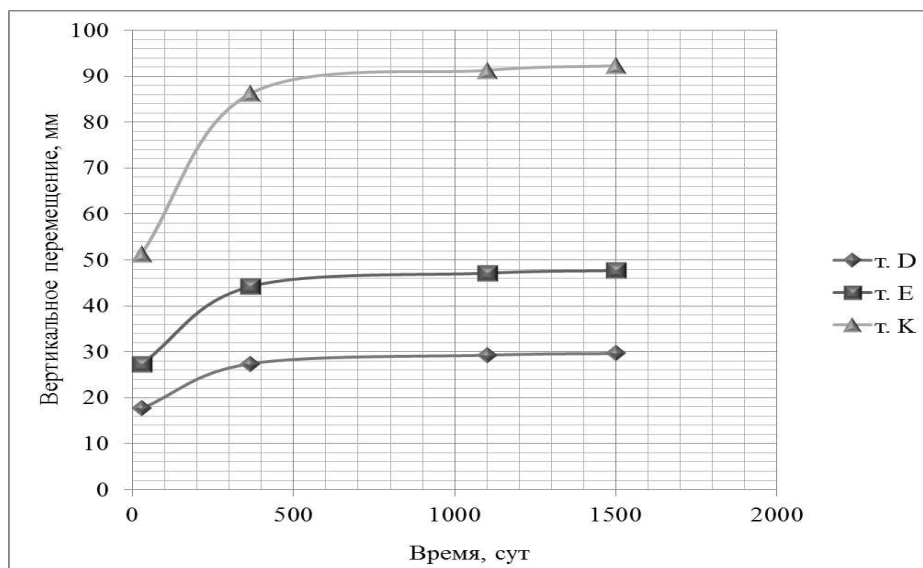


Рисунок 5. График развития во времени величин вертикальных перемещений в многоэтажной раме в точках D, E, K.

Таблица 1

Усилия и перемещения элементов 9-ти этажного дома при упругом и нелинейном расчетах

Параметры напряженно-деформированного состояния	Упругий расчет	Нелинейный расчет с ползучестью			
		28 суток	365 суток	1100 суток	1500 суток
Нормальная сила N в колонна I этажа (ось 1, сечение А), т	-340.26	-323.52	-342.04	-344.35	-344.78
Нормальная сила N в колонне I этажа (ось 2, сечение В), т	-585.7	-602.45	-583.92	-581.62	-581.19
Момент М в ригеле (опорное сечение, т.С), т*м	-13.48	-14.71	-17.92	-18.10	-18.13
Момент М в ригеле (пролетное сечение, т.В), т*м	6.83	7.13	6.21	6.17	6.16
Перемещение (z, т. С), мм	-8.48	-17.67	-27.40	-29.27	-29.65
Перемещение (z, т. В), мм	-11.59	-27.33	-44.21	-47.13	-47.71
Перемещение (z, т. Е), мм	-17.41	-51.27	-86.20	-91.30	-92.29

Анализ результата приведенного в таблице 1 можно судить о некотором перераспределении усилий и значительном увеличении деформаций по сравнению с упругим расчетом. Так нормальная сила в средней наиболее нагруженной колонне - 602.45 т с течением времени уменьшается до -581.19 т перераспределяясь на менее нагруженные крайние колонны. Пролетный момент в ригеле (сечение С) 7.13 т*м так же уменьшается до 6.16 т*м; перераспределяясь на опорное сечение В, момент в котором в свою очередь - увеличивается.

деформативности, может вызвать увеличение усилий;

- в железобетонном элементе при длительном действии нагрузки в результате ползучести бетона происходит перераспределение усилий между бетоном и арматурой;
- конструкции, как правило, включаются в работу до набора бетоном расчетной прочности (как правило, распалубка);
- производится значительно раньше, чем бетон наберет расчетную 28-дневную прочность).

ВЫВОДЫ

На основе полученных результатов можно сделать выводы что, при проектировании необходимо учитывать такие эффекты:

- при длительном действии нагрузки происходит перераспределение усилий между сильно нагруженными элементами (усилия в них уменьшаются) и менее нагруженными (усилия в них увеличиваются);
- ползучесть бетона обуславливает рост перемещений, что, помимо увеличения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету: ГОСТ 27751-88 (СТ СЭВ 384-87). – [Введен в действие с 1988-07-01]. – М.: Издательство стандартов, 1989. – 10 с. – (Государственный стандарт Союза ССР).
2. Общие принципы обеспечения надежности и конструктивной безопасности зданий, сооружений строительных конструкций и оснований: ДБН В.1.2-14:2009. – [Введен в действие с 01-12-2009]. – К.: Минрегионстрой Украины, 2009. – 45 с. – (Государственные строительные нормы Украины).
3. Проектирование высотных жилых и гражданских сооружений: ДБН В.2.2-24:2009. – [Введен в

- действие с 01-09-2009]. – К.: Минрегионстрой Украины, 2009. – 103 с. – (Государственные строительные нормы Украины).
4. **Безухов Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
 5. **Качанов Л.М.** Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 455 с.
 6. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.
 7. **Прокопович И.Е.** Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 260 с.
 8. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
 9. **Харлаб В.Д.** К общей линейной теории ползучести. // Известия ВНИИГ, 1961, т. 68, с. 217-240.
 10. **Тур В.В.** Экспериментально-теоретические основы предварительного напряжения конструкций при применении напрягающего бетона. – Брест: БГТУ, 1998. – 246 с.
 11. **Арутюнян Н.Х.** Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. // Механика теории ползучести бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1962
 12. **Suvorova J. V.** An approach to the description of time – dependent materials. // Materials and Design.- 2003. - № 24 – P. 293—297.
 13. **Барабаш М.С.** Методы моделирования изменения напряженно-деформированного состояния конструкций во времени. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 92-100.
 14. **Яценко Е.А.** Влияние длительных нагрузок и ползучести бетона на предельные состояния железобетонных конструкций // Бетон и железобетон, 1990, №8, с. 21-22
 15. **Барабаш М.С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства. – Киев: Издательство «Сталь», 2014. – 301 с..
 16. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – Киев: «ФАКТ», 2007. – 394 с.
 17. Eurocode 2: prEN 1992-1-1 «Design of concrete structures - Part 1: General rules and rules for buildings» - Annex B(Informative) Commition of European Communities, Des 1991. P 226

Барабаш Мария Сергеевна – кандидат технических наук, доцент, докторант, доцент кафедры компьютерных технологий строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1;
тел: +8 (095) 286-39-90;
e-mail: bmari@ukr.net.

Ромашкина Марина Андреевна – аспирантка кафедры компьютерных технологий строительства Института аэропортов, Национального авиационного университета, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, д. 1;
тел: +8 (095) 931-52-50;
e-mail: mariromashkina@gmail.com.

Maria Barabash – PhD (Eng.), Associate Professor, Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE.
phone: +8 (095) 286-39-90;
e-mail: bmari@ukr.net.

Marina Romashkina - postgraduate student; Department of Computer Technology Building, Institute of Airports, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE.
phone: +8 (095) 931-52-50;
e-mail: mariromashkina@gmail.com

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ РЕЗЕРВУАРА С ПОНТОНОМ (ПЛАВАЮЩЕЙ КРЫШЕЙ) ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева,
В.В. Вершинин, А.Р. Усманов, С.В. Щербина*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящее время резервуары с понтонами (плавающими крышами) крышей находят широкое применение в нефтяной промышленности многих стран мира и обладают целым рядом очевидных преимуществ. Тем не менее, несмотря на очевидные преимущества соответствующих конструктивных решений с точки зрения расчетного обоснования резервуары с плавающими крышами являются существенно более сложными объектами, нежели резервуары со стационарными крышами, а сама методология проектирования, конструирования и расчетного обоснования (в частности и в особенности в рамках инженерных методик) резервуаров с плавающими крышами до сих пор вызывает немало вопросов и дискуссий. Соответствующие актуальные вопросы сейсмического расчета нашли отражение в настоящей статье.

Ключевые слова: численное моделирование, резервуар, понтон, плавающая крыша, сейсмическое воздействие, метод конечных элементов

ABOUT NUMERICAL SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF FLOATING ROOF TANK

*Alexander M. Belostosky, Pavel A. Akimov, Taymuraz B. Kaytukov,
Irina N. Afanasyeva, Vladislav V. Vershinin, Anton R. Usmanov,
Sergey V. Scherbina*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Currently tanks with pontoons (floating roofs) are widely used in the oil industry in many countries and have a number of obvious advantages. Nevertheless, floating roof tanks are substantially more complex objects for structural analysis than the fixed roof tanks and methodology of design and analysis (in particular, and especially in the engineering techniques) of floating roof tanks still raises a lot of questions and discussions. Relevant topical issues of seismic analysis are reflected in the distinctive paper.

Key words: numerical modeling, seismic response analysis, floating roof tank, finite element method

ВВЕДЕНИЕ.

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Резервуары с плавающей крышей находят широкое применение в нефтяной промышленности многих стран мира и обладают целым рядом очевидных преимуществ. Прежде всего, ввиду того, что крыша плавает непосредственно на поверхности хранящейся в

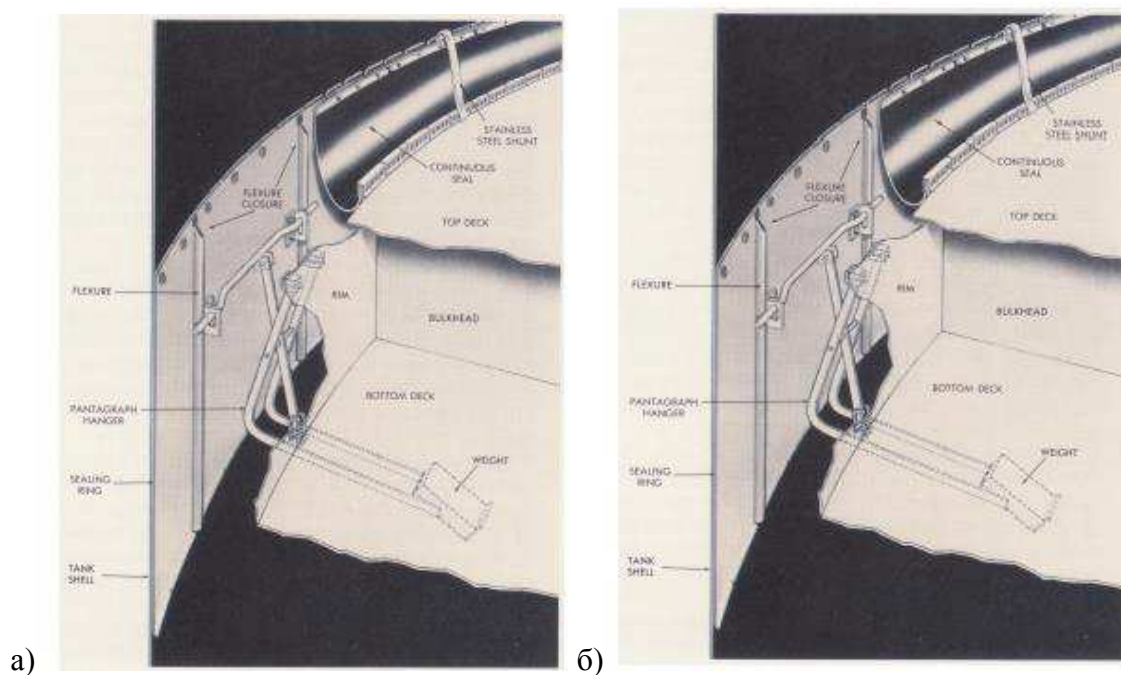
резервуаре жидкости отсутствует пространство для испарения, что исключает опасность, связанную с наличием воспламеняющейся атмосферы. Очевидно, что также существенным образом снижаются потери от испарения, вследствие чего снижается негативное воздействие сооружения на окружающую среду. Испарения возможны только лишь по контуру контактной поверхности

плавающей крыши и резервуара, и в этом отношении все зависит от принятого конструктивного решения соответствующего сопряжения (рис. 1). Вместе с тем, несмотря на указанные преимущества резервуаров с плавающими крышами, с точки зрения расчетного обоснования они являются существенно более сложными объектами, нежели резервуары со стационарными крышами. С точки зрения прочности, устойчивости и целостности резервуары с плавающими крышами ничуть не лучше последних, кроме того, сама методология проектирования, конструирования и расчетного обоснования (в частности и в особенности в рамках инженерных методик) резервуаров с плавающими крышами до сих пор вызывает немало вопросов и дискуссий [39-43].

Именно в последние годы была установлена высокая степень их повреждаемости таких резервуаров сейсмических воздействиях. Так, в результате сильного землетрясения Токачиоки (Tokachioki) [1, 25], произошедшего 26 сентября 2003 года в городе Томакомай (Tomakomai), расположенном на острове Хокайдо (Япония), сразу семь резервуаров с плавающими крышами, использовавшихся для хранения нефти получили весьма значительные повреждения, обусловленные колебаниями в них жидкости [2, 27]. На одном из этих резервуаров и вовсе имело место затопление плавающей крыши с последующим воспламенением всей поверхности жидкости (рис. 2, 3, 4). Разумеется, имеют место и иные внештатные ситуации (см., например, рис. 5, 6, 7).

Здесь следует отметить, что аналогичное явление имело место при землетрясении в турецкой провинции Косаэли (Kocaeli) [3]. С одной стороны повреждения плавающих крыш резервуаров и воспламенения на поверхности жидкости, случались неоднократно и прежде (в качестве характерных примеров можно указать землетрясение в японском городе Ниигата (Niigata) 1964 года [26] и землетрясение Nihonkai-chubu 1983 года [1]), но с другой – до той поры в Японии еще

ни разу не случалось затопление плавающей крыши в результате колебаний жидкости в резервуаре (заметим, впрочем, что резервуаре с плавающими крышами получали повреждения в результате землетрясения в Кобе (Kobe) 1995 года, считающимся одним из крупнейших в истории Японии, также как и землетрясения 1999 года в турецком Измире (Izmir), расположенном всего в 70 километрах от Стамбула). В результате все были не готовы к возникшей исключительно опасной ситуации, когда поверхность нефти оказалась незащищенной от внешней среды. Обращает на себя внимание и тот факт, что все семь вышеупомянутых поврежденных резервуаров имели однопалубную конструкцию (single-deck type, см. рис. 8, 9), включающую в себя внутреннюю палубу с относительно небольшой жесткостью на изгиб и внешний (наружный) понтон, жесткость которого, напротив, значительна. Вблизи понтонов затопленных плавающих крыш имели место повреждения, вызванные местной потерей устойчивости, вследствие чего было высказано предположение о том, что поврежденный понтон был постепенно заполнен жидкостью и утратил плавучесть, что, в конце концов, и привело к затоплению. В соответствии экспертным заключением, подготовленным специалистами Ассоциации “Hazardous Materials Safety Techniques Association” [4, 5] повреждения понтона были обусловлены эллипсоидными деформациями, вызванные нелинейными эффектами типа подъема поверхности жидкости на конечную величину, а также мембранного поведения в сочетании с большими прогибами палубы.



а) б)
Рисунок 1. Соединение плавающей крыши со стенкой резервуара:
а) механическое соединение; б) заполненное жидкостью структурное соединение.



Рисунок 2. Затопление плавающих крыш резервуаров.



Рисунок 3. Воспламенение поверхности жидкости в резервуаре.

К вопросу о численном моделировании поведения резервуара с понтоном (плавающей крышей) при сейсмическом воздействии



Рисунок 4. Потеря устойчивости понтона.



Рисунок 5. Подъем плавающей крыши в результате колебаний жидкости внутри резервуара.



Рисунок 6. Резервуар с плавающей крышей – неразрушенное состояние.



Рисунок 7. Резервуар с плавающей крышей – неразрушенное состояние.

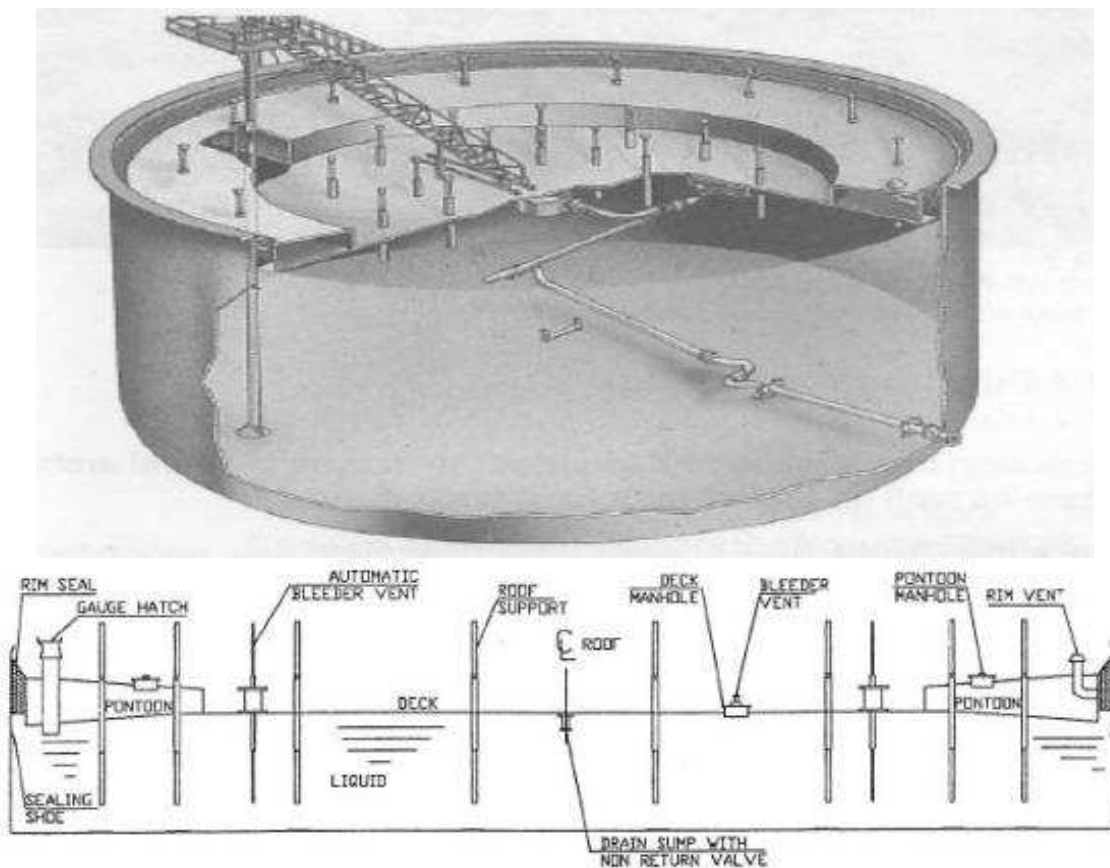


Рисунок 8. Резервуар с плавающей крышей однопалубного типа [39].

К вопросу о численном моделировании поведения резервуара с понтоном (плавающей крышей) при сейсмическом воздействии

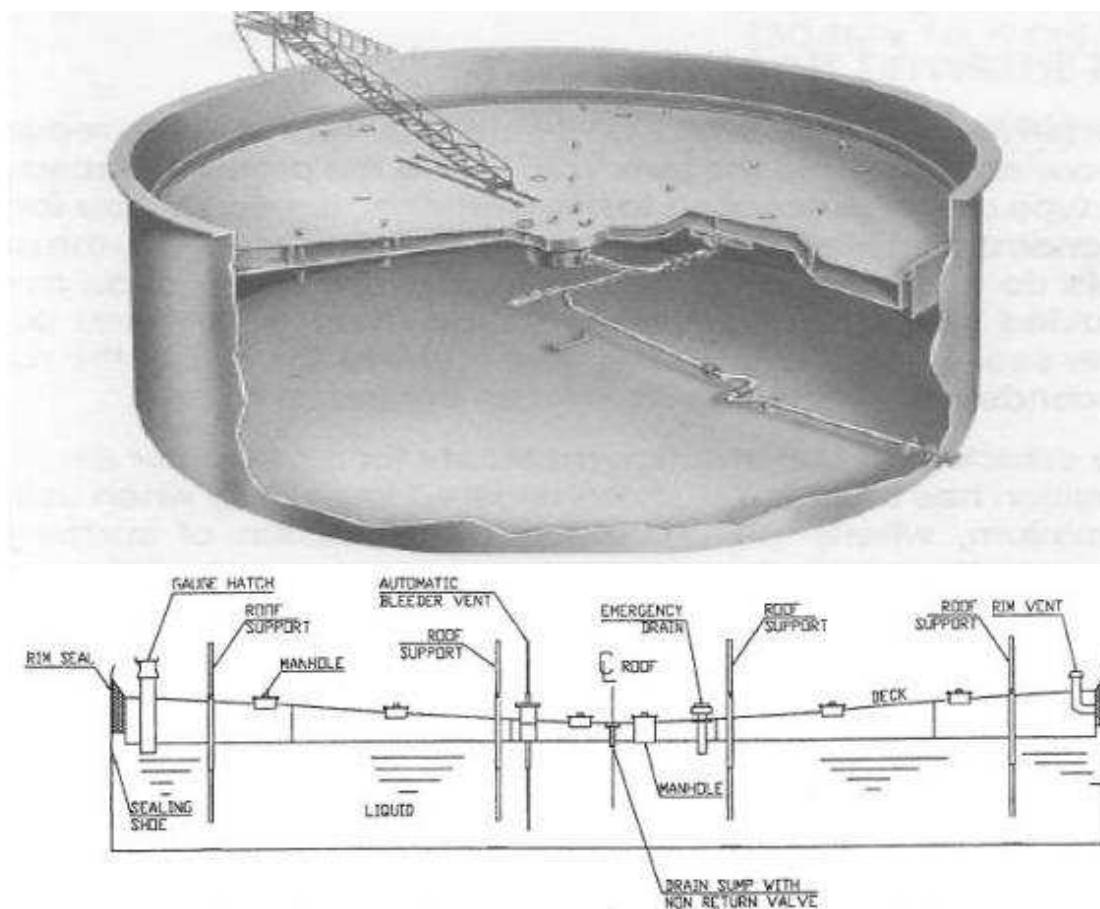


Рисунок 9. Резервуар с плавающей крышей двухпалубного типа [39].

2. КРАТКИЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР. ЗАДАЧИ И НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вплоть до относительно недавнего времени, по сути, лишь атмосферные осадки (дождевая вода) считались основным расчетным фактором при проектировании плавающих крыш [6] (следует отметить, что в нормах [6] также не учитывался и случай отрыва незакрепленных анкеровкой резервуаров) и лишь в очень небольшом числе случаев на этой стадии принималась во внимание сейсмическая нагрузка. После землетрясения Токачиоки 2003 года Агентство по борьбе с последствиями пожаров и стихийных бедствий Японии (Fire and Disaster Management Agency of Japan) внесло изменения в соответствующие нормы проектирования [7], вводя критерий сейсмостойкости для плавающих крыш, учитывающий, в том числе, и

вышеупомянутые нелинейные факторы. Вместе с тем, в основе актуализированных норм лежат эмпирические соотношения, ориентированные, прежде всего, на практические инженерные расчеты. Очевидно, что важнейшей задачей является верификация и валидация этих формул, посредством проведения сопоставлений с имеющимися точными решениями нелинейных задач расчета связанных систем «жидкость – система с плавающей крышей». Кроме того, в 2005 году были решено, что с целью недопущения аварий, аналогичных тем, что имели место в результате землетрясения Токачиоки, все плавающие крыши резервуаров для хранения нефти в срок до 2017 года будут усилены посредством дополнительного армирования. Проблема исследования колебаний поверхности жидкости в резервуарах имеет давнюю историю, начало которой восходит к 80-м годам прошлого столетия. Исследователями

разных стран было разработано большое число различных аналитических и численных подходов к ее решению, в том числе с учетом нелинейностей, связанных с конечным подъемом поверхности жидкости [8, 9]. Подавляющее большинство из таких разработок рассматривает случай свободной поверхности воды и лишь очень небольшое число работ посвящено проблемам моделирования поведения связанной системы «резервуар с плавающей крышей – жидкость» [10-12], путь даже в рамках соответствующей линейной теории.

Следует отметить, что в публикации Sakai F., Nishimura M., Ogawa H. [10] авторы верифицировали результаты своих численных исследований экспериментальными изысканиями (для этих целей использовалась специальная виброплощадка и три большиеразмерных модели резервуаров с плавающими крышами однопалубного и двухпалубного типа), при этом для изучения контактного взаимодействия плавающей крыши с жидкостью, хранящейся в резервуаре, использовалась теория колебаний. В целях упрощения последующего решения использовалась конечноэлементная реализация, основанная на вариационном принципе, связанного с вычислением граничных интегралов. Авторами были сделаны следующие выводы: 1) наличие плавающей крыши слабо влияет на первую собственную форму колебаний жидкости; 2) жесткость плавающей крыши оказывает существенное влияние на высокочастотные формы колебаний, а учет этих высокочастотных форм необходим при определении напряжений в плавающих крышах двухпалубного типа; 3) местная (локальная) деформация нижней палубы оказывает самое существенное влияние на колебание жидкости (для плавающих крыш однопалубного типа относительная жесткость конструкции весьма незначительна, и самим наличием плавающей крыши в таких обстоятельствах можно пренебречь; для плавающих крыш двухпалубного типа глобальная жесткость ожидаемо больше и местная деформация

нижней пластины значительно влияет на поведение системы, особенно ее высокочастотные формы колебаний); 4) на основании вышеизложенного для получения более достоверных значений собственных частот и динамических давлений можно рекомендовать использовать плавающие крыши двухпалубного типа; 5) анализ экспериментальных данных, полученных для резервуара с плавающей крышей выявил, что высокочастотные формы колебаний и условные коэффициенты демпфирования полагаются равными 5-10%. Matsui T. в работе [11] предложил аналитическое решение для определения отклика цилиндрических резервуаров с плавающими крышами при сейсмических воздействиях. Для достижения этой цели автор воспользовался линейной теорией потенциала применительно к жидкости, исследовал малые деформации плавающей крыши, изучил влияние жесткости и массы последней на колебание жидкости в резервуаре. В публикации [12] им был использован аналогичный метод для определения деформаций и напряжений в резервуаре с плавающей крышей однопалубного типа.

В работе Shi T., Ruifeng W.U., Naisi Q., Xiaofeng X. [18] рассматривались колебания связанной системы «резервуар по плавающей крышей – жидкость», при этом авторы пользовались аппаратом теории упругости (для моделирования оболочек и пластин) и теории гидроупругости, техникой метода конечных элементов и метода распределенных источников.

Isshiki H. и Nagata S. [32], получили вариационный принцип Гамильтона-Кельвина на основе обобщения и объединения вариационного принципа Гамильтона для пластины и вариационного принципа Кельвина для жидкости. Далее, используя потенциал скорости в качестве альтернативы скорости жидкости авторы разработали различные варианты так называемого принципа Гамильтона-Дирихле. Следует отметить, что Nagata S., Yoshida H., Fujita T., Isshiki H. [33] и Ohmatsu S. [34]

успешно применили этот принцип для расчета плавающей крыши в упругой постановке. После описанных выше событий, последовавших в результате землетрясения Токачиоки 2003 года Shimida K. [19] сделал попытку предложить эффективную систему обеспечения безопасности для резервуаров с плавающими крышами. В 2006 году Sakai F., Inoue R., Hayashi S. [20] провели целый комплекс исследований, посвященных актуальным вопросам расчетного обоснования систем «сооружение – жидкость» (в упругой постановке) и моделирования колебаний жидкости в резервуарах с плавающими крышами, уделив при этом особое внимание плавающим крышам однопалубного типа. Тогда же в 2006-м, Yamauchi Y., Kamei A., Zama S., Uchida Y. [24] по результатам проведенных сейсмических расчетов резервуаров с плавающими крышами, предназначенных для хранения нефти (с учетом моделирования колебаний жидкости), высказали гипотезу о том, что потеря устойчивости крыши стала основной формой разрушения. Три года спустя в 2009-м Yoshida S. [21] целевым образом изучил условия потери устойчивости понтонов в плавающих крышах вышеупомянутых резервуаров под действием сжимающих и изгибающих нагрузок. Очевидно, что верификация численных результатов динамических расчетов экспериментальными данными весьма затруднительно, если объектом исследования являются резервуары с плавающими крышами, тем более в условиях нелинейного поведения жидкости. Соответствующие исследования необходимо проводить применительно к действующим резервуарам, подтверждая тем самым адекватность модели описывающей значительную высоту волны. Nishi H., Yamada M. и Zama S. провели экспериментальные исследования прочности и сплошности плавающей крыши в условиях колебания жидкости в действующем резервуаре диаметром 38 метров, обусловленного сильным длиннопериодным сейсмическим воздействием. Отдельное внимание при этом

уделялось вопросам оценки деформаций понтона. В результате была доказана корректность и адекватность принятой расчетной модели. Коэффициент вязкого демпфирования при решении задачи о колебаниях жидкости в резервуаре с плавающей крышей однопалубного типа принимается равным менее 0.5%, в тех случаях, если высота волны значительна.

По результатам тщательно проведенных исследований, посвященных проблемам колебания жидкости, было установлено, по-прежнему относительно малоизученным аспектом остается контактное взаимодействие плавающей крыши со стенкой резервуара, являющееся, по мнению многочисленных экспертов, основной причиной воспламенения в условиях состоявшихся землетрясений прошлого.

Необходимо отметить, что имеется весьма небольшое число публикаций в которых при определении динамического отклика резервуара с плавающей крышей принимаются во внимание какие-либо нелинейные факторы. В качестве примера можно указать работу Shabani R., Tariverdilo S., Salarieh H., и Rezazadeh G. [35], в которой рассматриваются большие прогибы плавающей крыши под действием собственного веса, исследуется влияние изгибной и мембранной жесткостей на напряженно-деформированное состояние крыши. Virella J.C., Prato C.A. и Godoy L.A. [36] использовали линейные и нелинейные методы определения отклика прямоугольных резервуаров на гармонические воздействия, приложенные к основанию, после чего полученные результаты посредством введения специализированных безразмерных параметров сопоставлялись с аналогичными данными для цилиндрических резервуаров. Было установлено, что величины давлений на стенку резервуара не слишком сильно менялись при учете нелинейностей. Делались также попытки проведения чисто нелинейных расчетов.

Относительно недавно в работах Hizume M. [14], Ishida K. [13, 14] и Utsumi M. [14] было

предложено решение методом Галеркина (основанном на вариационной постановке) нелинейных уравнений, определяющих поведение связанной системы «жидкость – плавающая крыша» в цилиндрическом резервуаре. В частности, в публикации [13] изучалась возможность возникновения внутреннего резонанса в условиях действия гармонических и сейсмических нагрузок при учете нелинейного характера колебаний жидкости. В [14] с учетом больших скоростей движения жидкости исследовались нелинейные колебания жидкости в резервуарах с плавающей крышей, при этом геометрической нелинейностью самой плавающей крыши было решено пренебречь. В результате удалось выяснить, что значения напряжений в плавающей крыше могут существенно увеличиваться по причине внутреннего резонанса. Обобщая вышеизложенное, следует еще раз подчеркнуть, что, в целом, авторы работ [13, 14] выдвинули гипотезу о возникновении бигармонических резонансных колебаний, обусловленных нелинейностью движения жидкости. Данный подход корректен при оценках склона волны второго порядка и исключительно эффективен с точки зрения численной реализации. Слабой стороной указанного подхода явилось и то, что на определенном его этапе при записи сложных выражений для нелинейных членов требуется выполнение весьма трудоемких «ручных» вычислений. Кроме того, определенные сложности связаны и с учетом геометрической нелинейности плавающей крыши.

В работе [27] Shabani R. и Golzar F.G. применили вариационный принцип Гамильтона для плавающей крыши и содержащейся в резервуаре жидкости, учтя при этом геометрическую нелинейность (большие прогибы) пластины, образующей палубу плавающей крыши. Влияние колебаний жидкости на крышу было изучено при различных акселерограммах землетрясений (землетрясения Токачиоки (длиннопериодное, в дальней зоне), Кобе (в ближней зоне) и Эль Центро (El Centro; в дальней зоне)). Нелинейные уравнения после

соответствующей дискретизации решались численно для резервуаров самых разных размеров. В заключение было проведено сопоставление результатов нелинейных расчетов с соответствующими линейными. Таким образом, было установлено, что нелинейность оказывает, как правило, гасящее воздействие на резервуары с малыми периодами собственных колебаний, для которых наибольшие прогибы крыши определяются в линейных моделях. Для больших резервуаров с большими по величине периодами собственных колебаний учет геометрической нелинейности (большие прогибы) пластины, составляющей палубу плавающей крыши, может оказывать незначительное влияние в сторону увеличения прогиба плавающей крыши (этот вывод был общим для всех рассмотренных типов землетрясений).

Совершенствование и стремительное развитие в последние годы универсальных программно-алгоритмических комплексов, реализующих метод конечных элементов (МКЭ) позволил ставить на повестку дня задачи моделирования поведения связанных систем «жидкость – плавающая крыша» в резервуаре [15]. Mitra S. и Sinhamahaparta K.P. [28] исследовали открытые резервуары под действием гармонических и сейсмических нагрузок. Yamamoto K. и Minakawa Y. [16] использовали конечноэлементную реализацию на основе Лагранжева-эйлеровой постановки, в зарубежной литературе называемой Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation (постановка ALE) для учета нелинейных свойств движения жидкости в цилиндрическом резервуаре с плавающей крышей однопалубного типа. Разумеется, очевидно, что нелинейный конечноэлементный расчет связанной системы «жидкость – плавающая крыша» требует значительных вычислительных ресурсов. Вот почему и в настоящее время исключительно актуальна задача разработки, совершенствования и развития эффективных и корректных численных методов прогнозирования динамического отклика указанной связанной системы при длиннопериодном воздействии.

риодных сейсмических воздействиях с учетом нелинейных факторов (таких как, в частности, подъем поверхности жидкости на конечную величину, а также мембранное поведение, связанное с большими прогибами палубы). В проблемной статье Bathe K.-J. [37] представлена задача о сейсмическом расчете резервуара для хранения нефти большого диаметра с понтоном. Поведение жидкости моделировалось уравнениями Навье-Стокса, была использована постановка ALE для расчета связанной системы «сооружение – жидкость». Соответствующее численное решение было получено в программно-алгоритмическом комплексе промышленного типа ADINA.

De Angelis M., Giannini R. и Paolacci F. [29] изучили эффективность некоторые альтернативные конструктивные решения (некоторые схема изоляции фундамента), призванные снизить динамическое давление со стороны жидкости на стенку резервуара. Аналогичные решения были предложены в работе Sun J., Li D., Cui L., Zou D. и Wang Z. [30] для гашения вибрации в резервуарах с плавающими крышами. Utsumi M. [31] предложил использовать для таких целей динамические гасители колебаний и исследовал их работу при длиннопериодных сейсмических воздействиях.

В статье Sun Y., Sun J. и Cui L. [38] рассматривалось влияние плавающей крыши на сейсмический отклик вертикального резервуара объемом 150000 кубических метров. Был проведен конечноэлементный расчет сооружения при наличии и в отсутствие плавающей крыши, в условиях различных сейсмических воздействий. Было установлено, что наличие плавающей крыши слабо сказывается на величина поперечных сил и изгибающих моментов в основании резервуара, при этом плавающая крыша может значительно снижать высоту волны в резервуаре. Фактор наличия плавающей крыши по мере увеличения интенсивности сейсмического нагружения оказывает все меньшее влияние на величины динамических давлений в жидкости, в

меньшей степени это затрагивает граничные условия для основания резервуара.

В работе Matsui T. и Nagaya T. [1] был предложен гибридный полуаналитический подход, использующий технику метода конечных элементов, позволяющий исследовать нелинейные движения жидкости в резервуаре с плавающей крышей для хранения нефти при длиннопериодных сейсмических воздействиях. Авторы рассматривали резервуар, состоящий из жесткой цилиндрической стенки, ровного дна, полагается, что плавающая крыша работает в упругой стадии, в ней возникают большие перемещения. Жидкость, хранящаяся в резервуаре полагалась невязкой и несжимаемой, поток считался безвихревым. В основе представленного в [1] метода лежит представление движения жидкости как суперпозиции аналитических форм колебаний (мод), удовлетворяющих уравнению Лапласа, условиям наличия жесткой стенки и граничным условиям на дне резервуара. Конечноэлементная техника используется для поиска решения, удовлетворяющего оставшимся кинематическим и динамическим граничным условиям на подвижных границах, а также для совместного решения соответствующих уравнений с нелинейными уравнениями, описывающими движение плавающей крыши. Таким образом, требуется конечноэлементная аппроксимация лишь только поверхности жидкости и плавающей крыши, и в результате имеем весьма эффективный в вычислительном плане подход (по сравнению с «полномасштабным» конечноэлементным моделированием жидкости и плавающей крыши), позволяющий получить высокоточное решение. В такой постановке достаточно несложным образом можно учесть упомянутые выше нелинейные эффекты. В [1] представлены также примеры решения практически важных задач на основе предложенного полуаналитического подхода. В частности, было исследовано нелинейное поведение двух резервуаров (объемом 30000 и 100000 кубических метров соответственно) с плавающи-

ми крышами однопалубного типа, вышедших из строя в результате землетрясения Токачиоки 2003 года. Кроме того, авторами проведено сопоставление результатов полуаналитического расчета с аналогичными данными, полученными на основе актуализированных норм проектирования [7]. Таким образом, было установлено, что эмпирические формы, указанные в нормах, дают существенно заниженные значения для напряжений в понтоне, ввиду того, что в не учитываются некоторые из вышеуказанных нелинейных факторов (которые, тем не менее, настоятельно рекомендуется принимать во внимание при расчетном обосновании соответствующих объектов).

В статье Hosseini M., Soroor A., Sardar A., Jafarieh F. [17] предложен некоторый упрощенный подход сейсмическому расчету резервуаров с плавающими крышами на основе метода конечных элементов. В качестве основной причины повреждений таких объектов указывается контактное взаимодействие между плавающей крышей и стенкой резервуара. В данном случае авторы полагают, что колебания жидкости в значительной мере гасятся плавающей крышей, а слой между последней и стенкой резервуара моделируется с применением так называемых предварительно сжатых элементов, работающих только на сжатие и расположенных по окружности, по контуру крыши. Сама плавающая крыша в расчетной модели заменяется жестким диском, тогда как стенка резервуара аппроксимируется ансамблем пространственных оболочечных конечных элементов. Динамическое влияние хранящейся в резервуаре нефти учитывается с использованием техники метода присоединенной массы. Если в рассматриваемом временном интервале максимальное относительное перемещение соответствующих узлов на плавающей крыше и стенках резервуара по любому радиальному направлению превысит начальную длину вышеупомянутых предварительно сжатых пружин, работающих только на сжатие, полагается, что резервуар находится в опас-

ном состоянии. Такой подход был апробирован авторами при расчетном обосновании резервуара, расположенного на иранском острове (Kharg) в Персидском заливе, находящемся на расстоянии в 25 километров от побережья Ирана и на расстоянии в 57 километров от города Бушир.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках Гранта Министерства образования и науки Российской Федерации №2014/107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matsui T., Nagaya T.** Nonlinear sloshing in floating-rooted oil storage tank under long-period seismic ground motion. // *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2013, Volume 42, pp. 973-991.
2. **Hatayama K., Zama S., Nishi H., Yamada M., Hirokawa M., Inoue R.** The damage of oil storage tanks during the 2003 Tokachioki earthquake and the long period ground motion. // *JSCE-AIJ Joint Symposium on Huge Subduction Earthquakes – Wide Area Strong Ground Motion Prediction*, 2005, pp. 7-18 (in Japanese).
3. The Japan Society of Civil Engineers. The 1999 Kocaeli earthquake, Turkey – Investigation into damage to civil engineering structures, 1999.
4. Hazardous Materials Safety Techniques Association. Report on seismic design of floating roof of oil storage tanks under liquid sloshing, 2004 (in Japanese).
5. **Yamauchi Y., Kamei A., Zama S., Uchida Y.** Seismic design of floating roof of oil storage tanks under liquid sloshing. // *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*, Vancouver, BC, Canada, 2006, PVP2006-ICPVT11-93280.
6. API. *Welded Steel Tanks for Oil Storage* (11th edn). API Standard 650. 2007.

7. The Fire and Disaster Management Agency. On the enforcement of the ministerial ordinance which amends a part of the rule concerning the control of hazardous materials, Notification 14, 2005 (in Japanese).
8. **Kimura N., Ohashi H.** Nonlinear response of sloshing in axisymmetric container. 1-st report, derivation of governing equations and characteristics of solution. // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, 1978, Volume 44(385), pp. 3024-3033 (in Japanese).
9. **Ohmori H., Matsui T., Hibino H.** On the sloshing with finite amplitude on the liquid storages, part 1, derivation of basic equations and their application to cylindrical tanks. // Journal of Structural and Construction Engineering, Transactions of Architectural Institute of Japan, 1987, Volume 375, pp. 65-72 (in Japanese).
10. **Sakai F., Nishimura M., Ogawa H.** Sloshing behavior of floating-roof oil storage tanks. // Computers and Structures, 1984, Volume 19(1-2), pp. 183-192.
11. **Matsui T.** Sloshing in cylindrical liquid storage tank with a floating roof under seismic excitation. // ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 2007, Volume 129(4), pp. 557-566.
12. **Matsui T.** Sloshing in cylindrical liquid storage tank with a single-deck type floating roof under seismic excitation. // ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 2009, Volume 131(2):021303, pp. 1-10.
13. **Utsumi M., Ishida K.** Vibration analysis of a floating roof taking into account the non-linearity of sloshing. // ASME Journal of Applied Mechanics, 2008, Volume 75:041008, pp. 1-10.
14. **Utsumi M., Ishida K., Hizume M.** Inertial resonance of a floating roof subjected to nonlinear sloshing. // ASME Journal of Applied Mechanics, 2010, Volume 77:011016, pp. 1-8.
15. **Kikuchi T., Yonekawa F., Hitomi M., Miura M.** Sloshing simulation of floating roof oil storage tanks. // Idemitsu Technical Reports, 2004, Volume 47(3), pp. 62-70 (in Japanese).
16. **Yamamoto K., Minakawa Y.** Nonlinear sloshing analysis of cylindrical liquid storage tank with single-deck type floating roof. // Journal of Structural and Construction Engineering, Transactions of Architectural Institute of Japan, 2009, Volume 643, pp. 1603-1612 (in Japanese).
17. **Hosseini M., Soroor A., Sardar A., Jafarieh F.** A simplified method for seismic analysis of tanks with floating roof by using finite element method: Case study of Kharg (Southern Iran) Island tanks. // Proceedings Engineering, 2011, Volume 14, pp. 2884-2890.
18. **Shi T., Ruifeng W.U., Naisi Q., Xiaofeng X.** Analysis of earthquake response of oil storage tanks with in-floating roof. // Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1986, Volume 03 (007).
19. **Shimida K.** A solving prevention system for floating roof type petroleum tanks. // JETI, 2005, Volume 53(8), pp. 44-45 (in Japanese).
20. **Sakai F., Inoue R., Hayashi S.** Fluid-elastic analysis and design of sloshing in floating-roof tanks subjected to earthquake motions. // Proceedings of ASME 2006 Pressure Vessels and Piping / ICPVT-11 Conference (PVP2006-ICPVT-11), Vancouver, BC, Canada, 2006, Paper no. PVP2006-ICPVT-11-93622, pp. 1437-1446.
21. **Yoshida S.** Buckling characteristics of floating roof pontoons in aboveground storage tanks subjected to both compressive and bending load. // Proceedings of ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Conference (PVP2009), Prague, Czech Republic, Paper no. PVP2009-77227, pp. 201-210.
22. **Al Zeiny.** Simplified modelling of liquid-structure interaction in the seismic analysis of cylindrical liquid storage tanks. // Proceedings of the 13th WCEF, Paper no. 1914, Vancouver, BC, Canada, 2004.
23. **Epstein H.I.** Seismic design of liquid storage tanks. // Journal of Structural Engineer-

- ing Division, ASCE, 1976, Volume 102, pp. 1659-1673.
24. **Yamauchi Y., Kamei A., Zama S., Uchida Y.** Seismic design of floating roof of oil storage tanks under liquid sloshing. // Proceedings of ASME 2006 Pressure Vessels and Piping / ICPVT-11 Conference (PVP2006-ICPVT-11), Vancouver, BC, Canada, 2006, Paper no. PVP2006-ICPVT-11-93280, pp. 1407-1415.
 25. **Sakai F., Inoue R.** Some considerations on seismic design and controls of sloshing in floating-roofed oil tanks. // The 14th World Conference on Earthquake Engineering, October 12-17, 2008, Beijing, China.
 26. **Akatsuka H., Kobayashi H.** Report of field investigation on Niigata earthquake. Mining Department, MITI, September, 14, 1964.
 27. **Shabani R., Golzar F.G.** Large deflection analysis of floating roofs subjected to earthquake ground motion. // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, Volume 13, pp. 2034-2048.
 28. **Mitra S., Sinhamahaparta K.P.** Slosh dynamics of liquid-filled containers with submerged components using pressure-based finite element method. // Journal of Sound and Vibration, 2007, Volume 304, pp. 361-381.
 29. **De Angelis M., Giannini R., Paolacci F.** Experimental investigation on the seismic response of a steel liquid storage tank equipped with floating roof by shaking table tests. // Earthquake Engineering Structural Dynamics, 2010, Volume 39(4), pp. 377-396.
 30. **Sun J., Li D., Cui L., Zou D., Wang Z.** Seismic response analysis of nonlinear base-isolated storage tanks with floating roof under bi-directional excitation. // World Inf. Earthquake Engineering, 2011, Volume 27, pp. 70-76.
 31. **Utsumi M.** Vibration reduction of a floating roof by dynamic vibration absorbers. // ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 2011, Volume 133(4), pp. 11.
 32. **Isshiki H., Nagata S.** Variation principles related to motion of an elastic plate floating on a water surface. // Proceedings of 11th International Offshore and Polar Engineering Conference, Stavanger, Norway, 2001, pp. 190-197.
 33. **Nagata S., Yoshida H., Fujita T., Isshiki H.** The analysis of the wave induced responses of an elastic floating plate. // Proceedings of 16th International Conference of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1997.
 34. **Ohmatsu S.** Numerical calculation of hydro-elastic responses of pontoon type VLFS. // Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, 1997, Volume 182, pp. 329-340.
 35. **Shabani R., Tariverdilo S., Salarieh H., Rezazadeh G.** Importance of the flexural and membrane stiffness in large deflection analysis of floating roofs. // Applied Mathematical Modelling, 2010, Volume 34, pp. 2426-2436.
 36. **Virella J.C., Prato C.A., Godoy L.A.** Linear and nonlinear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motions. // Journal of Sound and Vibration, 2008, Volume 312, pp. 442-460.
 37. **Bathe K.-J.** On reliable finite element methods for extreme loading conditions. // Extreme Man-Made and Natural Hazards in Dynamics of Structures. NATO Security through Science Series, 2007, pp. 71-102.
 38. **Sun Y., Sun J., Cui L.** Floating roof influence on seismic response of large vertical storage tank. // Advanced Materials Research, 2013, Volumes 671-674, pp. 1399-1402.
 39. **Kuan S.Y.** Design, construction and operation of the floating roof tank. A dissertation submitted in fulfilment of the requirement of Course ENG 4111 and ENG 4112 Research Project towards the degree of Bachelor of Engineering (Mechanical Engineering). Submitted: 29th October 2009.

К вопросу о численном моделировании поведения резервуара с понтоном (плавающей крышей) при сейсмическом воздействии

40. **Lieb J.M.** Floating Roof Design Considerations. Tank Issue 37-2, Spring/ Summer 2004.
41. **Malhotra P.K.** Seismic Design of Liquid Storage Tanks. American Society of Civil Engineers, 2006.
42. **Young W.B.** Design and Application of Floating Roofs for Refinery Storage Tanks. // Oil and Gas Journal, 1973, Volume 71, No. 49, December 1973, pp. 48-51.
43. **Mark B.** Floating Roof Working safety. // Proceeding of 2006 storage tank conference and safety workshop, 2006.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Кайтуков Таймураз Батразович, кандидат технических наук, доцент, заместитель директора Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ); профессор кафедры информатики и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Вершинин Владислав Викторович, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Усманов Антон Равильевич, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, General Director of Research Center StaDyO, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Taymuraz B. Kaytukov, PhD, Associate Professor, Deputy Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Irina N. Afanasyeva, Junior Research Scientist of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева,
В.В. Вершинин, А.Р. Усманов, С.В. Щербина

Vladislav V. Vershinin, Junior Research Scientist of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Anton R. Usmanov, Engineer of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey V. Scherbina, Engineer of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПК ANSYS

Т.Л. Дмитриева, Ле Чан Минь Дат

Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассмотрена постановка задачи оптимизации металлических опор ЛЭП в форме задачи нелинейного математического программирования. Приведено решение этой задачи с использованием программного комплекса ANSYS.

Ключевые слова: оптимизации, ПК ANSYS, оптимальное проектирование конструкций, комплекс программ, нелинейное математическое программирование.

OPTIMAL DESIGN OF SPACE METAL CONSTRUCTION BY USING ANSYS

Tatiana L. Dmitrieva, Le Tran Minh Dat

Irkutsk State Technical University, Irkutsk, RUSSIA

ABSTRACT: Considering the formulation of optimization problem for metal transmission towers in the form of a nonlinear mathematical programming. The solution of this problem was provided by using the software package ANSYS.

Keywords: optimization, approximation method, ANSYS, optimal design of structures, software package, nonlinear mathematical programming

ВВЕДЕНИЕ

Современные подходы к проектированию сооружений выдвигают требования снижения материальных и трудовых ресурсов, что связано с всесторонним исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций, стремление к оптимальному использованию их несущей способности. Эта проблема может быть решена на основе методов оптимизации конструкций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрена общая постановка задачи оптимального проектирования конструкций при статических воздействиях в форме задачи нелинейного математического программирования (НМП), где критерий опти-

мальности определяется назначением целевой функции $f(x)$.

$$\text{найти } \min f(x, P(x)), \quad x \in E^n; \quad (1)$$

при ограничениях:

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_1; \quad (2)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m. \quad (3)$$

Для получения оптимального проекта варьируются геометрические и физические параметры, формализованные в виде вектора $\{X\}$, который может изменяться на интервале $\{X^L\}$, $\{X^U\}$ непрерывно либо дискретно. Функции ограничений связаны с варьируемыми параметрами через параметры состояния, которые являются функциями перемещений, внутренних силовых факторов, напряжений, частот собственных колебаний:

$$\{P(x)\} = \varphi(\delta, M, Q, N, \sigma, \omega), \quad (4)$$

которые определяются решением уравнения состояния системы в линейной постановке:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}. \quad (5)$$

Рассмотрено решение задачи оптимизации опоры линии электропередачи, смоделированной в виде пространственной стержневой металлической конструкции. В ПК ANSYS используются два метода оптимизации.

Метод аппроксимации подзадачи.

Метод аппроксимации подзадачи (*Subproblem Approximation Method*) является методом прямого поиска и может быть эффективно применен для большинства технических задач. При аппроксимации вычисляются значения целевой функции для нескольких наборов переменных проекта. Затем методом наименьших квадратов создается функциональная зависимость в виде аппроксимирующей линии (или поверхности). Для целевой функции \hat{f} используется квадратичная зависимость с перекрестными членами, а для переменных состояний – квадратичная зависимость.

$$\hat{f} = a_0 + \sum_i^n a_i x_i + \sum_i^n \sum_j^n b_{ij} x_i x_j \quad (6)$$

Преобразование в задачу, не имеющую ограничений, проводится добавлением штрафных функций к аппроксимированной целевой функции:

$$F(x, p_k) = \hat{f} + \sum_{i=1}^{nx} X(x_i) + \sum_{i=1}^{m1} G(g_i) + \sum_{i=m1+1}^m H(h_i) \quad (7)$$

где: X – штрафная функция для переменных проекта; G, H – штрафные функции для переменных состояний. Решение задачи на

безусловный экстремум проводится методом последовательной минимизации [2].

Метод первого порядка

Метод первого порядка (*First Order Method*) основан на чувствительности проекта и более подходит для задач, требующих высокой точности. Этот метод преобразует исходную задачу в задачу “без ограничений” с добавлением к целевой штрафных функций:

$$Q(x, q) = \frac{f}{f_0} + \sum_{i=1}^n P_x(x_i) + q \left[\sum_{i=1}^{m1} P_g(g_i) + \sum_{i=m1+1}^m P_h(h_i) \right] \quad (8)$$

где: f_0 – значение целевой функции, которое выбирается из текущей группы проектных множеств; P_x – штрафная функция для переменных проекта; P_g, P_h – штрафные функции для переменных состояний; q – параметр поверхности отклика.

2. ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ ОПОРЫ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ В ПК ANSYS

Рассмотрим опору линии электропередачи в виде пространственной стержневой металлической конструкции (рис. 1, рис. 2).

Исходные данные:

- длина трубы опоры $L = 9,0$ м;
- число случаев загрузки: 1;
 - узловые силы $F=60$ Н, $F'=30$ Н, $F_1=200$ Н, $F_2=200$ Н, $F_3=200$ Н;
 - крутящий момент $M=1000$ Н·м;
- предельное значение напряжений $[\sigma]_{\max} = 250$ МПа;
- модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;
- предел на перемещение узла **55** $[\Delta]_{\max} = 0,0415$ м;
- материал: сталь ВСтЗпс6;
- сечения стоек опоры приняты в виде **кольца**, сечения связей приняты в виде **равностороннего уголка**.
- Вес опоры без траверсы не должен превышать 2350 Н.

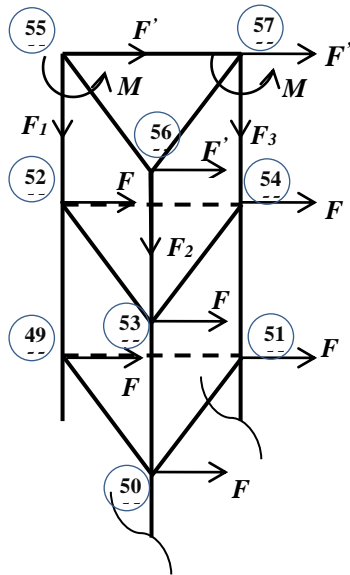


Рисунок 1. Верхняя часть опоры

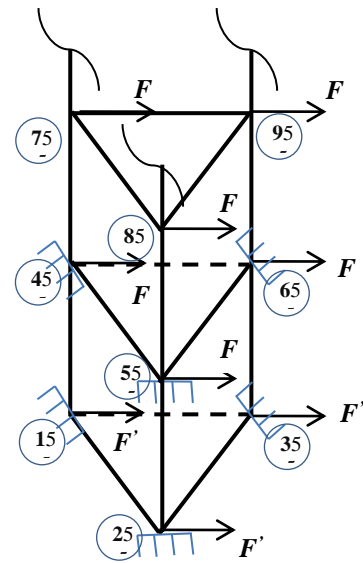
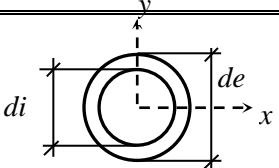


Рисунок 2. Нижняя часть опоры.

Таблица 1

Варианты варьирования параметрами сечений

Вариант 1	Вариант 2	
Число варьируемых параметров в сечении		
2	1	
Варьируются		
Число варьируемых параметров в сечении		
2	1	
Варьируются		
de, t	$t=de/24$	
b, ts	$ts= b/10$	

Приведем математическую постановку задачи. Целевая функция представляет собой вес опоры:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{60} A_i \cdot L_i. \quad (9)$$

Здесь A_i, L_i – площадь и длина i -го элемента опоры.

Характер ограничений:

а) ограничение на максимальное напряжение в элементах:

$$g_1 = \frac{M_1}{W_1 \cdot [\sigma]_{\max}} - 1 \leq 0, \quad (10)$$

б) ограничение на перемещения узла **55**:

$$g_2 = \frac{\Delta_{55}}{[\Delta]_{\max}} - 1 \leq 0. \quad (11)$$

Таблица 2

Начальные значения и пределы изменения параметров

$de_0 = 7,5$ см	$b_0 = 6$ см	$ts_0 = 1$ см
de [5–12] см	b [3–12] см	ts [0,3–1,2] см

В **варианте 1** задача решалась методом первого порядка с ограничениями (10), (11) при заданных начальных значениях параметров: $de_0=7,5$ см, $b_0=6$ см, $ts_0=1$ см.

Результаты расчета приведены в таблице 3 и на рис. 3. Оптимальное значение целевой функции (объем опоры) $V_{1opt} = 25865,45$ см³ было получено на 30-й итерации. Выявлено активное ограничение на перемещение узла **55**: $g_2=-1,81 \cdot 10^{-3}$ (при заданной точности в невязках ограничений до 10^{-3}).

Таблица 3

Оптимальные значения параметров (**вариант 1**)

de (см)	t (см)	b (см)	ts (см)
8,0913	0,29715	6,1479	0,3000

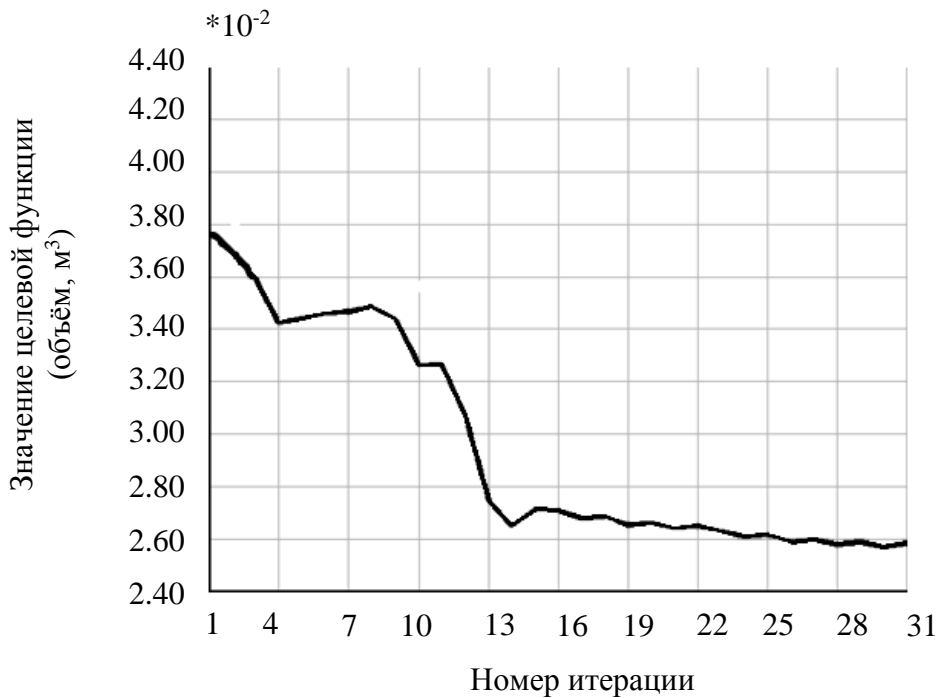


Рисунок 3. Изменение целевой функции на итерациях (метод первого порядка).

В **варианте 2** задача решалась методом аппроксимации подзадачи с ограничениями (10), (11) при заданных начальных значениях параметров: $de_0=7,5$ см; $b_0=6$ см; $ts_0=1$ см. В результате расчета оптимальное значение целевой функции (объем опоры) было

получено на 8-ой итерации $V_{2opt}= 26661,15$ см³. Выявлено активное ограничение на перемещение узла **55**: $g_2 = -2,24 \cdot 10^{-3}$ (при заданной точности в невязках ограничений до 10^{-3}).

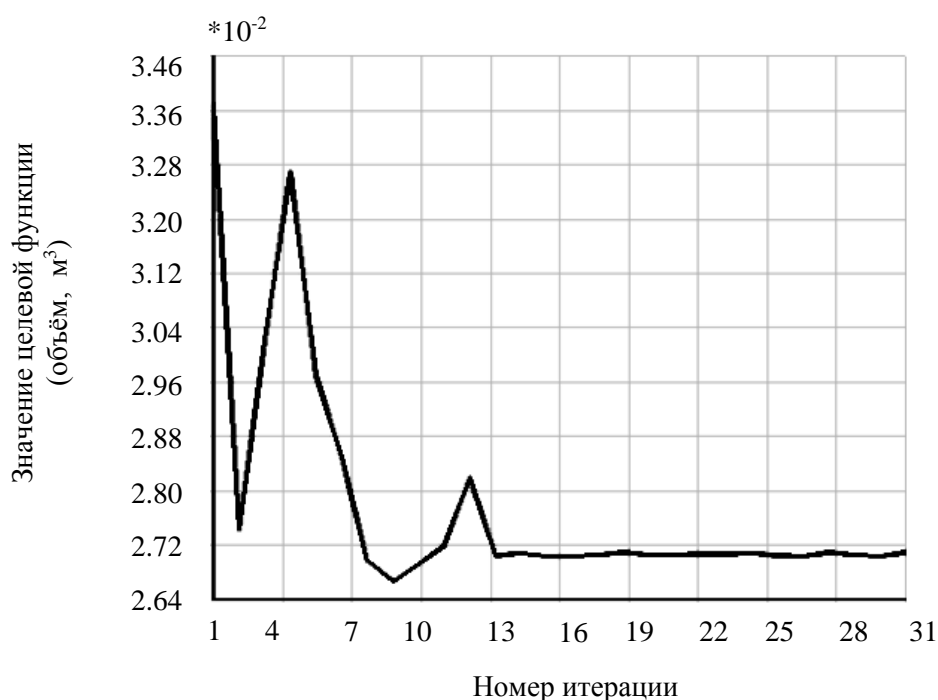


Рисунок 4. Изменение целевой функции на итерациях (метод аппроксимации подзадачи).

Оптимальные значения параметров приведены в таблице 4.

Таблица 4
Оптимальные значения параметров
(вариант 2)

d_e (см)	t (см)	b (см)	t_s (см)
7,8868	0,28713	7,9536	0,30580

Для проверки оптимальных результатов на единственность задача была решена с различных начальных точек. Всего рассматривалось 5 решений задачи методом первого порядка при начальных значениях d_{e0} от 7,3 см до 8,1 см с шагом 0,2 см. На рис. 5 показаны график изменения целевой функции на итерациях при различных начальных спусках. Результаты приведены в таблице 5.

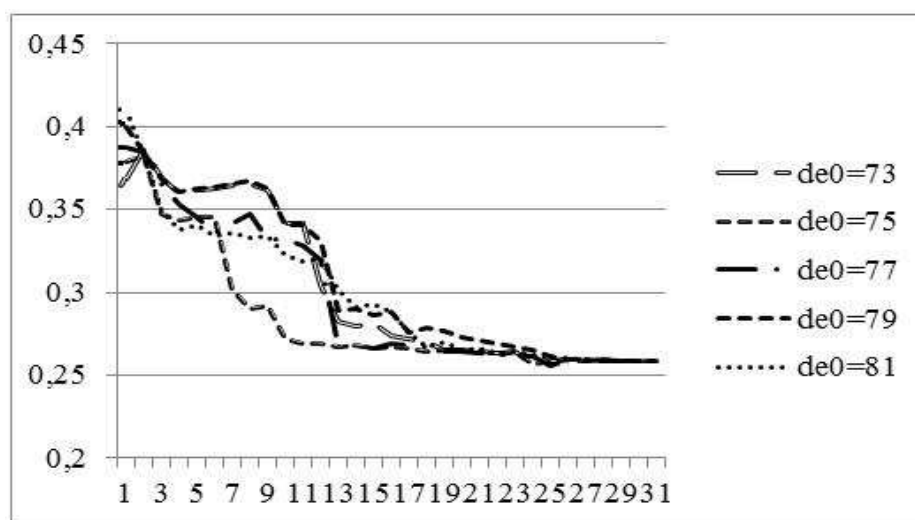


Рисунок 5. Изменение целевой функции на итерациях при различных начальных значениях d_{e0} (метод первого порядка).

Таблица 5

Результаты решений задачи с разных начальных значений de_0

№ решения	de_0 (см)	b_0 (см)	ts_0 (см)	$F(x)$ (см ³)	Число итераций	de_{opt} (см)	b_{opt} (см)	ξ_{max}
1	7,3	6,0	1,0	25869,29	29	8,7470	4,9769	$-1,21 \cdot 10^{-3}$
2	7,5	6,0	1,0	25865,45	31	8,0913	6,1479	$-1,81 \cdot 10^{-3}$
3	7,7	6,0	1,0	25879,31	31	8,2990	7,1163	$-7,08 \cdot 10^{-3}$
4	7,9	6,0	1,0	25867,12	30	8,9389	4,8762	$-8,4 \cdot 10^{-4}$
5	8,1	6,0	1,0	25871,51	29	8,3389	7,3124	$-2,31 \cdot 10^{-3}$

Из приведенных результатов видно, что решение задачи оптимизации опоры ЛЭП методом первого порядка даёт меньшее значение целевой функции на большом числе итераций, чем решение методом аппроксимации подзадачи. Оптимальной вес опоры ЛЭП составил $P_{opt} = 2030,44$ Н, что меньше на 13,60%, чем вес, удовлетворяющий заданному требованию к монтажу при установке на фундамент (2350 Н). Опора удовлетворяет требованиям по прочности при действии ветровых и гололёдных нагрузок для районов I-IV, а также нормативным требованиям по жесткости.

3. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Опыт решения задачи оптимального проектирования опоры ЛЭП при помощи программных средств позволил сделать следующие выводы. К особенностям расчета в ПК ANSYS можно отнести отсутствие модуля проверок на основе российских норм в области проектирования (проверки на устойчивость в сжатых элементах и др.). Нет возможности варьировать сечениями соответственно сортаментам. Это обстоятельство делает актуальным разработку отечественных программных комплексов оптимизации. С другой стороны, расчеты в ПК ANSYS не ограничиваются поиском оптимальных решений для стержневых систем. Развитый аппарат конечно-элементного анализа этого ПК позволяет оптимизировать простран-

ственные конструкции, содержащие элементы различных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриева, Т.Л. Безделев В.В. Использование многометодной стратегии оптимизации в проектировании строительных конструкций. // Известия вузов. Строительство, № 2, 2010, с. 90-95.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. 536 с.
3. Дмитриева Т.Л., Ле Чан Минь Дат. Алгоритм оптимизации на основе аппроксимаций. // Вестник ИрГТУ № 12, 2012, с. 141-147.

Дмитриева Татьяна Львовна, д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов и строительной механики ФГБУ ВПО «Иркутский государственный технический университет», Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, e-mail: dmitrievat@list.ru

Ле Чан Минь Дат, аспирант кафедры сопротивления материалов и строительной механики ФГБУ ВПО «Иркутский государственный технический университет», Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова 83, e-mail: jinzai_ron@yahoo.com

Dmitrieva Tatiana Lvovna, PhD, Professor, Department of the strength of materials and structural mechanics, Irkutsk State Technical University, Russia, 664074, Irkutsk city, str.Lermontova, 83, e-mail: dmitrievat@list.ru

Le Tran Minh Dat, 1st year PhD student at Irkutsk State Technical University, Russia, 664074, Irkutsk city, street Lermontova, 83, Department of the strength of materials and structural mechanics, e-mail: jinzai_ron@yahoo.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЛЕГКИХ СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Г.Г. Кашеварова, П.А. Косых

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассмотрен подход определения несущей способности легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) на основе компьютерного расчета по деформированной схеме. Проанализировано влияние основных начальных несовершенств, их характера и направления, на значение критической силы потери устойчивости. Рассмотрена «чувствительность» несущей способности к основным геометрическим характеристикам сечения. Получена формула для предварительной оценки критической силы.

Ключевые слова: ЛСТК, компьютерное моделирование, ANSYS, начальные несовершенства

DEFINING BUCKLING RESISTANCE OF COLD FORMED LIGHT GAUGE STEEL MEMBERS UTILIZING COMPUTER MODELING

Galina G. Kashevarova, Pavel A. Kosykh

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

ABSTRACT: The article focuses on the approach to defining buckling resistance of cold formed light gauge steel members by means of computer modeling using deformed geometry. The influence of initial imperfections, their peculiarities and direction, on the buckling resistance was analyzed. In addition, the article considers the response of buckling resistance to basic geometry of cross section. The formula of conceptual estimate of buckling force was derived.

Key words: cold formed light gauge steel members, computer modeling, ANSYS, initial imperfections

1. ВВЕДЕНИЕ

Новая строительная система ЛСТК (легкие стальные тонкостенные конструкции) развивается в течение последних 10 лет в странах СНГ, в том числе и в России. Такие конструкции применяются при строительстве малоэтажных жилых, гражданских и универсальных производственных зданий (см. рис. 1). Нередко конструкции из ЛСТК применяются в составе традиционных строительных систем, например для устройства покрытий, надстройки мансардных этажей существующих и новых строений [1]. Основным несущим элементом системы является стоечный С-образный тонкостенный (толщиной 1.0-3.0

мм) профиль, компьютерное моделирование которого рассматривается в данной статье.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для определения критической нагрузки была создана расчетная модель в программном комплексе ANSYS. При создании конечно-элементной модели с целью учета местной потери устойчивости сечения были использованы оболочечные элементы (SHELL181). Поперечное сечение элемента представляет собой открытый С-образный профиль с высотой стенки – «Н», шириной фланцев – «В», длиной «губы» - «С» (см. рис. 2). Толщина

металла – t . В продольном направлении профиль имеет длину – «L».



Рисунок 1. Здание по технологии ЛСТК.

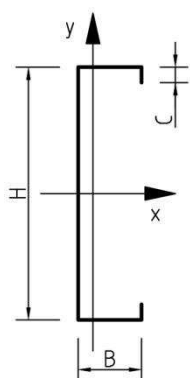


Рисунок 2. Сечение профиля.

На расчетную модель наложены следующие граничные условия: в опорном сечении запрещены перемещения (u_x , u_y , u_z) и кручение вокруг продольной оси профиля ($rotz$); на противоположном конце запрещены перемещения в плоскости поперечного сечения (u_x , u_y) и кручение вокруг продольной оси профиля ($rotz$). Условно расчетная схема изображена на рис. 3.

Для наложения граничных условий узлы поперечных сечений были дополнительно связаны между собой, а также с узлом, находящимся в центре тяжести сечения, посредством элемента MPC184 в формулировке rigid beam [2]. Благодаря такому подходу в процессе деформирования опорное и «силовое» сечения остаются плоскими. Это даёт возможность накладывать граничные условия непосредственно на узел в центре тяжести сечения.

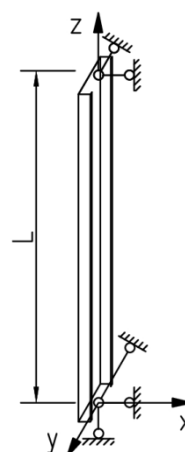


Рисунок 3. Расчетная схема.

При моделировании нагружения на свободный конец профиля прикладывалось перемещение по направлению к опорному сечению. В процессе расчета отслеживалась реакция в опорном сечении R_z . За предельное значение сжимающей осевой нагрузки принималось значение опорной реакции, соответствующее точке перегиба на графике «опорная реакция – перемещение свободного конца» (см. рис. 4). Эта точка соответствует моменту потери устойчивости, вызванной сменой формы равновесного состояния.

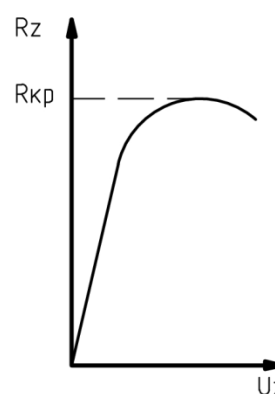


Рисунок 4. К определению критической силы.

Для описания упругопластической работы была использована диаграмма стали 08пс. Параметры, необходимые для описания диаграммы, были получены по результатам проведенных натурных испытаний стандартных образцов на растяжение. Их значения: мо-

дуль упругости $E = 215$ ГПа, предел текучести $R_y = 400$ МПа, временное сопротивление $R_u = 566$ МПа. В программный комплекс ANSYS данная диаграмма была занесена через модель материала MISO (Multilinear isotropic hardening).

3. НАЧАЛЬНЫЕ НЕСОВЕРШЕНСТВА

Оценка несущей способности профилей осуществлялась на основе расчета по деформированной схеме [3]. Для ее создания в модель вносились начальные геометрические несовершенства. В силу того что конструкция подвержена двум видам потери устойчивости: общей и местной, в модель вводилось соответственно два вида начальных несовершенств (см. рис. 5 а, б). Вид начальных несовершенств определялся на основе линейного расчета на устойчивость в расчетном комплексе ANSYS. Линейный расчет на устойчивость служил лишь средством для определения формы потери устойчивости, которая далее вносилась в расчетную схему с определенным масштабным коэффициентом. Масштабный коэффициент подбирался таким образом, чтобы внесенные начальные несовершенства соответствовали рекомендуемым значениям, которые выбирались согласно нормативным документам [4] и публикациям [5], [6] (см. табл. 1).

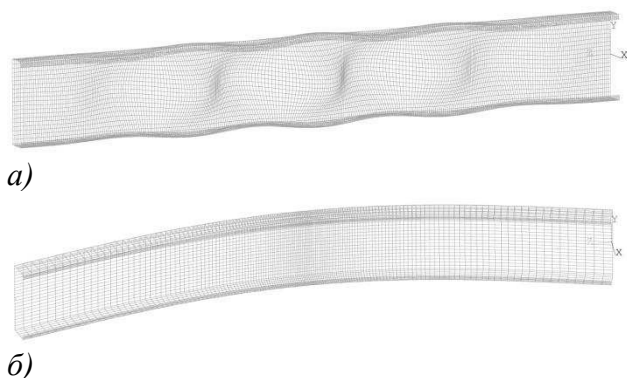


Рисунок 5. Формы начальных несовершенств: а) общего, б) местного

Таблица 1. Значения начальных несовершенств

Эскиз	Значение
	$v = L_p/750 + i/20$
	$d_1 = 0.006H$ $d_2 = t$

4. ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Процесс холодного формования вносит значительный вклад в распределение и величину остаточных напряжений. Наряду с остаточными напряжениями в областях со значительными пластическими деформациями (углыгиба и т.п.) наблюдается эффект упрочнения стали (повышение предела текучести). В силу недостаточных знаний о величине и распределении этих двух факторов был выбран консервативный подход, рассматривающий данные величины взаимоисключающими друг друга.

5. ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ

На первом этапе расчетов было рассмотрено влияние различных начальных несовершенств и их комбинаций на значение критической силы. В качестве независимых форм потери устойчивости были выбраны: а) местная форма потеря устойчивости с четным количеством полувогн; б) местная форма потеря устойчивости с нечетным количеством полувогн; в) общая форма потеря устойчивости. В ходе расчета каждая из форм поочередно вводилась в модель в качестве начального несовершенства в двух вариантах. В первом варианте максимальное

значение начального несовершенства вводилось в положительном направлении оси X (рис. 2), во втором варианте – в отрицательном. Целью первого этапа расчетов являлось установление существования предрасположенности терять устойчивость в определенном направлении по определенному количеству полуволн. Для исследования был выбран профиль с высотой стенки $H = 203$ мм, шириной фланца $B = 50.8$ мм, длиной губы $C = 12.5$ мм, толщина металла $t = 1.5$ мм, длина L от 0.25 м до 4.0 м с градацией 0.25 м. В ходе расчета отслеживалась не только критическая сила, но и время, затраченное на расчет (CPU TIME). Результаты компьютерного моделирования приведены в таблицах 2 а), б).

Таблица 2 а). Результаты компьютерного моделирования для случая внесения несовершенств по местной форме.

L, м	Местная форма, четное число длин полуволн				Местная форма, нечетное число длин полуволн			
	в "+" х		в "-" х		в "+" х		в "-" х	
	F, кН	T	F, кН	T	F, кН	T	F, кН	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.25	83.9	40	83.7	56.5	93.1	46.5	101	41.7
0.5	82.3	96.7	82.3	89.2	84.8	87.5	88.7	78.9
0.75	81.8	152	81.8	153	79.7	160	80.9	147
1	76.1	249	76.1	260	75.7	252	75.9	182
1.25	69.7	328	69.7	304	69.8	279	70	210
1.5	62.3	209	62.3	212	62.5	264	62.4	230
1.75	54.5	303	54.5	301	53.4	345	54.5	250
2	46.8	387	46.8	262	46.8	311	46.8	214
2.25	40.2	302	40.2	305	40.2	347	40.2	317
2.5	34.4	270	34.4	270	34.5	272	34.5	278
2.75	29.7	512	29.7	347	29.7	362	29.7	324
3	25.8	518	25.8	405	25.8	354	25.8	393
3.25	22.6	363	22.6	401	22.8	388	22.4	547
3.5	19.9	450	19.9	474	20	460	20	483
3.75	17.7	648	17.7	729	17.8	746	17.8	695
4	15.9	807	15.9	748	15.9	748	15.9	729

Таблица 2 б). Результаты компьютерного моделирования для случая внесения несовершенств по общей форме.

L, м	Общая форма потери устойчивости				Комбинация общей и местной форм	
	в "+" х		в "-" х			
	F, кН	T	F, кН	T	F, кН	T
1	2	3	4	5	6	7
0.25	-	-	-	-	-	-
0.5	85.9	94.3	92.8	103.8	80.3	98
0.75	81.3	230	90.8	211	76.1	284
1	70.6	326	87.7	303	70.3	263
1.25	76.03	448	79	??	64.2	219
1.5	67.6	967	72	992	56.8	195
1.75	61.4	-	65	969	49.5	188
2	50.7	383	57.7	901	42.8	256
2.25	45.6	-	51.8	-	36.8	283
2.5	37	-	44.2	-	31.7	339
2.75	31.8	-	37.3	-	27.5	347
3	27.6	1862	31.8	-	23.8	404
3.25	24.8	-	27.4	-	20.9	408
3.5	21.8	-	23.8	-	18.4	493
3.75	19.4	1280	20.9	692	16.3	542
4	17.3	640	18.4	-	14.7	550

Проанализировав результаты, можно сделать вывод о том, что при введении в модель начальных несовершенств по локальной форме потери устойчивости нет зависимости между значением критической силы и направлением введения максимального несовершенства, а также количеством полуволн (столбцы 2, 4, 6, 8 таблицы 2 а). Также стоит отметить, что на решение было затрачено практически одинаковое время (столбцы 3, 5, 7, 9 таблицы 2 а). Из анализа результатов, соответствующих начальным несовершенствам по общей форме потери устойчивости, следует, что значение критической силы зависит от направления ввода максимального значения несовершенства, т.е. существует предрасположенность к потере устойчивости в положительном направлении

оси X (столбцы 2, 4 таблицы 2 б). Данный эффект можно объяснить смещением центра тяжести сечения, вследствие потери устойчивости его части (см. рис. 6). Смещение центра тяжести создает эксцентриситет сжимающей силы, что приводит к появлению дополнительного изгибающего момента, способствующего изгибу конструкции в положительном направлении оси X.

Величина смещения центра тяжести зависит от толщины металла t , высоты стенки H и ширины фланца B . Значения, вычисленные согласно [7], представлены в таблице 3.

Таблица 3. Значение смещение центра тяжести:

а) $t=1.0$ мм б) $t=1.5$ мм в) $t=2.0$ мм

а)

$B \backslash H$	41.3	50.8	63.5
152	7.17	8.43	10.3
203	8.69	10.4	12.7
254	9.78	11.8	14.5
305	10.6	12.8	15.9

б)

$B \backslash H$	41.3	50.8	63.5
152	5.26	6.2	7.22
203	6.72	7.97	9.54
254	7.77	9.33	11.3
305	8.57	10.4	12.7

в)

$B \backslash H$	41.3	50.8	63.5
152	3.8	4.57	5.47
203	5.18	6.32	7.69
254	6.2	7.63	9.39
305	6.97	8.64	10.7

Проанализировав данные, можно сделать вывод, что с увеличением высоты стенки и ширины фланца величина смещения центра

тяжести увеличивается, что в свою очередь говорит о большей предрасположенности профиля терять устойчивость в положительном направлении оси X. Обратная зависимость наблюдается в отношении толщины металла, т.к. с ее ростом уменьшается часть сечения подверженная местной потере устойчивости. Данные зависимости нуждаются в последующей проверке на компьютерных моделях и в реальных конструкциях. Другой момент, подтверждающий предрасположенность терять устойчивость в определенном направлении, состоит в том, что при внесении в модель начального несовершенства только по локальной форме (независимо от направления), профиль теряет устойчивость только в положительном направлении оси X.

Также стоит отметить, что время расчета модели с несовершенствами, внесенными по общей форме потери устойчивости, значительно превышает время расчета таких же моделей, но с несовершенствами, внесенными по местной форме потери устойчивости (столбцы 3, 7, 9 таблицы 2 а; столбцы 3, 5 таблицы 2 б). Это связано с проблемами сходимости задачи, обусловленными местной потерей устойчивости. В случае введения в модель несовершенств по местной форме, локальная потеря устойчивости происходит постепенно, т.к. геометрия изначально «подготовлена» под будущую форму местной потери устойчивости. Когда же мы имеем дело с несовершенствами, внесенными по общей форме потери устойчивости, с достижением соответствующей нагрузки потеря местной устойчивости происходит стремительно, что влечет за собой трудности сходимости.

Следует отметить, что для всех исследуемых конфигураций профилей первой общей формой потери устойчивости является изгибная форма.

Результаты первого этапа расчетов представлены на графике 1. Критическая сила, полученная по результатам компьютерного моделирования, принята с коэффициентом запаса $\gamma_e=1.3$. Также с целью продемонстри-

ровать влияние местной потери устойчивости на графике показаны результаты инженерного расчета по СНиП [8] (в расчетах принималось полное, нередуцированная площадь профиля). Как видно из графика, с увеличением длины (гибкости) влияние местной потери устойчивости на результат сводится к минимуму. Значительное расхождение результатов можно видеть в области относительно небольших длин, где первой формой потери устойчивости по линейному расчету является местная потеря устойчивости.

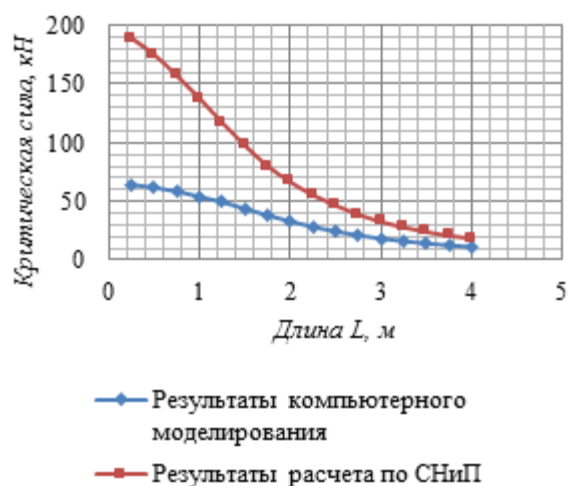


График 1. Сравнение результатов расчета.

6. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Второй этап включает в себя расчеты по определению критической силы для различных конфигураций профилей. В ходе расчета варьировались геометрические характеристики поперечного сечения: высота стенки H – 152; 203; 254; 305 мм; ширина фланцев B – 41.3; 50.8; 63.5 мм; толщина металла t – 1.0; 1.5; 2.0 мм; длина профиля L – 0.5; 1.5; 2.75; 4.0 м. Все расчеты велись в программном комплексе ANSYS с дальнейшей статистической обработкой результатов в постпроцессоре /PDS (Probabilistic Design System). В ходе обработки за «входные» параметры были выбраны ранее оговоренные геометрические

характеристики, за переменный «выходной» параметр – значение критической силы. Целью второго этапа являлось получение упрощенной формулы расчета критической силы, а также оценка влияния «входных параметров» на результат.

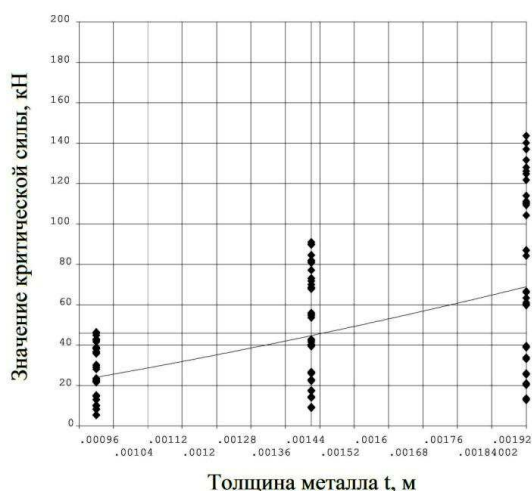
На основе статистического анализа была получена приближенная формула для оценки критической силы:

$$F_{cr} = 39.0 + 18.4t_{sc} + 8.44B_{sc} - 26.2L_{sc} + 1.19t_{sc}^2 + 5.84L_{sc}^2 + 3.57t_{sc}B_{sc} - 10.9t_{sc}L_{sc} - 0.79B_{sc}L_{sc} \quad [\text{кН}] \quad (1)$$

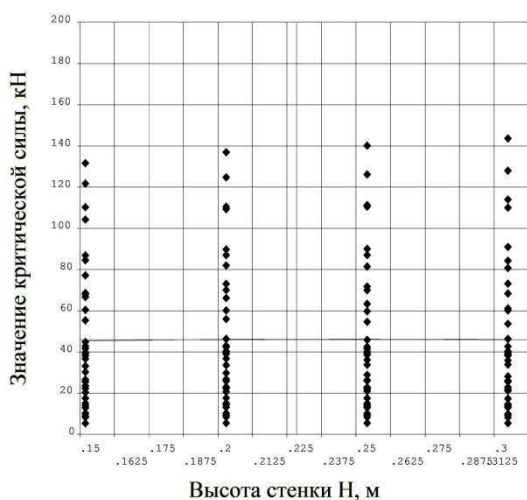
, где $t_{sc} = 2441t - 3.66$; $B_{sc} = 110B - 5.68$; $L_{sc} = 0.76L - 1.66$; (все размеры в м).

В формуле (1) вместо натуральных используются «кодированные» значения «входных» параметров – t_{sc} , B_{sc} , L_{sc} [9]. Благодаря такой замене выравниваются интервалы варьирования отдельных факторов, что в свою очередь позволяет оценивать степень влияния «входных» параметров на значение критической силы. Оценка влияния осуществляется по соответствующим коэффициентам формулы (1) при интересующем «входном» параметре. Проанализировав формулу (1), можно прийти к выводу, что решающую роль играет длина профиля L , затем следует толщина металла t и ширина фланцев B . Высота стенки профиля H оказалась слабо влияющим параметром, и была исключена из анализа. Данные зависимости подкрепляются графиками распределения значений критической силы (см. график 2 а, б, в, г). На каждом графике построена линия тренда, по уклону которой можно судить о степени влияния того или иного «входного» параметра на значение критической силы. Линия тренда графика 2 а) демонстрирует положительную линейную зависимость между значением критической силы и толщиной металла t .

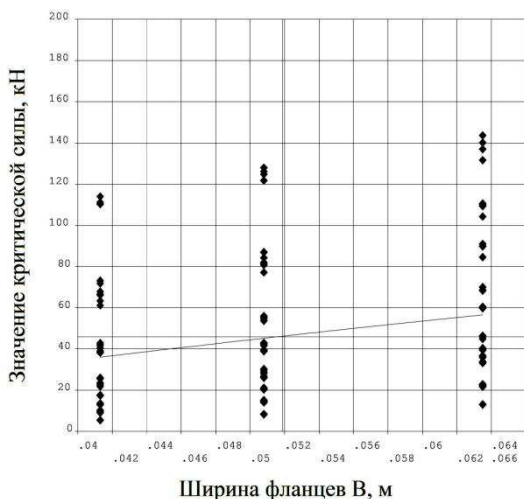
Определение несущей способности легких стальных тонкостенных конструкций на основе компьютерного моделирования



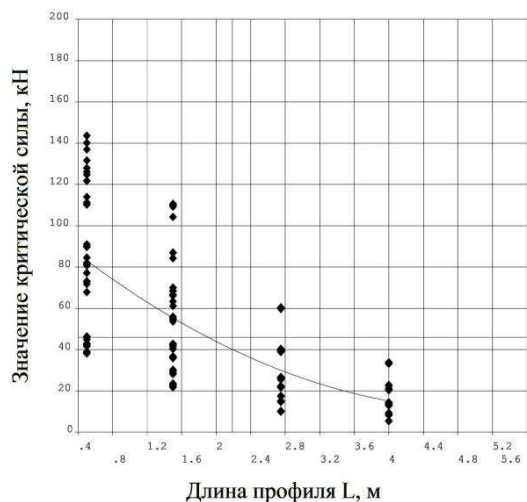
а)



б)



в)



г)

Графики 2. Зависимость критической силы от: а) толщины металла t ; б) высоты стенки H ; в) ширины фланцев B ; г) длины профиля L .

Такая же зависимость наблюдается на графике 2 в), но уклон линии значительно меньше, т.е. «чувствительность» критической силы к толщине металла t выше, чем к ширине фланцев B . Обратное влияние имеет длина профиля L , о чем свидетельствует отрицательный уклон линии тренда на рисунке 2 г). Причем зависимость имеет нелинейный характер – с увеличением длины уклон линии тренда и, следовательно, влияние параметра на значение критической силы уменьшаются. Наконец, линия тренда на графике 2 б) имеет «нулевой» уклон, что подтверждает вывод о незначительном влиянии высоты стенки H на значение критической силы.

Незначительность влияния высоты стенки можно объяснить тем, что с ее ростом также увеличивается гибкость и, как следствие, большая часть сечения теряет местную устойчивость. Независимо от высоты стенки «эффективными», т.е. не подверженными местной потере устойчивости, остаются практически идентичные участки сечения. Для сравнения на рис. 7 приведены два профиля с разной высотой стенки H – 152 и 305 мм. По результатам расчета по Eurocode [7], «эффективна» практически одинаковая часть стенок: 31.4 и 33.1 мм (погрешность 5%).

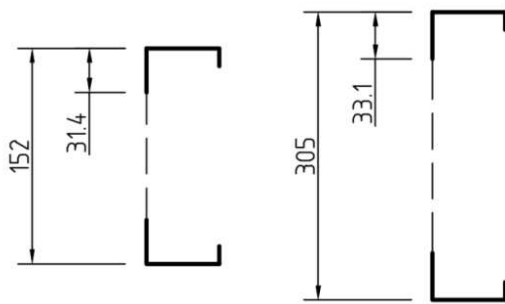


Рисунок 7. Эффективные участки сечения.

ВЫВОДЫ

В статье была рассмотрена техника компьютерного моделирования легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) по деформированной схеме с привлечением программного комплекса ANSYS. Проанализировано влияние начальных геометрических несовершенств на значение критической силы. На основе анализа сделан вывод, что вследствие смещения центра тяжести «эффективного» сечения, существует предрасположенность С-образного профиля терять устойчивость в положительном направлении оси X. Установлено, что с уменьшением толщины металла t , увеличением высоты стенки H и ширины фланцев B величина смещения центра тяжести растет. Так же посредством сравнения полученных результатов с результатами ручного расчета по СНиП [8] продемонстрировано влияние местной потери устойчивости на значение критической силы. Проведена серия расчетов с дальнейшей статистической обработкой, по результатам которой получена формула для предварительной оценки критической силы в ранее оговоренных геометрических диапазонах «входных» параметров. Сделаны выводы: 1) о существовании положительной линейной зависимости между значением критической силы и толщиной металла t , а так же шириной фланцев B ; 2) о существовании отрицательной нелинейной зависимости между значением критической силы и длиной профиля L ; 3) о несущественности влияния высоты стенки H на критическую силу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голубев К.В., Федотов К.А.** Проблемы использования новых технологий малоэтажного домостроения. // «Вестник ПНИПУ. Урбанистика», №3, 2003.
2. Gunalan S., Bandula Neva Y., Mahendran M. Cold-formed steel columns subject to local buckling at elevated temperatures - Steel Innovations Conference 2013 Christchurch, New Zealand 21-22 February 2013
3. Eurocode 3: Design of steel structures — Part 1-1: General structural rules
4. Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81*).
5. **Schafer B.W., Peköz T.** Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses. // Journal of Constructional Steel Research, 47, 1998.
6. **Rondal J., Dubina D., Ungureanu V.** Imperfections and computational modelling of cold-formed steel members.
7. Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 1-5: Plated structural elements.
8. СНиП II-23-81* Стальные конструкции.
9. **Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Издательство «Наука», 1976.

Кашеварова Галина Геннадьевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361; e-mail: ggkash@mail.ru

Косых Павел Андреевич, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: paolo_07@list.ru

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА В КОНТЕКСТЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ПОВРЕЖДЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ

Г.Г. Кашеварова, М.Н. Фурсов, Ю.Л. Тонков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

АННОТАЦИЯ: Аппарат теории нечетких множеств является полезным инструментом при оценке технического состояния строительных конструкций и создании моделей принятия решений. В данной статье приведены примеры наиболее рациональных методов построения функций принадлежности в контексте задачи диагностики повреждений железобетонных плит, позволяющие понять суть этих методов. Железобетонные плиты выбраны в качестве прототипа полной версии экспертной системы диагностики технического состояния строительных конструкций.

Ключевые слова: теория нечетких множеств, функции принадлежности, строительные конструкции, техническое состояние железобетонных плит

THE CONSTRUCTION OF FUZZY SET MEMBERSHIP FUNCTIONS IN THE CONTEXT OF DAMAGE DIAGNOSTICS CONCRETE SLAB

Galina G. Kashevarova, Mihail N. Fursov, Yuri L. Tonkov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

ABSTRACT: Mechanism of fuzzy sets theory is the useful tool when assessing the technical condition of constructions and creating decision-making models. This article provides examples of best practices for constructing membership functions in the context of the problem of diagnosing damage to concrete slabs, allowing to understand the essence of these methods. Reinforced concrete slabs are taken as a prototype of diagnostic expert system full version of technical condition of constructions.

Key words: theory of fuzzy sets, membership functions, building constructions, technical condition of concrete slabs

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка технического состояния строительных конструкций представляет собой один из важнейших этапов системы инженерного обследования зданий и сооружений. Опытные эксперты подчеркивают недостаточность четких рекомендаций по принятию обоснованных решений о техническом состоянии конструкций и зданий в целом, закрепленных в действующих нормативных документах, отсутствие связи между нормативными доку-

ментами, недостаточность сформулированных критериев оценки, немногочисленность и ограниченность признаков отнесения конструкций и здания в целом к той или иной категории технического состояния.

В настоящее время многие исследователи, в том числе и в строительной отрасли, успешно применяют для решения подобных задач технологию искусственного интеллекта, о чем свидетельствуют зарубежные и российские публикации [1 - 7].

В начале восьмидесятых годов в исследованиях по искусственному интеллекту сформировалось самостоятельное направление, получившее название "экспертные системы" (ЭС), которые обычно ориентированы на решение определенного круга задач в узкой предметной области, и не могут быть применены для решения близких, но не предусмотренных при их создании, проблем.

Процессу разработки любой ЭС предшествует анализ наиболее типичных методов и средств их разработки, который проводится, исходя из следующих аспектов: общая характеристика проблемной области, для которой создается ЭС; способы и этапы решения отдельных задач, способы обработки информации на каждом этапе; способы получения знаний от специалистов-экспертов; принципы организации интерфейсов с различными категориями пользователей.

Актуальным в настоящее время является проектирование и разработка *диагностических* ЭС, которые могут содержать знания, позволяющие осуществлять поиск ведущих признаков повреждений строительных объектов среди любого количества дефектов (состояний) при учёте степени их выраженности, соподчинённости и взаимовлияния. Одновременно система должна предоставлять Лицу, принимающему решение (ЛПР), возможность получения пояснений по поводу своей «логики» в процессе формулировки заключения.

Задача получения экспертного заключения о техническом состоянии строительных конструкций сводится к выполнению отображения вида:

$$X = \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow Y \in \{y_1, \dots, y_n\}, \quad (1)$$

где X – вектор параметров состояния диагностируемого объекта или информативных признаков повреждений. Будем называть их аномалиями; $\{y_1, \dots, y_n\}$ – множество возможных причин появления аномалий.

Для диагностируемого объекта аномалии можно подразделить на *аномалии самого объ-*

екта $\{x_1, \dots, x_k\}$ и *аномалии внешней среды объекта* $\{x_{k+1}, \dots, x_m\}$.

Приведем некоторые примеры аномалий и возможные причины их появления.

Аномалии самого объекта: трещины в стенах, сколы, шелушение поверхности, выпадение отдельных камней, отслоение облицовки; конкретные зоны расположения трещин, размеры и вид трещин, большие прогибы конструкций перекрытий на которые установлены стены и т.д.

Аномалии внешней среды объекта: возведение нового здания возле существующего; изменение функционального назначения помещений в здании; близкое расположение фундамента тяжелого оборудования к фундаментам несущих конструкций; применение разных типов фундаментов по длине здания; близкое расположение источников динамического воздействия (ж.д., дороги, трамвайные пути, метро, автодороги и др.); расположение здания вблизи разлива рек, озер, близко к оврагам, котлованам и выработкам и т.п.

Возможные причины возникновения аномалий: разрушение фундаментов в результате изменения системы дренирования вод и понижение уровня грунтовых вод; неравномерная осадка фундаментов в результате просачивания под фундаменты атмосферных осадков; повреждение фундаментов в результате влияния динамических воздействий; деформация здания, под влиянием условий строительства и эксплуатации; влияние динамических воздействий близко расположенных строительных площадок и т.п.

На показатели оценки технического состояния конструкции влияет большое количество *качественных* (условия эксплуатации, видимые повреждения, наличие дефектов строительства и др.) и *количественных* факторов (фактические и расчетные величины прогибов, ширины раскрытия трещин, прочность бетона и др.). В определении как количественных, так и качественных признаков состояния конструкции всегда присутствует некоторая погрешность, связанная с неопределенностью параметров, что делает предпочти-

тельным при создании ЭС переход от формальной логики – к нечеткой логике. При этом иерархическую взаимосвязь между параметрами состояния и причинами возникновения аномалий целесообразно задавать нечеткими базами знаний.

Идентификация зависимости (1) должна опираться на следующую доступную информацию:

- выборку экспериментальных и теоретических данных «параметры состояния → причина возникновения аномалии»;
- экспертные знания специалистов – исследователей в форме лингвистических правил «если → то».

Очень важным оказывается то, что диагностика может проводиться по неполному списку диагностических критериев, при не полностью развившемся признаке дефекта и при ограничениях на проведение лабораторных, функциональных исследований.

Методология разработки экспертных систем предполагает цикл последовательной разработки *прототипов с их верификацией* на каждом этапе (итеративный подход), требующий больших трудозатрат.

Прототип должен удовлетворять двум противоречивым требованиям: с одной стороны, он должен решать типичные задачи конкретного приложения, а с другой - время и трудоемкость его разработки должны быть весьма незначительны, чтобы можно было максимально запараллелить процесс накопления и отладки знаний с процессом выбора (разработки) программных средств. Прототип должен продемонстрировать пригодность методов инженерии знаний для данного приложения. По мере увеличения знаний прототип должен достигнуть такого состояния, когда он успешно решает все задачи данного приложения.

В качестве прототипа (фрагмента) полной версии ЭС диагностики технического состояния строительных конструкций на данном этапе была выбрана проблема *диагностики повреждений железобетонных плит*, как типичная в рамках поставленной задачи. При

успешной реализации выбранного фрагмента ЭС, количество конструкций, которые могут быть подвергнуты экспертизе при помощи ЭС может быть увеличено с меньшими трудозатратами путем масштабирования системы при помощи комплекса эффективных методов, сформированного на данном этапе.

2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

При создании моделей принятия решений полезным инструментом является аппарат теории нечетких множеств. Под принятием решений понимается выбор одной альтернативы из полученного или заданного множества альтернатив. Основоположителем применения инструментария теории нечетких множеств является Л.А. Заде (1965 г.) [8].

Применение этой теории и её приложений позволяет строить формальные схемы решения задач, характеризующиеся той или иной степенью неопределенности, которая может быть обусловлена неполнотой, внутренней противоречивостью, неоднозначностью и размытостью исходных данных, представляющих собой приближенные количественные или качественные оценки параметров объектов. С увеличением размеров и сложности системы существенно усложняется ее моделирование с помощью известных математических выражений. Вместо этого Л.А. Заде предложил лингвистическую модель, которая использует не математические выражения, а слова. Человек, проектирующий ЭС, создает из правил в словесном представлении конкретные функции принадлежности. Обычно он определяет их значения методом вопросов и ответов; поручает эксперту выполнение операций и воссоздает ситуацию из хронометрированных данных; корректирует значения функции принадлежности, получая наилучшие результаты из экспериментов, предыдущего опыта, имитирующих данную ситуацию.

Этот подход позволяет дать строгое математическое описание расплывчатых утверждений, реализуя, таким образом, попытку преодолеть лингвистический барьер между человеком, суждения и оценки которого являются приближенными и нечеткими, и компьютером, который может выполнять только четкие инструкции. Число правил в случае нечетких ЭС на порядок меньше, чем в ЭС с четкими правилами.

Проектирование прототипа на основе нечеткой логики требует рассмотрения методов построения функций принадлежности.

Функция принадлежности $\mu_A(x)$ количественно градуирует принадлежность элементов фундаментального множества пространства рассуждения $x \in X$ нечеткому множеству A . Значение 0 означает, что элемент не включен в нечеткое множество, 1 - описывает полностью включенный элемент. Значения между 0 и 1 характеризуют нечетко включенные элементы

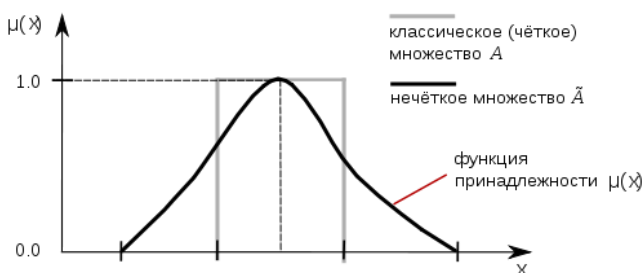


Рисунок 1. Нечёткое множество и классическое, четкое (crisp) множество

Здесь нечеткое множество определяется как

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\}$$

С практической точки зрения с каждым нечетким множеством удобно ассоциировать некоторое свойство, признак или атрибут, которые характеризуют рассматриваемую совокупность объектов.

По аналогии с классическими множествами рассматриваемое свойство может порождать некоторый предикат, который называют нечетким предикатом. Этот нечеткий предикат

может принимать не одно из двух значений истинности («истина» или «ложь»), а целый континуум значений истинности, которые для удобства выбираются из интервала $[0, 1]$. При этом значению «истина» по-прежнему соответствует число 1, а значению «ложь» - 0.

Функция принадлежности задается вне самой теории нечетких множеств, и ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами этой теории.

Существуют разные методы построения функции принадлежности нечеткого множества (прямые и косвенные), в каждом из которых формулируются свои требования и обоснования именно такого построения. При решении реальной задачи необходимо выбрать наиболее рациональные из них, которые зависят от характера неопределенности конкретных нечетких моделей.

Оптимальными, с точки зрения трудозатрат при разработке первого прототипа, являются *прямые методы*, в которых функции принадлежности задаются графиком, формулой или таблицей (табл.1) [7, 9, 10].

Как правило, прямые методы используются для свойств, которые могут быть измерены в некоторой количественной шкале. Эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности $\mu_A(x)$, характеризующей элемент x . Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве элементов X следующим образом [11, 12]:

1. Для любых $x_1, x_2 \in X$, $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_2 предпочтительнее x_1 , т.е. в большей степени характеризуется свойством A ;
2. Для любых $x_1, x_2 \in X$, $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 безразличны относительно свойства A [10].

Таблица 1. Наиболее распространенные параметрические функции принадлежности.

Наименование функции	Аналитическое выражение	Интерпретация параметров	График функции
Треугольная	$\mu(u) = \begin{cases} 0, & u \leq a \text{ или } u \geq c \\ \frac{u-a}{b-a}, & a < u \leq b \\ \frac{c-u}{c-b}, & b < u < c \end{cases}$	(a, c) – носитель нечеткого множества – пессимистическая оценка нечеткого числа; b – координата максимума – оптимистическая оценка нечеткого числа	
Трапецевидная	$\mu(u) = \begin{cases} 0, & u \leq a \text{ или } u \geq d \\ \frac{u-a}{b-a}, & a \leq u \leq b \\ 1, & b \leq u \leq c \\ \frac{d-u}{d-c}, & c \leq u \leq d \end{cases}$	(a, d) – носитель нечеткого множества – пессимистическая оценка нечеткого числа; (b, c) – ядро нечеткого множества – оптимистическая оценка нечеткого числа	
Гауссова	$\mu(u) = \exp\left(-\frac{u-b^2}{2c^2}\right)$	b – координата максимума c – коэффициент концентрации	
Сигмоидная	$\mu(u) = \frac{1}{1 + \exp(-a(u-c))}$	a – коэффициент концентрации c – координата перехода через 0,5	
Синглтонная	$\mu(u) = \begin{cases} 1, & u = a \\ 0, & u \neq a \end{cases}$	a – четкое число, представляемое в виде нечеткого множества	

Процесс построения или задания нечеткого множества на основе некоторого известного заранее количественного значения измеримого признака называется фаззификацией, или приведением к нечеткости. При этом подразумевается, что хотя в большинстве случаев известно некоторое значение измеряемой величины, допускается тот факт, что это значение может быть неточным. Чем меньше уверенность в точности измерения признака, тем большим будет интервал носителя соответствующего нечеткого множества.

3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Понятие множества принадлежит к числу первоначальных математических понятий и может быть пояснено только с помощью примеров.

Пример задания функции принадлежности *графическим способом* в контексте задачи диагностики повреждений железобетонных плит.

На показатели оценки технического состояния конструкции влияет наличие трещин. Ширина их раскрытия и длина являются количественными факторами и могут быть определены либо в результате замеров, либо расчетов.

О достижении растянутой арматурой предела текучести можно судить по ширине раскрытия трещин на уровне арматуры. При этом нужно знать не только ширину раскрытия трещин, но и расстояние между ними (см. табл. 2) [13].

В данном случае сначала следует построить функцию принадлежности для лингвистической переменной: «Показатель расстояния между трещинами».

Универсальное множество: $0 \dots +\infty$ мм.

Совокупность нечетких термов: очень низкий (ОН), низкий (Н), средний (С), высокий (В), очень высокий (ОВ).

Таблица 2. Ширина раскрытия трещин в зависимости от расстояния между ними, при достижении в арматуре предела текучести

Классы арматуры	Расстояние между трещинами, мм				
	50	100	150	200	250
A240	0,06	0,1	0,2	0,2	0,3
A300	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
A400	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6
A600	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7
A800	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8
A1000	0,2	0,4	0,6	0,9	1,1
Bp1400	0,2	0,4	0,6	0,9	1,1
K1500	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

Графическое изображение функции принадлежности показано на рисунке 3.1.

Показатель расстояния между трещинами

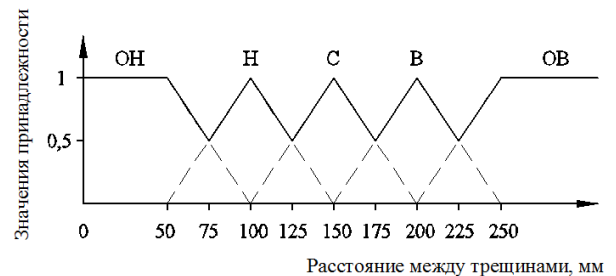


Рисунок 2. Задание функции принадлежности лингвистической переменной «Показатель расстояния между трещинами»

Затем для каждого класса арматуры *при разных расстояниях между трещинами* всей совокупности нечетких термов (ОН, Н, С, В, ОВ) нужно построить функции принадлежности для лингвистических переменных: «Показатель ширины раскрытия нормальных трещин» (всего 45 функций). Для иллюстрации на рис. 3.2. показаны некоторые из них.

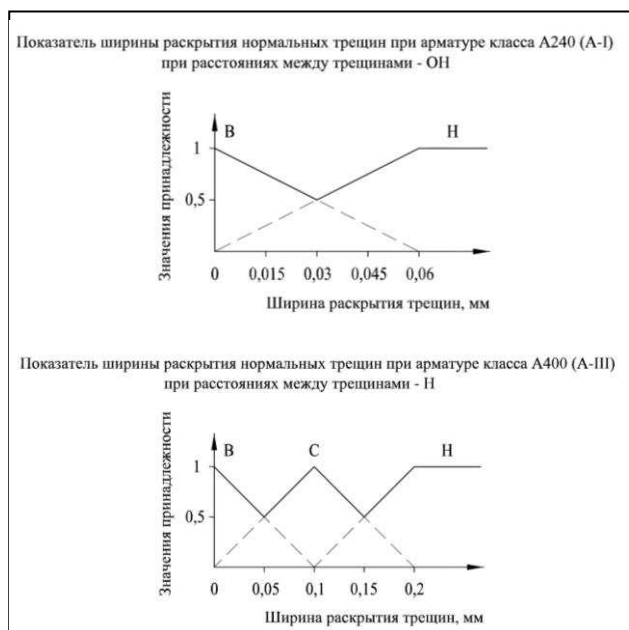


Рисунок 3. Задание функции принадлежности лингвистической переменной «Показатель ширины раскрытия нормальных трещин»

Следует обратить внимание на то, что при малых расстояниях между трещинами текучесть в арматуре будет наблюдаться при раскрытии трещин значительно меньшем, чем предусмотрено Нормами [14] из условия обеспечения сохранности арматуры некоторых классов.

При прямом построении функций принадлежности следует учитывать то обстоятельство, что теория нечетких множеств не требует абсолютно точного задания функций принадлежности. Зачастую бывает достаточно зафиксировать лишь наиболее характерные значения и вид (тип) функции принадлежности [9].

Так, например, если необходимо построить нечеткое множество для такого показателя, как «длина трещины около 50 мм», на начальном этапе его можно представить треугольной функцией принадлежности с параметрами $a = 40$ мм, $b = 50$ мм, $c = 60$ мм.

Аналогично, в случае построения нечеткого множества для показателя «длина трещины находится приблизительно в пределах 50 -

60 мм», на начальном этапе может оказаться достаточным представить соответствующее нечеткое множество трапециевидной функцией с параметрами $a = 45$ мм, $b = 50$ мм, $c = 60$ мм, $d = 65$ мм. В последующем функция принадлежности может быть уточнена опытным путем на основе анализа результатов решения конкретных задач.

Модели принятия решений чаще всего представляют собой приближенные качественные оценки. И здесь также полезным инструментом является аппарат теории нечетких множеств.

Пример задания функции принадлежности таблицей.

Для лингвистической переменной «Показатель освидетельствования прочности бетона» в таблице 3 представлена совокупность нечетких термов и универсальное множество диагностических признаков на этапе визуального обследования, а в таблице 4 - приведены функции принадлежности этих диагностических признаков к нечетким термам.

Таблица 3. Совокупность нечетких термов и универсальное множество лингвистической переменной «Показатель освидетельствования прочности бетона»

Нечеткий терм	Обозначение термина	Диагностический признак
1	2	3
I Очень высокий	ОВ	При простукивании бетона издается звонкий звук. Следов и сколов при ударах и царапании не остается.
II Высокий	В	При простукивании бетона издается звонкий звук. Остаются малозаметные (в мм) сколы. При царапании остаются малозаметные штрихи.
III Средний	С	При простукивании бетона издается довольно звонкий звук. Остаются заметные следы при царапании и ударах.

1	2	3
IV Низкий	H	При простукивании бетона присутствует глухой звук в сочетании со звонким. Заостренные предметы (зубило) вбиваются в бетон на глубину до 10 мм. Остаются заметные сколы.
V Очень низкий	OH	При простукивании бетона издается только глухой звук, заостренные предметы (зубило) довольно легко вбиваются в бетон на глубину 20 мм и более. Остаются глубокие сколы.

Таблица 4. Функции принадлежности диагностических признаков к нечетким термам

Обозначение терма	OB	B	C	H	OH
OB	1	0,2	0	0	0
B	0,2	1	0,5	0	0
C	0	0,5	1	0,6	0,1
H	0	0	0,6	1	0,7
OH	0	0	0,1	0,7	1

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенного обзора литературы и рассмотренных примеров, позволяющих пояснить методы построения функций принадлежности, можно сделать следующие выводы:

1. В соответствии с существующей методологией разработки экспертных систем, представляющей цикл последовательной разработки прототипов с их верификацией на каждом этапе, *оптимальными*, с точки зрения трудозатрат на разработку первого прототипа, являются *прямые методы* построения функций принадлежности.
2. На рассмотренных примерах в контексте задачи *диагностики поврежденных железобетонных плит*, показаны наиболее рациональные методы построения функций принадлежности нечетких термов.
3. Эти методы впоследствии могут быть оптимизированы с помощью генетических алгоритмов, до получения заданного разработчиком и экспертом уровня точности диагностики. Под этим подразумевается ограничение по количеству циклов отработки генетического алгоритма оптимизации, т.к. а priori, невозможно однозначно определить, достигим ли задаваемый уровень для данной модели представления знаний и способа задания функций принадлежности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bernardini A., Gori R, Modena C.** Application of Coupled Analytical Models and Experiential Knowledge to Seismic Vulnerability Analyses of Masonry Buildings. In Earthquake Damage Evaluation and Vulnerability Analysis of Building Structures. (Ed. A.Koridze). England: Omega Scientific.- 1990.- P. 161-180.
2. **Bernardini A., Modena C.** Application of the Fuzzy Sets Theory to the Reliability Evaluation of Structural Systems. In Proc. of Inter. Symposium on Fuzzy Systems and Knowledge Engineering. China, Guangdong.- 1987.- P.541-548.
3. **Почтаман Ю.М., Милов В.Ю.** Нечеткая постановка задачи оптимального проектирования конструкций, воздействующих с агрессивными средами // Известия вузов. Строительство и архитектура. — 1990. — №11. — С. 7-11.
4. **Koenraad E.P. Van Balen.** Learning from damage of masonry structures, expert systems can help! Historical Constructions, P.V. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães, 2001.

5. **Панкевич О.Д., Штовба С.Д., Штовба Д.П.** Диагностика причин трещин строительных конструкций на основе мягких вычислений // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2004. – Вип. 69 “Сучасні проблеми проектування, будівництва та експлуатації споруд на шляхах сполучення”. – С. 179–184.
6. **Соколов В.А.** Диагностика технического состояния конструкции зданий и сооружений с использованием методов теории нечетких множеств // Инженерно-строительный журнал. – 2010. - №5 – с. 31-37.
7. **Захаров В.А.** О выборе методов построения функций принадлежности для формализации задач принятия решений // Лаборатория специального математического и программного обеспечения (СМПО). Научно-исследовательский центр (НИЦ) ВА В ПВО ВС РФ, 2006 – 120 с.
8. **Lotfi Zadeh.** From computing with numbers to computing with words — from manipulation of measurements to manipulation of perceptions in International Journal of Applied Math and Computer Science, pp. 307–324, vol. 12, no. 3, 2002.
9. **Штовба С.Д.** Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. - М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
10. **Леоненков А.В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и FuzzyTECH. – Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург», 2005. – 736 с.
11. **Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П.** Принятие решения на основе нечетких моделей: примеры использования. – Рига: ”Знание”, 1990. - 184 с.
12. **Круглов В.В., Борисов В.В.** Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001.
13. **Гроздов В.Т.** Признаки аварийного состояния несущих конструкций зданий и сооружений. Спб, Издательский Дом KN+, 2000. 48 с.
14. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. «Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 – Москва: Минрегион России, 2011 — 155 с.

Кашеварова Галина Геннальевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614010, г. Пермь, ул. Куйбышева, 109, тел. +7(342) 2198361, e-mail: gkgash@mail.ru .

Фурсов Михаил Николаевич, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, тел. +7(342) 2198361, e- mail: m.fursov@bk.ru

Тонков Юрий Леонидович, аспирант кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, тел. +7(342) 2198361, e- mail: 95081@mail.ru .

ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРОВ С ЗАДАННОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЬЮ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

О. В. Мкртычев, П.И. Андреева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается проблема построения с заданной обеспеченностью спектров реакции одномассового линейного осциллятора на акселерограммы землетрясений. При обработке записей инструментальных акселерограмм, используется прямой динамический метод интегрирования уравнения движения системы с одной степенью свободы. Доверительная вероятность определяется методами теории вероятностей и математической статистики.

Ключевые слова: сейсмостойкость, динамические характеристики, акселерограмма, землетрясение, спектр ускорений, коэффициент динамичности, собственные колебания.

PROBLEM OF FORMATION OF SPECTRA WITH ADJUSTED RELIABILITY TAKING INTO ACCOUNT AN EARTHQUAKE

Oleg V. Mkrtychev, Peraskovya I. Andreeva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article is dedicated to the problem of modeling spectra with the adjusted reliability of reaction of the single-mass linear oscillator to earthquake accelerograms. When processing records of instrumental accelerograms the specialists use the direct dynamic method of integrating the equations of motion of the system with one degree of latitude. The confidence level is determined by the means methods of probability theory and mathematical statistics.

Key words: seismic stability, dynamic characteristics, accelerogram, earthquake, range of acceleration, the dynamic factor, natural oscillations.

Расчеты на сейсмостойкость зданий и сооружений в России рекомендуются проводить по спектральной теории, которая лежит в основе СНиП II-7-81 «Строительство в сейсмических районах». В этих нормах коэффициент динамичности β_i предлагается определять по графикам рис.1 или по формулам (1) и (2) в зависимости от расчетного периода собственных колебаний T_i здания или сооружения по i - й форме. Для грунтов категорий I и II по сейсмическим свойствам (кривая 1) при:

$$\begin{aligned} T_i \leq 0,1 \text{ с} & \quad \beta_i = 1 + 15 T_i; \\ 0,1 \text{ с} < T_i < 0,4 \text{ с} & \quad \beta_i = 2,5; \\ T_i \geq 0,4 \text{ с} & \quad \beta_i = 2,5(0,4/T_i)^{0,5}; \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно СНиП II-7-81 к грунтам категории I по сейсмическим свойствам относятся: всех видов скальные грунты (вечномерзлые оттаявшие и вечномерзлые) слабовыветрелые и невыветрелые; крупнообломочные грунты плотные маловлажные из магматических пород, содержащие до 30 % песчано-глинистого заполнителя; выветрелые и сильновыветрелые скальные и нескальные твер-

домерзлые (вечномерзлые) грунты при температуре минус 2°C и ниже при строительстве и эксплуатации по принципу I (сохранение грунтов основания в мерзлом состоянии). Грунты категории II: выветрелые и сильновыветрелые скальные грунты, в том числе вечномерзлые, грунты крупнообломочные, за исключением грунтов, отнесенных к I категории; мелкие пески и пылеватые плотные и средней плотности маловлажные; пески гравелистые, крупные и средней крупности плотные и средней плотности маловлажные и влажные; глинистые грунты при коэффициенте пористости $e < 0,9$ для глин и суглинков и $e < 0,7$ - для супесей с показателем консистенции $I_L \leq 0,5$; вечномерзлые нескальные грунты пластичномерзлые или сыпучемерзлые, твердомерзлые при температуре выше минус 2°C при строительстве и эксплуатации по принципу I. [3,4]

Для грунтов III-й категории по сейсмическим свойствам (независимо от влажности и крупности рыхлые пески; пески мелкие и пылеватые плотные и средней плотности влажные и водонасыщенные; гравелистые, крупные и средней крупности плотные и средней плотности водонасыщенные пески; глинистые грунты с показателем консистенции $I_L > 0,5$; глинистые грунты при коэффициенте пористости $e \geq 0,9$ для глин и суглинков и $e \geq 0,7$ - для супесей с показателем консистенции $I_L \leq 0,5$; вечномерзлые нескальные грунты при строительстве и эксплуатации по принципу II (допускается оттаивание грунтов основания) – кривая 2 при [3,4]:

$$\begin{aligned} T_i \leq 0,1 \text{ с} & \quad \beta_i = 1 + 15 T_i; \\ 0,1 \text{ с} < T_i < 0,8 \text{ с} & \quad \beta_i = 2,5; \\ T_i \geq 0,8 \text{ с} & \quad \beta_i = 2,5(0,8/T_i)^{0,5}; \end{aligned} \quad (2)$$

Во всех случаях значения β_i должны приниматься не менее 0,8.

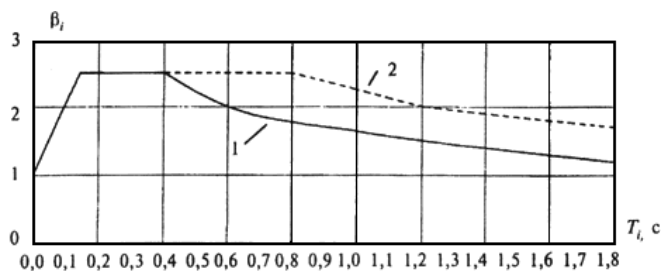


Рисунок 1. Зависимость коэффициента динамичности β_i от периода собственных колебаний T_i .

Представленный график должен представлять огибающую спектров ускорений землетрясений различной балльности, зарегистрированных в различных районах страны при различных грунтовых условиях. Однако является ли этот спектр огибающим, какова обеспеченность данного спектра? Ответов на эти вопросы нет. На протяжении многих десятилетий этот график неоднократно подправлялся, однако, оставался без принципиальных изменений и обоснований. За прошедшие десятилетия накоплен большой материал по записям акселерограмм реальных землетрясений средней и низкой балльности; меньше записей акселерограмм сильных землетрясений вследствие их редкой повторяемости. В связи с этим возникает актуальный вопрос о вероятностной обеспеченности того или иного спектра в тех или иных грунтовых условиях, а также удаленности от предполагаемых эпицентров землетрясений. Как показывает опыт, для каждого значения периода T_i графиков рис.1 в этом спектре реализована разная обеспеченность. Анализ подтверждает, что это неверно даже для одного сооружения, т.к. для разных частот собственных колебаний одного и того же сооружения будем иметь разную обеспеченность. Данное обстоятельство ставит вопрос о необходимости построения спектров с заданной обеспеченностью. Для решения данной задачи необходимо обработать большое количество акселерограмм реальных землетрясений, записи которых имеются в базах данных Института Физики Земли РАН, Гео-

логической службы США и в соответствующих институтах других стран.

Методика построения спектров с заданной обеспеченностью заключается в следующем. Выделяем на акселерограмме землетрясения амплитуду максимального ускорения и соответствующую ей частоту. Проводим расчет одномассового линейного осциллятора с помощью уравнения движения. Затем делим максимальное ускорение реакции линейного осциллятора на максимальное ускорение исходной акселерограммы и получаем коэффициент динамичности β_i . Таким образом, обрабатываем достаточно большую группу записей акселерограмм, относящихся примерно к одинаковым грунтовым условиям и удаленности от эпицентров землетрясений. При этом надо иметь в виду, что акселерограмма представляет собой нестационарный случайный процесс. Пиковое значение акселерограммы, которая является случайной величиной, распределенной по некоторому закону, может рассматриваться как характеристика случайного процесса. Соответственно, коэффициенты динамичности β_i также являются случайными величинами. Применив к полученному числовому массиву методы теории вероятностей и математической статистики, можно получить параметры распределения β_i и по ним построить спектры с заданной обеспеченностью и, таким образом, решить поставленную задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А., Бусалова М.С.** Моделирование взаимодействия сооружения с основанием при расчете на землетрясение // Вестник МГСУ, 2013, №12, с. 34-40.
2. **Мкртычев О.В., Решетов А.А.** Применение вейвлет-преобразований при анализе акселерограмм // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Vol. 7, Issue 3, 2011, pp. 118-126.

3. СНиП II-7-81 Строительство в сейсмических районах. – М.:ГУП ЦПП, 2002. – 44 с.
4. СП 14.13330.2011 Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. М.: ОАО "ЦПП", 2011. – 167 с.
5. **Андреева П. И., Ковальчук О. А.** Сравнительный анализ результатов экспериментальных натурных динамических исследований и расчета динамических характеристик высотного жилого здания // Computational Civil and Structural Engineering, 2012, Volume 8, pp. 13-18.
6. **Clough R, Penzien J.** Dynamics of Structures. Berkeley, CA 94704 USA: Computers & Structures, 1995, p. 730

Мкртычев Олег Варганович, доктор технических наук, профессор кафедры Сопrotивления материалов ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
e-mail: mkrtychev@yandex.ru

Андреева Перасковья Ивановна, аспирант кафедры Сопrotивления материалов ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
e-mail: p.andreeva_90@mail.ru

Mkrtychev Oleg Vartanovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavl'skoe Shosse, 26,
e-mail: mkrtychev@yandex.ru

Andreeva Peraskovya Ivanovna, postgraduate student, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, Yaroslavl'skoe Shosse, 26;
e-mail: p.andreeva_90@mail.ru

ПРОБЛЕМА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ ЦИФРОВОГО МОНИТОРИНГА ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

В.И. Прокопьев, М.С. Хлыстунов, Ж.Г. Могилюк

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Проведен анализ нормативных, метрологических и математических требований к достоверности результатов обследований динамических характеристик зданий и сооружений. Рассматривается методическая проблема нарушения критериев метрологической достоверности и математической достаточности данных динамических обследований. Анализируется типовая схема формирования измеряемых векторных полей динамических нагрузок и динамической реакции зданий. Проводится оценка влияния нарушения синфазности на достоверность восстановления истинного направления вектора колебаний.

Ключевые слова: обследование зданий, динамические характеристики, мониторинг, достоверность

THE REGULATORY REQUIREMENTS IMPLEMENTATION METROLOGICAL PROBLEMS FOR BUILDINGS AND CONSTRUCTIONS DYNAMIC SURVEYS

Valery I. Prokopiev, Mihail S. Hlystunov, Ghanna G. Mogilyuk

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: An analysis of the normative and metrological and mathematical requirements to the buildings and constructions dynamic characteristics surveys results reliability. Discusses the criteria violation methodological problem for metrological reliability and adequacy of mathematical dynamic data surveys. Analyzes the measurable vector fields' formation typical scheme of dynamic loads and buildings dynamic response. Assesses the correlation violation influence on the reliability of the vector fluctuations true direction restoration.

Key words: inspection of buildings, performance monitoring, dynamic characteristics, examination, reliability

ВВЕДЕНИЕ

С началом возведения в Москве высотных зданий актуальной стала проблема динамических обследований и мониторинга эволюции параметров технического состояния строительных объектов. Ранее актуальность этой проблемы проявилась при исследованиях, проводившихся на борту космической станции «Мир» [1-4]. Применительно к строительной отрасли требования по критериям динамического обследования высотных зданий и мониторинга эволюции их параметров впервые были сформулированы в

проектах программ научно-технического сотрудничества Министерства образования и науки РФ с Минатомом и ФССС России [5]. В ряде научно-исследовательских работ, выполненных в МГСУ в период 2005-2008 годов в соответствии с решениями Московского конгресса по безопасности мегаполисов [6], были сформулированы рекомендации, вошедшие в нормативные документы в части регламентации порядка проведения динамических обследований [7,8,9]. В настоящей статье приводится анализ нормативных, метрологических и математических требований к достаточности объема данных изме-

рений для обеспечения достоверности результатов мониторинга и обследований динамических характеристик зданий и сооружений.

Соблюдение нормативных рекомендаций требует от специалистов достаточно высокого уровня знаний в области высшей математики, метрологии, а также в области прикладной информатики.

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В каждой точке измерения строительной конструкции здания могут измеряться 6 компонент вектора виброускорений – три линейных компоненты и три угловых (рис. 1).

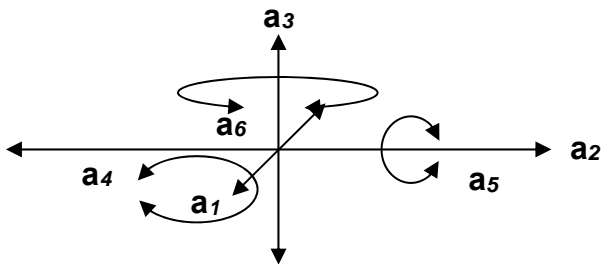


Рисунок 1. Компоненты вектора ускорений или перемещений

Измерение компонент колебаний сопровождаются метрологическими проблемами. Одна из проблем связана с обеспечением синфазности данных измерений, что делает невозможным восстановление истинного направления вектора колебаний. Это приводит к неверному определению направления вектора колебаний в пространстве строительной конструкции [6].

Для восстановления истинного направления и модуля вектора виброускорений необходимо знание сдвига фаз между различными компонентами. Если измерения выполняются в разных точках конструкции при одновременном возбуждении в широкой полосе частот нескольких форм (мод) колебаний конструкции и их гармоник в результате пространственных многоканальных измере-

ний вносятся существенные фазовые искажения за счет неравенства времен воздействия динамических нагрузок в различных точках строительной конструкции. Отметим также, что угловые (крутильные) вибрационные ускорения некоторой n -той точки объекта будут также дополнительно проявляться в виде линейных радиальных (центростремительных) и касательных (тангенциальных) ускорений вдоль осей, перпендикулярных оси кручения.

Для определения или идентификации модального состава результирующего колебания $\mathbf{a}_n(t)$ при проведении динамического обследования объекта необходимо измерение всех 6 векторных компонент виброускорений, зависящих от времени и расстояний точек измерения от осей кручения. При этом полоса частот динамических нагрузок, например, при воздействии микросейсма на строительный объект, и полоса частот его основных мод (форм) колебаний для реальных строительных объектов занимают достаточно широкую область частот от 0,1 до 100 Гц.

Попытки ряда профильных предприятий в России и групп комиссий МАГАТЭ в части проведения динамических обследований зданий и сооружений (известные по отчетной документации) трехкомпонентными датчиками линейных ускорений (скоростей или перемещений) с метрологической точки зрения не обеспечивают получение достоверных данных, то есть не обеспечивают выполнение нормативных требований ГОСТ [7, 8, 9]. В настоящее время в России и за рубежом, не существует и не разработано сертифицированных методических, метрологических и программно-аппаратных средств достоверной идентификации основных резонансных мод колебаний зданий и сооружений и аттестации их декрементов затухания, тем более, для строительных объектов с пересекающимися спектрами резонансных проявлений различных мод возбуждения.

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НОРМАТИВНОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

К числу обязательных параметров обследования несущих строительных конструкций зданий и сооружений относятся периоды и декременты собственных колебаний, передаточные функции объектов, их частей и элементов и др.

Имеется определенная терминологическая некорректность в некоторых разделах нормативной документации. Устоявшимися классическими терминами динамики конструкций и виброметрии являются термины «формы или моды колебаний». Иногда встречающийся термин «тон колебаний» скорее является жаргоном и потому не является корректным. Например, в ГОСТе декларируется необходимость паспортизации основного тона собственных колебаний вдоль вертикальной оси здания и сооружения. Однако, вдоль вертикальной оси здания и сооружения, может быть возбуждена не одна мода или форма колебаний, а две продольные моды упругих колебаний (геодинамическая и конструкционная) и поплачковый резонанс [11, 12]. Но тогда появляется неопределенность применения: «Какую из них регламентирует ГОСТ?». Помимо этих мод колебаний вдоль вертикальной оси могут быть также возбуждены две поперечные, крутильные (торсионные) моды колебаний: конструкционная и геодинамическая. Аналогичные замечания справедливы и по отношению к основным формам колебаний вдоль продольной и поперечной, большой и малой осей здания или сооружения.

Для передаточной функции пространственной конструкции должны быть строго сформулированы требования по положению источника динамического возбуждения и точки регистрации результирующих колебаний конструкции. В реальной конструкции таких пар точек может быть выбрано достаточно большое количество. Поэтому это требование имеет полную «неопределенность» с учетом возможного положения источника

динамических нагрузок в пространстве основания или на территории окружающей застройки. Если даже снять такую неопределенность, остается метрологическая проблема практического достижения достоверности не существующим или не известным сертифицированным экспериментальным способом получения вида передаточной функции. Передаточная функция является лапласовским отображением динамического «портрета» здания, базисным элементом которого является затухающая по экспоненциальному закону гармоника.

Аналогичные неточности и некорректности по паспортизации динамических характеристик не устранены и в рекомендациях [9].

От большинства перечисленных неточностей и некорректностей в ГОСТе и рекомендациях свободно руководство [8]. В основном это достигнуто за счет достаточно общего изложения требований к перечню контролируемых динамических характеристик, а важная и не имеющая сертифицированного практического решения проблема обеспечения синфазности не отражена в этом документе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ метрологических проблем измерений и существующей нормативной документации позволяют утверждать, что актуальные и практически важные задачи метрологического обеспечения достоверной идентификации собственных форм колебаний строительных конструкций, включая высотные здания и АЭС, не нашли своего отражения в научно-технической литературе и в действующих нормативных и нормативно-методических документах промышленного и гражданского строительства.



Рисунок 2. Общий вид станции СВД-60МВ.

До настоящего времени не преодолены методологические проблемы устранения спектральных фантомов, амплитудных и фазовых искажений в цифровых каналах мониторинга, регистрации и первичной обработки векторных динамических параметров [17], отражающих техническое состояние обследуемого объекта. Это обстоятельство до настоящего времени не позволяет сформировать представительную базу данных динамических обследования зданий и сооружений, а также базы данных детального модального сейсмического и микросейсмического районирования урбанизированных (застраиваемых) территорий.

Первые шаги по преодолению этой проблемы были сделаны благодаря проектам, финансируемым правительством Москвы. В частности, в течение 2007-2009 годов были разработаны и прошли опытную эксплуатацию экспериментальные образцы шестиком-

понентных вибродозиметрических станций СВД-60МВ (рис. 2), которые в натуральных условиях подтвердили важность и потенциальную возможность корректной математической и метрологической постановки задачи измерения всех компонент векторных параметров колебаний конструкций [13].

Специалистами ОНИЛ КГК МГСУ был разработан пакет программ «Композит-7» для математически корректного и метрологически достоверного расчета динамических нагрузок в основаниях объектов техносферы по данным полнокомпонентных измерений, полученных с использованием СВД-60МВ.

Была доказана справедливость теоретических и метрологических позиций и разработанных моделей, созданы теоретические и методические основы дальнейшего прикладного развития и внедрения метрологически обоснованных и сертифицированных методов, аппаратуры и нормативных документов

в практику динамического обследования зданий и сооружений [15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Шкляр А.Н.** Векторный анализ бортовых виброграмм ОК «Мир»/Третий Международный аэрокосмический конгресс IAC' 2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000 г. – М.: Международный фонд попечителей Московского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИО, 2000.
2. **Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Шкляр А.Н.** Эффективность применения аттракторов для глобального сжатия микрогравиметрической информации/Третий Международный аэрокосмический конгресс IAC' 2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000 г. – М.: Международный фонд попечителей Московского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИО, 2000.
3. **Никитский В.П., Веселов К.Е., Вольфсон Г.Б., Хлыстунов М.С.** Метрологический кризис и актуальные задачи бортовой микрогравиметрии/ Третий Международный аэрокосмический конгресс IAC' 2000: Сборник тезисов, Москва, 23-27 августа 2000 г. – М.: Международный фонд попечителей Московского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского; ООО «Научно-техническая компания «Аффинор»; Издательство СИП РИО, 2000.
4. **Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И.** Метрологические проблемы анализа вибраций на космических аппаратах. Научно-практическая и учебно-методическая конференция: Фундаментальные науки в современном строительстве/Сб. докладов.– М.: МГСУ, 2001.
5. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Исследования и компьютерное моделирование локальных геотехнических рисков при неравномерном вибросейсмическом возбуждении оснований промзон и районов массовой застройки мегаполисов. II Научно-техническая конференция «Научно-инновационное сотрудничество Минобразования и ФССС РФ». Сб. научных трудов. -М.: МГСУ, 2003, с.32-36.
6. **Завалишин С.И., Прокопьев В.И., Хлыстунов М.С.** Метрологические проблемы идентификации геодинамических резонансов строительных конструкций АС. НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ-2004. III научно-техническая конференция "НАУЧНО-ИННОВАЦИОННОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО". Сборник научных трудов. В 2 частях. М.:МИФИ, 2004.
7. ГОСТ Р53778-2010 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния».
8. РБ-045-08 «Динамический мониторинг строительных конструкций объектов использования атомной энергии».
9. РМ-2957 «Рекомендации по эксплуатации многофункциональных высотных зданий и комплексов».
10. **Хлыстунов М.С.** Метрологические проблемы реализации нормативных требований к динамическим обследованиям зданий и сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2013. № 9. с. 52-55.
11. **Хлыстунов М.С.** Теория модального анализа интенсивности вибросейсм в основаниях промзон и районов массовой застройки. Сборник научных трудов «Экспериментальная механика и расчет сооружений. Костинские чтения» -М.:

- МГСУ, 2004, с.23-29.
12. **Хлыстунов М.С.** Прикладная динамическая теория упругости и математическое моделирование динамических нагрузок в системах типа «объект-основание». Сборник докладов Тематической научно-практической конференции «Городской строительный комплекс и безопасность жизнеобеспечения граждан». Часть 1. В рамках Научно-технического конгресса по безопасности "Безопасность - основа устойчивого развития регионов и мегаполисов". – М.: МГСУ, 2005, с.261-267.
 13. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Вибродозиметрический метод мониторинга и прогноза эволюции остаточного ресурса на базе вибродозиметрической станции СВД-60. – М.: WELD, Труды Межд. конференции «ПАЗИС», 9-10 июня 2009 г., с.29-35.
 14. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С.** Теория модального анализа микросейсмических процессов и моделирование геодинамических процессов в основаниях. Москва-Иваново: Вестник отделения строительных наук РААСН, том 1, 2010, стр.178-182.
 15. **Киселёв М.И., Подувальцев В.В., Хлыстунов М.С.** Проблемы метрологического обеспечения объектов техносферы, строительной науки и практики. Наука и Образование: электр. научно-техническое изд. 2011. Выпуск 11. URL <http://technomag.edu.ru/doc/252086.html>. (11 ноября 2011 г.).
 16. **Подувальцев В.В.** О метрологической экспертизе и наиболее насущных проблемах метрологического обеспечения. Наука и Образование: электронное научно-техническое издание. 2012. Выпуск 2. URL <http://technomag.edu.ru/doc/327076.html>. (02 февраля 2012 г.).
 17. **Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Могилюк Ж.Г.** Метрологический анализ спектральных «фантомов» цифровых

технологий. В сб. трудов XII Всероссийской научно-технической конференции «Состояние и проблемы измерений». – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013, с.111-115.

Прокопьев Валерий Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Хлыстунов Михаил Сергеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(495) 583-07-65, e-mail: mcxmgusu@mail.ru.

Могилюк Жанна Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(495) 583-07-65, e-mail: zhanna-2008@bk.ru

Valery I. Prokopiev, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Michail S. Hlystunov, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mcxmgusu@mail.ru.

Zhanna G. Mogiljuk, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, 65, e-mail: zhanna-2008@bk.ru

ОБОСНОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРЫВОВ ВЕТРА В МОСКВЕ

М.С. Хлыстунов, В.И. Прокопьев, Ж.Г. Могилюк

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация. Рассматриваются неотложные проблемы теоретической метеорологии прогнозирования эволюции климатических рисков на урбанизированных территориях. Основу исследования составляет процесс формирования порывов ветра. Рассматривается гипотеза о квантовой закономерности формирования скорости ветра. Кратко описывается метод, предложенный авторами, основу которого составляет статистический анализ данных метеорологических наблюдений. Приводятся результаты исследования, подтверждающие гипотезу о квантовой закономерности на примере данных метеорологических наблюдений для города Москвы.

Ключевые слова: урбанизированные территории, климатические риски, порывы ветра, прогнозирование, гипотеза о квантовой закономерности, метеорологические наблюдения, статистический анализ, Москва

VERIFICATION OF THE SQUALL WIND FORMATION QUANTUM LAWS IN MOSCOW

Mihail S. Hlystunov, Valery I. Prokopiev, Zhanna G. Mogiljuk

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article examines the state and urgent problems of the theoretical meteorology forecast the evolution of climatic risks in urban areas. The focus is on trends in the wind gusts formation. Given the wording of the authors hypothesis about quantum regularity in the wind speeds formation. Briefly describes the author's method of meteorological observations data statistical analysis. In detail given the research results on verification of the quantum hypothesis according to the meteorological observations data in Moscow.

Keywords: urban areas, climatic risks, evolution, wind gusts, forecast, quantum hypothesis, meteorological observations, statistical analysis, verification, Moscow

ВВЕДЕНИЕ

Согласно последнему докладу межправительственной группы ООН по изменению климата (IPCC), опубликованному в *International Business Times*, практически все государства планеты не готовы к предупредительным мерам по адаптации жизненно важных отраслей экономики и населения к глобальному потеплению. С другой стороны, например, Мототака Накамура из Японского национального агентства по морским исследованиям и ряд российских и европейских ученых заявили, что человечеству надо гото-

виться не к глобальному потеплению, а к глобальному похолоданию.

Отсутствие прогресса и общей позиции ведущих мировых научных школ по проблеме глобального изменения климата ставит в особенно сложное положение строительную индустрию практических всех государств, включая страны с высокоразвитой экономикой [1]. Взаимосвязь этой проблемы со строительной деятельностью и ее острота следует из прямой зависимости проектных решений, например, в 2014 году, от оценки рисков глобального изменения климата на глубину градостроительного планирования или

на срок жизни строительных объектов и долгосрочность инвестиций, которые, как правило, достигают 100 лет и более. То есть до 2114 года и далее. Особенно важен учет экстремальных климатических процессов, включая ветровые, для высотного строительства. Таким образом, острота этой проблемы для строительной отрасли не ограничивается теоретическими задачами научных дискуссий, а имеет самый прямой практический смысл. Строительная деятельность в мире, связанная с многими триллионами долларов долгосрочных инвестиций не может остановиться из-за разногласий в метеорологических научных школах.

В настоящее время это обусловлено ежедневной необходимостью выбора таких проектных решений, которые обеспечат необходимую безопасность и устойчивость строительных конструкций, например высотных зданий и сооружений, ко всем видам климатических и метеорологических нагрузок и воздействий на длительный период жизненного цикла объектов промышленного и гражданского строительства.

Среди таких нагрузок особое место занимает ветровая нагрузка, которая характеризуется как среднесуточной скоростью ветра, так и максимальными скоростями ударных ветровых воздействий на строительные конструкции.

За последние сто лет теоретическая метеорология была сосредоточена, главным образом, на статистических исследованиях структуры ветровых процессов [2]. Трудоемкий статистический метод исследований исторически занимает важное место практически во всех разделах физики. Но надо иметь в виду, что его применение, как правило, связано не столько с его уникальностью, сколько с трудностями применения аналитических методов математической физики в связи с наличием в изучаемых процессах мало изученных или ранее неизвестных явлений, эффектов и закономерностей [3,4,5,6]. На наш взгляд период преимущественно статистического моделирования в теоретической ме-

теорологии несколько затянулся. Классические законы аэродинамики, термодинамики и тепломассопереноса за последние десятилетия с не очень существенными дополнениями и практически в неизменном виде составляют теоретическую основу современных программных комплексов моделирования и прогноза метеорологических процессов. Несомненно, применение современных цифровых технологий и суперкомпьютеров существенно повысили уровень, объемы и эффективность обработки натурной метеорологической информации.

Однако этого оказалось недостаточным для долгосрочного прогнозирования вектора эволюции климатических и метеорологических процессов на период жизненного цикла строительных объектов до 100 лет и более.

В связи с этим в рамках ведомственной программы «Развития научного потенциала высшей школы» авторы провели комплексные исследования малоизученных закономерностей эволюции и изменения интенсивности аварийно опасных природных процессов, включая климатические и геофизические. В результате анализа роста в десять раз глобальной сейсмической активности на Земле после взрыва кометы Шумейкера-Леви на Юпитере (июль 1994 г.) были надежно установлены закономерности влияния гравитационных радиальных резонансов планет солнечной системы на интенсивность геодинамических процессов [7,8]. Наряду с этим внимание авторов привлекли результаты двух уникальных исследований:

– геохимика Грэма Пирсона (Graham Pearson) из канадского Университета Альберты и Майкла Вайсешина (Michael Wysession), профессора сейсмологии из Вашингтонского университета (Сент-Луис), которые пришли к выводу, что под восточной частью континента Евразия и под Северной Америкой располагаются огромные резервуары воды (до 10 Тихих океанов), которые своим «дыханием» оказывают существенное влияние на атмосферные и гидро-

логические процессы, включая катастрофические наводнения и ураганы [9];

– теория принципиальной нелинейности погоды Эдварда Лоренца и вытекающие из его теории риски порождения ураганов удаленными локальными аэродинамическими микропроцессами [10].

Полученные результаты исследований по метеорологическим рискам были опубликованы в целой серии статей авторов [7,8,11,12]. В настоящей статье представлены результаты фундаментальных исследований авторов роли микропроцессов на формирование ураганных порывов ветра [12]. Мы надеемся, что полученные результаты могут быть также полезны разработчикам программных комплексов моделирования метеорологических процессов и могут быть использованы в виде дополнения к базовым классическим моделям, используемым при эмуляции прогнозов погоды. На наш взгляд, наступает новый этап в развитии теоретической метеорологии, связанный, в том числе, с учетом квантовых закономерностей и явлений наряду с классическими. Подобный этап в целом ряде других прикладных областей физики был преодолен уже более 50-100 лет назад.

С одной стороны, настоящая статья носит, фундаментальный характер. Однако, с другой, новые знания о квантовом характере формирования ударных ветровых нагрузок открывает принципиально новые возможности для разработки «квантовых» методов демпфирования и защиты высотных зданий и сооружений от таких нагрузок.

ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ГИПОТЕЗЫ

Согласно основополагающему закону квантовой механики для изменения параметров движения микрочастицы (в данном случае, молекулы атмосферы) ей необходимо придать момент импульса, равный постоянной Планка $\hbar = 1,054571726 \cdot 10^{-34}$ Дж*с. Тогда,

для возбуждения порыва ветра каждой молекуле воздуха, участвующей в формировании порыва ветра, необходимо дополнительно придать момент импульса $h_m = \Delta H_m$, равный постоянной Планка, то есть

$$h_m = \Delta H_m = m_m \Delta V_m r_{mm} = \hbar, \quad (1)$$

где $m_m, \Delta V_m, r_{mm}$ - соответственно, масса молекулы, приращение скорости молекулы, необходимое для формирования очередного порыва ветра, и расстояние между молекулами. Следующий по росту скорости и моменту импульса порыв ветра, также должен отличаться от порыва с меньшей скоростью на величину постоянной Планка.

В случае верности гипотезы статистическое распределение порывов ветра по скоростям для сухого воздуха должно иметь «гребенчатый характер», то есть

$$nh_m = n\Delta H_m = nm_m \Delta V_m r_{mm} = n\hbar$$

или

$$n\Delta V_m = \frac{n\hbar}{m_m r_{mm}}, \quad (2)$$

где n – номер «всплеска или гребня» графика зависимости статистической частоты реализации порывов ветра от скорости.

Также следует учитывать, что количество молекул в единице объема воздуха атмосферы в общем случае зависит от приращения давления в порыве ветра, температуры, влажности и концентрации аэрозолей. Наряду с этим при формировании порывов ветра в воздухе повышается концентрация твердых и жидких аэрозолей (минеральная и органическая пыль, туманы и осадки в виде жидкой воды и ледяных кристаллов). Например, с учетом аэрозольных примесей формула (2) будет иметь следующий вид:

$$n\Delta V_m + n\Delta V_{dust} = \frac{n\hbar}{m_m r_{mm}} + \frac{n\hbar}{m_{dust} r_{dm}},$$

где $\Delta V_{dust} \approx \Delta V_m, m_d, r_{dm}$ - соответственно, приращение скорости аэрозолей, захваченных порывом ветра, средняя масса частиц аэрозолей и осадков, расстояние между частицами и молекулами воздуха.

Обобщая основное положение гипотезы, проведем квантовые расчеты по формированию порыва ветра для единицы объема атмосферы.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Единственным критерием истины гипотезы, в данном случае наличия гребенчатого характера статистического распределения скоростей порывов ветра, подчиняющегося законам квантовой механики, являются соответствующие результаты наблюдений в некотором множестве географических точек планеты.

Например, приращение скорости ветра ΔV , предположительно необходимой для формирования порыва ветра приращение момента импульса в единице объема сухого воздуха будет равно

$$\bar{K} = \Delta V_s \rho_o r_{mmo}. \quad (3)$$

Так как количество молекул в единице воздуха при нормальных условиях N , то тогда каждой молекуле необходимо придать момент импульса

$$k = \frac{\bar{K}}{N}. \quad (4)$$

В реальных условиях количество молекул воздуха в единице объема и плотность воздуха зависят от температуры, давления,

влажности и молекулярного состава атмосферы.

Оценки изменений влажности, температуры и концентрации аэрозолей, включая пыль, показали, что степень их максимального суммарного влияния на величину k не превышает 10%.

С этой целью и для обоснования фундаментальных выводов авторы провели анализ реальных данных метеонаблюдений по скоростям формирования порывов ветра в городах на разных континентах планеты, в том числе, в Анкоридже, Лондоне, Москве, Ниаме, Нью-Йорке и Токио. Эти материалы публикуются авторами в специальной серии статей и докладов на международных конференциях. Отдельные результаты исследования квантовых закономерностей формирования порывов ветра были опубликованы авторами ранее в работе [12]. В настоящей статье рассматриваются детальные результаты аналогичных исследований в Москве.

ВЕРИФИКАЦИЯ КВАНТОВОЙ ГИПОТЕЗЫ ПО ДАННЫМ МЕТЕОНАБЛЮДЕНИЙ В МОСКВЕ

В качестве базового массива данных используем данные метеонаблюдений в Москве за период с 01.01.1973 по 31.08.1987 (5355 суток=14,66 лет), а в качестве массива данных о текущем состоянии метеорологических процессов – данные аналогичных метеонаблюдений за период с 01.01.1995 по 31.08.2009 (5355 суток=14,66 лет). Временной интервал между массивами составляет 22 года. Выбор большого интервала между массивами наблюдения позволяет устранить возможные случайные корреляционные проявления и взаимное влияние данных статистического анализа друг на друга. На рис.1 приведен график зависимости количества порывов ветра в Москве от скорости (m/c) ветра $s(V)$ в период с 01.01.1973 по 31.08.1987 и в период с 01.01.1995 по 31.08.2009 с разрешением $dV=0,5 m/c$.

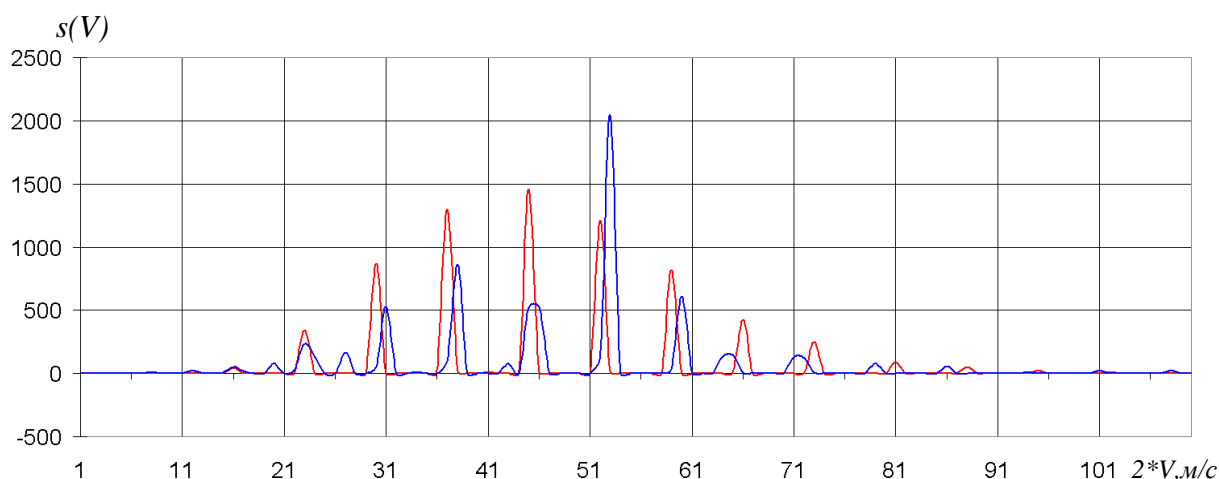


Рисунок 1. График зависимости количества порывов ветра в Москве от скорости ветра (разрешение $dV=0,5$ м/с):

- синяя кривая по данным с 01.01.1973 по 31.08.1987;
- красная кривая по данным кривые с 01.01.1995 по 31.08.2009.

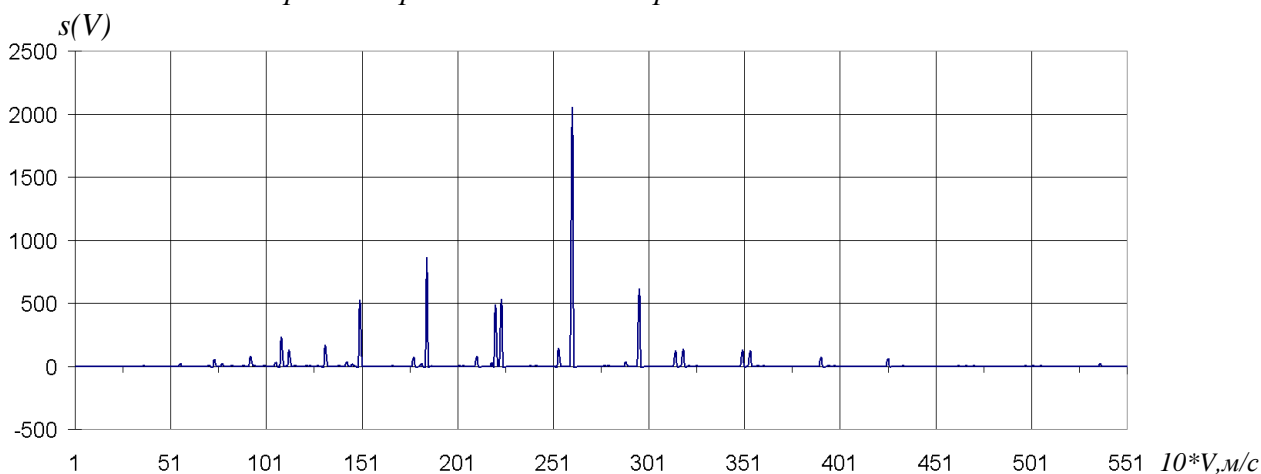


Рисунок 2. График зависимости количества порывов ветра в Москве от скорости ветра (м/с) в период с 01.01.1973 по 31.08.1987 (разрешение $dV=0,1$ м/с).

Кривые на рис.1 за оба периода наблюдения носят гребенчатый характер. Однако наблюдается существенное расширение кривых, что может сказаться на точности дальнейших расчетов. В связи с этим авторами был выполнен более детальный анализ данных с разрешением $dV=0,1$ м/с. В результате был получен фактически линейчатый характер статистического распределения порывов ветра по скоростям (м/с), как показано на рис. 2, для периода наблюдения с 01.01.1973 по 31.08.1987. Для сопоставления на рис.2 также приведены огибающие графиков статистического анализа для периодов с

01.01.1973 по 31.08.1987 и с 01.01.1995 по 31.08.2009.

Для периода наблюдения с 01.01.1995 по 31.08.2009 также был получен фактически линейчатый характер статистического распределения порывов ветра по скоростям, как показано на рис. 3.

Результаты анализа характера статистического распределения порывов ветра по скоростям для обоих периодов наблюдения позволяют установить зависимость скоростей формирования порывов ветра от номера пика $V(n)$ их статистического распределения (см. рис.4).

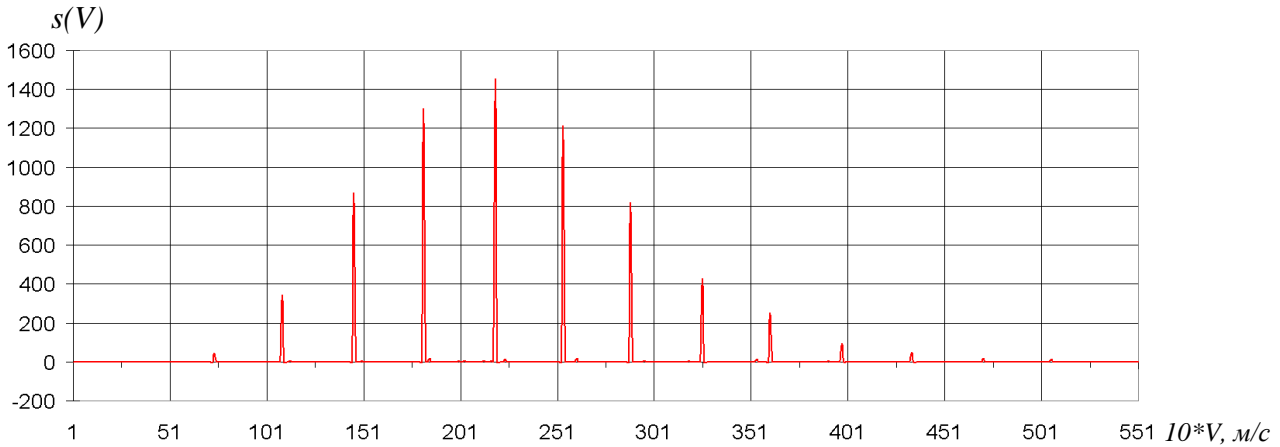


Рисунок 3. График зависимости количества порывов ветра в Москве от скорости ветра (м/с) в период с 01.01.1995 по 31.08.2009 (разрешение dV=0,1 м/с).

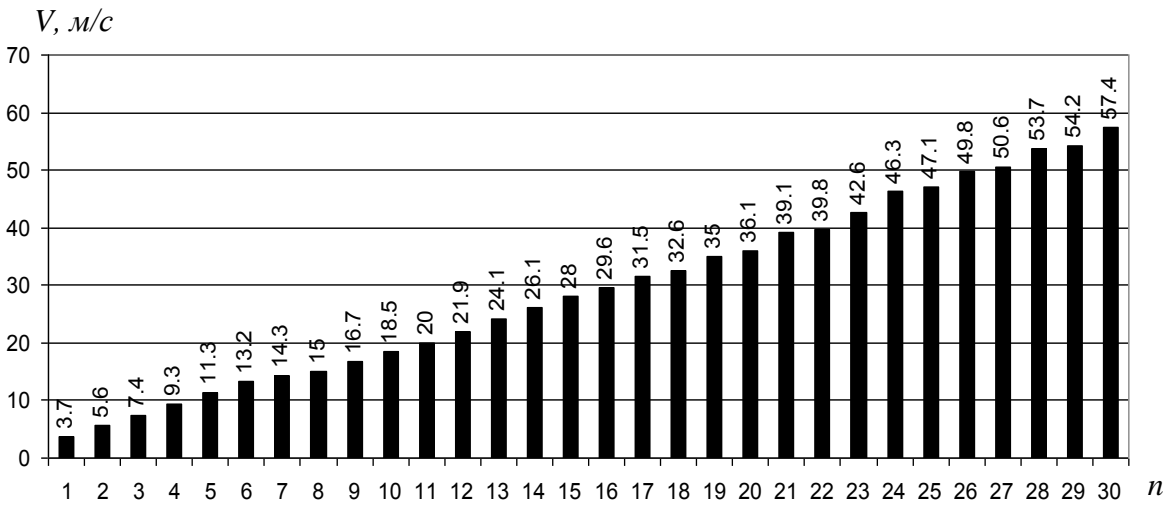


Рисунок 4. Диаграмма зависимости скоростей формирования порывов ветра от условного номера пика V(n) их статистического распределения в Москве.

В соответствии с диаграммой на рис.4 приращение скорости между пиками формирования порывов ветра составляет (в среднем)

$$\Delta V = \frac{V_{30} - V_1}{29} = \frac{57.4 - 3.7}{29} \text{ м/с} = 1,85 \text{ м/с}. \quad (5)$$

По аналогии с расчетами (3) и (4), используя полученное (5) значение для среднего приращения скорости между соседними пиками распределения порывов ветра по скоростям формирования, вычислим момент импульса, необходимый для формирования порыва ветра как в единице объема воздуха, так и для одной молекулы:

$$\bar{K} = \Delta V_s \rho_o r_{mmo} =$$

$$= 1,85 \frac{\text{м}}{\text{с}} \times 1,228 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times 1,025 \times 10^{-9} \text{ м} =$$

$$= 2,33 \times 10^{-9} \text{ Дж} \times \text{с}. \quad (6)$$

Откуда момент импульса в среднем на одну молекулу будет составлять

$$\bar{k} = \frac{\bar{K}}{N} = \frac{2,33 \times 10^{-9}}{2,07689 \times 10^{25}} \text{ н} \times \text{с} \times \text{м} =$$

$$= 1,12 \times 10^{-34} \text{ Дж} \times \text{с}. \quad (7)$$

Таким образом полученный момент импульса превышает значение постоянной Планка не более, чем на 5,8%:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{k}}{\bar{k}} \times 100\% &= \frac{\bar{k} - \hbar}{\bar{k}} \times 100\% = \\ &= \frac{1,12 \times 10^{-34} - 1,054571726 \times 10^{-34}}{1,12 \times 10^{-34}} \times 100\% = \\ &= +5,8\% . \quad (8) \end{aligned}$$

Данное превышение значения постоянной Планка вполне объяснимо и является следствием колебаний температуры, влажности и концентрации аэрозолей. Также для Москвы в осенне-зимний период характерны туманы и осадки в виде жидкой воды и ледяных кристаллов. Только изменение температуры в пределах $\pm 20^\circ\text{C}$ может привести к изменению плотности воздуха на 22,6%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема роста рисков аварий строительных конструкций зданий и сооружений, как в России, так и за рубежом, существенно обостряется не прогнозируемым ранее ростом амплитуды колебаний мощности аэродинамических процессов. Особое место среди явлений, связанных с аэродинамическими процессами в высотном строительстве занимают резкие порывы ветра, ураганы, смерчи и торнадо.

Обобщенные результаты статистического анализа аэродинамических проявлений глобального изменения климата показывают, что наибольшую угрозу для различных сфер человеческой деятельности, в том числе для строительных конструкций, лесного и паркового хозяйства, для морского и воздушного транспорта представляет не только глобальное потепление, но и, риск реализации экстремальных состояний ветровых процессов на урбанизированных территориях, как застойных, так и ураганных.

При сохранении такой тенденции на теку-

щий период градостроительного планирования (например, 100 лет) вполне реален риск роста интенсивности этих колебаний.

Такое и вполне вероятное развитие процесса глобального изменения климата не может оставаться без внимания инвесторов, саморегулируемых организаций, собственников строительных объектов, управляющих и энергетических компаний, страховщиков и, в первую очередь, муниципальных, региональных и федеральных служб регулирования и планирования градостроительной деятельности, а также авиационных и морских транспортных компаний.

Эта проблема, как в России, так и за рубежом, существенно обостряется не прогнозируемым ранее ростом интенсивности и иных, аварийно опасных техногенных и природных климатических и геолого-геофизических процессов и факторов, которые являются причиной реализации новых и, как следствие, ненормированных комплексных сверхпроектных нагрузок и воздействий на объекты техносферы [13,14,15].

Фундаментальные квантовые закономерности формирования порывов ветра в Москве имеют глобальный характер и были также верифицированы авторами в других городах на разных континентах планеты, в том числе, в Лондоне, Анкоридже, Ниамее, Нью-Йорке и Токио.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Завалишин С.И.** Глобальные риски и новые угрозы безопасности ответственных строительных объектов мегаполиса./ Сборник докладов Тематической научно-практической конференции «Городской строительный комплекс и безопасность жизнеобеспечения граждан». Часть 1. В рамках Научно-технического конгресса по безопасности "Безопасность - основа устойчивого развития ре-

- гионов и мегаполисов. – М.: МГСУ, 2005.
2. **Ломакина Н.Я.** Объективная классификация и статистическое моделирование метеорологических полей в пограничном слое атмосферы для Западной Сибири : диссертация кандидата физико-математических наук : 25.00.29 / Ломакина Наталья Яковлевна; [Место защиты: Ин-т оптики атмосферы СО РАН]. – Томск, 2008. – 156 с. : ил. РГБ ОД, 61:08-1/348
 3. **Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Завалишин С.И.** Космогенные процессы деградации геотехнической надежности промышленных объектов и техносферы мегаполисов./ IV Всероссийская научная конференция «Физические проблемы экологии (Экологическая физика)». Сб. трудов. –М.: ИПМ РАН –МГУ им.Ломоносова М.В., 2004, с.
 4. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Метод и алгоритм оценки снижения остаточного ресурса надежности элементов строительных конструкций зданий и сооружений. –М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.196-201
 5. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Анализ рисков геодеформационных проявлений вибросейсмических процессов в основании турбинного корпуса АС. –М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.215-219
 6. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. Явление космогенной эволюции интенсивности глобальных вариаций максимальных и среднесуточных температур на урбанизированных территориях. –М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.68-73
 7. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Глобальные и локальные закономерности эволюции интенсивности климатических и геофизических нагрузок на урбанизованных территориях./ Высотные здания, №1, 2011, с.82
 8. **Теличенко В.И., Король Е.А., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Глобальные и локальные закономерности эволюции интенсивности влажности и прозрачности атмосферы на урбанизированных территориях./ Высотные здания, №2, 2011, с.98
 9. **Graham Pearson.** Water-rich gem points to vast 'oceans' beneath the Earth./*Nature paper*: dx.doi.org/10.1038/nature13080
 10. **Hilborn, Robert C.** Sea gulls, butterflies, and grasshoppers: A brief history of the butterfly effect in nonlinear dynamics./*American Journal of Physics* 72 (4): p.p.425–427.// DOI:10.1119/1.1636492. Bibcode:2004AmJPh..72..425H.
 11. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Глобальные и локальные закономерности эволюции интенсивности климатических и геофизических нагрузок на урбанизированных территориях./Журнал "Экология урбанизированных территорий" №2, 2011. С. 13-21.
 12. **Hlystunov M.S., Prokopjev V.I. and Mogiljuk Zh.G.** Quantum Regularities of Shock Wind Processes Formation. *World Applied Sciences Journal*, ISSN / E-ISSN: 1818-4952 / 1991-6426, 2013, №26(9) p.p.1219-1223
 13. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: Минрегион РФ, 2011
 14. Строительные нормы и правила СНиП 23-01-99* "Строительная климатология". С изменениями от 24 декабря 2002 г. – М.: Госстрой России, 2002
 15. МГСН 4.19-05 «Многофункциональные высотные здания и комплексы». – М.: Правительство Москвы, 1995

Хлыстунов Михаил Сергеевич, зав. отраслевой научно-исследовательской лабораторией крупногабаритных конструкций, почетный доктор наук, профессор

кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(495) 583-07-65, e-mail: mcxmgusu@mail.ru, intdginni@mail.ru

Прокопьев Валерий Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Могилюк Жанна Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(495) 583-07-65, e-mail: zhanna-2008@bk.ru

Michail S. Hlystunov, Head of federal research laboratory, Honorary doctor of science, professor of department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mcxmgusu@mail.ru, intdginni@mail.ru

Valery I. Prokopiev, professor of department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Zhanna G. Mogiljuk, assistant professor of department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, 65, e-mail: zhanna-2008@bk.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФАНТОМЫ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ МОНИТОРИНГА И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

М.С. Хлыстунов, В.И. Прокопьев, Ж.Г. Могилюк

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация. В статье рассматриваются проблемы формирования ложных спектральных отображений динамических нагрузок в информационно-измерительных системах контроля безопасности объектов техносферы. Проводится анализ процесса формирования опасных спектральных, амплитудных и фазовых искажений в результате применения цифровых технологий преобразования, передачи и первичной обработки исходной физической информации. Представлены результаты сравнительного анализа спектров исходных аналоговых и цифровых отображений динамических параметров безопасности объектов техносферы. Показано наличие аналогичных фантомных эффектов как в цифровых системах многоканального мониторинга, так и программных комплексах проектного и научного моделирования полей динамических нагрузок в пространстве объектов техносферы.

Ключевые слова: многоканальный мониторинг, численное моделирование, компьютерное моделирование, многомерные процессы, многомерные объекты, поля нагрузок, решетчатые функции, оконные функции, дискретное преобразование Фурье, искажения амплитуды, фантомная модуляция частоты, искажение фазы

DIGITAL TECHNOLOGIES SPECTRAL PHANTOMS OF MONITORING AND NUMERICAL SIMULATION IN STRUCTURAL MECHANICS

Mihail S. Hlystunov, Valery I. Prokopiev, Zhanna G. Mogiljuk

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract. The article considers the problems of the dynamic loadings false spectral images formation in the technosphere facilities safety control information-measuring systems. Presents an analysis of the amplitude and phase hazardous distortions spectrum formation process in the digital technologies application to transform, transfer and initial physical information primary processing. Presents the results of the continuous and lattice functions spectra comparative analysis of the technosphere objects safety dynamic parameters. It has been shown that similar phantom effects exist as in multi-channel monitoring digital systems, and in the dynamic loadings project and scientific modeling program complexes in the technosphere objects space.

Keywords: multi-channel monitoring, numerical modeling, scientific simulation, multi-dimensional processes, multi-dimensional objects, loads field, lattice functions, window functions, discrete Fourier transform, amplitude distortion, frequency modulation phantom, phase distortion

ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМУ

В настоящее время цифровые технологии измерения, передачи и обработки физической информации и виртуального моделирования заняли доминирующие

позиции в информационно-измерительных системах безопасности объектов техносферы. Самым ответственным, в метрологическом плане, направлением внедрения цифровых технологий являются многоканальные системы измерений полей

распределения динамических нагрузок в пространственных конструкциях объектов техносферы. Эта ответственность обостряется ценой последствий [1-3] в результате метрологического «сбоя» применяемого инструмента. В многоканальных системах мониторинга метрологические «сбои» проявляются в виде амплитудных и фазовых искажений в широкой полосе частот, которые не позволяют восстановить истинные значения направления и модуля векторных нагрузок.

Самым тонким этапом применения цифровых систем и инструментов является, собственно, процесс дискретизации. На этом этапе многоканального мониторинга существенно возрастает риск формирования опасных спектральных искажений. Следует отдать должное основоположникам цифровых технологий, которые тщательно анализировали сопутствующие метрологические проблемы цифровых применений технологий [4].

В настоящее время цифровые технологии численных исследований в механике твердого тела заняли доминирующие позиции в строительной науке и проектном моделировании.

Вместе с тем, в метрологическом плане, применение цифровых технологий, в частности, конечно-элементных моделей, для оценки распределения динамических нагрузок и перемещений в пространстве строительной конструкции [1] и основания [2-5] требует специальных тонких исследований в плане обеспечения конформности или достоверности виртуальных моделей и допустимой погрешности при моделировании таких нагрузок [6,7].

В случае строительного проектирования нарушение конформности моделей проявляется в снижении проектных и реальных параметров динамической устойчивости и взрывобезопасности зданий и сооружений [1,4,5], а в научных исследованиях [2] это приводит к

формированию несуществующих «фантомных» закономерностей.

Наиболее эффективным способом оценки конформности конечно-элементных (виртуальных) моделей реальному напряженно-деформированному состоянию многомерных строительных конструкций является сравнительный анализ спектров реальных и виртуальных функций распределения полей динамических нагрузок.

Определенный задел в этой области сформировали основоположники цифровых технологий, которые со всей тщательностью анализировали сопутствующие проблемы надежности применения цифровых технологий в системах телеграфной связи [8].

В настоящей статье мы рассмотрим ряд проблем, связанных с формированием, в результате выполнения обязательных цифровых процедур предварительной подготовки физических данных, спектральных искажений реального НДС при построении сетки узлов в конечно-элементных и в конечно-разностных методах проектного моделирования [6,7].

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ДИСКРЕТИЗАЦИИ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим ряд важных проблем, связанных с «рождением» спектральных «фантомов» на этапе дискретизации аналоговых или непрерывных функций, которые имеют место как при дискретизации функции нагрузки во времени [5], так и при построении сетки контрольных точек пространственного контроля параметров динамических нагрузок на объектах техносферы, или сетки узлов в конечно-элементных и конечно-разностных методах проектного моделирования, или сетки мониторинга природных или техногенных трехмерных процессов [6].

Теория рождения спектральных фантомов имеет непосредственное отношение к теории построения решетчатых функций или отображений аналоговых (непрерывных) функций. Не обнаруживая явных проблем в амплитудно-временном представлении решетчатых отображений оригиналов «аналоговых» функций, в спектральных Фурье-образах этих функций проявляется существенное отличие спектра оригинала от спектра своего решетчатого представления. Появление зеркального отражения спектра непрерывной функции после дискретизации относительно вертикальной оси на частоте Найквиста-Котельникова было впервые описано в работе [4]. Работы по этой проблеме во второй половине XX века регулярно возобновлялись в новом аспекте приложений на каждом очередном этапе внедрения цифровых технологий в смежные отрасли науки и техники [6-8]. В связи с этим создавалась иллюзия окончательного решения этой проблемы, а ее анализ и решение являются каноническими и учитываются разработчиками новых приложений цифровых технологий. В случае невыполнения этого критерия после первичной обработки данных цифровых измерений или компьютерного моделирования, при обратном преобразовании решетчатой функции в непрерывную обнаруживается, что они существенно отличаются друг от друга за счет «накладки» или проникновения зеркальных частот в полосу частот исходного сигнала. Однако, даже в случае его выполнения, амплитудные и фазовые искажения, связанные с влиянием на спектр «конечности» длины массива и нерегулярности решетчатой функции и наложения на него сглаживающих окон, существенно затрудняют, например, задачу восстановления исходного значения

направления и модуля вектора контролируемой нагрузки.

АНАЛИЗ АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ СПЕКТРА

В настоящее время метрологический анализ этих искажений фактически не отражен в научно-технической литературе и исследования авторов данной статьи подтверждают, что, зачастую, вклад фантомных эффектов в искажение физической информации имеет более серьезные метрологические последствия, чем рассмотренный выше «зеркальный эффект». Помимо рассеяния амплитуды при нарушении регулярности выборок узлов сетки точек наблюдения, или проектного расчета, или частоты выборок при дискретизации в спектре наблюдается тремблинг-эффект (*trembling effect*), как показано на рис.1а. Также дополнительно вносятся фазовые искажения (*trembling phase distortion*) спектра, проиллюстрированные на рис. 1а пунктиром на примере гармонической функции с амплитудой $A_0=1$. Фазовые искажения, отображенные на рис.1 пунктирной кривой, также наблюдаются при плавном нарастании (рис.1в) и или уменьшении (рис. 1б) амплитуды гармонической функции.

Перечисленные искажения амплитудного и фазового спектра гармонической функции также имеют место при наложении сглаживающих окон на фрагмент функции, подвергаемый Фурье-анализу. Рассмотрим две функции $A(x)$ и $H(x)$ со спектральными плотностями $\mathbf{A}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$.

В случае прямоугольного окна, то есть при тривиальном извлечении фрагмента решетчатой функции для спектральной обработки, этот фрагмент можно записать в виде произведения:

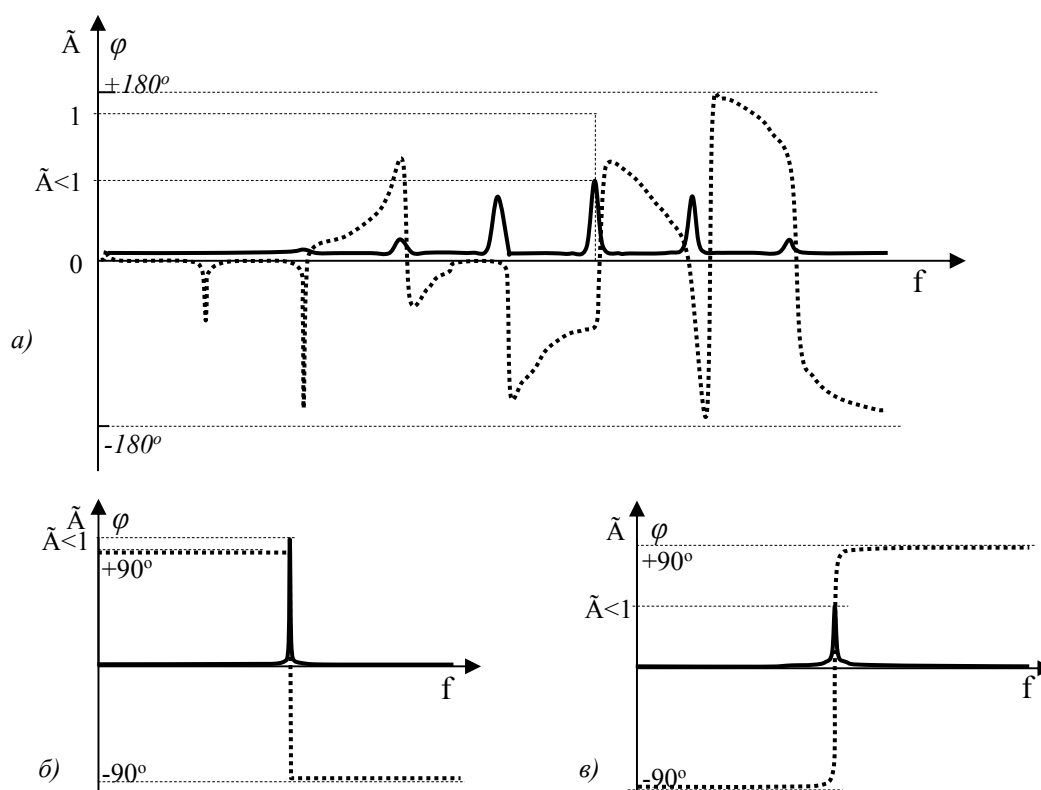


Рис.1. Рассеяние амплитуды (сплошная кривая) и фазовые искажения (пунктирная кривая) при гармонической модуляции (а) частоты ее дискретизации, уменьшения (б) или нарастания (в) амплитуды гармонической функции.

$$\hat{A}[x(n)] = H(n)A[x(n)], \quad (1)$$

где прямоугольное окно

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ 1 & \text{для } 0 < x < x(N), \\ 0 & \text{для } x > x(N) \end{cases} \quad (2)$$

имеет очень сложный амплитудный и фазовый спектр с появлением большого числа боковых спектральных составляющих. В связи с этим используют различные сглаживающие оконные функции, существенно снижающие фантомный спектральный эффект вертикальных границ прямоугольного окна, например, окно Хемминга $H(n) = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/N)$, где $N(2\pi n/N)$, на рис.2а. Ближайшие ложные боковые составляющие спектра ДПФ фрагмента функции с окном

Хемминга подавляются на 20дБ (в 10 раз), как показано на рис.2б.

При цифровой обработке сигнальной информации эти проблемы и соответствующие требования по их решению отражены в нормативных документах. В многоканальных системах диагностики и мониторинга пространственных процессов и объектов эта проблема обходится стороной и ее решение зависит от уровня компетентности и математической эрудиции пользователя.

В общем виде распределенные в пространстве параметры поля динамических нагрузок (функция времени и координат), а для конкретного момента времени - функция координат, можно представить в спектральной области в виде Фурье-отображения, например, в виде дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

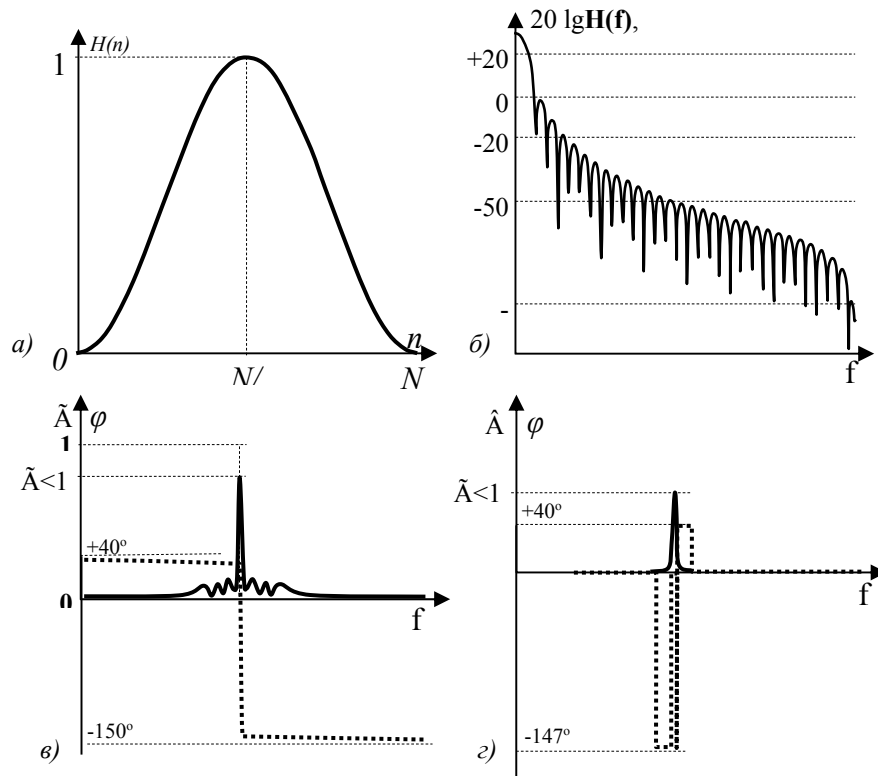


Рисунок 2. Вид функции (а) и АЧХ (б) окна Хемминга, рассеяние нормированной амплитуды (сплошная кривая) и фазовые искажения (пунктирная кривая) спектра гармонической функции при использовании дискретного преобразования Фурье (в) с прямоугольным окном и при наложении окна Хемминга (г).

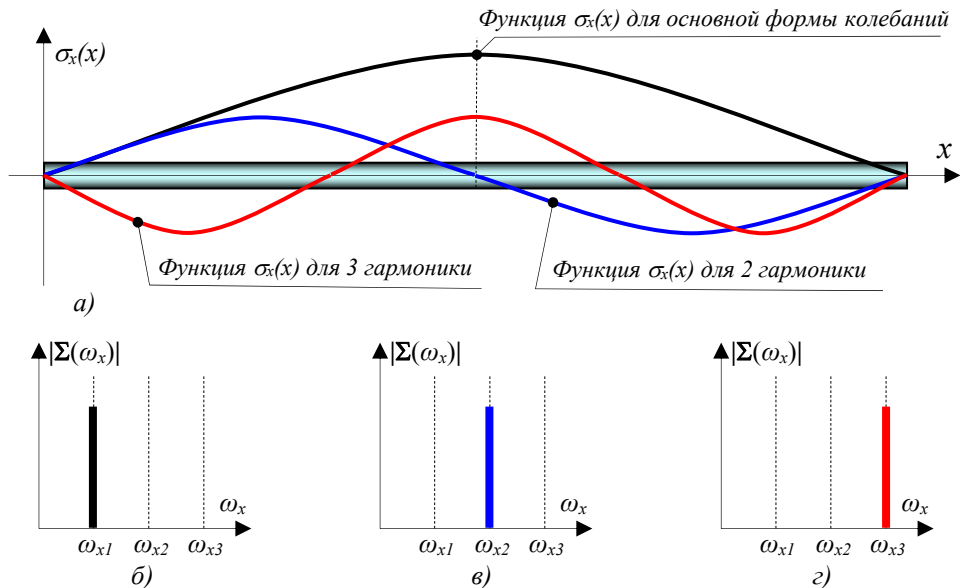


Рисунок 3. Функции $\sigma_x(x)$ (а) и спектры $|\Sigma(\omega_x)|$ реального или фактического мгновенного распределения интенсивности продольных напряжений вдоль оси балки для основной (б), ее второй (в) и третьей (г) гармоник колебаний, где $\omega_{x1}=2\pi/\lambda_1$; $\omega_{x2}=2\pi/\lambda_2$; $\omega_{x3}=2\pi/\lambda_3$, а $\lambda_1=2\lambda_2=3\lambda_3$

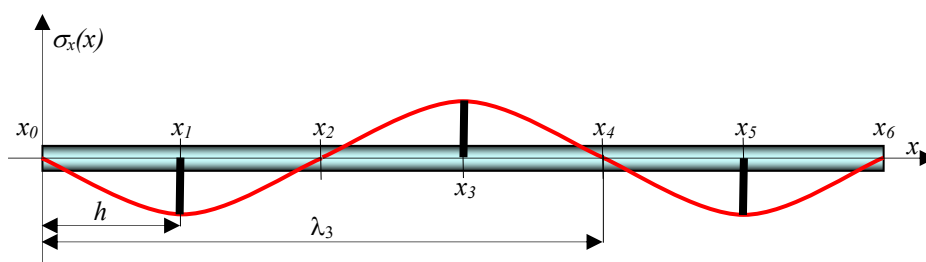


Рисунок 4. Пример линейной сетки с частотой шага $\omega_\partial = 2\pi/h > 4\pi/\lambda_3$

Проведем сравнительный анализ реального и виртуального пространственного спектра функции некоторого мгновенного распределения резонансных динамических напряжений на простейшем примере, например, вдоль главной оси балки постоянного сечения со свободно опертыми концами. В реальности функция этого распределения будет иметь вид гармонической функции – синусоиды, а ее спектр будет представлять собой узкую линию на шкале координаты x , равный (для основной формы колебаний) или кратный (для гармоник) половине длины акустической волны, как показано на рис.3.

Аналогичная динамическая задача рассматривалась в работах [6,7], в которых было установлено, что конечно-элементные или конечно-разностные модели динамического процесса имеют погрешность расчетной оценки резонансных частот амплитудно-временной функции не лучше 12,5% для бесконечно густой расчетной сетки. В общем случае погрешность этой оценки может достигать 50% [9].

В связи с этим рассмотрим возможные погрешности или искажения спектра амплитудно-пространственной гармонической функции распределения резонансных напряжений в балке на рис.3 при конечно-элементном моделировании.

В общем случае будем полагать, что критерий Найквиста-Котельникова-Шенонна по частоте сетки, то есть по частоте дискретизации функции выполняется. Тогда, например, для конечно-элементной динамической модели и при возбуждении не более 3 первых гармоник резонансных

колебаний балки частота пространственной дискретизации (сетки) функции распределения напряжений $\omega_\partial = 2\pi/h$ должна быть, как минимум, в два раза больше частоты пространственного распределения напряжений на 3 гармонике $\omega_{x3} = 2\pi/\lambda_3$, то есть $\omega_\partial \geq 4\pi/\lambda_3$, например, как показано на рис. 4.

Аналогичным образом можно подобрать шаг сетки для любого порядка гармоники продольных колебаний стержня [10-14].

Так как быстрое преобразование Фурье (БПФ) вносит дополнительные спектральные искажения, воспользуемся классическим алгоритмом дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для конечного числа узлов сетки:

$$\bar{\Sigma}(\omega_{xn}) = \sum_{n=0}^N \sigma(x_n) e^{-jk\omega_n/\omega_\partial} \quad (3)$$

Компьютерное моделирование спектров с использованием формулы (3) для различного порядка гармоник резонансных колебаний позволили выявить следующие закономерности (см. рис. 5).

Согласно результатам моделирования на рис.5 наряду с зависимостью амплитуды спектра от длины балки (или порядка гармоники) также наблюдается зависимость формы спектра (включая высоту боковых лепестков и декремент затухания резонанса) от кратности длины балки L периоду функции (рис. 6).

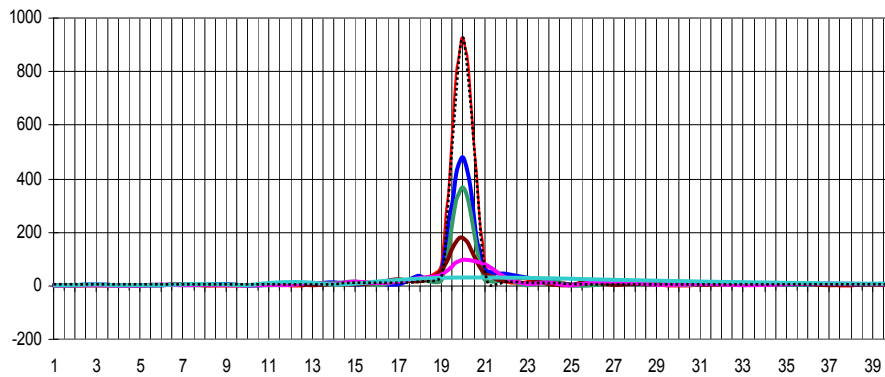


Рисунок 5. Зависимость спектра мгновенного гармонического распределения резонансных динамических напряжений с периодом $\lambda=20$ и амплитудой $\sigma_0=1$ от длины балки L для прямоугольного окна: $L=2\lambda$ (голубая кривая); 10λ (розовая кривая); 20λ (коричневая кривая); 40λ (зеленая кривая); 50λ (синяя кривая) и 100λ (красная кривая). Пунктиром выделен спектр, полученный для $L=100\lambda$ с использованием сглаживающего окна Блэкмана-Наталла, нормированный виртуальным усилением до уровня спектра прямоугольного окна.

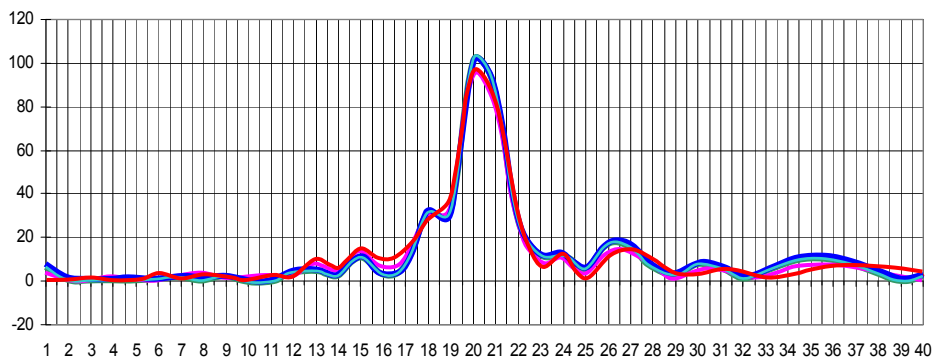


Рисунок 6. Зависимость спектра гармонического распределения напряжений с периодом $\lambda=20$ для прямоугольного окна от кратности длины балки периоду: $L=10\lambda$ (красная кривая); $10,25\lambda$ (розовая кривая); $10,5\lambda$ (голубая кривая); $10,75\lambda$ (синяя кривая).

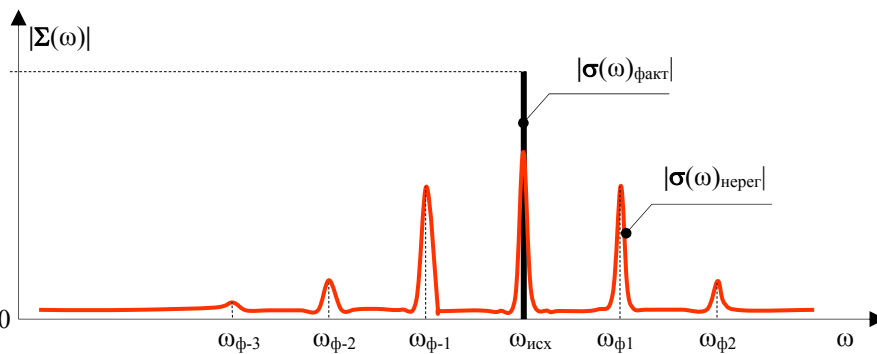


Рисунок 7. Искажение амплитуды и формы спектра в результате нерегулярности сетки конечно-элементного моделирования.

При небольшом отклонении от кратного значения, например, $L = 10,25\lambda$ (розовая кривая), наблюдается рост интенсивности боковых лепестков на коротких периодах (на высоких частотах). По мере приближения к следующему кратному значению длины балки, например, $10,5\lambda$ (голубая кривая) и $10,75\lambda$ (синяя кривая), наблюдается рост интенсивности боковых лепестков на длинных периодах (на низких частотах).

Неожиданный результат был получен при применении нерегулярной сетки, характерной для конечно-элементного моделирования интенсивности статических полей НДС в сложных конструкциях. Спектр гармонической функции фактического распределения напряжений вдоль длины балки существенно изменяется в связи с формированием ложных резонансов или резонансных «фантомов» в процессе дискретизации и необходимых цифровых процедур предобработки массива данных (см. рис.7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Различные проявления неконформности цифровых операций контроля и первичной обработки данных мониторинга нашли свое отражение в специальной серии публикаций авторов. Рассмотренные в настоящей статье спектральные искажения в многоканальных системах мониторинга и при численном проектном моделировании подтверждают острую необходимость их метрологической аттестации. Правила общей оценки качества программных средств представлены в ГОСТ 28195–89, ГОСТ 28806–90 и ГОСТ Р ИСО/МЭК 12119–2000. Однако применение метрологических критериев качества в этих документах не предусматривается [9]. Хотя ИСО/МЭК 9126–93 содержат рекомендации по оценке точности результата решения измерительных задач с использованием вычислительных процедур, вместе с тем, оценка погрешностей, вносимых

рассмотренными выше спектральными «фантомами» не предусматривается, а фактически подменяется обычным тестированием по ГОСТ Р ИСО/МЭК 12119–2000, когда положительный результат заведомо обеспечен заложенными в программы алгоритмами решения задач тестирования.

На основании вышеизложенного можно сделать выводы, что оценка достоверности пространственных многоканальных измерений, а также трудоемких и дорогих расчетов и модельных исследований с применением цифровых технологий, особенно в условиях вступления в ВТО, требует обязательного метрологического контроля и указания всех возможных неопределенностей (погрешностей и искажений) [1-2, 9-11]. Данное требование соответствует российским и международным требованиям по защите прав потребителей на получение от поставщика информации и предостережений обо всех возможных искажениях и границах метрологической достоверности использования цифровых технологий мониторинга безопасности объектов техносферы.

Эти выводы также подтверждают актуальность требований [1, 9-11] о необходимости проведения метрологической экспертизы договорной документации с обязательным указанием всех возможных неопределенностей (погрешностей и искажений), разработки порядка оформления и реализации результатов метрологической экспертизы договоров, контрактов и различных соглашений по всем объектам техносферы.

Введение в технические паспорта, руководства по эксплуатации и в руководства оператора указаний по количественной оценке перечисленных выше искажений или ограничений позволит защитить права пользователя проектных программных комплексов на получение официальной информации и предостережений обо всех возможных

искажениях и границах метрологической достоверности использования программной продукции [12,13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Подувальцев В.В.** О метрологической экспертизе и наиболее насущных проблемах метрологического обеспечения. *Наука и Образование: электронное научно-техническое издание*. 2012. Выпуск 2. URL <http://technomag.edu.ru/doc/327076.html>.
2. **Киселёв М.И., Подувальцев В.В., Хлыстунов М.С.** Проблемы метрологического обеспечения объектов техносферы, строительной науки и практики. *Наука и Образование: электронное научно-техническое издание*. 2011. Выпуск 12. URL <http://technomag.edu.ru/doc/252086.html>.
3. **Исаев Л.К. и др.** Метрологическое обеспечение систем промышленной безопасности потенциально опасных объектов. *Измерительная техника*. 2011. № 8. С. 57-60.
4. **Nyquist Н.** Certain topics in telegraph transmission theory. – N.-Y.: Trans. AIEE, vol. 47, Apr. 1928, pp. 617-644.
5. **Савостьянов В.Н., Немчинов В.В., Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Оценка динамической погрешности разностных схем численного моделирования в решениях задач механики твердого тела. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с. 184.
6. Проектная оценка, мониторинг и прогноз эволюции геодеформационных рисков неравномерных осадок зданий и сооружений методами динамической теории упругости с использованием программно-алгоритмического комплекса «Композит-7». – М.: Издание Weld, Труды Международной конференции «Повышение безопасности зданий и сооружений в процессе строительства и эксплуатации», 9-10 июня 2009 г.
7. **Козлов Е.А., Гогоневков Г.Н., Лернер Б.Л. и др.** Цифровая обработка сейсмических данных. – М.: Изд. «Недра», 1976, 309 с.
8. **Хаттон Л.** Обработка сейсмических данных. Теория и практика. – М.: Изд. «Мир», 1989.
9. **Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Могилюк Ж.Г.** Проблемы достоверности и метрологический анализ спектральных фантомов цифровых технологий. *Измерительная техника. Приложение «Метрология»*. 2013. № 7. С. 8-17.
10. **Подувальцев В.В.** Законодательная метрология: учебное пособие. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 271 с.
11. **Подувальцев В.В.** Об учебном пособии и первом опыте преподавания законодательной метрологии. МГТУ им. Н.Э. Баумана. XII Всероссийская научно-техническая конференция «Состояние и проблемы измерений». Сборник материалов, 2013. – С. 207-210.
12. **Киселёв М.И., Подувальцев В.В., Хлыстунов М.С.** Проблемы метрологического обеспечения объектов техносферы, строительной науки и практики. *Наука и Образование: электронное научно-техническое издание*. 2011. Выпуск 11. URL <http://technomag.edu.ru/doc/252086.html>.
13. **Подувальцев В.В.** О метрологической экспертизе и наиболее насущных проблемах метрологического обеспечения. *Наука и Образование: электронное научно-техническое издание*. 2012. Выпуск 2. URL <http://technomag.edu.ru/doc/327076.html>.

Хлыстунов Михаил Сергеевич, зав. отраслевой научно-исследовательской лабораторией крупногабаритных конструкций, почетный доктор наук, профессор кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный

Спектральные фантомы цифровых технологий мониторинга и численного моделирования
в строительной механике

университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(495) 583-07-65,
e-mail: mcxmgusu@mail.ru, intdginni@mail.ru

Прокопьев Валерий Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Могилюк Жанна Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(495) 583-07-65,
e-mail: zhanna-2008@bk.ru

Michail S. Hlystunov, Head of federal research laboratory, Honorary doctor of science, professor of department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,
e-mail: mcxmgusu@mail.ru, intdginni@mail.ru

Valery I. Prokopiev, professor of department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,
e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Zhanna G. Mogiljuk, assistant professor of department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, 65,
e-mail: zhanna-2008@bk.ru

