

**International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering**
Volume 10, Issue 1 *2014*

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenکو, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Lomonosov Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Saint Petersburg State Polytechnical University
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University, 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Mukhtaridin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI),
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University,
8 Suhanova Street, Vladivostok
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina,
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering,
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.,
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences,
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology,
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering,
1, Academicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics, 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint-Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering,
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Street,
190005 Saint-Petersburg, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University, 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University, 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043
Almaty, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Saint Petersburg State Polytechnical
University, 29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Illizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering,
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
Moscow State University
of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities
in Radom, 29, ul. Malczewskiego,
26-600, Radom, Poland

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University,
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering, 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University,
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education,
New Delhi, India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University,
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering,
9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology
1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

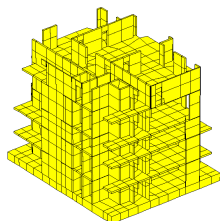


Figure 1.

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief as well. Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

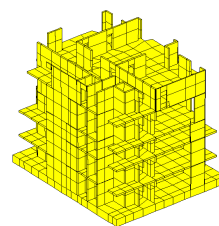


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

¹⁾ Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

²⁾ Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com.

³⁾ Кайтуков Таймураз Батразович, доцент, кандидат технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 10, Issue 1

2014

TABLE OF CONTENTS

Investigation of Repair Compositions Delamination Mechanism by Restoration Structures After Sulfurous Connections Corrosion Attack <i>Andrey N. Avrenyuk, Anastasia A. Avrenyuk</i>	<u>14</u>
О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико- геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, Моджаба Аслами, О.А. Негрозов, С.В. Щербина</i>	<u>18</u>
О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико- геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, Моджаба Аслами, О.А. Негрозов, С.В. Щербина</i>	<u>33</u>
Осесимметричная задача влагоупругости в неоднородном сферическом массиве <i>В.И. Андреев, А.С. Авершьев</i>	<u>46</u>
Устойчивость течений за вихрегенирирующими устройствами <i>В.К. Ахметов</i>	<u>55</u>
Оценка сейсмостойкости купольных конструкций на основе результатов полноволнового моделирования <i>В.И. Голубев, Д.П. Григорьевых, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов</i>	<u>65</u>
Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта <i>С.Б. Косицын, Чан Суан Линь</i>	<u>72</u>
Задача Лэмба: обзор и анализ методов исследования <i>С.В. Кузнецов, Е.О. Терентьева</i>	<u>78</u>
Демпфирующие свойства элемента Кельвина – Фойгта с асимметричной пружиной <i>С.В. Кузнецов, М.А. Худяков</i>	<u>93</u>

- Напряженно-деформированное состояние базальтопластиковой арматуры в железобетонных конструкциях** **101**
Ю.О. Кустикова
- Теоретические исследования активации поверхности базальтопластиковой арматуры на основе полимерных составляющих** **108**
Ю.О. Кустикова
- Устойчивость осесимметричного равновесия круглой пластины при больших прогибах** **111**
Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев
- О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений** **118**
М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров Т.Б. Кайтуков
- Развитие МИКФ к деформационному расчету упругих ортотропных пластинок в задачах поперечного изгиба** **121**
С.Ю. Савин

INVESTIGATION OF REPAIR COMPOSITIONS DELAMINATION MECHANISM BY RESTORATION STRUCTURES AFTER SULFUROUS CONNECTIONS CORROSION ATTACK

Andrey N. Avrenyuk, Anastasia A. Avrenyuk
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, RUSSIA

ABSTRACT: Concrete specimens microstructure investigations results after destructive impact of sulfurous connections and after delamination mechanism substantiation of repair compositions on the cement base were presented. The necessity of carefully concrete rust products removing in restoration structures after sulfurous medium attack was shown.

Key words: Corrosive to concrete sulfurous connections, reinforced concrete restoration, maintainability

The field experience of concrete and reinforced concrete structures shows that they are failed considerably earlier as compared with the rated resource in the issue of corrosion. According to the statistical data in Europe the repair cost exceed 20 billion euro p.a., in Russia the repair cost of some industrial structures is reached over 40...50 years the sum which is equal in their value. Hereby the cost of executable repair works is already comparable with the means for new construction. It is also specified by the steady rise of present infrastructure units operation life. In recent time the state of majority repaired reinforced concrete facilities is suffered serious deterioration later on just few years after the execution of repair works. About 75% of refusals by reinforced concrete structures restoration are received after only 5...7 years. It is considered to be successful if the repeated restoration is needed after 12...15 years [1]. The field experience of repaired structures after the impact of sulfurous mediums indicates that commonly their service life is low because of the repair material delamination [2, 3].

In fig. 1 the thematic example of failed reinforced concrete repair is shown. When even after six months of exploitation (or even earlier) the delamination of repair composition on the cement base has begun. At that time the ar-

rangement of pits in the sewage well's wall which was repaired after the biogenic sulfuric acid corrosion effect, is demonstrated the risk of keeping corrosion products (mainly as double hydrous gypsum) if the surface preparation is unsatisfactory.

The layers investigation with using the indicator (0,1% phenolphthalein solution) shows that only repair composition 1 and non corroded concrete in deep 3 are colored in raspberry pink, sulfatized layer 2 which was covered by repair composition is not colored.

For investigations of delamination mechanism the real specimens of that repair composition with sulfatized layer on the inner side was chosen (fig.2). Special attention was given to the contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition» to analyse the composition peeling mechanism on-stream.

Electron microscopic and X-ray spectrum microanalysis of concrete specimens was realized by the scanning electron microscope «JEOL-JSM 6610 LV» with detector «Oxford INCA Energy». Researches were conducted without substantial samples preparation of concrete species in low vacuum medium that allows to analyse the surface in its basis quality (after sample full-scale specimens from operated units structures).

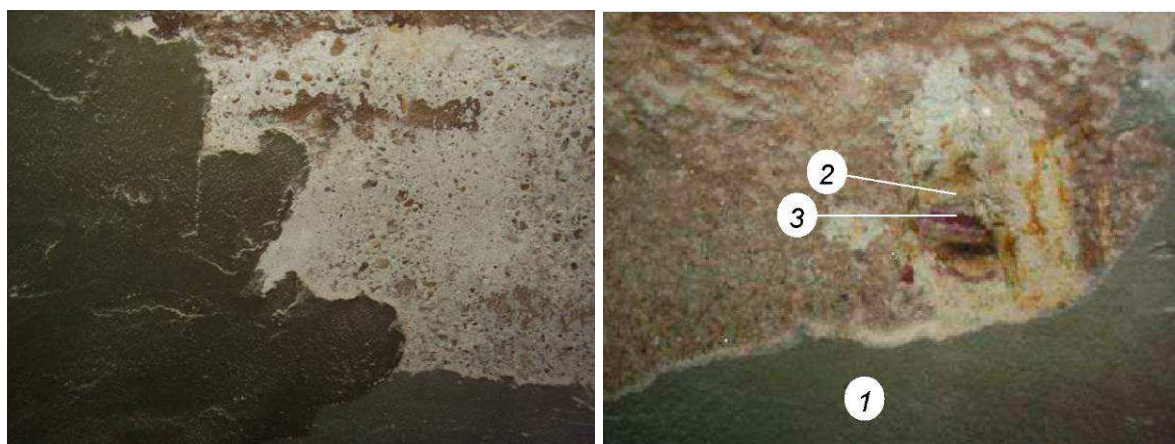


Figure 1. The delamination of repair composition on the cement in case of the unsatisfactory sewage well surface preparation, which contains sulphates mainly as double hydrous gypsum: 1 – repair composition; 2 – sulfatized layer; 3 – non corroded concrete.



Figure 2. One of the real specimens of repair composition with sulfatized layer on the inner side.

In the issue of investigations has been determined the fact that originally before putting the repair composition new formations with high sulfur content was formed under the influence of corrosive sulfurous mediums in the surface and intermediate layers. S/Ca ratio which is close to stoichiometric makes it possible to number this phases among gypsum and its modifications. That confirmed both structure electronic pictures analysis and X-ray spectrum microanalysis results.

Repair composition coating on the such unsatisfactory prepared surface didn't promote qualitative restoration as well as load transfer to recovered construction parts; and has resulted in delamination of all the materials system on stream (Fig. 1).

The majority of modern repair compositions which are supplied as dry mix enclose the raised content of aluminates to provide dimensional stability (C_3A) (shrinkage is one of the main disadvantages of repair material, which is cause adhesion decrease and microcracks appearance) [3, 4]. That provides the formation of extra compounds amount such as ettringite in the contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition» with further delamination of coating (Fig. 3,4). In that case besides ettringite the formation of extra aluminate phases forms is also possible [5].

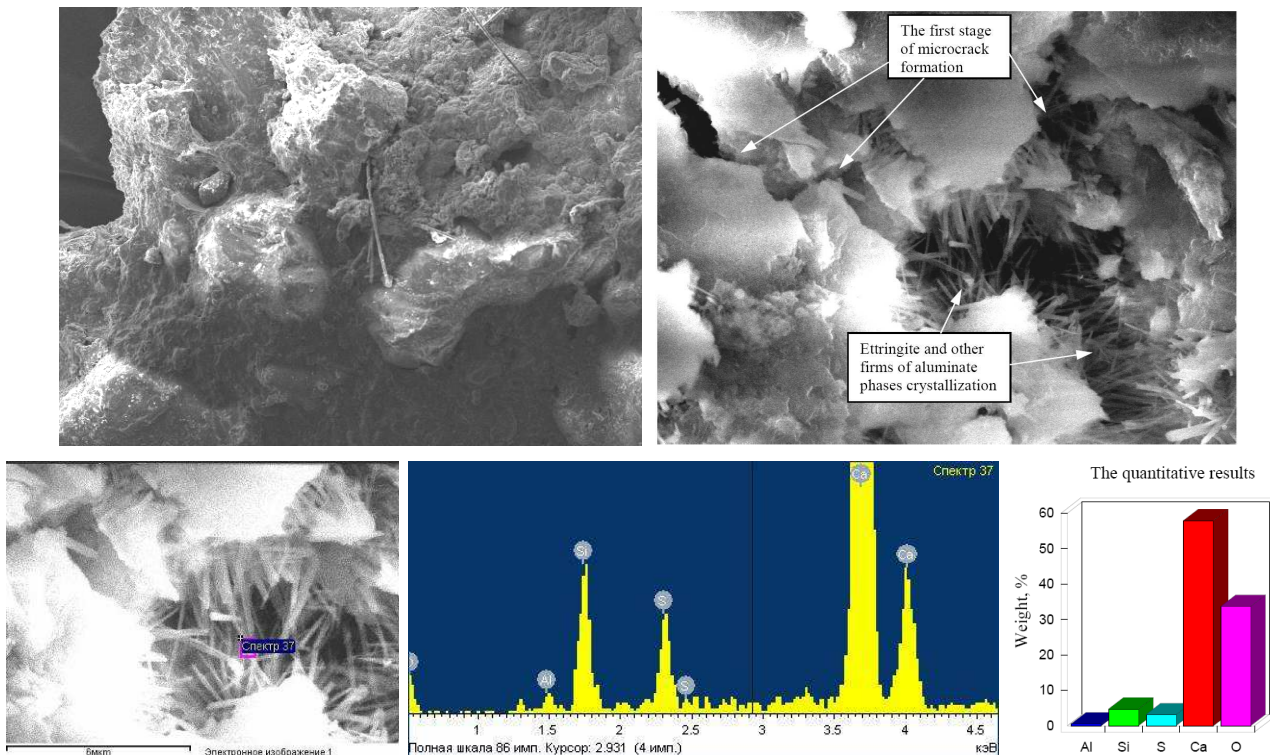


Figure 3. The view of contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition», ettringite and other firms of aluminate phases crystallization with microcrack formation. The X-ray spectrum microanalysis results of forming crystals.

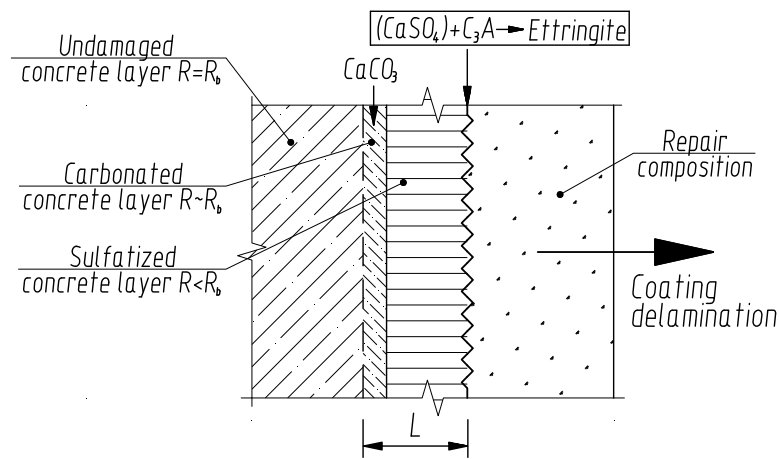


Figure 4. Delamination mechanism of repair coating on the cement base in repairing after the sulfuric acid attack; L -the layer that should be removed by cleaning.

Consequently the investigations it was determined that during that process of ettringite and other firms of aluminate phases crystallization the stress fields that result in microcracks formation (Fig.3) and following delamination of repair composition on the cement in case (Fig.4) may arise in contact areas. During the layerwise

research it was also determined that besides of sulfatized layer damaged layer is composed of carbonated one. It is stipulated by the advance diffusion of carbonic acid CO_2 as compared with sulfurous gases H_2S , SO_2 and SO_3 . Thereby in cases of elimination the possibility of ettringite formation and further delamination

of coating the whole removing of the main sulfate contained ingredient of present connection - dihydrophytic gypsum and its modifications - have to be done.

This fact is the key characteristic in cleaning the restorable concrete and reinforced concrete structures. The carbonated layer can be retained because it doesn't contain such substances that may cause the reaction leaking with increase of neoplasms phases volume [4]. Besides in repairing with materials on the cement base the pH renewal in that layer will take place because of the alkalis migration from new coating. It will eliminate the possibility of reinforcement corrosion.

Technological University named by I.I. Polzynov. – Barnayl, 2008. - 302 p.

Andrey N. Avrenyuk, Candidate of Technical Science, Assistant, Department of Building Constructions, Ufa State Petroleum Technological University, 1, Kosmonavtov street, 450086, Ufa Russia, E-mail: And-mail@mail.ru

Anastasia A. Avrenyuk, Student, Department of Building Constructions, Ufa State Petroleum Technological University, 1, Kosmonavtov street, 450086, Ufa Russia, E-mail: Anastasia.avrenyuk@mail.ru

REFERENCES

1. **Neville A.** Neville in Concrete. // An Examination of Issuers in Concrete Practice. ACI International.-2004.
2. Restoration of concrete and reinforced concrete after the destructive impact of sulfur contained connections / **Latypov V.M., Latypova T.V., Avrenyuk A.N.** et al. // Construction materials.- 2009.- № 3. – P. 58-59.
3. **Latypova T.V.** Surface preparation quality before the repairing of failed reinforced concrete structures at the drainage facilities // International analytic survey «Cement. Concrete. Dry constructional mixes». 2007. №3-4. P.83-86.
4. **Latypov V.M.** Rational methods of concrete surface preparation in repairing structures after the destructive impact of sulfur contained connections // Kazan State Architectural University news. – 2009. - №1 (11). – P. 277-283.
5. **Kozlova V.K.** The composition of aluminate - alumoferrite phases and their hydration products in different cements and mixed cementing agents: monography. Part 1: Aluminates, alumoferrites and calcium ferrites composition and their hydration products in different conditions / Altai State

О ВЕРИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК С ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. СОПОСТАВЛЕНИЯ С ПРОГРАММНЫМ КОМПЛЕКСОМ ANSYS MECHANICAL

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, Моджтаба Аслами,
О.А. Негрозов, С.В. Щербина*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Статья открывает серию работ, посвященную верификации дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова для решения задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений, в данном случае статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Верификация осуществляется путем сравнения результатов упругого линейного расчета балки-стенки с использованием ДКМКЭ и результатов, полученных с помощью универсального программного комплекса промышленного ANSYS Mechanical, реализующего метод конечных элементов (МКЭ). Выбор данного программного продукта обусловлен широкими возможностями комплекса в области решения сложных задач механики сплошной среды и адаптированностью к конечному пользователю.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, статический расчет, балка-стенка, постоянные физико-геометрические параметры

ABOUT VERIFICATION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF STATIC ANALYSIS OF DEEP BEAMS WITH CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS ALONG BASIC DIRECTION. COMPARISONS WITH ANSYS MECHANICAL.

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Mojtaba Aslami,
Oleg A. Negrozov, Sergey V. Scherbina*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper begins a series of works devoted to the verification of discrete-continual finite element method (DCFEM) of structural analysis, proposed by Prof. Alexander B. Zolotov and Prof. Pavel A. Akimov. Static analysis of deep beams with constant physical and geometrical parameters along basic direction is under consideration. Verification is performed by comparing the results of linear analysis of deep beam with the use of DCFEM and corresponding results obtained by using ANSYS Mechanical (version 15.0), which implements the finite element method (FEM). ANSYS Mechanical provides wide possibilities in the field of solutions of complex problems of continuum mechanics. Moreover it is adapted perfectly for the end user.

Key words: discrete-continual finite element method, finite element method, static analysis, deep beam, constant physical and geometrical parameters

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

Как известно, программный комплекс ANSYS [4, 5, 6, 8, 9] весьма широко распространен в мире (а в последние 10 лет и в России) и имеет более миллиона легальных пользователей. Пакет сертифицирован по основным зарубежным стандартам (ISO-9001, ISO 9000-3, British standard BS 5750, Lloyd's Register's software certification, NAFEMS QA certification и многим другим). Имеется сертификат Госатомнадзора России (Регистрационный номер ПС в ЦОЭП при РНЦ КИ № 490 от 10.09.2002 года, регистрационный номер паспорта аттестации ПС № 145 от 31.10.2002 года). Кроме того, в 2009 году силами ЗАО НИЦ СтаДиО и НОЦ КМ МГСУ была проведена верификация программного комплекса ANSYS Mechanical согласно требованиям и в системе Российской академии архитектуры и строительных наук (свидетельство РААСН № 02/ANSYS/2009 с приложением от 10.07.2009 года) [6].

Комплекс ANSYS предоставляет возможности работать в двух средах: в интегрирующей среде ANSYS Workbench в модуле Workbench Mechanical (WB Mechanical) и в традиционном графическом интерфейсе ANSYS Mechanical APDL. В комплексе ANSYS Mechanical реализован специализированный язык APDL (ANSYS Parametric Design Language), который является языком написания командных сценариев, используемых, в частности, для автоматизации типовых задач или построения моделей на основе параметров (переменных). APDL также охватывает широкий диапазон и прочих возможностей, например, таких, как повторение команд, вызов макросов, применение логических ветвлений, циклов, а также операций со скалярными данными, векторами и матрицами. APDL – скриптовый (FORTRAN подобный) язык программирования в традиционном графическом интерфейсе ANSYS Mechanical APDL. APDL позволяет полностью создать в виде исполняемой программы или макроса расчетную модель (включая со-

здание параметрической геометрической модели).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

На рис. 1 приведена схема нагружения прямоугольной балки-стенки, шарнирно-опертой по двум сторонам (во всех точках, для которых $x_2 = 0$ или $x_2 = l$ (края со штриховкой на рис. 1) перемещения по осям x_1 и x_2 задаются нулевыми, т.е. $u_1 = u_2 = 0$). Геометрические параметры балки-стенки: длина $l = 300$ см, высота $h = 300$ см, толщина $\delta = 20$ см. Модуль упругости материала $E = 3 \cdot 10^3$ кН/см²; коэффициент Пуассона $\nu = 0.16$.

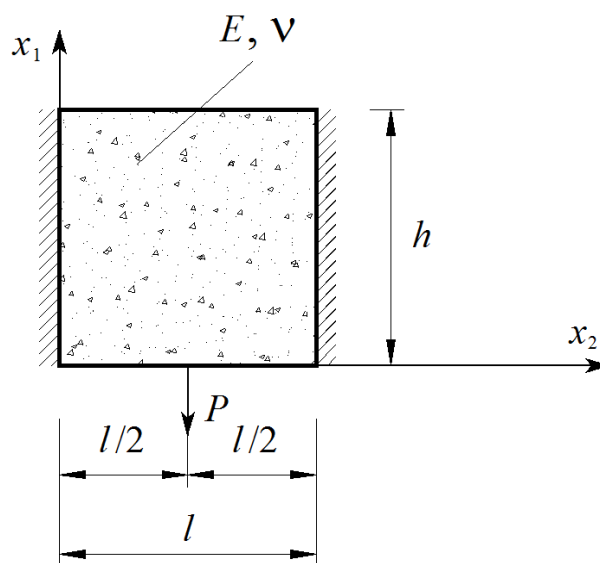


Рис. 1. Расчетная схема балки-стенки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS.

Текст исполняемой программы (с соответствующими пояснениями в тексте программы) на языке APDL для комплекса ANSYS представлен ниже.

```

/TITLE, Static Analysis of Two-dimensional Beam ! Заголовок
! Статический расчет
! двумерной балки-стенки
FINISH ! Завершение работы
! процессора
/CLEAR, START ! Обнуление базы данных
! перед решением новой задачи
/OUTPUT, , Outp ! Направляем вывод в файл
! Ввод параметров для дальнейшего использования *****
DL=300 ! Длина балки-стенки, см
H=300 ! Высота балки-стенки, см
DELTA=20 ! Условная толщина
! балки-стенки, см
A=150 ! Координата точки приложения
! силы, см
E=3000 ! Модуль упругости материала
! балки-стенки, кН/см2
PNU1=0.16 ! Коэффициент Пуассона
! материала балки-стенки
P=100/DELTA ! Величина приложенной силы
! (приведенная), кН
MAT1=1 ! Задание номера материала
! балки-стенки
DLFE=10 ! Задание максимальной длины
! стороны конечного элемента
/COM, ***** ! Помещаем строку комментария
! длиной до 75 символов
! в выходные данные
/PREP7 ! Входим в препроцессор /prep7
UIMP, MAT1, EX, EY, EZ, E, E, E ! Задание модуля упругости
! материала
UIMP, MAT1, NUXY, NUZY, NUXZ, PNU, PNU, PNU ! Задание коэффициента Пуассона
! материала
BLC4, 0, 0, DL, H ! Создание прямоугольника
! по координатам его вершин
! (балка-стенка)
ET, 1, PLANE182 ! Задаем конечный элемент
! PLANE182 (для решения
! плоских задач теории
! упругости; задан номер 1)
KEYOPT, 1, 3, 0 ! Задание опции элемента
! (плоская деформация)
TYPE, 1 ! Задаем тип элемента из ранее
! выбранных с помощью команды
! ET (вновь определяемые
! конечные элементы будут
! относиться к этому типу)
MAT, MAT1 ! Задаем атрибуты материала
! с номером MAT1
ESIZE, DLFE ! Определяем размер конечных
! элементов (максимальная
! длина элемента принята
! равной 10 см)
AMESH, ALL ! Генерация узлов нерегулярной
! сетки и плоских элементов
ALLSEL ! Выбор всех объектов модели
NSEL, S, LOC, X, 0, 0 ! Выбор узлов для которых x=0
! (левая вертикальная граница
! балки-стенки)
D, ALL, ALL ! Определяем закрепления
! всех перемещений на левой
! вертикальной границе
! балки-стенки
NSEL, S, LOC, X, DL, DL ! Выбор узлов для которых x=0

```

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления.
Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

```

D, ALL, ALL                                ! (правая вертикальная граница
                                           ! балки-стенки)
                                           ! Определяем закрепления
                                           ! всех перемещений на правой
                                           ! вертикальной границе
                                           ! балки-стенки
NSEL, S, LOC, X, A, A                      ! Выбор узлов для которых x=A
                                           ! (сечение приложения силы)
NSEL, R, LOC, Y, 0, 0                      ! Выбор точки приложения силы
                                           ! силы
F, ALL, FY, -P                             ! Задание силы
ALLSEL                                     ! Выбор всех объектов модели
/SOLU                                      ! Открываем блок решения
SOLVE                                     ! Запускаем решение на счет
/POST1                                    ! Запускаем основной блок
                                           ! обработки и вывода
                                           ! результатов
PLNSOL, U, X                              ! Вывод перемещений UX
PLNSOL, U, Y                              ! Вывод перемещений UY
PLNSOL, S, X                              ! Вывод напряжений SIGMA_X
PLNSOL, S, Y                              ! Вывод напряжений SIGMA_Y
PLNSOL, S, XY                             ! Вывод напряжений SIGMA_XY
NNGRT1=31                                 ! Задание количества точек
                                           ! табуляции по оси x1
NNGRT2=31                                 ! Задание количества точек
                                           ! табуляции по оси x2
NEGRT1=30                                 ! Задание количества элементов
                                           ! табуляции по оси x1
NEGRT2=30                                 ! Задание количества элементов
                                           ! табуляции по оси x2
PATH, UNGRT2, 2, NNGRT2, NEGRT2          ! Задание параметров табуляции
                                           ! узловых перемещений по оси x2
PPATH, 1, , 0, 0, 0                       ! Задание первой точки сечения
PPATH, 2, , DL, 0, 0                      ! Задание второй точки сечения
                                           ! табуляции по оси x2
PDEF, U2, U, Y                            ! Задание (определение)
                                           ! требуемых компонент
                                           ! перемещений вдоль оси x2
PLPATH, U2                                ! Построение графика
                                           ! перемещений вдоль оси x2
                                           ! в заданном сечении
*DIM, U2TAB, , NNGRT2, 1                 ! Определение массива
                                           ! перемещений вдоль оси x2
                                           ! в заданном сечении
*DO, I, 1, NNGRT2                         ! Цикл по I
*GET, U2TAB(I,1), PATH, 0, ITEM, U2, PATHPT, I ! "Выделение" текущего значения
*ENDDO                                     ! Последний оператор цикла
*CFOPEN, U2TABCSX2, DAT                   ! Создание файла результатов
*DO, J, 1, NNGRT2                         ! Цикл по J
*VLEN, 1                                  ! Задание мерности
X=(J-1)*DLFE                              !
*VWRITE, X, U2TAB(J,1)                    ! Запись данных в файл
%12.4E;%12.4E                              !
*ENDDO                                     ! Последний оператор цикла
*CFCLOSE                                  ! Закрытие цикла

```

При расчете в программном комплексе ANSYS использовалась прямоугольная декартова система координат x, y , причем по сравнению системой координат, показанной на рис. 1, будем иметь: $x = x_2, y = -x_1$.

При решении задачи в комплексе ANSYS (версия 15.0) использовалась равномерная квадратная сетка 30×30 из плоских четырехузловых конечных элементов первого порядка PLANE182 (рис. 2, 3).

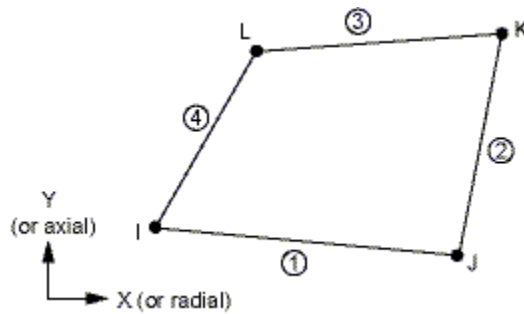
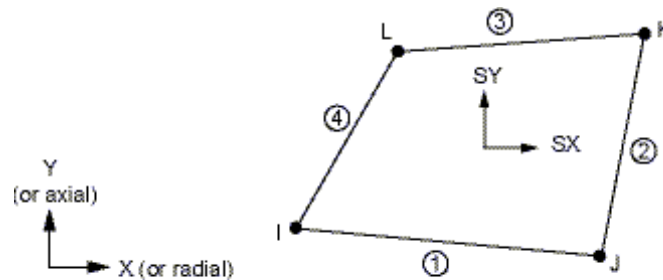


Рис. 2. Общий вид геометрии конечного элемента PLANE182.



Stress directions are shown for Global.

Рис. 3. Точка выдачи напряжений в конечном элементе PLANE182.

Распределения искомых величин, полученных в программном комплексе ANSYS показаны соответственно на рисунках 4 (перемещение вдоль оси $x - u_x$), 5 (перемещение вдоль оси $y - u_y$), 6 (нормальное напряжение σ_x), 7 (нормальное напряжение σ_y) и 8 (касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ DCFEM2DPC

Для решения задачи дискретно-континуальным методом конечных элементов использовался авторский программный комплекс *DCFEM2Dpc*, подробно описанный в [1-3]. Аппроксимирующая сетка по направлению x_1 состояла из 30 дискретно-континуальных конечных элементов

Распределения искомых величин, полученных в программном комплексе *DCFEM2Dpc* показаны соответственно на рисунках 9 (перемещение вдоль оси x_1 (рис. 1) – u_1), 10 (перемещение вдоль оси x_2 (рис. 1) – u_2), 11 (нормальное напряжение $\sigma_{1,1}$), 12 (нормальное напряжение $\sigma_{2,2}$) и 13 (касательные напряжения $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$).

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

На рисунках 14-19 представлены выборочные сопоставления напряжений и перемещений, полученных по программным комплексам ANSYS и *DCFEM2Dpc*, по некоторым характерным сечениям конструкции.

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

NODAL SOLUTION

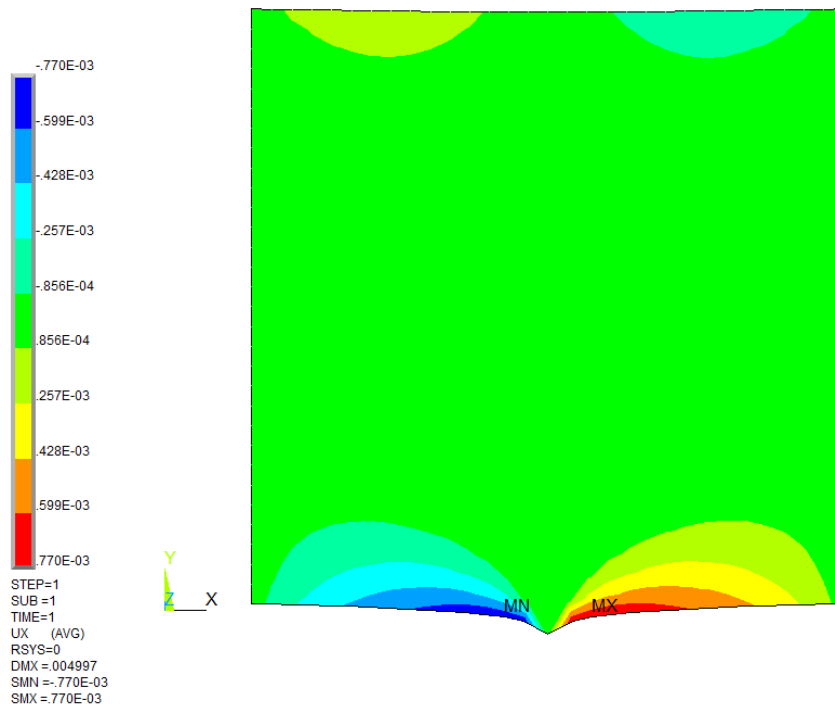


Рис. 4. Распределение перемещений u_x (см).

NODAL SOLUTION

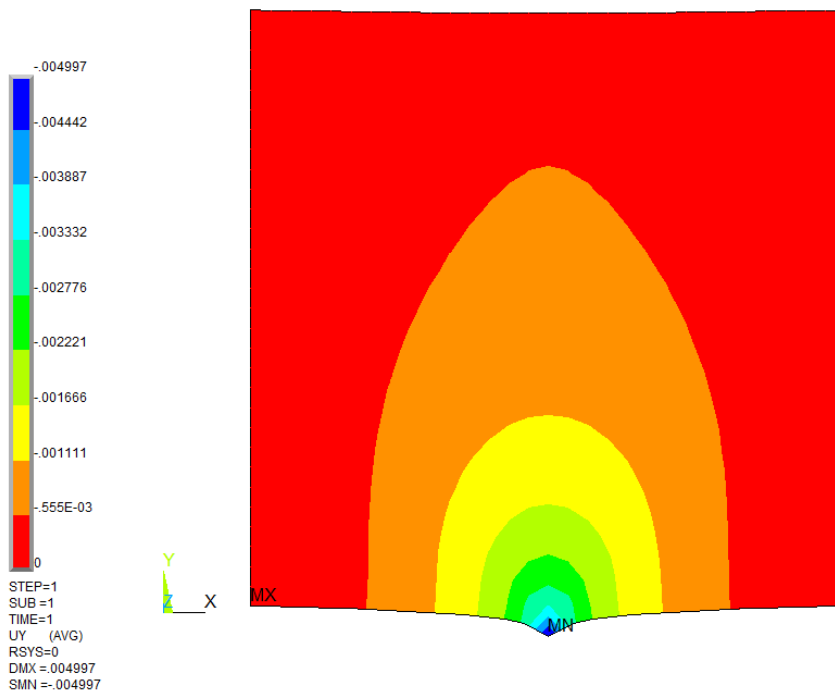


Рис. 5. Распределение перемещений u_y (см).

ELEMENT SOLUTION

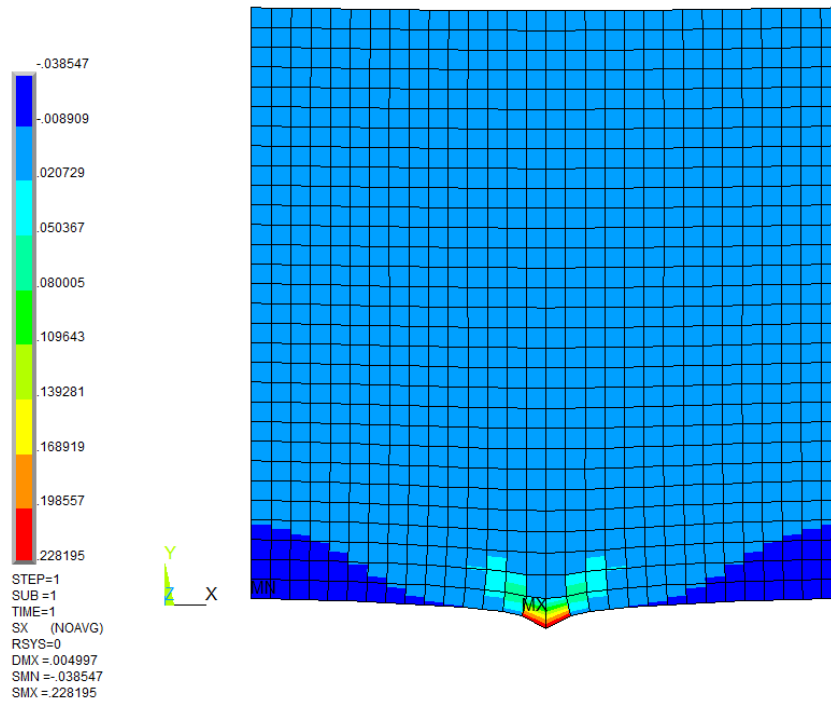


Рис. 6. Распределение напряжений σ_x ($\kappa\text{H}/\text{cm}^2$) (элементных).

ELEMENT SOLUTION

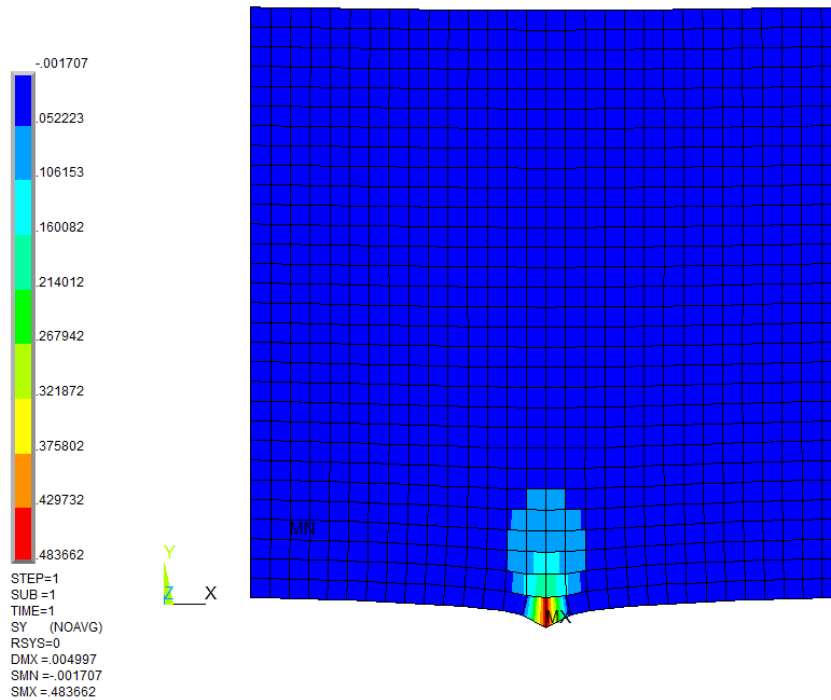


Рис. 7. Распределение напряжений σ_y ($\kappa\text{H}/\text{cm}^2$) (элементных).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления.
Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

ELEMENT SOLUTION

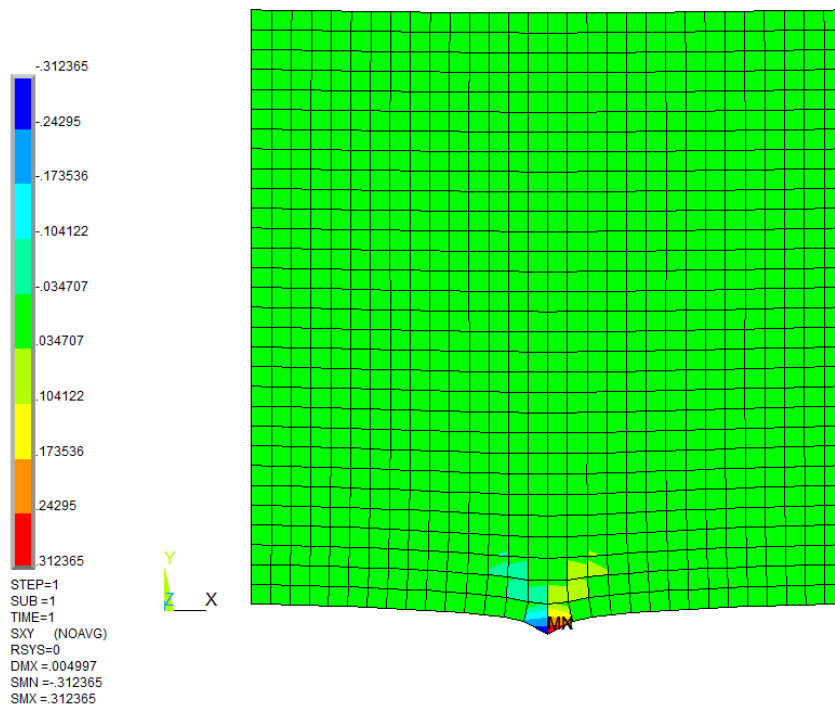


Рис. 8. Распределение напряжений τ_{xy} (кН/см^2) (элементных).

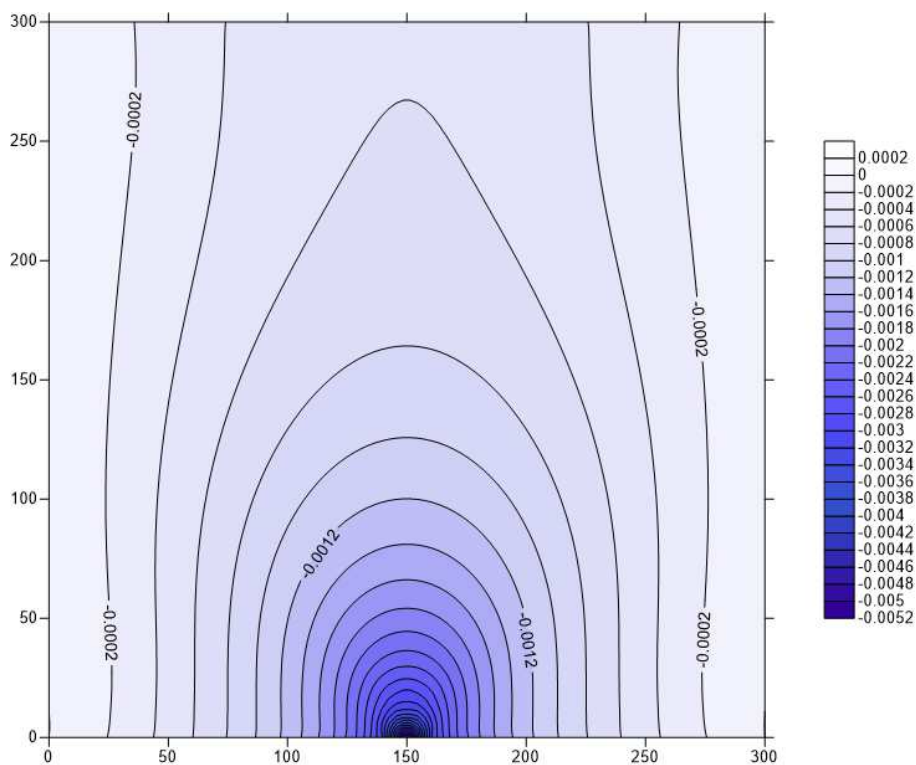


Рис. 9. Распределение перемещений u_1 (см).

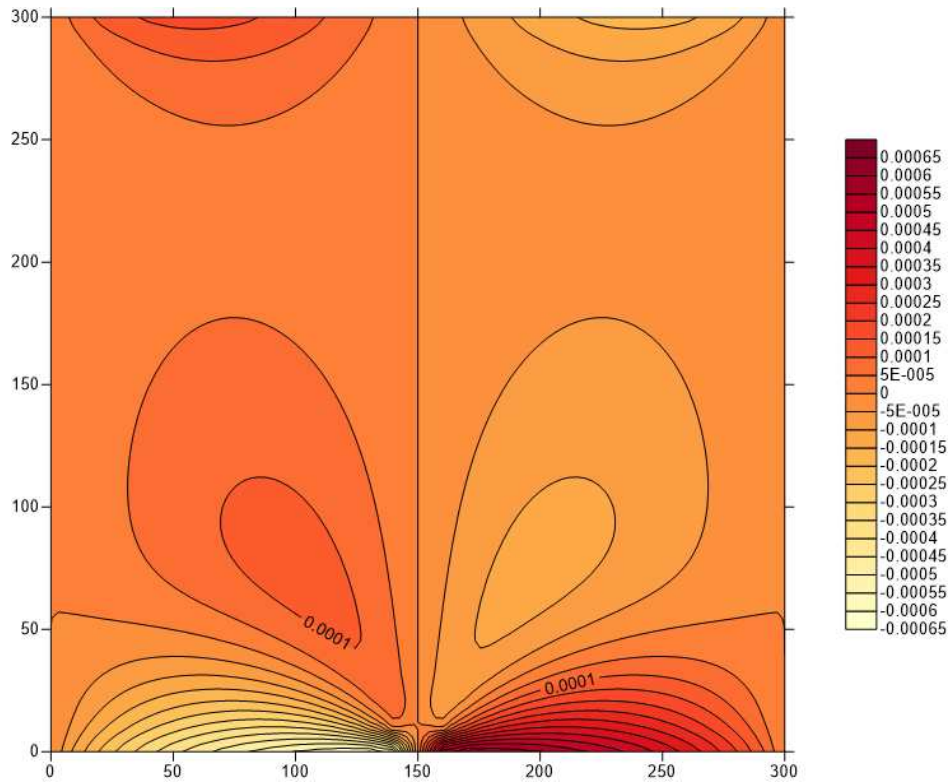


Рис. 10. Распределение перемещений u_2 (см).

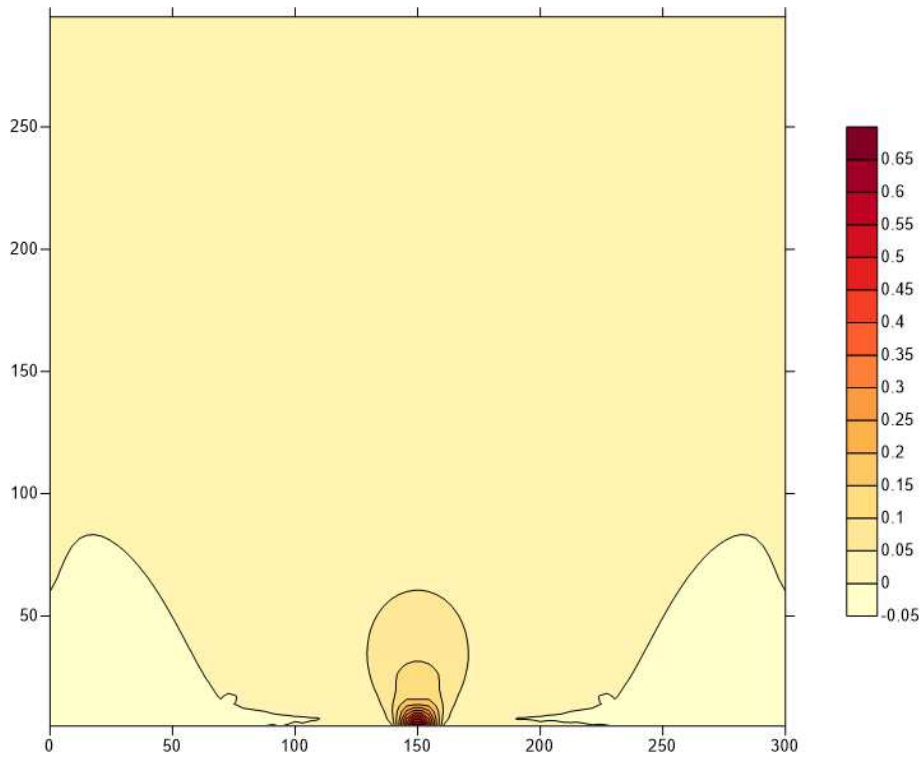


Рис. 11. Распределение напряжений $\sigma_{1,1}$ (kN/cm^2) (на основе элементных).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

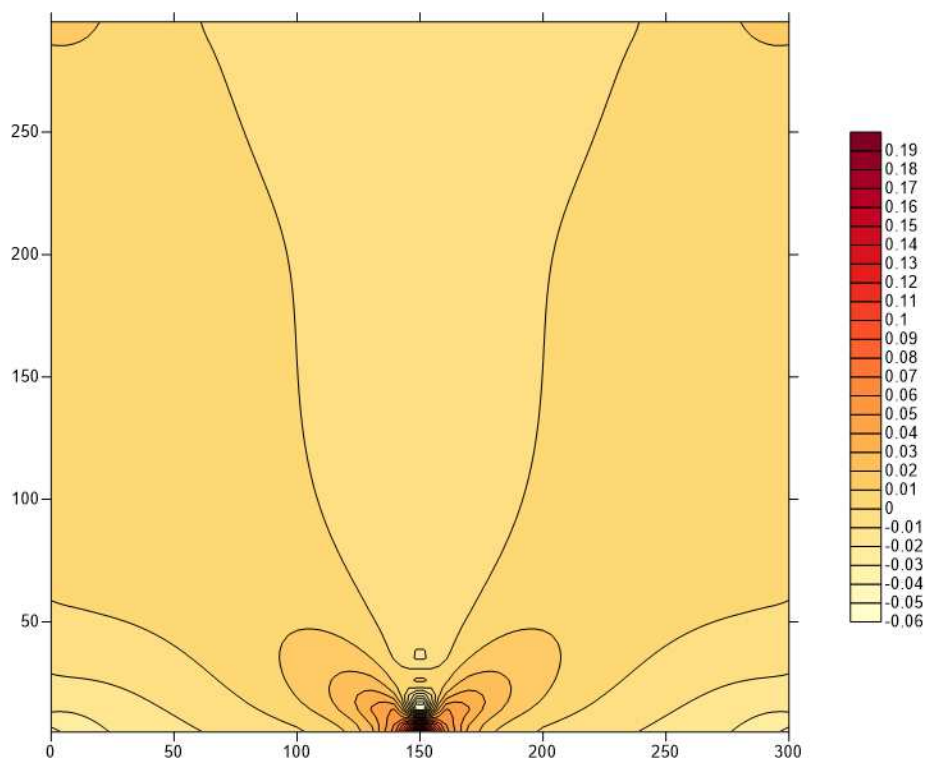


Рис. 12. Распределение напряжений $\sigma_{2,2}$ (кН/см²) (на основе элементных).

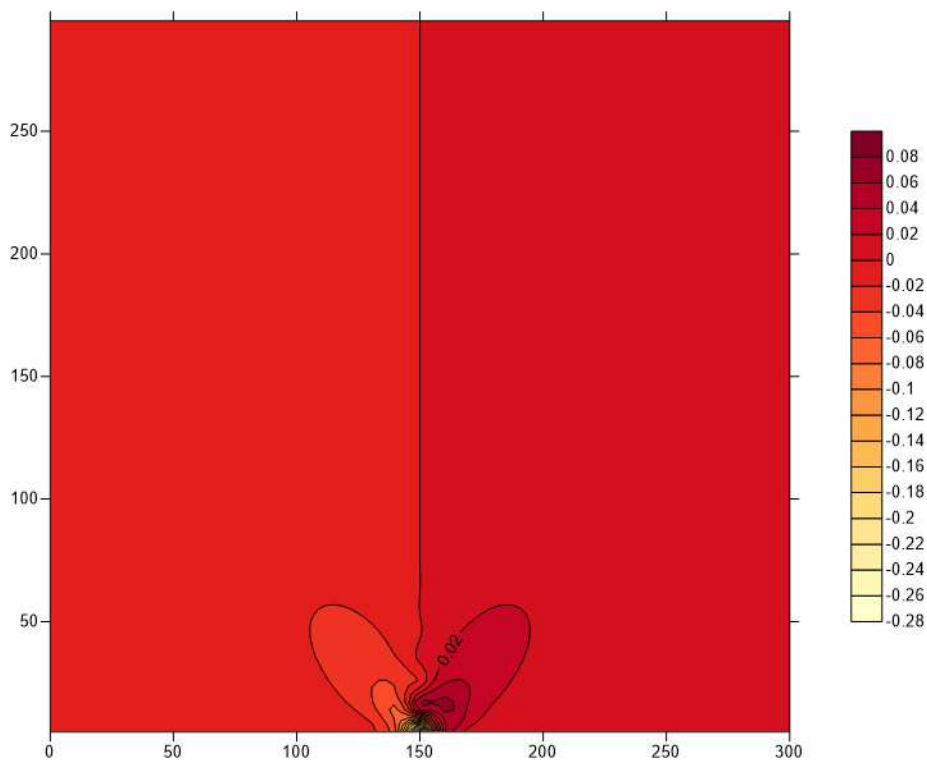


Рис. 13. Распределение напряжений $\sigma_{1,2}$ (кН/см²) (на основе элементных).

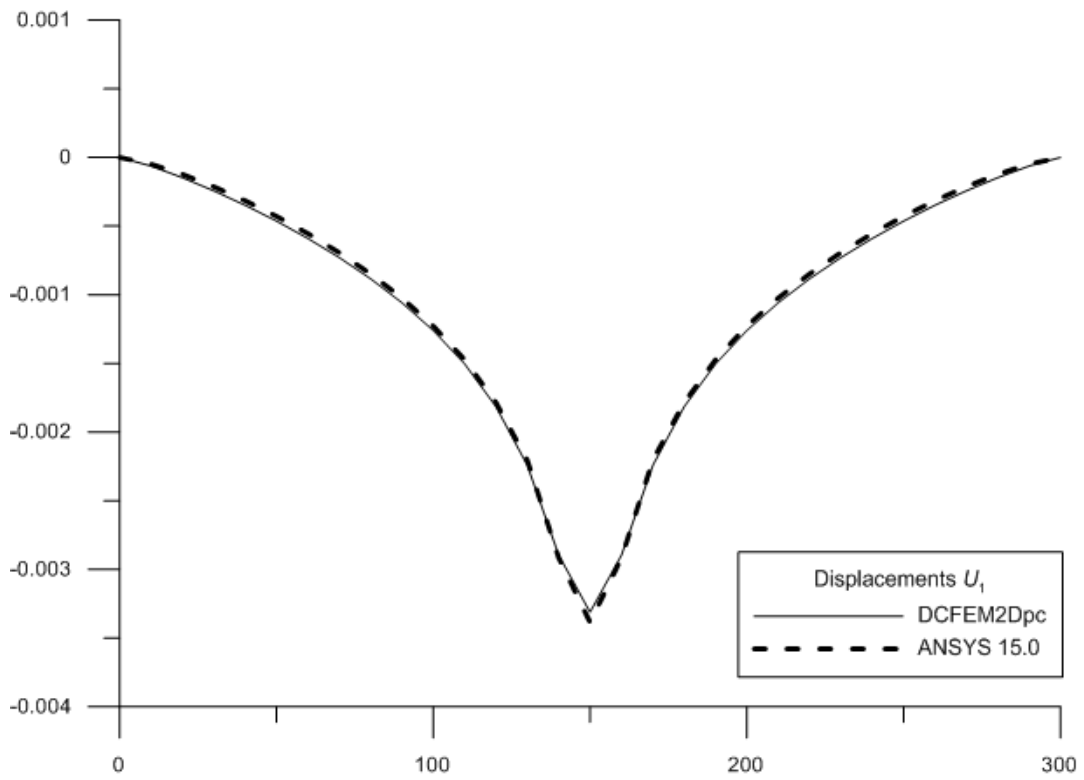


Рис. 14. Узловые перемещения u_1 по сечению $x_1 = 10$ (см).

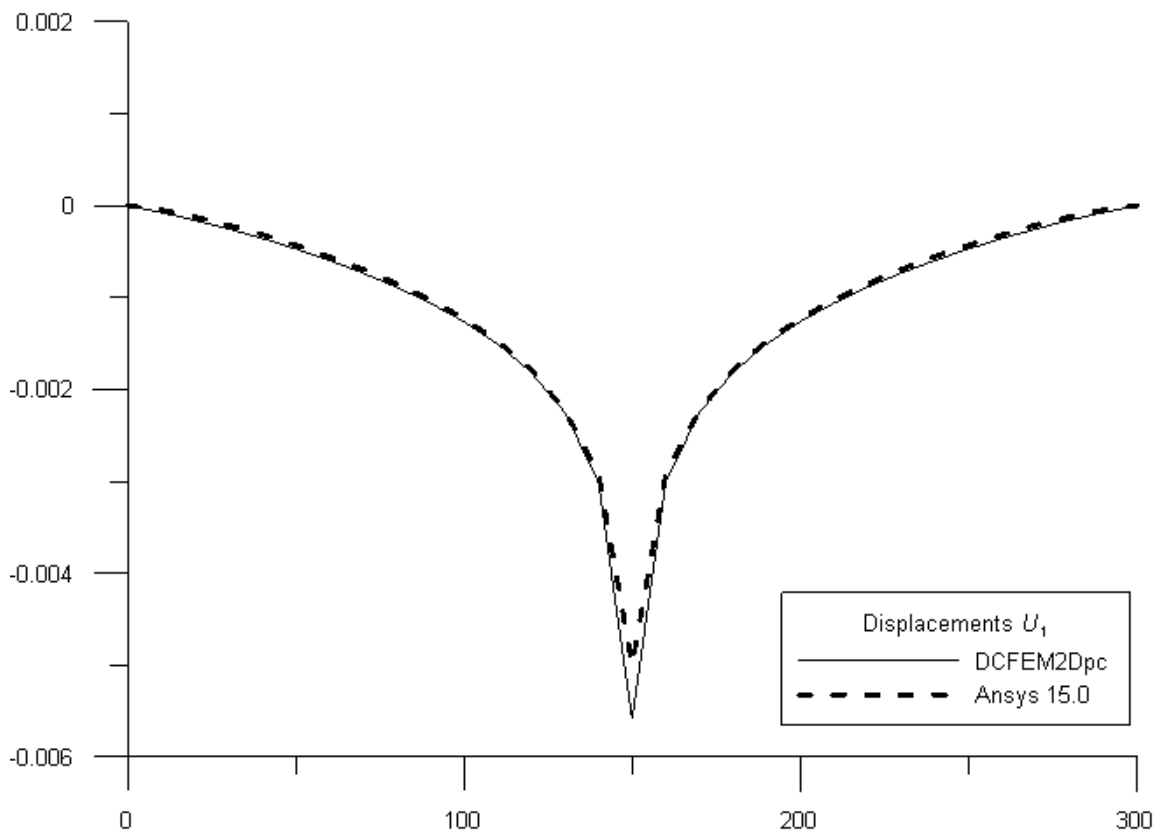


Рис. 15. Перемещения u_1 по сечению $x_1 = 0$ (см).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

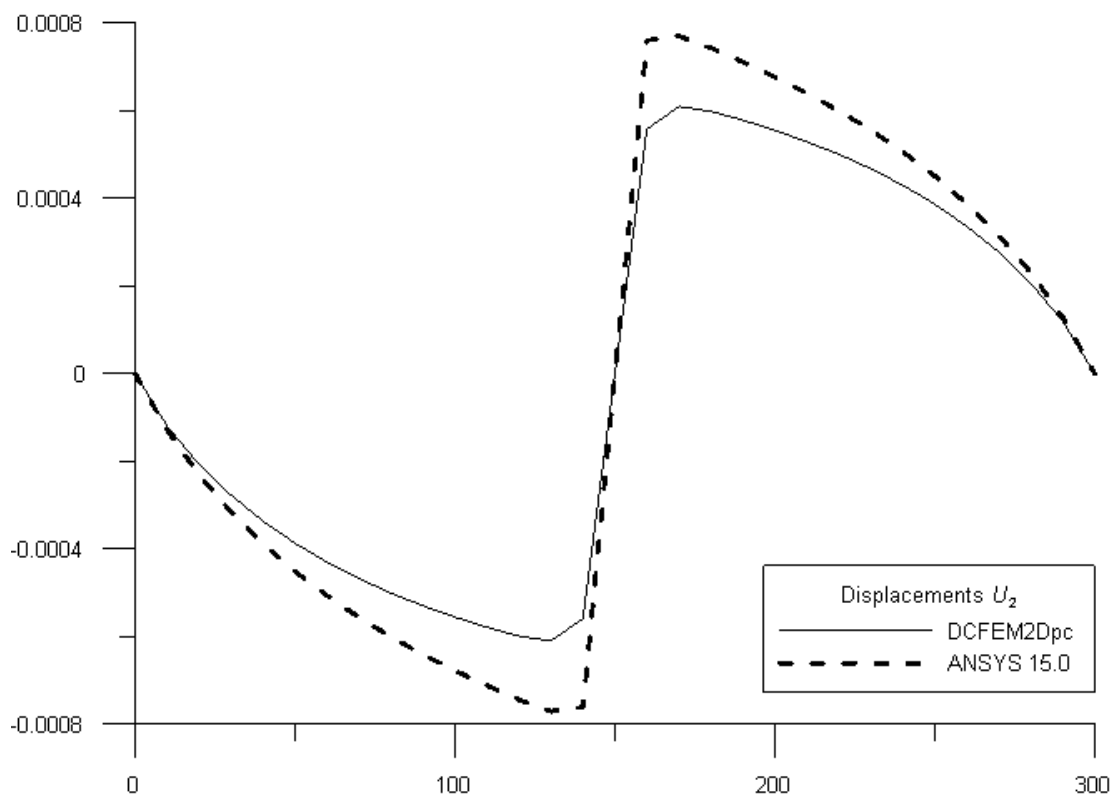


Рис. 16. Перемещения u_2 по сечению $x_1 = 0$ (см).

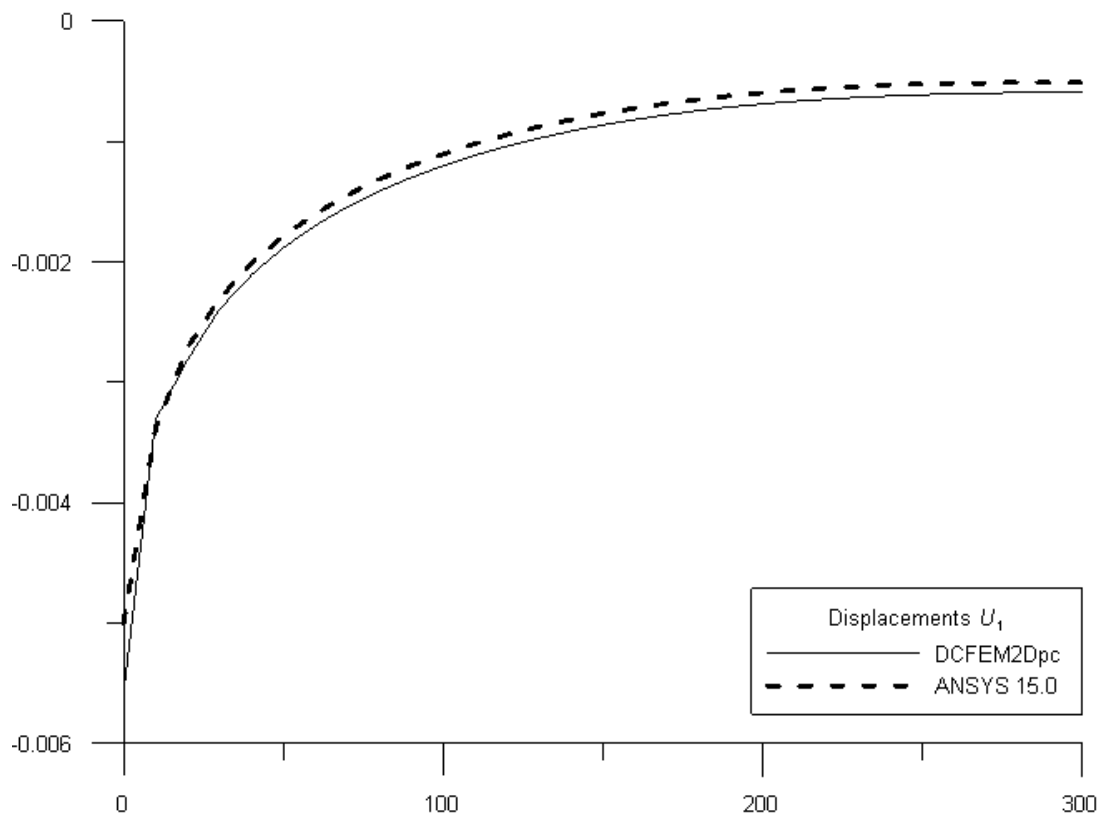


Рис. 17. Перемещения u_1 по сечению $x_2 = l/2 = 150$ (в см).

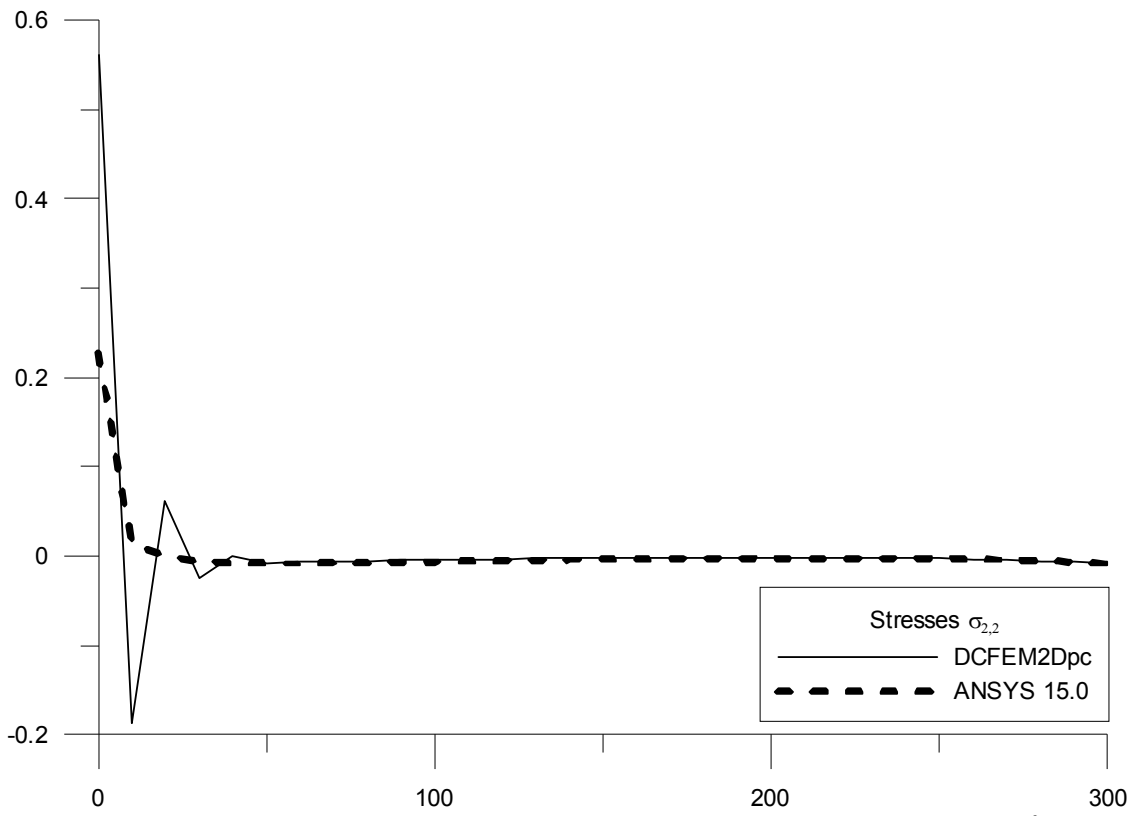


Рис. 18. Узловые напряжения $\sigma_{2,2}$ по сечению $x_2 = l/2 = 150$ (в $\text{кН}/\text{см}^2$).

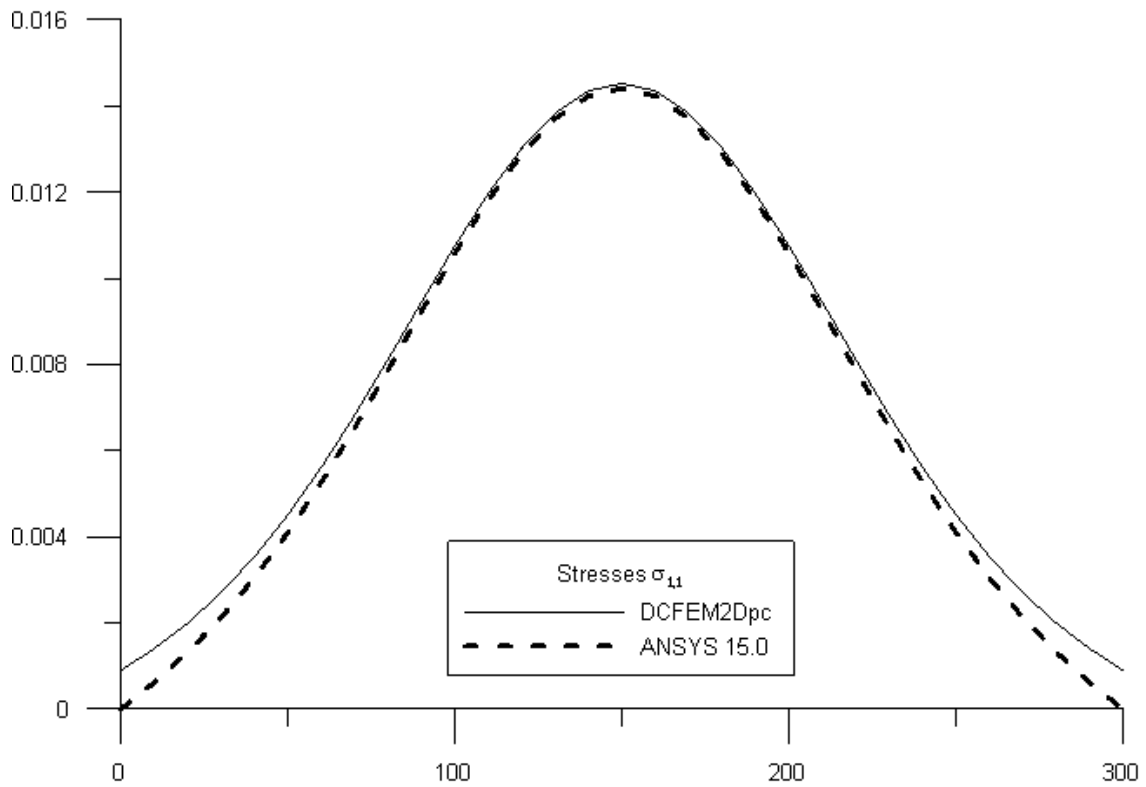


Рис. 19. Узловые напряжения $\sigma_{1,1}$ по сечению $x_1 = h/2 = 150$ (в $\text{кН}/\text{см}^2$).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления.
Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

Резюмируя полученные данные, можно сделать вывод о том, что результаты расчета, полученные по программным комплексам ANSYS и *DCFEM2Dpc*, в целом, хорошо согласуются друг с другом. Дискретно-континуальный метод конечных элементов ожидаемо оказался более эффективным в наиболее ответственных, потенциально опасных с точки зрения разрушения зонах конструкции, т.е. в местах возникновения так называемых краевых эффектов, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена стандартным методом конечных элементов.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального

метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.

2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.
4. **Басов К.А.** ANSYS для конструкторов. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 248 с.
5. **Басов К.А.** ANSYS. Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 640 с.
6. Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). – М.: ЗАО НИЦ «СтаДиО», ГОУ ВПО МГСУ, 2009 г. Свидетельство РААСН о верификации ПС № 02/ANSYS/2009 от 10.07.2009 года.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
8. **Каплун А.Б., Морозов Е.В., Олферьева М.А.** ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 272 с.
9. **Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф.** ANSYS для инженеров. Справочное пособие. – М.: Машиностроение – 1, 2004. – 512 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, студент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

Щербина Сергей Викторович, аспирант кафедры МОДМТМ, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: serg_msk89@mail.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe

Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Oleg A. Negrozov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

Sergey V. Scherbina, Postgraduate student, Department of MODMTM, Engineer of Research & Educational Center of Computer Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 929-50-17, E-mail: serg_msk89@mail.ru

**О ВЕРИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-
ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ВДОЛЬ
ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ.
СОПОСТАВЛЕНИЯ С ПРОГРАММНЫМ КОМПЛЕКСОМ
ANSYS MECHANICAL.**

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, Моджтаба Аслами,
О.А. Негрозов, С.В. Щербина*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья продолжает серию работ, посвященную верификации дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова для решения задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений, в данном случае статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Верификация осуществляется путем сравнения результатов упругого линейного расчета балки-стенки с использованием ДКМКЭ и результатов, полученных с помощью универсального программного комплекса промышленного ANSYS Mechanical (версия 15.0), реализующего метод конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, статический расчет, балка-стенка, кусочно-постоянные физико-геометрические параметры

**ABOUT VERIFICATION OF DISCRETE-CONTINUAL
FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS
OF STATIC ANALYSIS OF DEEP BEAMS
WITH PIECEWISE CONSTANT PHYSICAL AND
GEOMETRICAL PARAMETERS ALONG BASIC DIRECTION.
COMPARISONS WITH ANSYS MECHANICAL.**

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Mojtaba Aslami,
Oleg A. Negrozov, Sergey V. Scherbina*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper begins a series of works devoted to the verification of discrete-continual finite element method (DCFEM) of structural analysis, proposed by Prof. Alexander B. Zolotov and Prof. Pavel A. Akimov. Static analysis of deep beams with piecewise constant physical and geometrical parameters along basic direction is under consideration. Verification is performed by comparing the results of linear analysis of deep beam with the use of DCFEM and corresponding results obtained by using ANSYS Mechanical (version 15.0), which implements the finite element method (FEM).

Key words: discrete-continual finite element method, finite element method, static analysis, deep beam, piecewise constant physical and geometrical parameters

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве верификационной задачи рассмотрим пример, уже изученный в [...]. Итак, пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения и перемещения) балки-стенки, боковые вертикальные грани которой шарнирно закреплены (рис. 1). Геометрические расчетные параметры: $l = 600$ см; $h = 300$ см; $l_1 = l_2 = 300$ см; $a_1 = a_2 = 150$ см. Расчетные параметры материала балки: для первой половины $E_1 = 3000$ кН/см², $\nu = 0.16$; для второй половины $E_2 = 3500$

кН/см², $\nu = 0.14$. Расчетные параметры внешней нагрузки: $P_1 = P_2 = 100$ кН.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS.

Текст исполняемой программы (с соответствующими пояснениями в тексте программы) на языке APDL для комплекса ANSYS представлен ниже.

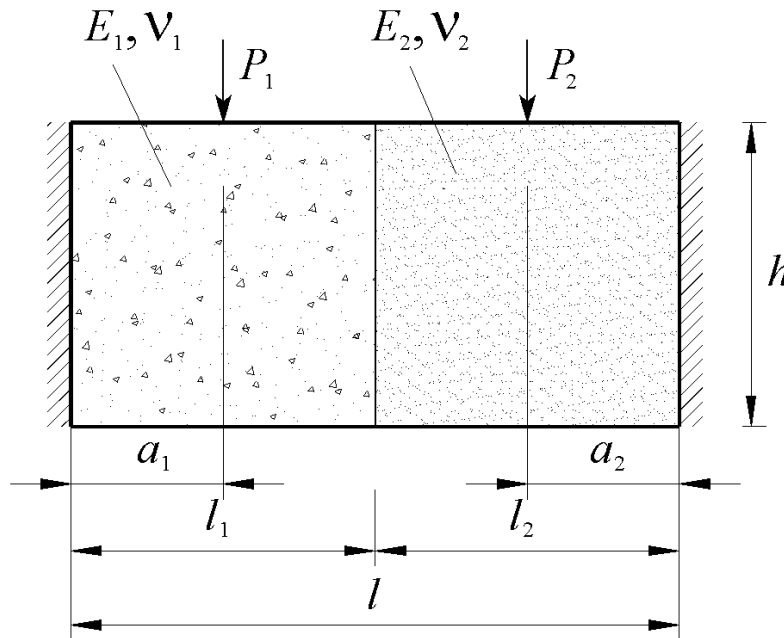


Рис. 1. Расчетная схема балки-стенки.

```

/TITLE, Static Analysis of Two-dimensional Beam ! Заголовок
! Статический расчет
! двумерной балки-стенки
FINISH ! Завершение работы
! процессора
/CLEAR, START ! Обнуление базы данных
! перед решением новой задачи
/OUTPUT, , Outp ! Направляем вывод в файл
! Ввод параметров для дальнейшего использования *****
DL=300 ! Длина балки-стенки, см
H=300 ! Высота балки-стенки, см
DELTA=20 ! Условная толщина
! балки-стенки, см
A=150 ! Координата точки приложения
! силы, см
E=3000 ! Модуль упругости материала
! балки-стенки, кН/см2
    
```

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

```

PNU1=0.16          ! Коэффициент Пуассона
                   ! материала балки-стенки
P=100/DELTA        ! Величина приложенной силы
                   ! (приведенная), кН
MAT1=1             ! Задание номера материала
                   ! балки-стенки
DLFE=10            ! Задание максимальной длины
                   ! стороны конечного элемента
/COM, *****      ! Помещаем строку комментария
                   ! длиной до 75 символов
                   ! в выходные данные
/PREP7             ! Входим в препроцессор /prep7
UIMP, MAT1, EX, EY, EZ, E, E, E  ! Задание модуля упругости
                   ! материала
UIMP, MAT1, NUXY, NUYZ, NUXZ, PNU, PNU, PNU  ! Задание коэффициента Пуассона
                   ! материала
BLC4, 0, 0, DL, H  ! Создание прямоугольника
                   ! по координатам его вершин
                   ! (балка-стенка)
ET, 1, PLANE182    ! Задаем конечный элемент
                   ! PLANE182 (для решения
                   ! плоских задач теории
                   ! упругости; задан номер 1)
KEYOPT, 1, 3, 0    ! Задание опции элемента
                   ! (плоская деформация)
TYPE, 1            ! Задаем тип элемента из ранее
                   ! выбранных с помощью команды
                   ! ET (вновь определяемые
                   ! конечные элементы будут
                   ! относиться к этому типу)
MAT, MAT1          ! Задаем атрибуты материала
                   ! с номером MAT1
ESIZE, DLFE        ! Определяем размер конечных
                   ! элементов (максимальная
                   ! длина элемента принята
                   ! равной 10 см)
AMESH, ALL         ! Генерация узлов нерегулярной
                   ! сетки и плоских элементов
ALLSEL             ! Выбор всех объектов модели
NSEL, S, LOC, X, 0, 0  ! Выбор узлов для которых x=0
                   ! (левая вертикальная граница
                   ! балки-стенки)
D, ALL, ALL        ! Определяем закрепления
                   ! всех перемещений на левой
                   ! вертикальной границе
                   ! балки-стенки
NSEL, S, LOC, X, DL, DL  ! Выбор узлов для которых x=0
                   ! (правая вертикальная граница
                   ! балки-стенки)
D, ALL, ALL        ! Определяем закрепления
                   ! всех перемещений на правой
                   ! вертикальной границе
                   ! балки-стенки
NSEL, S, LOC, X, A, A  ! Выбор узлов для которых x=A
                   ! (сечение приложения силы)
NSEL, R, LOC, Y, 0, 0  ! Выбор точки приложения силы
F, ALL, FY, -P       ! Задание силы
ALLSEL             ! Выбор всех объектов модели
/SOLU              ! Открываем блок решения
SOLVE              ! Запускаем решение на счет
/POST1            ! Запускаем основной блок
                   ! обработки и вывода
                   ! результатов
PLNSOL, U, X       ! Вывод перемещений UX

```

```

PLNSOL, U, Y          ! Вывод перемещений UY
PLNSOL, S, X          ! Вывод напряжений SIGMA_X
PLNSOL, S, Y          ! Вывод напряжений SIGMA_Y
PLNSOL, S, XY        ! Вывод напряжений SIGMA_XY
NNGRT1=31             ! Задание количества точек
                       ! табуляции по оси x1
NNGRT2=31             ! Задание количества точек
                       ! табуляции по оси x2
NEGRT1=30             ! Задание количества элементов
                       ! табуляции по оси x1
NEGRT2=30             ! Задание количества элементов
                       ! табуляции по оси x2
PATH, UNGRT2, 2, NNGRT2, NEGRT2 ! Задание параметров табуляции
                       ! узловых перемещений по оси x2
PPATH, 1, , 0, 0, 0  ! Задание первой точки сечения
PPATH, 2, , DL, 0, 0 ! Задание второй точки сечения
                       ! табуляции по оси x2
PDEF, U2, U, Y        ! Задание (определение)
                       ! требуемых компонент
                       ! перемещений вдоль оси x2
PLPATH, U2            ! Построение графика
                       ! перемещений вдоль оси x2
                       ! в заданном сечении
*DIM, U2TAB, , NNGRT2, 1 ! Определение массива
                       ! перемещений вдоль оси x2
                       ! в заданном сечении
*DO, I, 1, NNGRT2     ! Цикл по I
*GET, U2TAB(I,1), PATH, 0, ITEM, U2, PATHPT, I ! "Выделение" текущего значения
*ENDDO                ! Последний оператор цикла
*CFOPEN, U2TABCSX2, DAT ! Создание файла результатов
*DO, J, 1, NNGRT2     ! Цикл по J
*VLEN, 1              ! Задание мерности
X=(J-1)*DLFE          !
*VWRITE, X, U2TAB(J,1) ! Запись данных в файл
%12.4E;%12.4E         !
*ENDDO                ! Последний оператор цикла
*CFCLOSE              ! Закрытие цикла

```

При расчете в программном комплексе ANSYS использовалась прямоугольная декартова система координат x, y , причем по сравнению системой координат, показанной на рис. 1, будем иметь: $x = x_2, y = -x_1$.

При решении задачи в комплексе ANSYS использовалась равномерная квадратная сетка 60×30 из плоских четырехузловых конечных элементов первого порядка PLANE182. Распределения искомых величин, полученных в программном комплексе ANSYS показаны соответственно на рисунках 2 (перемещение вдоль оси $x - u_x$), 3 (перемещение вдоль оси $y - u_y$), 4 (нормальное напряжение σ_x), 5 (нормальное напряжение σ_y) и 6 (касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ DCFEM2DPC

Для решения задачи в рамках ДКМКЭ использовался авторский программный комплекс *DCFEM2Dpc*, подробно описанный в [1-3]. Аппроксимирующая сетка по направлению x_1 состояла из 30 дискретно-континуальных конечных элементов. Распределения искомых величин, полученных в программном комплексе *DCFEM2Dpc* показаны соответственно на рисунках 7 (перемещение вдоль оси x_1 (рис. 1) – u_1), 8 (перемещение вдоль оси x_2 (рис. 1) – u_2), 9 (нормальное напряжение $\sigma_{1,1}$), 10 (нормальное напряжение $\sigma_{2,2}$) и 11 (касательные напряжения $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

NODAL SOLUTION

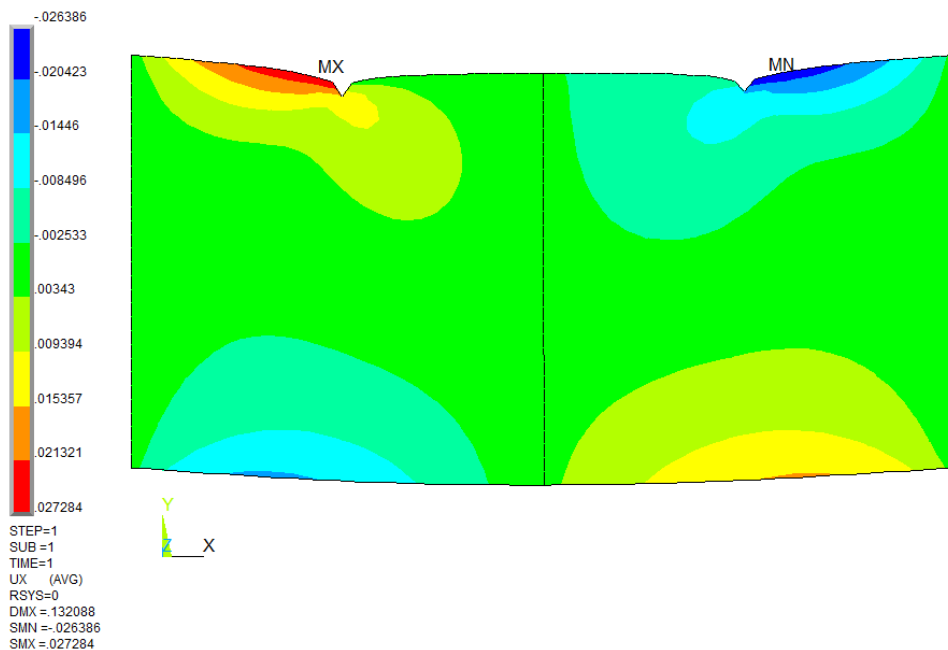


Рис. 2. Распределение перемещений u_x (см).

NODAL SOLUTION

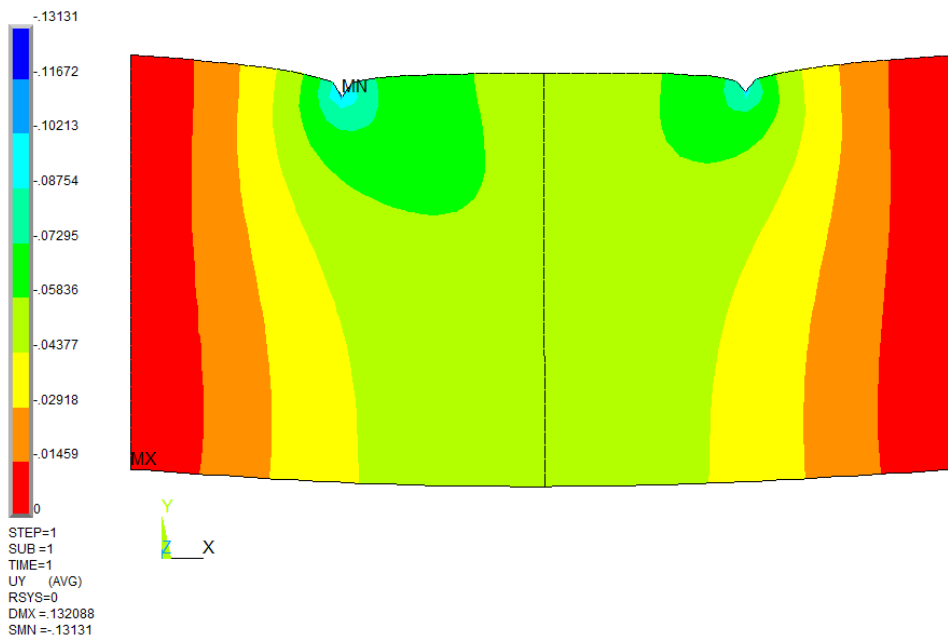


Рис. 3. Распределение перемещений u_y (см).

ELEMENT SOLUTION

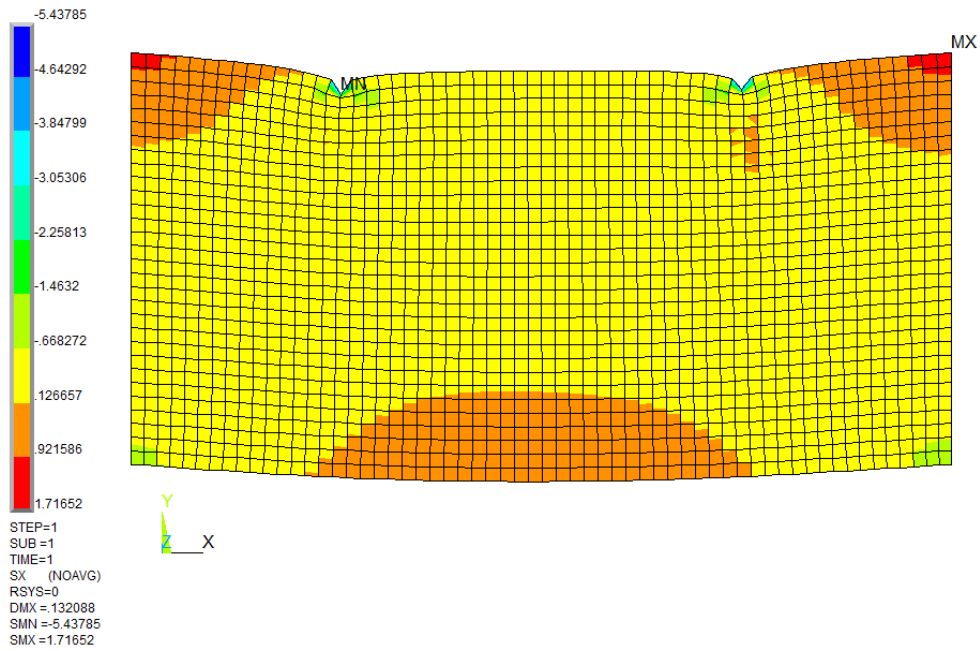


Рис. 4. Распределение напряжений σ_x (кН/см^2) (элементных).

ELEMENT SOLUTION

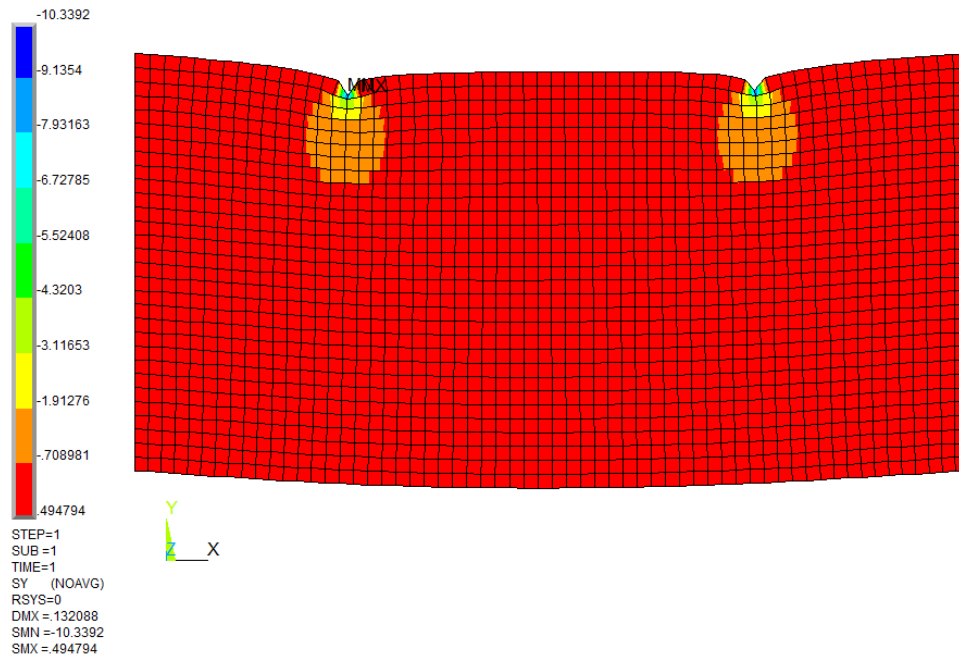


Рис. 5. Распределение напряжений σ_y (кН/см^2) (элементных).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

ELEMENT SOLUTION

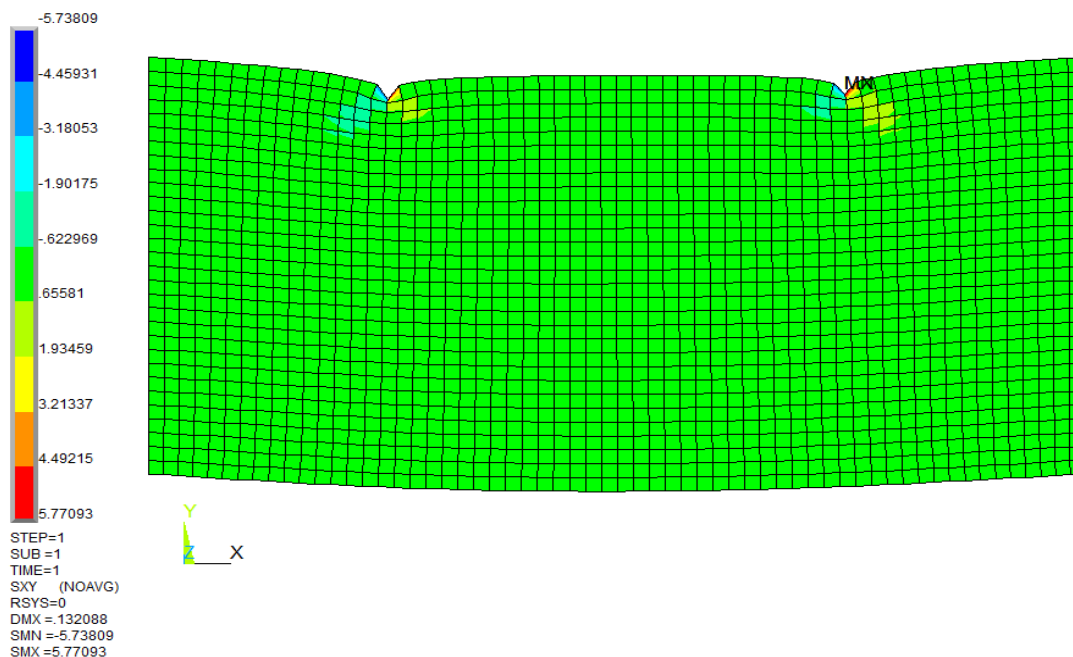


Рис. 6. Распределение напряжений τ_{xy} (kH/cm^2) (элементных).

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

На рисунках 12, 13, 14, 15, 16 и 17 представлены выборочные сопоставления напряжений и перемещений, полученных по программным комплексам ANSYS и *DCFEM2Dpc*, по некоторым характерным сечениям конструкции. Резюмируя полученные данные, можно сделать вывод о том, что результаты расчета, полученные по программным комплексам ANSYS и *DCFEM2Dpc*, в целом, хорошо согласуются друг с другом. Дискретно-континуальный метод конечных элементов ожидаемо оказался более эффективным в наиболее ответственных, потенциально опасных с точки зрения разрушения зонах конструкции, т.е. в местах возникновения так называемых краевых эффектов, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена стандартным методом конечных элементов.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

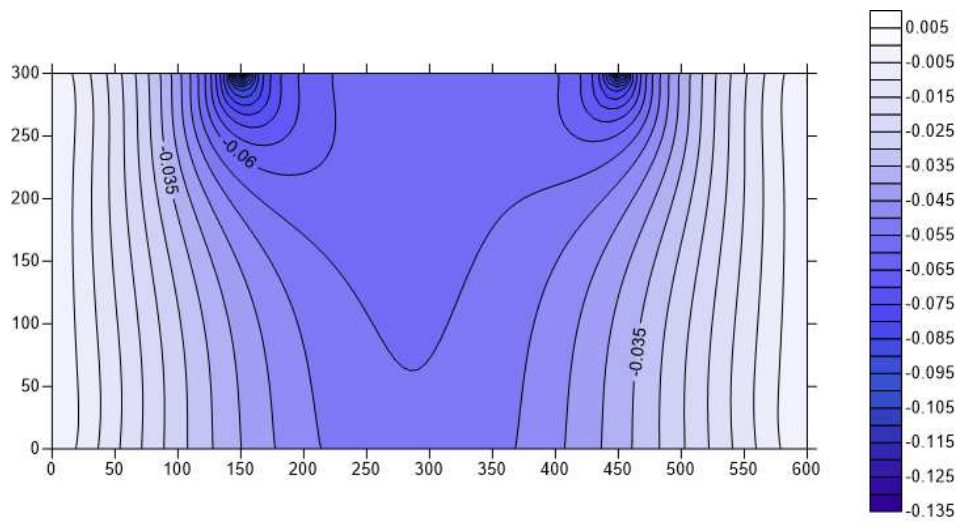


Рис. 7. Распределение перемещений u_1 (см).

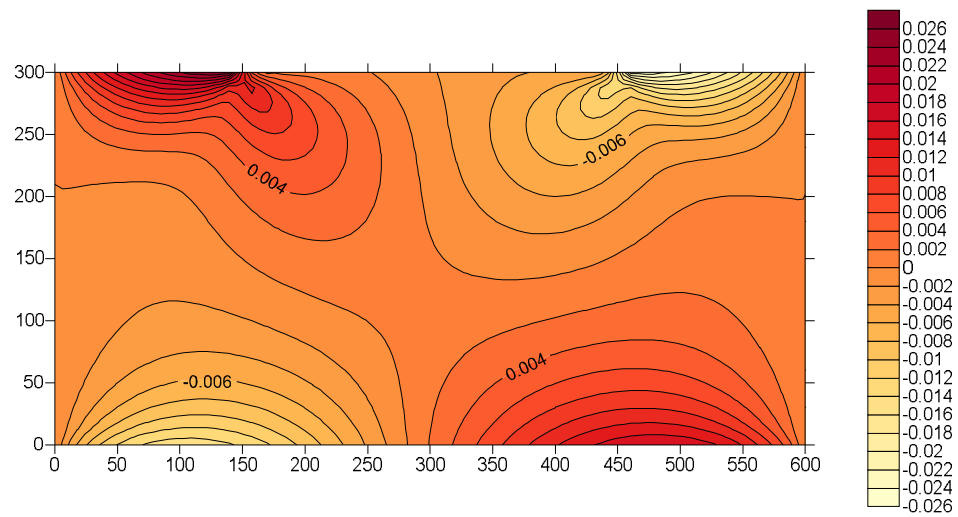


Рис. 8. Распределение перемещений u_2 (см).

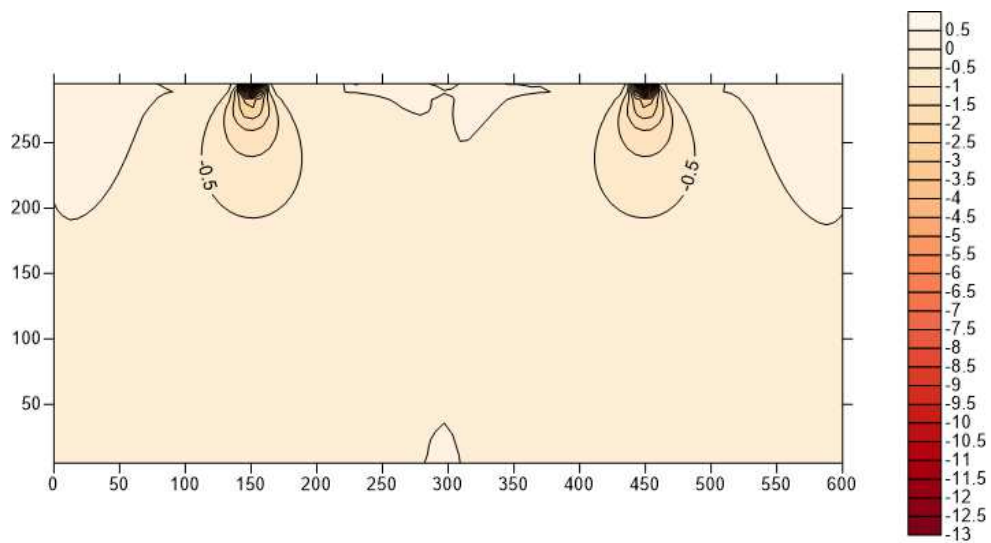


Рис. 9. Распределение напряжений $\sigma_{1,1}$ (kN/cm^2) (на основе элементных).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

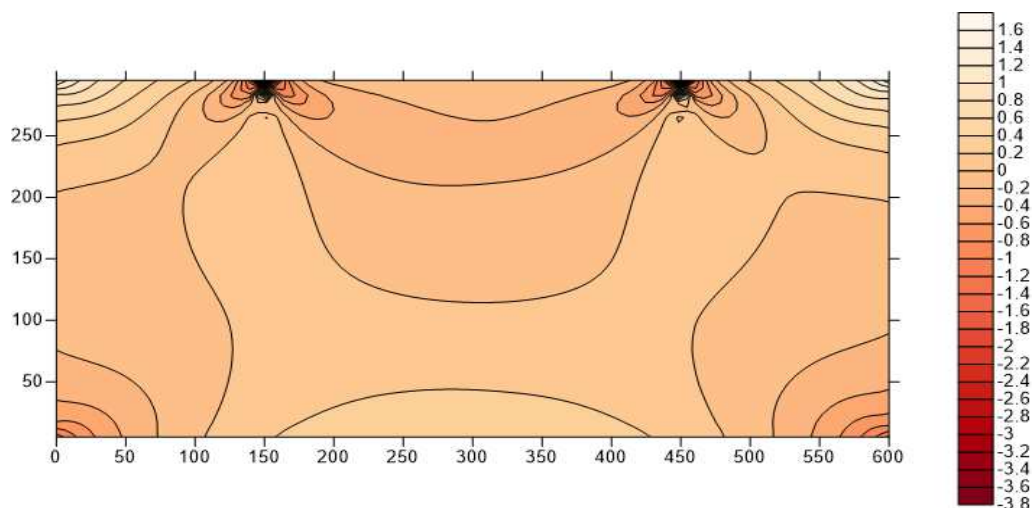


Рис. 10. Распределение напряжений $\sigma_{2,2}$ (kH/cm^2) (на основе элементных).

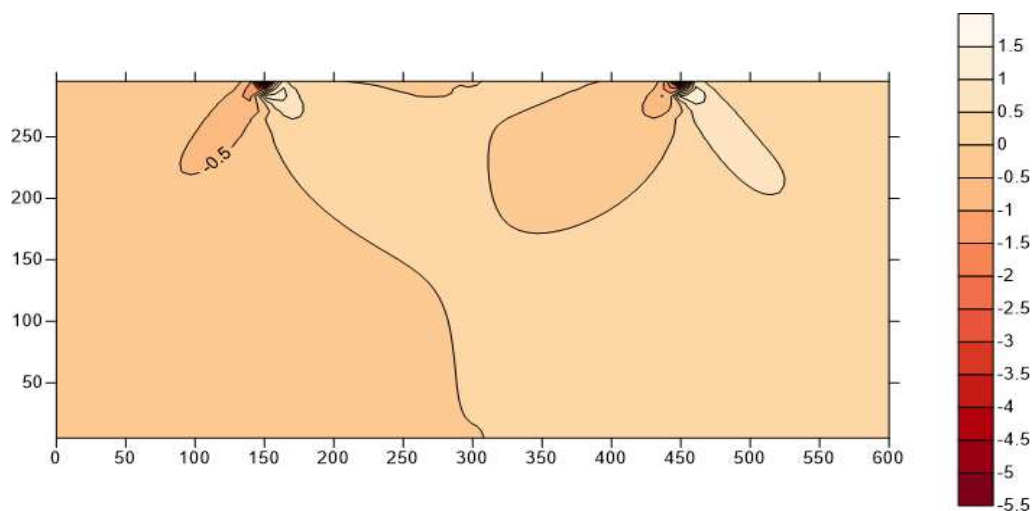


Рис. 11. Распределение напряжений $\sigma_{1,2}$ (kH/cm^2) (на основе элементных).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.

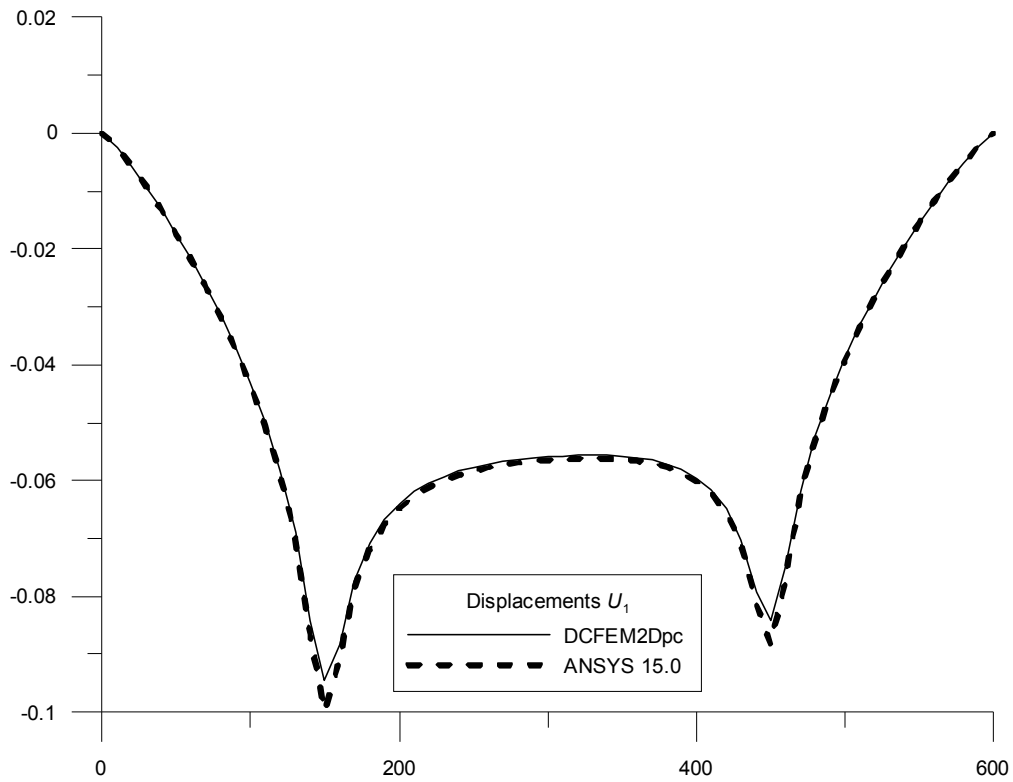


Рис. 12. Узловые перемещения u_1 по сечению $x_1 = 10$ (см).

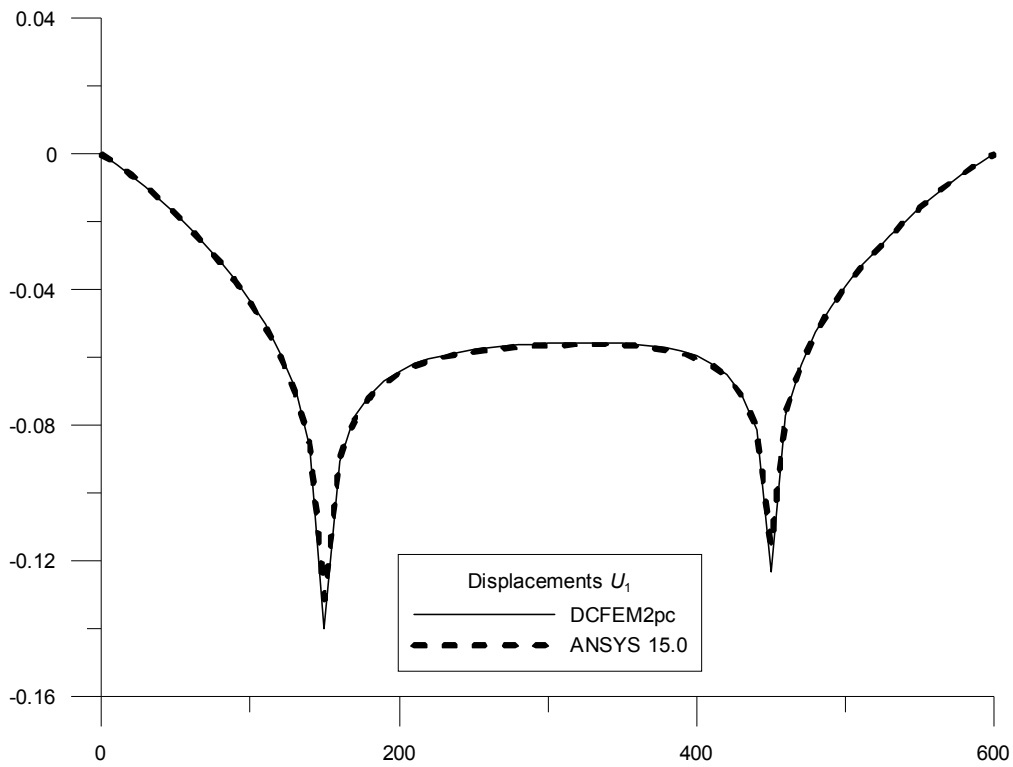


Рис. 13. Перемещения u_1 по сечению $x_1 = 0$ (см).

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

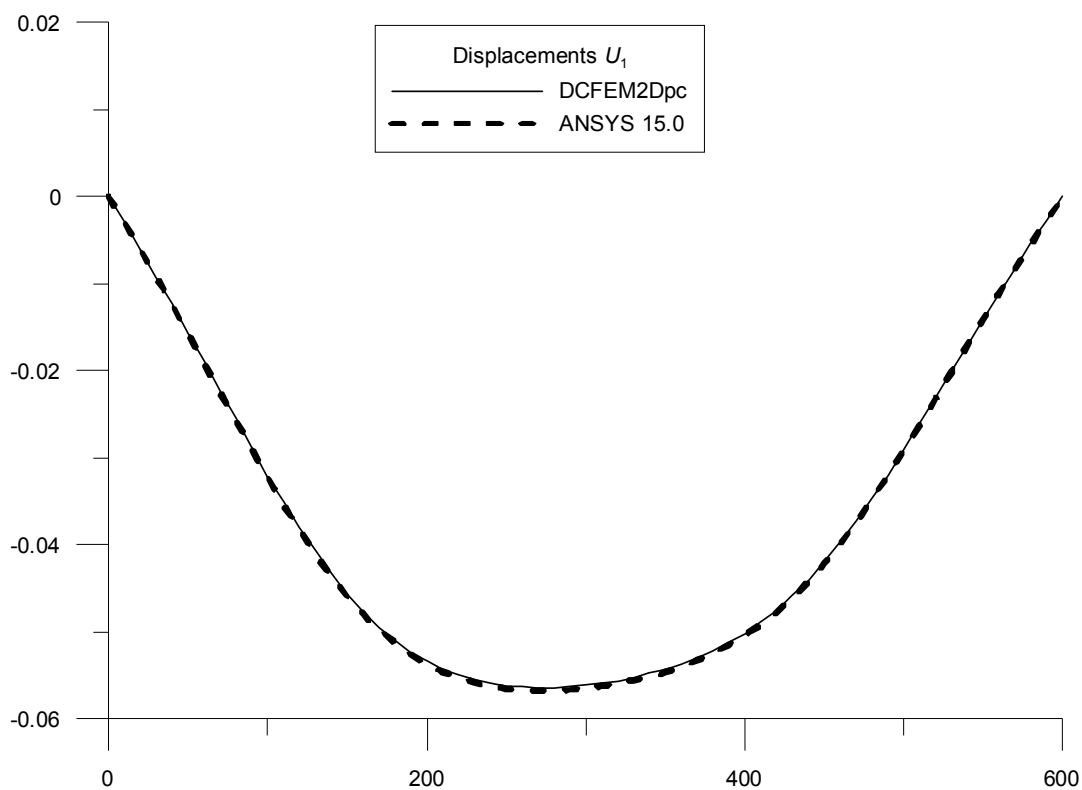


Рис. 14. Перемещения u_1 по сечению $x_2 = l/2 = 150$ (в см).

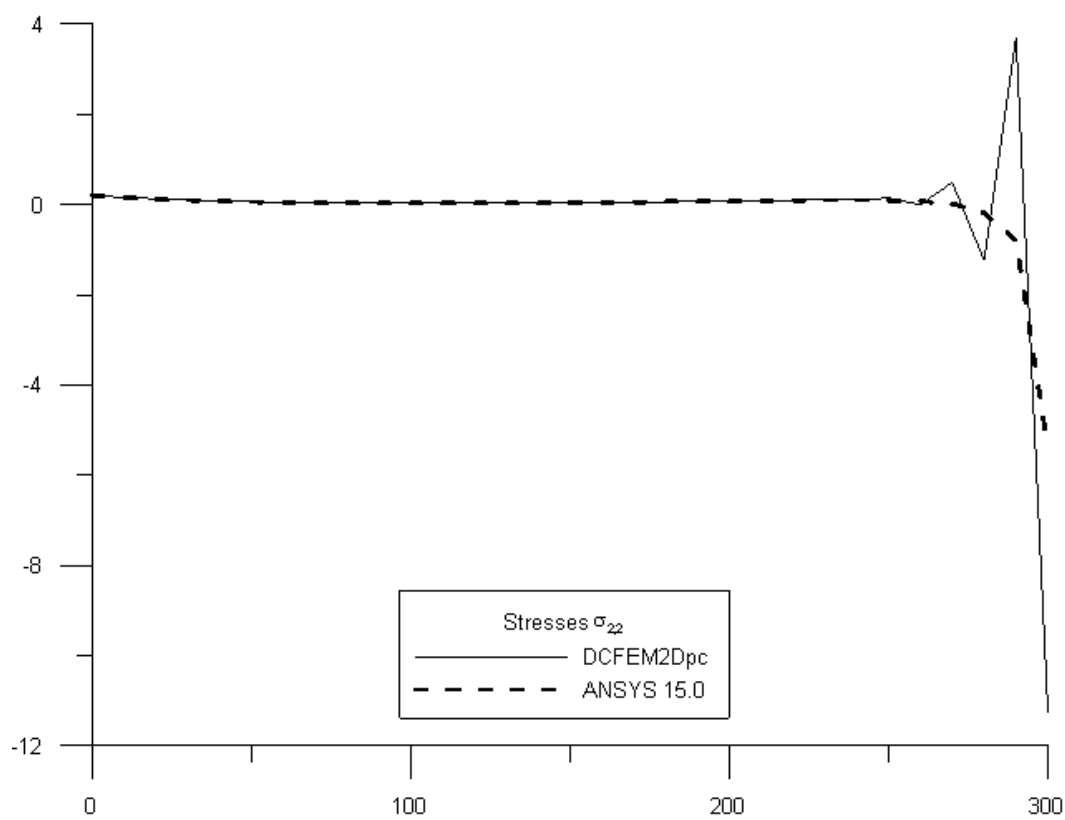


Рис. 15. Узловые напряжения $\sigma_{2,2}$ по сечению $x_2 = l/2 = 150$ (в кН/см^2).

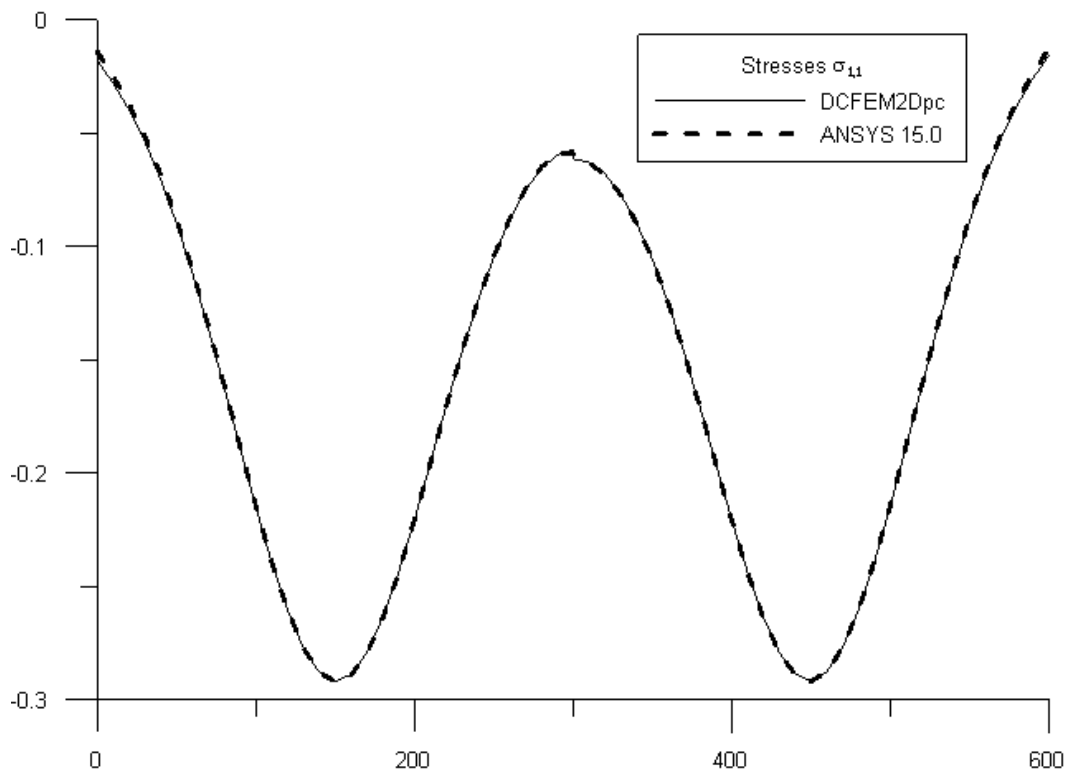


Рис. 16. Узловые напряжения $\sigma_{1,1}$ по сечению $x_1 = h/2 = 150$ (в кН/см^2).

4. **Басов К.А.** ANSYS для конструкторов. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 248 с.
5. **Басов К.А.** ANSYS. Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 640 с.
6. Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). – М.: ЗАО НИЦ «СтаДиО», ГОУ ВПО МГСУ, 2009 г. Свидетельство РААСН о верификации ПС № 02/ANSYS/2009 от 10.07.2009 года.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, студент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

Щербина Сергей Викторович, аспирант кафедры МОДМТМ, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: serg_msk89@mail.ru, niccm@mgsu.ru

О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Mojtaba Aslami, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Oleg A. Negrozov, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

Sergey V. Scherbina, Postgraduate student, Department of MODMTM, Engineer of Research & Educational Center of Computer Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 929-50-17, E-mail: serg_msk89@mail.ru

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ВЛАГОУПРУГОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ СФЕРИЧЕСКОМ МАССИВЕ

В.И. Андреев, А.С. Авершьева

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Приводится численно-аналитическое решение осесимметричной задачи влагоупругости для полого сферического грунтового массива, с источником влаги внутри полости. Рассматривается установившийся процесс влагопереноса. Неоднородность массива обусловлена зависимостью модуля деформации грунта от влажности. Напряженное состояние массива обусловлено вынужденными влажностными деформациями и неравномерным давлением отпора грунта. Описан метод расчета радиально-неоднородной осесимметричной задачи теории упругости для толстостенной сферической оболочки.

Ключевые слова: влагоупругость, неоднородность, вынужденные деформации, толстостенная оболочка, влагоперенос, грунт, глина

AXISIMMETRIC MOISTURE-ELASTISITY PROBLEM IN INHOMOGENEOUS SPHERICAL ARRAY

Vladimir I. Andreev, Anatoliy S. Avershyev

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The numerical-analytical solution of the axisymmetric problem of moisture-elasticity for hollow spherical soil massive is provided. We consider the steady-state water transfer. Inhomogeneity of the array due to the dependence of the deformation modulus on the soil moisture. Stress state of the array caused by forced deformations and uneven pressure rebuff of the soil. The method for solving non-axisymmetric problems with radial inhomogeneity in polar coordinates is described. Diagrams on the stress fields in homogeneous and inhomogeneous formulations of the problem are provided. It describes a method of calculating radial inhomogeneous axisymmetric problem of theory of elasticity for thick-walled spherical shell.

Key words: moisture-elasticity, inhomogeneity, induced deformation, thick-walled shells, moisture transfer, soil, clay

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛАГИ

Типовой задачей влагоупругости является задача о разрыве трубопровода. В представленной работе нами рассмотрена такая задача для неоднородного сферического грунтового массива.

Достоинством работы является учет удельного веса рассматриваемого грунтового массива и увеличивающегося с глубиной внешнего отпора грунта, благодаря чему задача механики является двумерной.

Задача о распределении влаги в телах описывается вторым законом Фика [1 – 3] и со-

ответствует процессу диффузии. Нами рассмотрен стационарный процесс влагопроводности при граничных условиях Дирихле:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\ r = a: \quad w &= w_s \\ r = b: \quad w &= w_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первое граничное условие означает, что на границе с трубой $r = a$ влажность имеет максимального значения $w = w_s$, характерное для

водонасыщенного грунта. Второе граничное условие означает, что на внешней границе рассматриваемого массива $r = b$ влажность имеет естественное для грунта значение $w = w_0$.

Решение задачи (1) представлено математически (2) и графически (рис. 1).

$$w(r) = \frac{a \cdot b \cdot (w_s - w_0)}{b - a} \cdot \frac{1}{r} - \frac{a \cdot w_s - b \cdot w_0}{b - a}. \quad (2)$$

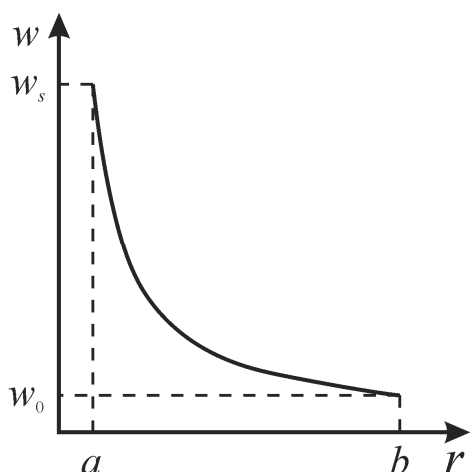


Рис. 1. Влажностное поле внутри сферического массива при стационарном режиме.

Влажность служит причиной набухания грунта, в результате чего в нем возникают вынужденные деформации

$$\varepsilon_b = \int_{w_0}^w \beta(w) dw, \quad (3)$$

где β – коэффициент набухания.

Эксперименты показывают, что для глины связь $\varepsilon_b \sim w$ практически линейна [4], поэтому с большой точностью можно считать коэффициент набухания β постоянным. Также для глины известны экспериментальные данные, описывающие зависимость модуля упругости E от влажности w (рис. 2) [5, 6].

Эти данные могут быть довольно точно аппроксимированы степенной функцией

$$E(w) = E_0 \cdot (w/w_s)^{-k}, \quad (4)$$

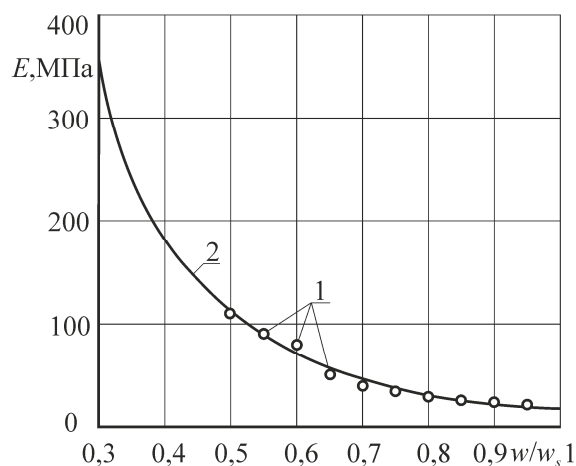


Рис. 2. Зависимость модуля упругости глины от относительной влажности.

1 – экспериментальные данные;

2 – график аппроксимирующей функции

где $E_0 = 19,88$ МПа – модуль упругости влагонасыщенной глины; $w_s = 0,363$ – влажность насыщенной глины; $k = 2,4$ – коэффициент степенной функции.

Неоднородность задачи возникает при рассмотрении модуля упругости в форме (4).

2. МЕТОД РАСЧЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Приступая к расчету полей напряжений, обсудим влияние на них веса грунта [7]. На рис. 3 изображена расчетная схема, соответствующая задаче о концентрации напряжений вблизи сферического отверстия в полупространстве. Геометрически задача обладает центральной симметрией. Однако из-за того, что нагрузки, приложенные к внешней поверхности, увеличиваются с глубиной H , а также из-за наличия бокового отпора, обусловленного коэффициентом $\nu/(1 - \nu)$, задача не будет являться центральносимметричной. Равнодействующая внешнего давления уравновешивается весом вырезанного объема, т.е. задачу следует решать с учетом объемных сил, обусловленных удельным весом породы γ .

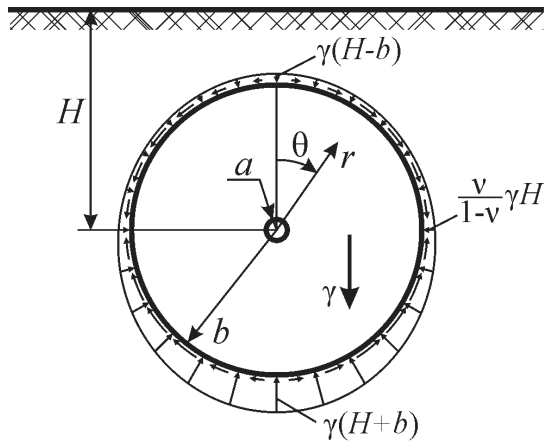


Рис. 3. Расчетная схема решения задачи о распределении напряжений вблизи подземной сферической полости.

того, что нагрузки, приложенные к внешней поверхности, увеличиваются с глубиной H , а также из-за наличия бокового отпора, обусловленного коэффициентом $\nu/(1-\nu)$, задача не будет являться центральносимметричной. Равнодействующая внешнего давления уравновешивается весом вырезанного объема, т.е. задачу следует решать с учетом объемных сил, обусловленных удельным весом породы γ .
Имеем:

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

– параметры Ляме;

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

– модуль объемного сжатия; ϵ_B – вынужденные деформации, в общем случае зависящие от координат r, θ .

Метод решения задачи представлен в перемещениях. При подстановке соотношений Коши в соотношения Дюгамеля-Неймана в форме Ляме для случая осевой симметрии

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\dots) = 0; \quad w = 0$$

получим выражения напряжений через перемещения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \cdot \text{ctg} \theta \right) + \\ &+ 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - 3K \cdot \epsilon_B; \\ \sigma_\theta &= \lambda \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \cdot \text{ctg} \theta \right) + \\ &+ 2\mu \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - 3K \cdot \epsilon_B; \\ \sigma_\varphi &= \lambda \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \cdot \text{ctg} \theta \right) + \\ &+ 2\mu \cdot \left(\frac{u}{r} + \frac{\nu}{r} \cdot \text{ctg} \theta \right) - 3K \cdot \epsilon_B; \\ \tau_{r\theta} &= \mu \cdot \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]; \\ \tau_{r\varphi} &= 0; \\ \tau_{\theta\varphi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в уравнения равновесия получим аналог уравнений Ляме, но в отличие от них имеющий зависимость механических характеристик от координат. Если рассматривать только радиальную неоднородность материала, то эти уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} & \mu \cdot \nabla^2 u + 3(\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{cp}}{\partial r} - \\ & - \frac{2\mu}{r^2} \cdot \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cdot \operatorname{ctg} \theta \right) + 3 \frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \varepsilon_{cp} + \\ & + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - 3 \frac{\partial}{\partial r} (K \cdot \varepsilon_b) + R = 0; \\ & \mu \cdot \nabla^2 v + \frac{3(\lambda + \mu)}{r} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{cp}}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\mu}{r^2} \cdot \left(2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \Theta = 0. \end{aligned} \right\} (6)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$3\varepsilon_{cp} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cdot \operatorname{ctg} \theta.$$

Решение системы уравнений (6) следует искать в виде разложений в ряды Фурье по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \cdot P_n(\cos \theta); \\ v(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r) \cdot \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полином Лежандра n -ой степени, являющийся решением уравнения Лежандра [8, 9]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} + \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \operatorname{ctg} \theta + \\ & + n \cdot (n+1) \cdot P_n(\cos \theta) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для целочисленных значений n полиномы Лежандра образуют полную ортогональную систему функций в интервале $-1 \leq t \leq 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) \cdot P_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

(6) Здесь и далее $t = \cos \theta$.

Входящие в систему уравнений (6) объемные нагрузки и вынужденные деформации также могут быть разложены в ряды Фурье по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cdot P_n(t); \quad \Theta(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_b(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r) \cdot P_n(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где коэффициенты разложения R_n , T_n и g_n определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^1 R(t) \cdot P_n(t) dt; \\ \Theta_n &= \frac{1}{\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta} \right)^2 dt} \cdot \int_{-1}^1 \Theta(t) \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta} dt; \\ g_n(r) &= \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \varepsilon_b(r, t) \cdot P_n(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

После разложений в ряды всех составляющих системы уравнений (6) с помощью уравнения Лежандра (8) можно получить ряд систем из двух ОДУ относительно функций $u_n(r)$ и $v_n(r)$ для каждого n :

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \cdot u_n'' + \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} + (\lambda + 2\mu)' \right] \cdot u_n' - \\ & - \left[\frac{n \cdot (n+1) \cdot \mu + 2(\lambda + 2\mu)}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right] \cdot u_n + \\ & + n \cdot (n+1) \cdot \left[-\frac{\lambda + \mu}{r} \cdot v_n' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \cdot v_n \right] - 3(K \cdot g_n)' + R_n = 0; \\ & \mu \cdot v_n'' + \left(\frac{2\mu}{r} + \mu' \right) \cdot v_n' - \left[n \cdot (n+1) \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\mu'}{r} \right] \cdot v_n + \frac{\lambda + \mu}{r} \cdot u_n' + \\ & \left. + \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{r^2} + \frac{\mu'}{r} \right] \cdot u_n + \Theta_n = 0. \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

В уравнениях (11) штрих означает дифференцирование по радиусу. Аналогично могут быть преобразованы выражения для напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{r,n}(r) \cdot P_n(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) \cdot u_n' + \frac{2\lambda}{r} \cdot u_n - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda \cdot n \cdot (n+1)}{r} \cdot v_n - 3K \cdot g_n \right] \cdot P_n(t); \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}(r) \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot \left(v_n' - \frac{v_n}{r} + \frac{u_n}{r} \right) \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta}. \end{aligned} \right.$$

Нормальные p и касательные q нагрузки, действующие на границах массива, следует представить в виде рядов, аналогичных (7):

$$\left. \begin{aligned} p(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot P_n(t); \\ q(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Коэффициенты разложения p_n и q_n определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^1 p(t) \cdot P_n(t) dt; \\ q_n &= \frac{1}{\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta} \right)^2 dt} \cdot \int_{-1}^1 q(t) \cdot \frac{\partial P_n(t)}{\partial \theta} dt. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для постановки граничных условий в напряжениях следует использовать равенства:

$$\sigma_r = -p; \quad \tau_{r\theta} = q. \quad (14)$$

При добавлении к системам уравнений (11) граничных условий (14) будет получен ряд замкнутых краевых задач для каждого n . Такой метод решения описан в [7, 10, 11]

3. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЛАГОУПРУГОСТИ

В представленной работе рассмотрена задача со следующими геометрическими характеристиками: $a = 0,25$ м, $b = 2,5$ м, $H = 5$ м. В качестве типа грунта, как было сказано выше, выбрана глина, для которой характерны следующие значения параметров [3, 12]: $w_s = 0,363$, $w_0 = 0,2$, $\gamma_s = 26,95$ кН/м³, $\beta = 0,6$, $\nu = 0,4$; функция $E(w)$ описывается равенством (4). Похожие задачи влагоупругости, но в одномерной постановке, решены и приведены в [13 – 17].

Определим граничные условия для нашей задачи (рис. 3). На внутренней свободной поверхности значения нагрузок равны нулю:

$$p_a = 0; \quad q_a = 0. \quad (15)$$

Граничные условия на внешней поверхности можно определить с помощью равенств:

$$\begin{cases} p_b = \gamma \cdot (H - b \cdot \cos \theta) \times \\ \quad \times \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \cos^2 \theta \right); \\ q_b = \frac{\gamma}{2} \cdot (H - b \cdot \cos \theta) \times \\ \quad \times \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \sin 2\theta. \end{cases} \quad (16)$$

Объемные силы вызваны удельным весом грунта γ :

$$R = -\gamma \cdot \cos \theta; \quad \Theta = \gamma \cdot \sin \theta. \quad (17)$$

Для решения задачи нам потребуются первые четыре полинома Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; & P_1 &= t; \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1); & P_3 &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t). \end{aligned}$$

Далее следует разложить поверхностные нагрузки в соответствии с (12), (13). На внутренней границе $r = a$ нагрузки имеют нулевые значения для всех n :

$$p_{a,n} = 0; \quad q_{a,n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

На внешней границе $r = b$ коэффициенты разложения нагрузок p_b и q_b примут вид:

$$\begin{aligned} p_{b,0} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\gamma \cdot H}{3}; & p_{b,1} &= -\frac{3-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\gamma \cdot b}{5}; \\ p_{b,2} &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2\gamma \cdot H}{3}; & p_{b,3} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2\gamma \cdot b}{5}; \\ q_{b,1} &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\gamma \cdot b}{5}; & q_{b,2} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\gamma \cdot H}{3}; \\ q_{b,3} &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2\gamma \cdot b}{15}. \end{aligned}$$

Исходя из граничных условий (15), (16) и выражений для коэффициентов (3), (16), (17) можно заключить, что

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^3 u_n(r) \cdot P_n(t); & v &= \sum_{n=1}^3 v_n(r) \cdot \frac{dP_n(t)}{d\theta}; \\ \varepsilon_b &= g_0(r) \cdot P_0(t); \\ R &= R_1 \cdot P_1(t); & \Theta &= \Theta_1 \cdot \frac{dP_1(t)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Здесь $u_n(r)$; $v_n(r)$ – функции, вычисляемые в процессе решения, а в соответствии с (9):

$$g_0(r) = \varepsilon_b(r); \quad R_1 = -\gamma; \quad \Theta_1 = -\gamma.$$

Решение этой задачи численно реализовано в ПК Matlab. Затем, подставляя в (5) полученные функции перемещений, были определены функции напряжений. На рис. 4, *a-g* представлено распределение напряжений вдоль радиуса для характерных значений угла θ (сплошные линии).

4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

В работе для сравнения получено решение задачи для однородного материала, когда $E = E_{cp}$. В качестве осредненного модуля упругости выбрано следующее его значение:

$$E_{cp} = \frac{\int_a^b E(w(r)) dr}{b-a} = 64,68 \text{ МПа}$$

В однородном случае уравнения (6) преобразуются в уравнения Ляме, что существенно упрощает задачу и делает возможным ее аналитическое решение. Решение задачи для однородного материала представлено для значения угла $\theta = \pi/4$ на 4, *a-g* пунктирными линиями.

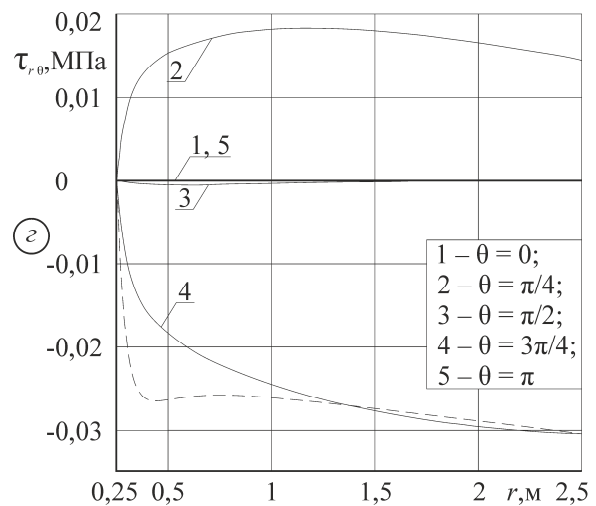
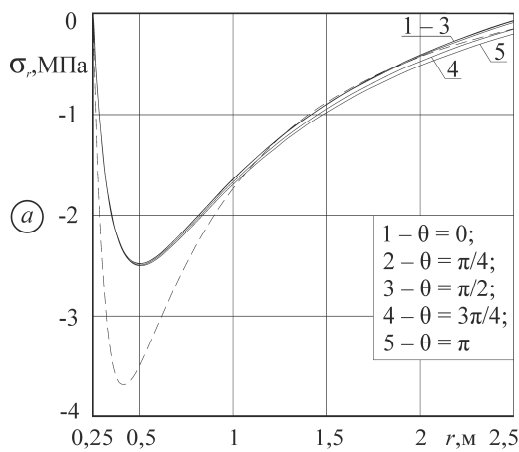
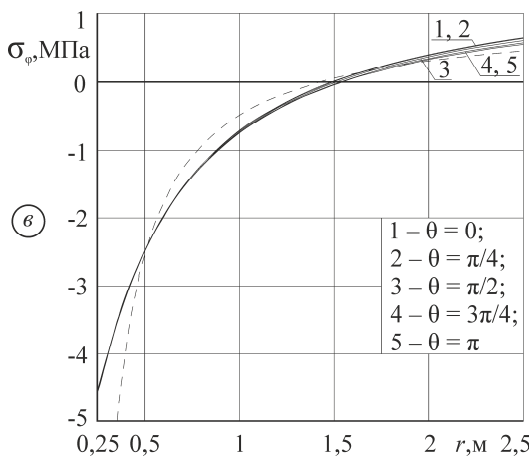
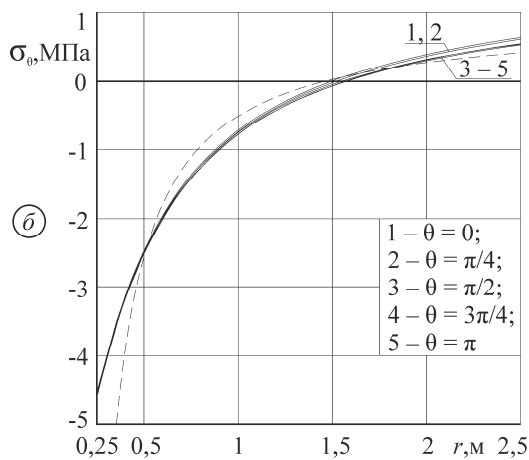


Рис. 4. Распределение напряжений вдоль радиуса для различных значений полярного угла θ .

— с учетом неоднородности;
 - - - без учета неоднородности при $\theta = \pi/4$



5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно сказать, что при учете неоднородности экстремумы отрицательных нормальных напряжений в $1,5 \div 2$ раза ниже, чем в однородном материале (рис 4, а, б, в):

$$\frac{\sigma_{r,одн}^{(-)}}{\sigma_{r,неодн}^{(-)}}; \frac{\sigma_{\theta,одн}^{(-)}}{\sigma_{\theta,неодн}^{(-)}}; \frac{\sigma_{\phi,одн}^{(-)}}{\sigma_{\phi,неодн}^{(-)}} \approx 1,5 \div 2.$$

Положительные значения напряжений σ_{θ} и σ_{ϕ} возрастают в 1,3 раза по сравнению с однородной задачей (рис 4, б, в):

$$\frac{\sigma_{\theta,неодн}^{(+)}}{\sigma_{\theta,одн}^{(+)}}; \frac{\sigma_{\phi,неодн}^{(+)}}{\sigma_{\phi,одн}^{(+)}} \approx 1,3.$$

При рассмотрении кривых нормальных напряжений для различных значений угла θ можно заметить, что они практически совпадают друг с другом (рис 4, а, б, в). Особенно это заметно при рассмотрении функций σ_{θ} и σ_{ϕ} . Отсюда можно заключить, что собственный вес и неосесимметричный отпор грунта

слабо влияют на напряженное состояние массива по сравнению с напряжениями, вызванными набуханием.

Напряжения $\tau_{r\theta}$ имеют пренебрежительно малые значения по сравнению с нормальными напряжениями (рис 4, ε).

Из всего этого можно сделать вывод о том, что с небольшой погрешностью эта задача может быть рассмотрена как центрально-симметричная, т.е. без учета удельного веса грунта и с осесимметричным отпором грунта, характерными для гидростатического давления на большой глубине:

$$R = \Theta = 0; \quad \sigma_r(b) = \gamma \cdot H = const; \quad \tau_{r\theta}(b) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. – М. Изд-во «Высшая школа», 1967. – 599 с.
- 2 **Федосов С.В.** Тепломассоперенос в технологических процессах строительной индустрии: монография / С.В. Федосов. – Иваново: ИПК «ПресСто», 2010. – 364 с.
- 3 **Тер-Мартirosян З.Г.** Механика грунтов. М. : Изд-во АСВ, 2005. - 488 с.
- 4 **Голли О.Р.** Использование закономерностей набухания глинистых грунтов в строительстве // Реконструкция городов и геотехническое строительство, №8/2004. С. 131-141.
- 5 **Давыдов В.А.** Особенности изысканий и проектирования автомобильных дорог в районах вечной мерзлоты. Омск : Омский ПИ, 1979. С. 44–56.
- 6 ОДН 218.046—01. Проектирование нежестких дорожных одежд. 2000. 93 с.
- 7 **Андреев В.И.** Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. М.: Изд-во АСВ, 2002. 286 с.
- 8 **Качмаж С., Штейнгауз Г.** Теория ортогональных рядов. – М.: Физматгиз, 1958. – 507 с.
- 9 **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 576 с.
- 10 **Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д.** Напряженное состояние толстостенных неоднородных сферических оболочек при несимметричных нагрузках // Прикл. мех. 1982. Т. XVIII. № 4. С. 22 – 28.
- 11 **Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н. Д.** Несимметричная деформация толстостенных неоднородных сферических оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 6. С. 42 – 45.
- 12 **Леонтьев Н.Е.** Основы теории фильтрации. – М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.
- 13 **Андреев В.И., Авершьев А.С.** Стационарная задача влагуупругости для неоднородного толстостенного цилиндра. // Вестник МГСУ. 2012. № 10. С. 56-61.
- 14 **V.I. Andreev, A.S. Avershyev.** Stationary Problem of Moisture-elasticity for Inhomogeneous thick-walled Shells. Advanced Materials Research, Vols. 671-674 (2013) pp. 571-575. Trans Tech Publications, Switzerland, 2013.
- 15 **Андреев В.И., Авершьев А.С.** Влагуупругость толстостенного неоднородного цилиндра при нестационарном влажностном режиме. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений (РУДН) №2 2013, с. 20-25.
- 16 **V.I. Andreev, A.S. Avershyev.** Nonstationary problem moisture elasticity for non-homogeneous hollow thick-walled cylinder. Transactions of International Conference on Fluid Structure Interaction 10 - 12 April, 2013. WITpress, pp. 123-132.
- 17 **Andreev V.I, Avershyev A.S.** About Influence of Moisture on Stress State of Soil taking into account Inhomogeneity. International Journal for Computational Civil and

Structural Engineering, 2013, Vol. 9, Iss.3-4, ASV Publ. House, pp. 14-20.

Андреев Владимир Игоревич, действительный член РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499)183-57-42, E-mail: asv@mgsu.ru

Авершьев Анатолий Сергеевич, аспирант кафедры сопротивления материалов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел.: +7(906)735-27-03, e-mail: fullbass-@mail.ru

Vladimir I. Andreev, Full Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of a Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499)183-57-42, E-mail: asv@mgsu.ru

Anatoliy S. Avershyev, Postgraduate student, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(906)735-27-03, E-mail: fullbass-@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ЗА ВИХРЕГЕНЕРИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ

В.К. Ахметов

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В рамках линейной теории численно исследована задача об устойчивости модельных закрученных течений в осесимметричном канале по отношению к неосесимметричным возмущениям. Рассчитаны максимальные коэффициенты усиления и соответствующие критические параметры. Проведено сравнение полученных результатов с известными решениями.

Ключевые слова: гидродинамическая теория устойчивости, закрученные течения, коэффициенты усиления, нейтральные кривые

THE STABILITY OF FLOWS FOR VORTEX GENERATING DEVICES

Vadim K. Akhmetov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The problem of the stability of the model swirling flows in an axisymmetric channel with respect to non-axisymmetric perturbations is investigated numerically within the framework of the linear theory. The maximum amplification coefficients and the corresponding critical parameters are calculated. The results are compared with known solutions.

Key words: the theory of hydrodynamic stability, swirling flows, amplification coefficients, neutral curves.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Закрутка оказывает значительное воздействие на все основные характеристики течения, в том числе на его устойчивость. Возникающая неустойчивость приводит к формированию вторичных вихревых движений, линейных и нелинейных волн, а также может быть причиной распада вихря [1]. Исследования устойчивости внутренних (ограниченных твердыми стенками) закрученных течений имеют важное значение при разработке различного рода технических устройств, так как позволяют провести выбор наиболее оптимального, а часто и безопасного режима работы.

Во многих случаях экспериментально наблюдаемые закрученные потоки достаточно хорошо описываются некоторыми модельными распределениями основных физи-

ческих величин (скоростей, температур и т.д.). Анализ устойчивости внутренних модельных закрученных течений может быть использован в качестве основы при решении реальных практических задач в гидротехническом и теплоэнергетическом строительстве, машиностроении, химической промышленности и во многих других областях техники.

Рассмотрим в линейной постановке задачу об устойчивости внутренних закрученных течений в осесимметричном канале радиуса r_0 с твердыми непроницаемыми стенками и заданными распределениями осевой $U(r)$ и азимутальной $W(r)$ компонент скорости (радиальная компонента скорости полагается равной нулю).

Для всех рассматриваемых течений за характерный линейный размер примем радиус

трубы r_0 , в качестве характерной скорости возьмем максимальное значение U_0 в распределении осевой компоненты $U(r)$, а число Рейнольдса определим в виде $Re = U_0 r_0 / \nu$, где ν – кинематическая вязкость.

Рассмотрим малые возмущения исходного течения как решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса типа бегущей волны (нормальные моды)

$$\{V'_z, V'_r, V'_\varphi, p'\} = \{F, iS, H, P\} \exp[i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)], \quad (1.1)$$

в которых V_z, V_r, V_φ – осевая, радиальная и азимутальная компоненты скорости в цилиндрической системе координат z, r, φ ; p – давление; α – волновое число; n – мода возмущения ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), отрицательные значения соответствуют распространению волны в направлении противоположном закрутке; c – скорость распространения волны; i – мнимая единица. Для комплексных амплитудных функций $F(r), S(r), H(r), P(r)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} r^2 \gamma F + \alpha r^2 P + r^2 S U' &= \\ &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} \left[r(rF)' - (\alpha^2 r^2 + n^2) F \right], \\ r^2 \gamma S + 2rHW - r^2 P' &= \\ &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} \left[r(rG)' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1) S - 2nH \right], \quad (1.2) \\ r^2 \gamma H + r^2 S \left(W' + \frac{W}{r} \right) + rnP &= \\ &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} \left[r(rH)' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1) H - 2nS \right], \\ \alpha r F + (rS)' + nH &= 0, \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha(U - c) + nW/r$, штрих означает производную по r . Граничные условия для системы (1.2) при $r = 0$ выводятся из требований регулярного поведения решения вблизи оси и имеют вид

$$\begin{aligned} S(0) = H(0) &= 0, \\ F(0), P(0) &\text{ – ограничены при } n = 0; \\ S(0) \pm H(0) &= 0, \\ F(0) = P(0) = 0 &\text{ – при } n = \pm 1; \quad (1.3) \\ S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 &\text{ – при } |n| > 1; \\ S(1) = H(1) = F(1) &= 0. \end{aligned}$$

Будем рассматривать возмущения (1.1) периодические по z , амплитуда которых меняется со временем. Тогда α – действительное число ($\alpha = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны возмущения), а $c = c_r + ic_i$ – комплексное; c_r представляет собой скорость распространения возмущения в направлении z (фазовая скорость), c_i – скорость нарастания возмущения по времени, $\omega_i = \alpha c_i$ – коэффициент усиления возмущений, $\omega_r = \alpha c_r$ – частота колебаний. При $c_i < 0$ амплитуды возмущения (1.1) затухают (течение устойчиво), а при $c_i > 0$ – растут с течением времени (течение неустойчиво).

Метод расчета собственных значений включает несколько этапов. Вблизи особой точки $r = 0$ строятся асимптотические решения по методу Фробениуса, которые позволяют перенести граничные условия в точку $r = r_a$.

Далее от $r = r_a$ до $r = 1$, решение продолжается внутрь расчетной области по методу Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага и процедурой ортогонализации методом Грамма-Шмидта. Численные решения склеиваются в точке r_c ($r_a < r_c < 1$) путем решения методом Ньютона соответствующего характеристического уравнения. Аналогичный метод успешно применялся при исследовании устойчивости свободного вихря [2-5].

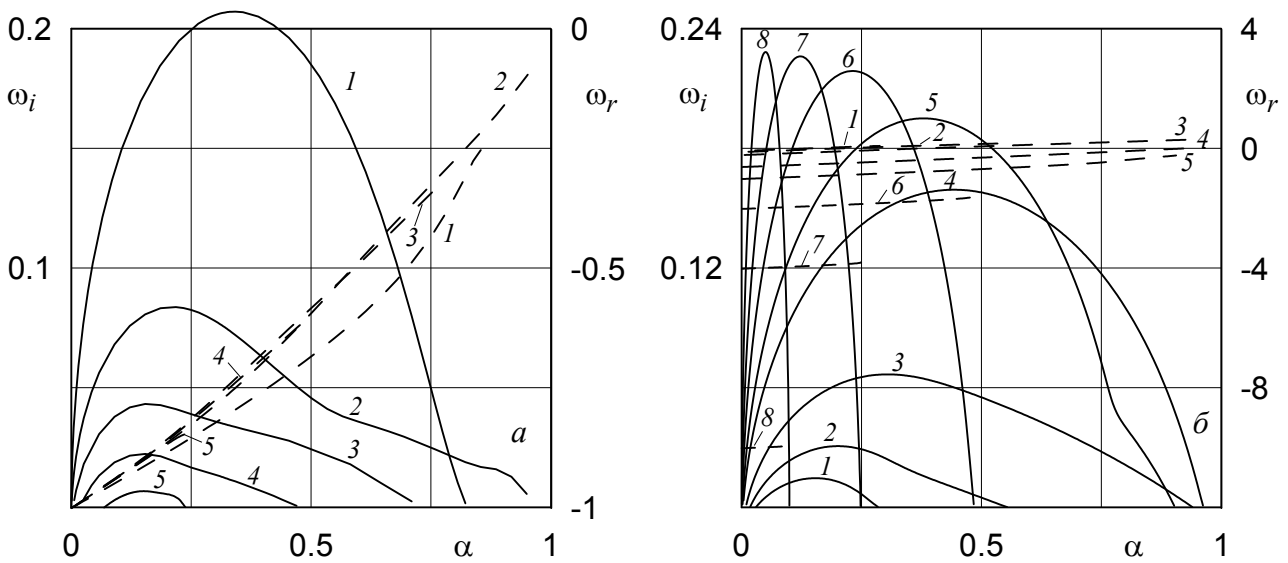


Рис. 1. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при: а – $Re=10^4$, $q=1$, моды 1-5 (кривые 1-5); б – $Re=10^3$, $q=0,06; 0,1; 0,2; 0,6; 1$, 2, 4, 10 (кривые 1-8).

2. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА

В качестве тестовой задачи исследуем устойчивость течения в трубе, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью q . Для невозмущенного течения возьмем распределение осевой скорости в форме профиля Пуазейля, а для азимутальной скорости примем линейное распределение с закруткой по закону твердого тела

$$U(r) = 1 - r^2, \quad W(r) = qr. \quad (2.1)$$

Будем рассматривать временную неустойчивость течения (2.1) с возмущениями (1.1) при фиксированном $n = -1$.

Известно, что рассматриваемое закрученное течение в отличие от классического течения Пуазейля в осесимметричном канале является неустойчивым по отношению к неосесимметричным возмущениям. В зависимости от определяющих параметров задачи числа Рейнольдса Re и параметра закрутки q в потоке может одновременно наблюдаться несколько неустойчивых мод. Например, при

$Re = 10^4$ и $q = 1$ имеется пять неустойчивых мод (рис. 1, а). Все эти моды имеют невязкий характер, так как при $Re \rightarrow \infty$ коэффициенты усиления стремятся к некоторым постоянным значениям. Для первой наиболее неустойчивой моды 1 при фиксированном значении закрутки $q = 1$ и различных числах Рейнольдса в табл. 1 приведены максимальные значения коэффициентов усиления ω_i^* , а также соответствующие им значения волновых чисел α_* и частот колебаний ω_r^* . При $Re = 10^5$ полученные значения достаточно хорошо соответствуют результатам, полученным ранее по невязкой теории [6].

Таблица 1

Re	α_*	ω_r^*	ω_i^*
10^2	0,452	-0,694	0,0282
10^3	0,39	-0,750	0,1949
10^4	0,34	-0,796	0,2071
10^5	0,334	-0,804	0,2082
∞ [6]	0,32	-0,815	0,2083

На рис. 1, б представлены рассчитанные дисперсионные кривые для фиксированного

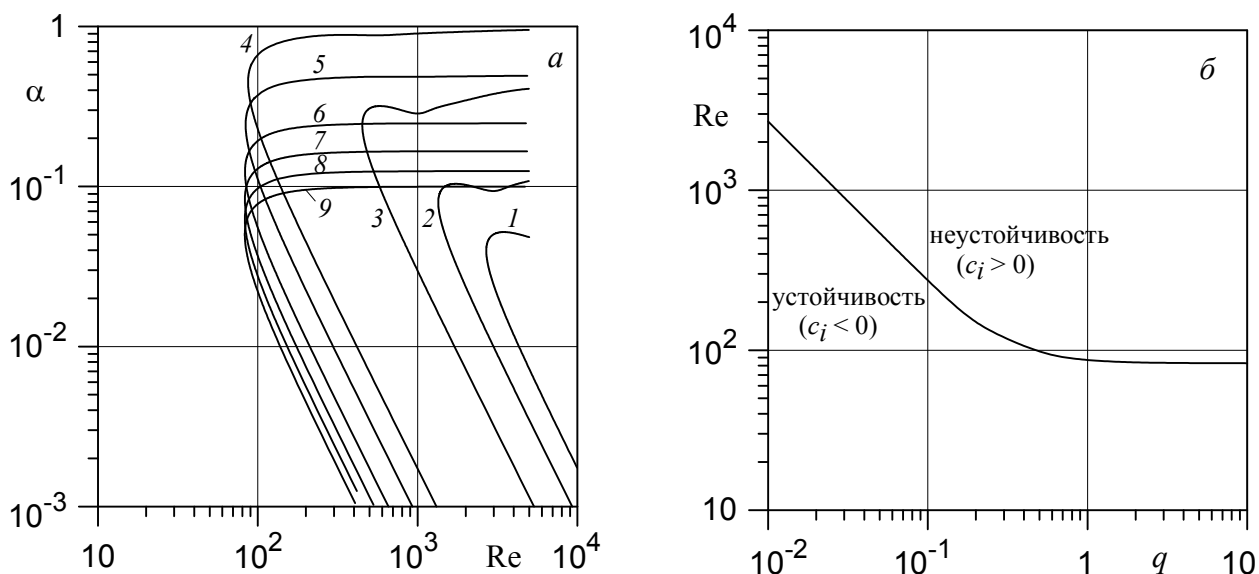


Рис. 2. Нейтральные кривые (а) при $q = 0,01; 0,02; 0,06; 1, 2, 4, 6, 8, 10$ (кривые 1-9) и граница области неустойчивости (б).

числа Рейнольдса $Re = 1000$ и различных значений параметра закрутки q . Наличие ненулевой азимутальной скорости приводит к неустойчивости исследуемого течения даже при малых значениях параметра закрутки $q = 0,06$. С увеличением закрутки неустойчивость течения усиливается.

При малых q наиболее неустойчивые возмущения имеют длину волны $\lambda_* = 2\pi/\alpha_* \approx 30$. С увеличением закрутки до $q = 0,6$ неустойчивость проявляется в более широком диапазоне волновых чисел $0,01 < \alpha < 1$, а длина волны, соответствующая наиболее неустойчивым возмущениям, уменьшается ($\lambda_* \approx 10$ при $q = 0,2; 0,6$). Далее при $1 < q < 10$ максимальные значения коэффициентов усиления незначительно увеличиваются, а область неустойчивости по α существенно сужается и при $q = 10$ наблюдается только для $0 < \alpha < 0,07$ ($\lambda_* \approx 100$). Фазовые скорости $c_r^* = \omega_r^*/\alpha_*$, соответствующие возмущениям с максимальным коэффициентом усиления при слабой закрутке $0,01 \leq q \leq 0,1$, положительны, но очень малы

($c_r^* \approx 0,1$). При умеренной и сильной закрутке фазовые скорости отрицательны.

Кривые нейтральной устойчивости в плоскости (α, Re) для различных значений параметра закрутки q представлены на рис. 2, а. В широком диапазоне закрутки $1 \leq q \leq 10$ минимальное критическое значение параметра закрутки практически не меняется – $Re_c \approx 83 \div 85$. При уменьшении закрутки потока значение Re_c увеличивается и составляет $Re_c = 2696$ для $q = 0,01$. Все рассчитанные значения критических чисел Рейнольдса Re_c при различных q , соответствующие им волновые числа α_c и частоты колебаний ω_r^* , а также произведение $q Re_c$, приведены в табл. 2.

Полученные данные позволяют определить границу неустойчивости в области определяющих параметров Re, q (рис. 2, б). Точное значение вычисленного наименьшего критического числа Рейнольдса составляет $Re_c = 82,9202$, что полностью соответствует полученному ранее в работах [7, 8] значению $Re_c = 82,92$.

Таблица 2

q	Re_c	α_c	ω_r^*	$q Re_c$
0,01	2696,06	0,040	0,013	26,96
0,02	1347,82	0,079	0,026	26,96
0,06	450,97	0,241	0,080	27,06
0,1	273,47	0,404	0,140	27,35
0,2	150,14	0,716	0,245	30,03
0,6	93,44	0,634	-0,179	56,06
1	86,92	0,447	-0,699	86,92
2	83,92	0,243	-1,835	167,84
4	83,14	0,124	-3,916	332,56
6	82,99	0,083	-5,944	497,94
8	82,94	0,063	-7,957	663,52
10	82,92	0,050	-9,966	829,20

Минимальное значение произведения $q Re_c = 26,96$, при котором течение неустойчиво, также в точности совпадает с данными работ [7, 8].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим закрученное течение в осесимметричном канале с твердыми стенками, которое создается с помощью вихрегениерирующих устройств. Примером распределения осевой $U(r)$ и азимутальной $W(r)$ скоростей для такого типа течений могут служить следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 U(r) &= U_1(r)/U_0, \quad W(r) = W_1(r)/U_0, \\
 U_1(r) &= U_2 \{1 - \exp[\tau(r-1)]\} + \\
 &\quad + \varepsilon [\exp(-\sigma r^2) - \exp(-\sigma)], \\
 W_1(r) &= W_2 \{ \exp(-\tau) - \exp[\tau(r-1)] \} + \\
 &\quad + \frac{\beta}{r} [1 - \exp(-\sigma r^2)], \\
 U_2 &= \frac{\tau^2 \sigma - \varepsilon [1 - (1 + \sigma) \exp(-\sigma)]}{\sigma \tau^2 + 2[1 - \sigma - \exp(-\sigma)]}, \\
 W_2 &= \beta \frac{1 - \exp(-\sigma)}{1 - \exp(-\tau)}, \quad U_0 = U_{1max}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Данные профили получены в работе [9]. Выражения (3.1) описывают закрученное течение типа вихря Бюргера для части потока вблизи оси канала (характеризуемым параметром σ) и аппроксимируют пограничный слой вблизи стенки канала, толщина которого определяется параметром τ . Параметр ε задает форму профиля осевой скорости в окрестности оси: равномерный поток при $\varepsilon=0$, течение струйного типа при $\varepsilon>0$, спутного типа при $\varepsilon<0$. Параметр β характеризует закрутку потока. Профили скоростей (3.1), вычисленные при $\varepsilon=0$, $\tau=12$, $\sigma=18$ и различных значениях β , представлены на рис. 3.

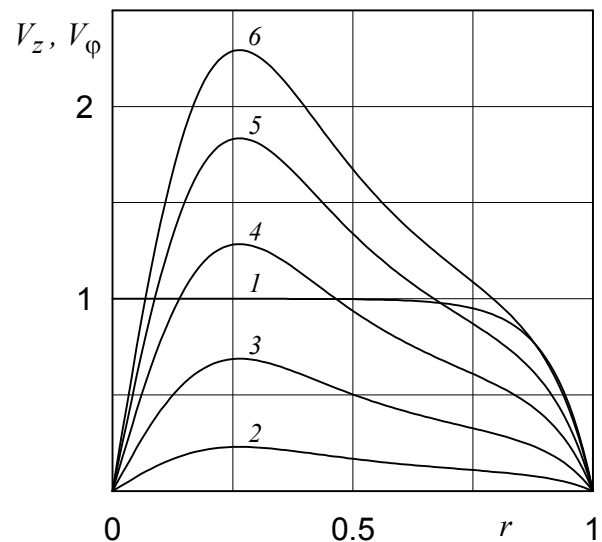


Рис. 3. Профили осевой скорости при $\varepsilon = 0$ (кривая 1) и азимутальной скорости при $\beta = 0,1; 0,3; 0,56; 0,8; 1$ (кривые 2-6).

Устойчивость модельного течения (3.1) с учетом сжимаемости потока в рамках линейной теории по отношению к неосесимметричным возмущениям исследовалась в работах [10]. Построены кривые нейтральной устойчивости и показано, что длина волны возмущений, соответствующая критическому числу Рейнольдса, примерно равна диаметру канала.

Исследуем влияние закрутки на устойчивость рассматриваемого модельного течения.

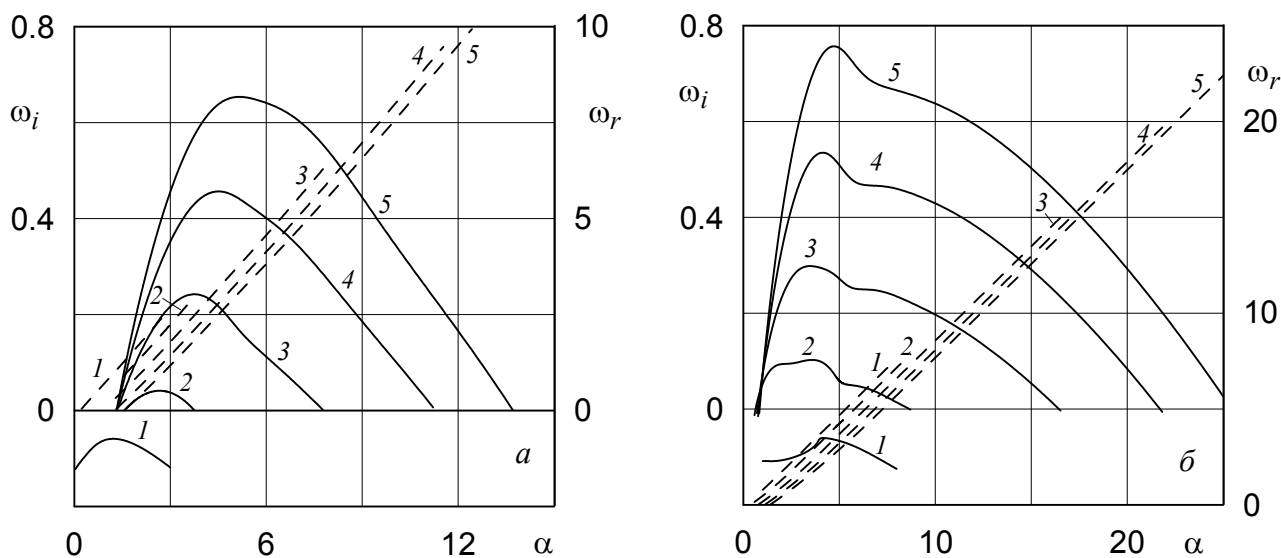


Рис. 4. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при $\varepsilon = 0$: а – $Re=300$, б – $Re=1000$, $\beta = 0,1; 0,3; 0,56; 0,8; 1$ (кривые 1-5).

Будем также рассматривать возмущения (1.1) при фиксированном $n = -1$, в которых α – действительное, а c – комплексное. Дисперсионные кривые, полученные путем численного решения краевой задачи (1.2)–(1.3), (3.1) при $Re = 300$, показаны на рис. 4, а. В отличие от течения Пуазейля во вращающейся трубе при малой закрутке $\beta = 0,1$ (кривая 1) поток остается устойчивым к рассматриваемым возмущениям. С увеличением закрутки $\beta = 0,3$ (кривая 2) течение теряет устойчивость, а при дальнейшем росте закрутки неустойчивость усиливается. Длина волны $\lambda_* = 2\pi/\alpha_*$, отвечающая наиболее неустойчивым возмущениям, уменьшается с ростом β , но остается порядка диаметра канала. Таким образом, в отличие от течения Пуазейля с закруткой по закону твердого тела неустойчивость течения (2.1) соответствует более коротковолновым возмущениям, причем они имеют положительную фазовую скорость.

При более высоком числе Рейнольдса $Re = 1000$ (рис. 4, б) все отмеченные особенности течения сохраняются, но неустойчи-

вость наблюдается в более широком диапазоне волновых чисел α .

Таблица 3

β	ω_i^*	ω_r^*	α_*	α_{\min}	α_{\max}	λ^*
$Re = 300$						
0,1	-0,06	0,89	1,16	—	—	—
0,3	0,04	1,90	2,66	1,56	3,75	2,36
0,56	0,24	2,47	3,77	1,34	7,80	1,67
0,8	0,46	2,77	4,51	1,32	11,30	1,39
1	0,65	3,05	5,15	1,32	13,72	1,22
$Re = 1000$						
0,1	-0,05	3,83	4,16	—	—	—
0,3	0,10	2,78	3,58	0,64	8,66	1,75
0,56	0,30	3,46	3,46	0,73	16,45	1,81
0,8	0,54	2,38	4,12	0,80	21,71	1,52
1	0,76	2,62	4,72	0,85	25,45	1,33

В табл. 3 приведены основные характеристики рассчитанных течений: максимальные коэффициенты усиления ω_i^* , соответствующие им значения волновых чисел α_* , длин волн $\lambda_* = 2\pi/\alpha_*$ и частот колебаний ω_r^* , а также минимальные α_{\min} и максимальные

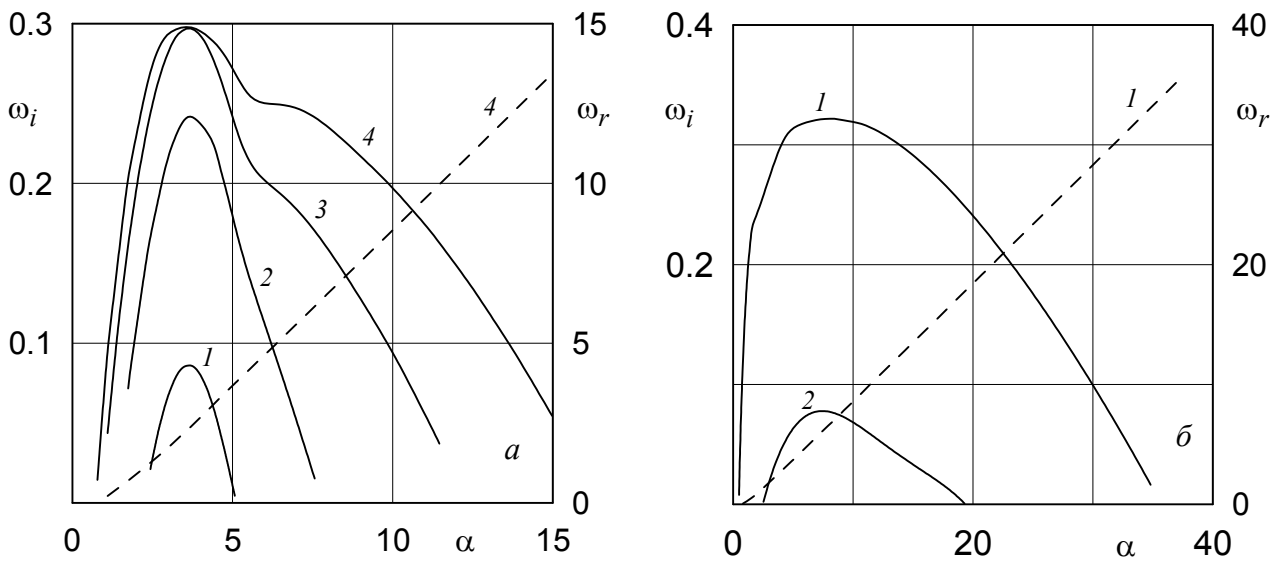


Рис. 5. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при $\varepsilon = 0$: а – $\beta = 0,56$, $Re=150$, 300, 600, 1000 (кривые 1-4); б – $\beta = 0,56$, $Re=5000$, моды 1, 2 (кривые 1, 2).

α_{\max} значения волновых чисел, при которых течение неустойчиво.

Рассчитанные неустойчивые возмущения имеют невязкий характер. На рис. 5, а показаны дисперсионные кривые, вычисленные при фиксированном значении закрутки $\beta = 0,56$ и различных значениях числа Рейнольдса. Видно, что максимальный коэффициент усиления стремится к некоторому постоянному значению при увеличении числа Re . Распределение для частот колебаний ω_r , с ростом числа Рейнольдса остается практически неизменным, поэтому на рис. 5, а приведена только одна из рассчитанных зависимостей (кривая 4).

При числах Рейнольдса $Re \geq 1000$ к основной моде неустойчивости добавляется еще одна мода (рис. 5, б, кривая 2), которая также имеет невязкий характер. Частоты колебаний для моды 2 близки соответствующим значениям моды 1.

Рассмотрим еще один пример модельного закрученного течения, которое использовалось в [11] для задания начального распределения скоростей в осесимметричном канале.

Определим исходные профили следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} V_{z0}(r) &= D_0 + D_1 \exp(-B_1 r^2), & 0 \leq r \leq r_0, \\ V_{\varphi 0}(r) &= G \frac{A}{r} (1 - \exp(-B_2 r^2)), & 0 \leq r \leq r_0, \\ V_{z0}(r) &= a_0 + a_1 r + a_2 r^2, & r_0 \leq r \leq 1, \\ V_{\varphi 0}(r) &= G(b_0 + b_1 r + b_2 r^2), & r_0 \leq r \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Значение констант в распределении (3.2) зададим в виде:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1, D_1 = 0, B_1 = 0, B_2 = 14, A = 0,419, \\ r_0 &= 0,75, a_0 = -8, a_1 = 24, a_2 = -16, \\ b_0 &= -5,363, b_1 = 19,627, b_2 = -14,260. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Профили скоростей (3.2), вычисленные с учетом (3.3) для различных значений параметра закрутки G , представлены на рис. 6. Данные распределения аналогичны зависимостям (3.1), изображенным на рис. 3.

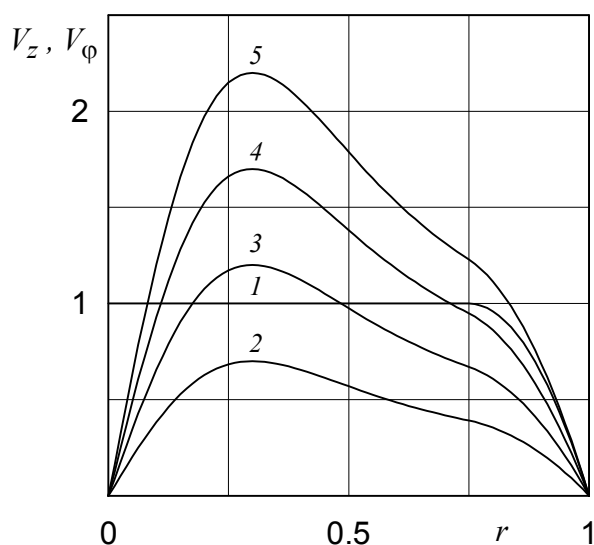


Рис. 6. Профили осевой скорости (кривая 1) и азимутальной скорости при $G=0,7$; 1,2; 1,7; 2,2 (кривые 2-5).

Рассмотрим влияние закрутки на устойчивость течения (3.2) с принятыми значениями констант. Так же как и в предыдущих случаях, будем рассматривать возмущения (1.1), в которых α – действительное, c – комплексное, а $n = -1$. Дисперсионные кривые, полученные путем численного решения краевой задачи (1.2)–(1.3), (3.2), (3.3) при различных значениях числа Рейнольдса Re и параметра закрутки G , показаны на рис. 7.

Основные свойства представленных решений заключаются в следующем. При незначительной закрутке потока $G = 1,2$; 0,7 и умеренных числах Рейнольдса $Re = 100, 300$ (рис. 7, а, кривая 2 и рис. 7, б, кривая 1) исследуемое течение устойчиво по отношению к рассматриваемым возмущениям. С увеличением закрутки $G = 1,7$; 1,2 (рис. 7, а, кривая 3 и рис. 7, б, кривая 2) течение становится неустойчивым. Более сильная закрутка $G = 2,2$ приводит к усилению неустойчивости. При увеличении числа Рейнольдса и фиксированной закрутке потока значения максимальных коэффициентов усиления ω_i^* для наиболее неустойчивых возмущений возрастают, соответствующая длина волны $\lambda_* = 2\pi/\alpha_*$ несколько увеличивается, но в

большинстве случаев имеет размер порядка диаметра канала.

В целом закрутка потока оказывает такое же влияние на устойчивость рассматриваемого течения, как и в случае с распределением (3.1). Рассчитанные значения основных характеристик исследуемого течения приведены в табл. 4 (обозначения такие же, как в табл. 3).

Таблица 4

G	ω_i^*	ω_r^*	α_*	α_{\min}	α_{\max}	λ_*
$Re = 100$						
1,2	-0,15	1,69	2,86	—	—	—
1,7	0,00	1,78	3,35	3,18	3,55	3,53
2,2	0,18	1,87	3,83	2,32	7,29	3,36
$Re = 300$						
0,7	-0,01	1,20	1,98	—	—	—
1,2	0,17	1,64	2,91	1,27	4,99	3,82
1,7	0,39	2,02	3,74	1,20	8,17	3,10
2,2	0,68	3,32	5,72	1,17	11,17	1,89
$Re = 1000$						
0,7	0,07	0,63	1,36	0,58	2,33	9,89
1,2	0,26	1,15	2,40	0,66	5,24	5,44
1,7	0,52	1,68	3,45	0,72	7,89	3,74
2,2	0,85	2,84	5,34	0,78	14,85	2,21

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закрутка потока по-разному влияет на устойчивость течений в осесимметричном канале. Для течения Пуазейля во вращающейся трубе при числах Рейнольдса выше критического даже слабая закрутка ($q \sim 0,01$) приводит к неустойчивости потока. С увеличением закрутки неустойчивость усиливается, но наблюдается только в области длинноволновых возмущений ($\lambda_* \sim 100$). Для течений с распределением азимутальной скорости, соответствующим практическим приложениям, существует некоторое критическое значение закрутки $G_{кр}$, при котором поток теряет устойчивость. Определяя параметр закрутки G отношением максимума азимутальной скорости к максимуму осевой скорости, получаем, что значение $G_{кр}$ в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 100 \div 1000$ составляет $G_{кр} \approx 0,7 - 1,7$.

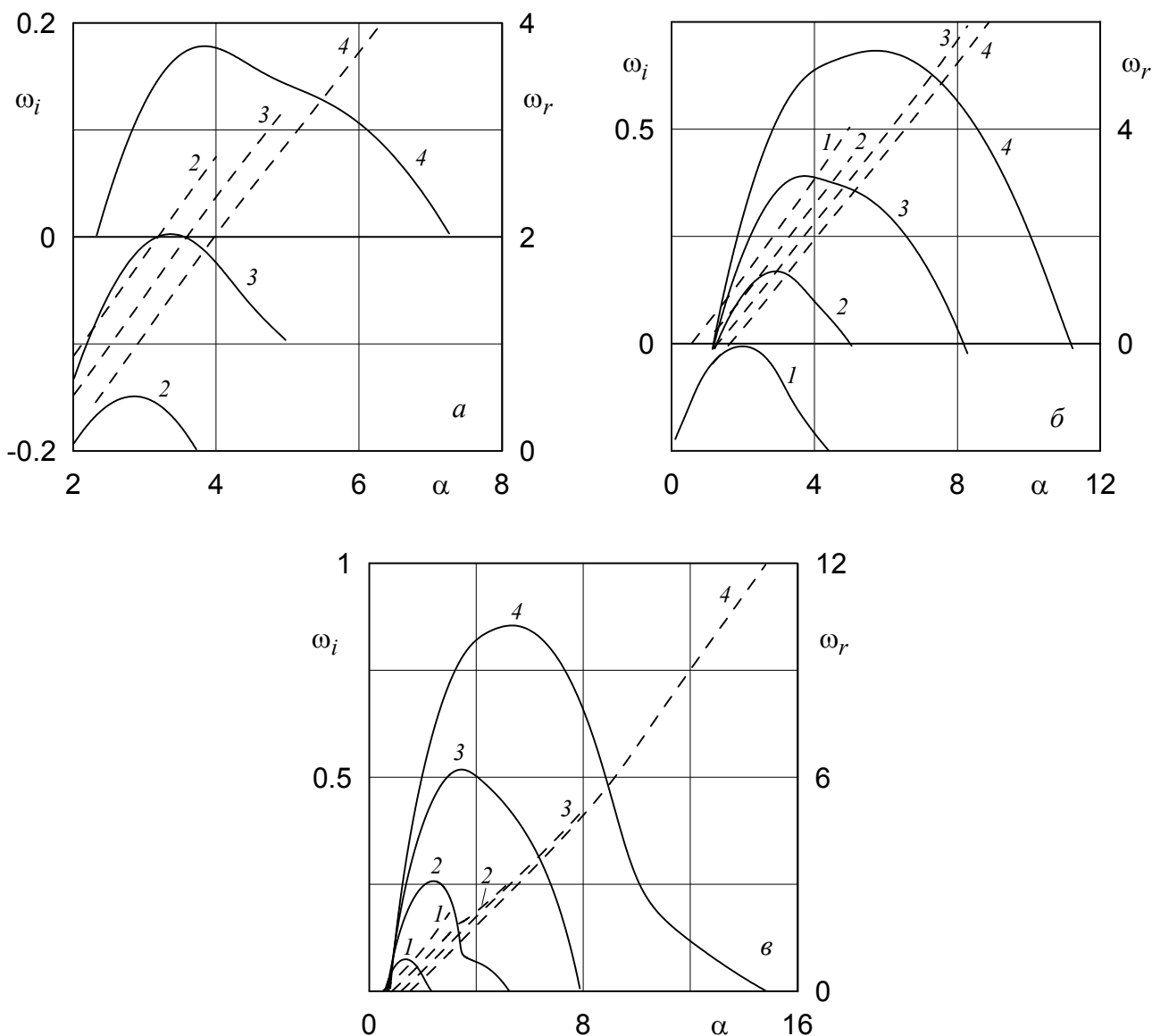


Рис. 7. Зависимости коэффициентов усиления (сплошные линии) и частот колебаний (штриховые линии) от волнового числа при: а – $Re=100$, б – 300 , в – 1000 , $G=0,7; 1,2; 1,7; 2,2$ (кривые 1-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lucca-Negro O., O'Doherty T. Vortex breakdown: a review. *Progr. in Energy and Comb. Sci.* 2001. V. 27. P. 431–481.
2. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Развитие и устойчивость закрученных течений // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1988. № 4. С. 3–11.
3. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. О новой вязкой моде неустойчивости свободного вихря // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1999. № 6. С. 76–80.
4. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Неустойчивость свободного вихря при большой закрутке потока // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2003. № 1. С. 54–58.
5. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Ветвление собственных решений спектральной задачи об устойчивости свободного вихря // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2005. № 5. С. 54–59.

6. **Maslowe S. A.** Instability of rigidly rotating flows to non-axisymmetric disturbances // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. P. 307–317.
7. **Mackrodt P.A.** Stability of Hagen–Poiseuille flow with superimposed rigid rotation // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 73. № 1. P. 153–164.
8. **Fernandez-Feria R., Pino C.** The onset of absolute instability of rotating Hagen–Poiseuille flow: A spatial stability analysis // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. P. 3087–3097.
9. **Menne S.** Vortex breakdown in an axisymmetric flow // *AIAA paper.* 1988. № 88-0506.
10. **Казаков А.В., Курячий А.П.** Устойчивость сжимаемого закрученного течения в круглой трубе // *Изв. РАН. МЖГ.* 1999. № 1. С. 35–41.
11. **Uchida S., Nakamura Y., Suehiro F.** Numerical calculations of swirling flows for vortex breakdown // *Trans. Jap. Soc. Aeron. Space Sci.* 1981. V. 24. № 63. P. 17–25.

Ахметов Вадим Каюмович, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: vadim.akhmetov@gmail.com

Vadim K. Akhmetov, Doctor of Science, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: vadim.akhmetov@gmail.com

ОЦЕНКА СЕЙСМОСТОЙКОСТИ КУПОЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛНОВОЛНОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.И. Голубев, Д.П. Григорьевых, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов

Московский физико-технический институт, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В работе рассмотрено применение сеточно-характеристического численного метода на криволинейных двумерных структурных сетках для моделирования динамических процессов в гетерогенных средах. Описана модель очага землетрясения, позволяющая проводить прямой расчёт процесса распространения упругой части возмущения из гипоцентра к дневной поверхности при инициации сейсмической активности. Проведена серия расчётов по оценке влияния отдельной компоненты (продольной волны) сейсмического возмущения на модель купольной конструкции и идентификации мест разрушения.

Ключевые слова: математическое моделирование, сеточно-характеристический численный метод, параллельные алгоритмы, землетрясения, оценка сейсмостойкости строений

EVALUATION OF SEISMIC RESISTANCE OF DOME CONSTRUCTIONS BASED ON THE RESULTS OF FULL-WAVE MODELING

Vasily I. Golubev, Danil P. Grigorievikh, Igor B. Petrov, Nikolay I. Khokhlov

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: In this article the usage of grid-characteristic numerical method on curvilinear structured 2D grids for modeling of dynamic processes in heterogeneous media was investigated. The model of the earthquake providing the possibility of numerical simulation of elastic wave propagation from hypocenter to day surface during seismic activity was described. A set of numerical experiments for estimation of seismic resistance of dome construction was carried out.

Key words: mathematical modeling, grid-characteristic numerical method, parallel algorithms, earthquake, evaluation of seismic resistance of facilities

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время повышенный интерес у общества вызывают задачи обеспечения собственной безопасности. Большое внимание уделяется развитию имитационного моделирования [1, 2], которое позволяет проанализировать риски и выделить наиболее значимые из них.

Одним из явлений, притягивающих внимание научного сообщества, является естественная и техногенная инициация землетрясений. На значительном расстоянии от очага

землетрясения динамические процессы могут быть описаны в рамках упругой теории распространения сейсмических волн, которые при достижении дневной поверхности вызывают разрушение строений. Только лишь за последние три года во всем мире произошло более десяти крупных землетрясений причинивших огромные материальные убытки и приведших к гибели тысяч человек. Таким образом, совершенствование существующих подходов и разработка новых методов прогноза и быстрой оценки возможных разрушений не вызывает сомнений. Для

этого по всей планете расположено множество сейсмостанций, в которых ведется непрерывная регистрация движений дневной поверхности.

В работе [3] была предложена вычислительная механико-математическая модель очага землетрясения в двумерной постановке, и проведено компьютерное моделирование процесса инициации сейсмической активности. Авторами использовался сеточно-характеристический метод на треугольных сетках. На основе анализа синтетических сейсмограмм [4] было оценено влияние структуры геологического массива (слоистость, трещиноватость, наличие карстовых образований) на развитие в нём динамических процессов. Также был решён ряд задач по воздействию отдельных компонент сейсмического возмущения (продольных и поперечных волн) на различные наземные сооружения: двухэтажное жилое строение, плотину и купольную конструкцию. Были получены волновые картины, как во всём объекте, так и в его отдельных компонентах, обладающих собственными упругими характеристиками. Отметим, что, хотя рассчитывался полный тензор напряжений, не производилась идентификация мест инициации разрушений.

В работе [5] предложенная модель очага землетрясения была обобщена на трёхмерный случай. Авторы использовали сеточно-характеристический метод на структурных гексаэдральных сетках. Данный подход позволил существенно расширить класс моделируемых геометрий. Было проведено сравнение результатов численных расчётов с эталонными сферограммами для случая однородного вмещающего массива и различных ориентаций плоскости разлома, показавшее их совпадение. Для случая слоистого массива был получен полный спектр отражённых (от границ раздела слоёв) волн, и с использованием подхода, предложенного в [4], проведено построение синтетических сейсмограмм. Численно была решена задача о воздействии интенсивной динамической

нагрузки на борта цилиндрического карьера. Отметим, однако, что в работе также не производилась идентификация мест инициации разрушений.

В настоящей работе численный подход, предложенный в работах [3, 5] был расширен с помощью добавления функционала по определению мест разрушения [6]. Для расчёта сейсмических процессов в геологическом вмещающем массиве и материале наземного сооружения также используется сеточно-характеристический метод на двумерных криволинейных структурных сетках. Были предложены и рассмотрены две различные модели разрушения: модель песка и модель трещин. На основании их применения проведена идентификация мест разрушения в модели купольной конструкции.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твердом теле используется система динамических уравнений, объединяющая уравнения движения и реологические соотношения в виде [7]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды, V_x, V_y – компоненты скорости смещения, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}$ – компоненты тензоров напряжения и деформаций. Вид компонент тензора четвёртого порядка q_{ijkl} определяется реологией среды. Для линейно-упругого тела имеем:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2)$$

В этом соотношении λ и μ – упругие постоянные Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для численного решения динамических уравнений механики деформируемого твердого тела используется сеточно-характеристический метод, подробнее с которым можно ознакомиться в [8, 9]. Возможность описания широкого класса геометрий реализована за счет использования структурных криволинейных сеток [5].

3. ОЧАГ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Одной из особенностей предлагаемого подхода является использование в качестве источника упругих возмущений явной вычислительной механико-математической модели очага землетрясения. В её основе лежит геофизическое представление о механизме землетрясения, называемое «подвижка по разлому». Согласно ему на границе между отдельными блоками земной коры происходит постепенное накопление упругих напряжений. Поскольку разломы между ними заполнены раздробленной и сцементированной горной породой, сила трения велика. При превышении сдвигающим напряжением силы трения происходит проскальзывание вдоль разлома. Отметим, что вблизи разлома наблюдаются, как упругие, так и упруго-пластические процессы. На достаточном удалении от гипоцентра существенны лишь упругие процессы, которые выражаются в распространении объёмных волн к дневной поверхности. Рассмотрим подробнее предлагаемую модель очага землетрясения в общем трёхмерном случае. На рис. 1 изображен контакт двух блоков. Для задания ориентации плоскости разлома используются два угла, определяемых следующим образом. Один из них называется *strike angle* (θ) и равен углу, который образуют линия пересечения плоскости разлома с горизонтальной плоскостью и направление на север. Вторым углом, называемым *dip angle* (δ), образуется между плоскостью разлома и горизонтальной

плоскостью. Вдоль разлома происходит проскальзывание граничащих блоков, причем делается предположение о чистом продольном сдвиге, т.е. отсутствии составляющей скорости движения, перпендикулярной плоскости разлома. Ориентация вектора скорости задаётся углом между направлением вдоль линии пересечения плоскости разлома с горизонтальной плоскостью (*strike direction*) и направлением проскальзывания блоков (*slip direction*). Данный угол называется *rake angle* (λ). Кроме того, для задания интенсивности возмущения используется также абсолютное значение скорости смещения. При этом предполагается, что в некоторой области, прилегающей к разлому, модуль вектора скорости постоянен по пространству. При переходе через плоскость разлома направление скорости меняется строго на противоположное направление. По результатам измерений сейсмометров, расположенных на дневной поверхности, возможно определение ориентации плоскости разлома. Для оценки величины начальной скорости в источнике возмущения может быть использовано сравнение результатов численного моделирования с амплитудами зарегистрированных колебаний. Отметим, что в двумерном случае модель однозначно задаётся одним углом и амплитудой начального смещения.

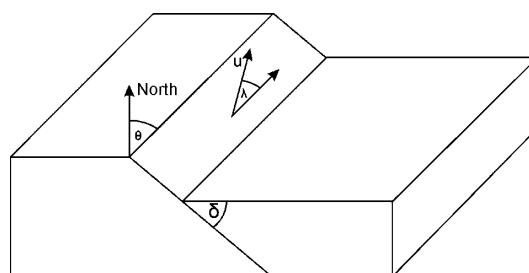


Рисунок 1. Модель очага землетрясения.

4. МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ

В работе использовался дискретный подход к описанию процесса разрушения материала. В каждом расчётном узле хранится бинар-

ный признак (флаг) – разрушен ли материал в нём или нет. На каждом временном шаге для всех неразрушенных узлов проверяется соответствующий критерий разрушения и, если он выполнен, то устанавливается флаг разрушения, и выполняется соответствующие корректировки.

Использовались две модели разрушения: модель песка и модель трещин.

Рассмотрим подробнее модель песка. В основе определения момента разрушения лежит критерий пластичности Мизеса [10]:

$$y_s < \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (3)$$

На основе вычисленных значений тензора напряжений проводится его проверка и, если он выполнен, то материал в узле сетки считается разрушенным. В этот момент производится изменение параметров материала среды – скачком уменьшается в десять раз параметр Ламе μ . Также на каждом временном шаге в дальнейшем обнуляются все отрицательные главные напряжения, что физически означает отсутствие сопротивления материала на разрыв.

В основе модели трещин лежит анализ отдельных компонент тензора напряжений. Впервые трещина появляется при превышении одним из главных напряжений максимального напряжения (σ_{MAX} , характеристика материала), и её плоскость перпендикулярна ему. В каждом узле, содержащем трещину, в дальнейшем обнуляются нормальные и тангенциальные (по отношению к направлению трещины) компоненты тензора напряжений [11]. В каждом узле может существовать максимум одна трещина, в случае превышения их числа в дальнейшем расчёт производится по модели песка.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Была рассчитана задача о воздействии поперечной волны амплитудой 30 см/с на купольную конструкцию, расположенную на поверхности Земли. Упругие характеристики материала центрального элемента конструкции соответствовали характеристикам нержавеющей стали: плотность – 7700 кг/м³, скорость распространения продольных волн – 5740 м/с и скорость распространения поперечных волн – 3092 м/с. Бетон, из которого сделана остальная часть конструкции, обладал плотностью 2500 кг/м³, скоростью распространения продольных волн – 4000 м/с и скоростью распространения поперечных волн – 2500 м/с. Вмещающий массив, которым моделировалась земная кора, обладал плотностью 2000 кг/м³, скоростью продольных волн 5100 м/с и скоростью поперечных волн – 3400 м/с. В работе было проведено сравнение двух видов геометрий сооружений: с прямоугольным усилением под центральным элементом и без него. Для расчёта на основании модели песка предел текучести (y_s) для стали принимался равным 1,3 МПа, для бетона – 2 МПа. Для расчёта на основании модели трещин максимальное напряжение (σ_{MAX}) для стали принималось равным 1 МПа, для бетона – 2 МПа.

На рис. 2 приведены места разрушения в материале купольной конструкции без усиления, рассчитанные на основе модели песка, в последовательные моменты времени. Отражаясь от свободных границ сооружения и интерферируя, сейсмические волны проходят к центральному элементу конструкции.

На рис. 3 приведены места разрушения и волновые картины в материале купольной конструкции без усиления, рассчитанные на основе модели трещин, в последовательные моменты времени. На рис. 4 приведены места разрушения в материале купольной конструкции с усилением, рассчитанные на основе модели песка, в последовательные моменты времени.

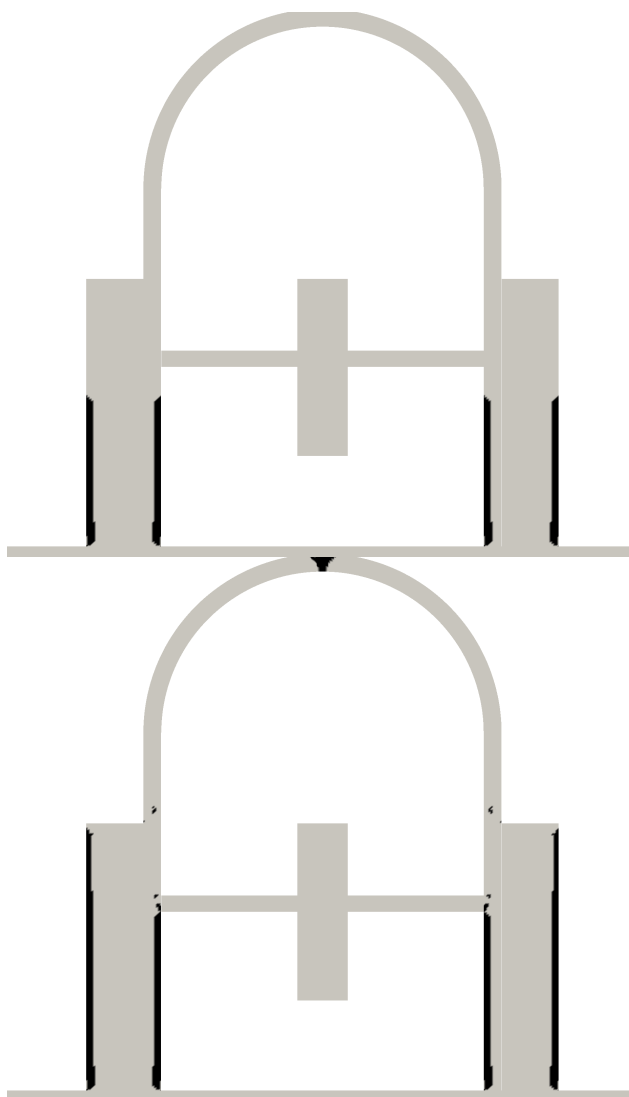


Рисунок 2. Места разрушения в материале купольной конструкции, рассчитанные по модели песка. Моменты времени 2 мс (сверху) и 12 мс (снизу) от момента начала воздействия возмущения на сооружение.

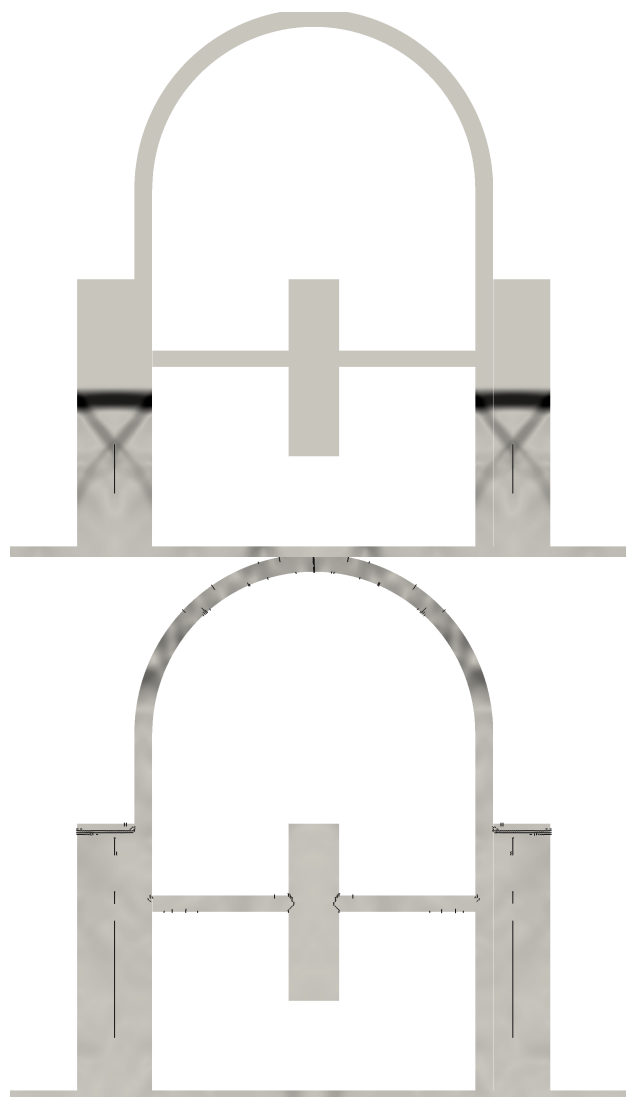


Рисунок 3. Места образования трещин и волновая картина в материале купольной конструкции, рассчитанные по модели трещин. Моменты времени 2 мс (сверху) и 12 мс (снизу) от момента начала воздействия возмущения на сооружение.

На рис. 5 приведены места разрушения и волновые картины в материале купольной конструкции с усилением, рассчитанные на основе модели трещин, в последовательные моменты времени.

Анализ результатов численных расчётов с использованием модели песка показывает, что при использовании критерия Мизеса основные разрушения идентифицируются вблизи свободных границ строения.

Напротив, при использовании модели трещин основные разрушения идентифицируются вдали от свободных границ строения. Также, одним из интересных результатов расчётов является тот факт, что при отсутствии усиления возмущение не достигает центрального элемента напрямую, и, соответственно, разрушения в нём практически отсутствуют.

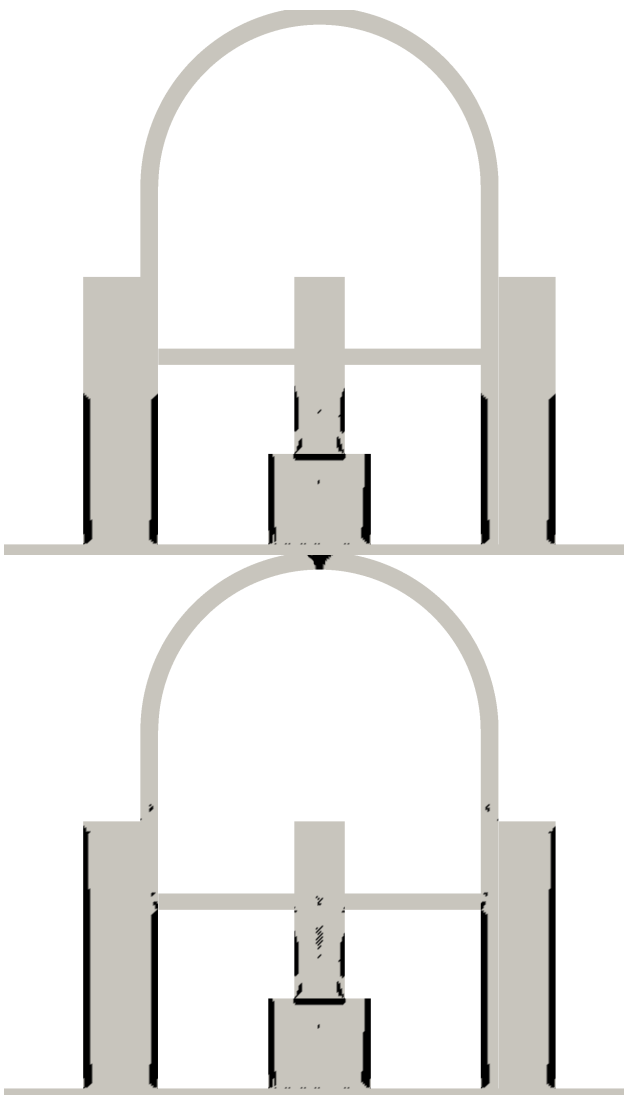


Рисунок 4. Места разрушения в материале купольной конструкции с усилением, рассчитанные по модели песка. Моменты времени 2 мс (сверху) и 12 мс (снизу) от момента начала воздействия возмущения на сооружение.

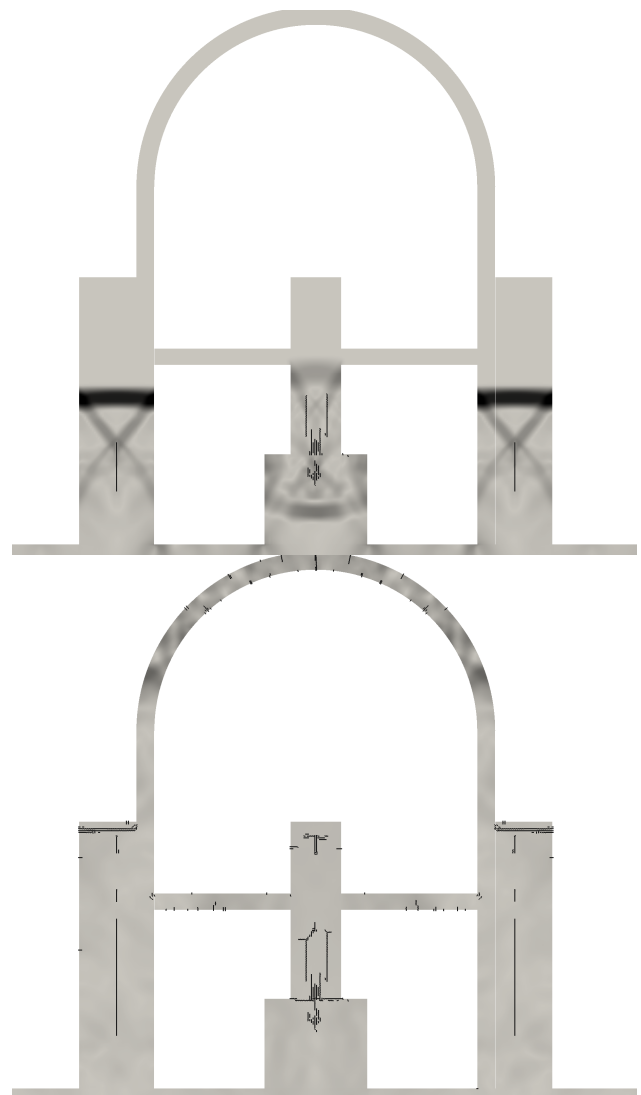


Рисунок 5. Места образования трещин и волновая картина в материале купольной конструкции с усилением, рассчитанные по модели трещин. Моменты времени 2 мс (сверху) и 12 мс (снизу) от момента начала воздействия возмущения на сооружение.

Таким образом, представляет большой научный и практический интерес проведение сравнения результатов численных расчётов по двум предложенным моделям разрушения с результатами реальных экспериментов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-08-01066_A и гранта Президента РФ МК-3383.2014.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гаскин В.В., Соболев В.И.** Имитационное моделирование сейсмических процессов в протяжённых сооружениях // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2005, № 5, с. 26-33.
2. **Михеева Т.В.** Обзор существующих программных средств имитационного моделирования при исследовании меха-

- низмов функционирования и управления производственными системами // Известия Алтайского гос. ун-та, 2009, № 1, с. 87-90.
3. **Голубев В.И., Квасов И.Е., Петров И.Б.** Воздействие природных катастроф на наземные сооружения // Математическое моделирование, 2011, Т. 23, № 8, с. 46-54.
 4. **Голубев В.И.** Методика отображения и интерпретации результатов полноволновых сейсмических расчётов // Труды МФТИ, 2014, Т. 6, № 1, с. 154-161.
 5. **Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.** Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013, Т. 53, № 10, с. 1709-1720.
 6. **Петров И.Б., Хохлов Н.И.** Моделирование сейсмических явлений сеточно-характеристическим методом // Труды МФТИ, 2011, Т. 3, № 3, с. 159-167.
 7. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1970, 492 с.
 8. **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988, 288 с.
 9. **Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С.** Расчёт динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование, 1990, Т. 2, № 11, с. 10-29.
 10. **Richard von Mises** Mechanik der festen Korper im plastisch-deformablne Zustand // Gottin. Nachr. Math. Phys., 1913, Vol. 1, p. 582-592.
 11. **Майчен Дж., Сак С.** Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967, с. 185-211.
- Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, кафедра информатики,
E-mail: w.golubev@mail.ru
- Григорьевых Данил Павлович, студент 5-го курса Московского физико-технического института, 141707, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, кафедра информатики,
E-mail: danilgrig@gmail.com
- Петров Игорь Борисович, заведующий кафедрой информатики Московского физико-технического института, 141707, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, кафедра информатики,
E-mail: petrov@mipt.ru
- Хохлов Николай Игоревич, заведующий лабораторией № 5 Московского физико-технического института, 141707, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, кафедра информатики,
E-mail: k_h@inbox.ru
- Vasily I. Golubev, 3rd year PhD student at Moscow Institute of Physics and Technology, 141707, Russia, Moscow region, Dolgoprudny city, Institutskiy per., b, 9, Department of Computer Science,
E-mail: w.golubev@mail.ru
- Danil P. Grigorievikh, 5th year student at Moscow Institute of Physics and Technology, 141707, Russia, Moscow region, Dolgoprudny city, Institutskiy per., b, 9, Department of Computer Science,
E-mail: danilgrig@gmail.com
- Igor B. Petrov, Head of Department of Computer Science at Moscow Institute of Physics and Technology, 141707, Russia, Moscow region, Dolgoprudny city, Institutskiy per., b, 9, Department of Computer Science,
E-mail: petrov@mipt.ru
- Nikolay I. Khokhlov, Head of Laboratory No. 5 at Moscow Institute of Physics and Technology, 141707, Russia, Moscow region, Dolgoprudny city, Institutskiy per., b, 9, Department of Computer Science,
E-mail: k_h@inbox.ru

Голубев Василий Иванович, аспирант 3-го года Московского физико-технического института, 141707,

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОГОНАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК БЕЗ УЧЕТА И С УЧЕТОМ ИХ ОДНОСТОРОННЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОКРУЖАЮЩИМ МАССИВОМ ГРУНТА

С.Б. Косицын, Чан Суан Линь

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Приведены результаты расчетов ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, расположенных в массиве грунта. С целью оценки необходимости учета их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом рассмотрены четыре пространственные расчетные модели системы «оболочки – грунтовый массив» с использованием специальных контактных элементов.

Ключевые слова: пересекающиеся цилиндрические оболочки, грунтовый массив, одностороннее взаимодействие, контактные элементы, напряженно-деформированное состояние.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF ORTHOGONALLY INTERSECTING CYLINDRICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT AND NOT TAKING INTO ACCOUNT THEIR UNILATERAL INTERACTION WITH THE SURROUNDING SOIL ARRAY

Sergey B. Kositsyn, Tran Xuan Linh

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The calculations results of orthogonally intersecting cylindrical shells, located under the ground array. In order to assessing the need for consideration of the possibility of unilateral interaction shells from the array, examined three spatial computational models of the system «shells – ground array» with the use of special contact elements.

Key words: intersecting cylindrical shells, ground array, unilateral interaction, contact elements, stress-strain state

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим узел пересечения цилиндрических оболочек (тройниковое соединение), состоящий из основной трубы диаметром $D = 2$ м, толщиной $T = 0.02$ м и патрубка с размерами $d = 1.4$ м и $t = 0.014$ м, изготовленных из стали со следующими характеристиками: мо-

дулем упругости $E_{ст} = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициентом Пуассона $\mu_{ст} = 0.3$ и плотностью $\rho_{ст} = 7800$ кг/м³. Оболочки расположены на глубине 10 м в массиве однородного изотропного материала, моделирующего окружающий грунт (глину) (рис. 1), имеющий модуль деформации $E_{гр} = 14$ МПа, коэффициент поперечных деформаций $\mu_{гр} = 0.35$ и угол внутреннего

Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта

трения $\varphi = 17^\circ$. Для оценки необходимости учета возможного одностороннего взаимодействия оболочек с окружающим массивом грунта (иногда такое взаимодействие называют отлипанием оболочек от грунтового массива) проведены расчеты четырех пространственных моделей системы «оболочки – грунтовый массив», находящихся под действием собственного веса оболочек. Собственный вес грунта при этом не учитывался, так как все деформации массива грунта от его собственного веса протекли еще до возведения оболочек. Расчеты проведены методом конечных элементов при помощи программного комплекса MSC PATRAN – NASTRAN.

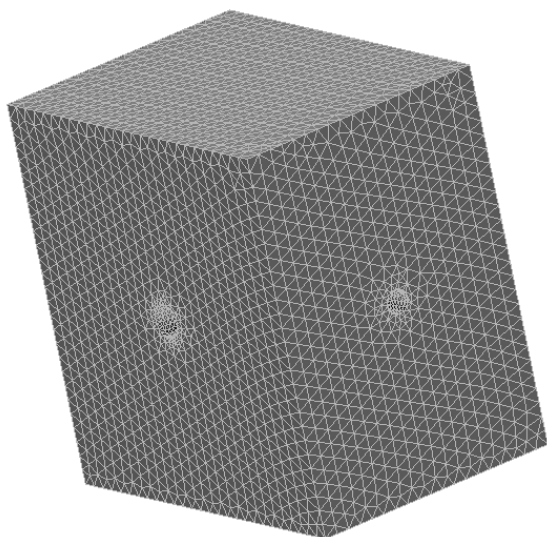


Рис. 1. Конечноэлементная модель оболочек с массивом грунта (связи не показаны).

2. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ «ОБОЛОЧКИ – ГРУНТОВЫЙ МАССИВ» С УЧЕТОМ ПОЛНОГО КОНТАКТА ОБОЛОЧЕК С МАССИВОМ

Материалы конструкций оболочек и массива считались неограниченно линейно упругими. Размеры объемного массива выбраны из условия затухания напряженно-деформированного состояния (НДС) грунта и приняты по 5 диаметров большой оболочки в каждую сторону и снизу (по 10 м). На боковых гранях и внизу массива поставлены

линейные связи, запрещающие перемещения по нормальям к соответствующим поверхностям. По торцам оболочек также поставлены аналогичные связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость системы в целом. Оболочки аппроксимированы плоскими четырехузловыми конечными элементами (по шесть степеней свободы в каждом узле), построенными на основе гипотезы прямых нормалей. Грунт смоделирован объемными конечными элементами в виде четырехузловых тетраэдров (по три степени свободы в каждом узле). Сетка объемных конечных элементов сгущалась по мере приближения к оболочкам. Использование тетраэдров обосновано сложностью геометрии пространственной расчетной модели. Контакт между оболочками и грунтовым массивом считался полным жестким. Такая модель достаточно широко применяется в пространственных расчетах подземных сооружений. Задача решена в линейной постановке. В данном расчетном случае в зоне контакта возникают как нормальные, так и касательные напряжения между контактирующими объектами, однако в реальных условиях наличие такого полного «сдвигового» контакта недостаточно изучено. Максимальные перемещения точек оболочек w_{\max} и максимальные эквивалентные напряжения по IV теории прочности [1] (по Мизесу) в оболочках $\sigma_{\max}^{\text{об}}$ и в массиве грунта $\sigma_{\max}^{\text{гр}}$ приведены в таблице 1 (столбец «Вариант 1»). Максимальные перемещения получили точки, расположенные внизу области сопряжения основной оболочки (большого диаметра) и патрубка (рис. 2). Максимальные напряжения возникли в основной оболочке, также внизу, в зоне примыкания патрубка (рис. 2 и 3, а). В массиве наиболее опасной является зона в окрестности боковой поверхности основной оболочки, противоположной месту примыкания патрубка (рис. 2 и 4, а). Такая картина деформаций образовалась вследствие того, что патрубок под действием собственного веса выполняет роль «рычага», закручивающего основную оболочку в грунте.

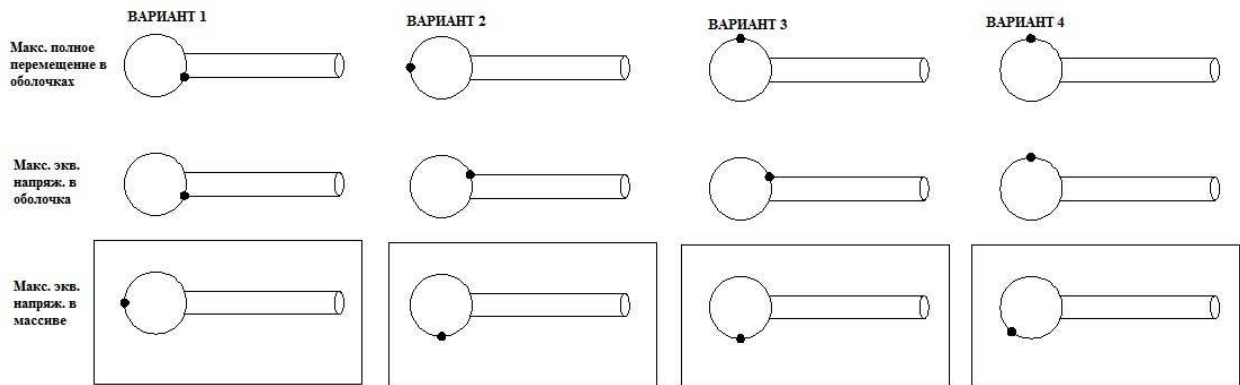


Рис. 2. Места расположения экстремальных характеристик НДС.

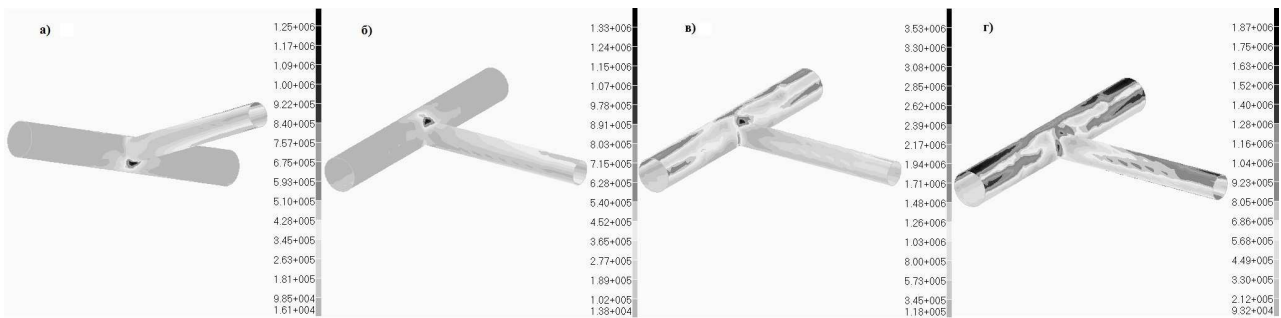


Рис. 3. Поля интенсивностей напряжений в наружных волокнах оболочек
а) вариант 1; б) вариант 2; в) вариант 3; г) вариант 4.

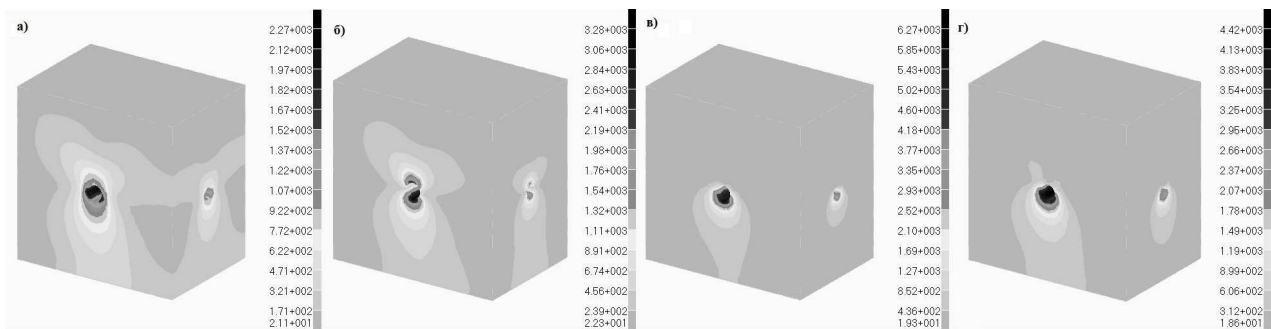


Рис. 4. Поля интенсивностей напряжений в массиве грунта
а) вариант 1; б) вариант 2; в) вариант 3; г) вариант 4.

Таблица 1

Компоненты НДС	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$w_{\max}, 10^{-4} \text{ м}$	5.63	6.66	11.8	10.3
$\sigma_{\max}^{\text{об}}, 10^6 \text{ Па}$	1.25	1.33	3.53	1.87
$\sigma_{\max}^{\text{гр}}, 10^3 \text{ Па}$	2.27	3.28	6.27	4.42

3. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ «ОБОЛОЧКИ – ГРУНТОВЫЙ МАССИВ» С УЧЕТОМ ДВУСТОРОННЕГО КОНТАКТА ОБОЛОЧЕК С МАССИВОМ

С целью оценки влияния полного «сдвигового» контакта в рассмотренной выше модели проведен расчет такой же системы «оболочки – грунтовый массив», но в отличие от предыдущего случая между оболочками и массивом размещены специальные упругие контактные элементы (в конечноэлементном программном комплексе MSC PATRAN – NASTRAN их называют GAP элементами [2]) с бесконечно большими жесткостями при сжатии и растяжении. В данном случае эти жесткости приняты одинаковыми и равными $S_{сж} = S_{рас} = 10^8$ н/м, так как задать бесконечно большие жесткости при численной реализации решения задачи в программном комплексе невозможно. Длины контактных элементов приняты равными нулю, чтобы исключить наличие начального зазора между контактирующими поверхностями. Поскольку контактные элементы работают только на растяжение и сжатие, в зоне контакта между тройниковыми соединениями и грунтовым массивом сдвиговое взаимодействие отсутствовало (трение пока не задавалось). Задача решена в линейной постановке. Наибольшие полные перемещения точек оболочек w_{max} и максимальные эквивалентные напряжения по IV теории прочности представлены в таблице 1 (столбец «Вариант 2»). В данном случае наибольшие перемещения получили точки, расположенные на боковой части основной оболочки напротив области примыкания патрубка (рис. 2), но величины перемещений оказались в 1.18 раза больше, чем при полном жестком контакте оболочек с массивом. Наибольшие напряжения в оболочках возникли наверху зоны сопряжения патрубка с основной оболочкой (рис. 2 и 3, б) и возросли в 1.06 раза. Максимальные напряжения в грунтовом массиве имели место внизу основной оболочки (рис. 2 и 4, б) и стали в 1.44 раз больше, чем в предыдущем случае. Сле-

дует отметить, что рассмотренная модель с двусторонним контактом, также как и предшествующая с полным контактом, имеет существенный недостаток: в верхней зоне контакта оболочки «тянут» за собой грунтовый массив, что на практике не наблюдается.

4. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ «ОБОЛОЧКИ – ГРУНТОВЫЙ МАССИВ» С УЧЕТОМ ОДНОСТОРОННЕГО КОНТАКТА ОБОЛОЧЕК С МАССИВОМ

Чтобы учесть возможность отлипания оболочек от грунта между оболочками и массивом также поставлены контактные элементы, имеющие бесконечно большие жесткости при сжатии и нулевые при растяжении. В связи с численным решением поставленной задачи обеспечить как бесконечно большие, так и нулевые жесткости не представилось возможным, однако, чем больше жесткости контактных элементов при сжатии и меньше при растяжении, тем лучше реализуется односторонний контакт. В данном случае жесткости контактных элементов заданы соответственно $S_{сж} = 10^8$ н/м и $S_{рас} = 10^{-7}$ н/м, а их длины также приняты равными нулю как в предыдущем случае. Задача решена в конструктивно нелинейной постановке. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны отсутствия контакта между оболочками и массивом (область отлипания оболочек от грунта). За счет возможного отлипания НДС системы существенно изменилось. Максимальные полные перемещения точек оболочек w_{max} и максимальные эквивалентные напряжения по IV теории прочности в наружных волокнах оболочек $\sigma_{max}^{об}$ и в массиве грунта $\sigma_{max}^{гр}$ приведены в таблице 1 (столбец «Вариант 3»). Наибольшие перемещения получили точки верхней части основной оболочки (рис. 2) (в 2.10 раза больше, чем при полном жестком контакте). В этой же зоне модели произошло отлипание оболочки от массива грунта. Максимальные

напряжения в оболочках возникли наверху зоны сопряжения патрубка с основной оболочкой (рис. 2 и 3, в) и в 2.82 раза превысили аналогичные напряжения, соответствующие варианту 1. Наибольшие напряжения в массиве грунта оказались внизу на контакте с оболочками (рис. 4, в) и выше, чем в варианте 1 в 2.76 раза. В данном расчетном случае возможность отлипания оболочек от массива грунта учтено, но контактное трение между объектами не рассматривалось, что, конечно, является некоторым недостатком этой модели.

5. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ «ОБОЛОЧКИ – ГРУНТОВЫЙ МАССИВ» С УЧЕТОМ ОДНОСТОРОННЕГО КОНТАКТА И ТРЕНИЯ МЕЖДУ КОНТАКТИРУЮЩИМИ ОБЪЕКТАМИ

Расчетная модель осталась такой же как в предыдущем разделе, то есть использующей упругие односторонние контактные элементы. Единственное отличие заключалось в наличии «сдвигового» контакта между оболочками и грунтовым массивом. Сдвиговые усилия учтены путем введения статического коэффициента трения для GAP элементов [3]. В этом случае он принят равным тангенсу угла внутреннего трения грунта (глины) $\mu_k = \operatorname{tg}\varphi = 0.3057$. Эта величина – ниже коэффициента трения стали по грунту, то есть предполагается, что определяющей является возможность нарушения сдвигового контакта за счет разрушения грунта. Задача решена в конструктивно нелинейной постановке. Наибольшие полные перемещения точек оболочек w_{\max} и максимальные эквивалентные напряжения по IV теории прочности представлены в таблице 1 (столбец «Вариант 4»). Экстремальные значения перемещений и эквивалентных напряжений в оболочках оказались в точках верхней части основной оболочки (рис. 2, 3, 5). В этой же зоне модели произошло отлипание оболочки от массива грунта. Наибольшие напряжения в массиве грунта возникли внизу

на контакте с оболочками и чуть сместились в бок (рис. 2, 4). Компоненты НДС уменьшились по сравнению с предыдущим случаем за счет контактного трения оболочек с массивом грунта (максимальные полные перемещения в 1.15 раза, наибольшие напряжения в оболочках в 1.89 раза и в массиве в 1.42 раза). Следует отметить, что наличие примыкающего патрубка подкрепило основную оболочку, не позволив ей сплюснуться в зоне сопряжения с патрубком (рис. 5).

6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Расчетные модели, учитывающие возможность отлипания оболочек от грунта и контактное трение между объектами, дают результаты как по перемещениям (соответственно на 52.3% и 45.3%), так и по расчетным напряжениям (соответственно на 64.6% и 33.2% в оболочках, на 63.8% и 48.6% в грунте) превышающие соответствующие характеристики НДС, полученные при помощи общепринятой модели с полным контактом оболочек и массива грунта. Поэтому именно их (варианты 3 и 4) следует рекомендовать для проведения пространственных расчетов системы «оболочка – грунтовой массив». Модель с учетом двустороннего контакта оболочек с массивом занимает промежуточное положение.

Для учета возможности отлипания оболочек от грунта и контактного трения между ними рекомендуется применять в местах контакта специальные контактные элементы, имеющие большие жесткости при сжатии и нулевые (или близкие к нулю) жесткости при растяжении со статическим коэффициентом трения, равным тангенсу угла внутреннего трения грунта. Однако, учитывая, что вопросы контактного трения оболочек и грунта еще мало изучены, а учет трения снижает компоненты НДС, можно проводить расчеты без учета этого фактора. Наличие примыкающего патрубка подкрепляет основную оболочку, не позволяя ей сплюснуться в зоне сопряжения с патрубком.



Рис. 5. Деформированный вид тройникового соединения при учете возможного одностороннего взаимодействия и трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров А.В., Потапов В.Д.** Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1990 – 400 с.
2. **Косицын С.Б., Долотказин Д.Б.** Расчет стержневых систем, взаимодействующих с упругим основанием, методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC/NASTRAN FOR WINDOWS: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2004 – 116 с.
3. MSC.Software Corporation. Решение задач нелинейной статики в MSC.NASTRAN: Руководство пользователя, 1999 – 86 с.

верситета путей сообщения (МИИТ); 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;
e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Чан Суан Линь, аспирант Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127944, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;
e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

Sergey B. Kositsyn, Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obrazsova, 127944, Moscow, RUSSIA, e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Tran Xuan Linh, Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obrazsova, 127944, Moscow, RUSSIA, e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского государственного уни-

ЗАДАЧИ ЛЭМБА: ОБЗОР И АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

С.В. Кузнецов¹, Е.О. Терентьева²

¹ Институт проблем механики РАН, г. Москва, РОССИЯ

² ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Внутренняя и внешняя задачи Лэмба представляют исключительный интерес для геофизики, поскольку широко используются при моделировании волновых процессов, сопровождающих землетрясения. В работе дается обзор методов решения внутренней и внешней задач Лэмба от сосредоточенных силовых воздействий. Рассматриваются родственные внутренние задачи о приложении дуплетов и диполей внутри упругого полупространства. Анализируются решения задач о движущейся нагрузке, приложенной к границе полупространства или полуплоскости.

Ключевые слова: задача Лэмба, объемная волна, волна Рэлея, полупространство, полуплоскость

LAMB PROBLEMS: A REVIEW AND ANALYSIS OF METHODS AND APPROACHES

Sergey V. Kuznetsov¹, Elena O. Terentjeva²

¹ Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

² Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Inner and outer Lamb problems are of extreme importance for various applications in geophysics, as these problems are often used for simulation of wave fields accompanying earthquakes. Herein, methods for analyzing both Lamb problems are reviewed. The related to the inner Lamb problem, the inner dipole and doublet forces are considered. Wave fields produced by moving loads acting on the boundary of a halfspace or a halfplane are analyzed.

Key words: Lamb problem, bulk wave, Rayleigh wave, halfspace, halfplane

1. ЗАДАЧИ ЛЭМБА, ОПИСАНИЕ

В [1] Лэмб рассмотрел две внешних задачи о распространении волн в изотропном упругом полупространстве и изотропной упругой полуплоскости от сосредоточенного силового воздействия, приложенного нормально к свободной границе. В этой работе были рассмотрены также две внутренние задачи о волнах в упругом полупространстве и полуплоскости, вызванные центром расширения, находящимся на некоторой глубине под

поверхностью. Решение этих задач в [1] было сведено к интегральным уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов. В [2] внутренняя и внешняя задачи были обобщены на случай сосредоточенных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью.

Надо отметить, что в [1, 2] в случае произвольных по времени нагрузок замкнутое решение удалось построить лишь в пространстве изображений (по Фурье для пространственных переменных и по Лапласу для временной переменной). С помощью

асимптотических оценок в [1] было показано, что в случае внешних плоской и пространственной задач основной вклад в поле смещений на свободной поверхности вносят рэлеевские волны. Помимо этого в [1] было получено аналитическое решение для плоской внешней задачи в случае нормальной нагрузки, изменяющейся во времени в виде ядра Пуассона.

Кроме того, было показано, что в случае гармонического источника магнитуды рэлеевских волн на свободной поверхности на достаточном удалении от эпицентра в случае плоской задачи не зависят от $|rx|$, а в случае пространственной задачи убывают пропорционально $|rx|^{-1/2}$, где $|x|$ -

расстояние от эпицентра, а r - волновое число. Далее, в той же работе с помощью асимптотических оценок было найдено, что наряду с волнами Рэлея точечный источник вызывает появление объемных продольных (Р) и поперечных (S) волн. Магнитуды этих волн в случае гармонического источника на достаточном удалении от него в случае плоской задачи убывают на поверхности пропорционально $|rx|^{-3/2}$, а в случае пространственной задачи - пропорционально $|rx|^{-2}$.

Заметим, что при распространении объемных волн, порожденных точечным гармоническим источником в безграничной среде, убывание их магнитуд происходит медленнее. Например, в случае плоской задачи магнитуда убывает как $|rx|^{-1/2}$, а в случае пространственной задачи, как $|rx|^{-1}$ [3]. Таким образом, в [1] впервые было дано теоретическое обоснование утверждения Рэлея [4] о том, что поверхностные (рэлеевские) волны убывают медленнее объемных волн с увеличением расстояния от источника.

Для построения решений уравнения движения Навье в [1, 2] записывались в форме Ламе – Клапейрона [5, Sect. 59]

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\text{div}\mathbf{u} - \mu\text{rot rot}\mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

где λ и μ - константы Ламе, \mathbf{u} - поле перемещений, \mathbf{b} - поле массовых сил, ρ - плотность среды использовалось представление Гельмгольца [5, Sect. 67] для поля массовых сил

$$\mathbf{b} = -\nabla\alpha - \text{rot}\boldsymbol{\beta} \quad (2)$$

где α и $\boldsymbol{\beta}$ - скалярный и векторный потенциалы и представление Ламе – Грина [5, Sect. 67] для динамического поля перемещений

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \text{rot}\boldsymbol{\psi} \quad (3)$$

где φ - скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ - векторный потенциалы. Представление (3) аналогично представлению Папковича – Нейбера для поля перемещений при решении уравнений статики. В качестве начальных условий в [1, 2] рассматривались однородные условия вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

На внешней поверхности Π_V полупространства или полуплоскости задавались условия второй краевой задачи (в напряжениях)

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{v} = p(\mathbf{x}', t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_V \quad (5)$$

где \mathbf{v} - вектор единичной внешней нормали к границе; \mathbf{I} - единичная диагональная матрица, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензор (малых) деформаций; p - нагрузка на свободной поверхности. В случае внутренней задачи Лэмба $p = 0$.

Подстановка представлений (2), (3) в уравнения движения и применение преобразования Лапласа по временной переменной (или предположение о гармоническом изменении во времени

нагрузки) позволили свести уравнения движения к неоднородным уравнениям Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\varphi' = \frac{1}{\lambda+2\mu}\alpha', \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\boldsymbol{\psi}' = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\beta}' \quad (6)$$

Штрихи у потенциалов в (4) означают освобождение от гармонического множителя $e^{i\omega t}$. При получении уравнений (6) использовались три легко проверяемых тождества [5, Sect.5]

$$\begin{aligned} \text{rot rot rot } \boldsymbol{\psi} &= -\text{rot } \Delta \boldsymbol{\psi}, & \text{div rot } \boldsymbol{\psi} &= 0, \\ \text{rot } \nabla \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, для построения решения пространственного уравнения Гельмгольца в [1, 2] использовалось фундаментальное решение

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{i r_1 |\mathbf{x}|}, \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1} \quad (8)$$

Аналогичный вид имеет фундаментальное решение $\boldsymbol{\psi}'$ векторного уравнения Гельмгольца с заменой r_1 на r_2 и c_1 на c_2 , где c_1 и c_2 - скорости продольной и поперечной объемных волн соответственно

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (9)$$

В плоском случае фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца представимо в виде

$$\varphi' = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(r_1 |\mathbf{x}|), \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1} \quad (10)$$

где $H_0^{(1)}$ - функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Аналогичный вид имеет

фундаментальное решение $\boldsymbol{\psi}'$ для векторного уравнения. При решении задачи с нагрузкой, произвольно зависящей от времени, круговая частота ω в выражениях (8), (10) заменяется на параметр преобразования Лапласа. Далее, в [1, 2] осуществлялось сужение потенциалов с ядром (8) или (10) на граничную поверхность. Надо отметить, что полученные интегральные представления оказались весьма сложными: в замкнутом виде решение удалось получить лишь для гармонической нагрузки. В случае произвольной зависимости от времени замкнутое решение было получено в пространстве изображений, точнее, решение на поверхности было представлено в виде несобственного интеграла от алгебраической функции.

В дальнейшем представление Гельмгольца (1) и потенциалы Ламе – Грина (3) использовались в большинстве подходов, связанных с решением внутренней и внешней задач Лэмба, однако техника вычисления сингулярных интегралов, появляющихся при сужении потенциалов на граничную поверхность, менялась. В [6, 7] с помощью метода наискорейшего спуска Дебая были получены асимптотические оценки для компонент перемещений на границе для некоторых внутренних и внешних задач, обобщающих задачу Лэмба, например в [6] рассматривалась нагрузка под произвольным углом к поверхности. В [7] исследовалась плоская внутренняя задача о действии сосредоточенной силы в упругой полуплоскости. В этой работе на основании расчетов, выполненных по асимптотическим формулам, было найдено, что рэлеевские волны не образуются вблизи от эпицентра, на расстояниях d , удовлетворяющих условию

$$d < \frac{c_R h}{\sqrt{c_1^2 - c_R^2}} \quad (11)$$

где c_R - скорость волны Рэлея, а h - глубина источника. При получении оценки (11) сделано упрощающее предположение о том, что две объемных волн и рэлеевская волна распространяются независимо друг от друга. На самом же деле рэлеевская волна формируется из двух объемных волн, начиная с момента прихода медленной объемной волны, см. [3, p.66]. Не совсем понятное отсутствие рэлеевских волн в эпицентральной зоне, удовлетворяющей оценке (11), объяснялось в [7] интерференцией с объемными волнами, полностью поглощающими рэлеевскую волну. В случае плоской внешней задачи Лэмба асимптотические оценки, аналогичные [6, 7], получены в [8].

В [9, 10] для вычисления сингулярных интегралов, связанных с обращением преобразования Лапласа в задачах Лэмба, предложен особый путь интегрирования, связанный с деформацией контура интегрирования. В [11, 12] вместо деформации контура интегрирования предложено использовать многократное изменение порядка интегрирования, при этом в [11, 12] использовался подход, развитый в [13, 14] и основанный на функционально-инвариантных решениях. Заметим, что с помощью функционально-инвариантных решений поле перемещений в среде удалось представить в виде однократного интеграла от алгебраической функции по некоторому контуру в комплексной плоскости. Метод вычисления интегралов, предложенный в [11, 12] позднее был применен для анализа поля перемещений в цилиндрических координатах в случае осевой симметрии [15]. Для нагрузки в виде временной функции Хэвисайда, действующей на поверхности [16] и внутри [17, 18] полупространства, получено замкнутое выражение для вертикальной компоненты перемещений и выражение, содержащее эллиптические интегралы, для горизонтально компоненты. В [19] результаты работ [16 – 18] обобщены

на другие виды нагрузок. В [20, 21] для «плоской» задачи Лэмба выбор пути в методе Каньяра был упрощен, кроме того, в [21] объяснен кажущийся парадокс, связанный с особой дисперсией волн Рэлея. Надо отметить, что обнаруженная в [21] дисперсия рэлеевских волн – весьма своеобразная: она обнаруживается только при изменении знака круговой частоты и, таким образом, проявляется лишь при обращении двусторонних интегральных преобразований, в которых параметры преобразования меняют знак. В работах [22–24] на основе асимптотических разложений получены численные значения напряжений и перемещений вблизи от источника. Дальние асимптотики поля перемещений для внешней пространственной задачи Лэмба в случае гармонической нагрузки, совпадающие с решением Рэлея, приведены в работах [25, 26].

С помощью фундаментального решения Стокса [27] (см. также [5, Sect. 68]) в [28–30] внешняя задача Лэмба о гармонической нагрузке сведена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно неизвестных перемещений на границе.

В [31, Гл.1] и [32, Sect. 6.1] приведены результаты аналитического исследования поляризации гармонических поверхностных волн (с плоским фронтом), распространяющихся по границе упругого полупространства. На основании этих исследований оказалось, что для материала, удовлетворяющего условию Пуассона $\lambda = \mu$ вертикальная компонента на свободной поверхности приблизительно в полтора раза больше горизонтальной компоненты перемещений. Аналогичное соотношение между компонентами перемещений найдено несколько ранее в [33]. Фактически, результаты, полученные в [31–33], подтвердили расчеты, проведенные Рэлеем [4] для случая $\lambda = \mu$, в которых отношение

вертикальной амплитуды перемещений к горизонтальной составило 1.4677.

Интересные данные получены во внешней пространственной задаче Лэмба для случая импульсной нагрузки, заданной в виде временной функции Хэвисайда. Численный анализ решения [16] для этой задачи дал неожиданные результаты с точки зрения физической интерпретации. Например, вычисления, проведенные в [16] и повторенные в [34–38] с помощью различных вариантов метода [1, 2], показали, что в произвольной точке на поверхности вертикальная и горизонтальная компоненты перемещений претерпевают разрыв второго

рода в момент, соответствующий приходу рэлеевской волны, рис.1. При этом за фронтом рэлеевской волны решение [16] дает мгновенный выход на статическое решение Буссинеска для вертикальной компоненты, а для горизонтальной компоненты выход на статическое решение происходит асимптотически при $t \rightarrow \infty$. В этой связи интерес представляет сравнение аналитических (или аналитико-асимптотических) решений, рассмотренных в настоящем разделе, с расчетами, выполненными с помощью разностных методов.

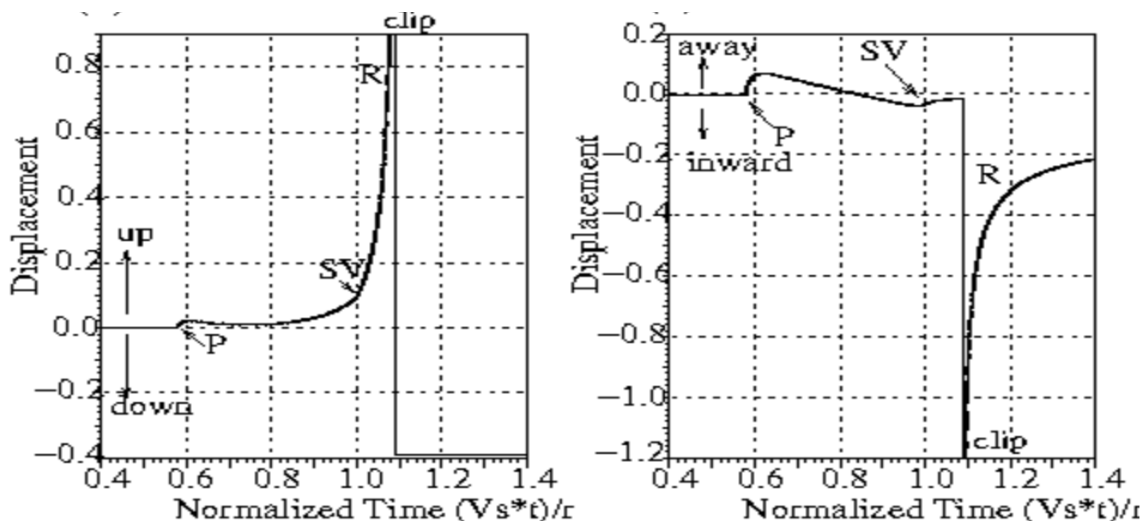


Рис. 1. Изменение во времени (а) вертикальной и (б) горизонтальной компонент вектора перемещений на границе полупространства для внешней пространственной задачи Лэмба при импульсной вертикальной нагрузке (при выполнении условия Пуассона $\lambda = \mu$) [36].

2. ЗАДАЧИ ЛЭМБА; РАЗНОСТНЫЕ И ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Решение внешней и внутренней задач Лэмба как в плоском, так и в пространственном случае, наталкиваются на определенные сложности, связанные с устойчивостью и схемной вязкостью явных разностных схем, а также появлением осцилляций в зонах за

ударным фронтом, характерным для явных схем второго [39, 40] или более высокого порядка точности, или размытием ударных волновых фронтов, характерного для явных схем первого порядка [41] и неявных схем любого порядка точности [42]. Положение осложняет плохое распараллеливание вычислений в динамических задачах теории упругости, что делает мало эффективным

применение современных кластерных и метаclusterных вычислительных систем. Частично недостатки разностных методов удается преодолеть с помощью разностных уравнений, записанных в окрестности характеристик. В [43–45] явные разностные схемы в окрестности характеристик применены для исследования распространения волн в упругих и упруго-пластических средах. В [46, 47] этот подход применен к решению плоской внешней задачи Лэмба для поверхностной нагрузки, заданной в виде временной функции Хэвисайда. В [47] отмечено хорошее совпадение с результатами, полученными методами интегральных преобразований, см. [11, 12].

В [48] для решения динамических задач, включая и внешнюю задачу Лэмба, предложен гибридный подход, объединяющей конечноэлементный и конечноразностный методы. В [48] использованы разностные схемы, разработанные в [49] и позволившие получить конечноразностные уравнения второго порядка точности по временной переменной и четвертого порядка по пространственным переменным. В [50] гибридный метод применен к решению пространственной внешней задачи Лэмба. Численные эксперименты [51] показали, что гибридный метод оказался практически свободным от осцилляций за фронтом рэлеевской волны.

В [52–54] для исследования распространения волн в задаче Лэмба применялся спектральный метод (конечных) элементов (SEM). Этот метод фактически представляет собой метод конечных элементов высокого порядка точности, в котором пространственными элементами (базисными функциями) являются полиномы Лежандра.

Канонический метод конечных элементов с явными двухслойными разностными схемами при интегрировании по времени применялись для решения различных задач геомеханики, включая внутреннюю [55, 56] и

внешнюю (пространственную) задачи Лэмба [57–59]. Сравнение данных расчета по методу конечных элементов с аналогичными результатами, выполненными с помощью интегральных преобразований, выявило [58] хорошее качественное совпадение магнитуд перемещений на свободной поверхности, вызванных действием гармонической нагрузки.

3. ЗАДАЧИ ЛЭМБА, АНИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

По-видимому, впервые внешняя плоская задача Лэмба для трансверсально-изотропной полуплоскости исследовалась в [60] с помощью интегральных преобразований и вычислением сингулярных интегралов по методу [9, 10]. В [61] эта техника обобщена для решения плоской внешней задачи Лэмба для упруго анизотропной полуплоскости с моноклинной симметрией. С помощью техники, разработанной в [60], в [62] для внутренней задачи Лэмба получены выражения смещений на границе трансверсально-изотропной полуплоскости. В [63] для построения решения внешней плоской задачи Лэмба в случае анизотропной полуплоскости с моноклинной симметрией применялся метод, основанный на шестимерном комплексном формализме Стро [64]. С помощью этого метода в [63] получены выражения для поля смещений в полуплоскости при внешнем гармоническом силовом воздействии.

Внешняя пространственная задача Лэмба для полупространства с произвольной упругой анизотропией рассмотрена в [65, 66]. При решении этой задачи уравнения движения анизотропной среды записывались в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u} \quad (12)$$

где \mathbf{C} - четырехвалентный тензор упругости. Предполагалось, что тензор упругости,

рассматриваемый как оператор в пространстве симметричных тензоров второго ранга, положительно определен и симметричен. Объемные силы в [65, 66] отсутствовали, а на граничной плоскости полупространства Π_v задавались условия в напряжениях

$$\mathbf{t}_v \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = p(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v \quad (13)$$

Далее в этих работах использовалось преобразование Радона по пространственным переменным. Это позволило свести внешнюю задачу Лэмба к вычислению однократных интегралов по окружностям, появляющимся при обращении преобразования Радона. Преобразования Радона по пространственным переменным применялись в дальнейшем при решении аналогичных задач в [67–69].

Метод, основанный на преобразовании Фурье по пространственным переменным, применялся в [70–75] для решения внешней и внутренней задач Лэмба. При этом в [74, 75] перемещения на поверхности представлены в виде несобственных интегралов, появляющихся при сужении преобразованных по Фурье компонент перемещений и их производных на граничную плоскость.

4. ЗАДАЧИ ЛЭМБА, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

По-видимому, впервые, присутствие рэлеевских волн во внутренней задаче Лэмба было экспериментально зафиксировано в [1] при анализе сейсмограмм от удаленного эпицентра землетрясения. В дальнейшем результаты [1] подтверждались в различных геофизических исследованиях [76–81].

Надо отметить, что далеко не во всех геофизических исследованиях отмечено появление волн Рэлея. Например, в [82, с. 268] дан анализ сейсмограмм, полученных

при поверхностных взрывах, которые фактически, описываются решением внешней пространственной задачи Лэмба. По наблюдениям [82] волны Рэлея при поверхностных взрывах не обнаруживаются. Аналогичные данные приводятся в [83]. Определенный интерес представляет концепция анализа сейсмограмм землетрясений, изложенная в [84, с.25]. В соответствии с этой концепцией, волны, возникающие при сейсмической активности, разделяются на два класса: объемные волны – это относительно короткие волны с периодом колебаний менее одной секунды, а поверхностные – это волны очень большой длины (от десятков до сотен километров), у которых период колебаний существенно превосходит одну секунду.

В экспериментальных модельных методах исследования задач Лэмба применялась в основном техника фотоупругости. В [85–87] с помощью этого метода исследовались волны, распространяющиеся от точечного источника во внешних задачах Лэмба. Сравнение экспериментальных результатов, приведенных в этих работах, с данными теоретического анализа выявило хорошее качественное совпадение.

Среди других экспериментальных методов, применяемых для исследования волн, возникающих в задачах Лэмба, надо отметить метод глубинной акустической регистрации колебаний [88]. Для анализа смещений на поверхности полупространства во внешней задаче Лэмба (в случае малых масштабов) применяют также методы оптической интерферометрии [89, 90]. В этих случаях для возбуждения акустических волн обычно применяют мгновенный лазерный нагрев поверхности [89].

5. ПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ

В одной из первых работ [6], обобщающих задачу Лэмба [2] о действии подвижной нагрузки, рассмотрены внешняя и внутренняя задачи о действии подвижной

нагрузки, наклоненной под произвольным углом к поверхности полупространства (полуплоскости).

Помимо точных методов, основанных на применении интегральных преобразований, разрабатывались инженерные подходы, причем в этих подходах вместо полупространства или полуплоскости обычно рассматривались свободные балочные конструкции (описываемые теорией Бернулли – Эйлера или Тимошенко), а также балки, лежащие на упругом основании (в этом случае в качестве модели основания чаще всего применялась модель Винклера). При этом, инженерные подходы различались в зависимости от области применения. Так, специалисты по эксплуатации железных дорог и мостов в основном исследовали динамическую устойчивость упругих конструкций, несущих подвижные нагрузки [91–96]. В горной механике подвижные нагрузки возникали при исследовании динамики шахтного подъема, где используются канаты переменной длины [97–101]. Специфические методы разрабатывались в теории механизмов и машин для исследования динамической устойчивости гибких ветвей передач [102–104]. В [105–107] предложен объединенный подход для исследования различных задач с подвижными нагрузками на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. В этом подходе введено дополнительное нелинейное краевое условие, описывающее взаимовлияние движущегося объекта и колебаний упругой направляющей. Физический смысл последнего условия состоит в том, что при взаимодействии распределенной системы с движущимся сосредоточенным объектом возникают силы вибрационного давления. Надо отметить, что введение в расчет таких дополнительных сил, учитывающих движение нагрузки, предлагалось ранее в [108, 109].

При исследовании пластин, нагруженных движущейся нагрузкой, обычно применяют

теорию Бернулли – Эйлера, основанную на гипотезе плоских сечений. Эта теория позволяет получить динамические уравнения, аналогичные статическим уравнениям изгиба тонких пластин или уравнениям изгиба балок [110–113]. В дальнейшем методы [110–113] применялись при решении различных задач, связанных в основном с исследованием поведения ледяного покрова [114–116] а также колебаниям балок [117–120] при движущихся нагрузках.

Задачи для тел, нагруженных движущимися нагрузками, могут исследоваться с помощью конечноэлементных и конечноразностных методов. В [121–123] задача о пластине, нагруженной движущейся нагрузкой, анализировалась с помощью метода конечных элементов с использованием двухслойных явных разностных схем второго порядка точности для интегрирования уравнений движения. Аналогичным методом в [124, 125] исследовались колебания балок на упругом основании от действия движущихся нагрузок. В [126] представлены расчеты методом конечных элементов сложных систем, подверженных действию движущихся нагрузок. В [127] численные исследования по колебаниям мостовых конструкций от движущихся нагрузок сопоставлены с результатами натуральных измерений. Это сопоставление выявило хорошее качественное и количественное совпадение частот и амплитуд колебаний. В [128, 129] решение аналогичных задач осуществлялось с помощью метода конечных разностей.

6. РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ

В случае внешних задач о действии нагрузки на границу упругой полуплоскости или полупространства, наряду с нормальным к границе воздействием, рассмотренным в [1], как отмечено выше, исследуют задачу о

наклонной к поверхности нагрузке [6, 22]. Рассматриваются также задачи о штампе, контактирующим с упругим полупространством и совершающим горизонтальные гармонические колебания [130] и неосесимметричные вертикальные колебания [131]. В [132, 133] рассматривалась дипольная (моментная) гармоническая и импульсная нагрузка, приложенная на поверхности полупространства. Эта задача исследовалась с помощью преобразования Ханкеля по радиальной координате и преобразованием Лапласа по временной переменной. Численный анализ этой задачи показал [133], что на поверхности полупространства основной вклад от дипольной нагрузки вносят рэлеевские волны.

В случае внутренних задач, по-видимому, наибольший интерес представляют решения для дуплета (двойной силы без момента) [134–136] и диполя (сосредоточенного момента) [137]. В этих работах построение решений для соответствующих внутренних (пространственных) задач осуществлялось с помощью метода Лэмба и выбора контура интегрирования по методу [9, 10]. В [138] построено решение для внутренней пространственной задачи о действии горизонтальной гармонической силы в упругом трансверсально-изотропном полупространстве. Заметим, что плоские внутренние задачи о диполе и дуплете, по-видимому, не исследовались.

В [139, 140] исследовались решения внутренних задач Лэмба, связанные с появлением истекающих волн (волн, амплитуда которых не убывающих по глубине). Построение и анализ соответствующих решений в [140] проводился методами [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lamb H.** On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser.A*, 1904, vol. 203, pp. 1-42.
2. **Lamb H.** On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids, *Philosophical Magazine* // 1916, vol.13, pp. 386-399, 539-548.
3. **Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.** *Elastic Waves in Layered Media*, N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
4. **Strutt J.W. (Lord Rayleigh).** On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // *Proc. London Math. Soc.*, 1885, Vol.17, pp. 4 – 11.
5. **Gurtin M.E.** The Linear Theory of Elasticity, In: *Handbuch der Physik Bd.VIa/II*, Springer, 1972.
6. **Nakano H.** Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // *Geophysical Magazine*, 1930, vol. 2, pp. 189-348.
7. **Nakano H.** On Rayleigh waves // *Japan Journal of Astronomy and Geophysics*, 1925, vol. 2, pp. 233-326.
8. **Lapwood E.R.** The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*. 1949. Vol. 242, pp. 63–100.
9. **Cagniard L.** *Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives*. Paris: Gauthier-Villard, 1939. 255 p.
10. **de Hoop A.T.** A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // *Appl. Sci. Res. Sect. Ser. B*. 1960. V.8. N.4. P.349–356.
11. **Петрашень Г.И.** О задаче Лэмба в случае упругого полупространства // *Докл. АН СССР*. 1949. Т.64. С.649-652.
12. **Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.** О задаче Лэмба в случае полупространства // *Уч. зап. ЛГУ, сер. мат.* 1950, № 135, Вып. 21. С. 71–118.
13. **Смирнов В.И., Соболев С.Л.** Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1932, № 20, 37 с.
14. **Смирнов В.И., Соболев С.Л.** О применении нового метода к изучению

- упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1933, № 29, с. 43–51.
15. **Огурцов К.И., Петрашень Г.И.** Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951, № 149, Вып. 24. С. 3–117.
 16. **Pekeris C.L.** The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, vol. 41, pp. 469-480.
 17. **Pekeris C.L.** The seismic buried pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, vol. 41, pp. 629-639.
 18. **Pekeris C.L., Lifson H.** Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a burried pulse // J. Acoust. Soc. Am., 1957, vol. 29, pp. 1233-1238.
 19. **Richards P.G.** Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seism. Soc. Amer. 1979. Vol. 69. P. 947–956.
 20. **Поручиков В.Б.** Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
 21. **Перегудов Д.В.** Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // Вычислительная сейсмология. 2000. Вып. 31. С. 120-137.
 22. **Шемякин Е.И., Файншмидт В.Л.** Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой // Учен. зап. ЛГУ. 1954. №177. Вып.28. С. 148-179.
 23. **Никифоровский В.С.** Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки // ПМТФ. 1962. №., С. 82-94.
 24. **Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.** Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979.
 25. **Нарышкина Е.А.** Колебания полупространства при любых начальных условиях // Труды Сейсмологического института АН СССР, 1934, № 45, 71 с.
 26. **Гоголадзе В.Г.** Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея // Труды Сейсмологического института АН СССР. 1947, № 125, 43 с.
 27. **Stokes G.G.** On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, Trans. Cambridge Phil. Soc., 1849, vol. 8, pp. 287-319.
 28. **Шерман Д.И.** Колебания упругого полупространства при заданных смещениях или внешних силах на границе // Труды Сейсмологического института АН СССР. 1946, № 118, 47 с.
 29. **Шаташвили С.Х.** Приведение одной смешанной задачи теории установившихся упругих колебаний к интегральным уравнениям Фредгольма // Сообщ. Акад. наук Груз. ССР, 1953, т. XIV № 5, с.257-60.
 30. **Шаташвили С.Х.** Об одной смешанной задаче теории установившихся колебаний упругого полупространства // Труды. Груз. политехн. ин-т. - 1956. - N1. - с.77-80.
 31. **Викторов И.А.** Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
 32. **Graff K.P.** Wave Motion in Elastic Solids. Oxford: Clarendon Press, 1975, 682p.
 33. **Frederick J.R.** Ultrasonic Engineering. N.Y.: Wiley, 1965, 382 p.
 34. **Lang H.A.** Surface displacements in an elastic half-space // Z. angew Math. Mech.1961. Vol. 41, pp. 141-153.
 35. **Mitra M.** Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Proc. Camb. phil. Soc. Math. Phys. Sci. 1961. Vol. 60, pp. 683-696.
 36. **Mooney H.M.** Some numerical solutions for Lamb's problem // Bulletin of the Seismological Society of America, 1974. Vol. 64 No.2, pp. 473-491.
 37. **Richards P.G.** Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bulletin

- of the Seismological Society of America, 1979. Vol. 69, No.4, pp. 947-956.
38. **Kausel E.** Fundamental Solutions of Elastodynamics. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2006. 251 p.
 39. **Lax P.D., Wendroff B.** Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, pp. 381-398.
 40. **Wendroff B.** Theoretical Numerical Analysis. N.Y.: Academic Press, 1967.
 41. **Годунов С.К.** и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
 42. **Самарский А.А.** Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т.5. №1. С.34-43.
 43. **Clifton R.J.** A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. Appl. Math. 1967. Vol. 25, No. 1, pp. 97 – 116.
 44. **Сабодаш П.Ф., Череднеченко Р.А.** Применение метода пространственных характеристик к решению задачи о распространении волн в упругой полуполосе // Механика твердого тела. 1972. № 6, с. 180-185.
 45. **Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н.** Численное решение неодномерных задач динамики упруго-пластических сред. В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.; ВИНТИ, 1974.
 46. **Кукуджанов В.Н.** Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР. 1976. Вып.6. 67 с.
 47. **Веденяпин Е.Н., Кукуджанов В.Н.** Метод численного интегрирования нестационарных задач динамики упругой среды // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т.21. №5. С.1233-1248.
 48. **Moczo P., et al.** Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures // Bull. Seism. Soc. Am. 1997, Vol. 87, pp. 1305–1323.
 49. **Levander A.R.** Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // Geophysics, 1988. Vol. 53, 1425–1436.
 50. **Moczo P., Kristek J., Vavrycuk V., Archuleta R.J., Halada L.** 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities // Bull. Seism. Soc. Am. 2002. V. 92. N.8. P. 3042–3066.
 51. **Shuo M., Archuleta R.J., Liu P.** Hybrid modeling of elastic *P-SV* wave motion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach // Bulletin of the Seismological Society of America, 2004. Vol. 94, No. 4, pp. 1557–1563.
 52. **Komatitsch D., Tromp J.** Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation // Geophys. J. Int. 1999. V.139. pp. 806–822.
 53. **Komatitsch D., Tromp J.** Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. I. Validation // Geophys. J. Int. 2002. V.149. N.2. pp. 390–412.
 54. **Komatitsch, D., Tromp J.** Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. II. 3-D models, oceans, rotation, and self-gravitation // Geophys. J. Int. 2002. V.150. N.1. pp. 303–318.
 55. **Olsen K.B., Archuleta R.J.** Three-dimensional simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system // Bull. Seism. Soc. Am. 1996. Vol. 86, pp. 575–596.
 56. **Bao H., et al.** Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1998. Vol. 152, pp. 85–102.
 57. **Toshinawa T., Ohmachi T.** Love wave propagation in three dimensional sedimentary basin // Bull. Seism. Soc. Am. 1992. Vol. 82, pp. 1661–1667.
 58. **Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.** Сравнение расчета задачи Лэмба по конечноэлементной модели с

- установившимся аналитически-численным решением // Вестник ЦНИИСК. 2009.
59. **Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.** Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. МТТ. 2011. №6, с. 160-169.
 60. **Kraut E.A.** Advances in the theory of elastic wave propagation // Rev. Geophys. 1963. Vol. 1, pp. 401–448.
 61. **Burridge R.** Lamb's problem for an anisotropic halfspace // Q. J. Mechanics Appl. Math. 1971. Vol. 24 No.1, pp. 81-98.
 62. **Payton R.G.** Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media. The Hague: Martinus Nijhoff, 1983.
 63. **Wu K.-C.** Extension of Stroh's formalism to self-similar problems in two-dimensional elastodynamics // Proc. R. Soc. London, Ser.A. 2000. Vol. 456, pp. 869–890.
 64. **Stroh A.N.** Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. Vol. 41, pp. 77–103.
 65. **Willis J.R.** Self-similar problems in elastodynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1973, vol. A274 No. 1240, pp. 435–491.
 66. **Bedding R.J., Willis J.R.** The dynamic indentation of an elastic half-space // J. Elast. 1973. Vol. 3, pp. 289-309.
 67. **Willis J.R., Bedding R.J.** Transient Elastodynamic Fields in Anisotropic Plates and Layers // In: Modern Problems in Elastic Wave Propagation, edited by J. Miklowitz and J.D. Achenbach, N.Y.: Wiley, 1978, pp. 347-355.
 68. **van der Hijden J.H.M.T.** Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media. Amsterdam: North-Holland, 1987.
 69. **Wang C.-Y., Achenbach J.D.** Lamb's problem for solid of general anisotropy // Wave Motion. 1996. Vol. 24, pp. 227–242.
 70. **Mourad A., Deschamps M.** Lamb's problem for an anisotropic half-space studied by the Cagniard de Hoop method," J. Acoust. Soc. Am. 1995. Vol. 97, pp. 3194–3197.
 71. **Mourad A., Deschamps M., Castagnede B.** Acoustic waves generated by a transient line source in an anisotropic half-space // Acustica. 1996. Vol. 82, pp. 839–851.
 72. **Eringen A.C., Suhubi E.S.** Elastodynamics. Vol. 2. N.Y.: Academic Press, 1975, pp. 600–644.
 73. **Spies M.** Green's tensor function for Lamb's problem: The general anisotropic case // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102, pp. 2438–2441.
 74. **Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A.** The elastodynamic response of a semi-infinite anisotropic solid to sudden surface loading // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102, pp. 1346–1355.
 75. **Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A.** Surface dynamic response functions of anisotropic solids // Ultrasonics. 1998. Vol. 36, pp. 349–353.
 76. **Oldham R.D.** On the propagation of earthquake motion to great distances // Phil. Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A. 1900. Vol. 194, pp. 135-174.
 77. **Northwood T.D., Anderson D.V.** Model Seismology // Bull. Seism. Soc. Amer. // 1953. vol. 43, pp. 239-246.
 78. **Knopoff L.** Seismic Wave Velocities in Westerly Granite // Trans. Am. Geophys. Union. 1954. vol. 35, pp. 969-973.
 79. **Oliver J., Press F., Ewing M.** Two-dimensional model Seismology // Geophysics. 1954. vol. 19, pp. 202-219.
 80. **Roult G., Romanowicz B., Montagner J.P.** 3-D upper mantle shear velocity and attenuation from fundamental mode free oscillation data // Geophysical Journal International. 1990. Vol. 101, pp. 61–80.
 81. **Kanamori H., Given J.W.** Lamb pulse observed in nature // Geophys. Res. Lett., 1983. Vol. 10, pp. 373-376.
 82. **Адушкин В.В., Спивак А.А.** Геомеханика крупномасштабных взрывов.- М.: Недра, 1993. 319 с.

83. **Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М.** Основы геомеханики. М.: Недра, 1986, 301 с.
84. **Магницкий В.А.**, ред. Общая геофизика. М.: МГУ, 1995. 317 с.
85. **Dally J.W., Durrelli A.J., Riley W.F.** Photoelastic study of stress wave propagation in large plates // Proc. Soc. Exp. Stress Analysis. 1960. Vol. 17, pp. 33-50.
86. **Dally J.W., Thau S.A.** Observations of stress wave propagation in a half-plane with boundary loading // Int. J. Solids Struct. 1967. Vol. 3, pp. 293-307.
87. **Dally J.W.** A dynamic photoelastic study of a doubly loaded half-plane // Develop. Mech. 1968. Vol. 4, pp. 649-664.
88. **Glaser S.D., Weiss G.G., Johnson L.R.** Body waves recorded inside an elastic half-space by an embedded, wideband velocity sensor // J. Acoust. Soc. Am. Volume 1998. Vol. 104, Issue 3, pp. 1404-1412.
89. **Hsiao C.P., Kline R.A., Grasse K.A.** A theoretical and experimental study of the propagation of acoustic emission signals in polymeric media // IEEE 1986 Ultrasonics Symposium, 1986. pp. 1005 – 1008.
90. **Huynh A.** et al. Optical excitation and detection of terahertz acoustic waves with semiconductor superlattices // Journal of Physics: Conference Series. 2010. Vol. 214, doi:10.1088/1742-6596/214/1/012047
91. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР. ОТН. 1961. № 4. С. 109-115.
92. Тимошенко С.П. Прочность и колебание элементов конструкций / Избранные работы под ред. Э.И.Григолюка. - М.: Наука, 1975.
93. Филиппов А.П., Кохманюк С.С, Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. - Киев: Наукова думка, 1974.
94. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. - М.: Наука, 1981.
95. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под действием движущихся нагрузок. Ч. I. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок. В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. Вып. 8. С. 3-42.
96. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под действием движущихся нагрузок. Ч. II. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок. В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. Вып. 9. С. 118-156.
97. Горошко О.А., Савин Т.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971.
98. Ишлинский А.Ю. Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины // ДАН СССР. 1954. Т. 95, №5. С. 370-374.
99. Неронов Н.П. Об упругих деформациях в подъемном канате // ПММ. 1937. Т. 1, № 1. С. 91-96.
100. Неронов Н.П. Определение напряжений в подъемном канате // ДАН СССР. 1947. Т. 57, № 8. С. 765-768.
101. **Доценко П.Д.** О нелинейных колебаниях движущейся струны // Самолетостроение и техн. возд. флота: Республ. межвед. тематич. научно-техн. сб. 1971. № 25. С. 123-126.
102. **Кожегиник Я.** Поперечные колебания напряженных гибких звеньев передач. В кн.: Теория машин и механизмов. - М.: Наука, 1976.
103. **Раздольский А.Г., Заболотный Ю.В.** К исследованию переходных процессов одномерных механических систем переменной длины. В кн.: Динамика машин. М.: Наука, 1974.
104. **Светлицкий В.А.** Передачи с гибкой связью. - М.: Машиностроение, 1967.
105. **Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е.** Частотно-энергетические соотношения для упругих волн в одномерных

- системах с движущимися объектами // Акустический журнал. 1995. Т. 41, №2. С. 209-215.
106. **Весницкий А.И.** Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
107. **Весницкий А.И., Катан Л.Э., Уткин Г.А.** Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. №5. С. 863.
108. **Николай Е.Л.** Теоретическая механика. Часть 2. Динамика. 13-е изд. М.: Физматлит, 1962. 280 с.
109. **Thurman A.L., Mote C.D. (Jr)** Free, Periodic, Nonlinear Oscillation of an Axially Moving Strip // Trans ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, №1. P. 87-98.
110. **Бернштейн С.А.** Ледяная железнодорожная переправа (работа, теория и расчет ледяного слоя) // 18-й сборник НКПС.- М.: Транспечать, 1929.- 42 с.
111. **Коренев Б.Г.** О движении нагрузки по пластинке, лежащей на упругом основании // Строит. мех. и расчет сооружений, 1967.- № 3.- С. 27-30.
112. **Бляхман Р.И.** Колебания бесконечной пластинки на упругом полупространстве под действием подвижной нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений, 1967.- № 3.- С. 112-115.
113. **Муравский Г.Б.** Действие движущейся системы сил на балку, лежащую на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ, 1975.- № 3.- С. 190-195.
114. **Козин В.М.** и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Изд. Академия Естествознания, 2008.
115. **Жесткая В.Д., Джабраилов М.Р.** Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной // Прикладная механика и техническая физика, 2008, № 3, т. 49, с. 151-156.
116. **Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.** Moving Loads on Ice Plates. N.Y.: Kluwer Academic Publishers, 1996.
117. **Wang R.T.** Vibration of multi-span Timoshenko beams subjected to a concentrated moving force // Journal of Sound and Vibration. 1997. Vol. 207, pp. 731-742.
118. **Hong S.W., Kim J.W.** Modal analyses of multi span Timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping // Journal of Sound and Vibration, 1999. Vol. 227(4), pp. 787-806.
119. **Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A.** Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass // Journal of Sound and Vibration, 2000. Vol. 230(3), pp. 493-506.
120. **Kim S.-M.** Vibration and Stability of axial loaded beams on elastic foundation under moving harmonic loads // Engineering Structures, 2004. No. 26, pp. 95-105.
121. **Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P.** The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads // Computers and Structures. 2000, Vol.78, pp. 789-799.
122. **Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P.** Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, pp. 2555-2579.
123. **Wu J.J.** Dynamic analysis of a rectangular plate under a moving line load using scale beams and scaling laws // Computers & Structures. 2005. Vol. 83, pp.1646-1658.
124. **Andersen L., Nielsen S.R.K., Kirkegaard P.H.** Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected coordinates // Journal of Sound and Vibration. 2001, Vol. 241, Issue 4-5, pp. 587-604.
125. **Kadivar M.H., Mohebpour S.R.** Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear

- effect and rotary inertia under the action of moving loads // *Finite Elements in Analysis and Design*. 1998, Vol.29, pp. 259-273.
126. **Hugul S.** Vibration Analysis of Systems Subjected to Moving Loads by Using the Finite Element Method. Dokuz Eylul University, PhD Thesis, Izmir, 2005.
127. **Liu K., DeRoock G., Reynders E.** Experimental validation of the dynamic analysis of high speed composite railway bridge // *EURODYN 2008*. Southampton, UK, pp.1-16.
128. **Fryba L.** Vibration of solids and structures under moving loads. Groningen: Noordhoff International Publishing. 1972.
129. **Jonsson J.O.** On ground and structural vibrations related to railway traffic. Chalmers University of Technology, PhD Thesis, Sweden, 2000.
130. **Шехтер О.Я.** Вынужденные горизонтальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве. - В сб.: Основания, фундаменты и подземные сооружения. №61. —М.: Госстройиздат, 1971, с 26-30.
131. **Сеймов В.М., Ермоленко Н.П., Зайцева Е.А.** Неосесимметричные периодические и нестационарные колебания круглого штампа на упругом полупространстве.// Прикладная механика. Киев, -1997-33, №5, с.41-48.
132. **Ильичев В.А. Михайлюк В.С.** Определение вертикальных перемещений поверхности вне колеблющегося относительно горизонтальной оси штампа. // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2008. №1. -с. 2-7.
133. **Михайлюк В.С.** Определение вертикальных перемещений точки поверхности грунта вне массивного фундамента при действии на него вращательного импульса.// Сборник научных трудов НИИОСП им. Н.М. Герсеванова. Вып. №99. м., 2008 с. 95-100.
134. **Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.** Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 1 // *Zisin*. 1972. Vol. 25, pp. 207-217.
135. **Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.** Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 2 // *Zisin*. 1972. Vol. 25, pp. 333-342.
136. **Sato R.** Seismic waves in the near field // *J. Phys. Earth*. 1972. Vol. 20, pp. 357-375.
137. **Johnson L.R.** Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1974. Vol. 37, pp. 99–131.
138. **Pan Y.C., Chou T.W.** Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials // *Int. J. Engng. Sci.*, 1979. Vol. 17, pp. 545-551.
139. **Gupta U.** On leaking modes // *Pure and Applied Geophysics*. 1970, Vol. 80, No. 1, pp. 27-37.
140. **Chapman C.H.** Lamb's problem and comments on the paper 'on leaking modes' by Usha Gupta // *Pure and Applied Geophysics*. 1972. Vol. 94, No. 1, pp. 233-247.

Кузнецов Сергей Владимирович, профессор, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики РАН, 119526, Россия, Москва, проспект Вернадского, дом 101-1, e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru.

Терентьева Елена Олеговна, аспирант кафедры сопротивления материалов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (ФГБОУ ВПО «МГСУ»), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, e-mail: Xelena-elena@yandex.ru.

Sergey V. Kuznetsov, Pprofessor, Dr.Sc., Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1, Prospekt Vernadskogo, 119526, Moscow, RUSSIA, e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru.

Elena O. Terentjeva, Postgraduate student, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, RUSSIA, e-mail: Xelena-elena@yandex.ru.

ДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТА КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С АСИММЕТРИЧНОЙ ПРУЖИНОЙ

С.В. Кузнецов¹, М.А. Худяков²

¹ Институт проблем механики РАН, г. Москва, РОССИЯ

² ООО “НСУЦ“ЦМиР”, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Исследуются демпфирующие свойства модифицированной системы Кельвина - Фойгта, характеризуемой разномодульной пружиной и вязким демпфером, при вынужденных колебаниях, вызванных гармонической силой. Решение осуществляется с помощью формализма Коши и исследования свойств фундаментальной матрицы системы. Анализируются осциллограммы, фазовые портреты и сечения Пуанкаре и кинетические энергии за период, отвечающие различным параметрам системы.

Ключевые слова: Разномодульная пружина, колебания, модель Кельвина-Фойгта, амортизационная система

DAMPING PROPERTIES OF KELVIN-VOIGT ELEMENT WITH ASYMMETRIC SPRING

Sergey V. Kuznetsov¹, Maxim A. Khudyakov²

¹ Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, RUSSIA

² CMSLM Ltd., Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Damping properties of modified Kelvin – Voigt system defined by multi module spring and dashpot under forced harmonic vibration are analyzed. The solution is constructed by applying Cauchy complex formalism and constructing the fundamental exponential matrix. Oscillograms, plane-phase portraits and Poincare section and kinetic energies for each period with different system parameters are analyzed.

Key words: Multimodule spring, oscillations, Kelvin-Voigt model, amortization system

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются вынужденные колебания модифицированной модели Кельвина-Фойгта с разномодульной пружиной.

Системы с разномодульными упругими элементами исследовались в ряде работ по теории колебаний [1-4] и волновой динамики [5-7]. Особенности в поведении таких систем, связанные в основном с перекачкой энергии с частот возмущающего воздействия на другие частоты и, как следствие, появление супергармонических колебаний, открывают перспективы их применения

для эффективного гашения колебаний на частоте внешнего воздействия [8].

В настоящей работе анализ вынужденных колебаний в такой системе, по-видимому, впервые, осуществляется с помощью формализма Коши, это позволило сократить число варьируемых параметров и выявить особенности в поведении таких систем, не исследовавшиеся ранее.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Математическая модель вынужденных колебаний исследуемого элемента

описывается следующим уравнением движения:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin(\omega_f t), \quad (1)$$

где m – масса, c – вязкость демпфирования, k – жесткость пружины, F – амплитуда силового воздействия, ω_f – частота вынужденных колебаний.

Жесткость пружины определяется кусочно-постоянной функцией:

$$k = \begin{cases} k_0 & x > 0; \\ k_1 & x < 0; \end{cases} \quad (2)$$

Для того чтобы переписать это условие в аналитическом виде, воспользуемся функцией signum :

$$k = \frac{k_0(1 + \text{sign}(x)) + k_1(1 - \text{sign}(x))}{2}, \quad (3)$$

Для свободных недемпфированных колебаний можно определить период колебаний системы, состоящий из двух полупериодов:

$$T = \frac{T_0 + T_1}{2}, \quad (4)$$

Следовательно, круговая частота всей системы находится по формуле:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{2\pi/\omega_0 + 2\pi/\omega_1} = \frac{2\omega_0\omega_1}{\omega_0 + \omega_1}, \quad (5)$$

В (5) ω_0 – натуральная (недемпфированная) частота собственных колебаний элемента с пружиной, характеризуемой жесткостью k_0 ; ω_1 – натуральная (недемпфированная) частота собственных колебаний элемента с пружиной жесткости k_1 .

Следующим шагом определяется критическая вязкость демпфирования системы:

$$c_c = 2m\omega, \quad (6)$$

Перепишем уравнение (1), используя следующие безразмерные величины:

$$\alpha = \frac{k_1}{k_0}$$

– отношение жесткостей пружин,

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

– относительная вязкость демпфирования,

$$\eta = \frac{\omega_f}{\omega}$$

– относительная частота вынуждающих колебаний:

$$\ddot{x} = -\frac{4\zeta\omega_0\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})}\dot{x} - \frac{\omega_0^2((1+\text{sign}(x)) + \alpha(1-\text{sign}(x)))}{2}x + f \sin\left(\frac{2\eta\omega_0\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})}t\right), \quad (7)$$

где

$$f = \frac{F}{m}$$

– приведенная сила, соответствующая приложенной силе F .

Дальнейшее преобразование уравнения (7) состоит в ведении безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$ и смещения $\tilde{x} = x / f$. Нетрудно

видеть, что смещение \tilde{x} имеет размерность $[time]^2$. В терминах новых переменных τ и \tilde{x} уравнения (7) принимают вид

$$\ddot{\tilde{x}}(\tau) = -\frac{4\zeta\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})}\dot{\tilde{x}}(\tau) - \frac{((1+\text{sign}(\tilde{x})) + \alpha(1-\text{sign}(\tilde{x})))}{2}\tilde{x}(\tau) + \omega_0^{-2} \sin\left(\frac{2\eta\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})}\tau\right) \quad (8)$$

В итоге решение зависит от одного размерного переменного: ω_0 , – и трех безразмерных: α , ζ и η .

Далее будем рассматривать случаи, когда жесткость k_1 меньше жесткости k_0 , т.е. $\alpha < 1$.

3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА КОШИ

Введение новой переменной

$$\tilde{v}(\tau) = \dot{\tilde{x}}(\tau), \quad (9)$$

позволяет записать уравнение (8) в нормальной форме Коши:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} + \mathbf{F}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(1+\alpha)}{2} + & -\frac{4\zeta\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})} \\ \frac{(1-\alpha)\text{sign}(\tilde{x})}{2} & \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^{-2} \sin\left(\frac{2\eta\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})}\right) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Как видно из формулы (11), фундаментальная матрица нелинейно зависит от переменной \tilde{x} , вследствие этого могут возникать эффекты, не характерные для линейных дифференциальных уравнений.

4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

После нахождения значений перемещения и скорости массы, представляется интересным оценить кинетическую энергию массы. Поскольку при возникновении супергармонических колебаний начинаются осцилляции внутри одного периода, то важной характеристикой будет являться средняя интегральная кинетическая энергия за период:

$$K = \int_{T(n-1)}^{Tn} \frac{(\tilde{v}(\tilde{\tau}))^2}{2} d\tilde{\tau}, \quad (13)$$

где n – номер периода

5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (10)

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты 4-5 порядков.

Итак, система зависит от пяти независимых параметров, если принять начальные условия однородными, Теперь остается определить, какие параметры изменяют характер движения, а какие – только масштабируют картину относительно исходной системы. За

основу возьмем систему с параметрами: $\omega_0 = 1,0$, $f = 1,0$, $\alpha = 0,5$, $\zeta = 0,1$ и $\eta = 0,1$. Так как колебания вынужденные, то начальными условиями возьмем равенство нулю перемещения и скорости в начале движения: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Поведение данной системы показано на рисунке 1.

Как видно из рис. 1, система довольно быстро стабилизируется (после прохождения одного периода) при данных параметрах. Поскольку рассматриваемая нелинейная система разделяется на две линейные, то каждая часть имеет свою амплитуду и максимальную скорость. Нелинейность оказывает влияние на этап прохождения положения равновесия, после которого система пытается прийти к движению, характерному для линейной системы. Следовательно, существуют такие сочетания параметров, которые не приводят ее к стационарному движению. Для того чтобы понять, какие параметры приведут систему к дестабилизации, рассмотрим поведение системы при изменении каждого из ее параметров.

5.1. Амплитуда силового воздействия.

На рисунках 2 показано поведение системы при изменении амплитуды силового воздействия.

При сравнении рис. 2 с рис. 1 можно сделать вывод о том, что амплитуды перемещений и скоростей линейно зависят от амплитуды силового воздействия f .

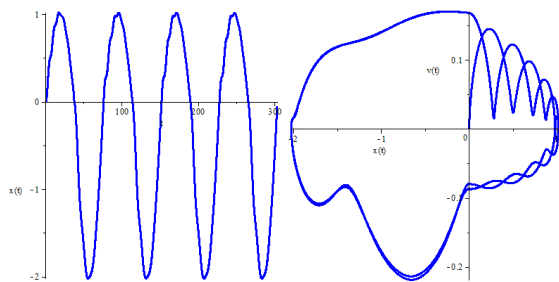


Рис. 1а. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) исходной системы.

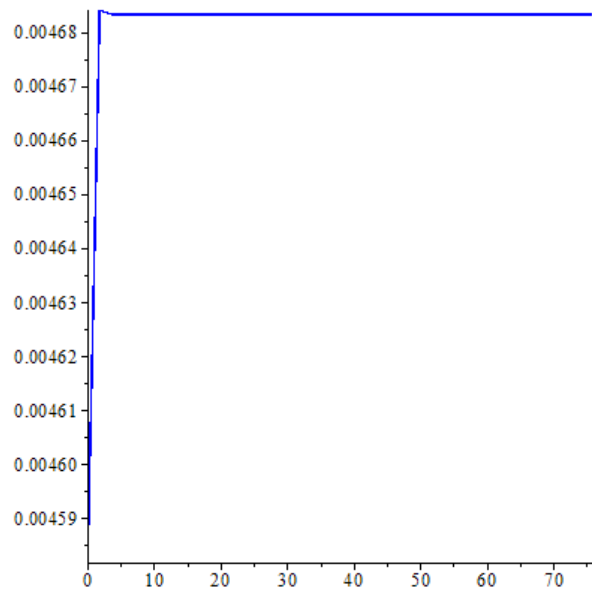


Рис. 1б. Осредненная кинетическая энергия исходной системы

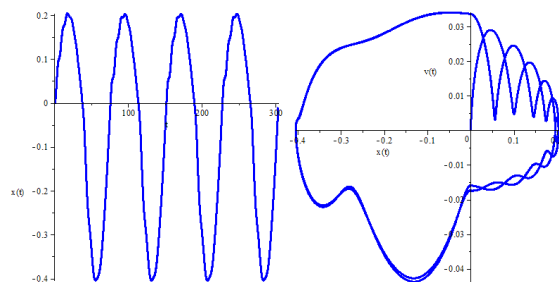


Рис. 2а. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $f = 0,2$

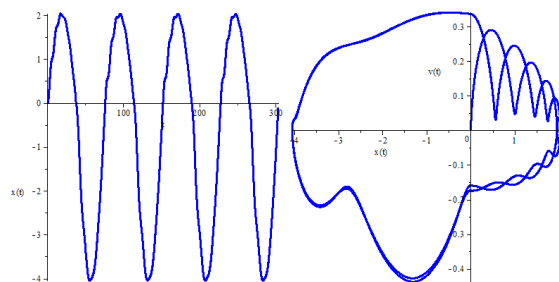


Рис. 2б. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $f = 2,0$

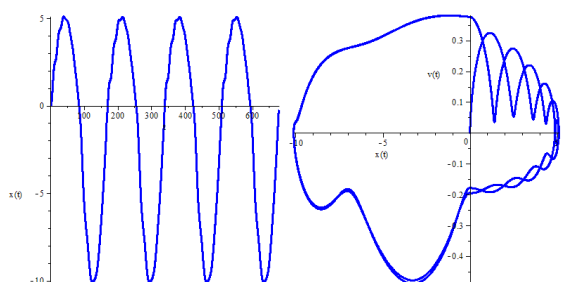


Рис. 3а. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\omega_0 = 0,2$

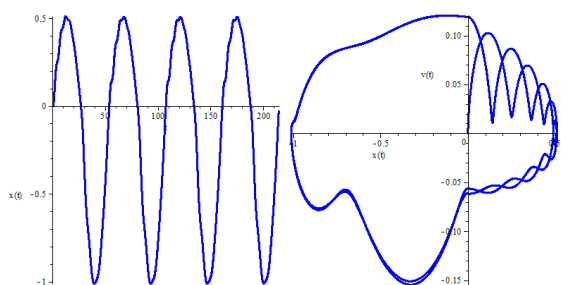


Рис. 3б. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\omega_0 = 2,0$

5.2. *Натуральная частота одной из пружин.*

На рисунках 3 показано поведение системы при изменении натуральной частоты одной из пружин.

Анализ рис. 3 показывает, что аналогично с амплитудой силового воздействия, изменение натуральной частоты одной из пружин ω_0 при неизменности отношения жесткостей пружин α ведет к изменению амплитуд перемещений и скоростей, но зависимость между этими параметрами обратная. Помимо этого, поскольку частота силового воздействия задана относительно круговой частоты, то частота колебаний системы также имеет обратную зависимость с изменением ω_0 .

Приходим к выводу, что из пяти факторов только три могут вызвать дестабилизацию.

5.3. *Отношение жесткостей пружин*

Отношение жесткостей пружин можно охарактеризовать параметром отклонения от линейной системы с одной пружиной к нелинейной с двумя. Таким образом, чем

больше данное отклонение, тем больше вероятность возникновения нелинейного эффекта.

На рисунках 4 показано поведение системы при изменении отношения жесткостей пружин.

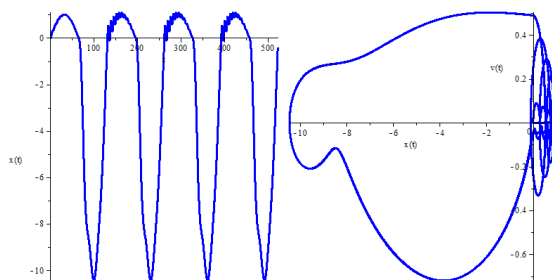


Рис. 4а. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\alpha = 0,1$

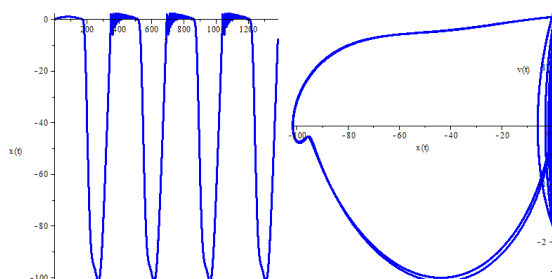


Рис. 4б. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\alpha = 0,01$

Проведя сравнение полученных графиков с основной системой, становится очевидным, что при уменьшении параметра α увеличивается количество колебаний, происходящих во время действия вынуждающей силы на жесткую пружину, причем эти колебания чаще переходят в область влияния мягкой пружины.

5.4. *Относительная частота вынуждающих колебаний*

На рисунках 5 показано поведение системы при изменении относительной частоты вынуждающих колебаний.

По фазовому портрету на рис. 5а можно понять, как выглядят стабилизированные движения, кроме того, видно, что переход

является как бы заданием начальных условий для следующей пружины.

Однако при рассмотрении колебаний с частотой, близкой к удвоенной частоте собственных колебаний системы, можно заметить, что период стабилизированных колебаний увеличивается до 2 раз (рис. 6а). При других частотах этот эффект не наблюдается.

Для того чтобы выявить причину возникновения этого эффекта, рассмотрим секции Пуанкаре для данной системы. На рисунках 6(б-в) представлены графики, характеризующие соответствующие осциллограммы и секции Пуанкаре.

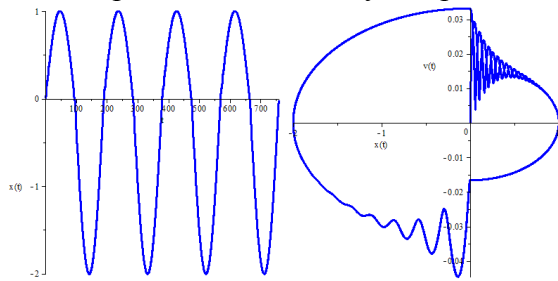


Рис. 5а. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\eta = 0,02$

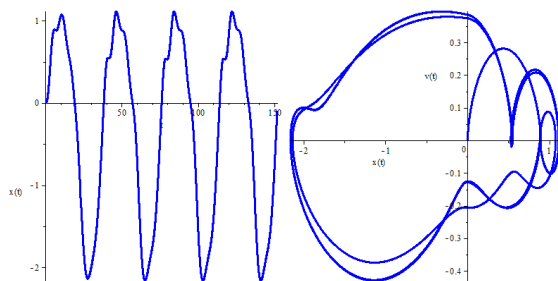


Рис. 5б. Осциллограмма (слева) и фазовый портрет (справа) системы при $\eta = 0,2$

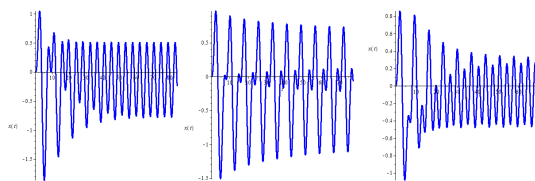


Рис. 6а. Осциллограммы системы при различных значениях относительной частоты вынуждающих колебаний (Слева-направо $\eta = 1,8$, $\eta = 1,96$ и $\eta = 2,2$)

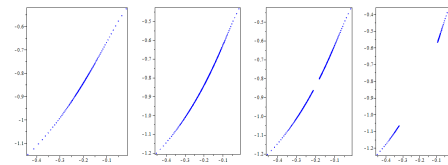


Рис. 6б. Секции Пуанкаре системы при различных значениях относительной частоты вынуждающих колебаний (Слева-направо $\eta = 1,9$, $\eta = 1,922$, $\eta = 1,923$ и $\eta = 1,94$)

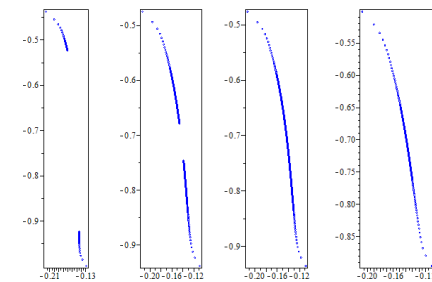


Рис. 6в. Секции Пуанкаре системы при различных значениях относительной частоты вынуждающих колебаний (Слева-направо $\eta = 2,1$, $\eta = 2,124$, $\eta = 2,125$ и $\eta = 2,14$)

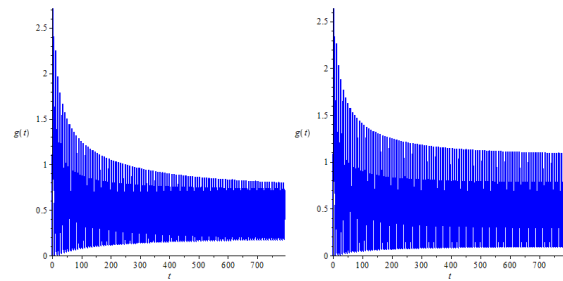


Рис. 7(а-г). Осциллограммы кинетической энергии при различных значениях ζ

По рисункам 6(б-в) становится понятно, что при определенных значениях частоты вынуждающих колебаний секции Пуанкаре не могут сойтись к одной точке. Таким образом, вместо колебания с постоянной амплитудой на одной пружине (рис 6а слева и справа) система переходит к виду с двумя амплитудами: малой и большой амплитудой колебаний (рис 6а по центру).

При характере движения с двумя амплитудами энергия изменяется

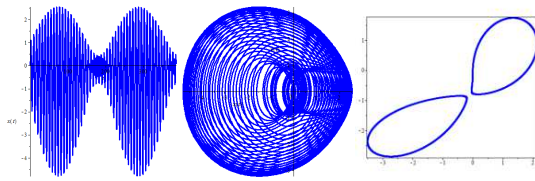


Рис. 10. Осциллограмма (слева), фазовый портрет (в центре) и секция Пуанкаре системы с параметрами $c = 0$ и $\eta = 1,96$

Графики на рис.10 показывают образование кластерной структуры в секции Пуанкаре. Надо отметить, что эта структура характерна для низкочастотных биений, видимых на рис.10 (слева).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение разномодульных пружин в качестве гасителей колебаний представляется весьма перспективным, поскольку появление супергармонических колебаний, обнаруживаемых при некоторых значениях варьируемых параметров (см. рис. 4, 6, 10), приводит к уменьшению энергии колебаний на основной частоте (частоте возмущающей силы), и, тем самым, обеспечивает требуемое от виброгасителей снижение амплитудных значений смещений или ускорений для системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Maezawa S.** Steady forced vibrations of unsymmetrical piecewise linear systems // *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering*, 1961, vol. 4, pp. 201-229.
2. **Shaw S.W., Holmes P.J.** A periodically forced piecewise linear oscillator // *Journal of Sound and Vibration*, 1983, vol. 90, pp. 129-155.
3. **Wong C.W., Zhang W.S., Lau S.L.** Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol. 149, pp. 91-105.

4. **Xu L., Lu M.W., Cao Q.** Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method // *Journal of sound and vibration*, 2003, vol. 264, pp. 873–882.
5. **Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.** Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах: Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Л.: Наука, 1982. 288 с.
6. **Маслов В.П., Мосолов П.П.** Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды // *Прикладная математика и механика*. 1985. т. 49, с. 419–437.
7. **Садовская О.В., Садовский В.М.** К исследованию упругопластических волн в сыпучей среде // *Прикладная механика и техническая физика*, 2003, т. 44, с. 168-176.
8. **Maezawa S., Furukawa S.** Superharmonic resonance in piecewise linear systems // *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering*, 1973, vol. 16, pp. 931-941.

Сергей Владимирович Кузнецов, профессор, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики РАН, 119526, Россия, Москва, проспект Вернадского, дом 101-1, e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru.

Худяков Максим Александрович, ООО Научно-Сертификационный Учебный Центр «Центр Материаловедения и Ресурса» 140002, Россия, Московская область, г. Люберцы, ул. Кирова, дом 7, офис 5, e-mail: maxim.a.khudyakov@gmail.com.

Sergey V. Kuznetsov, Professor, Dr.Sc., Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1, Prospekt Vernadskogo, 119526, Moscow, RUSSIA, e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru.

Maxim A. Khudyakov, Engineer, Scientific Certification Center “Center of Material Science and Lifetime Management” Ltd., office 5, 7, Kirova st., Lyubertsy City, 140002, Moscow Region, RUSSIA, e-mail: maxim.a.khudyakov@gmail.com

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БАЗАЛЬТОПЛАСТИКОВОЙ АРМАТУРЫ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Ю.О. Кустикова

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются результаты экспериментальных исследований и испытаний бетонных конструкций с базальтопластиковой арматурой по определению их несущей способности, а также механизм сцепления базальтопластиковых стержней с бетоном.

Ключевые слова: базальтопластиковая арматура, сцепление, композитный материал, бетон, касательное напряжение, стержень

STRESS-STRAIN STATE OF BASALT-PLASTIC REINFORCEMENT IN REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

Yuliya O. Kustikova

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This paper discusses the results of experimental research and testing of concrete structures with basalt-plastic reinforcement in order to determine their carrying capacity, as well as a clutch mechanism of basalt rods with concrete.

Key words: basalt-plastic reinforcement, clutch mechanism, composite material, concrete, shearing stress, rod

По объему использования в различных областях строительства, железобетон находится на одном из первых. Это определяется, прежде всего, его достаточными физическими и технологическими характеристиками. Вместе с тем, долговечность бетона существенно связана с долговечностью металлической арматуры.

Долговечность металлической арматуры зависит от коррозии, возникаемой в результате силовых и средовых воздействий. В результате коррозии металлической арматуры и, в некоторой степени и самого бетона, происходит потеря несущей способности железобетонных конструкций и в целом зданий и сооружений.

Поиск альтернативных путей замещения металлической арматуры в несущих железобетонных конструкциях на композитную, не подвергающуюся коррозии и, одновременно, имеющую высокую несущую способность, является актуальной научно-исследовательской задачей.

Известно, что композитные материалы минимизируют коррозию от силовых и средовых воздействий [1,6].

Особый интерес представляют собой высокопрочная неметаллическая арматура на основе базальтового волокна. Поисковые исследования и результаты испытаний на прочность, щелочестойкость, на сцепление с бетоном (взамен металлической) показали высокую эффективность арматурных стерж-

ней на основе базальтового волокна при их эксплуатации в условиях воздействия агрессивных сред. Приведенные данные позволяют судить об эффективности работы этой арматуры.

Как известно металлическая арматура не имеет полного сцепления с бетоном по всей контактируемой поверхности из-за образования водяных линз и пустот вокруг стержня при бетонировании, что отрицательно сказывается на трещиностойкости конструкций. Кроме того, из-за действия щелочной среды бетонной смеси и воды (в том числе и морской), с момента контакта бетона с металлическим стержнем начинаются избирательные процессы коррозии. Это является одним из основных факторов, негативно влияющих на прочность железобетонных конструкций.

В последние годы наряду с изучением, созданием и промышленным внедрением стержневой композитной арматуры (СКНА) аналогичные работы ведутся по созданию базальтопластиковой арматуры (БПА), которая по своим свойствам не только не уступает СПА, но даже превосходит их, а по стоимости является наиболее доступной из всех видов перечисленных волокон [7,5]. Эти работы по созданию БПА и их применению ее в железобетонных конструкциях перспективны по следующим факторам:

- запасы сырья для получения непрерывного базальтового волокна практически неограниченны, а само сырье относительно недорогое;
- технология получения базальтового волокна принципиально не отличается от технологии изготовления стеклянных волокон, при этом исключается операция по подготовке многокомпонентной шихты и превращению ее в расплав, а также отсутствует необходимость в формировании стеклянных шариков. Для выпуска ненапрягаемой БПА могут быть использованы менее дефицитные, дешевые аппретирующие составы и связующие, что даст возможность

обеспечить доступность арматуры [8,5].

К преимуществу базальтопластиковой арматуры можно отнести ее физико-механические характеристики: она не подвержена коррозии, весьма слабо меняет свои механические свойства под воздействие кислот, солей и щелочей, является диэлектриком, радиопрозрачна, магнитоинертна (исключено изменение прочностных свойств под воздействием электромагнитных полей), имеет высокий модуль упругости при небольшом коэффициенте относительного удлинения, высокую стойкость к стрессовым нагрузкам, также обладает прекрасными реологическими характеристиками, не теряет свои прочностные свойства под воздействием сверхнизких температур. При этом коэффициент теплового расширения (КТР) базальтопластиковой арматуры соответствует КТР бетона, что исключает порывы армирования и трещинообразование в защитном слое бетона под воздействием температурных циклов. Она имеет высокие показатели прочности на разрыв.

Прочность сцепления арматуры с бетоном традиционно оценивают величиной касательного напряжения τ_k при выдергивании или вдавливания арматурных стержней.

Полагая известным распределением величины $\tau_k(x)$ вдоль стержня, находим создаваемое им общее касательное усилие:

$$N_\tau = \pi d_s \int_0^{lan} \tau_k(x) dx = \tau_k \pi dlan \quad (1)$$

Сила

$$N_a = A_s \sigma_s$$

уравновешивается внутренним усилием

$$N_e = N_\tau + N_k + N_{об} \quad (2)$$

где N_k и $N_{об}$ – усилие, создаваемые контактной зоной и бетонной оболочкой.

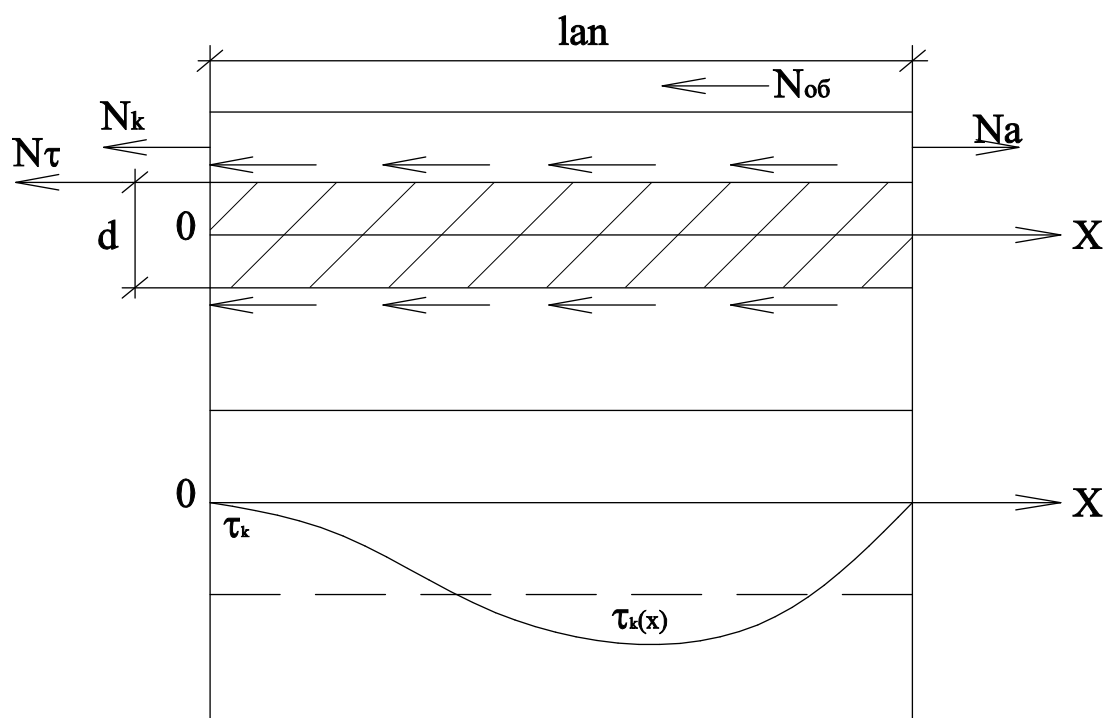


Рис. 1. Касательное напряжение τ_k при выдергивании или вдавливании арматурных стержней.

Согласно условию равновесия

$$A_s \sigma_s = \tau_k \pi d lan + N_k + N_{об} \quad (3)$$

пренебрегая величинами N_k и $N_{об}$, получим расчетную формулу для оценки касательного напряжения

$$\tau_k = \frac{A_s \sigma_s}{\pi d lan} \quad (4)$$

Согласно известному уравнению сцепления арматурного стержня с бетоном

$$\tau_k(x) = \frac{A_s E_s}{d_s} \cdot \frac{d^2 U_s(x)}{dx^2} \quad (5)$$

где $U_s(x)$ – смещение стержня. Выражая смещение $U_s(x)$ через $\tau_k(x)$, общую податливость B стержня, контактной зоны и бетонной оболочки получим уравнение, описывающее напряженно деформированное состояние (НДС) арматурного стержня

$$\frac{A_s E_s}{d_s} \cdot \frac{d^2 U_s(x)}{dx^2} - \frac{1}{B} U_s(x) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2 U_s(x)}{dx^2} - m^2 U_s(x) = 0 \quad (7)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{d_s}{A_s B E_s}}$$

– параметр сцепления.

Общее решение уравнения (7)

$$U_s(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (8)$$

Константы C_1 и C_2 определяются с использованием граничных условий.

Экспериментальные исследования показали, что величина сцепления этого типа арматуры с бетоном достаточно высокая (в два и более раз выше величины сцепления металлической арматуры) [3,4].

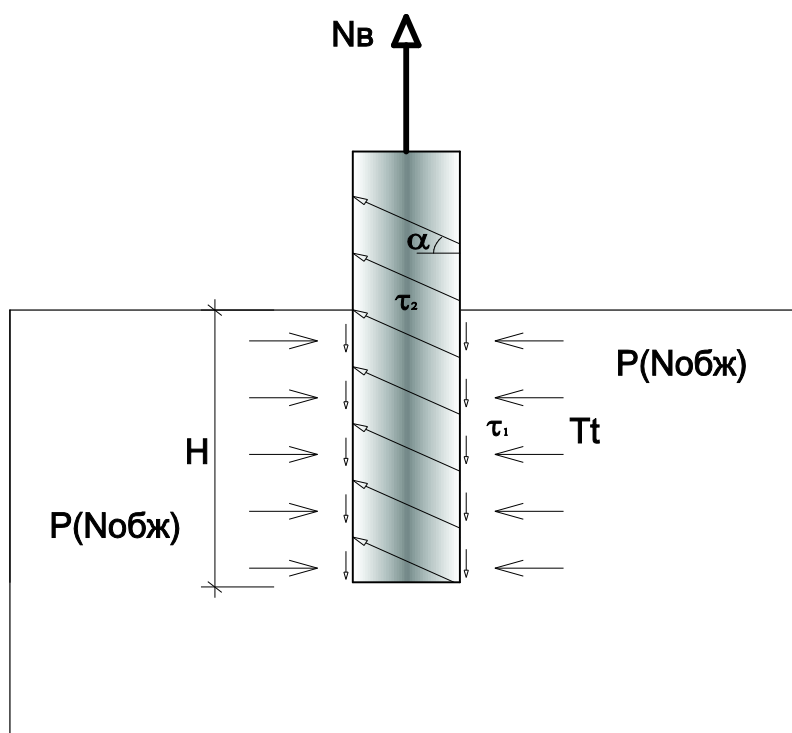


Рис. 2. Схема работы арматуры в бетоне.

Вследствие сложной внешней конфигурации базальтопластиковой арматуры сложен механизм высокой величины сцепления ее с бетоном.

Для теоретического осмысливания и обоснования этого процесса, в дополнение к ранее проведенным исследованиям и испытаниям образцов бетона с арматурой на выдергивание, необходимо изучить этот процесс с позиции механики разрушения. Ранние исследования показали, что модуль упругости стержней из базальтопластиковой арматуры

$$(E_{стп} \approx 2 \cdot 10^4 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2})$$

ниже модуля упругости бетона

$$(E_B \approx 2 \cdot 10^5 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}),$$

что позволяет ей легко деформироваться от усилий, возникающих при объемной усадке бетона, что приводит соответственно к увеличению величины сцепления [2,4,5].

За счет усадки бетона возникают усадочные усилия на стенках арматуры, влекущие эффект увеличения сцепления от усадки бетонной оболочки.

Приращение $\Delta\tau_{cy}$ касательного напряжения задается формулой

$$\Delta\tau_{cy} = \frac{E_{обж} \cdot E_{баз} \cdot A_{баз}}{\pi d \cdot lan} \quad (9)$$

где $\varepsilon_{обж}$ – относительная деформация обжатия бетона; $E_{баз}$, $A_{баз}$, d – модуль упругости, нормальное сечение и диаметр базальтопластиковой арматуры; lan – длина анкеровки.

Экспериментальные исследования показывают, что при работе базальтопластиковой арматуры в начале подвергается растяжению до определенных пределов оболочка арматуры, а в дальнейшем в работу вступает внутренние продольно расположенные нити.

При работе арматуры в бетоне возникают поверхностные касательные напряжения τ_1 (н/м²) и касательные погонные усилия вдоль винтового подкрепления τ_2 (н/м) (рис.2). Проектируя все силы на направление

оси арматуры, получим следующее выражение:

$$N_B = 2\pi RH \cdot \tau_1 + 2\pi Rn \cdot \sin \alpha \cdot \tau_2 \quad (10)$$

где n - число витков винтового подкрепления,

α - угол подъема винтовой линии;

H - глубина внедрения стержня в бетон.

Радиальные перемещения $W(x)$ оболочки базальтопластиковой арматуры от действия усадочных усилий описываются уравнением

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{p}{D}, \quad (11)$$

где p - погонное усилие; D - изгибная жесткость.

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$W(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x) + C_3 W_3(x) + C_4 W_4(x) + \bar{W}(x), \quad (12)$$

где $W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$, $W_4(x)$ - линейно независимые решения однородного уравнения

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{W}(x) = -\frac{px^4}{24D}$$

- частное решение уравнения (11).

В качестве фундаментальной системы решений берутся функции

$$W_1(x)=1; W_2(x)=x; W_3(x)=x^2; W_4(x)=x^3 \quad (14)$$

Согласно естественным граничным условиям определяются константы C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и тем самым

$$W(x) = -\frac{pL^2}{24D} x^2 + \frac{pL}{12D} x^3 - \frac{px^4}{24D}, \quad (15)$$

где L - длина выделенной полосы.

При учете влияния базальтового сердечника, рассматриваемого как упругое основание, перемещения $W(x)$ описываются уравнением

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \alpha W(x)/D = -\frac{p}{D}, \quad (16)$$

где α - коэффициент постели;

$q(x) = \alpha W(x)$ - реакция основания.

Согласно (16) функция

$$W(x) = -\frac{p}{4\beta^4 D}, \quad (17)$$

является частным решением уравнения (16) $\beta^4 = \alpha/4D$.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0, \quad (18)$$

Порождаемое соответствующим (16) однородным уравнением, имеет корни

$$\lambda_1 = \beta(1+i); \lambda_2 = \beta(-1+i);$$

$$\lambda_3 = -\beta(1+i); \lambda_4 = \beta(1-i)$$

и поэтому общее решение уравнения (7) имеет вид

$$W(x) = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) - \frac{p}{4\beta^4 D}, \quad (19)$$

С учетом в равенстве (19) ограниченности перемещений $W(x)$ и естественных граничных условий окончательно получим

$$W(x) = -p/\alpha \left[1 - e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \right] \quad (20)$$

Величина α существенно зависит и от граничных условий. В частности, в рассматриваемой задаче должно выполняться условие $W(L)=0$, что имеет место лишь при равенстве приведенной длины s величине L .

$$S = \frac{L}{2\pi} \quad (21)$$

Согласно (21) получим

$$\frac{L}{2\pi} = \sqrt[4]{4D/\alpha} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{64\pi^4 D}{L^4}, \quad (23)$$

а подставляя α в

$$W(x) = -\frac{p}{4\beta^4 D} \left[1 - e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \right]$$

с учетом, что

$$\beta = \frac{2\pi}{L}$$

$$W(x) = -\frac{pL^4}{64\pi^4 D} \left[1 - e^{-\frac{2\pi}{L}x} \left(\sin \frac{2\pi}{L}x + \cos \frac{2\pi}{L}x \right) \right], \quad (24)$$

Максимальное радиальное перемещение

$$W\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^4}{64\pi^4 D} (1 + e^{-\pi}) \quad (25)$$

И сравнение величин (15) и (24) показывает значительное уменьшение $W(x)$ при учете реакционного отпора базальтового стержня. Таким образом теоретико-экспериментальными исследованиями доказано, что величина сцепления базальтопла-

стиковой арматуры, за счет неравномерной деформации поверхностного слоя (потери устойчивости оболочки) от объемной усадки бетона значительно увеличивается. Необходимо отметить, что в экспериментах на выдергивание стержней обнаруживался эффект преднапряжения самой арматуры.

В результате применения в бетоне базальтопластиковых стержней повышается несущая способность бетонных конструкций и их трещиностойкость [2,3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Комохова П.Г., Ерофеева В.Т., Афиногенова Г.Е.** Защита зданий и сооружений от биоповреждений биоцидными препаратами на основе гуанидина. Монография /- СПб. : Наука, 2009. - 192 с.
2. **Кустикова Ю.О., Римшин В.И.** Теоретические основы расчета сцепления стекло-базальтопластиковой арматуры с бетоном. *Известия ОрелГТУ, Серия «Строительство. Транспорт»* 2/22 (554) 2009 март-апрель, с.29-33.
3. **Кустикова Ю.О., Римшин В.И.** Теоретические исследования по определению величины сцепления базальтопластиковой арматуры с бетоном. *Сборник статей по материалам 7-й Международной научной конференции «Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов»* (16-18 октября 2013 г, Воронеж), с.18-26.
4. **Кустикова Ю.О., Римшин В.И.** Феноменологические исследования величины сцепления базальтопластиковой арматуры с бетоном. *Известия ЮЗГУ, Курск, Серия Техника и технологии*, №1, 2011, с.27-31.
5. **Кустикова Ю.О.** Исследование свойств базальтопластиковой арматуры и ее сцепления с бетоном. Интернет-журнал «Строительство: наука и образование», МГСУ, Москва, №01/2014г.

6. **Соломатов В.И., Ерофеев В.Т., Смирнов В.Ф.** [и др.]. Биологическое сопротивление материалов .Монография /- Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2001. - 196 с.
7. **Sim, J., Park, C. and Moon, D.Y.:** 2005, Characteristics of basalt fiber as a strengthening material for concrete structures, Compos Part B –Eng, Vol. 36, No. 6–7, 504–512.
8. **Ross, A.** (2006). Basalt fibers: Alternative to glass? Composites World. Retrieved May 9, 2012, from <http://www.compositesworld.com/articles/basalt-fibers-alternative-to-glass>.

Кустикова Юлия Олеговна, доцент кафедры городского строительства и коммунального хозяйства, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел. +7(926) 179-20-74, E-mail: yulia.kustikowa@yandex.ru

Yuliya O. Kustikova, Associate Professor, Department of Urban Construction and Utilities, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(926) 179-20-74, E-mail: yulia.kustikowa@yandex.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АКТИВАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ БАЗАЛТОПЛАСТИКОВОЙ АРМАТУРЫ НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Ю.О. Кустикова

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются теоретические исследования активации поверхности базальтопластиковой арматуры на основе полимера. Материалы на основе полимерных составляющих практически обладают гидрофобными (водоотталкивающими) свойствами. Это, одно из важнейших положительных их свойств, позволяющих увеличить в значительной степени их долговечность. Однако, в ряде случаев, целесообразно иметь поверхность полимерных материалов с гидрофильными свойствами.

Ключевые слова: базальтопластиковая арматура, активация поверхности, полимерные составляющие

THEORETICAL STUDIES OF SURFACE ACTIVATION OF BASALT-PLASTIC REINFORCEMENT BY POLYMER BASED INGREDIENTS

Yuliya O. Kustikova

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This paper discusses theoretical studies of surface activation of basalt-plastic reinforcement on the basis of the polymer. Materials based on polymer components have almost hydrophobic (water-repellent) properties. This is one of the most important properties, which increase considerably durability. However, in some cases, it is advisable to have the surface of polymeric materials with hydrophilic properties.

Key words: basalt-plastic reinforcement, surface activation, polymer components

Материалы на основе полимерных составляющих практически обладают гидрофобными (водоотталкивающими) свойствами. Это, одно из важнейших положительных их свойств, позволяющих увеличить в значительной степени их долговечность. Однако, в ряде случаев, целесообразно иметь поверхность полимерных материалов с гидрофильными свойствами.

Ввиду этого, к примеру, использование их в качестве одного из компонентов цементных системах (в бетонах с содержанием большого количества воды) не всегда приводит к ожидаемым положительным результатам. Обладая гидрофобными свойствами полимерные материалы, не совместимы с матери-

алами, обладающими гидрофильными свойствами, например, с цементными материалами, имеющие гидрофильные свойства. Не совместимость не заключается в их химизме, а заключается в электростатических свойствах молекул материалов.

С точки зрения механики воздействия друг на друга поверхностей (гидрофобных и гидрофильных) можно предположить, что они взаимно противоположны. Ниже представлен ориентировочный механизм взаимодействия двух сред:

1. Среда – полимерный материал с гидрофобными свойствами в водной среде (цементные системы). Схема действия приведена ниже (рис. 1).

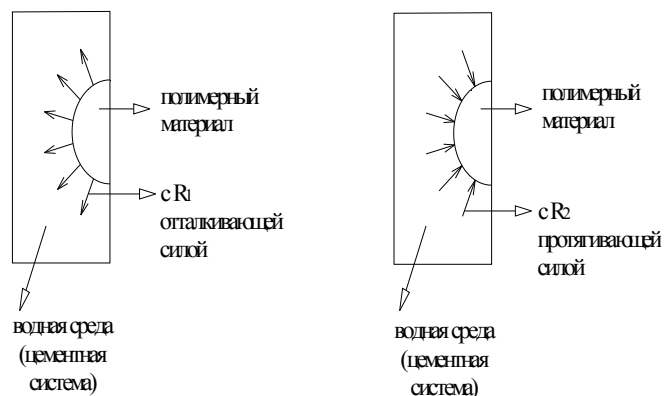


Рис. 1. Схема сред с полимерным материалом с гидрофобными свойствами в водной среде и с активной поверхностью.

Из-за гидрофобных свойств полимерного материала возникают силы отталкивания, по отношению к водной среде, т.е. к цементным системам с содержанием воды.

2. Среда с полимерным материалом с активной поверхностью. Схема действия приведена ниже (рис. 1).

Использование полимерных материалов в цементных системах приводит к возникновению тончайшей не совместимой с основной (цементной системой) пленки, не позволяющей иметь связь «+», «-».

Проведенные нами ранние исследования [1,2] показали, что базальтопластиковая арматура имеет достаточную высокую степень сцепления с цементными материалами.

Однако, при анализе поверхности базальтопластиковой арматуры, после испытания их, на их внешних поверхностях, обнаруживается тончайший газопылевидный слой толщиной примерно в 10^{-9} м. Можно полагать, что этот тончайший слой определенным образом связан со свойствами поверхности базальтопластиковой арматуры и, скорее всего с гидрофобностью поверхности.

Эта тончайшая пленка отрицательно влияет на величину сцепления базальтопластиковой арматуры с бетоном и не позволяет внешней среде (бетону) вплотную контактировать с арматурой, создавая «скользя-

щую» поверхность. Результирующая R_1 -усилий, возникающих на гидрофобной поверхности (условно принятой нами) направлены против R_2 –усилий, возникающих на поверхности среды (бетона) т.е. возникают две силы, противоположно направленные к друг другу (как полярной магнита «++»), или «--», а не как «+-»). Проявление этих сил и не позволяет обеспечить полный контакт поверхности. Соотношением сил R_1 и R_2 определяется и толщина образующей пленки на поверхностях. Чем больше R_1 по отношению к R_2 , тем больше толщина пленки и, тем меньше величина сцепления базальтопластиковой арматуры с бетоном.

Многочисленные эксперименты на выдергивание базальтопластиковой арматуры из бетона позволили сделать вывод, что необходимо, различными технологическими приемами пассивизировать поверхность базальтопластиковой арматуры, т. е. уменьшить величину R_1 или увеличить величину R_2 .

Увеличить величину R_2 достаточно сложно, так как R_2 относится к много компонентной системе.

Проводились ряд экспериментов, направленных на увеличение R_2 до укладки базальтопластиковых стержней в бетон. В частности базальтопластиковые стержни предварительно обрабатывались цементным раство-

ром с В/Ц= 0,9. Образцы, после твердения в пропарочной камере по мягкому режиму 2+2+8 (при температуре 50°C) +2, внедрялись в бетонные кубы 10x10x10 см (которые так же пропаривались только по режиму 2+4+6+2 при температуре 80°C). Испытание базальтопластиковых стержней на выдергивание показали, что $\tau_{сц}$ их с бетоном увеличилось по сравнению с предыдущими испытаниями (в среднем на 7-10%). Анализ поверхности стержней показал, что при этом на поверхности практически отсутствуют пылевидные составляющие.

Одновременно проводились и исследования по выдергиванию стержней, заранее, до укладки их в бетонные кубы нагревались до температуры 50°C в течении 1,5 часа. Эксперименты показали, что $\tau_{сц}$ при этом увеличивается также в среднем на 5-7. Данная величина находится в пределах ошибок испытаний. Отсюда вытекает, что температурная обработка стержней не эффективный способ для уменьшения величины R_1 , возможно, при этом происходит размягчение поверхностных слоев, с некоторой деградацией составляющих поверхностных слоев стержней. Проводились исследования и испытания на выдергивание базальтопластиковых стержней предварительно, обработанных воздействием магнитных и электрических полей.

Испытания показали, что выявить их воздействие затруднительно. Для таких видов обработки поверхности должны быть использованы оборудование и техника, позволяющая провести все это на высоком физическом уровне (с определением величин магнитных полей, электростатической индукции и др.). В результате проведенных комплексных исследований и испытаний по выявлению различных технологических и физических способов обработки поверхности базальтопластиковой арматуры с целью повышения величины (R_1) $\tau_{сц}$ позволяет сделать вывод – наиболее эффективное и положительное влияние на величину сцепления оказывает способ обработки их поверхностей цементным раствором с В/Ц= 0,9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кустикова Ю.О., Римшин В.И., Батдалов М.М, Гаджибеков М.А., Джалилов Ш.М.** Исследование бетонных конструкций из базальтовых волокон. Сборник тезисов докладов ХХІХ итоговой научно-технической конференции преподавателей, сотрудников, аспирантов и студентов ДГТУ, Технические науки, Махачкала 2008 г., с. 251-252.
2. **Кустикова Ю.О., Римшин В.И., Батдалов М.М.** Практические рекомендации и технико-экономическое обоснование применения композитной арматуры при проведении бетонных работ. Актуальные проблемы развития жилищно-коммунального хозяйства городов и населенных пунктов. Девятая Международная Научно-практическая конференция 30 мая – 6 июня Москва, София, Кавала, 2010 г. с. 39-48.

Кустикова Юлия Олеговна, доцент кафедры городского строительства и коммунального хозяйства, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел. +7(926) 179-20-74, E-mail: yulia.kustikowa@yandex.ru

Yuliya O. Kustikova, Associate Professor, Department of Urban Construction and Utilities, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(926) 179-20-74, E-mail: yulia.kustikowa@yandex.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАВНОВЕСИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ.

АННОТАЦИЯ: Рассматривается устойчивость равновесия круглой пластины при больших прогибах. Исследовано влияние конечноэлементной дискретизации на величину критической нагрузки.

Ключевые слова: устойчивость, бифуркация, пластина.

ABOUT INITIAL IMPERFECTION SENSITIVITY OF SOME THIN-WALLED STRUCTURES

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

ABSTRACT: In the paper is raised the question of stability of a circular plate with large deflections. The influence of finite element discretization on the magnitude of the critical load is studied.

Key words: buckling, bifurcation, plate.

Задача о потере устойчивости круглой осесимметрично нагруженной пластины при больших прогибах представляет не только самостоятельный интерес, но и привлекательна в связи с тем, что в момент потери устойчивости пластина фактически превращается в пологую оболочку, и тем самым почти моделирует условия, возникающие при нагружении оболочки вращения с положительной гауссовой кривизной внутренним давлением. Похожая ситуация возникает и в случае действия сосредоточенной или «почти сосредоточенной» нагрузки в вершине сегмента оболочки вращения. У такой оболочки потеря устойчивости осесимметричной вмятины, вызванной действием сосредоточенной силы, по существу имеет такую же природу, как и потеря устойчивости рассматриваемой круглой пластины (волнообразование за счет действия больших окружных сжимающих напряжений вблизи края вмятины).

Рассмотренная задача интересна еще тем, что она не имеет линеаризованного аналога (в отличие от большинства задач упругой устойчивости). Здесь производную нелинейного оператора (т.е. матрицу линеаризации) можно вычислить для предкритического равновесия, но ее нельзя получить заранее, до нагружения пластины. Это объясняется тем, что в пластине развивается нелинейное упругое докритическое равновесие.

В данной работе рассмотрены задачи устойчивости упомянутой пластины, имеющей шарнирное опирание или скользящую заделку на контуре, и нагруженной сосредоточенной силой в центре или равномерно распределенной вертикальной нагрузкой.

Потеря устойчивости осесимметричного равновесия такой пластины провоцируется действием значительных сжимающих окружных усилий N_t :

$$N_t = N_r + r \frac{dN_r}{dr},$$

необходимых для уравнивания радиальных («цепных») усилий N_r (рис. 1, а), которые развиваются при больших прогибах пластины и не воспринимаются горизонтальными опорными закреплениями (они отсутствуют). Ранее аналогичная задача при действии распределенной нагрузки и закреплении на контуре в виде скользящей заделки была решена методом Бубнова-Галеркина в первом приближении Д.Ю. Пановым и В.И. Феодосьевым [1]. Согласно их результатам бифуркационная потеря устойчивости осесимметричного равновесия пластины была мягкой, а минимальной критической нагрузке соответствовало образование восьми окружных волн. Однако приятая ими форма поверхности прогибов, соответствующая прогибам защемленной пластины, весьма сильно отличается от действительной предкритической «тазообразной» формы

Н.Ф. Морозов [2] доказал, что в отличие от пологих оболочек с круговым планом, круглая пластина в условиях поперечного изгиба имеет только одно осесимметричное равновесие при всех наиболее распространенных типах граничных условий. Это утверждение становится понятным, если принять во внимание, что срединная плоскость пластины есть плоскость симметрии ее ненагруженного состояния, тогда как для оболочек имеются две ненагруженных «зеркальных» формы равновесия. В другой работе [3] Н.Ф. Морозов на основе энергетических представлений доказал для частного вида осесимметричной нагрузки существование неосесимметричных форм равновесия круглой пластины, которые могут появиться при достаточно больших прогибах.

Устойчивость осесимметричного равновесия при больших прогибах круглой шарнирно опертой пластины ($R=50\text{см}$, толщина $\delta=0,5\text{см}$), нагруженной в центре сосредото-

ченной силой (рис. 1, а) вначале исследовалась с помощью КЭ моделей, состоящих из 900 элементов. Так как это равновесие неполное, то оно может терять устойчивость или в точке бифуркации или в предельной точке. Но переход этого равновесия в циклически симметричное означает его пополнение - добавляется окружная поперечная сила Q_t и крутящий момент M_{tr} . Это может произойти только в результате бифуркационной потери устойчивости.

В процессе решения этой задачи было установлено, что для осесимметричных систем чрезвычайно важную роль играет выбор сетки конечных элементов.

Исследование влияния типа сетки конечных элементов (осесимметричная, неосесимметричная, частично осесимметричная) показало, что неосесимметричная сетка играет роль начального возмущения для осесимметричной задачи. Отметим, что предварительное тестирование моделей пластины как со «свободными» так и осесимметричными сетками на линейных задачах изгибного равновесия показало совпадение прогибов в центре с известными решениями в пределах 3-х знаков. Однако, в геометрически нелинейной задаче устойчивости «свободные» (неосесимметричные) сетки порождали естественным образом неосесимметричные несовершенства модели, которые, как оказалось, существенно снижали критические нагрузки хлопка из подчиненных предельных точек ($\max \Delta P_{кр} \sim 25,8\%$). Эти результаты, полученные одновременно на NASTRANe и на ANSYSe почти совпали ($P_{кр} \text{ NASTRAN} \approx 920 \text{ кН}$, $W_{\max} \text{ NASTRAN} \approx 17,2\delta$; $P_{кр} \text{ ANSYS} \approx 943 \text{ кН}$, $W_{\max} \text{ ANSYS} \approx 18,4\delta$). Идеальная осесимметричная модель пластины при критической нагрузке ($P_{кр} \approx 1219 \text{ кН}$, $W_{\max} \approx 20,8\delta$) прощелкивала в результате симметричной неустойчивой бифуркации в устойчивую неосесимметричную четырехволновую форму равновесия (рис. 1, б).

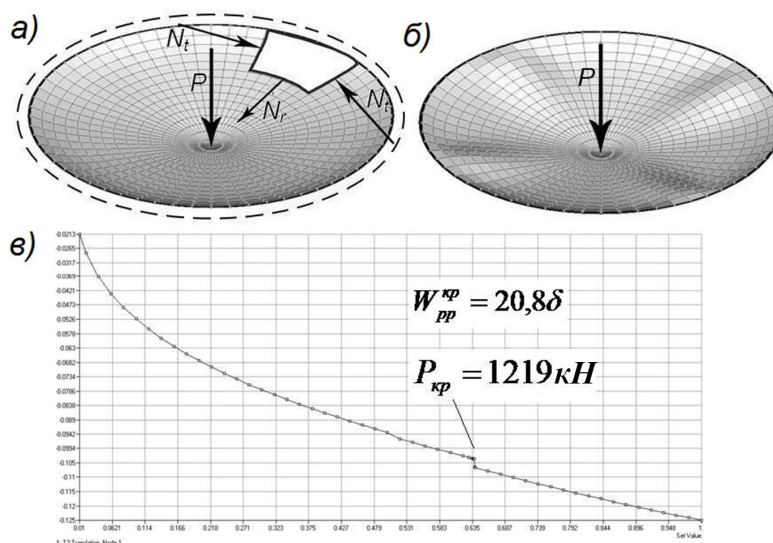


Рис. 1. Потеря устойчивости круглой пластины при больших прогибах: а) схема возникновения больших радиальных усилий; б) форма модели, потерявшей устойчивость; в) график вертикальных перемещений центрального узла.

Влияние несовершенств создаваемых неосесимметричной сеткой исследовалось на смешанных моделях, когда центральная часть пластины имела свободную сетку, а наиболее важная приконтурная зона, в которой развивается окружное волнообразование, моделировалась осесимметричной сеткой (рис. 2, а). Установлено, что пока радиус зоны свободной сетки не превышает половины радиуса пластины, критическая нагрузка практически не уменьшается по сравнению в бифуркационной (рис. 2, б). Объясняется это тем, что если основная зона сильного волнообразования и значительных окружных усилий N_t расположена в пределах осесимметричной сетки, то несовершенство свободной сетки слабо влияет на величину $P_{кр}$. Существенное падение критической нагрузки наблюдалось, когда зона КЭ сетки неправильной (неосесимметричной) формы захватывала наиболее нагруженную приконтурную область пластины (рис. 2, а).

Сходимость процессов численного определения критической нагрузки волнообразования исследована на сетках двух типов: осесимметричной и неосесимметричной (но имеющую две плоскости симметрии). По

контуру пластины были симметрично поставлены четыре касательные связи, которые обеспечивали отсутствие жестких смещений и поворотов в плоскости пластины. При использовании плоских четырехузловых элементов типа plate (комплекс NASTRAN) при увеличении числа элементов от 1600 до 6400 на осесимметричной сетке, сходимость приближенных значений критической силы была сверху (рис. 3, кривая 1). Минимальное значение вычисленной критической нагрузки оказалось порядка ~ 1000 кН. Неосесимметричные сетки также на плоских элементах показали сходимость критической нагрузки сверху (рис. 3, кривая 2). В этом случае минимальное значение критической силы составило ~ 941 кН.

Эта же задача исследована при помощи восьмиузловых четырехугольных элементов в комплексе ANSYS. При неосесимметричных сетках уже на сетке с 1200 КЭ было достигнуто значение $P_{кр} \sim 947$ кН, которое почти не менялось при дальнейшем увеличении количества конечных элементов (2000 КЭ – 950 кН; 2700 КЭ – 953 кН; 3888 КЭ – 961 кН, рис. 3, кривая 3).

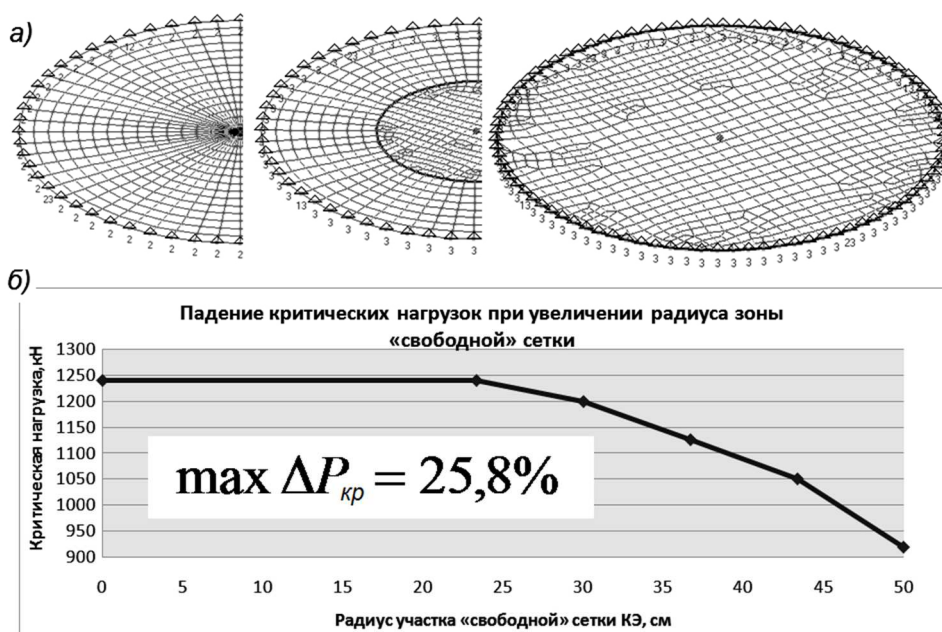


Рис. 2. Влияние несимметрии сетки КЭ на критическую нагрузку потери устойчивости: а) использованные типы сеток; б) график зависимости величины критической силы от величины зоны «свободного» разбиения сетки КЭ.

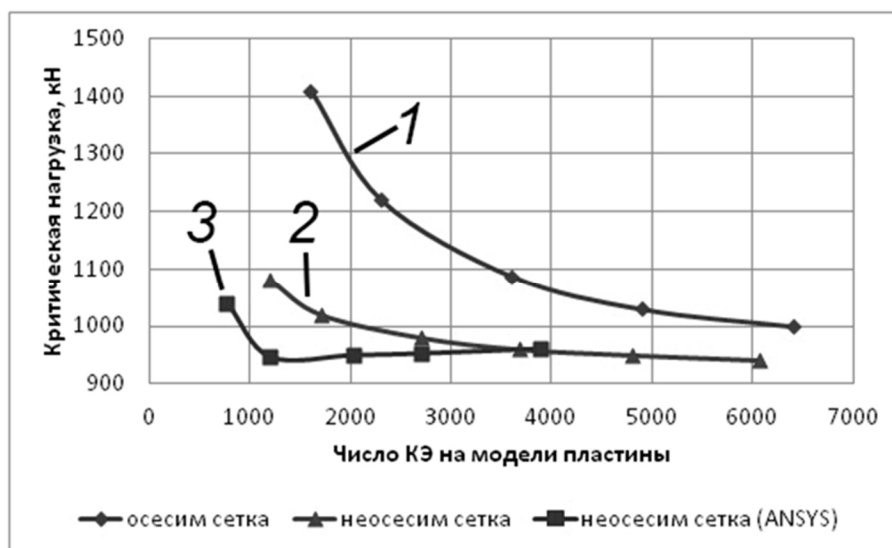


Рис. 3. Зависимость критических нагрузок потери устойчивости пластины, нагруженной сосредоточенной силой, от измельчения сетки КЭ.

Как видно из сопоставления, результаты вычисления критической нагрузки при помощи двух различных КЭ комплексов на разных сетках практически совпали ($P_{кр} \approx 950-970$ кН). В приведенных вычислениях предкритические прогибы составили $\sim 9,3 - 9,5$ см ($\sim 18-19\delta$).

Формы волнообразования существенно зависят от типа КЭ сетки. На осесимметричных сетках потеря устойчивости происходила с образованием пяти окружных полуволн (рис. 4, а). В случае использования неосесимметричных сеток, образовывались три или даже одна относительно большая полуволна (рис. 4, б, в).

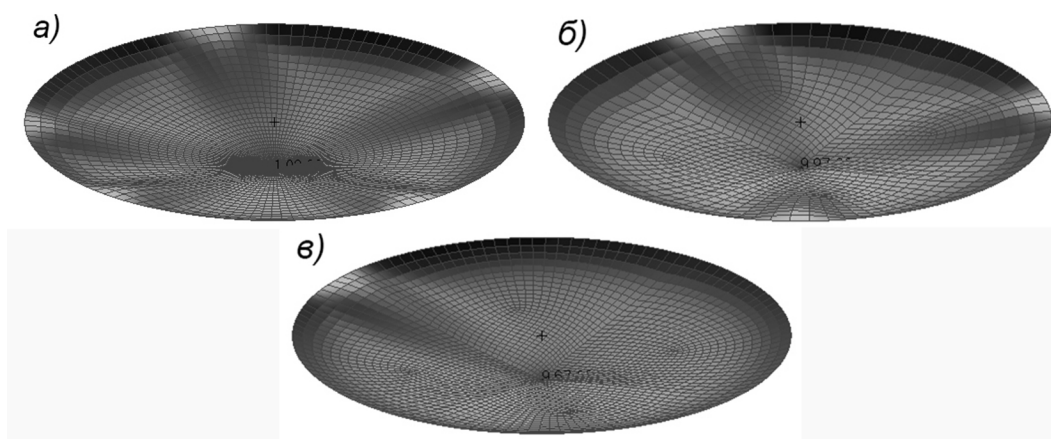


Рис. 4. Волнообразование в результате потери устойчивости равновесия пластины, нагруженной сосредоточенной силой.

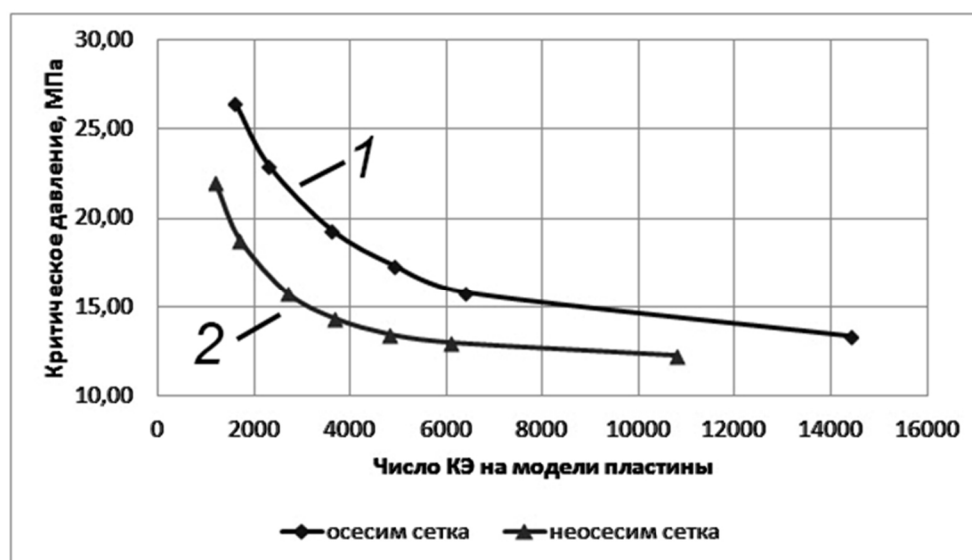


Рис. 5. Зависимость критических нагрузок потери устойчивости пластины под действием распределенной нагрузки от измельчения сетки КЭ.

Отметим, что увеличение числа тангенциальных связей в плоскости пластины, установленных по ее контуру, приводит к существенному ужесточению модели. Так при осесимметричной сетке из 3600 КЭ и постановке указанных связей в четырех или восьми точках контура критическая нагрузка составила 1088 кН (такая же нагрузка получена и в случае постановки аналогичного закрепления по центру пластины). Если тангенциальные связи поставлены во всех точках контура этой же модели пластины, то критическая нагрузка увеличивается до 1984 кН. По мнению автора, постановка большого ко-

личества тангенциальных связей «затягивает» процесс волнообразования, ужесточая тем самым модель пластины.

Для задачи устойчивости осесимметричного равновесия шарнирно опертой пластины под действием распределенной равномерной нагрузки исследована сходимость критических нагрузок в зависимости от количества КЭ типа plate на осесимметричных и неосесимметричных сетках (рис. 5). Для осесимметричных сеток при изменении количества КЭ от 1600 до 14400 сходимость приближенных критических нагрузок была сверху. Приближенные критические нагрузки

уменьшились от 26,44 до 13,36 МПа (рис. 5, кривая 1). При использовании неосесимметричных сеток с такими же КЭ, кривая падения критических нагрузок (рис. 5, кривая 2) также показала, что увеличение количества элементов существенно снижает величину приближенной критической нагрузки (с 21,98 до 12,24 МПа). Почти на всех рассмотренных моделях достижение нагрузкой критического значения сопровождалось образо-

ванием четырех волн, несимметрично распределенных по окружности пластины. Отметим, что потеря устойчивости у шарнирно опертых пластин происходила хлопком. Изменение нагрузки на один шаг приводило к образованию волн конечной амплитуды. «Жесткое» изменение осесимметричного распределения напряжений по Мизесу в момент потери устойчивости равновесия показано на рис. 6.

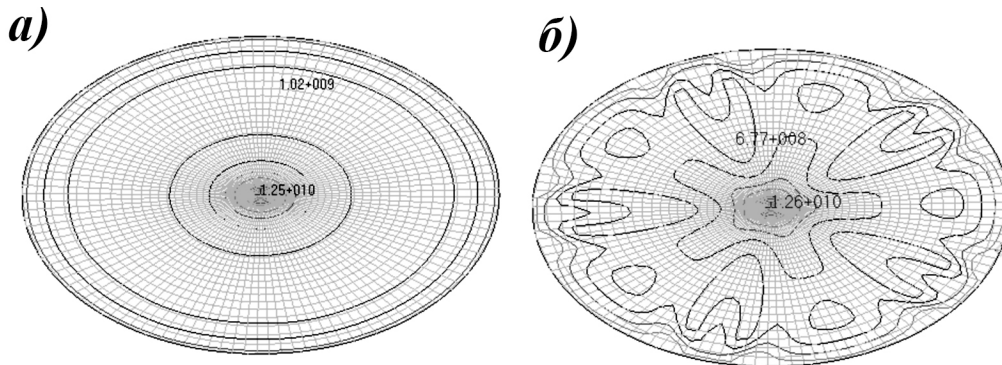


Рис. 6. Изолинии напряжений по Мизесу при потере устойчивости шарнирно опертой пластины: а) изолинии напряжений перед потерей устойчивости; б) изолинии напряжений после потери устойчивости и образования пяти волн.

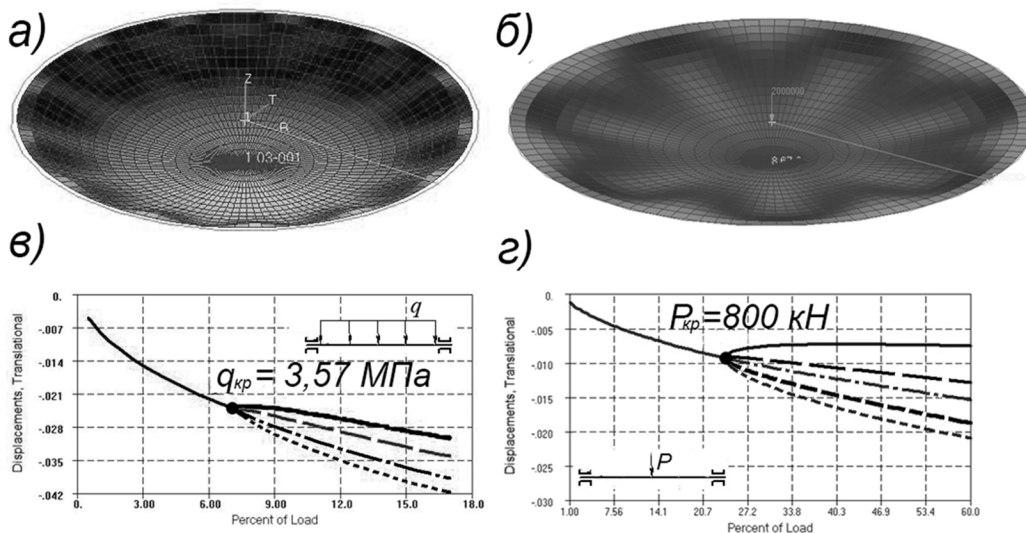


Рис. 7. Потеря устойчивости «в малом» пластины с закреплением скользящая заделка: а) форма пластины, потерявшей устойчивость, под действием распределенной нагрузки; б) форма пластины, потерявшей устойчивость, при нагружении сосредоточенной силой в центре; в) график развития вертикальных перемещений точек пластины, нагруженной распределенной нагрузкой, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$; г) график развития вертикальных перемещений точек пластины под действием сосредоточенной силы в центре, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$.

В случае закрепления края пластины по типу скользящей заделки, под действием как распределенной нагрузки (рис. 7, *а*), так и сосредоточенной силы (рис. 7, *б*), наблюдалась мягкая потеря устойчивости («в малом»). На модели из 1784 КЭ типа plate при действии распределенной нагрузки бифуркация осесимметричного равновесия ($q_{кр}=3,57$ МПа, прогиб в центре $\Delta=6,9\text{см}=13,8\delta$) переводит пластину в циклически симметричное равновесие с образованием 13 полуволин по окружности (рис. 7, *а*). График развития вертикальных перемещений точек пластины, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$ показан на рис. 7, *в*.

E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, аспирант Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Панов Д.Ю., Феодосьев В.И.** О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. // ПММ 1948, т.12, в.4, с.398-406.
2. **Морозов Н.Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости – Изд-во Лен. университета, 1978, 182 с.
3. **Морозов Н.Ф.** К вопросу о существовании несимметричных решений в задачах о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой. Изв. высш. учебн. заведений СССР. Сер. мат. 1961, 21, №2. С. 126-129.

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр 9; тел./факс +7(499) 972-49-81

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр 9; тел./факс +7(499) 978-16-73;

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОРРЕКТНОГО МЕТОДА ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров Т.Б. Кайтуков
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию некоторых особенностей универсального корректного метода точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, предложенного в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова, в частных случаях рассмотрения простейших двухточечных краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, строительная механика, точное аналитическое решение, система обыкновенных дифференциальных уравнений

ON SOME PECULIARITIES OF THE CORRECT METHOD OF EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS FOR SYSTEMS OF ODES

*Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov,
Taymuraz B. Kaytukov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to description of some features of the universal correct method of exact analytical solution of multipoint boundary problems of structural mechanics for systems of ordinary differential equations of the first order, proposed by Prof. Alexander B. Zolotov and Prof. Pavel A. Akimov. The simplest two-point boundary problems are under consideration.

Key words: boundary problem, structural mechanics, exact analytical solution, ODE

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Итак, в соответствии с [1] пусть имеем систему n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и двумя линейными граничными условиями, заданными в граничных точках x_1^b и x_2^b , т.е:

$$\bar{y}^{(1)} - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in (x_1^b, x_2^b); \quad (1)$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_2^- \bar{y}(x_2^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^-, \quad (2)$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x) = [y_1(x) \ y_2(x) \ \dots \ y_n(x)]^T$ – искомая n -мерная вектор-функция; $\bar{f} = \bar{f}(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^T$ – заданная n -мерная вектор-функция правых частей; A – матрица коэффициентов, квадратная n -го порядка; B_1^+ и B_2^- – заданные матрицы граничных условий, квадратные n -го

О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

порядка; \bar{g}_1^+ и \bar{g}_2^- – заданные n -мерные векторы правых частей граничных условий.

Требуется определить вектор-функцию $\bar{y} = \bar{y}(x)$, являющуюся решением сформулированной выше двухточечной краевой задачи (1)-(2).

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение двухточечной краевой задачи (1)-(2) определяется формулой:

$$\bar{y}(x) = (\varepsilon(x - x_1^b) - \varepsilon(x - x_2^b))\bar{C} + \varepsilon * \bar{f}, \quad (3)$$

$$x \in (x_1^b, x_2^b),$$

где \bar{C} – вектор искомых постоянных коэффициентов n -го порядка;

$$\bar{f}(x) \equiv f(x)\theta(x, x_1^b, x_2^b); \quad (4)$$

$$\theta(x, x_1^b, x_2^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_1^b, x_2^b) \\ 0, & x \notin (x_1^b, x_2^b). \end{cases} \quad (5)$$

Введем обозначения

$$E(x) = \varepsilon(x - x_1^b) - \varepsilon(x - x_2^b); \quad (6)$$

$$\bar{S}(x) = \varepsilon * \bar{f}, \quad (7)$$

Можем переписать (3) в виде

$$\bar{y}(x) = E(x)\bar{C} + \bar{S}(x), \quad x \in (x_1^b, x_2^b). \quad (8)$$

Подставляя (8) в граничные условия (2), получим:

$$B_1^+ [E(x_1^b + 0)C + S(x_1^b + 0)] + B_2^- [E(x_2^b - 0)\bar{C} + \bar{S}(x_2^b - 0)] = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^-,$$

откуда

$$[B_1^+ E(x_1^b + 0) + B_2^- E(x_2^b - 0)]\bar{C} = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^- - B_1^+ \bar{S}(x_1^b + 0) - B_2^- \bar{S}(x_2^b - 0). \quad (9)$$

На основании (7) и свойств фундаментальной матрицы-функции можем записать следующие равенства:

$$E(x_1^b + 0) = \varepsilon(x_1^b + 0 - x_1^b) - \varepsilon(x_1^b + 0 - x_2^b) = \varepsilon(+0) - \varepsilon(x_1^b - x_2^b) = \varepsilon(+0) - \varepsilon(-h^b); \quad (10)$$

$$E(x_2^b - 0) = \varepsilon(x_2^b - 0 - x_1^b) - \varepsilon(x_2^b - 0 - x_2^b) = \varepsilon(x_2^b - x_1^b) - \varepsilon(-0) = \varepsilon(h^b) - \varepsilon(-0), \quad (11)$$

$$\text{где} \quad h^b = x_2^b - x_1^b. \quad (12)$$

Слагаемые $\varepsilon(-0)$ и $\varepsilon(+0)$ будем называть главными частями.

Систему (9) можно переписать в матричном виде

$$K\bar{C} = \bar{G}; \quad (13)$$

$$\text{где} \quad K = B_1^+ E(x_1^b + 0) + B_2^- E(x_2^b - 0); \quad (14)$$

$$\bar{G} = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_2^- - B_1^+ \bar{S}(x_1^b + 0) - B_2^- \bar{S}(x_2^b - 0). \quad (15)$$

В матрице коэффициентов (14) полезно выделить главную K^0 и дополнительную K^1 части:

$$K = K^0 + K^1, \quad (16)$$

$$\text{где} \quad K^0 = B_1^+ \varepsilon(+0) - B_2^- \varepsilon(-0); \quad (17)$$

$$K^1 = -B_1^+ \varepsilon(-h^b) + B_2^- \varepsilon(h^b). \quad (18)$$

Важно отметить, что матрицы $\varepsilon(+0)$ и $\varepsilon(-0)$ не зависят от x .

Заметим, что полученная СЛАУ n -го порядка (13) не является вырожденной.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического по-

ведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: АСВ, 2004. – 200 с.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Кайтуков Таймураз Батразович, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики,

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: ktb.user@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Taymuraz B. Kaytukov, PhD, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: ktb.user@gmail.com

РАЗВИТИЕ МИКФ К ДЕФОРМАЦИОННОМУ РАСЧЕТУ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК В ЗАДАЧАХ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА

С.Ю. Савин

ФГБОУ ВПО «Государственный университет –
учебно-научно-производственный комплекс», г. Орел, Россия

АННОТАЦИЯ: В работе рассматривается поперечный изгиб упругих ортотропных пластинок с комбинированными граничными условиями. Для деформационного расчета таких конструкций используется метод интерполяции по коэффициенту формы. Приводятся аналитические выражения для максимальных прогибов, используемые при выборе опорных решений по МИКФ. В этих выражениях в качестве аргументов дополнительно вводятся соотношения цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей пластинок.

Ключевые слова: ортотропные пластинки, поперечный изгиб, коэффициент формы, соотношение цилиндрических жесткостей, комбинированные граничные условия, максимальный прогиб, метод интерполяции по коэффициенту формы

DEVELOPMENT OF ITSF TO CALCULATION OF DEFORMATION OF THE ELASTIC ORTHOTROPIC PLATES IN THE PROBLEMS OF TRANSVERSE BENDING

Sergey Yu. Savin

State University – Educational-Science-Production Complex, Oryol, Russia

ABSTRACT: This paper is about the transverse bending of elastic orthotropic plates with combined boundary conditions. For the calculation of the deformation of these structures it is used the interpolation technique by shape factor. Analytical relations for the maximum deflections given here are used in the selection of the reference solutions of ITSF. In these relations as additional arguments it is used ratio flexural rigidities along the coordinate axes of the plate.

Key words: orthotropic plates, transverse bending, shape factor, ratio of flexural rigidities, combined boundary condition, maximal deflection, interpolation technique by shape factor

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для оценки жесткости конструкций в виде пластинок, как правило, прибегают к использованию приближенных численных методов [1], реализованных в программных комплексах для ЭВМ. Обладая большим числом достоинств, среди которых, прежде всего, следует выделить универсальность и высокую точность, эти методы в то же время не позволяют получить в аналити-

ческом виде выражения для интегральных физико-механических характеристик пластинок (максимальные прогибы, частоты собственных колебаний и т.д.), что снижает их эффективность при вариантном проектировании. Для преодоления этого недостатка разрабатываются приближенные аналитические методы. Одним из них является метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), разработанный А.В. Коробко [2].

Сущность МИКФ заключается в следующем. Пусть для пластинки заданной формы необходимо найти значение интегральной физической характеристики (максимальный прогиб при поперечном изгибе, частота собственных колебаний, критическая сила при всестороннем сжатии). Если форму заданной пластинки можно получить в результате какого-либо геометрического преобразования из форм других пластинок, интегральные физические характеристики которых известны (опорные решения), то искомая величина может быть найдена интерполяцией между опорными решениями по коэффициенту формы. Поэтому одно из направлений развития МИКФ связано с построением граничных кривых для пластинок определённых форм при различных комбинациях граничных условий, которые бы могли использоваться в качестве опорных решений. В данной статье рассматривается применение МИКФ к оценке жесткости упругих ортотропных пластинок при их поперечном изгибе равномерно распределенной по поверхности нагрузкой.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОЭФФИЦИЕНТЕ ФОРМЫ

Одной из интегральных геометрических характеристик формы области является коэффициент формы, выражение для которого имеет следующий общий вид:

$$K_{fa} = \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (1)$$

где ds – линейный элемент контура области, h – перпендикуляр, опущенный из некоторого полюса внутри области D на линейный элемент контура ds (рис. 1).

В любой выпуклой области существует точка a , и при том единственная, для которой значение коэффициента формы минимально. В дальнейшем будем пользоваться только минимальными значениями K_f .

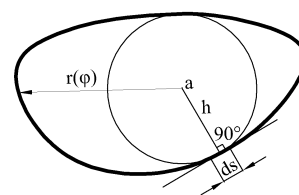


Рис. 1. Геометрия области.

В работе [2] приведены выражения для определения значений коэффициента формы: – для треугольников (рис. 2):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg}(\alpha/2) \cdot \operatorname{ctg}(\beta/2) \cdot \operatorname{ctg}(\gamma/2), \quad (2)$$

– для параллелограммов (рис. 3):

$$K_f = 4 \cdot \frac{a/b + b/a}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

– для трапеций (рис. 4):

$$K_{fa} = \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{H - h_1} + \frac{H(1/\sin \alpha_1 + 1/\sin \alpha_2)^2}{a_1 - h_1(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)}, \quad (4)$$

– для эллипсов:

$$K_f = \pi(a/b + b/a), \quad (5)$$

где a и b – полуоси эллипса.

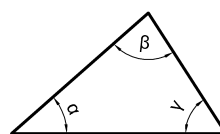


Рис. 2. Пластинка в виде треугольника.

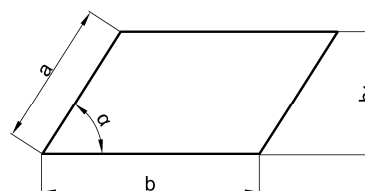


Рис. 3. Пластинка в виде параллелограмма.

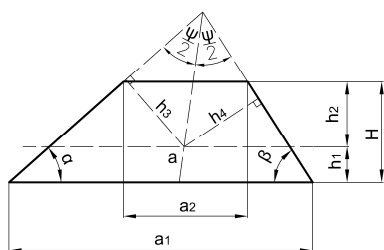


Рис. 4. Пластинка в виде трапеции.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МИКФ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе А.В. Коробко [2] было выведено в изопериметрическом виде выражение для максимальных прогибов изотропных пластинок, формы областей которых связаны некоторым геометрическим преобразованием:

$$w_0 = K_w \frac{q}{D} \frac{A^2}{K_f^2 + BK_f} \quad (6)$$

В выражении (6) K_w – некоторая функция, зависящая от граничных условий, постоянная для пластин с формой области одного класса (прямоугольные, трапециевидные и т.д.), B – константа, определяемая из опорных решений, q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

На рис. 5 представлены графики изменения значений максимальных прогибов изотропных пластинок с выпуклым очертанием в плане, жестко защемленных по всему контуру, в зависимости от коэффициента формы. Из графиков видно, что множество значений максимальных прогибов для таких пластинок ограничено снизу значениями максимальных прогибов для эллиптических пластинок и сверху – максимальными прогибами для пластинок в виде правильных многоугольников и равнобедренных треугольников. Данное утверждение справедливо и для случая шарнирного опирания по контуру.

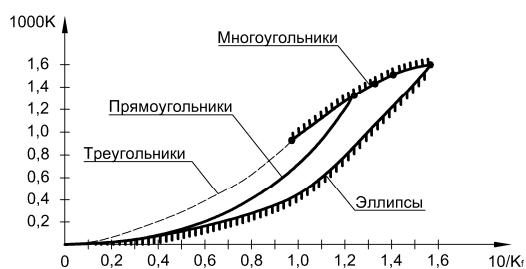


Рис. 5. Графики изменения значений максимальных прогибов изотропных пластинок с выпуклым очертанием в плане, жестко защемленных по всему контуру, в зависимости от коэффициента формы.

Для ортотропной пластинки при её поперечном изгибе из теории упругости известно следующее дифференциальное уравнение:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (7)$$

где $H = D_1 + 2D_{xy}$, $D_1 = D_x \nu_y = D_y \nu_x$.

В этих выражениях D_x , D_y , D_{xy} – цилиндрические жесткости пластинки, ν_x , ν_y – коэффициенты Пуассона по соответствующим направлениям. Разделив правую и левую части уравнения (7) на H , получим:

$$\frac{D_x}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{H}. \quad (8)$$

В этом случае при прочих одинаковых условиях (форма пластинки, нагрузка q , граничные условия и цилиндрической жесткости H) решение будет зависеть от двух параметров этого уравнения – D_x/H ; D_y/H .

Следовательно, для ортотропных пластинок функция K_w из (6) будет также зависеть и от соотношения цилиндрических жесткостей D_x/H и D_y/H .

Осуществим замену отношения

$$\frac{K_w}{K_f^2 + BK_f}$$

на функцию $f(K_f; D_x/H; D_y/H)$. Тогда выражение (6) для ортотропных пластин примет следующий вид:

$$w_0 = f(K_f; D_x/H; D_y/H) \frac{qA^2}{H}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что максимальный прогиб ортотропных пластинок функционально связан с коэффициентом формы области и соотношениями цилиндрических жесткостей.

3. ГРАНИЧНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ВЫБОРА ОПОРНЫХ РЕШЕНИЙ

Для применения МИКФ к решению задач поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок необходимо построить аппроксимирующие функции для определенных классов форм областей: равнобедренных и прямоугольных треугольников, ромбов, прямоугольников и правильных n -угольников. Значения интегральных физических характеристик для пластинок такого очертания образуют границы изменения максимальных прогибов для всего множества ортотропных пластинок с выпуклым контуром. Построение аппроксимирующих функций выполняется путем численного решения соответствующих задач с помощью МКЭ (по программному комплексу SCAD).

Для изотропных пластинок в виде равнобедренных треугольников в случае комбинированных граничных условий f из выражения (9) будет различаться для тупоугольных и остроугольных треугольников. Если материал пластинок обладает ортотропией упругих свойств, то на величину f также будет влиять соотношение характеристик D_x/H и D_y/H . С учетом указанных особенностей функцию f будем искать в виде выражения

$$f = g_1(K_f) \cdot g_2(D_x/H; D_y/H; \alpha), \quad (10)$$

где g_1 – некоторая функция, зависящая от формы области и граничных условий; g_2 – функция, учитывающая соотношение упругих характеристик ортотропной пластины, а также различие в значениях интегральных физических характеристик для пластин в виде тупоугольных и остроугольных равнобедренных треугольников.

По результатам численных расчетов получены функции следующего вида [6]:

$$g_1 = 1 / (aK_f^2 + bK_f - c), \quad (11)$$

$$g_2 = D\alpha^3 + C\alpha^2 + B\alpha + A. \quad (12)$$

В этих выражениях a, b, c – коэффициенты, зависящие от варианта граничных условий; α – угол при основании равнобедренного треугольника; $A \dots D$ – некоторые однотипные функции параметров $D_x/H, D_y/H$. Например, для функции A получено выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} A = & A_1 + A_2 \frac{H}{D_x} + A_3 \frac{H}{D_y} + A_4 \frac{H^2}{D_x^2} + A_5 \frac{H^2}{D_y^2} + \\ & + A_6 \frac{H^2}{D_x D_y} + A_7 \frac{H^3}{D_x^3} + A_8 \frac{H^3}{D_y^3} + \\ & + A_9 \frac{H^3}{D_x D_y^2} + A_{10} \frac{H^3}{D_x^2 D_y}, \end{aligned} \quad (13)$$

где A_i – коэффициенты, постоянные при заданном типе граничных условий.

Для ортотропных пластинок в виде прямоугольных треугольников, прямоугольников, ромбов и правильных многоугольников неизвестная функция f из выражения (9) была получена следующим образом. По значениям максимальных прогибов, используя программный комплекс Table Curve 3D, были построены аппроксимирующие функции $\varphi(D_x/H; D_y/H)$:

$$\varphi = a + b \frac{H}{D_x} + c \frac{H}{D_y} + d \frac{H^2}{D_x^2} + e \frac{H^2}{D_y^2} + f \frac{H^2}{D_x D_y} + g \frac{H^3}{D_x^3} + h \frac{H^3}{D_y^3} + i \frac{H^3}{D_x D_y^2} + j \frac{H^3}{D_x^2 D_y} \quad (14)$$

При этом коэффициенты $a \dots j$ изменяются в зависимости от формы пластинки. Учитывая это обстоятельство, коэффициенты $a \dots j$ следует искать в виде функций $\psi(K_f)$, постоянных для определенных подклассов форм областей при заданных граничных условиях. Используя программный комплекс Table Curve 2D, были получены следующие выражения для $\psi(K_f)$:

– для пластинок в виде прямоугольных треугольников [7]:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4}, \quad (15)$$

– для прямоугольных пластинок [8]:

$$\psi(K_f) = \frac{A + CK_f^{m/2} + EK_f^m + GK_f^{3m/2} + IK_f^{2m}}{1 + BK_f^{m/2} + DK_f^m + FK_f^{3m/2} + HK_f^{2m}}, \quad (16)$$

где $m = 1, 2, 4$;

– для ромбических пластинок, оси ортотропии которых проходят через вершину ромба [9]:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4} + \frac{F}{K_f^5} + \frac{G}{K_f^6} + \frac{H}{K_f^7} + \frac{I}{K_f^8} + \frac{J}{K_f^9}, \quad (17)$$

– для ромбических пластинок, одна из осей ортотропии которых направлена вдоль стороны ромба [10]:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4} + \frac{F}{K_f^5} + \frac{G}{K_f^6}, \quad (18)$$

– для правильных многоугольников, одна из осей ортотропии которых направлена параллельно его стороне [11]:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4}, \quad (19)$$

– для правильных многоугольников, оси ортотропии которых проходят через их вершины [11]:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2}. \quad (20)$$

В выражениях (15) ... (20) $A \dots J$ – коэффициенты, зависящие от граничных условий и постоянные для форм областей соответствующих классов.

4. МЕТОДИКА РЕАЛИЗАЦИИ МИКФ К ДЕФОРМАЦИОННОМУ РАСЧЕТУ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Для применения МИКФ в деформационных расчетах упругих ортотропных пластинок разработана специальная методика, которая состоит из совокупности приведенных ниже практических рекомендаций.

Расчет упругих ортотропных пластинок следует начинать с определения того, к какому классу относится форма области заданной пластинки, после чего по формуле для соответствующего класса форм областей находится коэффициент формы.

На следующем этапе, на основании заданных физико-механических характеристик, определяются цилиндрические жесткости ортотропной пластинки D_x, D_y, H вдоль координатных осей по ранее приведенным выражениям. В тех случаях, когда ортотропия вызвана конструктивными особенностями (постановка ребер жесткости) или специальной обработкой (гофрирование) пластинки, значения цилиндрических жесткостей следует определять по приближенным формулам [12].

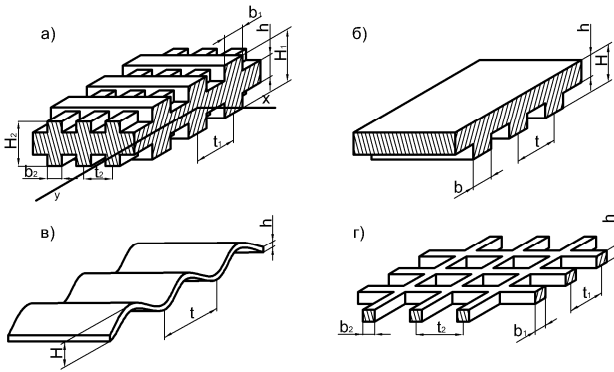


Рис. 6. Примеры пластинок.

Для пластинки, усиленной ребрами жесткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 6а):

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Eb_1(H_1^3 - h^3)}{12t_1},$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Eb_2(H_2^3 - h^3)}{12t_2},$$

$$H \cong \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (21)$$

Для пластинки, усиленной ребрами жесткости вдоль оси ox , расположенными по одной стороне (рис. 6б):

$$D_x = \frac{IE}{t}, \quad D_y = \frac{Eh^3}{12\left(1 - \frac{b}{t} + \frac{bh^3}{tH^3}\right)}, \quad D_1 \cong 0,$$

$$D_{xy} = \frac{Ch^3}{12} + \frac{C}{2t}, \quad (22)$$

где I – момент инерции T – образного сечения; C – крутильная жесткость одного ребра. Для гофрированных пластинок с синусоидальной формой гофра (рис. 6в):

$$D_x = \frac{IE}{t}, \quad D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{t}{s}, \quad D_1 \cong 0,$$

$$D_{xy} = \frac{1}{2} \frac{sEh^3}{t \cdot 12(1+\nu)}, \quad (23)$$

где

$$I = \frac{H^2ht}{8} \left(1 - \frac{0,81}{1 + 5/32 \cdot H^2/t^2} \right)$$

– момент инерции одной волны;

$$s = t \left(1 + \frac{\pi^2 H^2}{16t^2} \right)$$

– развернутая длина одной волны.

Для решетчатой конструкции (рис. 6г):

$$D_x = \frac{b_1 h^3}{12t_1}, \quad D_y = \frac{b_2 h^3}{12t_2},$$

$$D_{xy} = \frac{1}{4} \left(\frac{C_1}{t_1} + \frac{C_2}{t_2} \right), \quad (24)$$

где C_1 и C_2 – крутильные жесткости брусьев, параллельных осям Ox и Oy соответственно.

На основании полученных значений цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей пластинки находят значения параметров D_x/H , D_y/H .

Следующим шагом согласно данной методике является выбор геометрического преобразования, связывающего форму области заданной пластинки с формами областей пластинок, значения максимальных прогибов которых образуют одну из границ изменения данной характеристики для некоторого подмножества выпуклых форм областей. При этом должно выполняться условие:

$$\begin{cases} K_{f1} < K_f < K_{f2}, & \text{или} \\ K_{f1} > K_f > K_{f2}. \end{cases} \quad (25)$$

В этих неравенствах K_{f1} и K_{f2} – коэффициенты формы опорных пластинок.

Следует учитывать, что на значения интегральных физико-механических характери-

стик ортотропных пластинок существенное влияние оказывает направление осей ортотропии. Поэтому выбор геометрического преобразования должен быть сделан таким образом, чтобы направления осей ортотропии исходной и опорных пластинок совпадали.

После выбора вида геометрического преобразования следует уточнить геометрические параметры опорных пластинок и найти значения коэффициентов формы по соответствующим формулам.

Подставляя значения коэффициентов формы и соотношения цилиндрических жесткостей D_x/H , D_y/H в выражения для определения значений максимальных прогибов ортотропных пластинок, приведенные в данной главе, находятся значения этих интегральных физико-механических характеристик.

На следующем этапе выбирают тип аппроксимирующей функции, которая будет применяться для интерполяции между значениями максимальных прогибов опорных пластинок. Выбор этой функции обусловлен видом геометрического преобразования, которое используется для получения формы области заданной пластинки:

– если формы областей заданной и опорных пластинок относятся к одному классу:

$$w_0 = C + B \cdot K_f^2 / A^2 ; \quad (26)$$

– если формы областей заданной и опорных пластинок относятся к разным классам:

$$w = C \cdot \frac{A^2}{B \cdot K_f + K_f^2} ; \quad (27)$$

– если формы областей заданной и опорных пластинок относятся к разным классам, но при этом значения коэффициентов формы для них равны:

$$w = w_1 \cdot \left(K_f / K_{f1} \cdot A_1 / A \right)^n . \quad (28)$$

После того, как аппроксимирующая функция выбрана, определяются значения неизвестных коэффициентов путем подстановки в нее соответствующих значений для опорных пластинок.

Подставляя значения полученных коэффициентов и соответствующих геометрических параметров заданной пластинки, найдем для нее значение максимального прогиба.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МИКФ

Рассмотрим несколько примеров расчета ортотропных пластинок с применением методики МИКФ.

Пример 1. Найдем максимальный прогиб ортотропной пластинки в виде треугольника (рис. 7) со следующими геометрическими и физическими параметрами: основание треугольника $a = 1$ м; толщина пластинки – $h = 0,005$ м; углы при основании – $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$; модули упругости – $E_x = 9000$ МПа; $E_y = 6000$ МПа; модуль сдвига – $G_{xy} = 750$ МПа; коэффициент Пуассона – $\nu_x = 0,085$; нагрузка равномерно распределена по поверхности – $q = 1000$ Н/м². Площадь пластинки $A = 0,2826$ м².

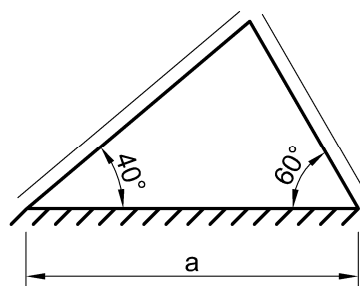


Рис. 7. Пластинка в виде треугольника.

Коэффициент формы:

$$K_f = 2 \cdot \text{ctg}(40/2) \cdot \text{ctg}(60/2) \cdot \text{ctg}(80/2) = 11,34.$$

Форма области в виде треугольника с геометрическими параметрами, приведенными

выше, может быть получена в результате сдвига вершины равнобедренного (прямоугольного) треугольника параллельно его основанию. На рисунке 8 приведены графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

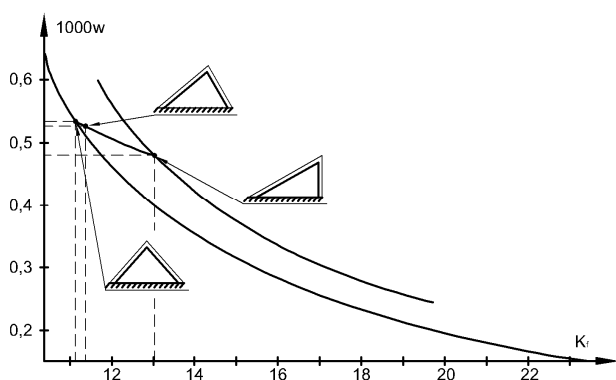


Рис. 8. Графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

При таком преобразовании площадь и основание треугольников остаются постоянными, а остальные параметры, определяющие их очертание, примут следующие значения:

- для равнобедренного треугольника:

$$\alpha = \beta = 48,51^\circ; \quad K_{f1} = 11,1393;$$

- для прямоугольного треугольника

$$\alpha = 29,48^\circ; \quad K_{f2} = 13,0301.$$

Значения максимальных прогибов опорных пластинок $w_1 = 2,0329$ мм; $w_2 = 1,8292$ мм получены из выражений (10) и (15) соответственно.

Значения неизвестных коэффициентов в (27) найдем, подстановкой в это выражение данных для равнобедренного и прямоугольного треугольников:

$$B = \frac{(w_{02} \cdot K_{f2}^2 - w_{01} \cdot K_{f1}^2)}{(w_{01} \cdot K_{f1} - w_{02} \cdot K_{f2})} =$$

$$= \frac{(1,829 \cdot 13,03^2 - 2,033 \cdot 11,14^2)}{(2,033 \cdot 11,14 - 1,829 \cdot 13,03)} = -49,01;$$

$$C = w_{01} \cdot (B \cdot K_{f1} + K_{f1}^2) = \\ = 2,033 \cdot (-49,01 \cdot 11,14 + 11,14^2) = -8,576.$$

Подставляя эти значения в (2.22) имеем:

$$w_0 = \frac{8,576}{(49,01 \cdot 11,34 - 11,34^2)} = 2,007 \text{ мм};$$

С помощью МКЭ (по программному комплексу SCAD) для заданной пластинки было получено значение максимального прогиба $w = 2,009$ мм.

Таким образом, результат вычислений с помощью МИКФ на 0,1 % отличается от решения той же задачи с помощью МКЭ.

Пример 2. Пусть задана упругая ортотропная пластинка в виде параллелограмма жестко защемленная по двум сторонам и шарнирно опертая по двум другим следующего очертания (рис. 9): $a = 1,5$ м; $b = 1$ м; $t = 0,02$ м; $\alpha = 45^\circ$; $K_f = 12,2565$; $A = 1,061$ м². Физическими параметрами: модули упругости – $E_x = 7000$ МПа; $E_y = 5500$ МПа; модуль сдвига – $G_{xy} = 800$ МПа; коэффициент Пуассона – $\nu_x = 0,07$. Для заданной пластинки требуется найти значение максимального прогиба от действия равномерно распределенной по её поверхности нагрузки $q = 1000$ кН/м².

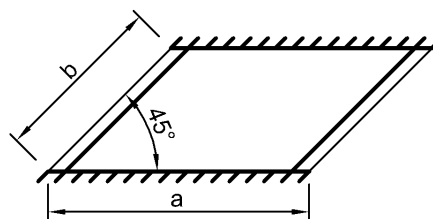


Рис. 9. Упругая ортотропная пластинка в виде параллелограмма жестко защемленная по двум сторонам и шарнирно опертая по двум другим.

Решим задачу с помощью МИКФ. Заданная форма области может быть получена в ре-

зультате поворота боковых сторон прямоугольника (ромба), сопровождающегося их растяжением (сжатием). Параметры очертания прямоугольной пластинки: $a = 1,5$ м; $b = 1$ м; $K_{f1} = 11,64$; $A_1 = 0,8953$ м². Параметры очертания пластинки в виде ромба: $a = 1,5$ м; $\alpha = 32^\circ$; $K_{f2} = 15,10$; $A_2 = 1,193$ м². Из выражений (16) и (18) получены значения максимальных прогибов $w_1 = 0,093$ мм; $w_2 = 0,139$ мм соответственно.

На рис. 10 приведены графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

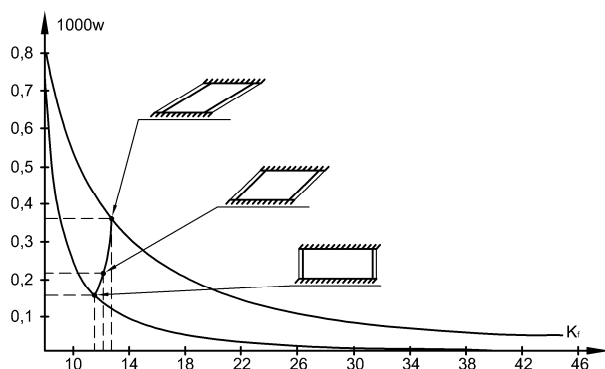


Рис. 10. Графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

Найдем значение максимального прогиба пластинки. Для этого воспользуемся методикой МИКФ. Подставляя исходные данные, получим:

$$B = \frac{(w_{02} \cdot K_{f2}^2 / A_2^2 - w_{01} \cdot K_{f1}^2 / A_1^2)}{(w_{01} \cdot K_{f1} / A_1^2 - w_{02} \cdot K_{f2} / A_2^2)} =$$

$$= \frac{(0,139 \cdot 15,1^2 / 1,193^2 - 0,093 \cdot 11,64^2 / 0,895^2)}{(0,093 \cdot 11,64 / 0,895^2 - 0,139 \cdot 15,1 / 1,193^2)} =$$

$$= -51,12;$$

$$C = w_{01} \cdot (B \cdot K_{f1} + K_{f1}^2) / A_1^2 =$$

$$= 0,093 \cdot (-50,12 \cdot 11,64 + 11,64^2) / 0,895^2 =$$

$$= -53,21.$$

$$w_0 = \frac{-53,21 \cdot 1,061^2}{(-51,12 \cdot 12,26 + 12,26^2)} = 0,178 \text{ мм.}$$

Этот результат отличается на 1,18 % от решения, полученного с помощью МКЭ ($w_0 = 0,1801$ мм).

Пример 3. Требуется найти максимальный прогиб ортотропной трапецевидной пластинки (рис. 11) от действия равномерно распределенной нагрузки $q = 1$ кН при следующих геометрических параметрах: $a = 2$ м; $b = 1$ м; $\alpha = 45^\circ$; $K_f = 14,46$; $A = 0,75$ м². Физическими параметрами: модули упругости – $E_x = 12000$ МПа; $E_y = 8500$ МПа; модуль сдвига – $G_{xy} = 1000$ МПа; коэффициент Пуассона – $\nu_x = 0,085$.

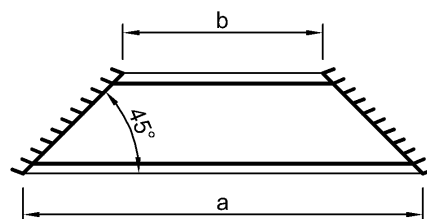


Рис. 11. Ортотропная трапецевидная пластинка.

Заданная трапеция может быть получена в результате поворота сторон прямоугольника или треугольника, сопровождающегося растяжением или сжатием. На рис. 12 приведены графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

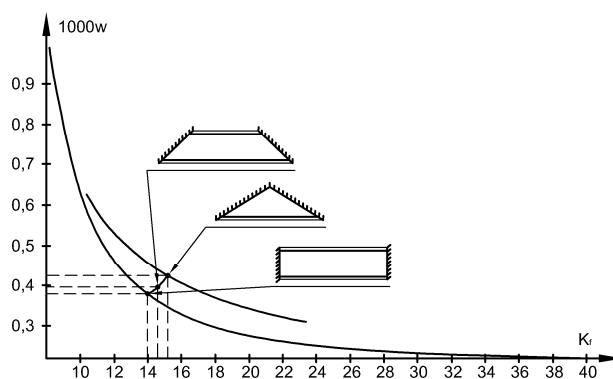


Рис. 12. Графики зависимости $W - K_f$, соответствующие выбранному геометрическому преобразованию.

При таком преобразовании для прямоугольника: $a_1 = 2$ м; $b_1 = 0,8353$ м; $K_{f1} = 11,25$; $A_1 = 1,671$ м²; $w_1 = 1,019$ мм. Для пластинки в виде треугольника: $a_2 = 1,2883$ м; $\alpha_2 = 32^\circ$; $K_{f2} = 15,20$; $A_2 = 0,2598$ м²; $w_2 = 0,0113$ мм. Значения максимальных прогибов для опорных пластинок получены из выражений (10) и (16) соответственно.

Значения коэффициентов в выражении (27):

$$B = \frac{(w_{02} \cdot K_{f2}^2 / A_2^2 - w_{01} \cdot K_{f1}^2 / A_1^2)}{(w_{01} \cdot K_{f1} / A_1^2 - w_{02} \cdot K_{f2} / A_2^2)} =$$

$$= \frac{(0,0113 \cdot 15,20^2 / 0,2598^2 - 1,019 \cdot 11,25^2 / 1,671^2)}{(1,019 \cdot 11,25 / 1,671^2 - 0,0113 \cdot 15,20 / 0,2598^2)} =$$

$$= -4,812;$$

$$C = w_{01} \cdot (B \cdot K_{f1} + K_{f1}^2) / A_1^2 =$$

$$= 1,019 \cdot (-4,812 \cdot 11,25 + 11,25^2) / 1,671^2 = 26,43$$

Подставив значения коэффициентов, найдем максимальный прогиб пластинки:

$$w_0 = \frac{26,43 \cdot 0,75^2}{(-4,812 \cdot 14,46 + 14,46^2)} = 0,121 \text{ мм.}$$

Этот результат отличается от полученного с помощью МКЭ на 4,12%.

Изложенная методика определения максимального прогиба ортотропных пластинок реализована в программном комплексе «OrthPlate», на который получено свидетельство о государственной регистрации.

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика применения МИКФ к деформационному расчету упругих ортотропных пластинок с комбинированными граничными условиями.
2. Решение тестовых задач с применением МИКФ показывает, что разница между значениями, полученными по этому методу и с по МКЭ, не превосходит $\pm 4,12\%$.
3. Результаты, представленные в данной работе, могут быть использованы для опера-

тивного получения решений на стадии вариантного проектирования

ЗАМЕЧАНИЕ

Работа выполнена в рамках Ведомственной программы Министерства образования и науки РФ «Разработка и развитие инженерных методов решения задач технической теории пластинок на основе принципов симметрии и геометрического моделирования их формы» (2012 – 2014 гг.), регистрационный номер 7.587.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: «Мир», 1975. – 543 с.
2. **Коробко А.В.** Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. – М.: АСВ, 1999. – 320 с.
3. **Коробко В.И., Савин С.Ю.** Изгиб треугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 1. – С. 7-14.
4. **Савин С.Ю.** Изгиб ортотропных пластинок в виде прямоугольных треугольников с однородными и комбинированными граничными условиями // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы международных академических чтений РААСН. – Курск: КурскГУ. – 2011. – С. 161-170.
5. **Коробко В.И., Савин С.Ю.** Изгиб прямоугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительство и реконструкция. – 2011. – № 5. – С. 33-39.
6. **Коробко В.И., Савин С.Ю.** Изгиб ортотропных пластинок в виде ромбов с комбинированными граничными условиями // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 3. – С. 25-30.

7. **Коробко В.И., Савин С.Ю.** Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – №2. – С. 18-23.
8. **Коробко А.В., Савин С.Ю.** Изгиб ортотропных пластин в виде правильных многоугольников, шарнирно опертых по контуру // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 2-й Всероссийской конференции. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). – 2011. – С. 184-190.
9. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 625 с.

Савин Сергей Юрьевич, аспирант кафедры строительных конструкций и материалов архитектурно-строительного института ФГБОУ ВПО «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс», 302006, Россия, г. Орел, ул. Московская, д. 77, тел./факс: 8(4862)73-43-95, e-mail: sjs28@mail.ru.

Sergey Yu. Savin, Post-graduate student of Department Building designs and materials Architecturally-building institute State University – Educational-Science-Production Complex, 302006, Russia, Oryol, 77, Moscow St., Tel. (fax): 8(4862)73-43-95, e-mail: sjs28@mail.ru.