

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**  
*Volume 9, Issue 3* *2013*

---

EXECUTIVE EDITOR

**Valery I. Telichenko**, Professor, Rector  
Moscow State University of Civil Engineering  
Moscow, Russia  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

**Pavel A. Akimov**, Professor, Vice-Rector  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Research Center STADYO  
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

**William Begell**, President  
Begell Publishing House  
USA

**Nadezhda S. Nikitina**, Director  
ASV Publishing House  
Moscow, Russia

**Valery I. Telichenko**, Rector  
Moscow State University  
of Civil Engineering  
Moscow, Russia

## ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

**Vladimir I. Andreev**, Professor  
Department of Strength of Materials,  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering, Yaroslavskoe shosse 26,  
129337 Moscow, Russia

**Nikolaj V. Banichuk**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo  
117526, Russia

**Klaus-Jürgen Bathe**, Professor  
Department of Mechanical  
Engineering, Massachusetts Institute  
of Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Zdenek Bittnar**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Czech Technical University  
7, Thakurova, 16629 Prague 6  
Czech Republic

**Alexander S. Bratus**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Evgeny G. D'yakonov**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Alexander S. Gorodetsky**  
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.  
2a, Ul. M. Krivonosy  
252180 Kiev, Ukraine

**Vladimir Karpov**, Professor  
St. Petersburg University  
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,  
St. Petersburg, 198005 Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
and Computer Technology  
Perm State Technical University  
29, Komsomolsky Prospekt,  
Perm, 614990, Russia

**Hartmut Koppler**, Professor  
Bauhaus-Universität  
31a, Windmühlen Str.  
99425 Weimar, Germany

**Andrey V. Korgin**, Professor  
Structure Testing Department  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vadim G. Korneev**, Professor  
Dept. of Math. and Mechanics  
St. Petersburg State University  
198904, St. Petersburg, Russia

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo,  
117526, Russia

**Pierre Ladeveze**, Professor  
Lab. de Mecanique et Technologic  
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.  
Paris VI, 61 Av. du President Wilson  
94235 Cachan Cedex, France

**Ralf Lindberg**, Professor  
3, Korkehoukuntatu,  
33101, Tampere, Finland

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya Pl.,  
634003 Tomsk, Russia

**Herbert Mang**, Professor  
Inst. Fur Haustatiken und  
Festigkeitslehre  
Techische Universitaet Wien  
13, Karlsplatz,  
A-1040 Wien, Austria

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vladimir I. Myachenkov**, Professor  
Department of Strength of Materials  
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"  
3a, Vadkovsky Per.,  
104472 Moscow, Russia

**L'Eugenio Onate**, Professor  
E.T.S. Ing. Caminos  
Jorge, Girano Salgado, 31-08034  
Barcelona, Spain

**Vladimir A. Palmov**, Professor  
Physical-Mechanical faculty  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Polytechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Stan Pietruszczak**, Professor  
Department of Civil Engineering  
McMaster University  
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing

**Ekkerhard Ramm**, Professor  
University of Stuttgart  
Institute for Baustatik  
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,  
Germany

**E. Daya Reddy**, Professor  
University of Cape Town  
Department of Applied Mathematics  
7700 Rondebosch, South Africa

**Sunil Saigal**, Professor  
National Science Foundation  
4201 Wilson Blvd.,  
Arlington, VA 22230, USA

**Vadim N. Savostyanov**, Professor,  
Department of Applied Mechanics  
and Mathematics, Moscow State  
Univ. of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Bernhard A. Schrefler**, Professor  
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.  
Via, Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Department of Comp. Aided Design  
Moscow State Univ. of Railways  
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,  
101475 Moscow, Russia

**D.V. Singh**, Professor  
Vice chairman all India council for  
Technical Education, New Delhi,  
India

**Wacław Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Nils-Eric Wiberg**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Chalmers University of Technology  
S-41296 Goteborg, Sweden

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wroclaw University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wroclaw, Poland

**Peter Wriggers**, Professor  
Technical School of Department  
1, Hochschulstrabe,  
D-6100 Darmstadt, Germany

## INVITED REVIEWERS

**Akimbek A. Abdikalikov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov  
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

**Jan Buynak**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Ján Čelko**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Sergiy Yu. Fialko**, Professor, Dr.Sc.,  
Cracow University of Technology  
Warszawska 24 St., 31-155 Kraków, Poland

**Marek Iwański**, Professor, Dr. hab., Ing.,  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

**Konstantin I. Khenokh**, Ing.  
General Dynamics C4 Systems,  
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

**Christian Koch**, Dr.-Ing.  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Markus König**, Professor, Dr.-Ing.,  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Amirlan A. Kusainov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering  
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043 Almaty, Republic of Kazakhstan

**Nikolai P. Osmolovskii**, Professor, Dr. hab.  
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom  
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

**Jerzy Zbigniew Piotrowski**, Professor, Dr. hab., Ing.,  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

**Josef Vičan**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij} . \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

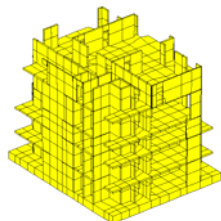


Figure 1

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

**to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

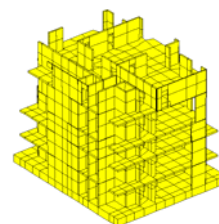


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

#### ➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
кафедра информатики  
и прикладной математики,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

#### ➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
Научно-образовательный центр  
компьютерного моделирования  
уникальных зданий, сооружений  
и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- <sup>1)</sup> Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com.
- <sup>2)</sup> Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* pavel.akimov2@gmail.com.
- <sup>3)</sup> Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* niccm@mgsu.ru.

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 9, Issue 3*

*2013*

---

TABLE OF CONTENTS

<b>About Influence of Moisture on Stress State of Soil Taking into Account Inhomogeneity</b> <i>Vladimir I. Andreev, Anatoliy S. Avershyev</i>	<u>14</u>
<b>Fracture Toughness Prediction by means of indentation test</b> <i>Julia S. Bakhracheva</i>	<u>21</u>
<b>Research on the Impact of Dwelling Design and the Effects of Domestic Gas Explosion on the Deformation and Destruction of Structures</b> <i>Galina G. Kashevarova, Andrei A. Pepeliaev, Marina V. Grigorieva</i>	<u>25</u>
<b>Calculation of the Pursuit Curve Length</b> <i>Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov</i>	<u>31</u>
<b>Six-Dimensional Formalism for Lamb Waves in Anisotropic Plates</b> <i>Sergey V. Kuznetsov</i>	<u>40</u>
<b>Oscillations of Earth Dams with Account of Geometric Nonlinearity</b> <i>Merziyed M. Mirsaidov, Tokhirjohn Z. Sultanov, Dadakhan A. Khodzhaev</i>	<u>51</u>
<b>Application of Robust Estimation Methods for Calculation of Piles Ultimate Resistance</b> <i>Zbigniew Muszynski, Jaroslaw Rybak</i>	<u>61</u>
<b>The Algorithm for Nonlinear Inelastic Optimization of 3D Steel Frameworks Under Serviceability Requirements</b> <i>Michail Popov, Romanas Karkauskas, Liudvikas Rimkus</i>	<u>68</u>
<b>Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>78</u>
<b>Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>87</u>

- Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела** 111  
*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*
- Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины** 132  
*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*
- Способ созданий конечных элементов высокого порядка** 152  
*М.П. Саинов*

## ABOUT INFLUENCE OF MOISTURE ON STRESS STATE OF SOIL TAKING INTO ACCOUNT INHOMOGENEITY

*Vladimir I. Andreev, Anatoliy S. Avershyev*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This paper contains the problems caused by the uneven distribution of moisture in the soil. As an example, the problem of rupture of the pipe is solved in a cylindrical formulation. The problem is solved in a stationary and non-stationary formulations taking into account changes the modulus of elasticity of soil moisture. The problem is reduced to a differential equation with variable coefficients. This complicates the solution of the problem compared with the solutions for constant modulus of elasticity, but it provides a more accurate solution.

**Key words:** soil, clay, swelling, moisture, moisture-conductivity, moisture-elasticity, forced deformation, stress state, inhomogeneity

### THE PROBLEMS CAUSED BY THE DISTRIBUTION OF MOISTURE IN THE SOIL

Soil is multicomponent environments which structure includes solid particles and pores. Particle sizes range from large (rock formation the size of  $> 2$  mm) to small (clay particles  $< 0.005$  mm). Pores are formed by liquid and air. Usually liquids are water solutions of salts. Volume fractions of the phases of soil determine its physical and mechanical properties.

Moisture is the ratio of water mass to the mass of solid particles:  $w = m_w/m_s$ . Change of moisture promotes occurrence forced swelling strains  $\varepsilon_w$ , so that there are such things as swelling (when moistening) or draft (when drying) soils. These processes take place because of the presence capillary forces between the soil particles and liquid. Swellable soils are so clay soils, which are in increasing their moisture increase in volume and value of the index

$$P = (e_L - e_0)/(1 + e_0) \geq 0.03,$$

where  $e_0$  – the coefficient of porosity of soil of natural and moisture;  $e_L$  – the coefficient of porosity at moisture on fluidity border [1].

Increase in moisture and swelling can be caused by surface water infiltration (of atmospheric precipitation) or leaking of plumbing and sanitary.

Some clay soils don't swell when soaking by water, however swell when soaking by chemical solutions, for example solutions of acids and alkalis. In this case swelling can be even stronger. Leakages of the sewer waters saturated with solutions of organic substances also can cause strong swelling.

On swelling indirectly affect phase fraction of clay particles in the soil and the concentration of dissolved salts in the unbound water [2].

The temperature increase of soil connected with leakages of hot water or with hyperthermal technological processes causes strengthening of swelling or leads to swelling of soil which don't swell at natural temperatures. Thus in bulking-up soil moisture migration in the direction of a source of the increased temperature, a similar migration of moisture in heaving soil during freezing to the freezing front.

In the foundations of the buildings and constructions of different function is always a complementary (to natural) moisture, even in that case when soaking as a result of leakages is absent. In this case, the additional moisture due to the so-called "screening effect" the basis under structure as a result of violations of the processes of natural aeration of the base. In such cases moisture of soil inevitably increases to some established, final moisture which is in balance with a construction weight [1].

## MOISTURE FROM THE POINT OF VIEW OF MATHEMATICS

In 1855 A. Fick received the diffusion equation which is known as Fick's second law. This law is just for the description distribution of the field of moisture [3,4]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_w \cdot \nabla^2 w, \quad (10)$$

$c_w$  – the coefficient of moisture-conductivity, you were calculated using the formula [5]:

$$c_w = \frac{k_w \cdot \alpha \cdot (1 + e)}{\gamma_s},$$

when  $k_w = k_f \cdot (w/w_s)^i$  – the coefficient of filtration of discontinuous flow,  $k_f$  – the coefficient of filtration of continuous flow,  $w_s$  – moisture saturated clay,  $i$  – a relative ice content,  $\alpha$  – a proportionality coefficient,  $e = n/(1 - n)$  – the coefficient of porosity of soil,  $n$  – porosity of soil,  $\gamma_s$  – the density of the soil particles.

As moisture and temperature distribution in bodies are described by similar laws then the solution of problems moisture-conductivity can use ready solutions of problems of temperature-conductivity a lot of which is given in [6].

The entry condition in a problem of moisture-conductivity content represents moisture distribution in an initial timepoint, i.e.  $w(x_1, x_2, x_3, t_0) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ . Usually for soil initial distribution of moisture is constant also equal to natural moisture of soil:

$$w(x_1, x_2, x_3, t_0) = w_0 = const.$$

From boundary conditions is more often than the others use boundary conditions of the first kind - distribution of the moisture on the surface at any time, i.e.  $w_{\text{surf}}(t) = f(t)$ .

Consideration of symmetry and stationarity significantly simplifies problem. In reality, the stationary regime is reached after a large amount of time at constant boundary conditions.

## SOLUTION OF PROBLEMS MOISTURE-CONDUCTIVITY ON THE EXAMPLE OF BREAKING THE PIPE

In solution of the problem of breaking the pipeline can be used axial or central symmetry. Let's stop on the problems with axial symmetry. Let on the internal radius  $a$  of the cylindrical massif there was rupture of a pipe. External radius is equal to  $b = 10 \cdot a$ . The problem is solved with the following initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} w(r, 0) &= w_b, \\ w(a, t) &= w_a = \kappa \cdot w_b, \\ w(b, t) &= w_b. \end{aligned}$$

We will solve the problem in dimensionless variables:

$$t = \frac{a^2}{c_w} \cdot \tau, \quad r = a \cdot \rho. \quad (2)$$

Fick's law (1) taking into account the axis of symmetry and the replacements (2) will become:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho}.$$

### Stationary solution

In the solution in a stationary mode when  $\partial w / \partial \tau = 0$ , the distribution of moisture will be:

$$w(\rho) = \frac{w_b \cdot \ln(\rho / \rho_a) - w_a \cdot \ln(\rho / \rho_b)}{\ln(\rho_b / \rho_a)}, \quad (3)$$

where  $\rho_a$  and  $\rho_b$  correspond to the values of the variable  $\rho$  on  $a$  and  $b$  borders.

### Non-stationary solution

Non-stationary solution will be sought in form [6]:

$$w(\rho, \tau) = \theta(\rho) + \vartheta(\rho, \tau), \quad (4)$$

where  $\theta(\rho)$  satisfies to the equation

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\theta}{d\rho} = 0 \quad (5)$$

and to the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \theta(\rho_a) &= w_a, \\ \theta(\rho_b) &= w_b. \end{aligned} \quad (6)$$

The function  $\vartheta(\rho, \tau)$  satisfies to the equation

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \quad (7)$$

and the following initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho, 0) &= w_b, \\ \vartheta(\rho_a, \tau) &= w(\rho_a, \tau) - \theta(\rho_a) = 0, \\ \vartheta(\rho_b, \tau) &= w(\rho_b, \tau) - \theta(\rho_b) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

When performing conditions (5) – (8) equality (4) will be fair.

Let's find the solution for function  $\theta(r)$  with using (5) and (6):

$$\theta(\rho) = \frac{w_b \cdot \ln(\rho / \rho_a) - w_a \cdot \ln(\rho / \rho_b)}{\ln(\rho_b / \rho_a)}.$$

Let's find the solution for function  $\vartheta(\rho, \tau)$  by means of a method of division of variables, using (7) and (8):

$$\vartheta(\rho, \tau) = R(\rho) \cdot T(\tau).$$

We get:

$$R \cdot \partial T / \partial \tau = \partial^2 R / \partial \rho^2 \cdot T + \partial R / \partial \rho \cdot T / \rho.$$

After the transformation:

$$\frac{\partial T / \partial \tau}{T} = \frac{\partial^2 R / \partial \rho^2 + (\partial R / \partial \rho) / \rho}{R}. \quad (9)$$

Left hand side of equality depends only on  $\tau$ , and the right only on  $\rho$ . Equality (9) will be fair only when both parts of equality don't depend neither from  $\tau$ , nor from  $\rho$ , i.e.:

$$\frac{\partial T / \partial \tau}{T} = \frac{\partial^2 R / \partial \rho^2 + (\partial R / \partial \rho) / \rho}{R} = A = const.$$

Constant  $A$  we will replace with expression  $-k^2$  to show that it is negative. If it was positive then the function of moisture increases without limit in time, which is contrary to the physics of considered process.

After the calculation:

$$\begin{aligned} T(\tau) &= B \cdot \exp(-k^2 \cdot \tau), \\ R(\rho) &= C_1 \cdot J_0(k \rho) + C_2 \cdot Y_0(k \rho). \end{aligned}$$

We get:

$$\vartheta(\rho, \tau) = [C_1 \cdot J_0(k \rho) + C_2 \cdot Y_0(k \rho)] \cdot \exp(-k^2 \cdot \tau)$$

From the boundary conditions (8) imply:

$$\begin{cases} C_1 \cdot J_0(k \cdot \rho_a) + C_2 \cdot Y_0(k \cdot \rho_a) = 0, \\ C_1 \cdot J_0(k \cdot \rho_b) + C_2 \cdot Y_0(k \cdot \rho_b) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

The system will have a non-trivial solution if its determinant is equal to 0:

$$\begin{vmatrix} J_0(k \cdot \rho_a) & Y_0(k \cdot \rho_a) \\ J_0(k \cdot \rho_b) & Y_0(k \cdot \rho_b) \end{vmatrix} = 0$$

or

$$J_0(k \cdot \rho_a) \cdot Y_0(k \cdot \rho_b) - J_0(k \cdot \rho_b) \cdot Y_0(k \cdot \rho_a) = 0. \quad (11)$$

Bessel functions are aperiodic and have an infinite number of roots. Therefore, the function  $\vartheta(\rho, \tau)$  will be a fundamental system of solutions. Function  $\vartheta(\rho, \tau)$  taking becomes:

$$\vartheta(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 \cdot J_0(k_n \cdot \rho) + C_2 \cdot Y_0(k_n \cdot \rho)] \times \exp(-k_n^2 \cdot \tau).$$

Function of moisture taking into account (4) becomes:

$$w(\rho, \tau) = \frac{w_b \cdot \ln(\rho / \rho_a) - w_a \cdot \ln(\rho / \rho_b)}{\ln(\rho_b / \rho_a)} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 \cdot J_0(k_n \cdot \rho) + C_2 \cdot Y_0(k_n \cdot \rho)] \times \exp(-k_n^2 \cdot \tau).$$

Having expressed by means of the first equality (10)  $C_2$  through  $C_1$ , and also having used properties of Bessel functions, we will write out in a general view expression for moisture function:

$$w(\rho, \tau) = \frac{w_b \cdot \ln(\rho / \rho_a) - w_a \cdot \ln(\rho / \rho_b)}{\ln(\rho_b / \rho_a)} + \pi \cdot (w_a - w_b) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k_n^2 \cdot \tau) \cdot J_0^2(k_n \cdot \rho_b) \times \frac{J_0(k_n \cdot \rho) \cdot Y_0(k_n \cdot \rho_a) - J_0(k_n \cdot \rho_a) \cdot Y_0(k_n \cdot \rho)}{J_0^2(k_n \cdot \rho_a) + J_0^2(k_n \cdot \rho_b)}. \quad (12)$$

where  $k_n$  – the eigenvalues of the fundamental system of solutions that are out of the equation (11).

Of course, it is impossible to consider infinitely large number of members of a row therefore the question of the speed of convergence of the solution with limited number  $n$  of terms of a row (fig. 1 a, b, c) is raised.

It is impossible to be limited to one term of a row (fig. 1 a) as in this case, the solution doesn't correspond to initial distribution of moisture ( $w_0 = const$ ). At number of terms of the row, equal to ten (fig. 1 b), in an initial timepoint are traced too big deviations of moisture from the situation  $w_0 = const$ . Satisfactory convergence solutions is monitored only when the number terms of the series  $n_{max}=100$  (fig. 1 c). Also the solution (3) and the solution (12) at  $n_{max}=100$  are submitted in fig. 2 [7], where it is possible to

trace that over time function to seek to pass to a stationary mode.

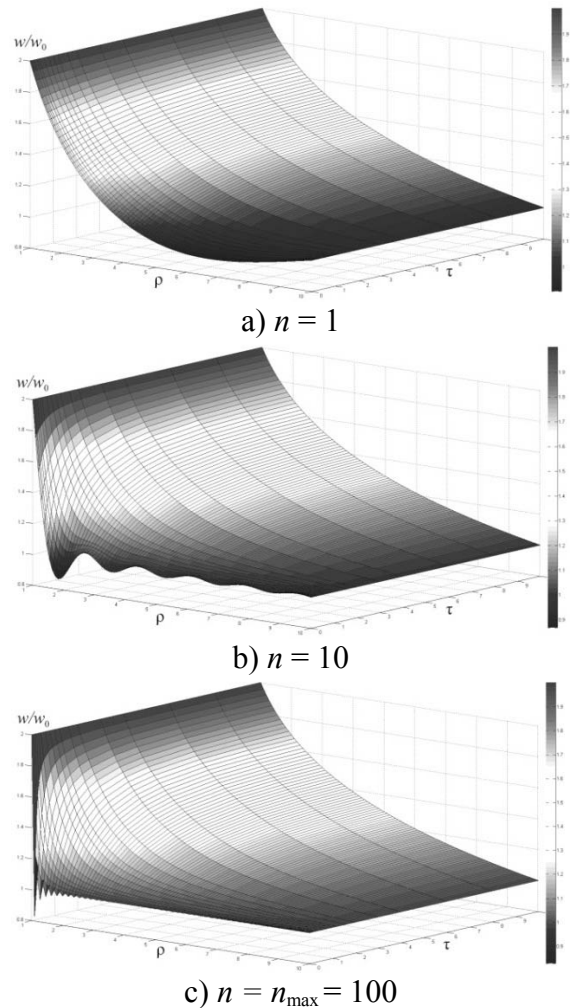


Fig. 1. Non-stationary moisture distribution with a different number of terms of a row.

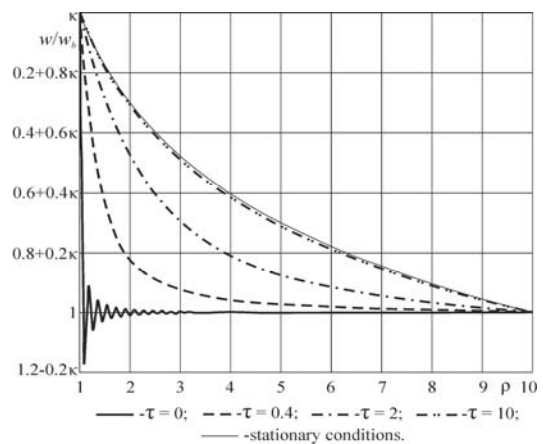


Fig. 2. Moisture distribution along the radius at various time points.

**PROBLEM OF MECHANICS**

In many works devoted to research of swelling of soil, shows the experimental dependences of the modulus of elasticity on moisture [8, 9]. However, most of the problems in the mechanics for the moistened soil are solved for the case where  $E=const$ , where  $E$  is defined as a mean value. Fig. 3 shows typical dependence of the modulus of elasticity of clay on moisture [9].

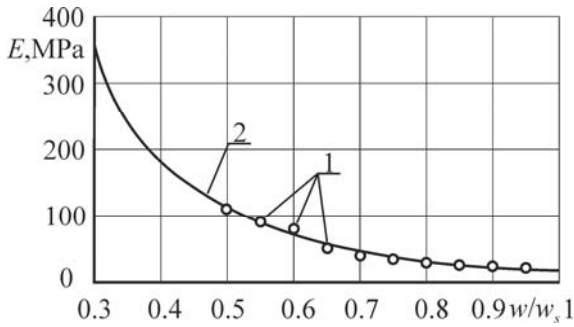


Fig. 3. Dependence of the modulus of elasticity of the clay on the relative moisture. 1 – experimental data; 2 – approximating dependence.

This relationship can be approximated by a power function of the form:

$$E(w) = E_0 \cdot (w/w_s)^{-\delta}.$$

Forced strains of swelling are on a formula similar to the formula for finding the temperature deformations:

$$\varepsilon_w = \int_{w_0}^w \beta_{sw}(w)dw,$$

where  $\beta_{sw}(w)$  – the coefficient of swelling in the general view dependent on moisture, but usually taken for a constant:  $\beta_{sw} = const$ .

The resulting equation of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies for plane deformation state in the presence of the forced deformations  $\varepsilon_B$  is given in many sources, for example, in [10]. If the Poisson's ratio  $\nu$  is constant, and  $\varepsilon_B = \varepsilon_w$ , the equation in dimensionless coordinates becomes:

$$\frac{d^2\sigma_r}{d\rho^2} + \left(\frac{3}{\rho} - \frac{E'}{E}\right) \cdot \frac{d\sigma_r}{d\rho} - \frac{E'}{E} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_r}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{E}{1-\nu} \cdot \varepsilon_w'$$

The problem of moisture-elasticity was solved in stationary and non-stationary formulation for clay with the following values of parameters:

$\rho_a = 1, \rho_b = 10, w_s/w_0 = 1.815, w_a = w_s, w_b = w_0, E_0 = 19.88 \text{ MPa}, \delta = 2.4, \beta_{sw} = 0.6, \nu = 0.4, \sigma_r(\rho_a) = 0, \sigma_r(\rho_b) = -\gamma \cdot H, \gamma = 2695 \text{ kN/m}^3, H = 10 \text{ m}.$

**Stationary solution**

At the solution of a stationary problem of moisture-elasticity with distribution of moisture (3) the reader can see how very different stress distribution, at the accounting of inhomogeneity and without taking into account when the modulus of elasticity is averaged on a formula:

$$E_{av} = \frac{\int_{\rho_a}^{\rho_b} E(w(\rho))dr}{\rho_b - \rho_a},$$

The analytical solution can be only in the case of the homogeneous problem when  $E = E_{av}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E \cdot \beta_{sw} \cdot (w_a - w_b)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{\ln(\rho/\rho_a)}{\ln(\rho_b/\rho_a)} + \\ &+ \frac{\rho_b^2}{\rho_b^2 - \rho_a^2} \cdot \left[ \frac{\rho_a^2}{\rho^2} - 1 \right] \cdot \left[ \gamma \cdot H + \frac{E \cdot \beta_{sw} \cdot (w_a - w_b)}{2 \cdot (1-\nu)} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E \cdot \beta_{sw} \cdot (w_a - w_b)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{\ln(\rho/\rho_a)}{\ln(\rho_b/\rho_a)} - \\ &- \frac{\rho_a^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho_b^2}{\rho_b^2 - \rho_a^2} \cdot \left[ \gamma \cdot H + \frac{E \cdot \beta_{sw} \cdot (w_a - w_b)}{2 \cdot (1-\nu)} \right] + \\ &+ \frac{E \cdot \beta_{sw} \cdot (w_a - w_b)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \left[ \frac{1}{\ln(\rho_b/\rho_a)} - \frac{\rho_b^2}{\rho_b^2 - \rho_a^2} \right] - \\ &- \gamma \cdot H \cdot \frac{\rho_b^2}{\rho_b^2 - \rho_a^2} \end{aligned}$$

In fig. 4 and 5 [11, 12] stress state of the thick-walled cylinder from the clay, arisen from

swelling and external pressure  $\sigma(\rho_b) = -\gamma \cdot H$  in cases of homogeneous and inhomogeneous process of swelling:

In the homogeneous case we obtain the identity, and in an inhomogeneous error is the 100-th share of percent.

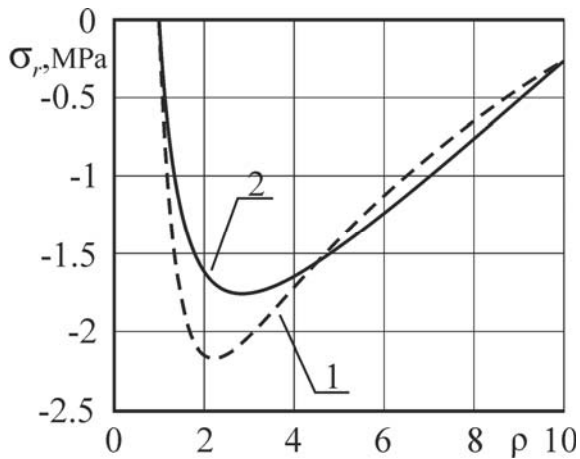


Fig. 4. Radial stresses diagrams in the stationary problem.

1 – Homogeneous material ( $E = E_{av}$ );  
2 – Inhomogeneous material ( $E = E(w)$ )

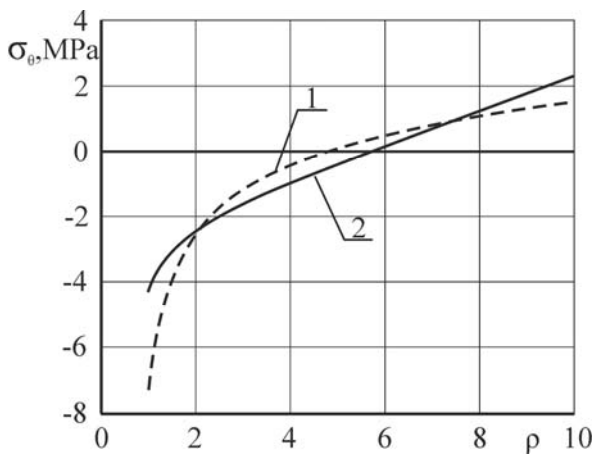


Fig. 5. Hoop stresses diagrams in the stationary problem.

1 – Homogeneous material ( $E = E_{av}$ );  
2 – Inhomogeneous material ( $E = E(w)$ )

To verify the results we did static test which consists in equilibrium half cylinder array under stresses  $\sigma_\theta$  and external loads. The test consists of the equality:

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \sigma_\theta(\rho) d\rho = -\rho_a \cdot \sigma_r(\rho_a) + \rho_b \cdot \sigma_r(\rho_b) \quad (13)$$

**Non-stationary solution**

As the speed of distribution of a field of moisture much smaller than a speed of distribution of elastic waves in the considered environment, and a generating factor of the stress-deformed state is only a field of moisture and external pressure in a non-stationary problem it is possible to consider that environment particles move to each timepoint instantly. It means that for a conclusion of the allowing equation can be used the statics equations, and time ( $t$  or  $\tau$ ) will be included in it as a parameter. Non-stationary solution with a large number members of the series the Bessel functions ( $n_{max}=100$ ) is shown in fig. 6 and 7 [13].

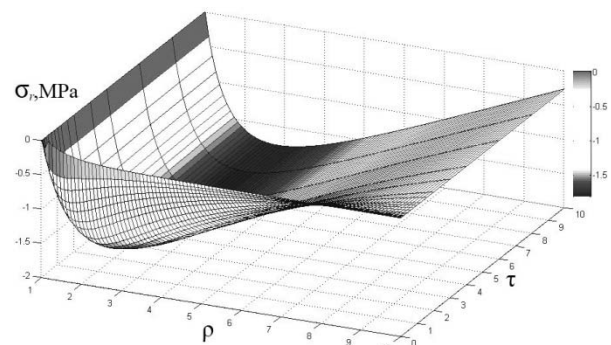


Fig. 6. The distribution of radial stresses in the non-stationary problem

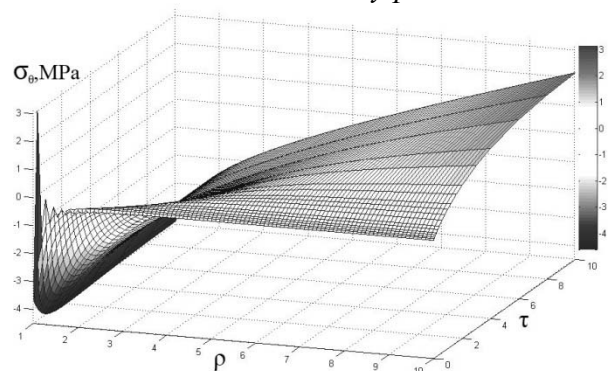


Fig. 7. The distribution of hoop stress in the non-stationary problem.

To verify the results we also did static test (13) for each timepoint and the maximum error is 2 % at  $\tau = 0.4$ .

## CONCLUSIONS

In conclusion we can say that in solving the problem of moisture-elasticity for definition of a field of moisture the right choice of regional conditions that they corresponded to real process. It is very important for receiving adequate result it is necessary to take rather big number of members of terms of Bessel functions as well as the solution (12) converges slowly. Also at the solution of a problem of moisture-elasticity all factors creating inhomogeneity in the solution of a problem of mechanics must be considered that fig. 5 shows. Fig. 5 shows that by consideration of inhomogeneity of the modulus of elasticity the plus hoop stress most dangerous to soil increases by 1,53 times compared to the homogeneous problem.

## REFERENCES

1. **Golly O.R.** Using the laws of swelling clay soils in construction. Reconstruction of cities and geotechnical construction №8 (2004), pp. 131-141.
2. **Sorochan E.A.** Building structures on swelling soils. Moscow: Construction publ., p. 310, 1989.
3. **Lykov A.V.** Transport phenomena in capillary-porous bodies. Moscow: State publ. technical-theoretical literature, p. 296, 1954.
4. **Fedosov S.V.** Heat and mass transfer in technological processes of construction industry. Ivanovo: Publishing and Printing Complex «PresSto», p. 364, 2010.
5. **Ter-Martirosian Z.G.** Soil mechanics, Publ. house ASV: Moscow, pp. 365–371, 2005
6. **Lykov A.V.** The theory of heat conduction. High School: Moscow, p. 600, 1967.
7. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** Moisture-elasticity of thick-walled inhomogeneous cylinder with non-stationary moisture regime. Structural mechanics of engineering structures and buildings (RUPF) №2 (2013), pp. 20-25.
8. **Davydov V.A.** Features of survey and design of roads in permafrost regions, Omsk PI: Omsk, pp. 44-56, 1979.
9. ODN 218.046-01. Design of non-rigid pavement. 2000
10. **Andreev V.I.** Some problems and methods of mechanics of inhomogeneous bodies. Moscow: Publishing House of the ASV: Moscow, p. 286, 2002.
11. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** On accounting mechanical heterogeneity in solving problems of moisture transfer in soils. Proc. of the XXI Russian – Slovak – Polish seminar “Theoretical foundation of civil engineering”, pp. 87-92, 2012.
12. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** Stationary Problem of Moisture-elasticity for Inhomogeneous thick-walled Shells. Advanced Materials Research Vols. 671-674, 2013, pp. 571-575.
13. **Andreev V.I., Avershyev A.S.** Nonstationary problem moisture elasticity for nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder. Transactions of International Conference on Fluid Structure Interaction. 10 - 12 April, 2013, WITpress, p.p. 123-132.

---

Vladimir I. Andreev, academician of Russian academy of architecture and building sciences, doctor of technical sciences, professor, head of a department “Strength of materials”, Federal State Educational Institution of High Professional Education “Moscow State University of Civil Engineering”, 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, Russia, tel.: +7(499)183-57-42, e-mail: asv@mgsu.ru

Anatoliy S. Avershyev, master-student, Federal State Educational Institution of High Professional Education “Moscow State University of Civil Engineering”, 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, Russia, tel.: +7(906)735-27-03, e-mail: fullbass-@mail.ru

# FRACTURE TOUGHNESS PREDICTION BY MEANS OF INDENTATION TEST

*Julia S. Bakhracheva*

Volgograd branch of Moscow State Transport University (MIIT), Volgograd, RUSSIA

**ABSTRACT:** The subject considered is the theoretical dependences between parameters in a small scale yielding zone length, and a plastic zone at cave-in spherical indenter. A method for estimating the fracture toughness  $K_{Ic}$  through the results of ball indentation testing is suggested. The model proposed can be used for predicting the cracking resistance of the machine elements in a low temperature range.

**Keywords:** machine elements, low temperature, fracture toughness, ball indentation testing, intensity of plastic deformation, specific plastic strain energy

## 1. INTRODUCTION

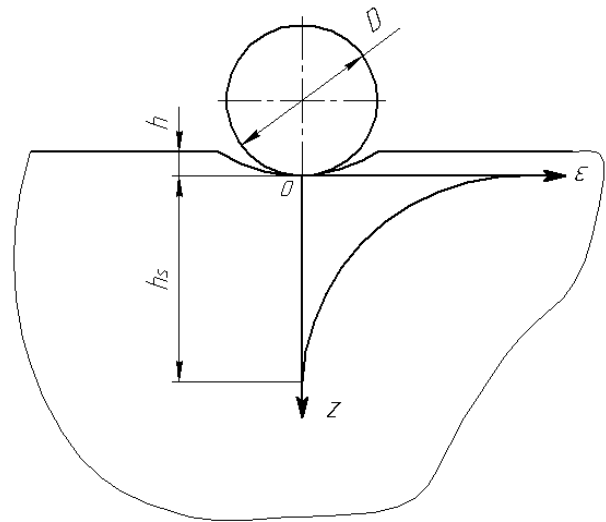
All characteristics of a material at various kinds of mechanical tests are macroscopical displays of its concrete physical nature, features of structure and a chemical compound. Therefore resistance of weariness, fracture toughness, properties at a tensile test, contact deformation by all means should be connected with each other.

Is known that increase in strength of a material usually is accompanied by reduction of plasticity and fracture toughness. It occurs because at high-strength materials the energy absorbed at destruction is small. The level of this energy is determined by the size of small scale yielding zone. If at introduction indenter in a surface of a counterbody in a zone of contact there is a residual dent around of it always there is plastically deformed area extending on some depth  $h_s$ . This area is limited to the closed surface on which the condition of plasticity is satisfied  $\sigma_r = \sigma_T$  (Fig. 1).

Observable at increase strength, decrease in temperature, increase in speed of deformation reduction of plastically deformed volume (so also works of plastic deformation) at tests for hardness and fracture toughness are investigation of the same phenomenon: decrease reductions in mobility of dislocations.

In works [1, 2] the method of calculation of the specific surface plastic strain energy  $\gamma_p$  in a small scale yielding zone before front of a

crack has been offered. Existence of dependence between  $K_{Ic}$  and  $\sqrt{\gamma_p}$  a wide temperature range for steels having various structures and levels of mechanical properties is shown. If between power parameters of plastic zones at top of a crack and at cave-in spherical indenter connection will be established. It will appear an opportunity for predicting the cracking resistance of metals through the results of ball indentation testing will appear will be established.



*Fig. 1. Distribution of deformations under a residual print at introduction spherical indenter*

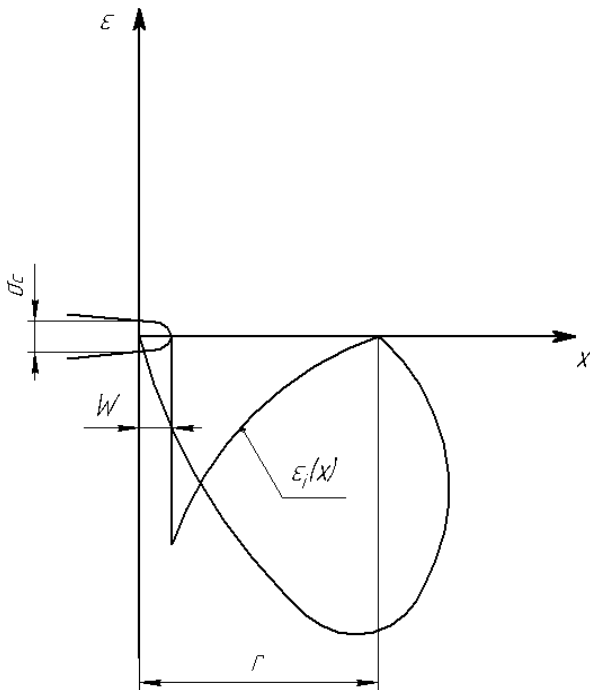


Fig. 2. Distribution of deformations in a plastic zone before top of a crack:  $W$  – stretch zone width

## 2. ANALYSIS

Depth  $h_s$  is determined as

$$h_s = \sqrt{\frac{P}{2\sigma_y} - 1.2\left(\frac{d}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

where –  $P$  - the enclosed loading,  $\sigma_y$  – yield stress,  $d$  - values of diameters of residual prints.

For construction of the generalized curve of current  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  in a plastic zone under a print along an axis of cave-in it is necessary to calculate the current values of intensity of pressure in the center of contact  $\sigma_i$  at each value of loading. In work [3] the size of intensity of stress in the center of contact  $\sigma_i$  was offered for determining as

$$\sigma_i = \frac{1.5Ap_0\varepsilon_i}{3\varepsilon_i + \exp[-1.5\varepsilon_{i0} + C(z-R)]}, \quad (2)$$

where  $p_0$  - pressure in the center of contact,  $R$  - radius of indenter,  $\varepsilon_i$  - intensity is elastic-plastic deformation,  $A$  and  $C$  - constants of a material.

$$\varepsilon_i = k \cdot h \cdot \exp(-k \cdot z), \quad (3)$$

where  $k$  - the parameter described by elastic properties of a material,  $h$  - depth of a print. Pressure in the center of contact is calculated as

$$p_0 = \left(1 + 0.25 \frac{d}{D}\right) HM, \quad (4)$$

where  $HM$  - hardness on Meyer.

Further the current values of energy of plastic deformation  $u_i$ , for any point on depth of distribution of a plastic zone expected at cave-in along an axis  $z$  from 0 up to  $h_s$

$$u_i = \frac{\sigma_y + \sigma_i}{2} \cdot \varepsilon_i, \quad (5)$$

where  $\sigma_i$  and  $\varepsilon_i$  - the current values of intensity of stress and deformations along an axis  $z$  on depth of distribution of a plastic zone at the cave-in, designed on known dependences.

Integrating dependence  $u_i(z)$  from 0 to  $h_s$ , of the eqn (5) gives the value of specific energy of plastic deformation on depth of a plastic zone at introduction spherical indenter:

$$u_p = \int_0^{h_s} u_i dx. \quad (6)$$

## 3. DISCUSSION

For verification of model data obtained in [4] for pressure vessel and pipeline steels (10G2FB, VSt3kp, 17GS, 17G1S-U, 06G2NAB, 15KH2MFA) were taken. The plane strain fracture toughness test, Charpy test and tension testing of steels were carried out by Krasowsky and Krasiko at the Institute of

Strength Problems (Kiev, Ukraine). Hardness measurements were then carried out at the Volgograd State Technical University (Russia) for work [5]. Experiments on contact deformation specified steels carried out spherical indenter in diameter  $D=5$  mm at loadings  $P$  from 150 to 11800 H and temperatures from 77 to 293 K on devices TSH-2 (Brinell) and TK-2 (Rockwell).

The plastic zone radius ahead of a crack is defined as

$$r = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{K_{IC}}{\sigma_y} \right]^2. \quad (7)$$

Comparison of values  $r$  and  $h_s$  has shown that the size of a plastic zone before front of a crack is more sensitive to decrease in temperature, than at cave-in indenter. Therefore it was offered to count, that the sizes of plastic zones correspond each other at temperature 77K load 150 N, 213 K - 1000 N, 243K - 5000 N, 293K - 11800 N.

The results of calculations of the eqn (6) are presented on Fig. 3. As can be seen from Fig. 3 the dependency of the specific surface plastic strain energy density,  $\gamma_p$ , on specific energy of plastic deformation on depth of a plastic zone at introduction spherical indenter, value for all steels investigated is described by single linear function.

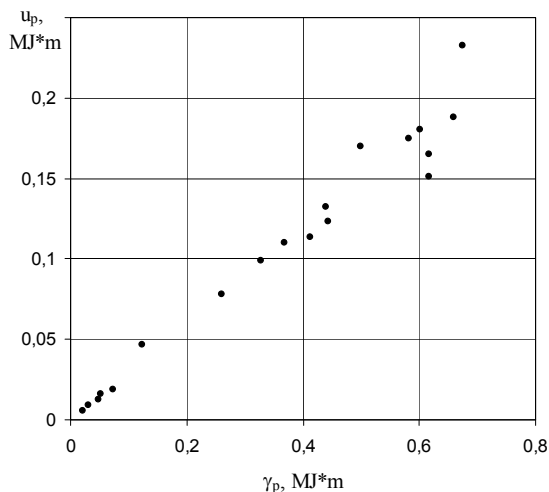


Fig. 3. The relationship between  $u_p$ , and  $\gamma_p$

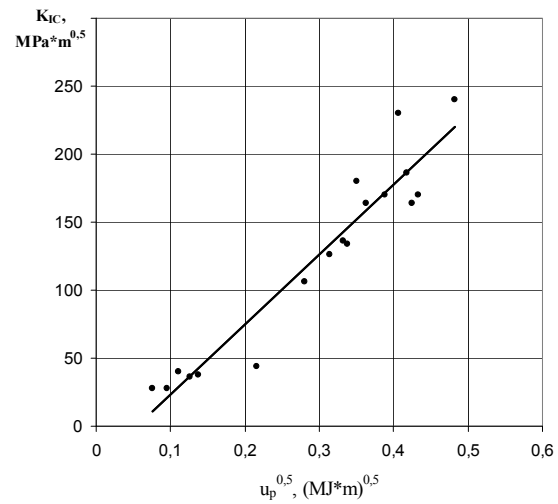


Fig. 4. The relationship between  $K_{IC}$ , and  $\sqrt{u_p}$

Analogous dependencies between fracture toughness  $K_{IC}$  and  $\sqrt{u_p}$  are presented on Fig. 4 [1, 2]. This relationship is shown on Fig. 4 and is described by the following equation:

$$K_{IC} = 514,01 \sqrt{u_p} - 27,785. \quad (8)$$

#### 4. CONCLUSIONS

The results obtained in this work supported the following conclusions.

The theoretical dependences between parameters in a small scale yielding zone length, and a plastic zone at cave-in spherical indenter is analyzed.

Analogous dependencies between fracture toughness  $K_{IC}$  and  $\sqrt{u_p}$  a wide temperature range is found [1, 2].

The discussed results provide the possibility of the cracking resistance of metals estimation through the results of ball indentation testing.

#### REFERENCES

1. **Baron A.A., Bakhracheva J.S.** The method for fracture toughness prediction through the value of specific plastic strain energy // *Mechanika – 2002: Proceedings*

- of the International Conference, Kaunas, 2002, pp. 218-222.
2. **Baron A.A., Bakhracheva J.S.** The Specific Surface Plastic Strain Energy as a Measure of Fracture Toughness // *Mechanika*, 2003, №6, pp. 20–25.
  3. **Drozd M.S., Osipenko A.P.** Analytical Research of an Intense Condition at Introduction of Elastic Sphere in Elastic-plastic Half-space. // *Metallurgical science and durability of materials: the Interuniversity collection of proceedings/ - Volgograd*, 1975, pp. 12-19.
  4. **Krasowsky A.J., Krasiko V.V.** Crack Resistance of Pipeline Steels. – Kiev: Naukova Dumka, 1990. – 176 pages (in Russian).
  5. **Baron A.A., Bakhracheva J.S.** Estimation of Propensity Steels to Fragile Destruction on Size of Critical Energy of Cave-in. // *Metallurgical science and durability of materials: the Interuniversity collection of proceedings/ - Volgograd*, 2005, pp. 82-89.

---

Bakhracheva Julia Sagidullova, Candidate of Technical Sciences, Senior lecturer, Department of Construction materials, and equipment Moscow State Transport University (MIIT), the Volgograd branch, Russia, 400120, 48, milisionera Buchansheva street, Volgograd, e-mail: bakhracheva@yandex.ru

Бахрacheва Юлия Сагидулловна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные материалы, машины и оборудование» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Волгоградский филиал, Россия, 400120, г. Волгоград, ул. им. милиционера Буханцева, 48, e-mail: bakhracheva@yandex.ru

# RESEARCH ON THE IMPACT OF DWELLING DESIGN AND THE EFFECTS OF DOMESTIC GAS EXPLOSION ON THE DEFORMATION AND DESTRUCTION OF STRUCTURES

*Galina G. Kashevarova, Andrei A. Pepeliaev, Marina V. Grigorieva*

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

**ABSTRACT:** Accidents caused by domestic gas explosion are known to occur regularly. Human factor is the main reason for these accidents and it can hardly be ignored. Explosion accidents inside buildings claim the development of methods to study the viability and collapse prevention of structures. The impact of explosion load on the premises depending on their design, different combinations of physical parameters and the computer-simulated loads is being investigated and the methods for mitigating the destructive effects of such explosions. The intensity of the explosion load was determined by means of the FlowVision programming suite with using the method of finite volumes. To study the effect of domestic gas explosion loads on supporting structures, as well as to identify the most critical parameters ensuring the building safety, computing experiments based on the finite-element programming suite ANSYS were conducted. The analysis of the data obtained proves that when the equivalent static load is taken into account, the results of calculation differ from the results based on the dynamic effect of the load both in qualitative and quantitative terms. The availability of window and door openings allows to decrease shock impact on the structure/

**Key words:** deflagration explosion, domestic gas, building accidents, numerical modeling

## INTRODUCTION

Explosion accidents inside buildings claim the development of methods to study the viability and collapse prevention of structures. For the most part, explosion accidents are caused by deflagration. The impact of explosion load on the premises depending on their design, different combinations of physical parameters and the computer-simulated loads is being investigated.

Explosion accidents inside buildings, which more frequently occur compared to other types of explosions, are usually caused by deflagration rather than detonation. This fact determines both the methods of forecasting explosion loads/effects and the methods for mitigating the destructive effects of such explosions. Deflagration explosion is the process of subsonic burning which forms a fast-moving zone (front) of chemical transformations. The energy is transferred in the direction of the motion of the front and results from heat transfer, unlike in the case of

detonation, when the transformation zone is spread at a supersonic speed and the energy transfer is caused by shock compression.

The specific nature of deflagration explosion is the following: where moving, the flame front creates a compression wave ahead of itself. This wave becomes weaker proportionately to the distance it has covered. As the speed at which the flame is spread is much less than that of sound ( $3m/sec$ ), the quasi-static principle of excessive pressure applies here, which means that the explosion load does not depend on the space coordinate. In other words, the pressure that affects any construction element (walls, ceiling, floor, doors etc.) at the moment of explosion, is the same at any point of the room [1].

To study the effect of domestic gas explosion loads on supporting structures, as well as to identify the most critical parameters ensuring the building safety, computing experiments based on the finite-element programming suite ANSYS were conducted. The intensity of the explosion load was determined by means of the

*FlowVision* programming suite, which allows hydrogasdynamic problems to be solved using the method of finite volumes [2] and for attendant problems – those in which the flow and a deformed body interact – using finite-element computer programs [3].

## 1. SIMULATION OF PREMISES AND CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE STRUCTURES IN THE EXPLOSION OF DOMESTIC GAS

Different types of premises were considered (fig. 1): a closed room without openings; a room with a window and a closed door; a room with a window and an open door. Apart from doing this, various engineering solutions for intermediate floors were studied: a concrete slab fastend at two opposite sides and a slab fastened on the perimeter.

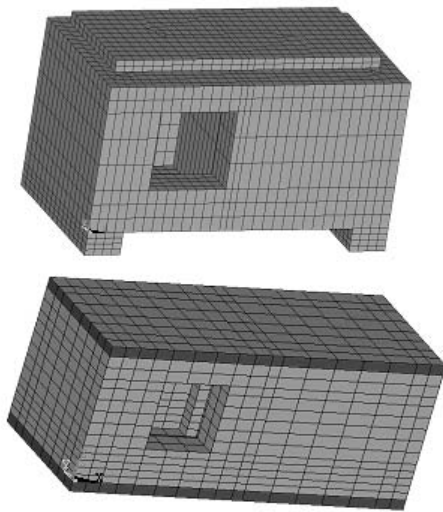


Fig. 1. Computer-aided models of kitchen design

Finite-element models of the rooms where domestic gas explosion occurred were made using volume finite elements, SOLID65, with a bilinear approximation.

When creating a finite-element model we used an effective algorithm which enabled us to

easily assign parameters for a finite-element grid. The algorithm consists of the following steps: the selection of the two-dimensional area, divided into finite elements, and then the assignment of the element size as well as the volume and the pitch of extrusion. As a result, the grid is more regular and individual elements have no sharp angles and shapes which might otherwise cause substantial errors in calculations.

As an indoor deflagration explosion is characterized by the same pressure at any point of the room and at any moment of time, the explosion load of 6 kPa, obtained by the solution of a hydrogasdynamic problem [4 - 6], was applied to all the surfaces of the room.

All calculations were done taking into account the dynamic explosion load in the form of an impulse signal and the equivalent static load taking into account a normative dynamic-response factor of 1,8 [7].

The loads on load-bearing walls caused by upper floors (500 kN/m<sup>2</sup>), the loads on non-load-bearing walls (100 kN/m<sup>2</sup>), and the distributed temporary load on the slab (5 kN/m<sup>2</sup>) were also taken into account. The material of the walls was brick masonry (ceramic brick M 100 and mortar M 50); the material of the slabs was reinforced concrete (concrete class B20).

To calculate the dynamic load effect we used the implicit scheme of integrating the equations of motion. To estimate the time of the dynamic load exposure on the structure, modal analysis of the design model was carried out. The increment in the load in time was calculated using the equation (1):

$$\Delta t = \frac{1}{N \cdot f}, \quad (1)$$

where:  $N \geq 20$  is the number of points per cycle;  $f$  is the highest frequency which is relevant to.

Another objective of the research was to study the influence of the material destruction process on the type of the stress-strain deformation of structural elements. To take into account the

non-linear effects of materials in critical correlation, two computational models were used: the William and Ranke models of concrete breakdown implemented by means of the ANSYS software suite, and a generalized model of the elastic-brittle failure of brick masonry orthotropic material – the latter was developed by the group of research engineers of Perm State Technical University working under the leadership of professor G.G. Kashevarova [8 - 11].

In the course of tackling this physically non-linear problem, which implies the probability of elastic-brittle destruction, the following values were considered as given: single-axle compression limit of brick masonry equaling  $6.38E6$  Pa, single-axle compression limit of concrete equaling  $11.5E6$  Pa (concrete class B20); single-axle tensile strength of brick masonry equaling  $0.5E6$  Pa, single-axle tensile strength of concrete equaling  $0.9E6$  Pa (concrete class B 20); shear transfer coefficient for an open crack – 0.2, and shear transfer coefficient for a closed crack – 0.6. The residual strength after the cracking was taken into account by applying the three-way model of non-linear structural analysis KINH. As a criterion of strength the following was assumed: the destruction in material occurs only when strain intensity (the second invariant of strain tensor) becomes critical. For the material under deformation four types of stress-strain conditions were considered.

## 2. CALCULATION RESULTS

Figures 2, 3 illustrate the computational experiments results of stress intensity under a dynamic and equivalent static load effect for different constructive solutions. Figures 4 illustrate isofields of stress intensity (a) and cracking and crushing locations in structural elements under dynamic load effect with an allowance for physical non-linearity of material properties (b).

To obtain these results we used computational models applied to different premises for the same moment of time corresponding to the maximum values of stress.

Figures 5 and 6 are the diagrams showing the change in maximum total displacement of structural elements in the room (Usum) and the change in maximum values of intensity stress (Sint) within time.

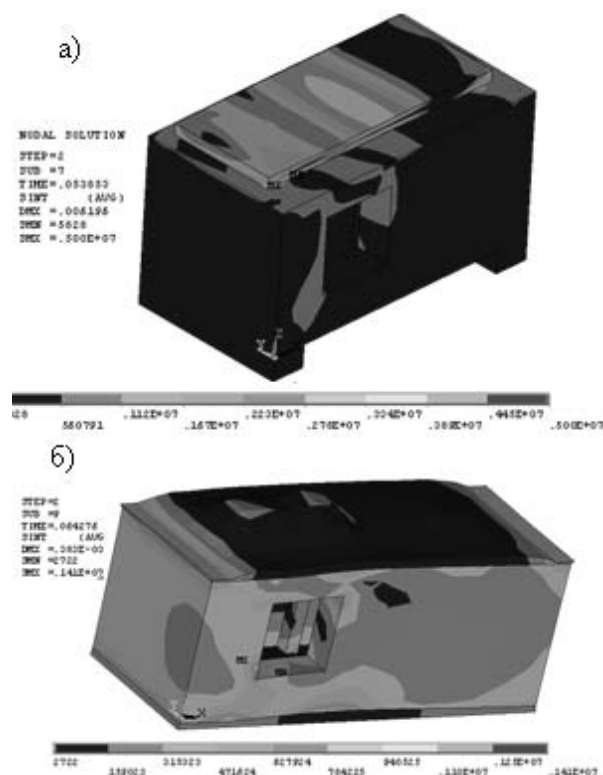


Fig.2. Stress Intensity under dynamic load effect

Letter designations in the diagrams (fig. 5,6) are: O – a window opening; D – a door opening; (g) – a stiffly fastened intermediate floor; (cr) – non-linear calculation for destruction; stat. – the calculation for the equivalent static load.

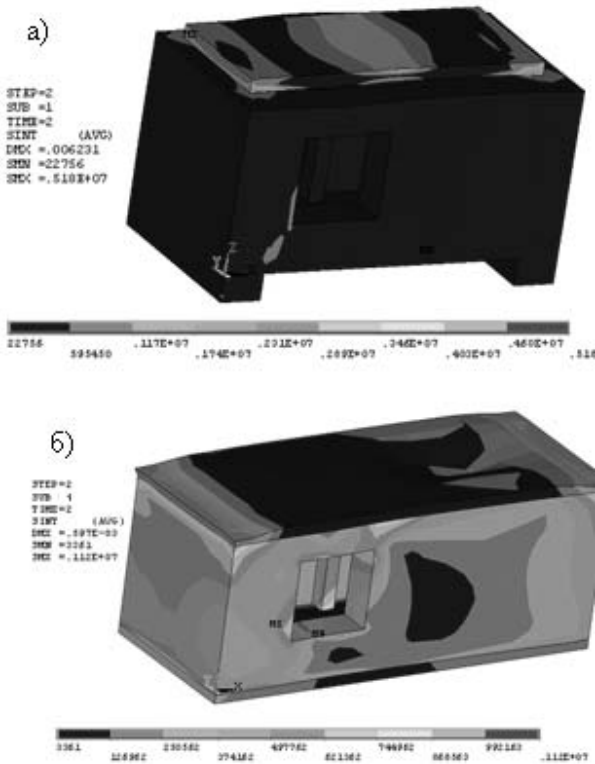


Fig.3. Stress Intensity under equivalent static load effect

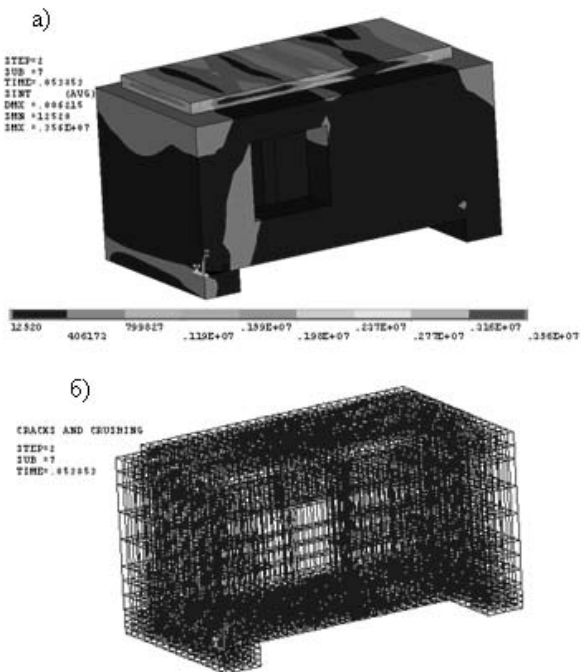


Fig. 4. Stress Intensity under dynamic load effect with an allowance for physical non-linearity of material properties (a) and cracking and crushing locations in structural elements (b)

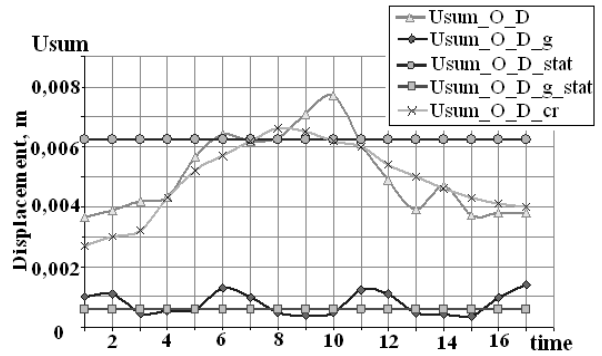


Fig.5. Diagrams show the changes in maximum total displacement of structural elements in rooms of different design within time, critical relations of those and the types of load effect

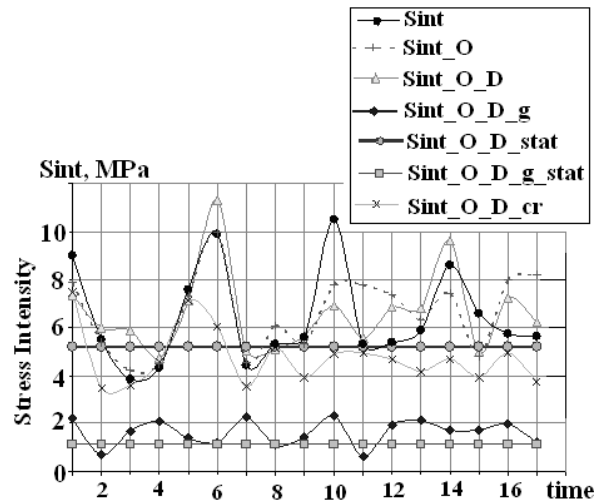


Fig.6. Diagrams show the changes in maximum values of stress intensity in structural elements of rooms of different design, critical relations of those and the types of load effect.

## CONCLUSIONS

The analysis of the data obtained proves:

1. When the equivalent static load is taken into account, the results of calculation differ from the results based on the dynamic effect of the load both in qualitative and quantitative terms.
2. The availability of window and door openings allows to decrease shock impact on the structure – the bigger the total space of openings, the weaker the shock impact (the difference is up to 12÷17%).

3. Stiffly fastened intermediate floors also decrease stress in structural elements – approximately, 2 to 5 times.

4. The calculations of the equivalent static load showed lower values of the stress-strain state – twice as low, on average. It is worth noting, that in the case of stiffly fastened intermediate floors, the difference between the intensity stress and the total displacement under dynamic load and that under static load is smaller (nearly by 25%).

5. The process of material destruction considered, stress-strain state is lower, and the deviation of the results obtained under dynamic load from the results obtained under static load is 19% on average.

## REFERENCES

1. **Комаров А.А., Г.В.Чиликина.** Условия формирования взрывоопасных облаков в газифицированных жилых помещениях. Журнал «Пожаровзрывобезопасность», т.11, №4, 2002г. С.24-28.
2. Система моделирования движения жидкости и газа. Flow Vision. Версия 2.5.0. Руководство пользователя. Москва, ООО «ТЕСИС», 2007 г.
3. **Кашеварова Г.Г., Поварницын Д.А.** Программа для строительного проектирования AnSysBuildingBlock (ASBB) -приложение к многоцелевому пакету ANSYS.//Промышленное и гражданское строительство. 2011. Т. 2. № 7-2. С. 25-27
4. **Пепеляев А.А., Кашеварова Г.Г.** Исследование проблемы защиты типовых жилых зданий от прогрессирующего разрушения// International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. -2008. - Vol. 4, Is. 2. -С. 69-70
5. **Кашеварова Г.Г., Пепеляев А.А.** Моделирование и ретроспективный анализ взрыва бытового газа в кирпичном здании. Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений». № 2 с.31-36. Москва, ЦНИИСК им.Кучеренко, 2010.
6. **Пепеляев А.А., Кашеварова Г.Г.** Верификация методики расчета дефлаграционного взрыва бытового газа. Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. 2012. Т. 4. № 1. С. 55-57.
7. Динамический расчёт сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика. - М.: Стройиздат, 1981.
8. **Kashevarova G., Zobacheva A., Leschev I.** Experimental and numerical modeling of the destroying of brick masonry for the analysis of buildings accident. Advanced Materials Research. 2011. Т. 250-253. С. 3670-3673/
9. **Кашеварова Г.Г., Труфанов Н.А.** Численный анализ эффективных упругих свойств материала кирпичной кладки.//Механика композиционных материалов и конструкций. Т.11, №1, с.49-60. 2005.
10. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю., Дубинский С.И.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки зданий в натуральных и численных экспериментах.//Строительная механика и расчет сооружений. №1, 2010. С. 69-73
11. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки.//Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2010. № 1. С. 106-116.

---

Galina G. Kashevarova, Doctor of technical science, Professor, Department of Mechanics and Computational Technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ggkash@mail.ru.

Andrei A. Pepelyaev, PhD, Department of Mechanics and Computational Technologies, Perm National Research

Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010,  
Perm, Russia, e-mail: smivt@pstu.ru.

Marina V. Grigorieva, post graduate student, Department  
of Mechanics and Computational Technologies, Perm  
National Research Polytechnic University, 109, str.  
Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail:  
smivt@pstu.ru.

# CALCULATION OF THE PURSUIT CURVE LENGTH

*Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov*

<sup>1</sup> Higher school of Economics, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** A classic pursuit problem is considered in which the pursuer is always moving towards the target. The shape of the mechanical trajectory is established, and the time of motion is calculated. An integral for the length of the pursuit curve is constructed, its asymptotics is calculated and compared with the result of the numerical computation.

**Key words:** mechanics, pursuit curve, motion trajectory, integral, asymptotics.

## 1. INTRODUCTION

We consider the pursuit problem in which two material points - a Pursuer and a Pursued - move in a plane at constant speeds  $u$  and  $v$ . The velocity vector of the Pursued does not change its direction, and the velocity vector of the Pursuer turns and always aims at the Pursued.

In an old version of the pursuit problem [1] a dog is chasing a hare. The hare runs along a straight line, and the dog always moves towards the hare. What is the mechanical trajectory of the dog? When does the dog overtake the hare? Below we shall use the terms “dog” and “hare”, although this model appears in different problems of mechanics. Consider for example a boat crossing a river and drifted down by the flow, its bow being always directed to a fixed point on the opposite bank. More recent versions consider a fighter plane overtaking a bomber or a heat-seeking homing missile moving at a constant speed and always aiming at a flying target. Yet another version describes a spreader catching a moving freight container. The container is moving uniformly and rectilinearly in parallel to the earth's surface. A stationary crane extends its telescopic boom with the spreader at a constant speed while turning it in the direction of the container. Both simultaneous movements of the crane boom occur in the horizontal plane.

Different variants of this classical problem are considered in mechanics [2 - 4]. To obtain the formula for the mechanical trajectory we choose the reference frame associated with the dog and

use the polar coordinate system (see [5]). If the speed  $v$  of the dog is greater than the speed  $u$  of the hare, the dog finally overtakes the hare and the length of the dog's trajectory is finite. This pursuit curve [6] is called a tractrix [<http://mathworld.wolfram.com/Tractrix.html>]. Below we establish the shape of the trajectory, find the time of the pursuit motion, examine the trajectory length integral and calculate its asymptotics provided  $v \gg u$ .

## 2. MOTION EQUATIONS

Let the hare move with a constant velocity  $u$ , and let the dog move with a velocity  $v$ ; the distance between them at the initial moment  $t=0$  is  $R$ , the initial angle between the velocity vectors is  $\alpha$ . The origin  $O$  coincides with the initial location of the dog ( $A$ ), and the  $X$ -axis is parallel to the velocity vector  $u$  of the hare ( $B$ ) (see Fig. 1).

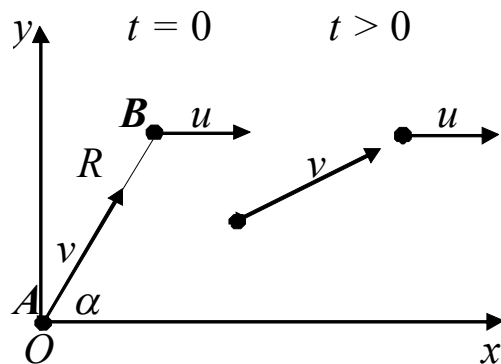


Fig. 1

Let us move on to another reference frame, positioning the moving dog  $A$  at the origin. Then the speed of the hare with respect to the dog at the point  $B$  is the sum of the vectors  $-v$  and  $u$  (Fig. 2).

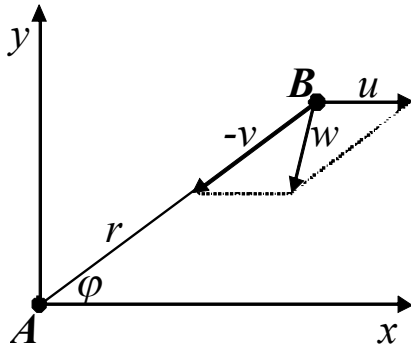


Fig. 2

We choose the polar coordinate system and decompose the vector  $u$  into two mutually perpendicular components: along the line  $AB$  (only the radius  $r$  is changing in this direction) and perpendicular to  $AB$  (see Fig. 3).

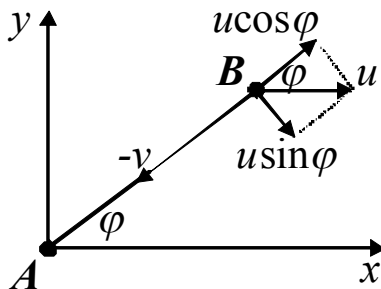


Fig. 3

In a small time interval  $dt$  the hare  $B$  shifts along the line  $AB$  at the distance

$$dr = (u \cos \varphi - v) dt, \quad (1)$$

and in the perpendicular direction at the distance

$$ds = u \sin \varphi dt. \quad (2)$$

In the rectangular triangle  $ABC$  (Fig. 4) the leg  $BC$  is equal to

$$\hat{AC} = ds = |rtg(d\varphi)|. \quad (3)$$

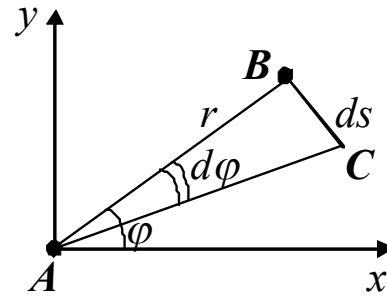


Fig. 4

Since  $ds > 0$ ,  $d\varphi < 0$ , then

$$ds = -rtg(d\varphi) = -rd\varphi + O(d\varphi)^3. \quad (4)$$

Here we have used the Taylor series for  $tgx$ :

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Equating expressions (2) and (4) and neglecting the value of the third order of smallness, we find

$$d\varphi = -\frac{u \sin \varphi}{r} dt. \quad (5)$$

The equations (1) and (5) are the motion equations of the hare with respect to the dog.

### 3. THE MECHANICAL TRAJECTORY

We proceed from the system of equations (1), (5) to a steady-state equation for the mechanical trajectory, dividing the left and right parts of the equation (1) respectively by the parts of the equation (5):

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{(u \cos \varphi - v)r}{u \sin \varphi}. \quad (6)$$

The equation (6) with the initial condition  $r(\alpha) = R$  can be solved by the standard variable separation method. The solution is the pursuit curve – the motion trajectory of the pursued hare from the pursuing dog’s point of view:

$$r = \frac{R \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{v}{u}}} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v}{u}}}{\sin \varphi}. \quad (7)$$

The function (7) is defined and positive when  $R > 0$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ . It describes the dog's movement «after the hare», the initial angle being  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , as well as its movement

«towards the hare» when  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Use of trigonometric formulae transforms (7) to

$$r = \frac{R \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{v}{u}}} \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v-1}{u}}}{2\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v+1}{u}}}. \quad (8)$$

Now let us study the motion trajectory when  $\varphi \rightarrow 0$ . When  $v < u$ , that is  $\frac{v}{u} - 1 < 0$ , the distance  $r \rightarrow \infty$  ( $\varphi \rightarrow 0$ ). This means that if the dog follows the chosen strategy of pursuit it will not overtake the hare even in case of the dog's initial motion «towards the hare» ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ).

When  $v = u$

$$r \rightarrow \frac{R \sin \alpha}{2\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)} = R \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (9)$$

as  $\varphi \rightarrow 0$ . In other words, for any initial angle the dog will, in the long run, only decrease and stabilize the distance between the hare and itself. The dog will never catch the hare!

If  $v > u$  the dog will overtake the hare. In this case  $\frac{v}{u} - 1 > 0$  and  $r \rightarrow 0$  as  $\varphi \rightarrow 0$ . This

means that at the end of the chase the tangent line to the trajectory is parallel to the axis  $OX$ . Thus, under the assumptions made, the seizure of a piece of cargo by a lifting device is always

from behind, and a boat docks parallel to the opposite bank of a river at the bank's given point.

#### 4. THE LENGTH OF THE TRAJECTORY AND THE MOTION TIME

The length of a curve defined in polar coordinates is determined by the formula

$$L = \int_{\beta}^{\gamma} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (10)$$

Using (6) we obtain:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\alpha} \sqrt{r^2 + \left(\frac{v-u \cos \varphi}{u \sin \varphi}\right)^2 r^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{r}{\sin \varphi} \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{v}{u} - \cos \varphi\right)^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{r}{\sin \varphi} \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 1 - 2\frac{v}{u} \cos \varphi} d\varphi. \quad (11) \end{aligned}$$

Substituting (8) here we find the length of the chase trajectory:

$$L = K \int_0^{\alpha} \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v-2}{u}}}{4\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v+2}{u}}} \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 1 - 2\frac{v}{u} \cos \varphi} d\varphi,$$

where

$$K = \frac{R \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{v}{u}}} \quad (12)$$

Introducing the parameter  $\lambda = \frac{v}{u} > 0$  we obtain:

$$L = K \int_0^\alpha \frac{(\sin \frac{\varphi}{2})^{\lambda-2}}{4(\cos \frac{\varphi}{2})^{\lambda+2}} \sqrt{\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \varphi} \, d\varphi. \quad (13)$$

The last factor in the integrand is bounded away from zero when  $\lambda \neq 1$  ( $v \neq u$ ):

$$|\lambda - 1| \leq \sqrt{\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \varphi} \leq |\lambda + 1| \quad (14)$$

To study the integral (13) we use the Taylor series expansion of the sine function:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots (x \rightarrow 0).$$

For  $\lambda \geq 2$  ( $v \geq 2u$ ) the integrand is regular at the point  $\varphi=0$  and the trajectory length is finite.  
 For  $\lambda < 2$ ,  $\lambda \neq 1$  ( $v < 2u$ ,  $v \neq u$ ) the integrand is singular at  $\varphi=0$ .

For  $1 < \lambda < 2$  ( $u < v < 2u$ ) the improper integral (13) converges and the trajectory length is finite.

For  $\lambda < 1$  ( $v < u$ ) the integral (13) diverges, the length of the trajectory  $L = \infty$ .

For  $\lambda = 1$  ( $v = u$ )

$$\sqrt{\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \varphi} = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (15)$$

and the integrand is regular at the point  $\varphi=0$ . In this case the trajectory length is finite (in terms of the dog), but the motion time is infinite.

The graph shows the motion trajectory of the hare from the dog's point of view for different values of the parameter  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \infty$ ). Here the initial distance  $R = 1$  and the starting angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

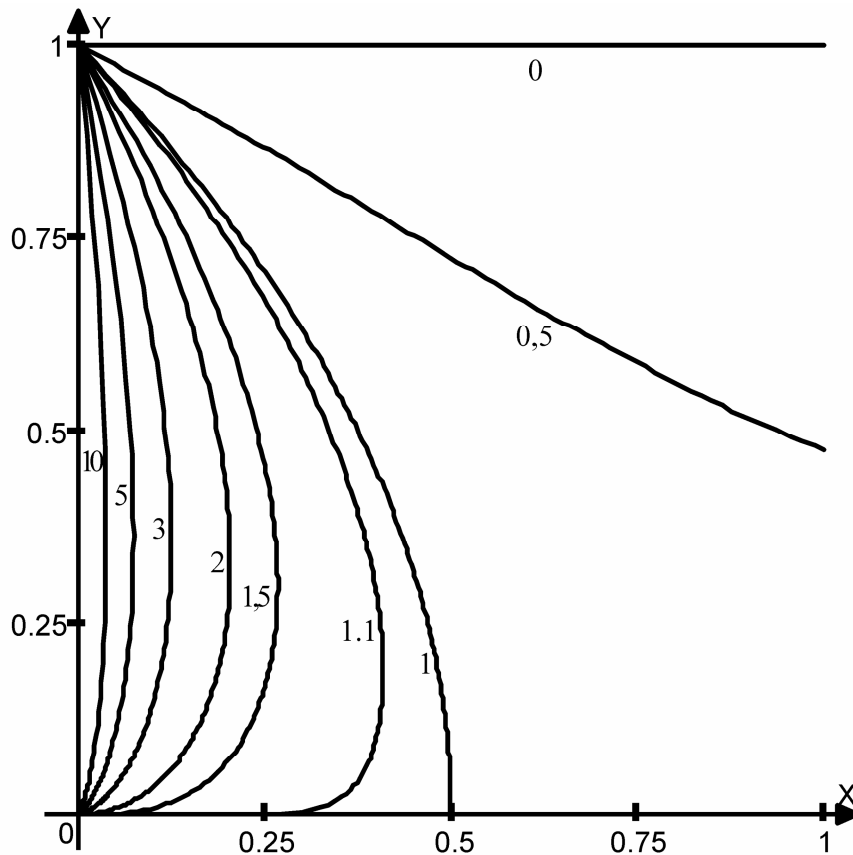


Fig. 5

### Calculation of the Pursuit Curve Length

To find the motion time we calculate  $dt$  using (5):

$$dt = -\frac{rd\varphi}{u \sin \varphi}$$

and integrate using (8):

$$\begin{aligned} T &= -\int_{\alpha}^0 \frac{rd\varphi}{u \sin \varphi} = \int_0^{\alpha} \frac{R \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda}} \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-1}}{2\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda+1}} \frac{d\varphi}{u \sin \varphi} = \\ &= \frac{R \sin \alpha}{4u\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda}} \int_0^{\alpha} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-2}}{\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^4} d\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

For  $\lambda \leq 1$  ( $v \leq u$ ) the integral diverges and the motion time is infinite.

For  $\lambda > 1$  ( $v > u$ ) the motion time is finite.

Using the trigonometric formulae

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} &= 2d\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right); \\ \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} &= 1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

the integral (16) can be integrated:

$$\begin{aligned} T &= \frac{R \sin \alpha}{2u\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda}} \int_0^{\alpha} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-2} \left(1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^2\right) d\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \frac{R \sin \alpha}{2u\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda}} \left( \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda-1}}{\lambda-1} + \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

We obtain finally, using the trigonometric formula for the sine of a double angle:

$$\begin{aligned} T &= \frac{R \sin \alpha}{2} \left( \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{v-u} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{v+u} \right) = \\ &= R \left( \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{v-u} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{v+u} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

If the hare is motionless ( $u=0$ ), the dog moves rectilinearly at the speed  $v$  and the motion time is  $t = \frac{R}{v}$ .

### 5. ASYMPTOTICS OF THE INTEGRAL FOR THE TRAJECTORY LENGTH

Consider the integral (13) when the values of the parameter  $\lambda$  are large. This means that the speed of the dog is much greater than the speed of the hare. Consequently, the shape of the trajectory is close to a segment of the straight line joining the initial positions of the dog and the hare, and  $L \rightarrow R$  for  $\lambda \rightarrow \infty$ . Following [7, 8], we construct the expansion of the integral (13) into a series by powers of the small parameter  $1/\lambda$  up to the third order  $O(\lambda^{-3})$ .

Let us take the factor  $\lambda^2$  out of the square root in the integral (13):

$$L = K\lambda \int_0^{\alpha} \frac{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-2}}{4\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda+2}} \sqrt{1 - 2\frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} d\varphi. \quad (20)$$

The Taylor series expansion of the square root

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3), \\ |O(x^3)| &\leq \operatorname{const} \cdot x^3 \end{aligned} \quad (21)$$

gives

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - 2 \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} = \\ & = 1 - \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{8} \frac{4 \cos^2 \varphi}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) = \\ & = 1 - \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (22) \end{aligned}$$

and

$$L = K\lambda \int_0^\alpha \frac{(tg \frac{\varphi}{2})^\lambda}{\sin^2 \varphi} \left( 1 - \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{\sin^2 \varphi}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \right) d\varphi.$$

The substitution  $t = tg \frac{\varphi}{2}$  and the trigonometric formulae

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 1 + (ctg \frac{\varphi}{2})^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 \varphi = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 4 \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^2 \frac{1}{1+t^2} \quad (23)$$

enable us to decompose  $L$  into four integrals

$$\begin{aligned} L &= \frac{K\lambda}{2} \int_0^\beta t^\lambda \left( \frac{t^2 + 1}{t^2} \right) dt - \frac{K}{2} \int_0^\beta t^\lambda \left( \frac{t^2 + 1}{t^2} \right) \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt + \\ &+ \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta t^\lambda \frac{1}{1 + t^2} dt + \frac{K\lambda}{2} \int_0^\beta t^\lambda \frac{t^2 + 1}{t^2} O(\lambda^{-3}) dt = \\ &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \quad (24) \end{aligned}$$

where

$$L_1 = \frac{K\lambda}{2} \int_0^\beta (t^\lambda + t^{\lambda-2}) dt;$$

$$L_2 = -\frac{K}{2} \int_0^\beta (t^{\lambda-2} - t^\lambda) dt;$$

$$L_3 = \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{t^\lambda}{1 + t^2} dt;$$

$$L_4 = \frac{K}{2} \int_0^\beta (t^\lambda + t^{\lambda-2}) O(\lambda^{-2}) dt$$

with the upper limit of integration  $\beta = tg \frac{\alpha}{2}$ .

Let us consider each of the four integrals separately.

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{K\lambda}{2} \left( \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{t^{\lambda-1}}{\lambda-1} \right) \Bigg|_0^\beta = \\ &= \frac{K\lambda}{2} \left( \frac{\beta^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\beta^{\lambda-1}}{\lambda-1} \right) = \\ &= \frac{R \sin \alpha \lambda}{2} \left( \frac{tg \frac{\alpha}{2}}{\lambda+1} + \frac{ctg \frac{\alpha}{2}}{\lambda-1} \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Use of the Taylor series expansions

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} = 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}),$$

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \quad (26)$$

gives

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{R \sin \alpha}{2} \left( \left( tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left( -tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda^2} \left( tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2} \right) + O(\lambda^{-3}) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Substitution of the formulae

$$\frac{\sin \alpha}{2} \left( tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2} \right) = 1,$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} \left( -tg \frac{\alpha}{2} + ctg \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha$$

Calculation of the Pursuit Curve Length

finally gives

$$L_1 = R + \frac{R \cos \alpha}{\lambda} + \frac{R}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (28)$$

The second integral can be transformed similarly to the first one:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{K}{2} \left( \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{t^{\lambda-1}}{\lambda-1} \right) \Big|_0^\beta = \\ &= \frac{K}{2} \left( \frac{\beta^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{\beta^{\lambda-1}}{\lambda-1} \right) = \frac{R \sin \alpha}{2} \left( \frac{\beta}{\lambda+1} - \frac{\beta^{-1}}{\lambda-1} \right) = \\ &= \frac{R \sin \alpha}{2} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\lambda+1} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\lambda-1} \right) = \frac{R \sin \alpha}{2\lambda} \times \\ &\times \left( \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left( -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) + O(\lambda^{-2}) \right); \end{aligned}$$

finally

$$L_2 = -\frac{R \cos \alpha}{\lambda} - \frac{R}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (29)$$

The third integral

$$L_3 = \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{t^\lambda}{1+t^2} dt \quad (30)$$

can be estimated:

$$\begin{aligned} |L_3| &\leq \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta t^\lambda dt = \frac{K}{\lambda} \left( \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right) \Big|_0^\beta = \frac{K}{\lambda} \cdot \frac{\beta^{\lambda+1}}{\lambda+1} = \\ &= \frac{R \sin \alpha}{\beta^\lambda \lambda} \cdot \frac{\beta^{\lambda+1}}{\lambda+1} = O(\lambda^{-2}) \quad (31) \end{aligned}$$

Integration by parts gives:

$$L_3 = \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{1}{1+t^2} d \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} = \frac{K}{\lambda} \left( \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right) \Big|_0^\beta -$$

$$\begin{aligned} - \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} d \frac{1}{1+t^2} &= \frac{K}{\lambda} \cdot \frac{1}{(1+\beta^2)} \cdot \frac{\beta^{\lambda+1}}{(\lambda+1)} - \\ &- \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt. \quad (32) \end{aligned}$$

Using the formula

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$$

the first term in  $L_3$  can be presented as

$$\begin{aligned} &\frac{K}{\lambda} \cdot \frac{1}{(1+\beta^2)} \cdot \frac{\beta^{\lambda+1}}{(\lambda+1)} = \\ &= \frac{R \sin \alpha}{\lambda^2} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}} = \\ &= \frac{R \sin^2 \alpha}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (33) \end{aligned}$$

Since

$$0 \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq 1,$$

the second term in  $L_3$  can be estimated:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{(\lambda+1)} \cdot \frac{K}{\lambda} \int_0^\beta t^{\lambda+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \\ &\leq \frac{\beta}{\lambda+1} L_3 = O(\lambda^{-3}), \quad (34) \end{aligned}$$

and for the whole integral  $L_3$  we obtain:

$$L_3 = \frac{R \sin^2 \alpha}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (35)$$

The last integral  $L_4$  is similar to the first one multiplied by  $\lambda^{-3}$ .

$$|L_4| = \left| \frac{K}{2} \int_0^\beta (t^\lambda + t^{\lambda-2}) O(\lambda^{-2}) dt \right| \leq \leq L_1 O(\lambda^{-3}) = O(\lambda^{-3}). \quad (36)$$

Summing up the obtained expressions for the four integrals we find the asymptotic expansion of the trajectory length:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = = R + \frac{R \sin^2 \alpha}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \quad (37)$$

In Table 1 the values  $L_{num}$  of the trajectory length (13), calculated numerically for different values of  $\lambda$ , are compared with the asymptotic estimates  $L_{asympt}$  obtained by the formula (37).

The last column shows the relative difference between these values calculated as the ratio of the difference  $L_{asympt} - L_{num}$  to the difference between  $L_{num}$  and its limit at  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$L_{asympt}|_{\lambda=\infty} = L_{num}|_{\lambda=\infty} = 1, \text{ multiplied by } 100\%.$$

Table 1

$\lambda$	$L_{num}$	$L_{asympt}$	$L_{asympt} - L_{num}$	$\frac{L_{asympt} - L_{num}}{L_{num} - 1} \times 100\%$
1	1,1477935	1,5000000	0,3522065	30,69
2	1,1234353	1,1250000	0,0015647	8,10
3	1,0547880	1,0555556	0,0007676	1,40
4	1,0309292	1,0312500	0,0003208	1,04
5	1,0198493	1,0200000	0,0001507	0,76
6	1,0138102	1,0138889	0,0000787	0,57
7	1,0101593	1,0102041	0,0000448	0,44
8	1,0077853	1,0078125	0,0000272	0,35
9	1,0061553	1,0061728	0,0000175	0,28
10	1,0049882	1,0050000	0,0000118	0,24
20	1,0012487	1,0012500	0,0000013	0,10
40	1,0003124	1,0003125	0,0000001	0,03
80	1,0000781	1,0000781	0,0000000	0
$\infty$	1,0000000	1,0000000	0	0

## 6. CONCLUSIONS

When  $\lambda > 1$  ( $v > u$ ) the tangent line to the motion trajectory (8) always coincides with the  $X$ -axis at the origin  $O$ . With the increase of the parameter  $\lambda$  the shape of the trajectory changes: it turns from a "hockey stick" into a "crochet hook" (see Fig. 5). This explains the rapid convergence of the trajectory length  $L_{asympt}$  to its limit  $L_{asympt}|_{\lambda=\infty} = 1$  and the absence of the first term  $O(\lambda^{-1})$  in the asymptotic expansion (37). The fast decrease of the difference  $L_{asympt} - L_{num}$  (see Table 1) suggests that the third term in (37) is also missing and the value of the difference is determined by the fourth term of the expansion  $O(\lambda^{-4})$ . This hypothesis may be the subject of a separate study.

## 7. REFERENCES

1. **Simoson A.J.** Pursuit Curves for the Man in the Moone. // The College Mathematics Journal, vol. 38, no. 5, – Washington: 2007. – pp. 330-338.
2. **Irodov I.E.** Problems in General physics. - Moscow: STC Vladis, 2002. – 447 p.
3. **Belchenko YU.I., Gilev E.A. Silagadze Z.K.** Problems in mechanics of particles and physical bodies. - Izhevsk: SIC RCD, 2008. - 248 p.
4. **Olhovskiy I.I., Pavlenko Yu.G, Kuz'menkov L.S.** Problems on theoretical mechanics for physicists - St. Petersburg: Lan, 2012 – 394 p.
5. **Silagadze Z.K., Chaschina O.I.** The dog-and-rabbit chase problem as an exercise in introductory kinematics. // Bulletin of the Novosibirsk state University, series of Physics, vol. 5, iss. 2. - Novosibirsk: 2010. – pp. 111-115.
6. **Bernhart, A.** Curves of Pursuit. // Scripta Mathematica, vol. 20, – New York: 1954. – pp. 125-141.
7. **Maslov V.P.** Asymptotic methods and perturbation theory. - Moscow: Nauka, 1988. - 310 p.
8. **Olver F.** Introduction to asymptotics and special functions. – New York: Academic Press, 1974. - 375 p.

---

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Higher school of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20, e-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics of Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl'skoe Shosse, 26, e-mail: yuri-osipov@mail.ru.

## SIX-DIMENSIONAL FORMALISM FOR LAMB WAVES IN ANISOTROPIC PLATES

*Sergey V. Kuznetsov*

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Propagation of the Lamb waves in elastic anisotropic plates is studied in the framework of the six-dimensional Cauchy formalism. The closed form secular equations for dispersion curves for Lamb waves propagating in a plate with arbitrary elastic anisotropy are obtained.

**Keywords:** Lamb wave, anisotropy, dispersion

## ШЕСТИМЕРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛН ЛЭМБА В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

*С.В. Кузнецов*

Институт проблем механики Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Распространение волн Лэмба в пластинах с произвольной упругой анизотропией описывается с помощью шестимерного формализма Коши. В замкнутом виде получены разрешающие уравнения для определения дисперсионных соотношений.

**Ключевые слова:** волна Лэмба, анизотропия, дисперсия

### 1. INTRODUCTION

Herein, a brief introduction to the theory of Lamb waves and the review of some of the most important works are presented.

1.1. *Lamb waves in an isotropic plate.* The first works [1, 2] on waves propagating in an infinite isotropic plate with the traction-free boundary surfaces were done at assumption that the wavelength is much larger than the plate thickness.

The complete theory of harmonic Lamb waves free from the long wavelength limit assumption was presented in [3]. The starting point of the Lamb theory is considering equation of motion in the form

$$c_P \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - c_S \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the displacement field,  $c_P$  and  $c_S$  are velocities of the longitudinal and transverse bulk waves respectively:

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.2)$$

In (1.2)  $\lambda$  and  $\mu$  are Lamé constants and  $\rho$  is the material density. Then, the displacement field was represented in terms of scalar ( $\Phi$ ) and vector ( $\Psi$ ) Helmholtz potentials

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} \Psi \quad (1.3)$$

The potentials were assumed to be harmonic in time:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi'(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\ \Psi(\mathbf{x}, t) &= \Psi'(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Substituting representation (1.3) into Eq. (1.1) yields two independent Helmholtz equations following relation

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_P^2}\right)\Phi' = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_S^2}\right)\Psi' = 0 \quad (1.5)$$

$$c = \frac{\omega}{r} \quad (1.11)$$

To define the spatial periodicity and to simplify the analysis, the splitting spatial argument is needed

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} \quad (1.6)$$

where  $\mathbf{n}$  is the unit wave vector,  $\mathbf{v}$  is the unit normal to the median plane of the plate, and  $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ .

The further assumption relates to the periodicity of the potentials in the direction of propagation

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{x}) &= \varphi(x'')e^{x'} \\ \Psi'(\mathbf{x}) &= \psi(x'')e^{x'} \end{aligned} \quad (1.7)$$

where dimensionless complex coordinates  $x'$  and  $x''$  are

$$x' = ir \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}, \quad x'' = ir \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \quad (1.8)$$

In (1.8)  $i = \sqrt{-1}$  and  $r$  is the wave number related to the wavelength  $l$  by

$$r = \frac{2\pi}{l} \quad (1.9)$$

Substituting representations (1.8) into Eqs. (1.5) results in the decoupled ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx''^2} + \left(1 - \frac{c^2}{c_P^2}\right)\varphi &= 0 \\ \frac{d^2\psi}{dx''^2} + \left(1 - \frac{c^2}{c_S^2}\right)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

where the phase speed  $c$  relates to the frequency and the wave number by the

The general solution of Eqs. (1.10) can be written the form

$$\begin{aligned} \varphi(x'') &= C_1 \sinh(\gamma_1 x'') + C_2 \cosh(\gamma_1 x'') \\ \psi(x'') &= C_3 \sinh(\gamma_2 x'') + C_4 \cosh(\gamma_2 x'') \end{aligned} \quad (1.12)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(1 - \frac{c^2}{c_P^2}\right)^{1/2} \\ \gamma_2 &= \left(1 - \frac{c^2}{c_S^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

The unknown coefficients in (1.12) are defined (up to a multiplier) from the following boundary conditions on the free surfaces

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_v &\equiv \left(\lambda \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)\right) \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} &= \pm h \end{aligned} \quad (1.14)$$

where  $2h$  is the depth of the plate. Substitution representation (1.7) into boundary conditions (1.14) yields boundary conditions written in terms of potentials  $\varphi''$  and  $\psi''$

$$\begin{aligned} \left(\lambda \Delta \Phi' \mathbf{I} + 2\mu \left(\nabla \nabla \Phi' + \frac{1}{2}(\nabla \operatorname{rot} \Psi' + (\nabla \operatorname{rot} \Psi')^t)\right)\right) \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} &= \pm h \end{aligned} \quad (1.15)$$

Substituting solutions (1.12) into Eq. (1.15), yields the desired dispersion equation, found in [1, 3]:

$$\frac{\tanh(\gamma_2 r h)}{\tanh(\gamma_1 r h)} - \left(\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2}\right)^{\pm 1} = 0 \quad (1.16)$$

Sign + refers to symmetrical, and – to anti-symmetrical modes. In view of expressions (1.11) and (1.13) the obtained dispersion equation implicitly determines phase velocity  $c$  as a function of frequency. Velocities related to both the long wave and short wave limits were found in [3].

Taking the short wave limit at  $rh \rightarrow \infty$  in (1.16) yields

$$1 = \left( \frac{4\gamma_1\gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2} \right) \quad (1.17)$$

The latter expression coincides with the secular equation for the speed of Rayleigh waves derived in [4], and hence the first limiting speed coincides with the speed of Rayleigh wave

$$c_{1,\text{lim}} = c_R \quad (1.18)$$

Analysis of Eq. (1.16) at  $rh \rightarrow 0$  (the long wave limit) yields the following equation [5]

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \left( \frac{4\gamma_1\gamma_2}{(1 + \gamma_2^2)^2} \right) \quad (1.19)$$

from where the values for two limiting velocities can be obtained

$$c_{2,\text{lim}} = 2c_S \sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_p^2}} \quad (1.20)$$

$$c_{3,\text{lim}} = c_S \quad (1.21)$$

Expression (1.20) coincides with the limiting velocity value found in [1, 2] and differs from the anticipated value for the long wave limiting velocity of the sound waves in rods.

For the anti-symmetric fundamental mode, Eq. (1.16) was analytically solved in [6] using the perturbation technique. One of the earliest works on computation of the dispersion curves for a layer contacting with a halfspace were mainly due to geophysical applications [7 - 10].

Analysing variation of dispersion curves at different Poisson's ratios (including negative values) was done in [11 - 13]. Points of intersection of dispersion curves for isotropic plate were studied in [14].

1.2. *Group velocity.* Consider now the notion of group velocity introduced by Stokes [15] for describing propagation of the wave packages in hydrodynamics and later on extrapolated to acoustic waves in the theory of elasticity; see [16 - 18]. Formally, the group velocity can be defined by

$$c^{\text{group}} = \frac{d\omega}{dr} \quad (1.22)$$

Numerical studies in [19 - 25] of the group velocity dispersion, mainly at Poisson's condition  $\lambda = \mu$ , confirmed Rayleigh's anticipation [16, 17] that the negative values of the group velocity can appear at the very small wave numbers. Later on, numerical computations [25] revealed existence of a broader range of negative group velocities at Poisson's ratio belonging to the interval  $0.31 < \nu < 0.45$ .

Several additional equations for computing dispersion of group velocity can be constructed from Eq. (1.16). For example, substituting in Eq. (1.22) the phase speed defined by Eq. (1.16), denoting the left-hand side of Eq. (1.16) by  $F^\pm(r, \omega)$ , and assuming that  $\omega$  is a function of  $r$ , the derivative of Eq.(1.16) with respect to  $r$  takes the form

$$\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r} + \frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad (1.23)$$

from where in view of (1.22) the secular equation for the group speed follows

$$c^{\text{group}} = - \frac{\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial r}}{\frac{\partial F^\pm(r, \omega)}{\partial \omega}} \quad (1.24)$$

In (1.24) the parameter  $r$  is considered as a function of  $\omega$ . Theoretical studies of the phase, group, and ray velocities are contained in [26].

1.3. *Anisotropic plates, three-dimensional formalism.* In the first works on Lamb waves propagating in anisotropic plates a three dimensional formalism suggested in [27] for analysing Rayleigh waves in an anisotropic halfspace; later on this method was applied to halfspaces with different groups of elastic symmetry [28 - 32]. With necessary modification that approach was used for analysing Lamb waves in anisotropic plates [33 - 43].

All these publications, except [33] where a more complicated case of a cylindrically anisotropic plate was considered, actually exploited the following representation for the displacement field

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left( \sum_{k=1}^6 C_k \underbrace{\mathbf{m}_k e^{\gamma_k x''}}_{\mathbf{u}_k(x'')} \right) e^{i(r\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.25)$$

where  $C_k$  are arbitrary complex coefficients determined up to a multiplier by satisfying conditions at plate boundaries;  $\mathbf{u}_k$  is the displacement field of the  $k$ -th partial wave;  $\mathbf{m}_k$  is vectorial, generally, complex amplitude, determined by the Christoffel equation (this equation will be introduced later on);  $\gamma_k$  is a root of the Christoffel equation. Note, that according to (1.13), coordinate  $x''$  is imaginary. Six partial waves in (1.25) correspond to six (not necessary aliquant) roots of the Christoffel equation.

Substituting representation (1.25) into equation of motion

$$\mathbf{A}(\partial_x, \partial_t)\mathbf{u} \equiv \text{div}_x \mathbf{C} \cdot \nabla_x \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad (1.26)$$

where  $\mathbf{C}$  is the fourth order elasticity tensor assumed to be positive definite, yields the Christoffel equation

$$\left[ (\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{m}_k = 0, \quad (1.27)$$

where  $\mathbf{I}$  is the unit diagonal matrix. Equation (1.27) admits the equivalent form

$$\det \left[ (\gamma_k \mathbf{v} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} + \gamma_k \mathbf{v}) - \rho c^2 \mathbf{I} \right] = 0. \quad (1.28)$$

The left side of Eq. (1.28) represents a polynomial of degree six with respect to the Christoffel parameter  $\gamma_k$ . Equations (1.27), (1.28) show that roots  $\gamma_k$  and the corresponding eigenvectors  $\mathbf{m}_k$  can be considered as functions of the phase speed  $c$ .

*Remark 1.2.*

a) A representation, similar to (1.25) is also used for analysis of Rayleigh waves propagating on the traction-free plane boundary of an elastic half space [27-32]; and for Stoneley interfacial waves propagating on the plane boundary between contacting dissimilar elastic half spaces.

b) For Rayleigh waves roots  $\gamma_k$  in representation (1.25) should be complex with  $\text{Im}(\gamma_k) < 0$ , this ensures attenuation of Rayleigh wave in the “lower” half-space ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} < 0$ ). Condition  $\text{Im}(\gamma_k) < 0$  confines the admissible speed interval and decreases number of summation terms in (1.25). If  $\text{Re}(\gamma_k) = 0$  for all partial waves composing Rayleigh wave, then such a wave is called the genuine Rayleigh wave; if  $\text{Re}(\gamma_k) \neq 0$  for some  $k$ , then it is called the generalized Rayleigh wave [28]. For Lamb waves cases  $\text{Re}(\gamma_k) = 0$  and  $\text{Re}(\gamma_k) \neq 0$  are usually not distinguished.

c) Within the discussed formalism the case of appearing multiple roots  $\gamma_k$  and the coincident kernel eigenvectors  $\mathbf{m}_k$  was considered in [44] with application to Rayleigh waves and in [45] for obtaining dispersion equation of subsonic

Lamb waves.

d) For anisotropic plates limiting velocities (1.20, (1.21) were computed in [46, 47].

To obtain the dispersion equation, consider the traction-free boundary conditions

$$\mathbf{t}_v \Big|_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm h} \equiv \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \pm h} = 0, \quad (1.29)$$

where  $2h$  denotes depth of the plate. Substituting representation (1.25) into boundary conditions (1.29), yields the dispersion equation

$$\sum_{k=1}^6 C_k (\gamma_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_k e^{\pm i r \gamma_k h} = 0. \quad (1.30)$$

Finally, Eq. (1.30) can be rewritten in a form better suited for numerical computations

$$\det \left( (\gamma_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_k e^{\pm i r \gamma_k h} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Dispersion equation (1.31) defines the phase speed as a function of the wave number, or in view of (1.11), as a function of circular frequency.

1.4. *Anisotropic plates, six-dimensional Stroh formalism.* Initially Stroh formalism [48] was applied to analysis of Rayleigh waves propagating on a free boundary of anisotropic halfspace [49 - 55]. The case of non-semisimple degeneracy of the fundamental matrix (that case is analogous to appearing multiple roots and coincident kernel eigenvectors in the Christoffel equation) was considered in [53]. In [56, 57] the Stroh formalism was applied to description of Lamb waves propagating in anisotropic plates. Following [49] the displacement field for Rayleigh or Lamb wave is searched in the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(x'') e^{i(r \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.32)$$

with the unknown amplitude  $\mathbf{f}$  regarded as a

function of the imaginary coordinate  $x''$  defined by (1.8). Substituting representation (1.32) into equation of motion (1.26) yields

$$\left( \mathbf{A}_1 \partial_{x''}^2 + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^t) \partial_{x''} + \mathbf{A}_3 \right) \cdot \mathbf{f}(x'') = 0, \quad (1.33)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, & \mathbf{A}_2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Matrix  $\mathbf{A}_1$  is non-degenerate due to assumption of positive definiteness of the elasticity tensor.

*Remark 1.3.* For isotropic material matrices (1.34) have the following form

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} \mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Up to harmonic multiplier  $e^{i(r \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ , the surface tractions on planes parallel to the free boundary or the median surface of a plate can be written in terms of matrices (1.35):

$$\mathbf{t}_v(x'') \equiv (\mathbf{A}_1 \partial_{x''} + \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{f}(x''). \quad (1.36)$$

The main idea of Stroh formalism is in rewriting the equation of motion (1.26) in terms of displacements and surface tractions. Multiplying both sides of (1.33) by matrix  $\mathbf{A}_1^{-1}$  yields the following expression for the derivative  $\partial_{x''} \mathbf{f}(x'')$

$$\partial_{x''} \mathbf{f}(x'') = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{t}_v(x'') - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{f}(x''). \quad (1.37)$$

Combining now (1.33) – (1.37), produces the desired equation of motion written in terms of vectors  $\mathbf{f}$  and  $\mathbf{t}_v$

$$\partial_{x''} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

where  $\mathbf{N}$  is the fundamental matrix:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_2^t \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2^t \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

The general solution of Eq. (1.38) can be represented in the following form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \exp(x''\mathbf{N}) \cdot \bar{\mathbf{C}}_6, \quad (1.39)$$

where  $\bar{\mathbf{C}}_6$  is the six-dimensional generally complex vector of the unknown coefficients, that can be defined (up to a multiplier) by boundary conditions. Substituting solution (1.39) into boundary conditions (1.36) yields

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(+irh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \exp(+irh\mathbf{N}) \cdot \bar{\mathbf{C}}_6 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{f}(-irh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \exp(-irh\mathbf{N}) \cdot \bar{\mathbf{C}}_6 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Excluding vector  $\bar{\mathbf{C}}_6$  from Eq. (1.40)<sub>1</sub> and substituting the resultant expression in (1.40)<sub>2</sub> gives the following dispersion equation for anisotropic plate

$$\det((\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \exp(-2irh\mathbf{N})) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.41)$$

Despite obvious simplicity of deriving Eq. (1.41), the relevant works on Lamb wave analysis [56, 57] used a more complicated

procedure.

Herein, another variant of a six-dimensional formalism for analysing dispersion of Lamb waves in plates with arbitrary anisotropy is presented. Since the presented formalism is based on reduction of the second-order equation (1.33) to Cauchy normal form, it will be called as Cauchy formalism.

## 2. CAUCHY FORMALISM

2.1. *Principal description.* For the considered formalism the representation for harmonic Lamb wave is looked in the form (1.32). By introducing a new vector function

$$\mathbf{v}(x'') = \partial_{x''}\mathbf{f}(x'') \quad (2.1)$$

the equation of motion (1.26) can be reduced to Cauchy normal form

$$\partial_{x''} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

where

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^t) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

and matrices  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  are defined by (1.35). By analogy with Stroh formalism, 6x6-matrix  $\mathbf{G}$  will be called the fundamental matrix. Similarly to (1.39), the general solution of Eq. (2.2) can be represented in Eulerian exponential form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(x'') \\ \mathbf{v}(x'') \end{pmatrix} = \exp(x''\mathbf{G}) \cdot \bar{\mathbf{C}}_6, \quad (2.4)$$

where  $\bar{\mathbf{C}}_6$  is the six-dimensional generally complex vector of the unknown coefficients

defined (up to a multiplier) by boundary conditions.

The surface traction vector is defined by Eq. (1.36). Now, combining (2.1) and (2.4), the displacements and surface tractions on both sides of the plate take the form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\pm irh) \\ \mathbf{t}_v(\pm irh) \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \exp(\pm irh\mathbf{G}) \cdot \bar{\mathbf{C}}_6, \quad (2.5)$$

where

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Note that matrix  $\mathbf{Z}$  is non-degenerate due to positive definiteness of the elasticity tensor.

Equation (2.2) allows us to exclude  $\bar{\mathbf{C}}_6$  by expressing displacements and surface tractions on one side through the corresponding vectors on the other side; that yields

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(-irh) \\ \mathbf{t}_v(-irh) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}(+irh) \\ \mathbf{t}_v(+irh) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

where

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} \cdot \exp(-2irh\mathbf{G}) \cdot \mathbf{Z}^{-1}. \quad (2.5)$$

Matrix  $\mathbf{T}$  can be considered as the transfer matrix, as it “transfers” displacements and surface tractions from one side of the plate to another. Matrix  $\mathbf{T}$  is independent of the specified boundary conditions.

*2.2. Dispersion relations and limiting velocity.* Equation (2.4) is a source for constructing the dispersion relations and obtaining an expression for limiting velocity  $c_{2,\text{lim}}$  at  $r \rightarrow 0$ .

*2.2.1. Traction-free plate.* If both sides of a plate are traction free, then

$$\mathbf{t}_v(\pm irh) = 0. \quad (2.6)$$

Condition (2.6) means that a  $3 \times 3$ -mapping

$$R^3 \xrightarrow{(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}} R^3 \quad (2.7)$$

from the three-dimensional space of nontrivial displacements and vanishing surface-tractions on the “upper” surface to the three-dimensional space of surface-tractions on the “bottom” surface, is degenerate. The latter is equivalent

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Thus,

Eq. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** is the desired dispersion relation for a plate with free boundaries.

Taking limit at  $r \rightarrow 0$  in (2.7) does not lead to a meaningful condition, because of vanishing determinant

in **Ошибка! Источник ссылки не найден.** at  $r = 0$  irrespectively of the phase speed. To derive a meaningful equation, consider first derivative of (2.7) with respect to the wave number (see [59 - 61]), this yields the following equation for  $c_{2,\text{lim}}$

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Other types of boundary conditions considered below lead to obvious alterations for the corresponding expressions for  $c_{2,\text{lim}}$ .

*Remark 2.1.* Substituting matrices (1.35) into Eq. (2.9), yields for the isotropic plate Eq. (1.16).

*2.2.2. Clamped plate.* If both sides of a plate are clamped, then

$$\mathbf{f}(\pm irh) = 0. \quad (2.10)$$

Condition (2.10) means that mapping from the

space of vanishing displacements and nontrivial surface tractions present on the “upper” surface to the three-dimensional space of displacements on the “bottom” surface, is degenerate:

$$\det \left( (\mathbf{I}, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Equation (2.11) is the desired dispersion equation for a plate with clamped surfaces.

2.2.3. *Plate with traction-free and clamped surfaces.* For a plate with “upper” clamped surface and “bottom” traction-free the dispersion equation is as follows

$$\det \left( (\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Due to symmetry of matrix  $\mathbf{T}$ , Eq. (2.12) is invariant to changing boundary conditions between surfaces.

2.2.4. *Plates with mixed boundary conditions.* Two types of mixed boundary conditions at a boundary surface are considered: (i) vanishing normal to the boundary components of surface-tractions and vanishing tangential displacements; (ii) vanishing tangential surface-tractions and vanishing normal displacements. Boundary conditions (i) can be written in the following form

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_v(\pm irh) = 0, \quad (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{f}(\pm irh) = 0. \quad (2.13)$$

The corresponding dispersion equation takes the form

$$\det \left( (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Similarly to (2.13), boundary conditions (ii) have the form

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_v(\pm irh) &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\pm irh) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Equation (2.15) yields the following dispersion equation

$$\det \left( (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (2.16)$$

### 3. CONCLUDING REMARKS

3.1. *Computation of the exponential matrix.* The dispersion relation (2.16) containing the exponential matrix in (2.5), should be computed by decomposing fundamental matrix  $\mathbf{G}$  into Jordan normal form

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{W} \quad (3.1)$$

where  $\mathbf{W}$  is a matrix composed of eigenvectors and possibly generalized eigenvectors and  $\mathbf{J}$  is a matrix containing eigenvalues and possibly Jordan blocks. With decomposition (3.1) the exponential matrix takes the form [62]

$$\exp(\mathbf{G}) = \mathbf{W}^{-1} \cdot \exp(\mathbf{J}) \cdot \mathbf{W} \quad (3.2)$$

3.2. *Improving numerical stability.* The overflow problem can be relatively easily solved by a suitable normalization. Let  $(\lambda_k^{(m)})_{m=1, \dots, 6}$  denote (not necessary aliquant) eigenvalues of  $\mathbf{G}_k$ , and

$$a = \max_{k,m} \text{Re} \left( -2i rh_k \lambda_k^{(m)} \right). \quad (3.3)$$

Multiplying all the exponential matrices in (2.5) by  $e^{-a}$  yields the desired normalization.

Indeed, after multiplication, all the exponential terms in (2.5) will have powers with real parts not exceeding unity.

### ACKNOWLEDGEMENTS

The author thanks Russian Foundation for Fundamental Research (Grant 11-08-00582) for partial financial support.

### REFERENCES

1. **Rayleigh J.W.** On the Free Vibrations of an Infinite Plate of Homogeneous Isotropic Elastic Matter, Proc. Math. Soc. London, 1889, vol. 20, pp. 225-234.
2. **Lamb H.** On the Flexure of an Elastic Plate, Proc. Math. Soc. London, 1889, vol. 21, pp. 70-90.
3. **Lamb H.** On waves in an elastic plate, Proc. Roy. Soc., 1917, A93, pp. 114-128.
4. **Rayleigh J.W.** On wave propagating along the plane surface of an elastic solid, Proc. London Math. Soc. London, 1885, vol. 17, pp. 4-11.
5. **Mindlin R.D.** Waves and vibrations in isotropic, elastic plates, In: The First Symposium on Naval Structural Mechanics, 1958 (J. N. Goodies and N. J. Hoff, editors), Oxford: Pergamon Press, 1960, pp.199-232.
6. **Viktorov I.A.** Rayleigh and Lamb wave. Physical theory and Application. Plenum Press, New York, 1967.
7. **Jeffreys H.** The surface waves of Earthquakes, Geophysical Journal International, 1935, vol. 3, pp. 253-261.
8. **Gogoladze V.G.** Dispersion of Rayleigh waves in a layer (in Russian), Publ. Inst. Seism. Acad. Sci. U.R.S.S., 1947, vol. 119, pp. 27-38.
9. **Wilson J.T., Baykal O.** the North Atlantic basin as determined from Rayleigh wave dispersion: Bull. Seism. Soc. America, 1948, vol. 38, pp. 41-53.
10. **Dobrin M.B.** Dispersion in seismic surface waves, Geophysics, 1951, v. 16, pp. 63-80.
11. **Freedman A.** The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate I. General spectra, J. Sound Vibration, 1990, vol. 137, pp. 209–230.
12. **Freedman A.** The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate. II: At transitions and coincidence values, J. Sound Vibration, 1990, vol. 137, pp. 231–247.
13. **Freedman A.** The variation, with the Poisson ratio, of Lamb modes in a free plate. III: Behavior of individual modes, J. Sound Vibration, 1990, vol. 137, pp. 249–266.
14. **Zhu Q., Mayer W.G.** On the crossing points of Lamb wave velocity dispersion curves, J. Acoust. Soc. Am., 1993, vol. 93 (4), pp. 1893-1895.
15. **Stokes G.G.** On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Philos. Soc., 1847, vol. 8, pp. 441–455.
16. **Rayleigh J.W.** On progressive waves, Proc. London Math. Soc. London, 1877, vol. 9, pp. 21-26.
17. **Rayleigh J.W.** Theory of sound, Ulan Press, 2011, 528p.
18. **Reynolds O.** On the rate of progression of groups of waves and the rate at which energy is transmitted by waves. Nature, 1877, vol.16, pp. 343–344.
19. **Sezawa K., Kanai K.** On the propagation of Rayleigh waves in dispersive elastic media, Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo), 1941, vol. 19, pp. 549-553.
20. **Sato Y.** Study on surface waves. II: Velocity of surface waves propagated upon elastic plates, Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo), 1951, vol. 29, pp. 223-261.
21. **Press F., Ewing M.** Theory of air-coupled flexural waves, J. Appl. Phys., 1951, vol. 22, pp. 892-899.
22. **Press F., Oliver J.** Model study of air-coupled surface waves, J. Acoust. Soc. Amer., 1955, vol. 27, pp. 43-46.
23. **Tolstoy I.** Dispersion and simple harmonic sources in wave ducts, J. Acoust. Soc. Am., 1955, vol. 27, pp. 897–910.

24. **Tolstoy I., Usdin E.** Wave Propagation in Elastic Plates: Low and High Mode Dispersion, *J. Acoust. Soc. America*, 1957, vol. 29, pp. 37-42.
25. **Negishi K.** Existence of negative group velocities for Lamb waves. *Japanese Journal of Applied Physics*, 1987, vol.26, Suppl. 26-1, pp. 171-173.
26. **Biot M.A.** General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport", *Physical Review*, 1957, vol. 105, pp. 1129–1137.
27. **Stoneley R.** The seismological implications of aeolotropy in continental structures, *Roy. Astronomical Soc., Monthly Notes, Geophys. Suppl.*, 1949, vol. 5, pp. 343-353.
28. **Musgrave M.J.P.** On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1954, vol. 226, pp. 339-355.
29. **Musgrave M.J.P.** On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. II. Media of hexagonal symmetry, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1954, vol. 226, pp. 356-366.
30. **Buchwald V.T.** Rayleigh waves in transversely isotropic media, *Quart. Journ. Mecha. and Applied Math.*, 1961, Vol. 14, pp. 293-317.
31. **Stoneley R.** The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1955, vol. 232, pp. 447-458.
32. **Miller G.F., Musgrave M.J.P.** On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. III. Media of cubic symmetry, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1956, vol. 236, pp. 352-383.
33. **Mitra M.** Propagation of elastic waves in an infinite plate of cylindrically aeolotropic material, *ZAMP*, 1959, vol. 10, pp. 579-583.
34. **Anderson D.L.** Elastic wave propagation in layered anisotropic media, *J. Geophysical Research.*, 1961, vol. 66, pp. 2953-2963.
35. **Solie L.P., Auld B.A.** Elastic waves in free anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1973, vol.54, pp. 50-65.
36. **Nayfeh A.H., Chimenti D.E.** Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *J Appl Mech* 1989, vol. 56(4), pp.881–886.
37. **Dayal V., Kinra V.K.** Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I: An exact solution and experiments, *J. Acoustical Soc. Am.*, 1989, vol. 85, pp. 2268-2276.
38. **Ben-Menahem A., Sena A.G.** Seismic source theory in stratified anisotropic media, *J. Geophys. Research*, 1990, vol.95, No.B10, pp. 15.395-15.427.
39. **Liu G.R., Tani J., Watanabe K., Ohyoshi T.** Lamb wave propagation in anisotropic laminates, *J. Appl. Mech.*, 1990, vol. 57, pp. 923 - 929.
40. **Lin W., Keer L.M.** A study of Lamb waves in anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Amer.*1992, vol. 92, pp. 888-894.
41. **Neau G.** Lamb waves in anisotropic viscoelastic plates. Study of the wave fronts and attenuation. PhD thesis. L'Universite de Bordeaux, 2003.
42. **Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.** Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: Comparison between theory and experiment, In: *Review of Progress in Quantitative NDE*. vol. 20, D. O. Thompson and D. E. Chimenti, Eds., American Inst. Physics, New York: 2001, pp. 81-88.
43. **Wang L., Yuan F.G.** Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments. *Composites Science and Technology*, 2007, vol. 67, pp. 1370–1384.
44. **Kuznetsov S.V.** Surface waves of Non-Rayleigh type, *Quart. Appl. Math.*, 2003, vol. 61, pp. 575 – 582.
45. **Kuznetsov S.V.** Subsonic Lamb waves in anisotropic plates, *Quart. Appl. Math.*, 2002, vol. 60, pp. 577 – 587.
46. **Markus S.A.** Low frequency approximations for zero-order normal modes in anisotropic plates (in Russian), *Akust. Zh.* 1987, vol. 33, pp. 1091–1095.
47. **Alshits V.I., Lyubimov V.N.** Abnormal dispersion of surface elastic waves in an-

- sotropic plate (in Russian), *Kristallografiya*, 1988, vol. 33, pp. 279–285.
48. **Stroh A.N.** Steady state problems in anisotropic elasticity. *J. Math. Phys.*, 1962, vol. 41, pp. 77 – 103.
  49. **Ingebrigtsen K.A., Tonning A.** Elastic surface waves in crystals, *Phys. Rev.*, 1969, vol. 184, pp. 942–951.
  50. **Barnett D.M., Lothe J.** Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Greens functions, and surface waves in anisotropic elastic solids, *Phys. Norv.*, 1973, vol. 7, pp. 13-19.
  51. **Chadwick P., Smith G.D.** Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials, In: *Advances in Applied Mechanics*, 17, 1977, Acad. Press, N.Y., pp. 303-376.
  52. **Ting T.C.T., Barnett D.M.** Classifications of surface waves in anisotropic elastic materials, *Wave Motion*, 1997, vol. 26, pp. 207-218.
  53. **Ting T.C.T.** On extraordinary semisimple matrix  $N(\nu)$  for anisotropic elastic materials, *Quart. Appl. Math.*, 1997, vol.55, pp. 723-738.
  54. **Fu Y.B.** Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity, *Proc. Roy. Soc. A.*, 2007, vol. 463, pp. 3073-3087.
  55. **Tanuma K.** *Stroh Formalism and Rayleigh Waves*. Springer, 2010, ISBN 978-9048176229.
  56. **Shuvalov A.L.** On the theory of wave propagation in anisotropic plates, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 2000, vol. 456, pp. 2197–2222.
  57. **Alshits V., Deschamps M., Maugin G.** Elastic waves in anisotropic plates: short-wavelength asymptotics of the dispersion branches  $V_n(k)$ . *Wave Motion* 2003, vol. 37 (3), pp. 273–292.
  58. **Ting T.C.T.** *Anisotropic elasticity: theory and applications*. N.Y., Oxford Univ. Press, 1996.
  59. **Kuznetsov S.V.** Love waves in stratified monoclinic media, *Quart. Appl. Math.*, 2004, vol.62, pp. 749 –766.
  60. **Kuznetsov S.V.** SH-waves in laminated plates, *Quart. Appl. Math.*, 2006, vol.64, pp. 153-165.
  61. **Kuznetsov S.V.** Love waves in nondestructive diagnostics of layered composites, *Acoustical Physics*, 2010, Vol. 56, No. 6, pp. 877-892.
  62. **Hartman P.** *Ordinary Differential Equations*, SIAM, N. Y., 2002.
  63. Pease M.C. III, *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press, London, 1965.
  64. **Guo C.Y., Wheeler L.** Extreme Poisson's ratios and related elastic crystal properties, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, vol. 54, 690-707.

---

Кузнецов Сергей Владимирович, Институт проблем механики Российской академии наук (РАН), 119526, Москва, просп. Вернадского, 101;  
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Kuznetsov Sergey, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 119526, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow, Russia;  
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

## OSCILLATIONS OF EARTH DAMS WITH ACCOUNT OF GEOMETRIC NONLINEARITY

*Merziyed M. Mirsaidov, Tokhirjohn Z. Sultanov, Dadakhan A. Khodzhaev*

Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, UZBEKISTAN

**ABSTRACT:** Mathematical statement, methods and algorithms are given in this paper to evaluate stress-strain state and dynamic behavior of earth dams with account of geometric nonlinearity. Stress-strain state of three concrete earth dams with account of geometric nonlinearity under different static and dynamic effects was studied. The influence of heterogeneous specific features and geometric parameters of a structure on dynamic behavior and stress-strain state of earth dams was investigated under geometric nonlinearity. It was revealed that an account of geometric nonlinearity leads to considerable change in stressed state of structures and to an increase of a rise in stresses between heterogeneous parts of structures. Large geometrical dimensions of a structure, amplitude level, duration of acting loads and oscillations near resonance mode increase non-linear effect. Thus, in evaluation of dynamic behavior and strength of high earth dams it is necessary to account geometric nonlinearity and real constructive specific features of structures.

**Keywords:** earth dams, heterogeneity, geometric nonlinearity, stress-strain state, dynamic behavior, non-linear oscillations.

## КОЛЕБАНИЯ ГРУНТОВЫХ ПЛОТИН С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*М.М. Мирсаидов, Т.З. Султанов, Д.А. Ходжаев*

<sup>1</sup>Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, УЗБЕКИСТАН

**АННОТАЦИЯ:** В данной работе приводится математическая постановка, методы и алгоритмы для оценки напряженно-деформированного состояния и динамического поведения грунтовых плотин с учетом геометрической нелинейности. Исследовано напряженно-деформированное состояние 3 конкретных грунтовых плотин с учетом геометрической нелинейности при различных динамических воздействиях. Исследовано влияние неоднородной особенности конструкции и геометрических параметров сооружений на динамическое поведение и напряженно-деформированное состояние грунтовых плотин при учете геометрической нелинейности. Выявлено, что учет геометрической нелинейности приводит к заметному изменению напряженного состояния сооружений и к усилению скачка в напряжениях между разнородными частями сооружений. При этом высокие геометрические размеры сооружения, уровень амплитуды, продолжительность действующих динамических нагрузок и колебания вблизи резонансного режима усиливают нелинейный эффект. Поэтому, при оценке динамического поведения и прочности высоких грунтовых плотин необходимо учет геометрической нелинейности и реальных конструктивных особенностей сооружений.

**Ключевые слова:** грунтовые плотины, неоднородность, геометрическая нелинейность, напряженно-деформированное состояние, динамическое поведение, нелинейные колебания

### 1. INTRODUCTION

A necessity to account geometric nonlinearity for earth structures becomes more important in connection with engineering of high earth dams.

How much this factor effects on stress-strain state and strength of earth dams under different loads is not sufficiently dealt with in literature [1-8] and it demands to carry out thorough studies [9-13].

Current investigations and an experience of engineering of high earth dams in seismo-active zones show that in assessment of their stability and reliability it is necessary to take into account rather complex conditions of structure operation, such as elastic, viscous-elastic, elastic-plastic properties and water-saturation of soils and nonlinear deformation of both material and structure under different effects [14-17, 20, 21]. Along with this, today not all the problems of soil work under load are solved; there are a great number of theories more or less difficultly realized in solution of a concrete problem. One of the most important one in assessment of structure stability is an account of geometric nonlinearity, occurring in earth dams, in static and dynamic design [9-14].

In well known works [1-8, 15, 16, 18-21] a special attention is paid to the solution of certain aspects of this problem.

This paper is devoted to: development of mathematical statement, methods and algorithms for assessment of dynamic behavior and stress-strain state of earth structures with account of geometric nonlinearity; study of stress-strain state of concrete earth dams with account of geometric nonlinearity under different static and dynamic effects; investigation of the effect of heterogeneity and geometric parameters of structures on stress-strain state of earth dams with account of geometric nonlinearity.

## 2. MATHEMATICAL STATEMENT, METHODS AND ALGORITHMS OF SOLUTION OF THE PROBLEM

### 2.1. Statement of the problem

Earth dam (Fig.1) is considered with volume  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , being under kinematic effects  $\vec{u}_0(\vec{x}, t)$ , applied on lower foundation  $\sum_u$ , mass forces  $\vec{f}$  and hydro-static water pressure  $\vec{p}_c$ , acting on the surface  $S_p$ . It is assumed that the crest and lower slope of a dam are stress-

free.

Discussed structure is essentially heterogeneous in the sense that physical properties of its parts ( $V_1, V_2, V_3$ ) greatly differ from each other. On the borders of division of structure parts the displacements, normal and tangent to the surface of division components of stress tensors, are continuous.

In evaluation of dynamic behavior and stress-strain state of earth dam (Fig.1) it is necessary to take into account geometric nonlinearity.

The problem will be considered for plane deformed state of a structure; variational equation for this case is written in the following form:

$$\begin{aligned} \delta A = & - \int_{V_1} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \\ & - \int_{V_3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \vec{f} \delta \vec{u} dV - \\ & - \int_{V_1} \rho_1 \ddot{u} \delta \bar{u} dV - \int_{V_2} \rho_2 \ddot{u} \delta \bar{u} dV - \\ & - \int_{V_3} \rho_3 \ddot{u} \delta \bar{u} dV + \int_{S_p} \vec{p}_c \delta \bar{u} dS = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

with given kinematic

$$\vec{x} \in \sum_u: \vec{u}_0(\vec{x}, t) = \vec{\psi}_1(t) \quad (2)$$

and initial conditions at  $t=0$

$$\vec{x} \in V: \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{\psi}_2(\vec{x}); \dot{\vec{u}}(\vec{x}, 0) = \vec{\psi}_3(\vec{x}) \quad (3)$$

Here physical properties of material of heterogeneous body (Fig.1) are described by relationships between the components of stress  $\sigma_{ij}$  and strain  $\varepsilon_{ij}$  tensors of the type

$$\sigma_{ij} = \lambda_n \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_n \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

with account of geometrical nonlinearity the components of the tensor of strains  $\varepsilon_{ij}$  are taken in general form, that is, besides linear terms quadratic ones are also considered

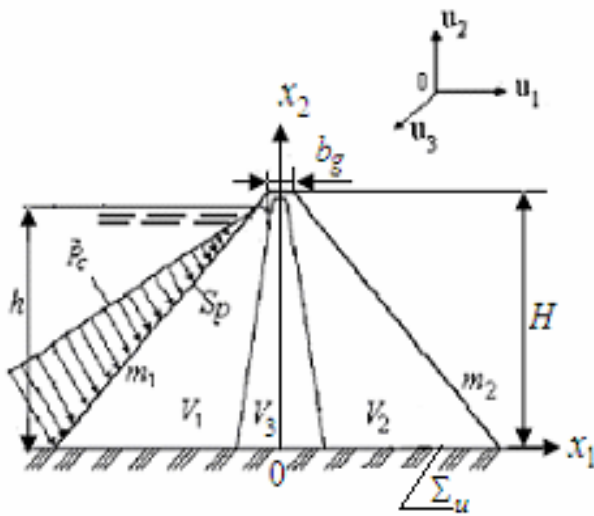


Fig. 1. Design model

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\ell,i} * u_{\ell,j}) \quad (5)$$

$i, j, \ell = 1, 2$

In all discussed problems displacement vector has two components  $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$  in coordinate system  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ .

Here:  $\vec{u}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – are components of displacement vector, stress and strain tensors, respectively;  $\delta\vec{u}$ ,  $\delta\varepsilon_{ij}$  – isochronic variations of displacements and strains;  $V_1, V_2, V_3$  – volumes of upper, lower retaining prisms and central kernel, respectively;  $\lambda_n$  and  $\mu_n$  – Lamé constants ( $n$  – the part of the body with given mechanical characteristics);  $\rho_n$  – density of material of elements of discussed system;  $\vec{f}$  – vector of mass forces;  $\delta_{ij}$  – Kronecker symbol;  $\vec{\psi}_1$  – given function of time;  $\vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3$  – given functions of coordinates.

The aim of the problem is to determine displacements fields  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  and stresses  $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ , occurring in a structure (Fig.1) under the effect of  $\vec{f}$  and  $\vec{p}_c$ , and satisfying the equations (1), (4), (5) and conditions (2), (3) at any possible displacement  $\delta\vec{u}$ .

## 2.2. Method and algorithm of solution of the problem

Under dynamic effects discussed variation problem (1), (2), (3), (4), (5) of dynamic behavior of heterogeneous structure (Fig.1) with the procedure of the method of finite elements [6, 7, 9, 22] is reduced to resolving system of non-linear differential equations of  $N$  order

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K^*(u)]\{u\} = \{P\} + \{f(t)\} \quad (6)$$

With initial conditions

$$\{u(0)\} = \{u_0\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = \{v_0\} \quad (7)$$

Here rigidity matrix  $[K^*(u)]$  depends on both geometric parameters of a structure and its stress-strain state, expressed through nodal displacements;  $[M]$  – mass matrix of discussed system;  $[C]$  – matrix of dissipative forces, if they are taken into consideration;  $\{u(t)\}$  – vector of sought for amplitudes of displacements;  $\{f(t)\}$  – vector of external load from kinematic effect;  $\{P\}$  – total vector of external loads (mass forces, hydrostatic water pressure, etc.).

Solution of equations (6) with initial conditions (7) by Newmark's method [9, 22] in each step at time  $\Delta t$  is reduced to solution of algebraic system of equations

$$[A(u_i)]\{u_{i+1}\} = \{R_{i+1}\}, \quad (8)$$

$$[A(u_i)] = [K^*(u_i)] + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [C]. \quad (9)$$

Here the right side  $\{R_{i+1}\}$  of equation (8) is determined in the form

$$\begin{aligned} \{R_{i+1}\} = & \{F\} + \{f_{i+1}\} + \\ & + [M] \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{u_i\} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}_i\} + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{u}_i\} \right] + \\ & + [C] \left[ \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \{u_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{u}_i\} + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{u}_i\} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

For the solution of obtained system of algebraic equations (8) it is necessary to give initial conditions at  $t = 0$ , that is, displacements  $\{u_0\}$ , velocities  $\{\dot{u}_0\}$  and accelerations  $\{\ddot{u}_0\}$ ; usually  $\{\ddot{u}_0\} = 0$ .

Newmark method is stable, when

$$\beta \geq 0.5, \alpha \geq 0.25(\beta + 0.5)^2.$$

Thus an algorithm of solution of non-linear systems of differential equations (6), (7) consists in:

1. Initial conditions are given as  $\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}, \{\ddot{u}_0\} = 0$ .
2. The system of algebraic equations (8) is formed, with right side (10). Here elements of matrix  $[A(u_i)]$  are the functions of reached on preceding step deformed state of a structure.
3. Obtained system of algebraic equations (8) is solved by the method of quadratic root at each step  $t_{i+1}$ .

### 2.3. Test example

To prove worked out algorithm for the solution of non-linear problems under static effects, the solution of a number of systems of non-linear algebraic equations were considered. Analysis of results obtained shows that the use as a zero approximation of the solution of linear problem ensures fast convergence of iteration process, which is reached after 3-7 iterations depending on a given accuracy and the type of a structure. In testing of worked out algorithm for the solution of non-linear dynamic problems, the solution of non-linear differential equation is considered

$$\ddot{y} + \omega^2 y + Cy^2 = f(t) \quad (11)$$

With initial conditions

$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = -\beta, \quad (12)$$

which has an exact solution [23]  $y(t) = e^{-\beta t}$ .

Here:

$$f(t) = [\beta^2 + \omega^2 + Ce^{-\beta t}] e^{-\beta t}; \omega = 1.0; \\ \beta = 0.05; C = 1.0.$$

Table 1 gives a comparison of numeric solution by Newmark method with exact solution, depending on integration step  $\Delta t$ , at different values of  $t$ .

Table 1: Comparison of exact and numeric solutions of an equation (18)

Time, t		0.1	0.2	0.3	0.4
Exact solution $y(t)$		0.995	0.990	0.985	0.980
Solution by Newmark method	$\Delta t = 0.01$	0.996	0.992	0.988	0.983
	$\Delta t = 0.001$	0.995	0.990	0.980	0.976

0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.975	0.970	0.966	0.961	0.956	0.951
0.979	0.974	0.970	0.965	0.960	0.956
0.971	0.976	0.966	0.961	0.956	0.952

Analysis of results given in Table 1 shows high accuracy of results obtained while solving dynamic problems by Newmark method.

### 3. ASSESSMENT OF STRESS-STRAIN STATE OF EARTH DAMS WITH ACCOUNT OF GEOMETRIC NONLINEARITY

In this chapter with worked out methods, algorithm and PC program, dynamic behavior and stress-strain state of three concrete earth dams are studied with account of geometric nonlinearity under different static and dynamic effects; they are: 1) Nurek dam: height  $H=296\text{m}$ , crest width  $b_g=20.0\text{ m}$ , slopes location – upper  $m_1=2.25$  and

lower  $m_2=2.2$ ; 2) Dam 2: height  $H = 138.5$  m, crest width  $b_g=16.0$  m, slope location – upper  $m_1=2.2$  and lower  $m_2=1.9$ ; 3) Dam 3: height  $H=70.0$  m, crest width  $b_g=8.0$  m, slopes location – upper  $m_1=2.0$ , and lower  $m_2=2.0$ . In concrete calculations, heterogeneity and constructive specific features of a structure and real physical and mechanical characteristics of material were taken into consideration for each separate section.

Usually parameters of the effect, its intensity, frequency specter and velocity of damping should considerably influence the dynamics of high structures, their deformation being essentially large under intensive effect and so the effects of geometric nonlinearity are revealed here in a greater extent.

To evaluate the effect of account of geometric nonlinearity of a structure on dynamic behavior of different earth dams with above given methods, a non-linear system of differential equations (6) was solved with homogeneous initial conditions.

Here the matrix of dissipative forces  $[C]$  is formed according to [3] proportionally to rigidity matrix with coefficient of proportionality  $\beta=0.08$ , that is,  $[C]=\beta[K]$ .

Unsteady forced oscillations of above mentioned three dams were studied with account of geometric nonlinearity and heterogeneous specific features of structures. These dams were considered in plane deformation under mass forces; they oscillated under acyclic two-component kinematic effect on the basement of a structure:

$$\{u_{1o}(t)\} = \begin{cases} a \sin(pt), & 0 < t \leq t^* \\ 0, & t^* > t \end{cases} \quad (13)$$

$$\{u_{2o}(t)\} = \begin{cases} b \sin(pt), & 0 < t \leq t^* \\ 0, & t^* > t \end{cases} \quad (14)$$

Here:  $p$  – is a frequency;  $a, b$  – amplitudes;  $t^*$  – time duration of the effect.

Below results are given obtained at frequencies  $p=5.7$  rad/sec (for dam 2), at  $p=6.85$  rad/sec (for dam 3), at  $p=4.5$  rad/sec and  $p \approx \omega_1=5.07$  rad/sec in resonance mode (for Nurek dam),  $a=0.01$ m,  $b=0.01$ m – amplitudes and  $t^* = 12$  sec – time duration of kinematic effect,  $\omega_1$  – first natural frequency of a structure.

Fig.2 shows results of calculations with account of geometric nonlinearity of a structure, that is, the change of components of displacement  $(u_1, u_2)$  in time for points  $(x_1=-4.0$ m,  $x_2=70.0$ m), located on the crest of heterogeneous dam 3 under mass forces and two-component kinematic effect.

Fig.3 shows the difference between linear and non-linear solutions for this case (in %), that is:

$$\left( \left| \vec{u}^{gn} \right| - \left| \vec{u}^{lin} \right| * 100\% \right) / \left| \vec{u}^{gn} \right|$$

where  $\vec{u}^{gn}$  – is a vector of components of displacements, obtained with account of geometrical nonlinearity;  $\vec{u}^{lin}$  – vector of components of displacements corresponding to linear case.

Analysis of results (Fig.2 and Fig.3) shows that for dams of middle height the difference of linear and non-linear solutions in components of displacements is no more than approximately 10% for most points of a dam. The greatest difference is seen in upper part and in slope zones of a dam. These differences appear after a certain time of load acting, this is explained by the fact that geometric non-linearity under dynamic effect occur after full swinging of a structure.

Fig.4 gives differences between linear and non-linear solutions (in %), that is

$$\left( \left| \vec{u}^{gn} \right| - \left| \vec{u}^{lin} \right| * 100\% \right) / \left| \vec{u}^{gn} \right|$$

for components of displacement  $(u_1, u_2)$  in time for points  $(x_1=-8.0$ m,  $x_2=138.5$ m), located on the crest of heterogeneous dam 2 under mass forces and two-component kinematic effect.

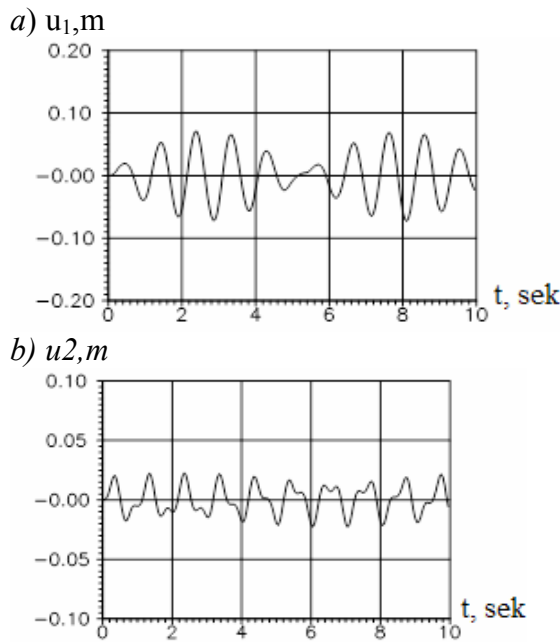


Fig. 2. Change of components of displacement ( $u_1, u_2$ ) in time for point ( $x_1=-4.0m, x_2=70.0m$ ) of dam 3 under the effect of mass forces and two-component kinematic effect, obtained with account of geometric nonlinearity

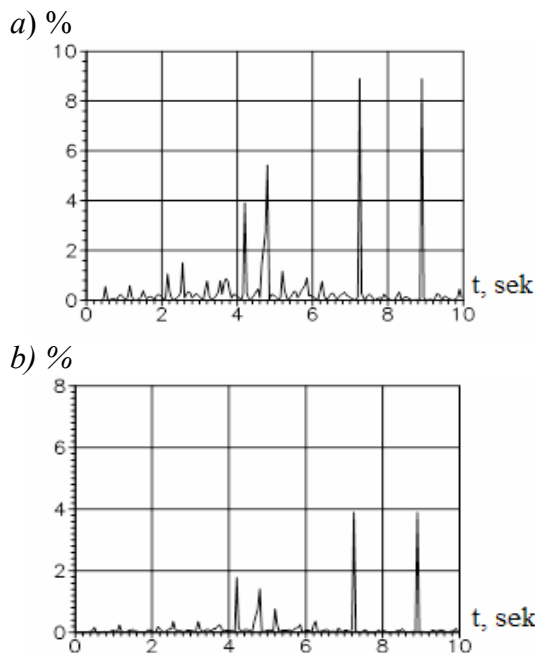


Fig. 3. Difference (in %) between linear and non-linear solutions (for components of displacement  $u_1 - (a)$  and  $u_2 - (b)$ ) in time for point ( $x_1=-4.0m, x_2=70.0m$ ) of dam 3 under the effect on structure of mass forces and two-component kinematic effect

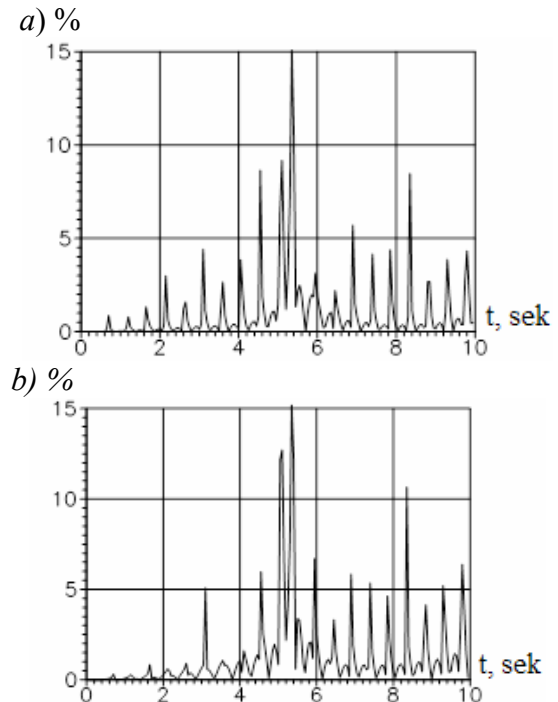


Fig. 4. Difference (in %) between linear and geometrically non-linear solutions (for components of displacement  $u_1 - (a)$  and  $u_2 - (b)$ ) in time for point ( $x_1=-8.0m, x_2=138.5m$ ) of dam 2 under the effect on a structure of mass forces and two-component kinematic effect

Analysis of results (Fig.4) shows that for high dam the difference of linear and non-linear solutions is essential, that is, the maximum in components of displacements is approximately more than 15% for most points of a structure. For this dam the greatest differences of these results is seen in upper part and in slope zones of the dam after a certain time of load action. The distinction from previous results is that the difference is seen in the whole range of dynamic effects. This proves the fact that in high structures geometric nonlinearity occurs after full swinging of a structure and acts till the end of the effect. Unsteady oscillations of high Nurek dam in pre-resonance (Fig.5) and resonance (Fig.6) modes of oscillations were studied with account of geometric nonlinearity.

In Fig.5, as an example, the change in time of amplitude of stress intensity  $\sigma_i$  is shown for different points of dam in pre-resonance mode of oscillation ( $p=4.5$  rad/sec), Fig.5a for point –

$x_1=-65.5$  m,  $x_2=228.2$  m; Fig.5b for point –  $x_1=-65.5$  m,  $x_2=265.2$  m; Fig.5c for point –  $x_1=-65.5$  m,  $x_2=80.2$  m.

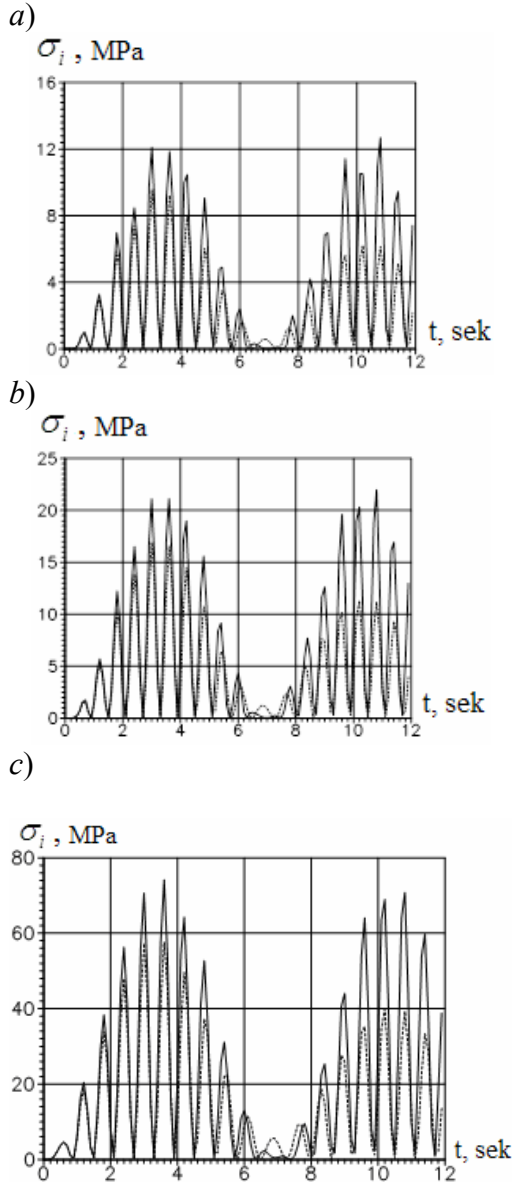


Fig. 5. Change in time of amplitude of stress intensity  $\sigma_i$  for different points of Nurek dam in pre-resonance mode ( $p=4.5$ rad/sec ) of oscillations under mass forces and two-component kinematic effect: — linear case; - - - non-linear case

Fig. 6 shows as an example the change in time of the amplitude of stress intensity  $\sigma_i$  for different points of Nurek dam in resonance mode

of oscillations ( $p \approx \omega_1=5.07$  rad/sec), Fig.6a for point –  $x_1=-65.5$  m,  $x_2=228.2$  m; Fig.6b for point –  $x_1=-65.5$  m,  $x_2=265.2$  m; Fig.6c for point –  $x_1=-65.5$  m,  $x_2=80.2$  m.

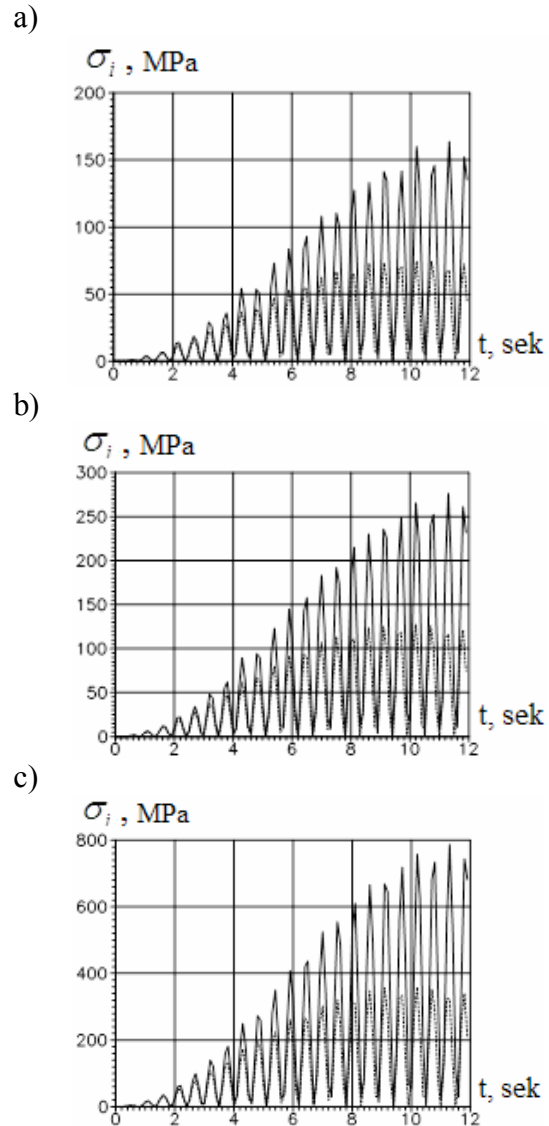


Fig. 6. Change in time of the amplitude of stress intensity  $\sigma_i$  for different points of Nurek dam near resonance mode of oscillations ( $p \approx \omega_1=5.07$ rad/sec) under mass forces and two-component kinematic effect: — linear case; - - - non-linear case

Fig. 7 shows iso-lines of distribution of stress intensity  $\sigma_i$  in section of heterogeneous Nurek dam in resonance mode of oscillations at

$t=10.2\text{sec}$  for linear (Fig.7a) and non-linear (Fig.7b) cases.

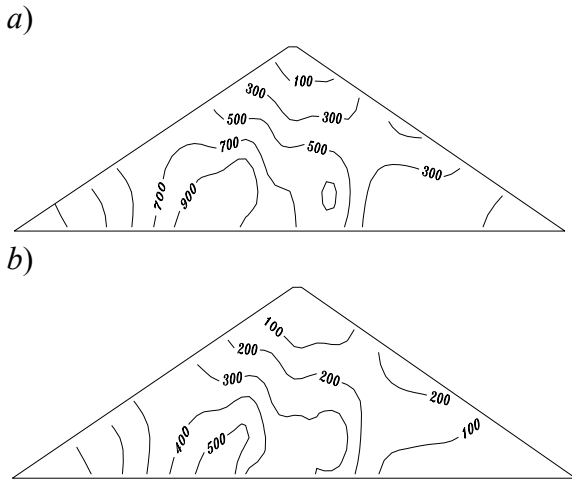


Fig. 7. Iso-lines of distribution of stress intensity  $\sigma_i$  in section of heterogeneous Nurek dam in resonance mode of oscillation at  $t=10.2\text{sec}$

As seen from (Fig.5-7) the occurrence of non-linear effect is explicit both quantitatively and qualitatively: the amplitudes of stress intensity  $\sigma_i$  are changing, and the period of oscillations is almost the same.

In stress intensity  $\sigma_i$  non-linearity in a great extent occurs in a lower part of a dam; here during the whole interval of load effect the value of stress intensity, obtained with account of geometric nonlinearity, is 2 times less than the one obtained for linear case. The occurrence of the greatest value of stress intensity  $\sigma_i$  near the foundation with comparison with other points of a structure located higher (Fig.5 and 6) is explained by the fact that the structure is subjected to the effect of two-component kinematic effect and mass forces simultaneously.

Studies carried out at resonance mode of oscillations (Fig.6) show that non-linear character of oscillations is more distinctly displayed with an increase of the height of structure and intensity of the effect.

Results of analysis of dynamic behavior and stress-strain state of earth dams of different height with account of geometric nonlinearity of a structure permit us to reveal the dependence of

non-linear effect on dimensions of a structure and the character of the effect. It was also stated that non-linear effects are observed during sufficiently long time and high level of the amplitude of effect. Here the proximity of frequencies of natural vibrations of a structure to the frequency of the effect (Fig.6) considerably influences the occurrence of nonlinearity. At the most unfavorable resonance mode an account of geometric nonlinearity leads at a certain moments of time to essential change in stresses in a lower part of high structure. An account of heterogeneity of a structure (Fig.7) leads to the increase of a rise in stresses between various parts of a structure, especially with consideration of non-linearity.

#### 4. CONCLUSIONS

Study of dynamic behavior and stress-strain state of three earth dams on the basis of worked out methods and algorithm with account of geometric nonlinearity allows us to reveal that:

- for high dams an account of geometric nonlinearity and heterogeneity of structures leads to evident change in stressed state of the whole structure;
- an account of geometric nonlinearity and heterogeneity of structures leads to an increase of a rise in stresses between heterogeneous parts of a structure;
- large geometric dimensions of a structure, the level of amplitude and duration of acting dynamic loads increase non-linear effect;
- the proximity of the frequency of the effect to the frequency of natural vibrations of a structure leads to an increase in observed effect of nonlinearity;
- an account of geometric nonlinearity and real constructive specific features of a structure is necessary in assessment of dynamic behavior and strength of high earth dams.

## REFERENCES

1. **Zaretsky Yu.K., Lombardo V.N.** "Statics and Dynamics of Earth Dams", Energoizdat, Moscow, USSR, 1983.
2. **Konstantinov I.A.** "Dynamics of Hydro-Technical Structures", Part 2, LPI, Leningrad, USSR, 1976.
3. **Krasnikov N.D.** "Seismic Stability of Hydro-Technical Structures from Soil Materials", Energoizdat, Moscow, USSR, 1981.
4. **Lombardo V.N.** "Static Design of Earth Dams", Energy, Moscow, USSR, 1983.
5. **Rasskazov L.N., Bestujeva A.S.** "Seismic Stability of Earth Dams", Hydro-technical Engineering, 3, 13-19, Moscow, 1997.
6. **Mirsaidov M.M., Troyanovskiy E.I.** "Dynamics of Inhomogeneous Systems with Account of Internal Dissipation and Wave Transfer of Energy", FAN, Tashkent, Uzbekistan, 1990.
7. **Mirsaidov M.M., Godovannikov A.M.** "Seismic Stability of Structures", «Uzbekistan», Tashkent, Uzbekistan, 2008.
8. **Lyakhter V.M., Ivashchenko I.N.** "Seismic Stability of Earth Dams", Nauka, Moscow, USSR, 1986.
9. **Mirsaidov M.M.** "Theory and Methods of Design of Earth Structures on Strength and Seismic Stability", FAN, Tashkent, Uzbekistan, 2010.
10. **Mirsaidov M.M.** "An Assessment of Stress-Strain State of Earth Hydro-technical Structures with Account of Heterogeneity and Geometric Nonlinearity", Proc. of VI International Scientific-Practical Conference «Problems of Science and Education in Modern Conditions», 175-181, Shymkent, Kazakhstan, 2009.
11. **Mirsaidov M.M., Rumi D.F.** "Non-linear Dynamic Design and Assessment of Stress-Strain State of Hydrotechnical Structures", Vestnik of Tashkent Institute of Engineers of Transport, Tashkent, 2007, No.3-4. pp.41-48.
12. **Mirsaidov M.M.** "State of the Problem of Strength and Seismic Stability of Earth Hydrotechnical structures", Problems of Mechanics, Tashkent, 2010, No.2, pp.12-16.
13. **Sultanov T.Z., Mirsaidov M.M., Toshmatov E.S.** "Unsteady Forced Oscillations of Earth Dams with Account of Geometric Nonlinearity", Proc. Of International Scientific-Technical Conference «Modern Problems of Mechanics», Volume 1, 503-507, Tashkent, Uzbekistan, 2009.
14. **Salyamova K.D.** "Dynamic Design of Earth Dams with Account of Nonlinear Models of Soil under Seismic Effects", Uzbek Journal Problems of Mechanics, 1, 32-35, Tashkent, Uzbekistan, 2003.
15. **Mirsaidov M.M.** "Seismic Stability of Different Earth Dams", 6th International Conference on Dam Engineering, 15-17 February 2011, 787-798, Lisbon, Portugal, 2011.
16. **Sultanov T.Z., Mirsaidov M.M., Khodjaev D.A.** "Evaluation of Dynamic Behavior of Non-uniform Structures with Account of Non-linear and Viscous-elastic Characteristics of Material", Proc. of Australasian Structural Engineering Conference, 11-13 July 2012, ASEC, Perth, Australia.
17. **Sultanov K.S., Salyamova K.D., Khusanov B.E.** "Dynamic Design of Earth Dams with Account of Structural Changes of Soil", Problems of Development of Transport and Engineering Communications, 1, 37-40, Moscow, Russia, 2001.
18. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A.** "Assessment of the Stress-Strain State of Earth Dams", Civil-Comp Proceedings 100 of 8th International Conference on Engineering Computational Technology 2012 (ECT 2012), Volume 1, 1482-1499, 4-7 September 2012, Dubrovnik, Croatia. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2012.
19. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A.** "Stability Evaluation of Slopes of Earth Dams with Account of Soil Rheological Properties", Magazine of Civil Engineering, 9, 49-58, Sankt-Petersburg, Russia, 2012.

20. **Zania V., Tsompanakis Y., Psarropoulos P.N.** “The Effect of Soil-Structure Interaction and Site Effects on Dynamic Response and Stability of Earth Structures”, Coupled Site and Soil-Structure Interaction Effects with Application to Seismic Risk Mitigation NATO Science for Peace and Security Series C: Environmental Security, 2009, pp. 127-138.
21. **Pinho R.** “Nonlinear Dynamic Analysis of Structures Subjected to Seismic Action”, Advanced Earthquake Engineering Analysis CISM International Centre for Mechanical Sciences, Volume 494, 2007, pp. 63-89.
22. **Bate K., Wilson E.** “Numeric Methods of Analysis and the Method of Finite Elements”, Stroyizdat, Moscow, USSR, 1982.
23. **Badalov F.B.** “Methods of Solution of Integral and Integral-Differential Equations of Hereditary Theory of Viscous-Elasticity”, Mekhnat, Tashkent, Uzbekistan, 1987.

---

Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович, зав.кафедрой «Теоретическая и строительная механика», Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан, 100 000, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39.  
e-mail: theormir@mail.ru, utmn@tps.uz

Султанов Тохиржон Зокирович, проректор по научным исследованиям, Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан, 100 000, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39; e-mail: tohir-zs@mail.ru

Ходжаев Дадахан Акмарханович, доцент кафедры «Информационные технологии», Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан, 100000, г.Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39.  
e-mail: dhodjaev@mail.ru

## APPLICATION OF ROBUST ESTIMATION METHODS FOR CALCULATION OF PILES' ULTIMATE RESISTANCE

*Zbigniew Muszynski, Jaroslaw Rybak*

Wroclaw University of Technology, Wroclaw, POLAND

**ABSTRACT:** As far as the pre-cast concrete driven piles are concerned, the proportion of the dynamic tests in the overall number of performed tests in Poland reached 71% in 2007 and is still increasing. The legal basis for dynamic testing is the code: PN-EN 12699 "Special Geotechnical Works. Displacement Piles", which allows for the dynamic testing meant as the test of load capacity. The problem which must be faced here is the need for a precise calibration of those tests, related both to capacity dynamic testing, as well as to the selection of the proper safety factor which makes it possible to determine the permissible loading of a pile. Good calibration requires that the pile's ultimate resistance should be known from the prior static test, whereas it may often be impossible to determine that value due to limited load capacity of the testing station. The designer is then forced to calculate the failure load on the basis of the available data by means of the "extrapolation" of test results.

**Key words:** pile capacity, load test, robust estimation

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСТОЙЧИВОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СВАЙ

*Zbigniew Muszynski, Jaroslaw Rybak*

Вроцлавский политехнический университет, г. Вроцлав, ПОЛЬША

**АННОТАЦИЯ:** Количество динамических тестов сборных железобетонных винтовых свай, проводимых на территории Польши, еще в 2007 году достигало уровня 71% среди от общего числа проводимых тестов и продолжает увеличиваться. Правовым основанием для проведения подобного рода тестов является еврокод PN-EN 12699 „Special Geotechnical Works. Displacement Piles”, который позволяет считать динамические тесты равносильными тестам на определение несущей способности. Тем не менее, проблема, с которой приходится сталкиваться при проведении данных тестов, - это необходимость точной выверки результатов, зависящих в равной степени от проведения самого теста, а также от выбора правильного коэффициента надежности по нагрузке, который позволит определить допустимую нагрузку на сваю. Хорошая выверка требует знания значения предельного отпора сваи, полученного из предшествующих статических тестов, что часто представляется невозможным по причине ограниченной несущей способности самой тестовой установки. Таким образом, лаборанту требуется рассчитать предельный отпор сваи на основе полученных тестовых результатов методом экстраполяции.

**Ключевые слова:** несущая способность сваи, тест на нагрузку, устойчивое оценивание

### 1. INTRODUCTION

The Polish Code of Practice (PN-83/B-02482, 1983) provides the procedures for performing capacity tests of piles, as well as for the subsequent interpretation of the test results, which sets forth the criteria for the assessment of the designing method and makes it possible to verify the conformity of the actual

geotechnical conditions with those assumed for the designing purpose. In addition, the results of load tests form the basis for potential changes in the piling design. The reliability of settlement results must be high, as the static tests are expensive and time-consuming, and the ensuing decisions have consequences of both technical and economic nature. The construction of an additional testing station is very difficult due to

insufficient reinforcement and load capacity of anchor piles (or insufficient kentledge).

Dynamic pile testing has recently become a widely adopted solution. Good calibration requires that the pile's ultimate resistance (failure load) should be known from the prior static test, whereas it may often be impossible to determine that value due to limited load capacity of the testing station. The designer is then forced to calculate the ultimate resistance on the basis of the available data by means of the "extrapolation" of test results. This work presents the results of the calculations of foundation piles' ultimate resistance (failure load) carried out in line with the so called 80 percent method developed by Brinch-Hansen (1963) for non-failed reference static load tests. The approximation procedure has been analyzed with respect to: the number of settlement measurements taken into account in calculations, weights of subsequent measurements of the settlement and change of weights in subsequent measurements of the settlement (eliminating of mistakes by means of robust estimation methods).

The conclusions derived from calculations are intended, in later stages, enable proposing the method of calculating the failure load on the basis of a static load test, and thus to address the need for calibration in the increasingly implemented dynamic tests.

## 2. STATIC LOAD TESTS – PRINCIPLES AND TECHNICAL PROBLEMS

The regulations formulated in the Code of Practice (1983), concerning the rules of determining the number of piles under static test and the selection of their place, require that practically any structure founded on piles should be subject to test. Static load tests are usually carried out by means of the so called "inverted beam method", using the neighboring piles as the anchor piles (see Fig. 1) or with the use of kentledge. Sections 7 and 8 of the Code of Practice (PN-83/B-02482, 1983) present

the procedure of static load tests and provide the rules of the interpretation of their results. It must be remembered that even though the static test is considered to be the most reliable test (i.e. a reference test), it may also include various errors.



*Fig. 1. Typical static load test (SLT)*

The greatest risks are linked with the following errors:

- systematic errors related to the inaccuracy of the loading system (calibration of the hydraulic jack and manometers) or the measurement system (settlement gauges),
- displacement of the base on which the settlement gauges rest, resulting from the settlement of the subsoil around the pile (precise leveling may eliminate that problem),
- displacement of the base on which the settlement gauges rest, caused by thermal factors, e.g. becoming heated due to insolation (the test often lasts a dozen or so hours),
- non-simultaneous readouts of settlement gauge indications.

Fluctuation of pressure in the hydraulic system (and thus fluctuation of the force acting on the pile) caused by the pile's settlement and the deformation of the loading system (occurs typically in the final stages of loading, which play the decisive role in the determination of ultimate resistance). The above-presented list of the potential threats to the accuracy of determining the loading-settlement relation includes the

factors that significantly affect the interpretation of results. For example, the differences observed for thermal reasons (insolation) amounted to 0.1 mm, which is a considerable deviation from the required measurement accuracy of 0.01 mm.

### 3. CALCULATING ULTIMATE LOAD USING THE BRINCH-HANSEN 80% CRITERION

The Brinch-Hansen method (Brinch Hansen, 1963) defines the ultimate resistance  $Q_{ult}$  as the limit after the exceeding of which the settlement progresses freely. In that method, similarly to the method of determining the ultimate resistance  $Q_{ult}$  set forth in the Code of Practice, it is indispensable to perform the static test in the range that goes beyond the elastic work of the pile. In that case, for the purpose of analysis, this part of the loading-settlement relation is assumed where the force exceeds the design loading of the pile.

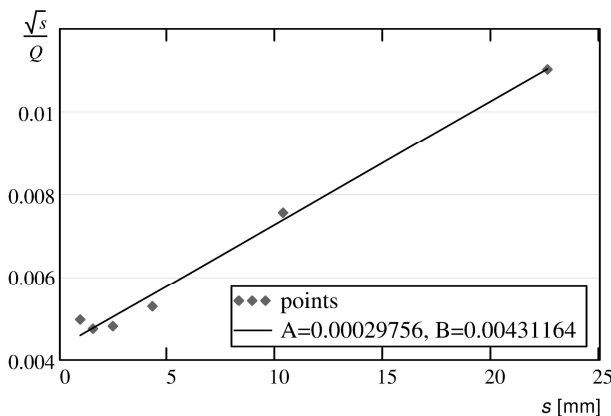


Fig. 2. Calculating ultimate resistance using the Brinch-Hansen 80% criterion

$Q_{ult}$  is understood as such loading for which the settlement  $s$  exceeded the measured value four times only after 80% of the load has been applied. The loading-settlement relation ( $Q - s$ ) is then transformed into the coordinate system:  $s$  - abscissae and  $\sqrt{s}/Q$  - ordinates (Fig. 2). For the last points of the performed test at which

the settlement reached stabilization the following linear dependence is found (by way of approximation):  $\sqrt{s}/Q = A \cdot s + B$ . It may easily be calculated that a pile's ultimate resistance in accordance with the 80 percent method equals:

$$Q_{ult} = \frac{1}{2\sqrt{A \cdot B}}, \quad (1)$$

In the example in Figure 1, we obtain from the approximation the straight line:  $A = 0.00029756$  and  $B = 0.00431164$ . We are, therefore, able to calculate:  $Q_{ult} = 441.4$  kN.

It is noteworthy that the estimation of load capacity is affected by both the number of points the arrangement of which we subject to the linear approximation, as well as potential random inaccuracies.

### 4. METHODS OF APPROXIMATION

The most frequently used methods of approximation are based on the so called least squares method. The majority of spreadsheets is equipped with built-in solvers (using that method) which make it possible to describe the set of points under analysis in terms of a linear dependence (or a dependence of higher order). In more advanced instances of the implementation of the least squares method it is also possible to assign weights to particular observations. In each case under scrutiny, while calculating the ultimate resistance, we eliminate those points (by way of "zero-weighting") whose distribution falls into the range of the elastic work of a pile in the subsoil. The data gained from the range of the elastic-plastic pile behavior may also be divided into the more and less significant ones. Intuition tells us that the calculation result is influenced most significantly by the last readouts of the load test, and in particular those which belong to the range of  $(0.8 \div 1.0) Q_{max}$ .

A separate issue entails the effort at minimizing the influence of the aforementioned systematic and random errors, as well as at eliminating the

gross errors. One may apply with that respect methods of robust estimation, known from mathematical statistics and frequently used in geodesy. The essence of those methods consists in the application of the least squares methods accompanied by the iterative modification (decreasing) weights of those observations considered to be outliers. The points are thought to be outliers when the deviation of their approximation exceeds the value assumed as permissible. As a result, the outlying observations have a smaller (and in the extreme cases – null) impact on the obtained solution. That makes it possible to fit the assumed theoretical model of approximation into the largest number of congruent points. In this article only two methods of robust estimation: the Hampel method and the so called Danish method are being considered.

**4.1. THE HAMPEL METHOD**

This method was proposed by Hampel in work (Hampel, 1974) and described in article (Hogg, 1979). It is a development of the Huber’s method originally described in the work (Huber, 1964). For the *i*-th observation, the iterative modification of weights follows the formula (2):

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{for } |v_i| \leq f \\ \frac{p_i \cdot f}{|v_i|} & \text{for } f < |v_i| \leq g \\ p_i \cdot f \cdot \frac{h - |v_i|}{h - g} & \text{for } g < |v_i| \leq h \\ 0 & \text{for } |v_i| > h \end{cases}, \quad (2)$$

where:

- $\hat{p}_i$  - modified weight;
- $p_i$  - weight of the *i*-th observation from the previous iteration (in the initial step assumed from the least squares method);

*v* - fitting deviation (derived from the approximation);

*f, g, h* - controlling parameters, determining the range of permissible values of fitting deviation *v*.

**4.2. THE DANISH METHOD**

This method was developed and described by Krarup (Krarup, Kubik, 1983). Unlike the method described above, it is marked by a more empirical approach to the issue of modification of the weights of the outlying observations. Those modifications, carried out in accordance with formula (3), employ the so-called damping function (4).

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{for } |v_i| \leq f \\ p_i \cdot t(v_i) & \text{for } |v_i| > f \end{cases}, \quad (3)$$

$$t(v_i) = \exp\left(-d \left(\frac{|v_i|}{f}\right)^k\right), \quad (4)$$

where: *d, k* – the damping function parameters with positive values.

**5. CALCULATION RESULTS**

The calculations of ultimate resistance were carried out on the basis of the results of static tests of four pre-cast concrete driven piles, tested at the construction site of a large commercial center in southern Poland. Using the Mathcad environment, an algorithm was developed for the purpose of calculating the ultimate resistance by means of the following methods:

- the least squares method (LS), assuming identical weights for all the points under scrutiny;
- the least squares method (LS+W), assuming differing weights for particular points;

- the Hampel method (Hm), assuming the initial differentiation of weights for particular points;
- the Danish method (D), assuming the initial differentiation of weights for particular points.

The calculations were based on the last six observations from the elastic-plastic work of piles. The selection no other number but six observations before the completion of the load test is justified by the fact that typically no more than six observations are recorded between the load relief and the point at which the maximum loading is attained during the field test. The observations were numbered starting from the end of the loading: the last observation was numbered 1, the last but one – 2, etc. The differentiation of weights in the least squares method (and of the initial weights – in the case of the robust estimation) consisted in assigning the weight of 1.0 to observation no. 1, the weight of 0.8 - to observation no. 2, the weight of 0.6 – to observation no. 3, the weight of 0.2 – to observations no. 5 and 6. The application of the aforementioned robust estimation methods requires the assumption of certain values of controlling parameters which define the permissible range of fitting deviation (approximation). Those parameters are usually assumed empirically, appropriately for particular implementations of the methods described above. In this article, the value of parameter  $f$  was set at the level of 50%, 75% and 100% of the value of the standard deviation of approximation inaccuracies from the previous iteration (at the initial stage of calculations – from the least squares method with differing weights). The parameter  $g$  is equal to the parameter  $f$  plus the value of the standard deviation of approximation inaccuracies. The parameter  $h$  is equal to the parameter  $f$  increased by two standard deviations. In the Danish method, the values of parameters  $d$  and  $k$ , affecting the “shape” of the damping function – formula (4) – were assumed, on the basis of geodetic sources, at the levels of:  $d = 0.05$ ,  $k = 4.4$ . The test for convergence of the iteration

process was set at the following level: the alteration of the values of both searched parameters  $A$  and  $B$  in three subsequent iterations should not exceed  $1 \cdot 10^{-7}$  (to provide a proper accuracy of results).

Table 1 presents the results of calculations of the ultimate resistance  $Q_{ult}$  following different methods. It may be observed that the mere assignment of weights to the subsequent points does not have a great influence on the fitting of the straight line and thus on the calculated ultimate resistance (failure load).

Table 1. Pile ultimate resistance  $Q_{ult}$  [kN]

Pile	LS method	LS+W method	Hampel/Danish method		
			$f =$		
			0.50 $\sigma$	0.75 $\sigma$	1.00 $\sigma$
P1	680.2	682.1	704.7/704.4	695.5/692.4	691.1/691.0
P2	573.8	575.4	597.0/597.2	597.6/597.6	597.7/597.7
P3	441.4	441.8	444.4/444.5	448.1/448.3	442.8/442.8
P4	690.0	686.9	687.2/687.2	685.2/685.2	685.6/685.6

Only the elimination of the points which stand out from the mathematical model affects the obtained results. Figures 3 and 4 present the results of fitting of straight lines to the calculations of the ultimate resistance of pile P2, which show the greatest differences in the results obtained by means of the least squares method approximation in comparison with the results from the robust estimation methods.

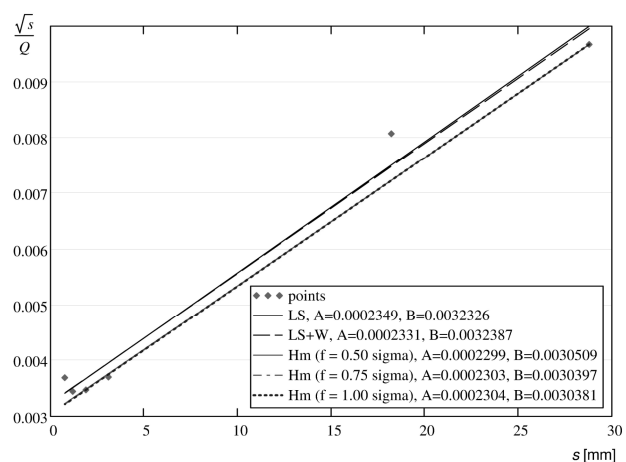


Fig. 3. Approximation by means of the least squares method (LS) and the Hampel method.

The analysis of the final weights assigned to the subsequent points leads to very interesting conclusions. Table 2 and 3 juxtaposes the final weights from the calculations performed for pile P2. It may be noticed that for pile P2, point 2 was rejected in all of the variants of robust estimation. It was observed that point 6 obtained a lesser weight than initially assumed (actually, the calculations could as well be carried out only for five points).

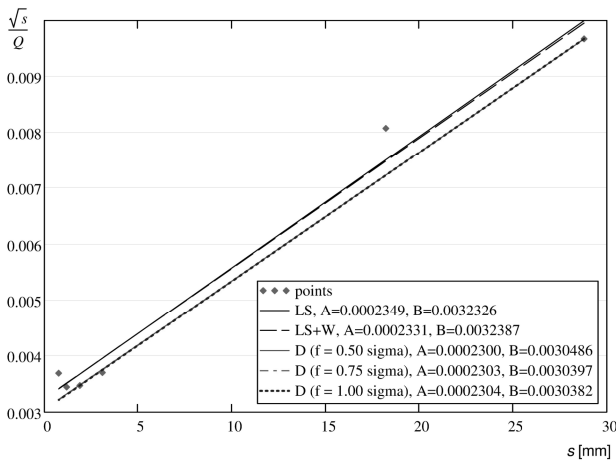


Fig. 4. Approximation by means of the least squares method (LS) and the Danish method (D)

Table 2. Final weights of observations

Pts	LS method	LS+W method	Hampel method (Hm): $f =$		
			0.50 $\sigma$	0.75 $\sigma$	1.00 $\sigma$
1	1.00000	1.00000	0.57545	0.86318	1.00000
2	1.00000	0.80000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1.00000	0.60000	0.37428	0.56142	0.60000
4	1.00000	0.40000	0.31246	0.40000	0.40000
5	1.00000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
6	1.00000	0.20000	0.00000	0.00005	0.00016

Table 3. Final weights of observations

Pts	LS method	LS+W method	Danish method (D): $f =$		
			0.50 $\sigma$	0.75 $\sigma$	1.00 $\sigma$
1	1.00000	1.00000	0.56622	0.90889	1.00000
2	1.00000	0.80000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1.00000	0.60000	0.40267	0.56113	0.60000
4	1.00000	0.40000	0.34490	0.40000	0.40000
5	1.00000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
6	1.00000	0.20000	0.00000	0.00001	0.00034

A very important information from the practical point of view is that – for all of the piles – the

final weights for point 1 have large values. That confirms the intuition that the decisive role in calculation of the ultimate value is played by the last observation before the completion of the load test.

## 6. SUMMARY AND CONCLUSIONS

The assumed degree of differentiation of weights in the least squares method has a minor influence on the obtained value of the failure load  $Q_{ult}$ . The results obtained from the robust estimation depend, to a certain degree, on the assumed values of the controlling parameters  $f, g, h$ . That, however, refers more to the weights assigned to particular points than to the values of failure load, which draw our attention. On the basis of the results obtained from the robust estimation methods (with three values of controlling parameter  $f$ , selected intuitively) we can observe that the widely used least squares method makes it possible to estimate the failure load with sufficient accuracy - from the point of view of practical engineering.

The above analysis, however, has also another advantage which proves an engineer's intuition correct. It confirms that in order to calculate the failure load precisely enough, it is necessary to obtain reliable data from the field tests – in measurements of the pile's settlement at the final stages of the loading. That is proved by the very large weights attributed to point 1 (the last recording of settlement) in the robust estimation calculations. That is rather difficult in practice, because at the final stages of the loading – large settlement values are recorded with the accompanying long stabilization periods and huge deformations of the whole loading system.

## REFERENCES

1. **Brinch Hansen J.:** (1963) Discussion, Hyperbolic Stress-Strain response, Cohesive soil. Journal of soil mechanics and foundation engineering division, ASCE, 89, pp.

241-242

2. **Hampel F.:** (1974) The Influence Curve and Its Role in Robust Estimation. *Journal of American Statistical Association*, 69, 346, pp. 383-393
3. **Hogg R.V.:** (1979) Statistical Robustness: One View of Its Use in Applications Today. *The American Statistician*, 33, 3, pp. 108-115
4. **Huber P.J.:** (1964) Robust Estimation of a Location Parameter. *The Ann. of Math. Stat.*, 35, 1, pp. 73-101
5. **Krarpup T., Kubik K.:** (1983) The Danish method. Experience and philosophy. *Deutsche Geodätische Kommission. Reihe A*, 98, pp. 131-134
6. PN-83/B-02482 (1983): Foundations. The capacity of piles and pile foundations.
7. PN-EN 1997-1 (2008): Eurocode 7: Geotechnical design - Part 1: General rules.

---

Zbigniew Muszynski, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspińskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland;  
e-mail: zbigniew.muszynski@pwr.wroc.pl  
jaroslaw.rybak@pwr.wroc.pl

Jaroslaw Rybak Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspińskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland;  
e-mail: jaroslaw.rybak@pwr.wroc.pl

# THE ALGORITHM FOR NONLINEAR INELASTIC OPTIMIZATION OF 3D STEEL FRAMEWORKS UNDER SERVICEABILITY REQUIREMENTS

*Michail Popov, Romanas Karkauskas, Liudvikas Rimkus*

Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, LITHUANIA

**ABSTRACT:** An actual design of 3D steel frames structures must evaluate strength, stiffness and stability constraints (serviceability requirements) as well as nature of external loading. A design structure must satisfy optimality and safety criterions. An algorithm to solve optimization problem, incorporating all above described criterions, taking into account the geometrically non-linear structural behaviour, is presented for the 3D frame structures. The internal forces of each optimization cycle are obtaining in the previous optimization cycle via elastic-plastic nonlinear analysis procedure. Obtained forces are employing to obtain the new optimal design values. The nodal displacements are restricted during the optimization procedures to limited magnitudes in prescribed directions. The numerical experiment of the two-storeyed 3D steel frame designing by the standard steel profiles cross-section optimization problem was performed to show possibilities of suggesting solution algorithm.

**Key words:** optimization, stiffness and stability constraints, tangent stiffness matrix; elastic-plastic analysis; displacement bounds.

## 1. INTRODUCTION

The main goal of structure's optimization problem is to obtain project, which satisfy safety, serviceability conditions and design requirements from various external actions and loads. It can be provided by having comprehensive information about building structure behaviour in all work conditions and any moment of existence period. Optimization problem in such broad concept cannot be solved by linear theory methods of structural mechanics. Structure form and size is considerably varying under certain loads and small displacement principle become unreliable. In addition, Hook's law is not satisfying and should be substituted by nonlinear relation for many materials, starting from certain stress condition level. It is necessary to renounce linear theory assumptions and use much more broader and complicated nonlinear theory generalizations. At first it is necessary to renounce calculation by unstrained structure's condition tolerating small displacements. Secondly, to obtain structure form and geometry variation influence on its deflected mode.

Thirdly, to take on the nonlinear stressed-deformed relation and to estimate appearing plastic deformations, because large displacements are obtaining in certain material structures before plastic collapse and do not satisfy regular service requirements. Thereby these above mentioned causes should be estimated composing structure's optimization problems mathematical models.

Building structures optimization theory, methods, calculating algorithms and its' integration into modern computer simulation technique and automated design systems were rather intensive developing for the last thirty years [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. It should be noted that at the present time appeared works where used genetic algorithms, based on biological principles introduction in computer technologies of structures optimization problems realizations [8], [9], [10], [11]. Attractive features of these algorithms is its compatibility with discrete optimization and it is not require function derivatives disliked by structural engineers, which is broad using in classical optimization methods.

Analysis of performed works allows to

predicate, that structure optimization technique simultaneously applying mathematical programming theory, extreme energy principles and material inelastic features is one of efficient techniques [5], [6], [13], [14], [15]. Here material plastic feature estimation is more exactly reveals structure behaviour in various load steps and allow produce considerably efficient project [4], [5], [14], [15], [16], [17]. It is worth to mention, that majority of works based on limit equilibrium theory assumptions [5], [6]. Obtained optimal structure projects for this reason satisfying only strength condition, satisfied by safety condition. It is essential to note that optimization results according to plastic collapse criterion is not always decisive, because optimal structure limit condition state can be fail even not obtaining plastic collapse through overestimated inelastic deflections, and it leading displacements occurring. In addition optimization problem boundary conditions are ordinary formulating does not considering codes of structural design requirements [18], [19] therefore optimal structure stiffness does not provide real structure behaviour.

Abovementioned causes bounds practical usage of limit equilibrium theory in optimal structures projects preparation. Thereby, structure deflected mode parameters estimation is necessary in optimization problems mathematical models. Deformability bounds define displacements bounds of frame nodes or single parts. Design constraints define minimal cross-sections parameters. Structures optimization allowing all these requirements and steel inelastic behaviour is one of the major optimal design problems.

Purposes of this work are:

- To formulate mathematical model for elastic-plastic geometrically nonlinear structures optimization problem;
- To suggest original algorithm for optimization problem solution;
- To develop frame element's tangent stiffness matrix composition technique;
- To solve structure's optimization problem subject to displacements boundary

conditions enabling to control spread of the free plastic deformations;

- To improve efficiency of suggesting solution algorithm by numerical experiment

## 2. THE MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION PROBLEM

The objective of any structure optimization problem is to find optimal structure element's cross-sections areas  $A_k^{min}$  distribution by  $k$  elements groups when structure geometry and external actions are known. The optimal criterion of such optimization problem is the minimum of the structure's volume. Forasmuch in this work investigating elastic-plastic structure, so optimal criterion should be satisfied when plastic deformations are spreading at least in one structure's element. Serviceability requirements of the considering optimization problem should to include first of all conditions which establish structure's real stress-strain state and deflected mode. Such conditions are defining by using generalized Lagrange method dependences ([5]). Second, stiffness conditions should include displacements boundaries in certain structure's nodes by defined directions:  $\mathbf{u}_t^- \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{u}_t^+$  ( $\mathbf{u}_t^-$  and  $\mathbf{u}_t^+$  are the codified prescribed lower and upper displacements variation bounds in  $t$  direction respectively). In addition processing of design boundaries for elements stability or lower variation limits  $\mathbf{S}_0^{min}$  of internal forces factors can be also used besides mentioned requisite conditions. All it bounds free distribution of inelastic deformations in structure's elements. Therefore elastic and plastic deformations depend on residual internal forces  $\mathbf{S}_r$  and residual displacements  $\mathbf{u}_r$ , appearing in optimal cross-sections of structure's elements. Structure is not reaches plastic collapse, if any of abovementioned boundaries become active.

In such way formed optimization problem

mathematical model is writing ([5]):

*find*

$$V(A_k) \rightarrow \min,$$

*subject to*

$$\begin{aligned} f(S_e, S_r, S_0(A_k)) &\leq 1, \\ [A_n]S_r &= F - [A_n]S_e, \\ [D_n]S_r - [A_n]^T u_r + \\ &[\nabla^T f(S_e, S_r, S_0(A_k))] \lambda = 0, \\ \lambda^T (1 - f(S_e, S_r, S_0(A_k))) &= 0, \\ u_t^- \leq u_{e,t} + u_{r,t} \leq u_t^+, \\ S_0(A_k) &\geq S_0^{\min}, \lambda \geq 0, \\ k &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (1)$$

where  $[D_n]$  is structure's flexibility matrix considering variations in the geometry of the structure;  $[A_n]$  is matrix of coefficients of equilibrium condition considering variations in the geometry of the structure;  $F$  is the vector of external forces applied to discrete model nodes of the structure;  $\lambda$  is the vector of Lagrange multipliers;  $S_e$  is the vector of elastic response internal forces;  $u_e$  is the vector of elastic response displacements;  $S_0^{\min}$  is the vector of prescribed lower carrying capacity bounds of structure's elements cross-sections. It is nonlinear mathematical programming problem which direct solving is rather complicated. Reason of complication is Kuhn-Tucker complementarity conditions, i.e. equations  $\lambda^T (1 - f(S_e, S_r, S_0)) = 0$ .

To avoid mentioned complications authors suggest splitting problem solution in three stages:

1. Nonlinear elastic analysis;
2. Elastic-plastic nonlinear analysis;
3. Structure cross-section optimization.

Further detailed explanation of suggesting algorithm stages is presented.

### 3. THE NONLINEAR ELASTIC ANALYSIS

The structure's nonlinear elastic analysis is the first stage of the suggesting algorithm. The structure's behaviour is describing in nonlinear way, when large displacements are investigating in the loaded structure. Thus nonlinear members appear in displacements dependencies. The tangent stiffness method is applied to solve main equation of the elastic computation nonlinear analysis:

$$[K_\tau] u_e = F, \quad (2)$$

where  $[K_\tau]$  is the structure's global tangent stiffness matrix.

Results of the problem (2) is  $u_e$  and  $S_e$ . First stage problem is solving in optimization problem iterative cycle, when cross-sections areas  $A$  and axial inertia moments  $I$  dependencies on cross-sections are specified. To solve equation (2) structure's tangent stiffness matrix should be evaluated. Structure's small displacements (elastic) stiffness matrix is usually presented in literature ([20], [21]), but full expression of the tangent stiffness matrix is usually skipped.

Short review of tangent stiffness matrix  $[K_\tau]$  obtaining technology for 3D beam-column element (Figure 1) is presented in [24].

Authors made symbolic calculations by using MATLAB Symbolic Math Toolbox to obtain space frame element's tangent stiffness matrix expression.

Newton-Raphson force control method is used for numerical realization of the tangent stiffness method nonlinear equations system (2) solution. These method mathematical calculation procedures are often presented in the literature which is observing numerical methods ([25], [26]). Application of this method to obtain values of elastic calculation nonlinear analysis is more widely presented in [23] work.

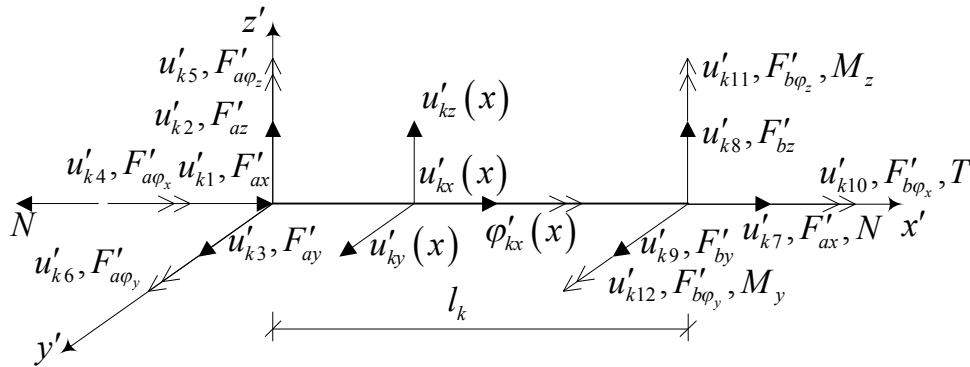


Fig. 1. Internal forces and displacements of the space frame finite element in the local  $x'y'z'$  coordinate system

#### 4. THE ELASTIC-PLASTIC NONLINEAR ANALYSIS

It is the second stage of suggesting optimization problem solution algorithm. The formation and solution features of such problem are more widely presented in the work [24].

find

$$\max -\frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T [D_n] \mathbf{S}_r - \mathbf{S}_r^T [D_n] \mathbf{S}_e - \lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0)) + \mathbf{u}_r^T \mathbf{F} - \lambda^T [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0)] (\mathbf{S}_e + \mathbf{S}_r), \quad (3)$$

subject to

$$[D_n] \mathbf{S}_r - [A_n]^T \mathbf{u}_r + [\nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0)] \lambda = \mathbf{0}, \quad \lambda \geq \mathbf{0}.$$

The problem (3) is the convex nonlinear mathematical programming problem, which main unknowns are  $\mathbf{S}_r$ ,  $\mathbf{u}_r$  and  $\lambda$  vectors. First two vectors allow to obtain real internal forces  $\mathbf{S}$  and displacements  $\mathbf{u}$ . Lagrange multipliers  $\lambda$  vector allow to obtain structure's cuts, in which plastic deformations occurs.

#### 5. STRENGTH CONDITIONS

For the 3D structures it is significant to use strength conditions including not only tension-

compression strength, but also the strength of the structural element, bending about both axes, as well. Strength condition for a complex stress-strain state is usually given in the design codes and specifications regulating the design of building structures ([18], [19], [22]). But as reveals work [24] usage of codes specification's strength conditions gives results strongly inaccurate from the real stress-strain state.

Though the strength conditions are provided by the design codes and specifications, the efforts of various researchers were made to accurately reflect a complex state of strains. The example is the Orbison's full plastification surface of cross-section ([12]), which graphical view is presented in Figure 2 and described as follows:

$$1 \geq 1,15 p_j^2 + m_{y,j}^2 + m_{z,j}^4 + 3,67 p_j^2 m_{y,j}^2 + 3,0 p_j^6 m_{z,j}^2 + 4,65 m_{y,j}^4 m_{z,j}^2, \quad (4)$$

where  $p_j = P_j / P_{y,j}$ ;  $m_{y,j} = M_{y,j} / M_{py,j}$  (a „strong“ element cross-section axis (Figure 2));  $m_{z,j} = M_{z,j} / M_{pz,j}$  (a „weak“ element cross-section axis (Figure 2));  $P_j$  is an axial force applied to the element of the structure at the  $j$ -th cut and  $P_{y,j}$  is the limiting axial force for tension or compression at the  $j$ -th cut;  $M_{y,j}$  and  $M_{py,j}$  are the bending moment and the limiting bending moment about the cross-section's „strong axis“ at the structural element's  $j$ -th cut;

$M_{z,j}$  and  $M_{pz,j}$  are the bending moment and the limiting bending moment about the cross-section's "weak axis" at the structural element's  $j$ -th cut.

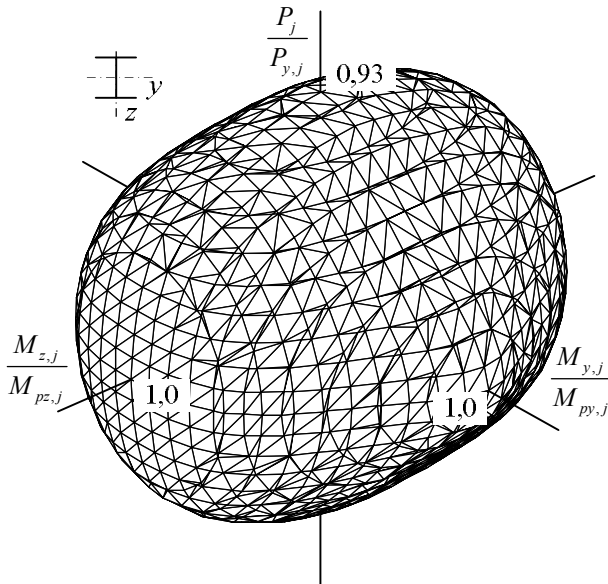


Fig. 2. The full plastification surface according to the Orbison's strength conditions

Local elements' stability is checked by formula (4) when the compression members are loaded up to their critical forces values. Critical forces values for two axes of cross-section can be obtained by specifications' regulating the design of building structures requirements ([18], [22]). Global structure's stability is checked by calculating determinant of all structure's tangent stiffness matrix  $[K_\tau]$  at first stage's Newton-Raphson force control method last iteration.

## 6. THE STRUCTURE CROSS-SECTIONS OPTIMIZATION PROBLEM

It is the third stage of suggesting algorithm. At this stage obtaining new optimal projecting parameters (areas of cross-sections) by using information of the real structure's deflected mode and stress-strain state. Third stage optimization problem mathematical model is writing:

find

$$V(A_k) \rightarrow \min,$$

subject to

$$f(S_e, S_r, S_0(A_k)) \leq 1, \quad (5)$$

$$u_t^- \leq u_t \leq u_t^+, A_k \geq A_k^{min},$$

$$t = 1, 2, \dots, m_t, k = 1, 2, \dots, s.$$

where  $A_k^{min}$  is the lower bound of design requirements. Optimization problem (5) is nonlinear convex mathematical programming problem having global extremum ([23]).

For the (5) problem displacements boundary conditions it is worth to obtain real structure displacements for displacements boundaries. It can be obtained by using formula:

$$u_t = \sum_{k=1}^s u_{t,k} [\tilde{k}_{\tau,k}] \bar{u}_{t,k} \quad (6)$$

where  $u_{t,k}$  is nonlinear elastic-plastic analysis element's nodal real displacements in  $t$  direction vector from specified external load, obtaining by solving (3);  $[\tilde{k}_{\tau,k}]$  is the element tangent stiffness matrix, combining required cross-sections  $A_k$ ;  $\bar{u}_{t,k}$  is element's nodal displacements vector, estimated from singular force, applied in bounded displacement direction, considering structure's discrete model change by obtained plastic deformations distribution.

Cross-sections design requirements  $A_k^{min}$  for problem (5) can be obtained by using specifications' regulating the design of building structures requirements, or it can be made by solving optimization problem of the structure being prior to plastic collapse. Mathematical model of such structure optimization problem writing ([7]):

*find*

$$\mathbf{L}^T \mathbf{S}_0(A_k^{min}) \rightarrow \min,$$

*subject to*

$$\mathbf{f}(\mathbf{S}_e, \mathbf{S}_r, \mathbf{S}_0(A_k^{min})) \leq 1, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_n \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - \mathbf{A}_n \mathbf{S}_e,$$

$$\mathbf{S}_0(A_k^{min}) \geq \mathbf{0}, k = 1, 2, \dots, s.$$

This problem practically must be solved by iterations.

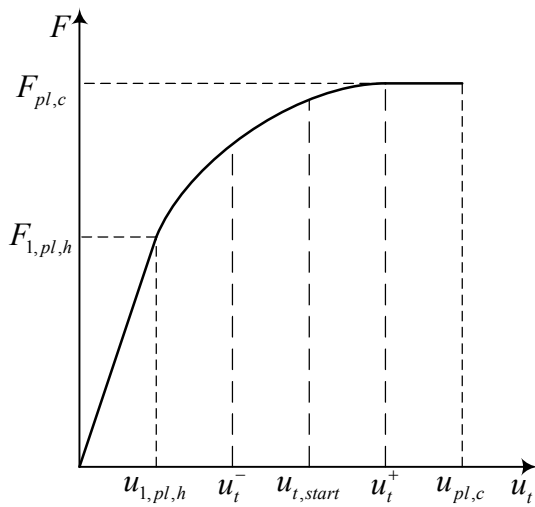


Fig. 3. Bounds for displacement in *t* direction

Some words about obtaining displacements boundaries  $u_t^-$  and  $u_t^+$ . It can be made by using cross-sections obtained at the result of (7) problem and changing applied load ratio. Upper bounds of the displacements can be obtained by using insignificantly smaller load ratio than it was used to solve (7) problem and solving (2) and (3) problems, i.e. obtaining displacements occurred in structure being prior to plastic collapse (Figure 3,  $u_{pl,c}$  displacements level). Then obtaining displacements when the first plastic hinge is occurs (Figure 3,  $u_{1,pl,h}$  displacements level). It results by decreasing load ratio and performing (2) and (3) problems solution. Such values are lower bounds of displacements, i.e. displacements corresponding elastic response. Thus, that limits of the

displacements for (5) problem should be between these limit values:

$$\begin{aligned} \text{when } u_t^+ > 0, \text{ so } u_{1,pl,h}^+ \leq u_t^+ \leq u_{pl,c}^+; \\ \text{when } u_t^- < 0, \text{ so } u_{1,pl,h}^- \geq u_t^- \geq u_{pl,c}^-. \end{aligned} \quad (8)$$

It should be made for good convergence and efficient mathematical model usage.

### 7. THE NUMERICAL EXPERIMENT

A two-storeyed space frame structure was chosen to illustrate suggesting optimization algorithm possibilities. Frame geometry and external load distribution is presented in Figure 4. Forces magnitudes are:  $P = 375 \text{ kN}$ ,  $H_1 = 150 \text{ kN}$ ,  $H_2 = 75 \text{ kN}$  and  $H_3 = 37,5 \text{ kN}$ . Structure elements are grouped by cross-section areas in 4 different groups. This distribution is presented on Figure 4. Material for all elements is the steel with following physical parameters – modulus of elasticity  $E = 206,85 \text{ GPa}$ , yield strength  $f_y = 250 \text{ MPa}$ . Geometrical non-linear deformable behaviour is considering.

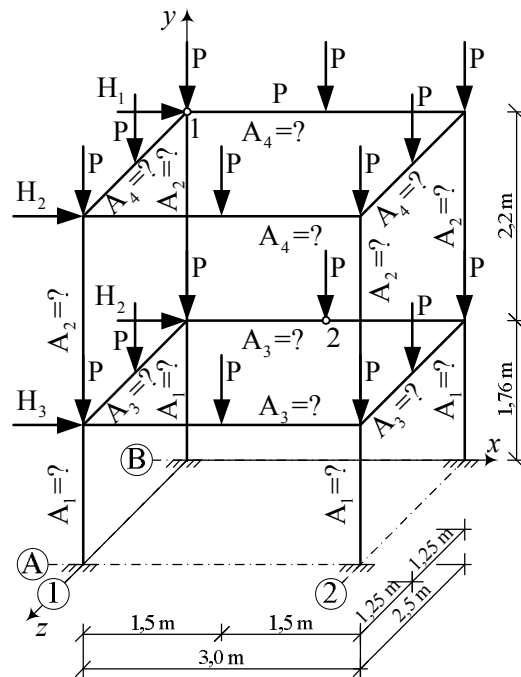


Fig. 4. Two-storeyed frame discrete model

The created FEM discrete model contains 20 nodes with degree of freedom equal 96 and combines two finite elements types, i.e. 8 columns elements and 16 beams elements. All of them are assumed to be the compressive-tensile-torsional-flexural in two axial directions. The total number of all structure's internal forces is 144.

For the suggesting algorithm numerical realization it is necessary to get relationships between elements' cross-sections geometrical parameters:

$$Z_k = a_{k,z} A_k^{b_{k,z}}$$

where  $Z_k$  is the any considering cross-section geometrical parameter of the  $k$  group elements;  $A_k$  is the cross-section area of the  $k$  group elements;  $a_{k,z}$  and  $b_{k,z}$  are relation coefficients were obtained for  $Z_k$  cross-section geometrical parameter for  $k$  group elements. The hot rolled American wide flange  $W$  type cross-sections profiles were chosen for optimization problem. Shortly observe two-storeyed frame dimensional instability (displacements) boundaries. Optimizing cross-sections lower limits are obtaining from limit equilibrium problem (7) solution. Result was obtained after 5 iterations:  $A_1^{\min} = 90,64 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^{\min} = 64,08 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^{\min} = 66,47 \text{ cm}^2$ ;  $A_4^{\min} = 68,96 \text{ cm}^2$ . For these cross-sections values and load ratio  $\gamma=0,9$ , are solving analysis problem (3) and obtaining frame displacements upper bounds (displacement values prior to plastic collapse):

by horizontal direction (by  $x$  axis) direction – at the two-storeyed level (node “1”, Figure 4)

$$u_{1,x,\max} = u_{e1,x} + u_{r1,x} = 1,61 + 0,93 = 2,54 \text{ cm};$$

by vertical direction (by  $y$  axis) – deflection of the middle node of first fool beam by “B” axis (node “2”, Figure 4)

$$u_{2,y,\max} = u_{e2,y} + u_{r2,y} = -0,44 - 0,14 = -0,58 \text{ cm}.$$

Further by decreased load ratio  $\gamma=0,6$  solving analysis problem (3) and obtaining first plastic hinge occurrence place. First plastic hinge occurred in the top of the column element on two-storeyed level at “2” and “B” axes interception (Figure 5). For such stress-strain state displacements values are:

$$u_{1,x,\min} = u_{e1,x} + u_{r1,x} = 1,23 + 0,14 = 1,37 \text{ cm},$$

$$u_{2,y,\min} = u_{e2,y} + u_{r2,y} = -0,34 - 0,01 = -0,35 \text{ cm}.$$

It is frame displacements variation lower bounds. Thus bounds variations of presented problem conditions should between this limit bounds:

$$1,37 \text{ cm} < u_{1,x} = 1,5 \text{ cm} < 2,54 \text{ cm},$$

$$-0,58 \text{ cm} < u_{2,y} = -0,5 \text{ cm} < -0,35 \text{ cm},$$

what ensure elastic-plastic state of structure work.

For optimization iteration process it was chosen element's cross-sections values by 15 % bigger up on cross-sections obtained prior to plastic collapse. By choosing this start point, there are obtaining bounded displacements initial values from (3) analysis problem solutions, which are obeying necessary conditions (8):

$$1,37 \text{ cm} < u_{1,x}^{\text{initial}} = 1,40 \text{ cm} < 2,541663 \text{ cm},$$

$$-0,58 \text{ cm} < u_{2,y}^{\text{initial}} = -0,40 \text{ cm} < -0,35 \text{ cm},$$

Table 1. The optimum volume of two-storeyed steel frame solution convergence per iterations

Iteration	$A_1, (\text{cm}^3)$	$A_2, (\text{cm}^3)$	$A_3, (\text{cm}^3)$	$A_4, (\text{cm}^3)$	$V, (\text{m}^3)$
0	104,24	73,69	76,44	79,31	0,311
1	115,58	95,12	79,26	91,50	0,353
2	102,74	84,08	75,43	70,15	0,306
3	102,66	84,08	75,43	69,65	0,306
4	<b>102,66</b>	<b>84,08</b>	<b>75,43</b>	<b>69,65</b>	<b>0,306</b>

Optimal project by prescribed accuracy was obtained after 4 iterations of considering frame iterative calculation. Criterion to stop iterative calculation process was chosen cross-sections values changes, which should be less when 2,5% between iterations results. Projecting parameters results' changes evolution during optimization iterative process is presented in Table 2. Obtained optimal frame project (optimal values of structure's elements and structure's volume value) is written in Table 1, in line denoted by number 4. Plastic hinges occurrence places and sequence are presented in Figure 5.

project displacements have limit or near-limit values under described load. Displacement  $u_{1,x} = 1,49$  cm, that is less than specified limit value 1,5 cm; displacement  $u_{2,y} = -0,43$  cm, that is bigger than specified limit value  $-0,6$  cm.

Table 2. Sequence of the plastic hinge occurrence for structure's optimal project

Sequence of hinge formation	1	2	3	4
Load ratio	0,93	0,97	0,99	1,00

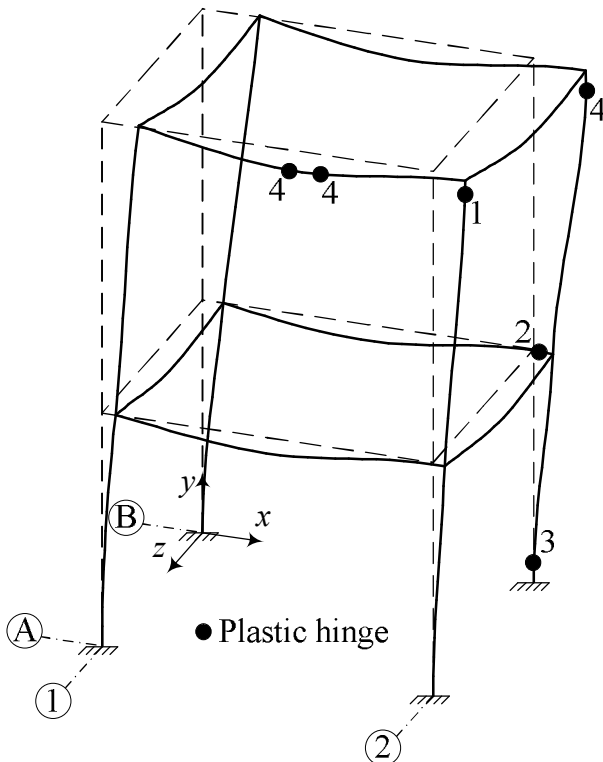


Fig. 5. Two-storeyed steel frame deformed shape under applied load and plastic hinge distribution dynamics.

The reliability of obtained optimal project result is proving by elastic-plastic analysis problem solution. Sequence of the plastic hinge occurrence in optimal structure project is presented in Table 2 and in Figure 5. Analysis of the results reveals that chosen displacements' limit bounds make influence on optimization process. Optimal structure's

## 8. CONCLUSIONS

The improved mathematical model and it's solution algorithm of the 3D steel frames cross-section optimization problem, taking into consideration inelastic behaviour of the material and serviceability requirements has been developed. Nonlinear elastic analysis based on tangent stiffness and numerically realized by using Newton-Raphson force control method. Comprehensive information about real stress-strain state of the structure gives the elastic-plastic nonlinear analysis by using proper Orbison strength conditions. Preparing procedures make possible to control iterative process of optimization problem solution, structure's plastic deformation spreading and to get good results convergence of structure cross-sections optimization problem. The optimization problem algorithm has been verified by solving two-storeyed space frame structure optimization problem and solving analysis problem by using obtained optimal parameters. The studies show that the proposed algorithm gives very well solution with much less computational effort and more control possibilities, than it can be done by using straight optimization problem solution. Future work is envisaged using suggested optimization problem solution algorithm for other types of structures researches.

## REFERENCES

1. **Jankovski V., Atkočiūnas J.** Biparametric shakedown design of steel frame structures // *Mechanika*. – 2011. – Vol. 17. – № 1. – pp. 5–12.
2. **Hasançebi O., Kazemzadeh Azad S.** An exponential big bang-big crunch algorithm for discrete design optimization of steel frames // *Computers & Structures*. – 2012. – Vol. 110–111. – pp. 167–179.
3. **Doğan E., Saka M. P.** Optimum design of unbraced steel frames to LRFD–AISC using particle swarm optimization // *Advances in Engineering Software*. – 2012. – Vol. 46. – № 1. – pp. 27–34.
4. **Atkočiūnas J., Merkevičiūtė D., Venskus A.** Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints // *Computers & Structures*. – 2008. – Vol. 86. – № 17–18. – pp. 1757–1768.
5. **Čyras A., Borkowski A., Karkauskas R.** Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems. – Vilnius: Technika. – 2004. – p. 354.
6. **Čyras A.** Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Chichester: Ellis Horwood Ltd. – 1983. – p. 121.
7. **Karkauskas R.** Optimisation of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse // *Journal of Civil Engineering and Management*. – 2007. – Vol. 13. – № 3. – pp. 37–41.
8. **Hayalioglu M.S.** Optimum design of geometrically non-linear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm // *Computers & Structures*. – 2000. – Vol. 77. – № 5. – pp. 527–538.
9. **Sahab M.G., Toropov V.V., Ashour A.F.** A hybrid genetic algorithm for structural optimization problems // *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*. – 2004. – Vol. 5. – № 3–4. – pp. 121–143.
10. **Rajan S.D., Nguyen D.T.** Design optimization of discrete structural systems using MPI-enabled genetic algorithm // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2004. – Vol. 28. – № 5. – pp. 340–348.
11. **Degertekin S.O., Saka M.P., Hayalioglu M.S.** Optimal load and resistance factor design of geometrically nonlinear steel space frames via tabu search and genetic algorithm // *Engineering Structures*. – 2008. – Vol. 30. – № 1. – pp. 197–205.
12. **Kim S., Park M.-H., Choi S.-H.** Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis // *Engineering Structures*. – 2001. – Vol. 23. – № 11. – pp. 1491–1502.
13. **Karkauskas R.** Analysis of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures // *Statyba*. – 1998. – Vol. 4. – № 1. – pp. 37–41.
14. **Karkauskas R., Norkus A.** Truss optimization under stiffness, stability constraints and random loading // *Mechanics Research Communications*. – 2006. – Vol. 33. – № 2. – pp. 177–189.
15. **Merkevičiūtė D., Atkočiūnas J.** Incremental method for unloading phenomenon fixation at shakedown // *Journal of Civil Engineering and Management*. – 2003. – Vol. 9. – № 3. – pp. 178–191.
16. **Chen H.F., Liu Y.H., Cen Z.Z., Xu B.Y.** On the solution of limit load and reference stress of 3-D structures under multi-loading systems // *Engineering Structures*. – 1999. – Vol. 21. – № 6. – pp. 530–537.
17. **Karkauskas R.** Optimization of elastic-plastic geometrically non-linear lightweight structures under stiffness and stability constraints // *Journal of Civil Engineering and Management*. – 2004. – Vol. 10. – № 2. – pp. 97–106.
18. **Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. – 2006. – Brussels.
19. **ANSI/AISC 360-10: Specification for Structural Steel Buildings**. – 2010. – Chicago.

20. **Rao S. S.** The finite element method in engineering. – Oxford: Elsevier Ltd. – 2004. – pp. 688.
21. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J. Z.** The finite element method: its basis and fundamentals. – Oxford: Butterworth-Heinemann. – 2005. – pp. 752.
22. STR 2.05.08:2005: Plieninių Konstrukcijų Projektavimas. Pagrindinės Nuostatos. [Design of Steel Structures. General Rules]. – 2005. – Vilnius. (in Lithuanian).
23. **Karkauskas R., Popov M.** The algorithm of the cross-section optimization of inelastic geometrical nonlinear steel frame structures // Engineering Structures and Technologies. – 2009. – Vol. 1. – № 1. – pp. 10–22. (in Lithuanian).
24. **Karkauskas R., Popov M.** The Analysis of Geometrically Nonlinear Elastic-Plastic Space Frames // Journal of Civil Engineering and Management. – 2011. – Vol. 17. – № 4. – pp. 558–568.
25. **Амосов А.А., Дубницкий Ю.А., Копченова Н.В.** Вычислительные методы. – Москва: Издательский дом МЭИ. – 2008. – pp. 672.
26. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of mathematics for engineers and scientists. – Boca Raton: CRC Press. – 2007. – pp. 1543.

---

Michail Popov, Department of Structural mechanics,  
Vilnius Gediminas Technical University, 11, Saulėtekio  
ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;  
e-mail: michail.popov@vgtu.lt

Romanas Karkauskas, Department of Structural  
mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, 11,  
Saulėtekio ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;  
e-mail: romas.karkauskas@vgtu.lt

Liudvikas Rimkus, Department of Structural mechanics,  
Vilnius Gediminas Technical University, 11, Saulėtekio  
ave., LT-10223, Vilnius, Lithuania;  
e-mail: liudvikas.rimkus@vgtu.lt

# АЛГОРИТМ РЕДУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ В РАМКАХ МНОГОУРОВНЕВОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ЧАСТЬ 2: ДВУМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В рамках развиваемого многоуровневого численного метода локального решения краевых задач строительной механики правильнее вести речь не о крупной и мелкой аппроксимирующей сетках, а о малом и большом количестве учитываемых членов (уровней) разложения по вейвлет-базису (базису Хаара). Процесс сокращения (обоснованного) количества учитываемых членов базиса Хаара здесь называется редукцией неизвестных. Настоящая статья посвящена алгоритму этой редукции в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач строительной механики на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Изложение материала ведется для двумерного случая.

**Ключевые слова:** вейвлет-анализ, алгоритмы редукции неизвестных, многоуровневые методы, численные методы, краевая задача, строительная механика

## WAVELET-BASED ALGORITHM OF REDUCTION OF UNKNOWNNS WITHIN MULTILEVEL NUMERICAL METHOD OF LOCAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS PART 2: TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Considering local multilevel numerical method of solution of boundary problems of structural mechanics it is correct to speak not about fine and coarse approximating meshes, but about small and large number of members accounted for (levels) the expansion in the wavelet basis (Haar basis). The reduction of the significant terms of the Haar basis is called a reduction of unknownns. The distinctive paper is devoted to the algorithm of this reduction within the local multilevel numerical method for solution of boundary problems of structural mechanics based on multiresolution wavelet analysis. Two-dimensional case is under consideration.

**Key words:** wavelet analysis, algorithm of reduction of unknownns, multilevel methods, numerical methods, boundary problem, structural mechanics

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\Omega = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \quad (1.1)$$

Пусть рассматривается двумерная прямоугольная область (рис. 1.1)

где  $x_1, x_2$  – координаты;  $l_1, l_2$  – размеры области вдоль координатных осей  $Ox_1, Ox_2$  соответственно.

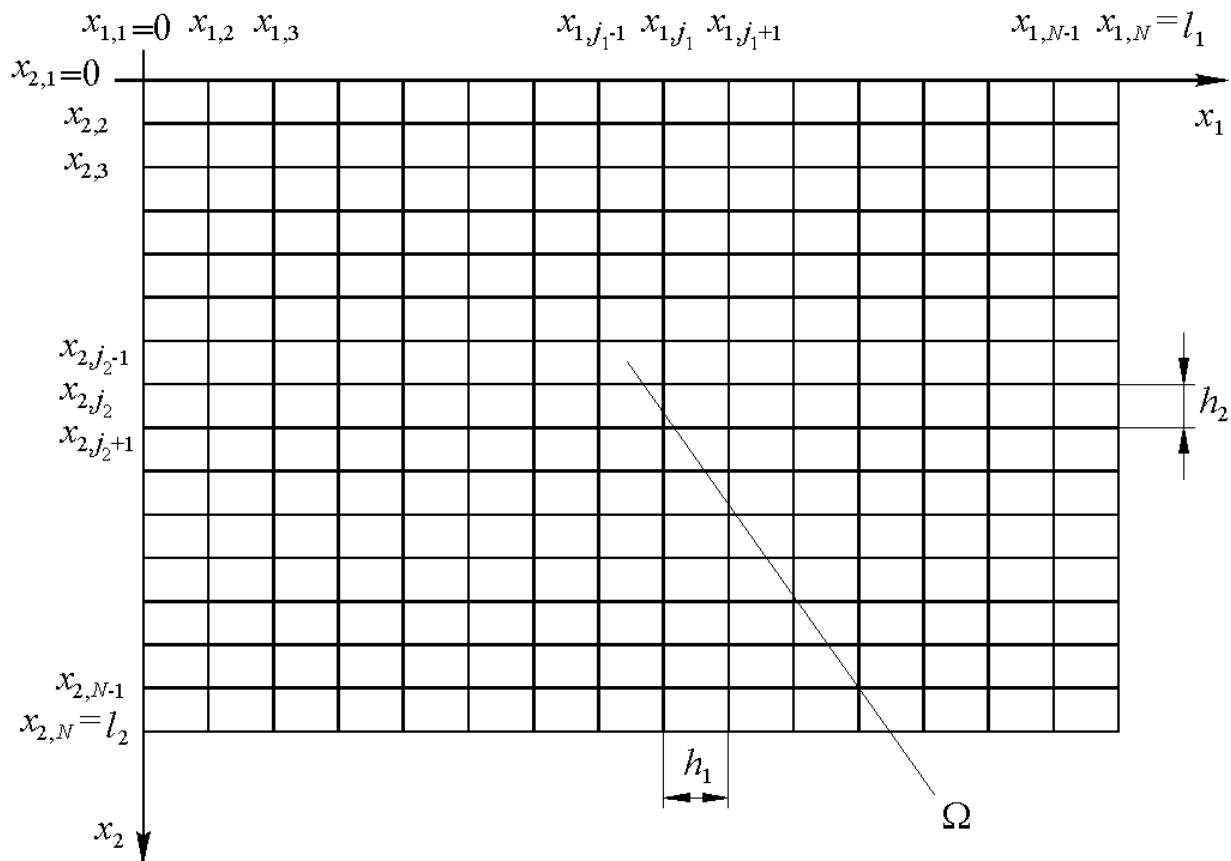


Рис. 1.1. Исходная двумерная прямоугольная область и ее дискретизация.

Разделим область (1.1) по горизонтали на  $(N-1)$  равных частей и по вертикали на  $(N-1)$  равных частей, где  $N = 2^M$ ,  $M$  – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления, очевидно, определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= (i-1)h_1, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\ x_{2,i} &= (i-1)h_2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – шаги деления по осям  $Ox_1, Ox_2$  соответственно,

$$h_1 = l_1 / (N-1); \quad h_2 = l_2 / (N-1). \quad (1.3)$$

Семейство функций Хаара  $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$ ,  $p = 1, 2, \dots, M$ ,  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $s_1 = 0, 1$ ,  $s_2 = 0, 1$  (причем не-

допустим случай  $s_1 = s_2 = 0$ ), определенных в узлах сетки, с учетом нормировки задается формулами:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2) &= \frac{1}{\alpha_p} \times \\ &\times \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, & \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q=0}^1 \left( \begin{aligned} 2^{p+1} \left( j_q - 1 + \frac{k_q}{2} \right) \leq i_q \wedge \\ \wedge i_q < 2^{p+1} \left( j_q - \frac{1}{2} + \frac{k_q}{2} \right) \end{aligned} \right) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \\ & i_1 = 1, 2, \dots, N; \quad i_2 = 1, 2, \dots, N; \quad 0 \leq p < M; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,0,1,1}^M(i_1, i_2) &= 1 / \alpha_M, \\ & i_1 = 1, 2, \dots, N; \quad i_2 = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем (1.5) является дополнением семейства функций (1.4) до базиса;  $N_p \times N_p$  – количество функций Хаара на  $p$ -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} N/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.6)$$

$\alpha_p$  – норма функции Хаара на  $p$ -ом уровне (определяется при отсутствии в (1.4) деления на  $\alpha_p$ ), т.е.

$$\forall j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad \forall j_2 = 1, 2, \dots, N_p$$

$$\|\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p\| = \alpha_p;$$

$$\alpha_p = \begin{cases} 2^{p+1}, & 0 \leq p < M \\ 2^M = N, & p = M. \end{cases} \quad (1.7)$$

Следует отметить, что значения индексов  $s_1$  и  $s_2$  соответствуют трем базовым функциям:

$$\psi_{1,0,j_1,j_2}^p$$

1	-1
1	-1

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0$$

$$\psi_{0,1,j_1,j_2}^p$$

1	1
-1	-1

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1$$

$$\psi_{1,1,j_1,j_2}^p$$

1	-1
-1	1

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1$$

Можно показать [1-8], что вектор (1.2) представим в виде

$$\bar{y} = Q\bar{v}, \quad (1.8)$$

где  $Q$  – матрица нормированных базисных функций Хаара, записанных по столбцам;  $\bar{v}$  – вектор коэффициентов разложения функции  $y(i_1, i_2)$  по базису Хаара, имеющий следующую структуру

$$\bar{v} = [(\bar{v}^0)^T \quad (\bar{v}^1)^T \quad \dots \quad (\bar{v}^M)^T]^T, \quad (1.9)$$

где

$$\bar{v}^p = [(\bar{v}_{1,1}^p)^T \quad (\bar{v}_{2,1}^p)^T \quad \dots \quad (\bar{v}_{N_p,1}^p)^T \quad (\bar{v}_{1,2}^p)^T \quad (\bar{v}_{2,2}^p)^T \quad \dots \quad (\bar{v}_{N_p,2}^p)^T \quad \dots \quad (\bar{v}_{1,N_p}^p)^T \quad (\bar{v}_{2,N_p}^p)^T \quad \dots \quad (\bar{v}_{N_p,N_p}^p)^T]^T, \quad 0 \leq p < M; \quad (1.10)$$

$$\bar{v}_{j_1, j_2}^p = [v_{1,0,j_1,j_2}^p \quad v_{0,1,j_1,j_2}^p \quad v_{1,1,j_1,j_2}^p]^T, \quad 0 \leq p < M; \quad (1.11)$$

$$\bar{v}^M = v_{0,0,1,1}^M; \quad (1.12)$$

$$\bar{y} = [y(1,1) \quad \dots \quad y(1,N) \quad y(2,1) \quad \dots \quad y(2,N) \quad \dots \quad y(N,1) \quad \dots \quad y(N,N)]^T, \quad (1.13)$$

причем, как видно, векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{y}$  имеют размерность

$$n = N^2. \quad (1.14)$$

Элементы матрицы  $Q$  определяются по формулам

$$\{Q\}_{i,t} = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, \\ \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q=0}^1 \left( 2^p (2j_q - 2 + k_q) \leq i_q \wedge \wedge i_q < 2^p (2j_q - 1 + k_q) \right) \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.15)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ; индексы  $i_1, i_2$  определяются по глобальному индексу  $i$  в соответствии с алгоритмом, изложенным в [1-8];

$$t = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (j_1 - 1) + (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}; \quad (1.16)$$

$$s_1 = 0, 1, \quad s_2 = 0, 1, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, 2, \dots, M - 1; \quad (1.17)$$

$$\{Q\}_{i,M} = 1/\alpha_M, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.18)$$

причем здесь были использованы обозначения

Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы

$$N_{comp,p} = \begin{cases} 3N_p, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.19)$$

$$N_{comp,tot}^{-1} = 0;$$

$$N_{comp,tot}^r = 3 \cdot \sum_{q=0}^r (N_q)^2, \quad r = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$N_{comp,tot}^M = n; \quad (1.20)$$

Очевидно, что формула для определения элементов матрицы  $Q$  может быть записана также следующим образом (см. также формулы (1.16)-(1.17)):

$$\{Q\}_{i,t} = \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2), \quad p = 1, 2, \dots, M-1, \quad (1.21)$$

$$\text{где } i_2 = (i-1)/N; \quad i_1 = i - (i_2 - 1) \cdot N; \quad (1.22)$$

$$\{Q\}_{i,M} = 1/\alpha_M. \quad (1.23)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\bar{\chi} = [(\bar{\chi}^0)^T \quad (\bar{\chi}^1)^T \quad \dots \quad (\bar{\chi}^M)^T]^T, \quad (1.24)$$

где

$$\bar{\chi}^p = [(\chi_{1,1}^p)^T \quad (\chi_{2,1}^p)^T \quad \dots \quad (\chi_{N_p,1}^p)^T \\ (\chi_{1,2}^p)^T \quad (\chi_{2,2}^p)^T \quad \dots \quad (\chi_{N_p,2}^p)^T \quad \dots \\ \dots \quad (\chi_{1,N_p}^p)^T \quad (\chi_{2,N_p}^p)^T \quad \dots \quad (\chi_{N_p,N_p}^p)^T]^T; \quad (1.25)$$

$$\chi_{j_1, j_2}^p = \begin{cases} 1, & \text{если } v_{1,0,j_1,j_2}^p, v_{0,1,j_1,j_2}^p, v_{1,1,j_1,j_2}^p \\ & \text{не редуцируется} \\ 0, & \text{если } v_{1,0,j_1,j_2}^p, v_{0,1,j_1,j_2}^p, v_{1,1,j_1,j_2}^p \\ & \text{редуцируется.} \end{cases} \quad (1.26)$$

В самом деле, очевидно, что редукция коэффициентов разложения по базису Хаара  $v_{1,0,j_1,j_2}^p, v_{0,1,j_1,j_2}^p, v_{1,1,j_1,j_2}^p$  может быть только одновременной.

Пусть  $\bar{v}^r$  – соответствующий редуцированный вектор коэффициентов разложения функции  $y(i_1, i_2)$  по базису Хаара

$$\bar{v}^r = [(\bar{v}^{r,0})^T \quad (\bar{v}^{r,1})^T \quad \dots \quad (\bar{v}^{r,M})^T]^T, \quad (1.27)$$

где  $\bar{v}^{r,p}$  –  $n^r$ -мерный вектор, получающийся путем исключения из вектора  $\bar{v}^p$  элементов  $v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p$ , для которых  $\chi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = 0$ , причем

$$n^r = \sum_{p=0}^M \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} \sum_{\substack{s_1=0, s_2=0 \\ s_1 \neq 0 \text{ или } s_2 \neq 0}}^1 \chi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p, \quad (1.28)$$

т.е. в сумме (1.28) не допускается случай, когда  $s_1 = s_2 = 0$ .

Значения исключаемых элементов  $v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p$  могут быть определены в соответствии с алгоритмом осреднения, подробно описанным в [1-8].

Очевидно, что можем записать

$$\bar{v} = R\bar{v}^r, \quad (1.27)$$

где  $R$  – прямоугольная матрица размером  $n \times n^r$ , которую будем называть матрицей редукции.

Основной задачей далее является построение матрицы редукции  $R$ .

## 2. НЕКОТОРЫЙ ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим ниже для определенности простейший частный случай  $N = 4$ . Очевидно, имеем:

$$M = 2; \quad N_0 = 2; \quad N_1 = 1; \quad N_2 = 1; \quad (2.1)$$

$$\bar{v} = [(\bar{v}^0)^T \quad (\bar{v}^1)^T \quad (\bar{v}^2)^T]^T, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{v}^0 = [(\bar{v}_{1,1}^0)^T \quad (\bar{v}_{2,1}^0)^T \quad (\bar{v}_{1,2}^0)^T \quad (\bar{v}_{2,2}^0)^T]^T;$$

$$\bar{v}^1 = \bar{v}_{1,1}^1; \quad \bar{v}^2 = v_{0,0,1,1}^2; \quad (2.3)$$

$$\bar{v}_{j_1, j_2}^0 = [v_{1,0,j_1,j_2}^0 \quad v_{0,1,j_1,j_2}^0 \quad v_{1,1,j_1,j_2}^0]^T, \quad (2.4)$$

$$j_1 = 1, 2; \quad j_2 = 1, 2;$$

$$\bar{v}_{1,1}^1 = [v_{1,0,1,1}^p \quad v_{0,1,1,1}^p \quad v_{1,1,1,1}^p]^T; \quad (2.5)$$

Пусть задано, что

$$\bar{\chi} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T, \quad (2.6)$$

т.е.  $\chi_{1,1}^0 = \chi_{1,2}^0 = \chi_{2,1}^0 = \chi_{2,2}^0 = 0$ ;

$$\chi_{1,1}^1 = \chi_{1,1}^2 = 1. \quad (2.7)$$

Итак, следуя (2.8)-(2.9) редуцированный вектор имеет вид:

$$\bar{v}^r = [v_{1,0,1,1}^1 \quad v_{0,1,1,1}^1 \quad v_{1,1,1,1}^1 \quad v_{0,0,1,1}^2]^T, \quad (2.8)$$

причем, очевидно, что

$$n^r = 4. \quad (2.9)$$

В соответствии с алгоритмом, описанным в [1-8], исключенные на этапе редукции неизвестные определяются по соответствующим формулам осреднения, которые в данном случае записываются следующим образом (ниже  $s_1 = 0, 1$ ,  $s_2 = 0, 1$  (причем недопустим случай  $s_1 = s_2 = 0$ )):

$$v_{s_1, s_2, 1, 1}^0 = v_{s_1, s_2, 2, 1}^0 = v_{s_1, s_2, 1, 2}^0 = v_{s_1, s_2, 2, 2}^0 = \beta_{s_1, s_2} v_{s_1, s_2, 1, 1}^1, \quad (2.10)$$

где  $\beta_{1,0} = 0.25$ ;  $\beta_{0,1} = 0.25$ ;

$$\beta_{1,1} = 0.125. \quad (2.11)$$

Итак, матрица редукции  $R$  сообразно вышеприведенным формулам (2.2), (2.8) и (2.10) определяется в виде

$$R = \begin{bmatrix} \beta_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

### 3. МУЛЬТИИНДЕКСЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ИНДЕКСАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Введем глобальную систему индексации элементов вектора (1.9) в соответствии с формулой:

$$k \Leftrightarrow (s_1, s_2, j_1, j_2, p), \quad (3.1)$$

где

$$k = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (j_1 - 1) + 3 \cdot (j_2 - 1) \cdot N_p + 3 \cdot \sum_{q=0}^{p-1} (N_q)^2; \quad (3.2)$$

$k$  – глобальный индекс;  $s_1, s_2, j_1, j_2, p$  – исходные индексы (мультииндекс).

Будем использовать далее следующие обозначения:

$$N_{comp,p} = \begin{cases} 3N_p, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (3.3)$$

Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы

$$N_{comp,tot}^{-1} = 0;$$

$$N_{comp,tot}^t = 3 \cdot \sum_{q=0}^t (N_q)^2, \quad t = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$N_{comp,tot}^M = n^2; \quad (3.4)$$

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов  $p, j_1, j_2, s_1, s_2$  по глобальному индексу  $k$ :

1. Задаем значение  $r = M$ .
2. Вычисляем значение  $N_{comp,tot}^r$ .
3. Вычисляем значение  $\chi_r$  по формуле

$$\chi_r = \left[ \frac{k-1}{N_{comp,tot}^r} \right], \quad (3.5)$$

где запись типа  $[a]$  обозначает целую часть числа  $a$ .

4. Если  $\chi_r = 1$ , то индекс  $p$  определяется по формуле

$$p = 1 + r. \quad (3.6)$$

Если  $p < M$ , то индексы  $j_1, j_2, s_1, s_2$  определяются по формулам

$$j_2 = 1 + \left[ \frac{k - N_{comp,tot}^{p-1} - 1}{N_{comp,p}} \right];$$

$$j_1 = 1 + \left[ \frac{k - N_{comp,tot}^{p-1} - N_{comp,p} \cdot (j_2 - 1) - 1}{3} \right];$$

$$s_2 = \left[ \frac{k - N_{comp,tot}^{p-1} - N_{comp,p} \cdot (j_2 - 1) - 3 \cdot (j_1 - 1) - 1}{2} \right];$$

$$s_1 = k - 2 \cdot s_2 - 3 \cdot (j_1 - 1) - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - N_{comp,tot}^{p-1}; \quad (3.7)$$

Если  $p = M$ , то индексы  $j_1, j_2, s_1, s_2$  определяются по формулам

$$j_1 = 1; \quad j_2 = 1; \quad s_1 = 0; \quad s_2 = 0. \quad (3.8)$$

Если  $r > 0$  и  $\chi_r = 0$ , то уменьшаем значение  $r$  на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если  $r = 0$  и  $\chi_r = 0$ , то следует положить

$$p = 0, \quad j_2 = 1 + \left[ \frac{k-1}{N_{comp,p}} \right],$$

$$j_1 = 1 + \left[ \frac{k - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - 1}{3} \right],$$

$$s_2 = \left[ \frac{k - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - 3 \cdot (j_1 - 1) - 1}{3} \right];$$

$$s_1 = k - 2 \cdot s_2 - 3 \cdot (j_1 - 1) - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p}. \quad (3.9)$$

#### 4. МУЛЬТИИНДЕКСЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ИНДЕКСАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РЕДУЦИРОВАННОГО ВЕКТОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Введем обозначения:

$$N_p^r = \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} \chi_{j_1, j_2}^p, \quad 0 \leq p \leq M; \quad (4.1)$$

$$N_{comp,p}^r = 3 \cdot \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} \chi_{j_1, j_2}^p, \quad 0 \leq p < M;$$

$$N_{comp,M}^r = \chi_{1,1}^M; \quad (4.2)$$

$$N_{tot,red}^{-1} = 0;$$

$$N_{tot,red}^r = \sum_{q=0}^t N_{comp,p}^q, \quad t = 0, 1, \dots, M. \quad (4.3)$$

Введем глобальную систему индексации элементов вектора (1.27) в соответствии с формулой:

$$k \Leftrightarrow (s_1, s_2, j_1, j_2, p), \quad (4.4)$$

где

$$k = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot \sum_{q_1=1}^{j_1-1} \chi_{q_1, j_2}^p + 3 \cdot \sum_{q_1=1}^{N_p} \sum_{q_2=1}^{j_2-1} \chi_{q_1, q_2}^p + N_{tot, red}^{p-1}; \quad (4.5)$$

$k$  – глобальный индекс;  $s_1, s_2, j_1, j_2, p$  – исходные индексы (мультииндекс).

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов  $s_1, s_2, j_1, j_2, p$  по глобальному индексу  $k$ :

1. Задаемся значением  $r = M$ .
2. Вычисляем значение  $N_{tot, red}^r$ .
3. Вычисляем значение  $\tau_r$  по формуле

$$\tau_r = \left[ \frac{k-1}{N_{tot, red}^r} \right]. \quad (4.6)$$

4. Если  $\tau_r = 1$ , то индекс  $p$  определяется по формуле

$$p = r + 1. \quad (4.7)$$

Далее вычисляем вспомогательную величину  $t$ :

$$t = k - N_{tot, red}^s. \quad (4.8)$$

Индексы  $s_1, s_2, j_1, j_2$  определяем в рамках описанной ниже процедуры:

- а) Задаемся значениями  $l_1 = 1, l_2 = 0, m_1 = 1, m_2 = 1$
- б) Вычисляем величину

$$r_{m_1, m_2} = l_1 + 2 \cdot l_2 + 3 \cdot \sum_{q_1=1}^{N_p} \sum_{q_2=1}^{m_2-1} \chi_{q_1, q_2}^p + N_{tot, red}^{p-1}. \quad (4.9)$$

- в) Если  $t = r_{m_1, m_2}$ , то

$$s_1 = l_1; \quad s_2 = l_2; \quad j_1 = m_1; \quad j_2 = m_2. \quad (4.10)$$

В противном случае следует выполнить описанные ниже действия:

- если  $l_1 = 1, l_2 = 0$ , то следует положить  $l_1 = 0, l_2 = 1$ ;
  - если  $l_1 = 0, l_2 = 1$ , то следует положить  $l_1 = 1, l_2 = 1$ ;
  - если  $l_1 = 1, l_2 = 1$  и  $m_1 < N_p$ , то следует увеличить значение  $m_1$  на единицу, положить  $l_1 = 1, l_2 = 0$  и перейти к пункту б) процедуры;
  - если  $l_1 = 1, l_2 = 1$  и  $m_1 = N_p$  следует увеличить значение  $m_2$  на единицу, положить  $m_1 = 1, l_1 = 1, l_2 = 0$  и перейти к пункту б) процедуры.
- Если  $r > 0$  и  $\tau_r = 0$ , то уменьшаем значение  $r$  на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если  $r = 0$  и  $\tau_r = 0$ , то следует положить

$$p = 0, \quad (4.11)$$

а индексы  $s_1, s_2, j_1, j_2$  определить согласно описанным выше пунктам а)-в) процедуры.

## 5. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ РЕДУКЦИИ

1. Изначально задаем всем элементам матрицы  $R$  нулевые значения, т.е. задаем  $R = 0$ .
2. Задаемся значением  $i_1 = n$ .
3. В соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 3) по глобальному индексу  $i_1$  находим мультииндекс  $p, j_1, j_2, s_1, s_2$  соответствующего элемента вектора (1.9).
4. Здесь следует отдельно рассмотреть два различных случая.
  - 4.1. Если  $\chi_{j_1, j_2}^p = 1$ , то в соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 4) по мультииндексу  $p, j_1, j_2, s_1, s_2$  находим соответствующий глобальный индекс  $i_2$  соответствующего элемента вектора (1.24), после

Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы

чего определяем значение элемента матрицы редукции по формуле

$$R_{i_1, i_2} = 1, \quad (5.1)$$

где  $i_1$  и  $i_2$  – соответственно номер строки и номер столбца, в которых расположен элемент матрицы.

4.2. Если  $\chi_{j_1, j_2}^p = 0$ , то далее вычисляем значения параметров

$$m = 1; \quad q = p + 1; \quad t_1 = j_1; \quad t_2 = j_2; \quad (5.2)$$

$$z_1 = \left[ \frac{t_1 + 1}{2} \right]; \quad z_2 = \left[ \frac{t_2 + 1}{2} \right]. \quad (5.3)$$

4.2.1. Если  $\chi_{z_1, z_2}^q = 1$ , то в соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 4) по мультииндексу  $q, t_1, t_2, z_1, z_2$  находим соответствующий глобальный индекс  $i_2$  соответствующего элемента вектора (1.24), после чего определяем значение элемента матрицы редукции по формуле

$$R_{i_1, i_2} = \beta^m. \quad (5.4)$$

4.2.2. Если  $\chi_{z_1, z_2}^q = 0$ , то увеличиваем величину  $m$  на единицу, увеличиваем величину  $q$  на единицу, задаем  $t_1 = z_1$ ,  $t_2 = z_2$  и переходим к формуле (5.3).

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2. Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный многоуровневый численный метод локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Алгоритмы осреднения неизвестных. // XXI Russian – Slovak – Polish Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engi-

- neering”. Proceedings. Moscow – Arkhangelsk, -03.07.2012 – 06.07.2012. Warszawa, 2012.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Об алгоритмах многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерный случай. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 94-100.
  5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б., Харитонов В.А.** Об алгоритмической реализации формул осреднения неизвестных в рамках численного решения краевых задач строительной механики с использованием двумерного дискретного базиса Хаара. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 129-136.
  6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
  7. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием двумерного дискретного базиса Хаара. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 312-322.
  8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.
- университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный

# ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ЧАСТЬ 1: УПРУГИЕ ИЗОТРОПНЫЕ БАЛКИ-СТЕНКИ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний упругих изотропных балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, численная реализация, собственные частоты, формы колебаний, балка-стенка, кусочно-постоянные параметры

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR EIGENVALUE ANALYSIS OF STRUCTURES WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIMENSION PART 1: ELASTIC ISOTROPIC DEEP BEAMS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to numerical implementation of discrete-continual finite element method (DCFEM) of eigenvalue analysis of elastic isotropic deep beams with piecewise-constant physical and geometrical parameters in basic dimension.

**Key words:** discrete-continual finite element method, numerical implementation, eigenvalue analysis, deep beam, piecewise-constant physical and geometrical parameters

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения собственных частот и форм колебаний балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками), как известно, связана с определением собственных значений и собственных функций соответствующих краевых задач строительной механики.

Изучение характеристик собственных колебаний конструкций важно для исследования их чувствительности к периодическим воздействиям. Данная проблема может быть эффективно решена на основе использования дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова [9-15]. Метод в данном случае является дискретно-

континуальным в том смысле, что по выделяемому направлению кусочного постоянства характеристик (основное направление) конструкции сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитическая форма получаемого решения, в то время как по другому производится дискретизация с использованием стандартной техники метода конечных элементов (МКЭ). Таким образом, построение алгоритмов решения осуществляется за счет разумного сочетания численных и аналитических подходов. Аналитичность получаемых при этом решений существенно способствует улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с помощью ДКМКЭ картина напряженно-деформированного состояния (НДС) развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них разного рода локальных и глобальных факторов. ДКМКЭ особенно эффективен в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Преимуществами ДКМКЭ также являются понижение размерности при численном решении и отсутствие практических ограничений на длину объектов по основному направлению. Континуальная постановка рассматриваемой далее задачи представлена в [2, 4], ниже излагаются вопросы соответствующей численной реализации.

### 1. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ (ДККЭ)

Для постановки и решения рассматриваемой задачи каждая исходная подобласть  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  окаймляется соответ-

ствующей расширенной  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  [15]. Принимается следующая дискретно-континуальная модель: по основному направлению (вдоль оси  $Ox_2$ ) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси  $Ox_1$ ) производится конечноэлементная аппроксимация, причем схема разбиения на дискретно-континуальные элементы одинакова для всех подобластей  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$ ) (рис. 1.1, 1.2).

Каждая подобласть  $\omega_k$  разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ)  $\omega_{k,i}$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  (рис. 1.1, 1.2).

$$\omega_k = \bigcup_{i=1}^N \omega_{k,i}; \quad (1.1)$$

$$\omega_k = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq l, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.2)$$

$$\omega_{k,i} = \{(x_1, x_2): x_{1,i} \leq x_1 \leq x_{1,i+1}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

$$h_i = \begin{cases} x_{1,i+1} - x_{1,i}, & i < N \\ 0, & i = N \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.4)$$

где  $l_1$ ,  $l_2$  – соответственно размеры конструкции по неосновному и основному направлениям;  $N$  – количество узлов конечноэлементной сетки по неосновному направлению;  $(x_{1,i}, x_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  – координаты узлов сетки;  $h_i$  – шаги сетки (размеры элементов по неосновному направлению). Определяем характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента  $\omega_{k,i}$  и поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i} \not\subset \Omega_k \end{cases}; \quad (1.5)$$

$$\bar{\lambda}_{k,i} = \theta_{k,i} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i} = \theta_{k,i} \mu. \quad (1.6)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

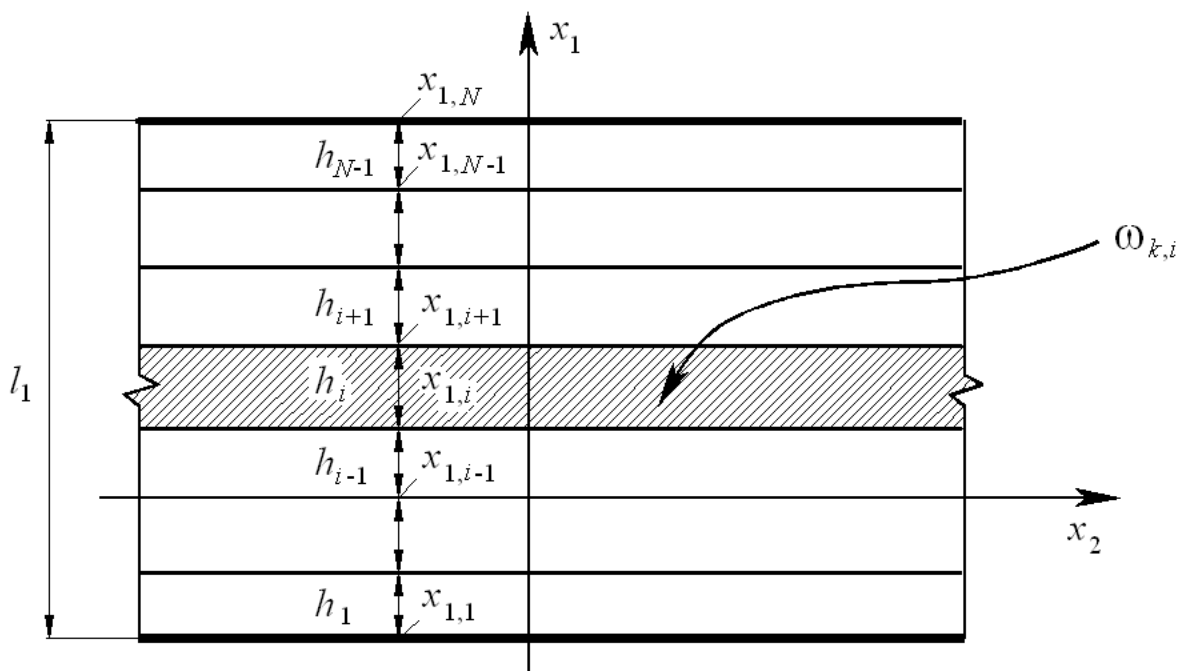


Рис 1.1. Схема дискретизации конструкции.

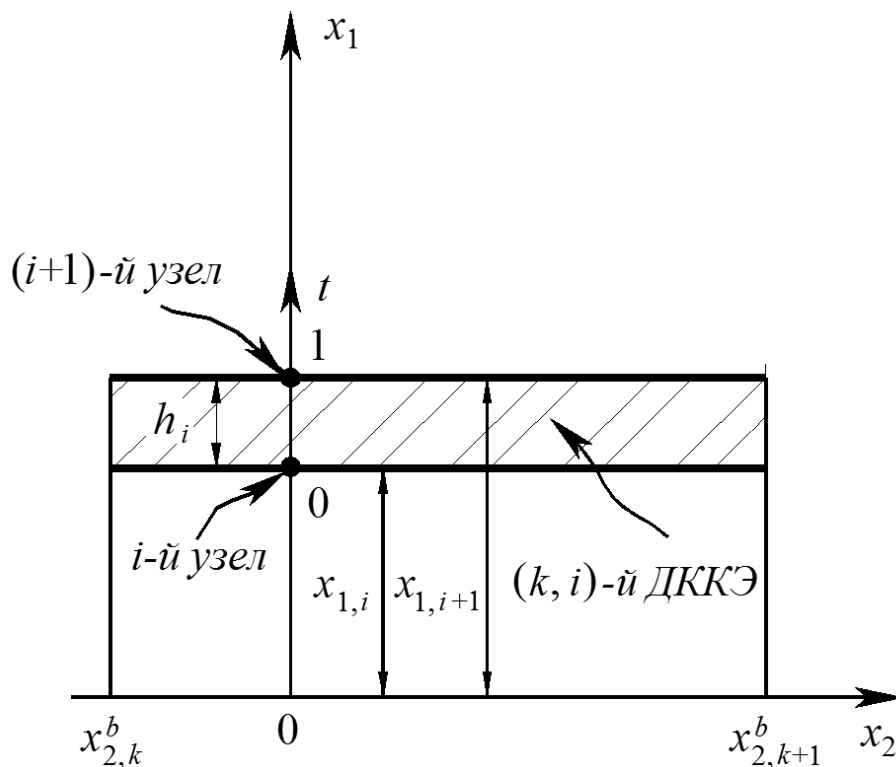


Рис. 1.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

Рассмотрим произвольный  $(k, i)$ -й элемент модели (рис. 1.2). Переходим от исходной системы координат к элементной:  $(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)$ , т.е. выполняем локальную

замену переменных внутри элемента. Здесь  $t$  – локальная координата, введенная по направлению оси  $Ox_1$  и связанная с ДККЭ:  $t = (x_1 - x_{1,i}) / h_i; t \in [0, 1], x_1 \in [x_{1,i}, x_{1,i+1}]$ . (1.7)

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$  и их производные  $v_1^{(k)}$  и  $v_2^{(k)}$  по  $x_2$ , т.е. для  $(k, i)$ -го узла это  $u_1^{(k,i)}$ ,  $u_2^{(k,i)}$ ,  $v_1^{(k,i)}$ ,  $v_2^{(k,i)}$  и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{(k,i)} = \bar{U}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,i)} \\ \bar{v}_n^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где 
$$\bar{u}_n^{(k,i)} = \bar{u}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,i)} \\ u_2^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_n^{(k,i)} = \bar{v}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,i)} \\ v_2^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\bar{U}^{(k,i)} = \bar{U}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}^{(k,i)} \\ \bar{v}^{(k,i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(k,i)} \\ \bar{u}_2^{(k,i)} \\ \bar{v}_1^{(k,i)} \\ \bar{v}_2^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где 
$$\bar{u}^{(k,i)} = \bar{u}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(k,i)} \\ \bar{u}_2^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\bar{v}^{(k,i)} = \bar{v}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{(k,i)} \\ \bar{v}_2^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\bar{u}_j^{(k,i)} = \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} u_j^{(k,i)} \\ u_j^{(k,i+1)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2; \quad (2.7)$$

$$\bar{v}_j^{(k,i)} = \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} v_j^{(k,i)} \\ v_j^{(k,i+1)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Будем полагать, что поля  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$  и  $v_1^{(k)}$  и  $v_2^{(k)}$  по «поперечному» (по отношению к основному направлению) сечению ДККЭ аппроксимируются линейно. Здесь можно провести прямую аналогию с функциями формы, которые используются в стандартном МКЭ при решении задач, связанных с продольными деформациями прямолинейных

стержней. Выполним схожую процедуру построения формул аппроксимации. Имеем:

$$u_j^{(k)} = u_j^{(k)}(x_1, x_2) = u_j^{(k)}(t, x_2) = \alpha_{1,j}^{(k,i)} + \alpha_{2,j}^{(k,i)} t, \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}; \quad (2.9)$$

$$v_j^{(k)} = v_j^{(k)}(x_1, x_2) = v_j^{(k)}(t, x_2) = \beta_{1,j}^{(k,i)} + \beta_{2,j}^{(k,i)} t, \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i} \quad (2.10)$$

или иначе в матрично-векторной форме

$$u_j^{(k)} = \bar{t}^T \bar{\alpha}_j^{(k,i)}, \quad v_j^{(k)} = \bar{t}^T \bar{\beta}_j^{(k,i)}, \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.11)$$

где 
$$\bar{\alpha}_j^{(k,i)} = [\alpha_{1,j}^{(k,i)} \quad \alpha_{2,j}^{(k,i)}]^T; \quad \bar{\beta}_j^{(k,i)} = [\beta_{1,j}^{(k,i)} \quad \beta_{2,j}^{(k,i)}]^T; \quad \bar{t} = [1 \quad t]^T. \quad (2.12)$$

Очевидно, имеют место соотношения:

$$\bar{u}_j^{(k,i)} = C \bar{\alpha}_j^{(k,i)}, \quad \bar{v}_j^{(k,i)} = C \bar{\beta}_j^{(k,i)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.13)$$

где 
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Обращая матрицу  $C$ , получим:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Следовательно, определяем:

$$u_j^{(k)} = \bar{t}^T C^{-1} \bar{u}_j^{(k,i)}, \quad v_j^{(k)} = \bar{t}^T C^{-1} \bar{v}_j^{(k,i)}, \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}; \quad (2.16)$$

или

$$u_j^{(k)}(x_1, x_2) = N(t) \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2), \quad v_j^{(k)}(x_1, x_2) = N(t) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.17)$$

где 
$$N = N(t) = \bar{t}^T C^{-1} = [N_1 \quad N_2] \quad (2.18)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

– матрица функций формы («поперечных» по отношению к основному направлению) по сечению ДККЭ с элементами

$$N_1(t) = 1-t; \quad N_2(t) = t. \quad (2.19)$$

Итак, получили ожидаемый очевидный результат.

Матрица (2.18) после переобозначений также представима в виде

$$N = N(t) = \bar{t}^T N_0, \quad \text{где } N_0 = C^{-1}. \quad (2.20)$$

Несложно показать, что также справедливы следующие важные для последующего изложения соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(x_1, x_2) &= N_n(t) \bar{u}^{(k,i)}(x_2), \\ \bar{v}_k(x_1, x_2) &= N_n(t) \bar{v}^{(k,i)}(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$N_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N(t) = \begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix}; \quad (2.22)$$

$\otimes$  – символ, обозначающий операцию прямого произведения матриц;

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(x_1, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1, x_2) \end{bmatrix}; \\ \bar{v}_k(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} v_1^{(k)}(x_1, x_2) \\ v_2^{(k)}(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Руководствуясь (2.20) и (2.22) можем записать:

$$N_n = N_n(t) = T(t) N_{0,n}, \quad (2.24)$$

$$\text{где } T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \bar{t}^T = \begin{bmatrix} \bar{t}^T & 0 \\ 0 & \bar{t}^T \end{bmatrix}; \quad (2.25)$$

$$N_{0,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N_0 = \begin{bmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & N_0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Выражения для частных производных первого порядка от неизвестных функций по переменным  $x_1$  и  $x_2$  записываются следующим образом (ниже  $(x_1, x_2) \in \omega_{k,i}$ ):

$$\partial_1 u_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t) \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2), \quad (3.1)$$

$$\partial_2 u_j^{(k)}(x_1, x_2) = N(t) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2;$$

$$\partial_1 v_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2), \quad (3.2)$$

$$\partial_2 v_j^{(k)}(x_1, x_2) = N(t) \partial_2 \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2,$$

$$\text{где } N'(t) = \frac{d}{dt} N(t) = [N'_1 \quad N'_2]^T. \quad (3.3)$$

Производные от матрицы функций формы (3.3) находятся дифференцированием ее элементов (2.16), т.е.

$$N'_1(t) = -1; \quad N'_2(t) = 1. \quad (3.4)$$

Как видно, элементы (3.4) не зависят от  $t$ . Вместе с тем, очевидно, что при характере аппроксимации, отличном от (2.19), зависимость соответствующих элементов от  $t$  может иметь место.

Очевидно, что соответствующие узловые функции определяются с учетом соответствующих операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (3.1)-(3.3):

$$\begin{aligned} [\partial_1 u_j^{(k)}]^{(i)} &= \frac{\mathcal{G}_{k,i}}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \\ &\times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'(1) \bar{u}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_i} N'(0) \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2) \right], \\ & \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(1)} = \frac{\theta_1}{h_1} N'(0) \bar{u}_j^{(k,1)}(x_2);$$

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(N)} = \frac{\theta_{N-1}}{h_{N-1}} N'(1) \bar{u}_j^{(k,N-1)}(x_2); \quad (3.6)$$

$$[\partial_2 u_j^{(k)}]^{(i)} = v_j^{(k,i)}(x_2); \quad (3.7)$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{\mathcal{G}_{k,i}}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times$$

$$\times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'(1) \bar{v}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_i} N'(0) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1; \quad (3.8)$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(1)} = \frac{\theta_1}{h_1} N'(0) \bar{v}_j^{(k,1)}(x_2);$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(N)} = \frac{\theta_{N-1}}{h_{N-1}} N'(1) \bar{v}_j^{(k,N-1)}(x_2), \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{G}_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1} + \theta_{k,i} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1} + \theta_{k,i} = 0 \end{cases}$   $(3.10)$

$$i = 2, 3, \dots, N-1;$$

Рассмотрим важные частные случаи формул (3.5) и (3.7). Очевидно, что если  $\theta_{k,i-1} = \theta_{k,i} = 1, i = 2, 3, \dots, N-1$  будем иметь:

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{h_{i-1}} N'(1) \bar{u}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i} N'(0) \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1; \quad (3.11)$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{h_{i-1}} N'(1) \bar{v}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i} N'(0) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1; \quad (3.12)$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 0, \theta_{k,i} = 1, i = 2, 3, \dots, N-1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i-1}$  аппроксимирует «пустоту») имеем:

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i} N'(0) \bar{u}_j^{(k,i)}(x_2), \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \quad (3.13)$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i} N'(0) \bar{v}_j^{(k,i)}(x_2), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (3.14)$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 1, \theta_{k,i} = 0, i = 2, 3, \dots, N-1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i}$  аппроксимирует «пустоту») имеем:

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}} N'(1) \bar{u}_j^{(k,i-1)}(x_2), \quad (3.15)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1;$$

$$[\partial_1 v_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}} N'(1) \bar{v}_j^{(k,i-1)}(x_2), \quad (3.16)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1;$$

Если  $\theta_{k,1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.6) и (3.9), очевидно, будем иметь:

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(1)} = 0; \quad [\partial_1 v_j^{(k)}]^{(1)} = 0. \quad (3.17)$$

Если  $\theta_{k,N-1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,N-1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.6) и (3.9), очевидно, будем иметь:

$$[\partial_1 u_j^{(k)}]^{(N)} = 0; \quad [\partial_1 v_j^{(k)}]^{(N)} = 0. \quad (3.18)$$

#### 4. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

Выражения для деформаций и напряжений [7, 8, 16-24] на элементе на основании известных соотношений записываются следующим образом:  
– деформации

$$\varepsilon_{11}^{(k)}(x_1, x_2) = [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2); \quad (4.1)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

$$\varepsilon_{22}^{(k)}(x_1, x_2) = v_2^{(k)}(x_1, x_2); \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{(k)}(x_1, x_2) &= \varepsilon_{21}^{(k)}(x_1, x_2) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2) + v_1^{(k)}(x_1, x_2)); \end{aligned} \quad (4.3)$$

– напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)}(x_1, x_2) &= (\lambda_{k,i} + 2\mu_{k,i})[\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2) + \\ &+ \lambda_{k,i} v_2^{(k)}(x_1, x_2); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(k)}(x_1, x_2) &= \lambda_{k,i}[\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2) + \\ &+ (\lambda_{k,i} + 2\mu_{k,i})v_2^{(k)}(x_1, x_2); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(k)}(x_1, x_2) &= \sigma_{21}^{(k)}(x_1, x_2) = \\ &= \mu_{k,i}(v_1^{(k)}(x_1, x_2) + [\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Приведенные к узлам деформации  $[\varepsilon_{11}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\varepsilon_{12}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\varepsilon_{21}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\varepsilon_{22}^{(k)}]^{(i)}$  и напряжения  $[\sigma_{11}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\sigma_{12}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\sigma_{21}^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[\sigma_{22}^{(k)}]^{(i)}$  определяются аналогично частным производных от искомым функций (см. формулы пункта 3) с учетом соответствующих операций осреднения.

## 5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДККЭ

Функционал энергии конструкции можно представить в виде суммы функционалов, определенных на дискретно-континуальных конечных элементах. С учетом вышеизложенного можем установить следующее соответствие между континуальными операторами, представленными в [2, 4] и их дискретно-континуальными аналогами на произвольном ДККЭ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,vv} &= \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \tilde{K}_{k,vv}^{(i)} &= h_i N_{0,n}^T \left[ \int_0^1 T^T(t) A_{k,vv}^{(i)} T(t) dt \right] N_{0,n}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,uv} &= \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \tilde{K}_{k,uv} &= N_{0,n}^T \left[ \int_0^1 (T'(t))^T A_{k,uv}^{(i)} T'(t) dt \right] N_{0,n}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,vu} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mu}_k \partial_1 \\ \bar{\lambda}_k \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \tilde{K}_{k,vu} &= N_{0,n}^T \left[ \int_0^1 (T(t))^T A_{k,vu}^{(i)} T'(t) dt \right] N_{0,n}; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,uu} &= \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \partial_1 \Rightarrow \\ \tilde{K}_{k,vv}^{(i)} &= \frac{1}{h_i} N_{0,n}^T \left[ \int_0^1 (T'(t))^T A_{k,uu}^{(i)} T'(t) dt \right] N_{0,n}; \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_{k,vv}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} \end{bmatrix}; \\ A_{k,uv}^{(i)} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\lambda}_{k,i} \\ \bar{\mu}_{k,i} & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{k,vu}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mu}_{k,i} \\ \bar{\lambda}_{k,i} & 0 \end{bmatrix}; \\ A_{k,uu}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_{k,i} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{d}{dt} T(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{t}^T & 0 \\ 0 & \bar{t}^T \end{bmatrix} = \\ &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Имеем (см. также [2, 4]):

$$(\mathcal{L}_{k,vv} \bar{v}_k, \bar{v}_k) \Rightarrow (\tilde{K}_{k,vv}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}); \quad (5.7)$$

$$(\mathcal{L}_{k,uv} \bar{u}_k, \bar{v}_k) \Rightarrow (\tilde{K}_{k,uv}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}); \quad (5.8)$$

$$(\mathcal{L}_{k,vu} \bar{v}_k, \bar{u}_k) \Rightarrow (\tilde{K}_{k,vu}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}); \quad (5.9)$$

$$(\mathcal{L}_{k,uu} \bar{u}_k, \bar{u}_k) \Rightarrow (\tilde{K}_{k,uu}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}); \quad (5.10)$$

Вычислив интегралы в (5.1)-(5.4), получим:

$$\tilde{K}_{k,vv}^{(i)} = \frac{1}{6} h_i \times \begin{bmatrix} 2\bar{\mu}_{k,i} & \bar{\mu}_{k,i} & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_{k,i} & 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 2(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) \end{bmatrix}; \quad (5.11)$$

$$\tilde{K}_{k,uv}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{\lambda}_{k,i} & -\bar{\lambda}_{k,i} \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} & \bar{\lambda}_{k,i} \\ -\bar{\mu}_{k,i} & -\bar{\mu}_{k,i} & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_{k,i} & \bar{\mu}_{k,i} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.12)$$

$$\tilde{K}_{k,vu}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & \bar{\mu}_{k,i} \\ 0 & 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & \bar{\mu}_{k,i} \\ -\bar{\lambda}_{k,i} & \bar{\lambda}_{k,i} & 0 & 0 \\ -\bar{\lambda}_{k,i} & \bar{\lambda}_{k,i} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.13)$$

$$\tilde{K}_{k,uu}^{(i)} = \frac{1}{h_i} \times \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & -(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & 0 & 0 \\ -(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{k,i} & -\bar{\mu}_{k,i} \\ 0 & 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & \bar{\mu}_{k,i} \end{bmatrix}; \quad (5.14)$$

Исходя из общих, принятых в МКЭ принципов нумерации неизвестных осуществим следующую перестановку неизвестных и соответствующее преобразование строк и столбцов матриц  $\tilde{K}_{k,vv}^{(i)}$ ,  $\tilde{K}_{k,uv}^{(i)}$ ,  $\tilde{K}_{k,vu}^{(i)}$  и  $\tilde{K}_{k,uu}^{(i)}$ :

$$(\tilde{K}_{k,vv}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}) \Rightarrow (K_{k,vv}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}); \quad (5.15)$$

$$(\tilde{K}_{k,uv}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}) \Rightarrow (K_{k,uv}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{v}^{(k,i)}); \quad (5.16)$$

$$(\tilde{K}_{k,vu}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}) \Rightarrow (K_{k,vu}^{(i)} \bar{v}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}); \quad (5.17)$$

$$(\tilde{K}_{k,uu}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}) \Rightarrow (K_{k,uu}^{(i)} \bar{u}^{(k,i)}, \bar{u}^{(k,i)}), \quad (5.18)$$

$$\text{где } \bar{u}^{(k,i)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,i)} \\ \bar{u}_n^{(k,i+1)} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}^{(k,i)} = \begin{bmatrix} \bar{v}_n^{(k,i)} \\ \bar{v}_n^{(k,i+1)} \end{bmatrix}; \quad (5.19)$$

$$K_{k,vv}^{(i)} = P^T \tilde{K}_{k,vv}^{(i)} P; \quad (5.20)$$

$$K_{k,uv}^{(i)} = P^T \tilde{K}_{k,uv}^{(i)} P; \quad (5.21)$$

$$K_{k,vu}^{(i)} = P^T \tilde{K}_{k,vu}^{(i)} P; \quad (5.22)$$

$$K_{k,uu}^{(i)} = P^T \tilde{K}_{k,uu}^{(i)} P, \quad (5.23)$$

где  $P$  – матрица перестановок,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Итак, с учетом (5.11)-(5.14) и (5.20)-(5.24) будем иметь:

$$K_{k,vv}^{(i)} = \frac{1}{6} h_i \times \begin{bmatrix} 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 & \bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & 2(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} \\ \bar{\mu}_{k,i} & 0 & 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 & 2(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) \end{bmatrix}; \quad (5.25)$$

$$K_{k,uv}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\lambda}_{k,i} & 0 & -\bar{\lambda}_{k,i} \\ -\bar{\mu}_{k,i} & 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{k,i} & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} \\ \bar{\mu}_{k,i} & 0 & \bar{\mu}_{k,i} & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.26)$$

$$K_{k,vu}^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & 0 & \bar{\mu}_{k,i} \\ -\bar{\lambda}_{k,i} & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} & 0 \\ 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & 0 & \bar{\mu}_{k,i} \\ -\bar{\lambda}_{k,i} & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.27)$$

$$K_{k,uu}^{(i)} = \frac{1}{h_i} \times \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 & -(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_{k,i} & 0 & -\bar{\mu}_{k,i} \\ -(\bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i}) & 0 & \bar{\lambda}_{k,i} + 2\bar{\mu}_{k,i} & 0 \\ 0 & -\bar{\mu}_{k,i} & 0 & \bar{\mu}_{k,i} \end{bmatrix}; \quad (5.28)$$

## 6. ФОРМИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Формирование глобальных матриц  $K_{k,uu}$ ,  $K_{k,uv}$ ,  $K_{k,vu}$  и  $K_{k,vv}$   $2N$ -го порядка сис-

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

темы ДККЭ для всей конструкции осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости [8, 21, 24]. Схема формирования глобальных матриц  $K_{k,vv}$ ,  $K_{k,uv}$ ,  $K_{k,vu}$  и  $K_{k,uu}$  условно показана на рис. 6.1, 6.2, 6.3 и 6.4. Штриховка используется для обозначения элементов соответствующих поэлементных матриц. «Перекрытие» штриховок соответствует расположению суммируемых элементов, незаштрихованные элементы являются нулевыми.

Заметим, что при наличии в рассматриваемой конструкции «пустот» (т.е. дискретно-континуальных элементов с нулевыми значениями характеристической функции) матрица  $K_{k,vv}$  будет вырожденной, что, очевидно, приведет к невозможности вычисления  $K_{k,vv}^{-1}$ . В этой связи необходима коррекция матрицы  $K_{k,vv}$ . Алгоритм этой коррекции следующий:

1. Последовательно перебираем  $i = 1, 2, \dots, 2N$ .
2. Для каждого значения  $i$  следующее: если все элементы  $i$ -й строки матрицы  $K_{k,vv}$  нулевые и все элементы  $i$ -го столбца матрицы  $K_{k,vv}$  также нулевые, то следует положить  $(K_{k,vv})_{i,i} = 1$ , где  $(K_{k,vv})_{i,i}$  – элемент матрицы  $K_{k,vv}$ , расположенный в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце.

Континуальные операторы [2, 4] и матрицы сопоставлены так:

$$\mathcal{L}_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} \Rightarrow K_{k,uv}; \quad \mathcal{L}_{k,vu} \Rightarrow K_{k,vu};$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \Rightarrow \tilde{K}_{k,uv}; \quad \mathcal{L}_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \mathcal{L}_{k,uu} & \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} K_{k,uu} & K_{k,vv}^{-1} \tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

где  $E$  – тождественный оператор и единичная матрица соответствующего порядка;

$$\tilde{K}_{k,uv} = K_{k,uv} - K_{k,vu}. \quad (6.3)$$

## 7. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Статические граничные условия на прямых  $x_1 = x_{1,1}$  и  $x_1 = x_{1,N}$  (части границы области  $\omega$ ) для рассматриваемой конструкции учитываются, как правило, в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи также должны быть приняты во внимание статические граничные условия на остальных элементах границы (если заданы) и кинематические граничные условия.

Пусть  $x_{2,k}^b$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_k$  – координаты граничных поперечных сечений конструкции (рис. 7.1). Граничные условия в них записываются в виде

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+,$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (7.1)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (7.2)$$

где  $B_k^-, B_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $B_1^+, B_{n_k}^-$  – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные  $4N$ -го порядка;  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  – заданные  $4N$ -мерные векторы правых частей граничных условий;

$$\bar{U}_k = \bar{U}_k(x_2) = [(\bar{u}_k)^T \quad (\bar{v}_k)^T]^T, \quad (7.3)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2) = [(\bar{u}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N)})^T]^T, \quad (7.4)$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k(x_2) = [(\bar{v}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N)})^T]^T. \quad (7.5)$$

Рассмотрим задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению основному направлению в форме (7.1)-(7.2) в произвольной граничной точке с координатой  $x_{2,k}^b$ .

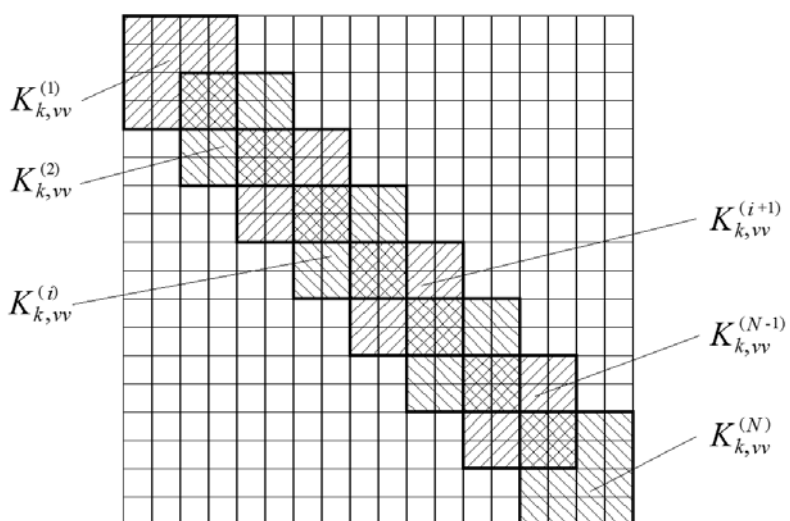


Рис. 6.1. Условная схема формирования глобальной матрицы  $K_{k,vv}$ .

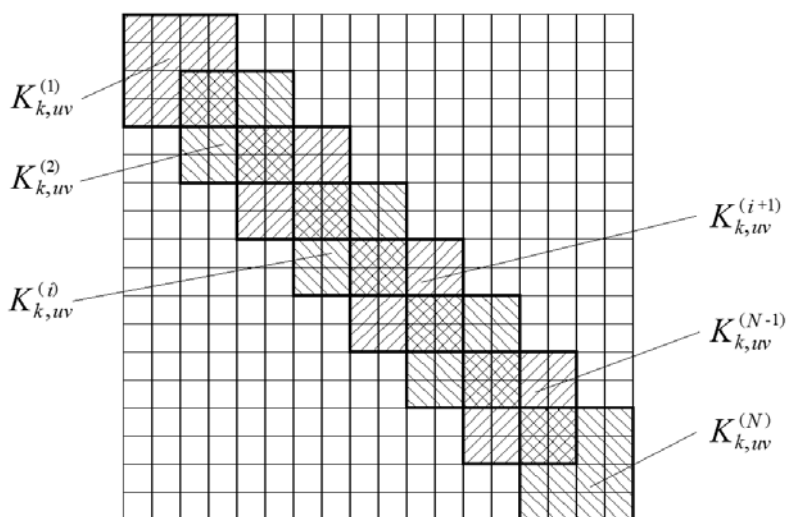


Рис. 6.2. Условная схема формирования глобальной матрицы  $K_{k,uv}$ .

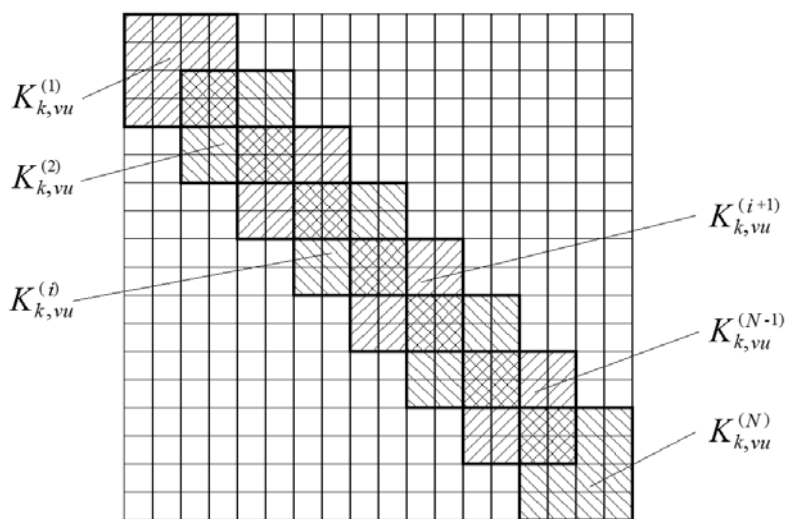


Рис. 6.3. Условная схема формирования глобальной матрицы  $K_{k,vu}$ .

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

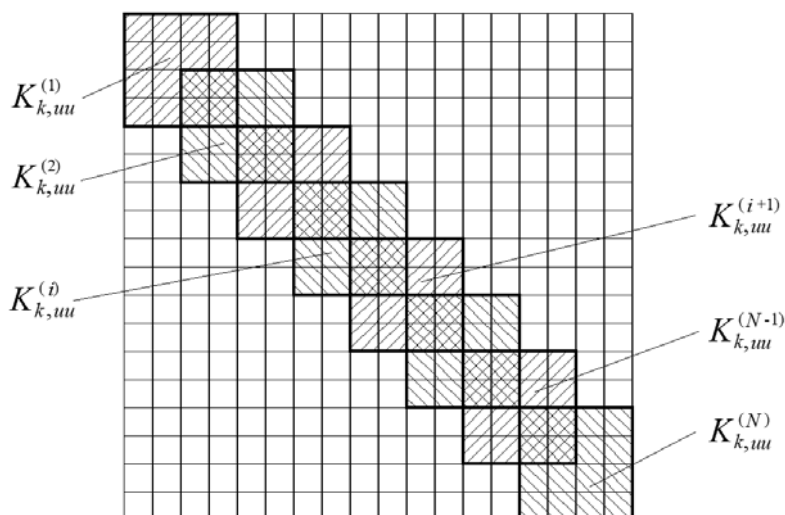
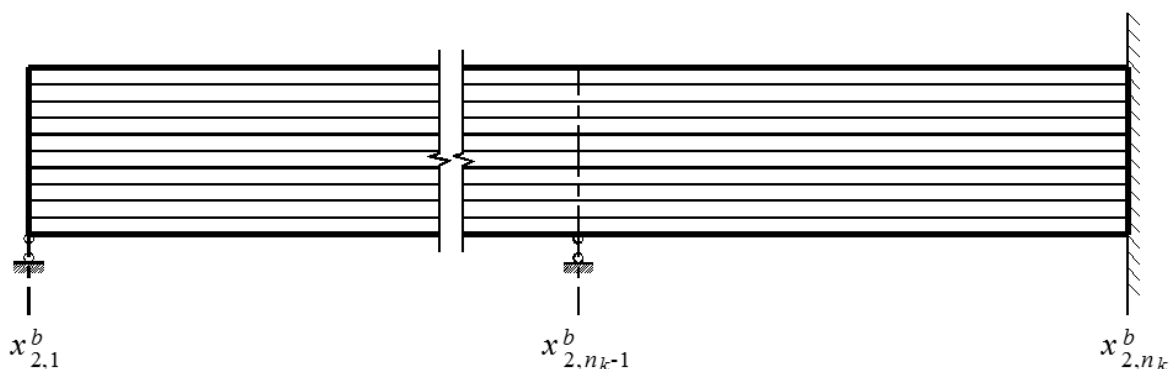


Рис. 6.4. Условная схема формирования глобальной матрицы  $K_{k,uu}$ .



$x_{2,k}^b, k = 1, 2, \dots, n_k$  - координаты граничных поперечных сечений

Рис. 7.1. Пример расположения координат граничных поперечных сечений.

Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  – промежуточная граничная точка; 2)  $k=1$  – крайняя левая (первая) граничная точка; 3)  $k = n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

Рассмотрим задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению основному направлению в форме (7.1)-(7.2) в произвольной граничной точке с координатой  $x_{2,k}^b$ . Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  – промежуточная граничная точка; 2)  $k=1$  – крайняя левая (первая) граничная точка; 3)  $k = n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

*Шарнирное закрепление.*

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.6)$$

$$u_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.7)$$

На дискретно-континуальном уровне вместо (7.6)-(7.7) имеем:

$$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.8)$$

Таблица 7.1. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании шарнирного закрепления в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1	$(2i-1, 2i-1), i=1, 2, \dots, N$	1	$u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i=1, 2, \dots, N-1$
2	$(2i, 2i), i=1, 2, \dots, N$	1	$u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i=1, 2, \dots, N-1$

Примечание: 1. При варианте 3 граничной точки матрица  $B_k^+$  задается нулевой.  
 2. Все элементы матриц  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 7.2. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании шарнирного закрепления в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1	$(2(N+i)-1, 2i-1), i=1, 2, \dots, N$	1	$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i=1, 2, \dots, N-1$
2	$(2(N+i), 2i), i=1, 2, \dots, N$	1	$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i=1, 2, \dots, N-1$

Примечание: 1. При варианте 2 граничной точки матрица  $B_k^-$  задается нулевой.  
 2. Все элементы матриц  $B_k^-$  не указанные в таблице равны нулю.

$$u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (7.9)$$

Для случая  $k=1$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.10)$$

Дискретно-континуальный аналог (8.10) имеет вид:

$$u_1^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (7.11)$$

Для случая  $k=n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.12)$$

Дискретно-континуальный аналог (8.12) имеет вид:

$$u_1^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (7.13)$$

Условия (7.8)-(7.9), (7.11), (7.13) представимы в форме (7.1)-(7.2). Алгоритм формирования матриц  $B_k^-$  и  $B_k^+$  указан в таблицах 7.1 и 7.2 соответственно. Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k=2, \dots, n_k-1$  и  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е.

$$\bar{g}_k^- = 0, \quad \bar{g}_k^+ = 0, \quad k=2, \dots, n_k-1; \quad \bar{g}_1^+ = 0, \quad \bar{g}_{n_k}^- = 0. \quad (7.14)$$

*Идеальный контакт.*

Случаи  $k=1$  и  $k=n_k$  здесь неактуальны.

Рассмотрим случай  $1 < k < n_k$ , причем пусть

$$\theta_{k-1,i}(x_1, x_2) = 1, \quad \theta_{k,i}(x_1, x_2) = 1, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (7.15)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - u_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.16)$$

$$u_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - u_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \mu_k \cdot ([\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + v_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0)) - \\ - \mu_{k-1} \cdot ([\partial_1 u_2^{(k-1)}](x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\ + v_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0)) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + \\ + (\lambda_k + 2\mu_k) v_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - \\ - \lambda_{k-1} [\partial_1 u_1^{(k-1)}](x_1, x_{2,k}^b - 0) - \\ - (\lambda_{k-1} + 2\mu_{k-1}) v_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Дискретно-континуальный аналог (7.16)-(7.19) имеет вид:

$$u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (7.20)$$

$$u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (7.21)$$

$$[\sigma_{12}^{(k)}]^{(i)}(x_{2,k}^b + 0) - [\sigma_{12}^{(k-1)}]^{(i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (7.22)$$

$$[\sigma_{22}^{(k)}]^{(i)}(x_{2,k}^b + 0) - [\sigma_{22}^{(k-1)}]^{(i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.23)$$

После записи граничных условий в виде (7.20)-(7.23), переписываем их в форме (7.1)-(7.2), используя при этом формулы (3.6) и (3.10). Алгоритм формирования матриц  $B_k^+$  и  $B_k^-$ , учитывающих приведенные выше соотношения, описан в таблицах 7.3 и 7.4 соответственно. Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (7.14).

*Свободный край.*

Рассмотрим ниже два наиболее характерных частных случая.

При  $k=1$  имеем следующие граничные условия:

$$\mu_1 \cdot ([\partial_1 u_2^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + v_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0)) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 [\partial_1 u_1^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + \\ + (\lambda_1 + 2\mu_1) v_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Дискретно-континуальный аналог (7.24)-(7.25) имеет вид:

$$[\sigma_{12}^{(1)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (7.26)$$

$$[\sigma_{22}^{(1)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.27)$$

При  $k=n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \mu_{n_k-1} \cdot ([\partial_1 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + \\ + v_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0)) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]; \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{n_k-1} [\partial_1 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + \\ + (\lambda_{n_k-1} + 2\mu_{n_k-1}) v_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Дискретно-континуальный аналог (7.28)-(7.29) имеет вид:

$$[\sigma_{12}^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (7.30)$$

$$[\sigma_{22}^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.31)$$

После записи граничных условий в виде (7.26)-(7.27) и (7.30)-(7.31), представляем их в форме (7.1)-(7.2), используя формулы (3.6) и (3.10).

Алгоритм формирования соответствующих матриц  $B_1^+$  и  $B_{n_k}^-$ , учитывающих приведенные выше соотношения, описан в таблицах 7.5 и 7.6.

*Таблица 7.3. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании идеального контакта в граничной точке  $x_{2,k}^b$ ,  $1 < k < n_k$  при условии (7.15).*

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i-1), i=1, 2, \dots, N$	1	(7.20)
2	$(N+i, 2i), i=1, 2, \dots, N$	1	(7.21)
3	$(2N+1, 2)$	$\mu_{k,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(7.22) $i=1$
4	$(2N+1, 4)$	$\mu_{k,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
5	$(2N+1, 2N+1)$	$\mu_{k,1}$	
6	$(2N+i, 2(i-1)), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(7.22) $i=2, 3, \dots, N-1$
7	$(2N+i, 2i), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{k,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\mu_{k,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
8	$(2N+i, 2(i+1)), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{k,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
9	$(2N+i, 2(N+i)-1), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} (\mu_{k,i-1} + \mu_{k,i})$	
10	$(3N, 2N-2)$	$\mu_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_1'(1)$	(7.22) $i=N$
11	$(3N, 2N)$	$\mu_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_2'(1)$	
12	$(3N, 4N-1)$	$\mu_{k,N-1}$	
13	$(3N+1, 1)$	$\lambda_{k,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(7.23) $i=1$
14	$(3N+1, 3)$	$\lambda_{k,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
15	$(3N+1, 2N+1)$	$\lambda_{k,1} + 2\mu_{k,1}$	
14	$(3N+i, 2i-3), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(7.23) $i=2, 3, \dots, N-1$
15	$(3N+i, 2i-1), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{k,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\lambda_{k,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
16	$(3N+i, 2i+1), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{k,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
17	$(3N+i, 2(N+i)), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} (\lambda_{k,i-1} + \lambda_{k,i}) + \mu_{k,i-1} + \mu_{k,i}$	

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

1	2	3	4
18	$(4N, 2N - 3)$	$\lambda_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(7.23) $i = N$
19	$(4N, 2N - 1)$	$\lambda_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N, 4N)$	$\lambda_{k,N-1} + 2\mu_{k,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 8.4. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании идеального контакта в граничной точке  $x_{2,k}^b$ ,  $1 < k < n_k$  при условии (7.15).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	-1	(7.20)
2	$(N + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N$	-1	(7.21)
3	$(2N + 1, 2)$	$-\mu_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(7.22) $i = 1$
4	$(2N + 1, 4)$	$-\mu_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
5	$(2N + 1, 2N + 1)$	$-\mu_{k-1,1}$	
6	$(2N + i, 2(i - 1)),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$-\frac{1}{2} \mu_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(7.22) $i = 2, 3, \dots,$ $N - 1$
7	$(2N + i, 2i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{k-1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
8	$(2N + i, 2(i + 1)),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$-\frac{1}{2} \mu_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
9	$(2N + i, 2(N + i) - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$-\frac{1}{2} (\mu_{k-1,i-1} + \mu_{k-1,i})$	
10	$(3N, 2N - 2)$	$-\mu_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(7.22) $i = N$
11	$(3N, 2N)$	$-\mu_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
12	$(3N, 4N - 1)$	$-\mu_{k-1,N-1}$	
13	$(3N + 1, 1)$	$-\lambda_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(7.23) $i = 1$
14	$(3N + 1, 3)$	$-\lambda_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
15	$(3N + 1, 2N + 1)$	$-(\lambda_{k-1,1} + 2\mu_{k-1,1})$	

1	2	3	4
14	$(3N+i, 2i-3),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \lambda_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(7.23) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
15	$(3N+i, 2i-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\lambda_{k-1,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
16	$(3N+i, 2i+1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \lambda_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
17	$(3N+i, 2(N+i)),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} (\lambda_{k-1,i-1} + \lambda_{k-1,i}) - \mu_{k-1,i-1} - \mu_{k-1,i}$	
18	$(4N, 2N-3)$	$-\lambda_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_1'(1)$	(7.23) $i = N$
19	$(4N, 2N-1)$	$-\lambda_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_2'(1)$	
20	$(4N, 4N)$	$-(\lambda_{k-1,N-1} + 2\mu_{k-1,N-1})$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 7.5. Алгоритм заполнения матрицы  $B_1^+$  при задании свободного края в граничной точке  $x_{2,1}^b = 0$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(1,2)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N_1'(0)$	(7.26) $i = 1$
2	$(1,4)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N_2'(0)$	
3	$(1, 2N+1)$	$\mu_{1,1}$	
4	$(i, 2(i-1)),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N_1'(1)$	(7.26) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
5	$(i, 2i), i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{1,i-1}}{h_{i-1}} N_2'(1) + \frac{\mu_{1,i}}{h_i} N_1'(0) \right]$	
6	$(i, 2(i+1)),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i} \frac{1}{h_i} N_2'(0)$	
7	$(i, 2(N+i)-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} (\mu_{1,i-1} + \mu_{1,i})$	
8	$(N, 2N-2)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_1'(1)$	(7.26) $i = N$
9	$(N, 2N)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N_2'(1)$	
10	$(N, 4N-1)$	$\mu_{1,N-1}$	

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

1	2	3	4
11	$(N+1, 1)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(7.27) $i=1$
12	$(N+1, 3)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
13	$(N+1, 2N+1)$	$\lambda_{1,1} + 2\mu_{1,1}$	
14	$(N+i, 2i-3),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(7.27) $i=2, 3, \dots,$ $N-1$
15	$(N+i, 2i-1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(N+i, 2i+1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(N+i, 2(N+i)),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} (\lambda_{1,i-1} + \lambda_{1,i}) + \mu_{1,i-1} + \mu_{1,i}$	
18	$(2N, 2N-3)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(7.27) $i=N$
19	$(2N, 2N-1)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(2N, 4N)$	$\lambda_{1,N-1} + 2\mu_{1,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_1^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 7.6. Алгоритм заполнения матрицы  $B_{n_k}^-$  при задании свободного края в граничной точке  $x_{2,n_k}^b = l_2$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(2N+1, 2)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(7.30) $i=1$
2	$(2N+1, 4)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
3	$(2N+1, 2N+1)$	$\mu_{1,1}$	
4	$(2N+i, 2(i-1)),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(7.30) $i=2, 3, \dots,$ $N-1$
5	$(2N+i, 2i),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	

1	2	3	4
6	$(2N+i, 2(i+1)),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	(7.30) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
7	$(2N+i, 2(N+i)-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2}(\mu_{1,i-1} + \mu_{1,i})$	
8	$(3N, 2N-2)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(7.30) $i = N$
9	$(3N, 2N)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
10	$(3N, 4N-1)$	$\mu_{1,N-1}$	
11	$(3N+1, 1)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(7.31) $i = 1$
12	$(3N+1, 3)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
13	$(3N+1, 2N+1)$	$\lambda_{1,1} + 2\mu_{1,1}$	
14	$(3N+i, 2i-3),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(7.31) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
15	$(3N+i, 2i-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N+i, 2i+1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(3N+i, 2(N+i)),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2}(\lambda_{1,i-1} + \lambda_{1,i}) + \mu_{1,i-1} + \mu_{1,i}$	
18	$(4N, 2N-3)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	
19	$(4N, 2N-1)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	(7.31) $i = N$
20	$(4N, 4N)$	$\lambda_{1,N-1} + 2\mu_{1,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_{n_k}^-$  не указанные в таблице равны нулю.

Векторы  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (7.14).

О задании граничных условий в объекте с «пустотами».

Выше были рассмотрены алгоритмы задания граничных условий в виде шарнирного закрепления, идеального контакта и свободного края, при этом всюду полагалось, что в

рассматриваемом объекте отсутствуют «пустоты», т.е. выполняется условие:

$$\theta_{k-1,i} = 1, \theta_{k,i} = 1, i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, n_k. \quad (7.32)$$

Вместе с тем, очевидно, что в рассматриваемой конструкции могут иметься пустоты.

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

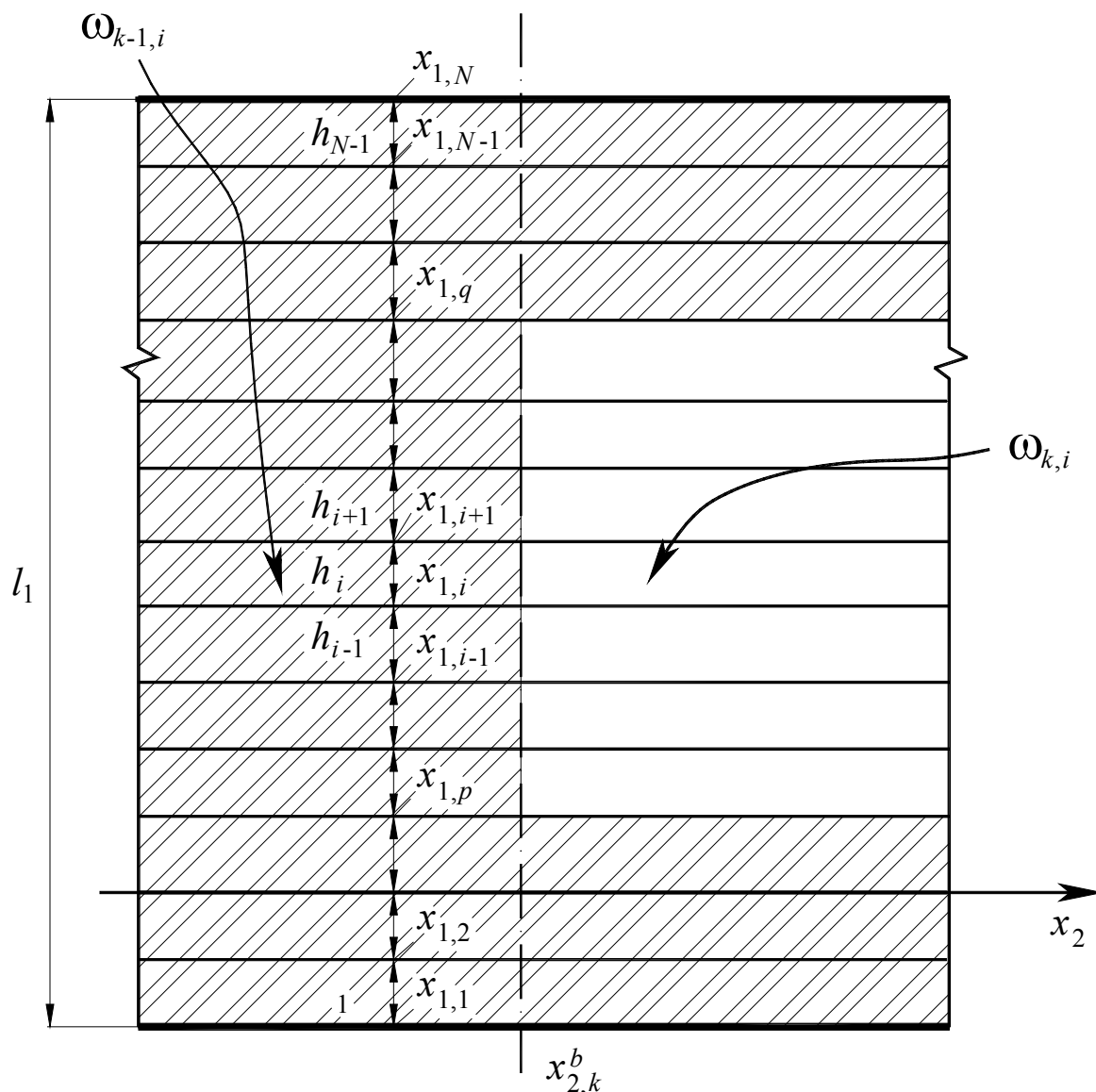


Рис. 7.2. Пример конструкции с «пустотами».

Рассмотрим, например, случай, изображенный на рис. 7.2.

Заштрихованная область здесь условно показывает материал конструкции, а незаштрихованная – «пустоты».

В данном случае для узлов с номерами  $i = 1, 2, \dots, p$  и  $i = q, q + 1, \dots, N$  следует задать условия идеального контакта, тогда как для узлов с номерами  $i = p + 1, p + 2, \dots, q - 1$  – условия свободного края.

## 8. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.

Итак, согласно (6.1)-(6.3) континуальной постановке соответствует дискретно-континуальная постановка в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{u}'_k = \bar{v}_k \\ K_{k,vv} \bar{v}'_k = K_{k,uu} \bar{u}_k + \tilde{K}_{k,wv} \bar{v}_k - s \bar{u}_k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (8.1)$$

где  $s$  – искомое собственное значение;  
 $\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2)$  – искомая собственная функция  
 на подобласти  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$ ;

$$\tilde{K}_{k,uv} = K_{k,uv} - \tilde{K}_{k,vu}; \quad K_{k,vu} = K_{k,uv}^*. \quad (8.2)$$

Системы (8.1) могут быть записаны иначе в более удобной форме

$$\begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1}(K_{k,uu} - sE) & K_{k,vv}^{-1}\tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

$k = 1, \dots, n_k - 1,$

где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка. Вводя обозначения

$$A_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1}(K_{k,uu} - sE) & K_{k,vv}^{-1}\tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix};$$

$$\bar{U}'_k = \partial_2 \bar{U}_k. \quad (8.4)$$

и рассматривая соотношения (8.3) совместно с граничными условиями (7.1)-(7.2), заключаем, что определение собственных частот и форм колебаний конструкции в рамках ДКМКЭ сводится к решению набора много-точечных краевых задач для систем  $4N$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \bar{U}'_k(x_2) = A_{k,s} \bar{U}_k(x_2), & k = 1, 2, \dots, n_k - 1; \\ B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, & k = 2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (8.5)$$

## 9. ОБ УЧЕТЕ УПРУГОПОДАТЛИВЫХ ОПОР

Пусть  $C_{k,i}$  – матрица характеристик упруго-податливых опор для  $i$ -го узла модели на подобласти  $\Omega_k$ ,

$$C_{k,i} = \text{diag}\{c_{1,k,i}, c_{2,k,i}\}. \quad (9.1)$$

Глобальная матрица  $C_k^G$  характеристик упруго-податливых опор всей элементной модели на подобласти  $\Omega_k$  и модифицированная матрица коэффициентов разрешающей много-точечной краевой задачи формируются следующим образом:

$$C_k^G = \begin{bmatrix} C_{k,1} & & & \\ & C_{k,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{k,N} \end{bmatrix};$$

$$A_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1}(K_{k,uu} + C_k^G - sE) & K_{k,vv}^{-1}\tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

## 10. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. ЗАДАНИЕ СТАНДАРТНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Опишем вопросы учета граничных условий вдоль основного направления с позиций указания корректировок, которые вносятся в постановку (8.5). Описание будем вести на примерах простейших типовых случаев: шарнирное закрепление и свободный край. Пусть для определенности граничные условия вдоль основного направления задаются по «продольному» сечению конструкции  $x_1 = x_{1,1}$  (рис. 10.1), причем  $x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b$ .

*Свободный край.*

Имеем континуальные граничные условия:

$$[\sigma_{11}^{(k)}]^{(i)}(x_2) = 0; \quad [\sigma_{12}^{(k)}]^{(i)}(x_2) = 0. \quad (10.1)$$

Данный тип граничных условий вдоль основного направления является простейшим с точки зрения учета, а именно, никаких модификаций в постановку (8.5) вносить не требуется, такие граничные условия вдоль

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

основного направления будут учтены автоматически.

*Шарнирное закрепление.*

Континуальные граничные условия, очевидно, записываются в виде:

$$u_1^{(k,1)}(x_2) = 0; \quad u_2^{(k,1)}(x_2) = 0. \quad (10.2)$$

В данном случае вместо (8.5) следует использовать постановку

$$\begin{cases} \bar{U}'_k(x_2) = \chi_k A_{k,s} \bar{U}_k(x_2), \\ \quad \quad \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1; \\ B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ \quad \quad \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \end{cases} \quad (10.3)$$

где  $\chi_k$  – матрица  $4N$ -го порядка, элементы которой определяются по формуле

$$(\chi_k)_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,1} - \delta_{i,2}, \quad (10.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, 4N, \quad j = 1, 2, \dots, 4N.$$

Кроме того, из соображений совместности неизвестных при задании граничных условий в сечениях, поперечных по отношению к основному направлению следует положить перемещения узла 1 равными нулю, т.е.

$$u_1^{(k,1)}(x_{2,k}^b) = u_1^{(k,1)}(x_{2,k+1}^b) = 0; \quad (10.5)$$

$$u_2^{(k,1)}(x_{2,k}^b) = u_2^{(k,1)}(x_{2,k+1}^b) = 0.$$

## 11. ПЕРЕХОД К НАБОРУ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Матрицы коэффициентов  $A_{k,s}$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  можно привести к блочно-диагональному

виду, выполнив следующую перестановку неизвестных:

$$\bar{U}_k \Rightarrow \tilde{U}_k, \quad (11.1)$$

где

$$\bar{U}_k = [u_1^{(k,1)} \quad u_2^{(k,1)} \quad u_1^{(k,2)} \quad u_2^{(k,2)} \quad \dots \quad u_1^{(k,N)} \quad u_2^{(k,N)} \quad v_1^{(k,1)} \quad v_2^{(k,1)} \quad v_1^{(k,2)} \quad u_2^{(k,2)} \quad \dots \quad v_1^{(k,N)} \quad v_2^{(k,N)}]; \quad (11.2)$$

$$\tilde{U}_k = [u_1^{(k,1)} \quad u_2^{(k,1)} \quad v_1^{(k,1)} \quad v_2^{(k,1)} \quad u_1^{(k,2)} \quad u_2^{(k,2)} \quad v_1^{(k,2)} \quad v_2^{(k,2)} \quad \dots \quad \dots \quad u_1^{(k,N)} \quad u_2^{(k,N)} \quad v_1^{(k,N)} \quad v_2^{(k,N)}]; \quad (11.3)$$

Тогда преобразованный набор многоточечных краевых задач имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{U}'_k(x_2) = \tilde{A}_{k,s} \tilde{U}_k(x_2), \\ \quad \quad \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1; \\ \tilde{B}_k^- \tilde{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \tilde{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \\ \quad \quad \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ \tilde{B}_1^+ \tilde{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \tilde{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \end{cases} \quad (11.4)$$

где

$$\tilde{A}_{k,s} = I_G^T A_{k,s} I_G, \quad \tilde{U}_k(x_2) = I_G^T \bar{U}_k(x_2), \quad (11.5)$$

$$k = 1, \dots, n_k - 1;$$

$$\tilde{B}_k^- = I_G^T \tilde{B}_k^- I_G, \quad \tilde{B}_k^+ = I_G^T \tilde{B}_k^+ I_G, \quad (11.6)$$

$$\tilde{g}_k^- = I_G^T \bar{g}_k^-, \quad \tilde{g}_k^+ = I_G^T \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$\tilde{B}_1^+ = I_G^T \tilde{B}_1^+ I_G, \quad \tilde{B}_{n_k}^- = I_G^T \tilde{B}_{n_k}^- I_G, \quad (11.7)$$

$$\tilde{g}_1^+ = I_G^T \bar{g}_1^+, \quad \tilde{g}_{n_k}^- = I_G^T \bar{g}_{n_k}^-,$$

$I_G$  – матрица перестановок, элементы которой определяются по таблице 11.1.

Матрицы коэффициентов  $\tilde{A}_{k,s}$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  в системах (11.4) по аналогии с матрицами жесткости в традиционном МКЭ имеют блочно-диагональную структуру.

Таблица 11.1. Алгоритм заполнения матрицы перестановок  $I_G$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1.	$(4p - 3, 2p - 1), p = 1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $u_1^{(k,i)}, i = 1, 2, \dots, N$
2.	$(4p - 2, 2p), p = 1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $u_2^{(k,i)}, i = 1, 2, \dots, N$
3.	$(4p - 1, 2(N + p) - 1), p = 1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $v_1^{(k,i)}, i = 1, 2, \dots, N$
4.	$(4p, 2(N + p)), p = 1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $v_2^{(k,i)}, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: Все элементы матрицы  $I_G$  не указанные в таблице равны нулю.

**12. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Корректное аналитическое решение многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами производится по методу, аналогичному описанному в [1]. После определения узловых перемещений и их производных по переменной  $x_2$  по формулам (4.1)-(4.12) вычисляются деформации и напряжения.

**ЗАМЕЧАНИЯ**

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчи-

вости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Акимов П.А.** Корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусоч-

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Упругие изотропные балки-стенки

- но-постоянными коэффициентами. // Вестник МГСУ, №1, 2011, с. 11-16.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета двумерной упругой изотропной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 23-30.
  3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 16-41.
  4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // Вестник МГСУ, №5, 2012, с. 72-78.
  5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 1: Дискретизация области, аппроксимация искоемых функций, их частных производных, деформаций и напряжений. // Вестник МГСУ, №2, том 2, 2011, с. 74-80.
  6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Построение локальных и глобальных матриц жесткости и векторов на-грузок. // Вестник МГСУ, №2, том 2, 2011, с. 81-87.
  7. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
  8. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
  9. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: АСВ, 2004. – 200 с.
  10. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: АСВ, 2006. – 208 с.
  11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
  12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
  13. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: АСВ, 2008. – 336 с.
  14. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2009. – 336 с.
  15. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992. – 86 с.

16. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
17. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
18. **Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.** Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с.
19. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
20. **Розин Л.А.** Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998. – 532 с.
21. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
22. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
23. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
24. **Трушин С.И.** Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: АСВ, 2008. – 256 с.

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

# ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ЧАСТЬ 2: УПРУГИЕ ИЗОТРОПНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЛА

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний упругих изотропных трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, численная реализация, собственные частоты, формы колебаний, трехмерная конструкция, кусочно-постоянные параметры

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR EIGENVALUE ANALYSIS OF STRUCTURES WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIMENSION PART 2: ELASTIC ISOTROPIC THREE-DIMENSIONAL BODIES

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to numerical implementation of discrete-continual finite element method (DCFEM) of eigenvalue analysis of elastic isotropic deep beams with piecewise-constant physical and geometrical parameters in basic dimension.

**Key words:** discrete-continual finite element method, numerical implementation, eigenvalue analysis, three-dimensional structures, piecewise-constant physical and geometrical parameters

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения собственных частот и форм колебаний трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений может быть решена в аналитической форме вдоль данного направления (рис. 0.1). Именно эта идея и реализо-

вана в разработанном дискретно-континуальном методе конечных элементов (ДКМКЭ) [13-18]. Метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по выделяемому направлению кусочного постоянства параметров (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитическая форма получаемого решения, в то время как по другим направ-

лениям производится дискретизация с использованием стандартной техники метода конечных элементов (МКЭ). Таким образом, построение алгоритмов решения осуществляется за счет разумного сочетания численных и аналитических подходов. Аналитичность получаемых при этом решений существенно способствует улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с помощью ДКМКЭ картина напряженно-деформированного состояния (НДС) развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них разного рода локальных и глобальных факторов. ДКМКЭ особенно эффективен в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Преимуществами ДКМКЭ также являются понижение размерности при численном решении и отсутствие практических ограничений на длину объектов по основному направлению.

## 1. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ (ДККЭ)

Для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи каждая исходная подобласть  $\Omega_k$  ( $k=1, \dots, n_k-1$ ) с поперечным (по отношению к основному направлению) сечением  $S_{\Omega}^{(k)}$  окаймляется соответствующей расширенной  $\omega_k$  [19]. Каждая расширенная область  $\omega_k$  выбирается стандартной, в виде параллелепипеда. Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: по основному направлению (вдоль оси  $Ox_3$ ) решается континуальная задача, а по другим направлениям (вдоль осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ ) произ-

водится конечноэлементная аппроксимация. Аппроксимация поперечного по отношению к основному направлению сечения стандартной области состоит в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной так, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям поперечного сечения конструкции (рис. 1.1). Понятие топологической эквивалентности в данном случае означает, что она может быть получена из прямоугольной сетки в результате некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания». Выбор такого класса сеток, с одной стороны, дает возможность аппроксимировать большое количество разнообразных конструкций, а с другой – позволяет использовать простую регулярную нумерацию узлов, что приводит в дальнейшем к удобным математическим формулам, эффективным вычислительным схемам и алгоритмам, а также существенно упрощает сбор исходной информации и вывод результатов. Переход к прямоугольной сетке с единичным шагом легко осуществляется локальной заменой координат внутри сеточной ячейки. При «выпрямлении» сетки общий вид уравнений сохраняется – меняются лишь элементы матрицы коэффициентов исходной системы. Во многих случаях эффективно непосредственное применение прямоугольных сеток, поскольку это значительно упрощает и ускоряет алгоритмы, а следовательно, позволяет использовать большое количество узлов, что в результате приводит к увеличению точности. Допускается несогласованность сетки и очертания «поперечного» сечения конструкции (рис. 1.1). Заметим, что схема разбиения на дискретно-континуальные элементы одинакова для всех подобластей  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$ ) (рис. 1.2, 1.3). Область  $\omega_k$  разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ)  $\omega_{i,j}$  (рис. 1.2, 1.3):

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

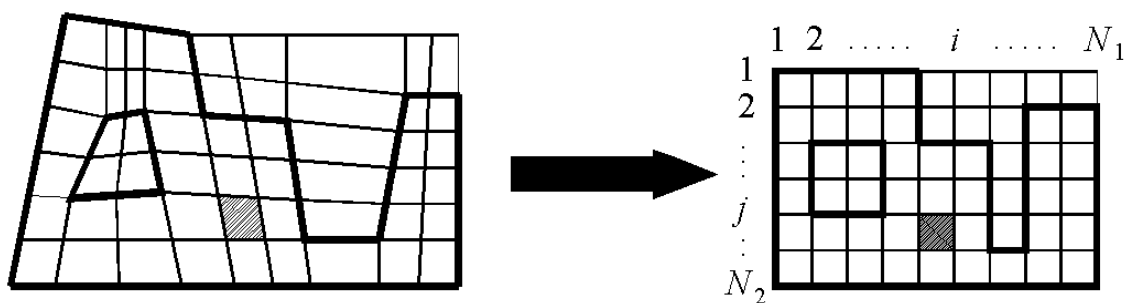


Рис 1.1. Пример выбора сетки, аппроксимирующей «поперечное» по отношению к основному направлению сечение конструкции.

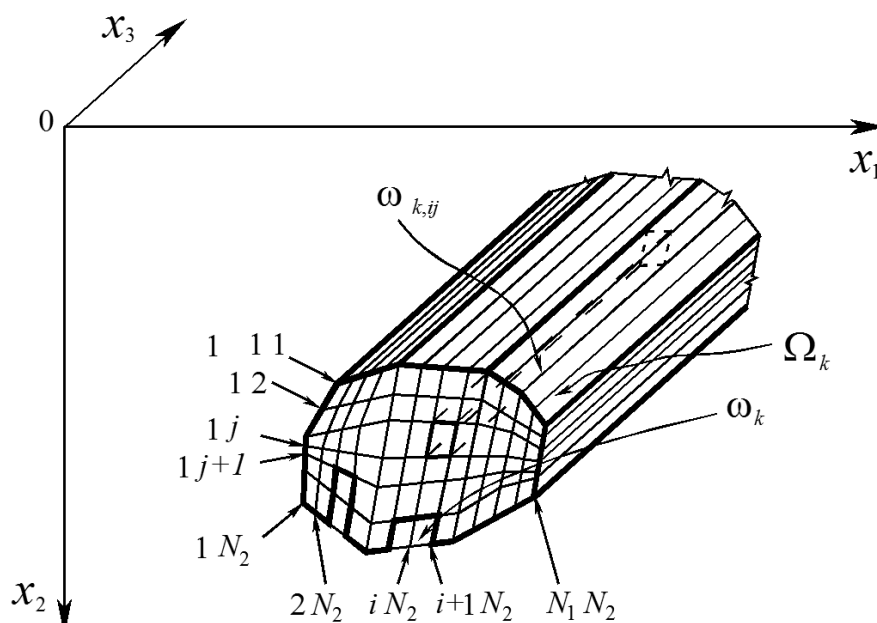


Рис 1.2. Схема дискретизации конструкции.

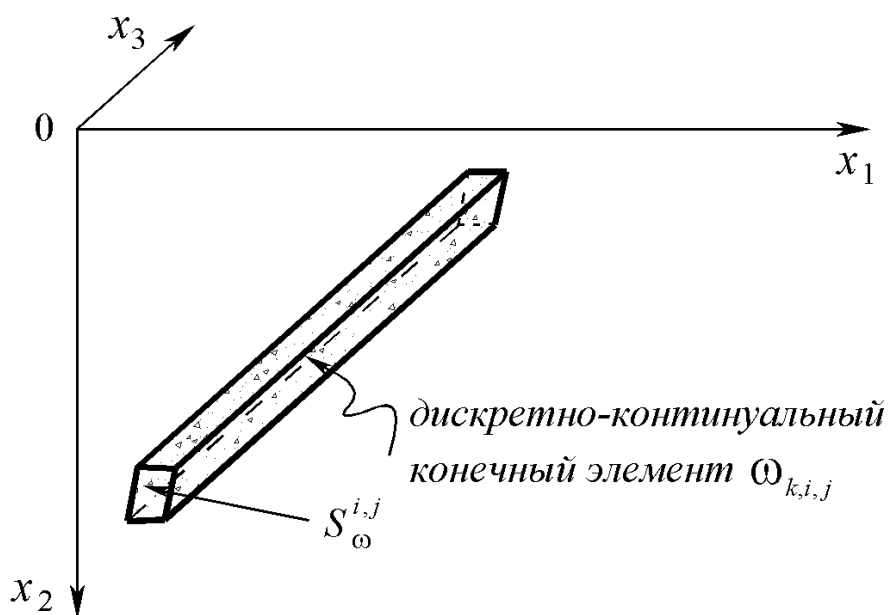


Рис. 1.3. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

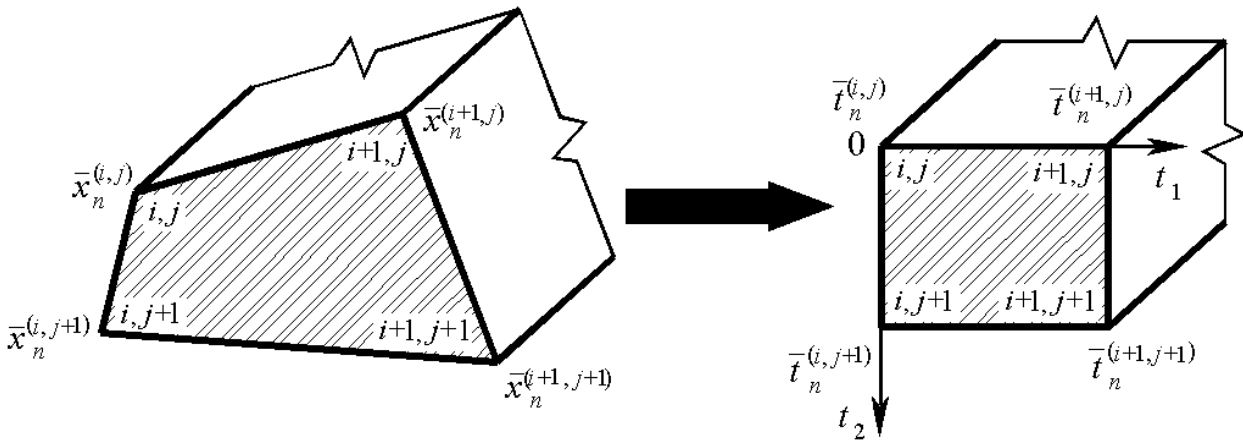


Рис. 1.4. Переход к локальной системе координат на ДККЭ.

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} \omega_{i,j}; \quad (1.1)$$

$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\omega; x_3 \in [0, l_3]\}, \quad (1.2)$$

где 
$$\omega_{i,j} = \bigcup_{k=1}^{n_k-1} \omega_{k,i,j}; \quad (1.3)$$

$$\omega_{k,i,j} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\omega^{i,j}; x_3 \in [x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b]\}, \quad (1.4)$$

$S_\omega, S_\omega^{i,j}$  – области, описанные соответственно сеткой и  $(i, j)$ -м ДККЭ в поперечном направлении конструкции;  $l_3$  – длина конструкции по основному направлению;  $N_1, N_2$  – принятое количество узлов по направлению осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ ;  $(x_1^{i,j}, x_2^{i,j}, x_3), h_1^{i,j}, h_2^{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2$  – соответственно координаты узлов и шаги сетки;  $N = N_1 \cdot N_2$ ;

$$x_1^{(i+1,j)} = x_1^{(i,j)} + h_1^{(i,j)}, \quad x_2^{(i+1,j)} = x_2^{(i,j)}, \quad (1.5)$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1; j = 1, \dots, N_2 - 1;$$

$$x_1^{(i,j+1)} = x_1^{(i,j)}, \quad x_2^{(i,j+1)} = x_2^{(i,j)} + h_2^{(i,j)}, \quad (1.6)$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1; j = 1, \dots, N_2 - 1;$$

$$h_1^{(i,j)} = \begin{cases} x_1^{(i+1,j)} - x_1^{(i,j)}, & i < N_1, \quad j = 1, \dots, N_2; \\ 0, & i = N_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$h_2^{(i,j)} = \begin{cases} x_2^{(i,j+1)} - x_2^{(i,j)}, & j < N_2, \quad i = 1, \dots, N_1. \\ 0, & j = N_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Определяем характеристическую функцию элемента и сеточные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i,j} \not\subset \Omega_k \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (1.10)$$

Рассмотрим произвольный  $(i, j)$ -й элемент модели (рис. 1.3).

Произведем локальную замену переменных внутри элемента, введя в произвольном «поперечном» (по отношению к основному направлению) сечения рассматриваемого элемента локальную систему координат  $Ot_1$  и  $Ot_2$  (рис. 1.4), при этом  $t_1 \in [0, 1]; t_2 \in [0, 1]$ .

Для «поперечного» (по отношению к основному направлению) сечения конструкции векторы координат произвольной точки ДККЭ в элементной и исходной системах имеют вид:

$$\bar{t} = [t_1 \quad t_2]^T; \quad \bar{x} = [x_1 \quad x_2]^T. \quad (1.11)$$

Соответствующая формула преобразования координат:

$$\bar{x} = \bar{x}_n^{(i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x} + t_2 \Delta_2 \bar{x} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (1.12)$$

где 
$$\Delta_1 \bar{x} = \bar{x}_n^{(i+1,j)} - \bar{x}_n^{(i,j)};$$

$$\Delta_2 \bar{x} = \bar{x}_n^{(i,j+1)} - \bar{x}_n^{(i,j)};$$

$$\Delta_{12} \bar{x} = \bar{x}_n^{(i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}. \quad (1.13)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

Здесь  $\bar{x}_n^{(i,j)}$ ,  $\bar{t}_n^{(i,j)}$  – векторы координат узла элемента в исходной и элементной системах координат соответственно,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_2$ .

В результате замены переменных вычисление производных по  $x_1$  и  $x_2$  производится согласно формулам дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2. \quad (1.14)$$

Величины  $\partial t_k / \partial x_s$  из (1.14) образуют якобиан системы. Матрица Якоби:

$$\frac{D\bar{t}}{D\bar{x}} = \begin{bmatrix} \partial t_1 / \partial x_1 & \partial t_1 / \partial x_2 \\ \partial t_2 / \partial x_1 & \partial t_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} = \alpha, \quad (1.15)$$

где 
$$\alpha_{k,s} = \frac{\partial t_k}{\partial x_s}. \quad (1.16)$$

Элементы матрицы функционального определителя  $\beta = D\bar{x} / D\bar{t}$  находятся как

$$\beta_{k,s}^{(i,j)} = \partial x_k / \partial t_s = \Delta_s x_k^{(i,j)} + t_{3-s} \Delta_{12} x_k^{(i,j)}, \quad k = 1, 2; \quad s = 1, 2; \quad (1.17)$$

т.е. с учетом (1.7), (1.8) можем записать:

$$\begin{aligned} \beta_{1,1}^{(i,j)} &= (1-t_2)h_1^{(i,j)} + t_2 h_1^{(i,j+1)}; \\ \beta_{1,2}^{(i,j)} &= \tau_1^{(i,j)} + t_1 (h_1^{(i,j+1)} - h_1^{(i,j)}); \\ \beta_{2,1}^{(i,j)} &= \tau_2^{(i,j)} + t_2 (h_2^{(i+1,j)} - h_2^{(i,j)}); \\ \beta_{2,2}^{(i,j)} &= (1-t_1)h_2^{(i,j)} + t_1 h_2^{(i+1,j)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\tau_1^{(i,j)} = \begin{cases} x_1^{(i,j+1)} - x_1^{(i,j)}, & j < N_2, \\ 0, & j = N_2, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$i = 1, \dots, N_1;$$

$$\tau_2^{(i,j)} = \begin{cases} x_2^{(i+1,j)} - x_2^{(i,j)}, & i < N_1, \\ 0, & i = N_1, \end{cases} \quad (1.20)$$

$$j = 1, \dots, N_2.$$

Матрицы функциональных определителей  $D\bar{x} / D\bar{t}$  и  $D\bar{t} / D\bar{x}$  взаимосвязаны:

$$\frac{D(\bar{t})}{D(\bar{x})} = \left[ \frac{D(\bar{x})}{D(\bar{t})} \right]^{-1} \quad \text{или} \quad \alpha = \beta^{-1}, \quad (1.21)$$

т.е. 
$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(i,j)} & \alpha_{1,2}^{(i,j)} \\ \alpha_{2,1}^{(i,j)} & \alpha_{2,2}^{(i,j)} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta_{2,2}^{(i,j)} & -\beta_{1,2}^{(i,j)} \\ -\beta_{2,1}^{(i,j)} & \beta_{1,1}^{(i,j)} \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

где

$$J_{i,j} = \det[\beta_{i,j}] = \beta_{1,1}^{(i,j)} \beta_{2,2}^{(i,j)} - \beta_{1,2}^{(i,j)} \beta_{2,1}^{(i,j)} \quad (1.23)$$

или в поэлементном представлении имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}^{(i,j)} &= \alpha_{1,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \\ \alpha_{1,2}^{(i,j)} &= \alpha_{1,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \\ \alpha_{2,1}^{(i,j)} &= \alpha_{2,1}^{(i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}; \\ \alpha_{2,2}^{(i,j)} &= \alpha_{2,2}^{(i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)}{J_{i,j}(t_1, t_2)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$  и их производные  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$  по переменной  $x_3$ , т.е. для  $(p, q)$ -го узла это  $u_1^{(k,p,q)}, u_2^{(k,p,q)}, u_3^{(k,p,q)}, v_1^{(k,p,q)}, v_2^{(k,p,q)}, v_3^{(k,p,q)}$  и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{(k,p,q)} = \bar{U}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,p,q)} \\ \bar{v}_n^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $\bar{u}_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,p,q)} \\ u_2^{(k,p,q)} \\ u_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix};$  (2.2)

$\bar{v}_n^{(k,p,q)} = \bar{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,p,q)} \\ v_2^{(k,p,q)} \\ v_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix},$  (2.3)

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$\bar{U}^{(k,i,j)} = \bar{U}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}^{(k,i,j)} \\ \bar{v}^{(k,i,j)} \end{bmatrix},$  (2.4)

где  $\bar{u}^{(k,i,j)} = \bar{u}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(k,i,j)} \\ \bar{u}_2^{(k,i,j)} \\ \bar{u}_3^{(k,i,j)} \end{bmatrix};$  (2.5)

$\bar{v}^{(k,i,j)} = \bar{v}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{(k,i,j)} \\ \bar{v}_2^{(k,i,j)} \\ \bar{v}_3^{(k,i,j)} \end{bmatrix};$  (2.6)

$\bar{u}_p^{(k,i,j)} = \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_p^{(k,i,j)} \\ u_p^{(k,i+1,j)} \\ u_p^{(k,i,j+1)} \\ u_p^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3;$  (2.7)

$\bar{v}_p^{(k,i,j)} = \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_p^{(k,i,j)} \\ v_p^{(k,i+1,j)} \\ v_p^{(k,i,j+1)} \\ v_p^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3;$  (2.8)

В простейшем случае поля  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$  и  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$  по сечению ДККЭ аппроксимируются полиномами первого порядка, зависящими от двух аргументов (билинейная аппроксимация), т.е. имеем:

$u_p^{(k)} = u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = u_p^{(k)}(t_1, t_2, x_3) = \alpha_{0,0,p}^{(k,i,j)} + \alpha_{1,0,p}^{(k,i)}t_1 + \alpha_{0,1,p}^{(k,i)}t_2 + \alpha_{1,1,p}^{(k,i)}t_1t_2,$  (2.9)  
 $p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j};$

$v_p^{(k)} = v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = v_p^{(k)}(t_1, t_2, x_3) = \beta_{0,0,p}^{(k,i,j)} + \beta_{1,0,p}^{(k,i)}t_1 + \beta_{0,1,p}^{(k,i)}t_2 + \beta_{1,1,p}^{(k,i)}t_1t_2,$  (2.10)  
 $p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j};$

или иначе в матрично-векторной форме

$u_p^{(k)} = \bar{t}^T \bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}, \quad v_p^{(k)} = \bar{t}^T \bar{\beta}_p^{(k,i,j)},$  (2.11)  
 $p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j};$

где  $\bar{\alpha}_p^{(k,i,j)} = [\alpha_{0,0,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{1,0,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{0,1,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{1,1,p}^{(k,i,j)}]^T;$  (2.12)

$\bar{\beta}_p^{(k,i,j)} = [\beta_{0,0,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{1,0,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{0,1,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{1,1,p}^{(k,i,j)}]^T;$  (2.13)

$\bar{t} = [1 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_1t_2]^T;$  (2.14)

$\bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}$  и  $\bar{\beta}_p^{(k,i,j)}$  – векторы коэффициентов.

Очевидно, имеют место соотношения:

$\bar{u}_p^{(k,i,j)} = C \bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}, \quad \bar{v}_p^{(k,i,j)} = C \bar{\beta}_p^{(k,i,j)},$  (2.15)  
 $p = 1, 2, 3;$

где  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$  (2.16)

откуда

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  (2.17)

и, следовательно,

$u_p^{(k)} = \bar{t}^T C^{-1} \bar{u}_p^{(k,i,j)}, \quad v_p^{(k)} = \bar{t}^T C^{-1} \bar{v}_p^{(k,i,j)},$  (2.18)  
 $p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j};$

или

$u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3),$   
 $v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3),$  (2.19)  
 $p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j};$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

где

$$N = N(t_1, t_2) = \tilde{t}^T C^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.20)$$

– матрица функций формы («поперечных» по отношению к основному направлению) по сечению ДККЭ с элементами

$$N_1(t_1, t_2) = 1 - t_1 - t_2 + t_1 t_2; \quad N_2(t_1, t_2) = t_1 - t_1 t_2; \\ N_3(t_1, t_2) = t_2 - t_1 t_2; \quad N_4(t_1, t_2) = t_1 t_2. \quad (2.21)$$

Матрица (2.20) после переобозначений также представима в виде

$$N = N(t_1, t_2) = \tilde{t}^T N_0, \quad \text{где } N_0 = C^{-1}. \quad (2.22)$$

Формулы (2.19) можно иначе переписать следующим образом:

$$u_p^{(k)} = u_p^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 u_p^{(k)} + t_2 \Delta_2 u_p^{(k)} + t_1 t_2 \Delta_{12} u_p^{(k)}, \\ p = 1, 2, 3; \quad (2.23)$$

$$v_p^{(k)} = v_p^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 v_p^{(k)} + t_2 \Delta_2 v_p^{(k)} + t_1 t_2 \Delta_{12} v_p^{(k)}, \\ p = 1, 2, 3, \quad (2.24)$$

где

$$\Delta_1 u_p^{(k)} = u_p^{(k,i+1,j)} - u_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_2 u_p^{(k)} = u_p^{(k,i,j+1)} - u_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_{12} u_p^{(k)} = u_p^{(k,i+1,j+1)} - u_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 u_p^{(k)}; \quad (2.25)$$

$$\Delta_1 v_p^{(k)} = v_p^{(k,i+1,j)} - v_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_2 v_p^{(k)} = v_p^{(k,i,j+1)} - v_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_{12} v_p^{(k)} = v_p^{(k,i+1,j+1)} - v_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 v_p^{(k)}. \quad (2.26)$$

Можно обосновать справедливость следующих важных для последующего изложения соотношений (ниже  $(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}$ ):

$$\bar{u}_k(x_1, x_2, x_3) = N_n(t_1, t_2) \tilde{u}^{(k,i,j)}(x_3), \\ \bar{v}_k(x_1, x_2, x_3) = N_n(t_1, t_2) \tilde{v}^{(k,i,j)}(x_3), \quad (2.27)$$

где

$$N_n(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N(t_1, t_2) = \\ = \begin{bmatrix} N(t_1, t_2) & 0 & 0 \\ 0 & N(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & 0 & N(t_1, t_2) \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

$\otimes$  – символ, обозначающий операцию прямого произведения матриц;

$$\bar{u}_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \\ u_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \\ u_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}; \quad (2.29)$$

$$\bar{v}_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \\ v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \\ v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Руководствуясь (2.20) и (2.28) можем записать:

$$N_n = N_n(t_1, t_2) = T(t_1, t_2) N_{0,n}, \quad (2.31)$$

где

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \tilde{t}^T = \begin{bmatrix} \tilde{t}^T & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{t}^T & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{t}^T \end{bmatrix}; \quad (2.32)$$

$$N_{0,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N_0 = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Введем обозначения:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

На основании формул (1.14), (1.21) и (2.23), (2.24) выражения для частных производных

первого порядка от неизвестных функций по переменным  $x_1, x_2$  и  $x_3$  записываются следующим образом (ниже  $(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}$ ):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \\ = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \cdot [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3); & \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \\ = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \cdot [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3); & \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\partial_3 u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \\ = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \cdot [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3); & \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = & \\ = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \cdot [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3), & \end{aligned} \quad (3.6)$$

где 
$$N^{(p,q)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^p}{\partial t_1^p} \frac{\partial^q}{\partial t_2^q} N(t_1, t_2). \quad (3.7)$$

Производные (3.7) от (2.21) находятся поэлементно:

$$\begin{aligned} N_1^{(1,0)}(t_1, t_2) = -1 + t_2; \quad N_2^{(1,0)}(t_1, t_2) = 1 - t_2; \\ N_3^{(1,0)}(t_1, t_2) = -t_2; \quad N_4^{(1,0)}(t_1, t_2) = t_2; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} N_1^{(0,1)}(t_1, t_2) = -1 + t_1; \quad N_2^{(0,1)}(t_1, t_2) = -t_1; \\ N_3^{(0,1)}(t_1, t_2) = 1 - t_1; \quad N_4^{(0,1)}(t_1, t_2) = t_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1^{(i,j)}(t_1, t_2) = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \times \\ \times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(i,j)}(t_1, t_2)]; & \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} F_2^{(i,j)}(t_1, t_2) = J_{i,j}^{-1}(t_1, t_2) \times \\ \times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(i,j)}(t_1, t_2) - & \\ - N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(i,j)}(t_1, t_2)]. & \end{aligned} \quad (3.11)$$

С учетом (3.9)-(3.10) можем переписать (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6) в виде

$$\partial_1 u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(i,j)}(t_1, t_2) \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.12)$$

$$\partial_2 u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = F_2^{(i,j)}(t_1, t_2) \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.13)$$

$$\partial_1 v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(i,j)}(t_1, t_2) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.14)$$

$$\partial_2 v_p^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = F_2^{(i,j)}(t_1, t_2) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3). \quad (3.15)$$

Соответствующие узловые функции определяются с учетом операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (3.4), (3.12)-(3.14):

– «срединные» элементы сетки ( $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = 2, 3, \dots, N_2 - 1$ ):

$$\begin{aligned} [\partial_1 u_p^{(k)}]^{(i,j)} = & \\ = \mathcal{G}_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1} \times & \\ \times \{ \theta_{k,i-1,j-1} F_1^{(i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i-1,j} F_1^{(i-1,j)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,i-1,j)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j-1} F_1^{(i,j-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,i,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j} F_1^{(i,j)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3) \}; & \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} [\partial_2 u_p^{(k)}]^{(i,j)} = & \\ = \mathcal{G}_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1} \times & \\ \times \{ \theta_{k,i-1,j-1} F_2^{(i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i-1,j} F_2^{(i-1,j)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,i-1,j)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j-1} F_2^{(i,j-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,i,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j} F_2^{(i,j)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,i,j)}(x_3) \}; & \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(i,j)} = v_p^{(k,i,j)}; \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} [\partial_1 v_p^{(k)}]^{(i,j)} = & \\ = \mathcal{G}_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1} \times & \\ \times \{ \theta_{k,i-1,j-1} F_1^{(i-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i-1,j} F_1^{(i-1,j)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,i-1,j)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j-1} F_1^{(i,j-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,i,j-1)}(x_3) + & \\ + \theta_{k,i,j} F_1^{(i,j)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3) \}; & \end{aligned} \quad (3.19)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 v_p^{(k)}]^{(i,j)} = \\
 & = \mathcal{G}_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,i-1,j-1} F_2^{(i-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,i-1,j} F_2^{(i-1,j)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,i,j-1} F_2^{(i,j-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,i,j} F_2^{(i,j)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,i,j)}(x_3) \},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

где

$$\mathcal{G}_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \\ & + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \\ & + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \tag{3.21}$$

– элементы «левой вертикальной границы»  
*(i = 1; j = 2, 3, ..., N<sub>2</sub> - 1):*

$$\begin{aligned}
 & [\partial_1 u_p^{(k)}]^{(1,j)} = \mathcal{G}_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,1,j-1} F_1^{(1,j-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,1,j} F_1^{(1,j)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 u_p^{(k)}]^{(1,j)} = \mathcal{G}_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,1,j-1} F_2^{(1,j-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,1,j} F_2^{(1,j)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(1,j)} = v_p^{(k,i,j)}; \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_1 v_p^{(k)}]^{(1,j)} = \mathcal{G}_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,1,j-1} F_1^{(1,j-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,1,j} F_1^{(1,j)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 v_p^{(k)}]^{(1,j)} = \mathcal{G}_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,1,j-1} F_2^{(1,j-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,1,j} F_2^{(1,j)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,1,j)}(x_3) \},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$\mathcal{G}_{k,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} = 0 \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \tag{3.27}$$

– элементы «правой вертикальной границы»  
*(i = N<sub>1</sub>; j = 2, 3, ..., N<sub>2</sub> - 1):*

$$\begin{aligned}
 & [\partial_1 u_p^{(k)}]^{(N_1,j)} = \mathcal{G}_{k,N_1,j} (\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,N_1-1,j-1} F_1^{(N_1-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,N_1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,N_1,j} F_1^{(N_1-1,j)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,N_1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 u_p^{(k)}]^{(N_1,j)} = \mathcal{G}_{k,N_1,j} (\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,N_1-1,j-1} F_2^{(N_1-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,N_1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,N_1,j} F_2^{(N_1-1,j)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,N_1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(N_1,j)} = v_p^{(k,N_1,j)}; \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_1 v_p^{(k)}]^{(N_1,j)} = \mathcal{G}_{k,N_1,j} (\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,N_1-1,j-1} F_1^{(N_1-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,N_1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,N_1,j} F_1^{(N_1-1,j)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,N_1,j)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 v_p^{(k)}]^{(N_1,j)} = \mathcal{G}_{k,N_1,j} (\theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,N_1-1,j-1} F_2^{(N_1-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,N_1,j-1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,N_1,j} F_2^{(N_1-1,j)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,N_1,j)}(x_3) \},
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

где

$$\mathcal{G}_{k,N_1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,N_1-1,j-1} + \theta_{k,N_1-1,j} = 0 \end{cases}$$

$$j = 2, 3, \dots, N_2 - 1; \tag{3.33}$$

– элементы «нижней горизонтальной границы»  
*(i = 2, 3, ..., N<sub>1</sub> - 1; j = 1):*

$$\begin{aligned}
 & [\partial_1 u_p^{(k)}]^{(i,1)} = \mathcal{G}_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,i-1,1} F_1^{(i-1,1)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,i-1,1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,i,1} F_1^{(i,1)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,i,1)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 & [\partial_2 u_p^{(k)}]^{(i,1)} = \mathcal{G}_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1} \times \\
 & \times \{ \theta_{k,i-1,1} F_2^{(i-1,1)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,i-1,1)}(x_3) + \\
 & + \theta_{k,i,1} F_2^{(i,1)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,i,1)}(x_3) \};
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(i,1)} = v_p^{(k,i,1)}; \tag{3.36}$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(i,1)} = \mathcal{G}_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,1} F_1^{(i-1,1)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,i-1,1)}(x_3) + \theta_{k,i,1} F_1^{(i,1)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,i,1)}(x_3) \}; \quad (3.37)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(i,1)} = \mathcal{G}_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,1} F_2^{(i-1,1)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,i-1,1)}(x_3) + \theta_{k,i,1} F_2^{(i,1)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,i,1)}(x_3) \}; \quad (3.38)$$

где

$$\mathcal{G}_{k,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} = 0 \end{cases} \quad (3.39) \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1;$$

– элементы «верхней горизонтальной границы» ( $i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; j = N_2$ ):

$$[\partial_1 u_p^{(k)}]^{(i,N_2)} = \mathcal{G}_{k,i,N_2} (\theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,N_2-1} F_1^{(i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,i-1,N_2-1)}(x_3) + \theta_{k,i,N_2-1} F_1^{(i,N_2-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,i,N_2-1)}(x_3) \}; \quad (3.40)$$

$$[\partial_2 u_p^{(k)}]^{(i,N_2)} = \mathcal{G}_{k,i,N_2} (\theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,N_2-1} F_2^{(i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,i-1,N_2-1)}(x_3) + \theta_{k,i,N_2-1} F_2^{(i,N_2-1)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,i,N_2-1)}(x_3) \}; \quad (3.41)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(i,N_2)} = v_p^{(k,i,N_2)}; \quad (3.42)$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(i,N_2)} = \mathcal{G}_{k,i,N_2} (\theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,N_2-1} F_1^{(i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,i-1,N_2-1)}(x_3) + \theta_{k,i,N_2-1} F_1^{(i,N_2-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,i,N_2-1)}(x_3) \}; \quad (3.43)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(i,N_2)} = \mathcal{G}_{k,i,N_2} (\theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1})^{-1} \times \{ \theta_{k,i-1,N_2-1} F_2^{(i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{v}_p^{(k,i-1,N_2-1)}(x_3) + \theta_{k,i,N_2-1} F_2^{(i,N_2-1)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,i,N_2-1)}(x_3) \}; \quad (3.44)$$

где

$$\mathcal{G}_{k,i,N_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_2-1} + \theta_{k,i,N_2-1} = 0 \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1; \quad (3.45)$$

– «угловая точка границы»  $i = 1; j = 1$ :

$$[\partial_1 u_p^{(k)}]^{(1,1)} = \theta_{k,1,1} F_1^{(1,1)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.46)$$

$$[\partial_2 u_p^{(k)}]^{(1,1)} = \theta_{k,1,1} F_2^{(1,1)}(0,0) \bar{u}_p^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.47)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(1,1)} = v_p^{(k,1,1)}; \quad (3.48)$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(1,1)} = \theta_{k,1,1} F_1^{(1,1)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.49)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(1,1)} = \theta_{k,1,1} F_2^{(1,1)}(0,0) \bar{v}_p^{(k,1,1)}(x_3). \quad (3.50)$$

– «угловая точка границы»  $i = 1; j = N_2$ :

$$[\partial_1 u_p^{(k)}]^{(1,N_2)} = \theta_{k,1,N_2} F_1^{(1,N_2)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,1,N_2)}(x_3); \quad (3.51)$$

$$[\partial_2 u_p^{(k)}]^{(1,N_2)} = \theta_{k,1,N_2} F_2^{(1,N_2)}(0,1) \bar{u}_p^{(k,1,N_2)}(x_3); \quad (3.52)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(1,N_2)} = v_p^{(k,1,N_2)}; \quad (3.53)$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(1,N_2)} = \theta_{k,1,N_2} F_1^{(1,N_2)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,1,N_2)}(x_3); \quad (3.54)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(1,N_2)} = \theta_{k,1,N_2} F_2^{(1,N_2)}(0,1) \bar{v}_p^{(k,1,N_2)}(x_3). \quad (3.55)$$

– «угловая точка границы»  $i = N_1; j = 1$ :

$$[\partial_1 u_p^{(k)}]^{(N_1,1)} = \theta_{k,N_1,1} F_1^{(N_1,1)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,N_1,1)}(x_3); \quad (3.56)$$

$$[\partial_2 u_p^{(k)}]^{(N_1,1)} = \theta_{k,N_1,1} F_2^{(N_1,1)}(1,0) \bar{u}_p^{(k,N_1,1)}(x_3); \quad (3.57)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(N_1,1)} = v_p^{(k,N_1,1)}; \quad (3.58)$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(N_1,1)} = \theta_{k,N_1,1} F_1^{(N_1,1)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,N_1,1)}(x_3); \quad (3.59)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(N_1,1)} = \theta_{k,N_1,1} F_2^{(N_1,1)}(1,0) \bar{v}_p^{(k,N_1,1)}(x_3). \quad (3.60)$$

– «угловая точка границы»  $i = N_1; j = N_2$ :

$$[\partial_1 u_p^{(k)}]^{(N_1,N_2)} = \theta_{k,N_1,N_2} F_1^{(N_1,N_2)}(1,1) \bar{u}_p^{(k,N_1,N_2)}(x_3); \quad (3.61)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

$$[\partial_2 u_p^{(k)}]^{(N_1, N_2)} = \theta_{k, N_1, N_2} F_2^{(N_1, N_2)}(1, 1) \bar{u}_p^{(k, N_1, N_2)}(x_3); \quad (3.62)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(N_1, N_2)} = v_p^{(k, N_1, N_2)}; \quad (3.63)$$

$$[\partial_1 v_p^{(k)}]^{(N_1, N_2)} = \theta_{k, N_1, N_2} F_1^{(N_1, N_2)}(1, 1) \bar{v}_p^{(k, N_1, N_2)}(x_3); \quad (3.64)$$

$$[\partial_2 v_p^{(k)}]^{(N_1, N_2)} = \theta_{k, N_1, N_2} F_2^{(N_1, N_2)}(1, 1) \bar{v}_p^{(k, N_1, N_2)}(x_3). \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sigma_{2,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \mu_k \{ [\partial_2 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + [\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sigma_{3,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \mu_k \{ v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3) + [\partial_1 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \sigma_{3,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \mu_k \{ v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3) + [\partial_2 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_3) \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### 4. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

Выражения для деформаций и напряжений на элементе на основании известных соотношений [12, 20-29] имеют вид:

– деформации

$$\varepsilon_{1,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3); \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{2,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3); \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{3,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3); \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{2,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + [\partial_2 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{3,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{3,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_2 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.6)$$

– напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda_k + 2\mu_k)[\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \lambda_k \{ [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda_k + 2\mu_k)[\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \lambda_k \{ [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda_k + 2\mu_k)v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \lambda_k \{ [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_3) + [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

Приведенные к узлам деформации  $[\varepsilon_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)}$ ,  $p=1, 2, 3$ ;  $q=1, 2, 3$  и напряжения  $[\sigma_{p,q}^{(k)}]^{(i,j)}$ ,  $p=1, 2, 3$ ;  $q=1, 2, 3$  определяются аналогично частным производным от искомым функций (см. формулы пункта 3) с учетом соответствующих операций осреднения.

#### 5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДККЭ

Прежде всего, отметим, что методика построения матриц жесткости для ДККЭ в частном случае прямоугольного поперечного сечения достаточно подробно описана в [2]. Ниже будет рассматриваться более общий случай, когда поперечное сечение ДККЭ представляет собой произвольный четырехугольник.

Очевидно, что квадратичная часть исходного функционала Лагранжа [12, 26, 29] может быть представлена в виде суммы квадратичных частей функционалов, определенных на полученных дискретно-континуальных конечных элементах на соответствующих фрагментах конструкции:

$$\tilde{\Phi}_k(\bar{U}_k) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{U}^{(k,i,j)}), \quad (5.1)$$

$$\text{где } \bar{U}^{(k,i,j)} = \bar{U}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}^{(k,i,j)} \\ \bar{v}^{(k,i,j)} \end{bmatrix}; \quad (5.2)$$

$$\tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{U}^{(k,i,j)}) = 0.5 \cdot (K_k^{(i,j)} \bar{U}^{(k,i,j)}, \bar{U}^{(k,i,j)}); \quad (5.3)$$

$K_k^{(i,j)}$  – матрица жесткости  $(i, j)$ -го дискретно-континуального конечного элемента, определенного на интервале  $\Omega_k$ , формирование которой может быть произведено методом базисных вариаций. Формула для определения ее элементов:

$$(K_k^{(i,j)})_{p,q} = \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_p + \bar{e}_q) - \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_p) - \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_q) + \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_0), \quad (5.4)$$

$$p = 1, 2, \dots, 24; \quad q = 1, 2, \dots, 24,$$

где  $\bar{e}_j, \bar{e}_0$  – 24-х мерные векторы, элементы которых определяются по формуле

$$(e_j)_l = \delta_{j,l}; \quad (e_0)_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 24; \quad (5.5)$$

$\delta_{j,l}$  – символ Кронекера.

Структура матрицы жесткости  $K_k^{(i,j)}$  ДККЭ следующая:

$$K_k^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{k,uu}^{1,1} & K_{k,uv}^{1,1} & K_{k,uu}^{1,2} & K_{k,uv}^{1,2} & K_{k,uu}^{1,3} & K_{k,uv}^{1,3} & K_{k,uu}^{1,4} & K_{k,uv}^{1,4} \\ K_{k,yu}^{1,1} & K_{k,yv}^{1,1} & K_{k,yu}^{1,2} & K_{k,yv}^{1,2} & K_{k,yu}^{1,3} & K_{k,yv}^{1,3} & K_{k,yu}^{1,4} & K_{k,yv}^{1,4} \\ K_{k,uu}^{2,1} & K_{k,uv}^{2,1} & K_{k,uu}^{2,2} & K_{k,uv}^{2,2} & K_{k,uu}^{2,3} & K_{k,uv}^{2,3} & K_{k,uu}^{2,4} & K_{k,uv}^{2,4} \\ K_{k,yu}^{2,1} & K_{k,yv}^{2,1} & K_{k,yu}^{2,2} & K_{k,yv}^{2,2} & K_{k,yu}^{2,3} & K_{k,yv}^{2,3} & K_{k,yu}^{2,4} & K_{k,yv}^{2,4} \\ K_{k,uu}^{3,1} & K_{k,uv}^{3,1} & K_{k,uu}^{3,2} & K_{k,uv}^{3,2} & K_{k,uu}^{3,3} & K_{k,uv}^{3,3} & K_{k,uu}^{3,4} & K_{k,uv}^{3,4} \\ K_{k,yu}^{3,1} & K_{k,yv}^{3,1} & K_{k,yu}^{3,2} & K_{k,yv}^{3,2} & K_{k,yu}^{3,3} & K_{k,yv}^{3,3} & K_{k,yu}^{3,4} & K_{k,yv}^{3,4} \\ K_{k,uu}^{4,1} & K_{k,uv}^{4,1} & K_{k,uu}^{4,2} & K_{k,uv}^{4,2} & K_{k,uu}^{4,3} & K_{k,uv}^{4,3} & K_{k,uu}^{4,4} & K_{k,uv}^{4,4} \\ K_{k,yu}^{4,1} & K_{k,yv}^{4,1} & K_{k,yu}^{4,2} & K_{k,yv}^{4,2} & K_{k,yu}^{4,3} & K_{k,yv}^{4,3} & K_{k,yu}^{4,4} & K_{k,yv}^{4,4} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

где  $K_{k,uu}^{l,m}, K_{k,uv}^{l,m}, K_{k,yu}^{l,m}, K_{k,yv}^{l,m}$ ,  $l, m = 1, 2, 3, 4$  – матрицы третьего порядка):

На основе матрицы жесткости ДККЭ (5.6) формируются соответствующие поэлементные матрицы  $K_{k,uu}^{(i,j)}, K_{k,uv}^{(i,j)}, K_{k,yu}^{(i,j)}$  и  $K_{k,yv}^{(i,j)}$  12-го порядка:

$$K_{k,uu}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{k,uu}^{1,1} & K_{k,uu}^{1,2} & K_{k,uu}^{1,3} & K_{k,uu}^{1,4} \\ K_{k,uu}^{2,1} & K_{k,uu}^{2,2} & K_{k,uu}^{2,3} & K_{k,uu}^{2,4} \\ K_{k,uu}^{3,1} & K_{k,uu}^{3,2} & K_{k,uu}^{3,3} & K_{k,uu}^{3,4} \\ K_{k,uu}^{4,1} & K_{k,uu}^{4,2} & K_{k,uu}^{4,3} & K_{k,uu}^{4,4} \end{bmatrix}; \quad (5.7)$$

$$K_{k,uv}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{k,uv}^{1,1} & K_{k,uv}^{1,2} & K_{k,uv}^{1,3} & K_{k,uv}^{1,4} \\ K_{k,uv}^{2,1} & K_{k,uv}^{2,2} & K_{k,uv}^{2,3} & K_{k,uv}^{2,4} \\ K_{k,uv}^{3,1} & K_{k,uv}^{3,2} & K_{k,uv}^{3,3} & K_{k,uv}^{3,4} \\ K_{k,uv}^{4,1} & K_{k,uv}^{4,2} & K_{k,uv}^{4,3} & K_{k,uv}^{4,4} \end{bmatrix}; \quad (5.8)$$

$$K_{k,yu}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{k,yu}^{1,1} & K_{k,yu}^{1,2} & K_{k,yu}^{1,3} & K_{k,yu}^{1,4} \\ K_{k,yu}^{2,1} & K_{k,yu}^{2,2} & K_{k,yu}^{2,3} & K_{k,yu}^{2,4} \\ K_{k,yu}^{3,1} & K_{k,yu}^{3,2} & K_{k,yu}^{3,3} & K_{k,yu}^{3,4} \\ K_{k,yu}^{4,1} & K_{k,yu}^{4,2} & K_{k,yu}^{4,3} & K_{k,yu}^{4,4} \end{bmatrix}; \quad (5.9)$$

$$K_{k,yv}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{k,yv}^{1,1} & K_{k,yv}^{1,2} & K_{k,yv}^{1,3} & K_{k,yv}^{1,4} \\ K_{k,yv}^{2,1} & K_{k,yv}^{2,2} & K_{k,yv}^{2,3} & K_{k,yv}^{2,4} \\ K_{k,yv}^{3,1} & K_{k,yv}^{3,2} & K_{k,yv}^{3,3} & K_{k,yv}^{3,4} \\ K_{k,yv}^{4,1} & K_{k,yv}^{4,2} & K_{k,yv}^{4,3} & K_{k,yv}^{4,4} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

## 6. ФОРМИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Формирование глобальных матриц  $K_{k,uu}, K_{k,uv}, K_{k,yu}$  и  $K_{k,yv}$   $3N_1N_2$ -го порядка всей системы дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих конструкцию осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости (метод конечных вкладов – суммирование с накоплением [12, 26, 29]).

Заметим, что при наличии в рассматриваемой конструкции «пустот» (т.е. дискретно-континуальных элементов с нулевыми значениями характеристической функции) матрица  $K_{k,yv}$  будет вырожденной, что, очевидно, приведет к невозможности вычисления  $K_{k,yv}^{-1}$ . В этой связи необходима коррекция матрицы  $K_{k,yv}$ . Алгоритм этой коррекции следующий:

1. Последовательно перебираем  $i=1, 2, \dots, 3N_1N_2$ .

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

2. Для каждого значения  $i$  следующее: если все элементы  $i$ -й строки матрицы  $K_{k,vv}$  нулевые и все элементы  $i$ -го столбца матрицы  $K_{k,vv}$  также нулевые, то следует положить  $(K_{k,vv})_{i,i} = 1$ , где  $(K_{k,vv})_{i,i}$  – элемент матрицы  $K_{k,vv}$ , расположенный в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце.

Континуальные операторы [5, 6] и матрицы сопоставлены так:

$$\mathcal{L}_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} \Rightarrow K_{k,uv}; \quad \mathcal{L}_{k,vu} \Rightarrow K_{k,vu};$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \Rightarrow \tilde{K}_{k,uv}; \quad \mathcal{L}_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \mathcal{L}_{k,uu} & \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} K_{k,uu} & K_{k,vv}^{-1} \tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

где  $E$  – тождественный оператор и единичная матрица соответствующего порядка;

$$\tilde{K}_{k,uv} = K_{k,uv} - K_{k,vu}. \quad (6.3)$$

## 7. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Статические граничные условия на части границы, расположенной вдоль основного направления конструкции, учитываются, как правило, в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи также должны быть приняты во внимание статические граничные условия на остальных элементах границы (если заданы) и кинематические граничные условия.

Пусть  $x_{3,k}^b$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_k$  – координаты граничных поперечных сечений конструкции. Граничные условия в них записываются в виде

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+,$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (7.1)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (7.2)$$

где  $B_k^-, B_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $B_1^+$ ,  $B_{n_k}^-$  – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные  $6N_1N_2$ -го порядка;  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $\bar{g}_1^+$ ,  $\bar{g}_{n_k}^-$  – заданные  $6N_1N_2$ -мерные векторы правых частей граничных условий;  $\bar{U}_k(x_3)$  – искомая вектор-функция,

$$\bar{U}_k = \bar{U}_k(x_3) = [(\bar{u}_k)^T \quad (\bar{v}_k)^T]^T, \quad (7.3)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_3) =$$

$$= [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,N_2)})^T]^T; \quad (7.4)$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k(x_3) =$$

$$= [(\bar{v}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots$$

$$\dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,N_2)})^T]^T; \quad (7.5)$$

Рассмотрим случай шарнирного закрепления в произвольной граничной точке с координатой  $x_{3,k}^b$ . Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  – промежуточная граничная точка; 2)  $k = 1$  – крайняя левая (первая) граничная точка; 3)  $k = n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_p^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0,$$

$$p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2) \in S_\Omega^{(k-1)}; \quad (7.6)$$

$$u_p^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0,$$

$$p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2) \in S_\Omega^{(k)}. \quad (7.7)$$

На дискретно-континуальном уровне вместо (7.6)-(7.7) имеем:

$$u_p^{(k-1,i,j)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad (7.8)$$

$$u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (7.9)$$

Для случая  $k = 1$  имеем следующие граничные условия:

$$u_p^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2) \in S_{\Omega}^{(1)}. \quad (7.10)$$

Дискретно-континуальный аналог (7.10) имеет вид:

$$u_p^{(1,i,j)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (7.11)$$

Для случая  $k = n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_p^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2) \in S_{\Omega}^{(n_k-1)}. \quad (7.12)$$

Дискретно-континуальный аналог (7.12) имеет вид:

$$u_p^{(n_k-1,i,j)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (7.13)$$

Условия (7.8)-(7.9), (7.11), (7.13) представимы в форме (7.1)-(7.2). Алгоритм формирования матриц  $B_k^-$  и  $B_k^+$  указан в таблицах 7.1 и 7.2 соответственно.

Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е.

$$\bar{g}_k^- = 0, \quad \bar{g}_k^+ = 0, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad \bar{g}_1^+ = 0, \quad \bar{g}_{n_k}^- = 0. \quad (7.14)$$

## 8. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Итак, согласно (6.1)-(6.3) континуальной постановке соответствует дискретно-континуальная постановка в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{u}'_k = \bar{v}_k \\ K_{k,vv} \bar{v}'_k = K_{k,uu} \bar{u}_k + \tilde{K}_{k,uv} \bar{v}_k - s \bar{u}_k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (8.1)$$

где  $s$  – искомое собственное значение;  $\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_3)$  – искомая собственная функция на подобласти  $\Omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$ ;

$$\tilde{K}_{k,uv} = K_{k,uv} - \tilde{K}_{k,vu}; \quad K_{k,vu} = K_{k,uv}^*. \quad (8.2)$$

Системы (8.1) могут быть записаны иначе в более удобной форме

$$\begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} (K_{k,uu} - sE) & K_{k,vv}^{-1} \tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_{k,vv}^{-1} \bar{R}_{k,u} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (8.3)$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка.

Вводя обозначения

$$A_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} (K_{k,uu} - sE) & K_{k,vv}^{-1} \tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad \bar{U}'_k = \partial_2 \bar{U}_k. \quad (8.4)$$

и рассматривая соотношения (8.3) совместно с граничными условиями (7.1)-(7.2), заключаем, что расчет конструкции в рамках ДКМКЭ сводится к решению набора многоточечных краевых задач для систем  $6N_1N_2$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:







Таблица 11.1. Алгоритм заполнения матрицы перестановок  $I_G$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1.	$(6p - 5, 3p - 2), p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $u_1^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$
2.	$(6p - 4, 3p - 1), p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $u_2^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$
3.	$(6p - 3, 3p), p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $u_3^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$
4.	$(6p - 2, 3(N_1N_2 + p) - 2),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $v_1^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$
5.	$(6p - 1, 3(N_1N_2 + p) - 1),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $v_2^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$
6.	$(6p, 3(N_1N_2 + p)), p = 1, 2, \dots, 6N_1N_2$	1	перестановка элементов $v_3^{(k,i,j)}$ , $i = 1, 2, \dots, N_1,$ $j = 1, 2, \dots, N_2$

Примечание: Все элементы матрицы  $I_G$  не указанные в таблице равны нулю.

$$\tilde{A}_{k,s} = I_G^T A_{k,s} I_G, \quad \tilde{U}_k(x_3) = I_G^T \bar{U}_k(x_3), \quad (11.4)$$

$$k = 1, \dots, n_k - 1;$$

$$\tilde{B}_k^- = I_G^T \tilde{B}_k^- I_G, \quad \tilde{B}_k^+ = I_G^T \tilde{B}_k^+ I_G,$$

$$\tilde{g}_k^- = I_G^T \tilde{g}_k^-, \quad \tilde{g}_k^+ = I_G^T \tilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$(11.5)$$

$$\tilde{B}_1^+ = I_G^T \tilde{B}_1^+ I_G, \quad \tilde{B}_{n_k}^- = I_G^T \tilde{B}_{n_k}^- I_G,$$

$$\tilde{g}_1^+ = I_G^T \tilde{g}_1^+, \quad \tilde{g}_{n_k}^- = I_G^T \tilde{g}_{n_k}^-, \quad (11.6)$$

$I_G$  – матрица перестановок, элементы которой определяются по таблице 11.1. Матрицы коэффициентов  $\tilde{A}_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  в системах (11.3) по аналогии с матрицами жесткости в традиционном методе конечных элементов имеют блочно-диагональную структуру.

## 12. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Корректное аналитическое решение много-точечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами производится по методу, описанному в [1]. После определения узловых перемещений и их производных по переменной  $x_3$  по фор-

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

мулам (4.1)-(4.12) вычисляются деформации и напряжения.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. // Вестник МГСУ, №1, 2011, с. 11-16.

2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Об алгоритме построения матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с прямоугольным поперечным сечением. // «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». Сб. трудов международной научно-практической конференции. М.: МГСУ, 2011, с. 16-34.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с прямоугольным поперечным сечением. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 64-75.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением методом базисных вариаций. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 76-84.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета трехмерной упругой изотропной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 31-39.
6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-

- континуального подхода. // Вестник МГСУ, №6, 2012, с. 29-36.
7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Формирование матриц коэффициентов и векторов правых частей граничных условий на основе метода базисных вариаций в рамках дискретно-континуального подхода к расчету трехмерных конструкций. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 2. – М.: МГСУ, 2011, с. 46-55.
  8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 42-63.
  9. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об алгоритме формирования матриц коэффициентов и векторов правых частей граничных условий на основе метода базисных вариаций в рамках дискретно-континуального подхода к расчету трехмерных конструкций. // «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». Сб. трудов международной научно-практической конференции. М.: МГСУ, 2011, с. 35-49.
  10. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об алгоритме построения матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением методом базисных вариаций. // «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». Сб. трудов международной научно-практической конференции. М.: МГСУ, 2011, с. 50-63.
  11. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением методом базисных вариаций. // Вестник МГСУ, №4, 2011, с. 21-28.
  12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
  13. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: АСВ, 2004. – 200 с.
  14. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: АСВ, 2006. – 208 с.
  15. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
  16. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
  17. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: АСВ, 2008. – 336 с.
  18. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2009. – 336 с.
  19. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992. – 86 с.
  20. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
  21. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 2: Упругие изотропные трехмерные тела

22. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
23. **Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.** Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с.
24. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
25. **РОЗИН Л.А.** Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998. – 532 с.
26. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
27. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
28. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
29. **Трушин С.И.** Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: АСВ, 2008. – 256 с.

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

# ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ЧАСТЬ 3: УПРУГИЕ ИЗОТРОПНЫЕ ТОНКИЕ ПЛАСТИНЫ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний упругих изотропных тонких пластин с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, численная реализация, собственные частоты, формы колебаний, тонкая пластина, кусочно-постоянные параметры

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR EIGENVALUE ANALYSIS OF STRUCTURES WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIMENSION PART 3: ELASTIC ISOTROPIC PLATES

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to numerical implementation of discrete-continual finite element method (DCFEM) of eigenvalue analysis of elastic isotropic plates with piecewise-constant physical and geometrical parameters in basic dimension.

**Key words:** discrete-continual finite element method, numerical implementation, eigenvalue analysis, plate, piecewise-constant physical and geometrical parameters

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения собственных частот и форм колебаний пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений может быть решена в аналитической форме вдоль данного направления

(рис. 0.1). Именно эта идея и реализована в разработанном дискретно-континуальном методе конечных элементов (ДКМКЭ) [7-12]. Метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по выделяемому направлению кусочного постоянства параметров (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и соответственно

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

аналитическая форма получаемого решения, в то время как по другим направлениям производится дискретизация с использованием стандартной техники метода конечных элементов (МКЭ). Таким образом, построение алгоритмов решения осуществляется за счет разумного сочетания численных и аналитических подходов. Аналитичность получаемых при этом решений существенно способствует улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с помощью ДКМКЭ картина напряженно-деформированного состояния (НДС) развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них разного рода локальных и глобальных факторов. ДКМКЭ особенно эффективен в зонах краевого эффекта, там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Преимуществами ДКМКЭ также являются понижение размерности при численном решении и отсутствие практических ограничений на длину объектов по основному направлению.

## 1. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ (ДККЭ)

Для постановки и решения рассматриваемой задачи каждая исходная подобласть  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  окаймляется соответствующей расширенной  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  [13]. Принимается следующая дискретно-континуальная модель: по основному направлению (вдоль оси  $Ox_2$ ) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси  $Ox_1$ ) производится конечноэлементная аппроксимация, причем схема разбиения на дискретно-континуальные элементы одинакова для всех подобластей  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  (рис.

1.1, 1.2). Следует отметить, что каждая подобласть  $\omega_k$  разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ)  $\omega_{k,i}$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\omega_k = \bigcup_{i=1}^N \omega_{k,i}; \quad (1.1)$$

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b, 0 \leq x_3 \leq \Delta_k\}; \quad (1.2)$$

$$\omega_{k,i} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_{1,i} \leq x_1 \leq x_{1,i+1}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b, 0 \leq x_3 \leq \Delta_k\}; \quad (1.3)$$

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad (1.4)$$

$$h_i = \begin{cases} x_{1,i+1} - x_{1,i}, & i < N \\ 0, & i = N \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.5)$$

где  $l_1$ ,  $l_2$  – размеры принятой сетки элементов, аппроксимирующих плиту соответственно по направлениям осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , причем

$$l_2 = \bigcup_{k=1}^{n_k-1} l_{2,k}; \quad (1.6)$$

$(x_{1,i}, x_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  – координаты узлов сетки по неосновному направлению;  $N$  – количество узлов по неосновному направлению;  $h_i$  – шаги сетки (размеры элементов по неосновному направлению).

Определяем характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента  $\omega_{k,i}$  и поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i} \not\subset \Omega_k \end{cases}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим произвольный  $(k, i)$ -й элемент модели (рис. 1.2). Переходим от исходной системы координат к элементной:  $(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)$ , т.е. выполняем локальную замену переменных внутри элемента.

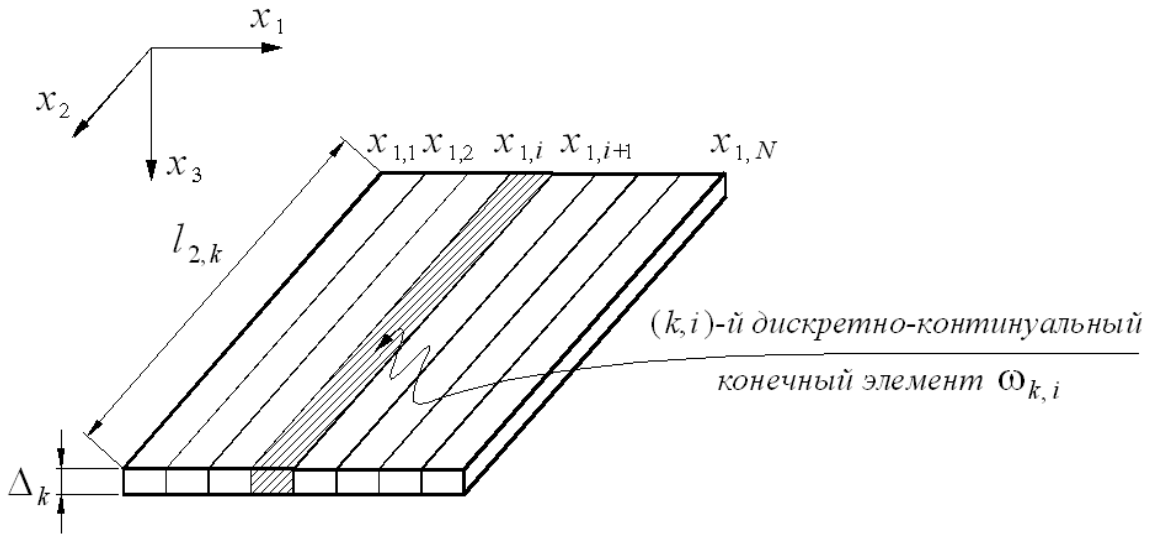


Рис 1.1. Схема дискретизации конструкции.

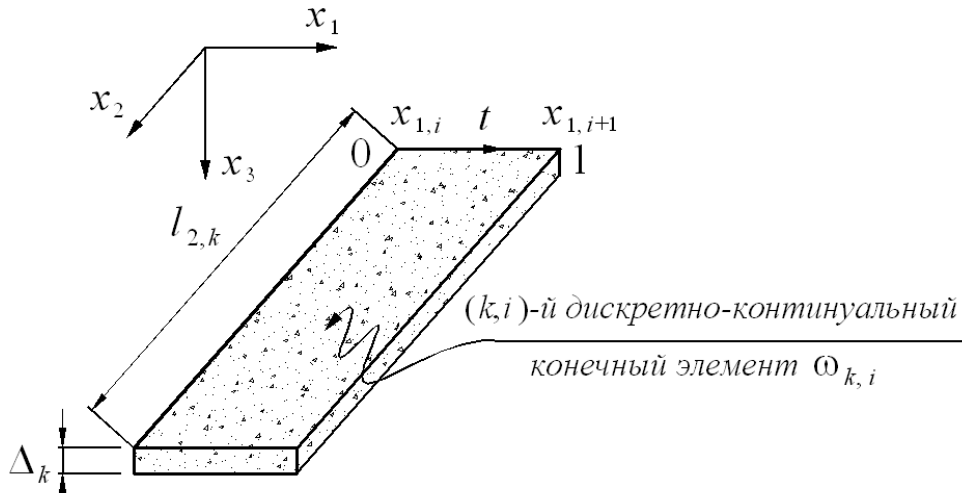


Рис. 1.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

Здесь  $t$  – локальная координата, введенная по направлению оси  $Ox_1$  и связанная с ДККЭ:

$$t = (x_1 - x_{1,i}) / h_i; t \in [0, 1], x_1 \in [x_{1,i}, x_{1,i+1}]. \quad (1.6)$$

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Введем в рассмотрение функции

$$z_j^{(k)}(x_1, x_2) = \partial_1 y_j^{(k)}(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.1)$$

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются функции  $y_j^{(k)}(x_1, x_2)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  и  $z_j^{(k)}(x_1, x_2)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , т.е. для  $i$ -го узла это функции  $y_j^{(k,i)}(x_2)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  и  $z_j^{(k,i)}(x_2)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Соответственно вектор неизвестных имеет вид:

$$\bar{Y}_n^{(k,i)} = \bar{Y}_n^{(k,i)}(x_2) = [y_1^{(k,i)} \quad z_1^{(k,i)} \quad y_2^{(k,i)} \quad z_2^{(k,i)} \quad y_3^{(k,i)} \quad z_3^{(k,i)} \quad y_4^{(k,i)} \quad z_4^{(k,i)}]^T; \quad (2.2)$$

или

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

$$\bar{Y}_n^{(k,i)} = \bar{Y}_n^{(k,i)}(x_2) = [(\bar{y}_{n,1}^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_{n,2}^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_{n,3}^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_{n,4}^{(k,i)})^T]^T; \quad (2.3)$$

где

$$\bar{y}_{n,j}^{(k,i)} = \bar{Y}_n^{(k,i)}(x_2) = [y_j^{(k,i)} \ z_j^{(k,i)}]^T, \quad j=1,2,3,4. \quad (2.4)$$

Вектор неизвестных во всех узлах элемента имеет вид:

$$\bar{Y}^{(k,i)} = \bar{Y}^{(k,i)}(x_2) = [(\bar{y}_1^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_2^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_3^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_4^{(k,i)})^T]^T; \quad (2.5)$$

где

$$\bar{y}_j^{(k,i)} = \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2) = [(\bar{y}_{j,n}^{(k,i)})^T \ (\bar{y}_{j,n+1}^{(k,i)})^T]^T, \quad j=1,2,3,4. \quad (2.6)$$

Будем полагать, что поля  $y_j^{(k)}$ ,  $j=1,2,3,4$  по «поперечному» (по отношению к основному направлению) сечению ДККЭ аппроксимируются кубическими полиномами. Здесь можно провести прямую аналогию с функциями формы, которые используются в стандартном МКЭ при решении задач, связанных с поперечным изгибом балок Бернулли [6, 14]. Выполним схожую процедуру построения формул аппроксимации. Имеем:

$$y_j^{(k)} = y_j^{(k)}(x_1, x_2) = y_j^{(k)}(t, x_2) = \alpha_{j,1}^{(k,i)} + \alpha_{j,2}^{(k,i)}t + \alpha_{j,3}^{(k,i)}t^2 + \alpha_{j,4}^{(k,i)}t^3, \quad j=1,2,3,4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i} \quad (2.7)$$

или

$$y_j^{(k)} = \bar{t}^T \bar{\alpha}_j^{(k,i)}, \quad j=1,2,3,4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.8)$$

$$\text{где } \bar{\alpha}_j^{(k,i)} = [\alpha_{j,1}^{(k,i)} \ \alpha_{j,2}^{(k,i)} \ \alpha_{j,3}^{(k,i)} \ \alpha_{j,4}^{(k,i)}]^T; \quad \bar{t} = [1 \ t \ t^2 \ t^3]^T. \quad (2.9)$$

Выражения для функций  $z_j^{(k)}$ ,  $j=1,2,3,4$  естественным образом получаются из формул (2.7)-(2.8) путем их дифференцирования:

$$z_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial t} y_j^{(k)}(t, x_2) = \frac{1}{h_i} [\alpha_{j,2}^{(k,i)} + 2\alpha_{j,3}^{(k,i)}t + 3\alpha_{j,4}^{(k,i)}t^2], \quad j=1,2,3,4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}. \quad (2.10)$$

Итак, очевидно, что имеют место следующие соотношения:

$$\bar{y}_j^{(k,i)} = C_i \bar{\alpha}_j^{(k,i)}, \quad j=1,2,3,4, \quad (2.11)$$

$$\text{где } C_i = \tilde{C}_i C; \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/h_i \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Обращая матрицу  $C_i$ , получим:

$$C_i^{-1} = C^{-1} \tilde{C}_i^{-1}; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{C}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_i \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Следовательно, определяем

$$y_j^{(k)} = \bar{t}^T C_i^{-1} \bar{y}_j^{(k,i)}, \quad j=1,2,3,4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i} \quad (2.14)$$

или иначе

$$y_j^{(k)} = N_i(t) \bar{y}_j^{(k,i)}, \quad j=1,2,3,4, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } N_i = N_i(t) = \bar{t}^T C_i^{-1} = [N_{i,1} \ N_{i,2} \ N_{i,3} \ N_{i,4}] \quad (2.16)$$

– матрица функций формы («поперечных») по сечению ДККЭ с элементами

$$N_{i,1}(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3; \quad N_{i,2}(t) = h_i(t - 2t^2 + t^3);$$

$$N_{i,3}(t) = 3t^2 - 2t^3; \quad N_{i,4}(t) = h_i(-t^2 + t^3). \quad (2.17)$$

Итак, получили ожидаемый очевидный результат. Матрица (2.16), в свою очередь, после переобозначений также представима в виде:

$$N_i(t) = \bar{t}^T N_i^0, \quad \text{где} \quad N_i^0 = C_i^{-1}. \quad (2.18)$$

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Выражения для частных производных от неизвестных функций по переменным  $x_1$  и  $x_2$  записываются следующим образом (ниже  $(x_1, x_2) \in \omega_{k,i}$ ):

– частные производные первого порядка

$$\partial_1 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = z_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N_i'(t) y_j^{(k,i)}(x_2),$$

$$j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.1)$$

$$\partial_2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2 y_j^{(k,i)}(x_2) =$$

$$= N_i(t) y_{j+1}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.2)$$

– частные производные второго порядка

$$\partial_1^2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N_i''(t) y_j^{(k,i)}(x_2), \quad (3.3)$$

$$j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\partial_1 \partial_2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \partial_2 z_j^{(k)}(x_1, x_2) = z_{j+1}^{(k)}(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{h_i} N_i'(t) \partial_2 y_j^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{h_i} N_i'(t) y_{j+1}^{(k,i)}(x_2),$$

$$j = 1, 2, 3; \quad (3.4)$$

$$\partial_2^2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2^2 y_j^{(k,i)}(x_2) =$$

$$= N_i(t) y_{j+2}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (3.5)$$

– частные производные третьего порядка

$$\partial_1^3 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N_i'''(t) y_j^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.6)$$

$$\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 z_j^{(k)}(x_1, x_2) =$$

$$= \partial_1 z_{j+1}^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N_i''(t) \partial_2 y_j^{(k,i)}(x_2) = \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{h_i} N_i''(t) y_{j+1}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\partial_1 \partial_2^2 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = \partial_2^2 z_j^{(k)}(x_1, x_2) =$$

$$= z_{j+2}^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_i} N_i'(t) \partial_2^2 y_j^{(k,i)}(x_2) = \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{h_i} N_i'(t) y_{j+2}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2;$$

$$\partial_2^3 y_j^{(k)}(x_1, x_2) = N_i(t) \partial_2^3 y_j^{(k,i)}(x_2) =$$

$$= N_i(t) y_{j+3}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, \quad (3.9)$$

где

$$N_i'(t) = \frac{d}{dt} N_i(t) = [ N_{i,1}' \quad N_{i,2}' \quad N_{i,3}' \quad N_{i,4}' ]; \quad (3.10)$$

$$N_i''(t) = \frac{d^2}{dt^2} N_i(t) = [ N_{i,1}'' \quad N_{i,2}'' \quad N_{i,3}'' \quad N_{i,4}'' ]; \quad (3.11)$$

$$N_i'''(t) = \frac{d^3}{dt^3} N_i(t) = [ N_{i,1}''' \quad N_{i,2}''' \quad N_{i,3}''' \quad N_{i,4}''' ]; \quad (3.12)$$

Производные от матрицы функций формы (2.16) находятся дифференцированием ее элементов (2.17), т.е.

$$N_{i,1}'(t) = 6t(t-1); \quad N_{i,2}'(t) = h_i(1-4t+3t^2);$$

$$N_{i,3}'(t) = 6t(1-t); \quad N_{i,4}'(t) = h_i t(3t-2); \quad (3.13)$$

$$N_{i,1}''(t) = 6(2t-1); \quad N_{i,2}''(t) = 2h_i(3t-2);$$

$$N_{i,3}''(t) = 6(1-2t); \quad N_{i,4}''(t) = 2h_i(3t-1); \quad (3.14)$$

$$N_{i,1}'''(t) = 12; \quad N_{i,2}'''(t) = 6h_i; \quad N_{i,3}'''(t) = -12;$$

$$N_{i,4}'''(t) = 6h_i. \quad (3.15)$$

Очевидно, что соответствующие узловые функции определяются с учетом соответствующих операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (3.1)-(3.9):

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

– частные производные первого порядка

$$[\partial_1 y_j^{(k)}]^{(i)} = z_j^{(k,i)}(x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.16)$$

$$[\partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = y_{j+1}^{(k,i)}(x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.17)$$

– частные производные второго порядка

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.18)$$

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(1)} = \frac{\theta_{k,1}}{h_1^2} N_1''(0) \bar{y}_j^{(k,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.19)$$

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(N)} = \frac{\theta_{k,N-1}}{h_{N-1}^2} N_{N-1}''(1) \bar{y}_j^{(k,N-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.20)$$

$$[\partial_1 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = z_{j+1}^{(k,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.21)$$

$$[\partial_2^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = y_{j+2}^{(k,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2; \quad (3.22)$$

– частные производные третьего порядка

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.23)$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(1)} = \frac{\theta_{k,1}}{h_1^3} N_1'''(0) \bar{y}_j^{(k,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.24)$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(N)} = \frac{\theta_{k,N-1}}{h_{N-1}^3} N_{N-1}'''(1) \bar{y}_j^{(k,N-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.25)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+1}^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.26)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(1)} = \frac{\theta_{k,1}}{h_1^2} N_1''(0) \bar{y}_{j+1}^{(k,1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.27)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(N)} = \frac{\theta_{k,N-1}}{h_{N-1}^2} N_{N-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(k,N-1)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.28)$$

$$[\partial_1 \partial_2^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = z_{j+2}^{(k,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2; \quad (3.29)$$

$$[\partial_2^3 y_j^{(k)}]^{(i)} = y_{j+3}^{(k,i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1. \quad (3.30)$$

Рассмотрим важные частные случаи вышеприведенных формул. Очевидно, что если  $\theta_{k,i-1} = \theta_{k,i} = 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, N-1$ , то вместо формул (3.18), (3.23) и (3.26) будем соответственно иметь:

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.31)$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (3.32)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+1}^{(k,i)}(x_2) \right], \quad i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.33)$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 0, \theta_{k,i} = 1, i = 2, 3, \dots, N-1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i-1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо формул (3.18), (3.23) и (3.26) получим:

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2), \quad (3.34)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^3} N_i'''(0) \bar{y}_j^{(k,i)}(x_2), \quad (3.35)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} N_i''(0) \bar{y}_{j+1}^{(k,i)}(x_2), \quad (3.36)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3.$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 1, \theta_{k,i} = 0, i = 2, 3, \dots, N-1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо формул (3.18), (3.23) и (3.26) будем иметь:

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2), \quad (3.37)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$[\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^3} N_{i-1}'''(1) \bar{y}_j^{(k,i-1)}(x_2), \quad (3.38)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(i)} = \frac{1}{h_{i-1}^2} N_{i-1}''(1) \bar{y}_{j+1}^{(k,i-1)}(x_2), \quad (3.39)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Если  $\theta_{k,1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.19), (3.24) и (3.27) получим:

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(1)} = 0, \quad [\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(1)} = 0, \quad (3.40)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Если  $\theta_{k,N-1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,N-1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.20), (3.25) и (3.28) будем иметь:

$$[\partial_1^2 y_j^{(k)}]^{(N)} = 0, \quad [\partial_1^3 y_j^{(k)}]^{(N)} = 0, \quad (3.41)$$

$$[\partial_1^2 \partial_2 y_j^{(k)}]^{(N)} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

#### 4. АППРОКСИМАЦИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ, ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ, КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ И ПРИВЕДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

После определения (3.1)-(3.9) выражения для изгибающих моментов на элементе на основе известных соотношений записываются следующим образом:

$$M_1^{(k)}(x_1, x_2) = -D_{k,i} [\partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \nu_{k,i} \partial_2^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = (4.1)$$

$$= -D_{k,i} [\partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \nu_{k,i} y_3^{(k)}(x_1, x_2)];$$

$$M_2^{(k)}(x_1, x_2) = -D_{k,i} [\nu_{k,i} \partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \partial_2^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = (4.2)$$

$$= -D_{k,i} [\nu_{k,i} \partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + y_3^{(k)}(x_1, x_2)],$$

где  $D_{k,i}$  и  $\nu_{k,i}$  – соответственно значение цилиндрической жесткости и коэффициента Пуассона на дискретно-континуальном конечном элементе  $\omega_{k,i}$ .

Поперечные силы, в свою очередь, вычисляются по формулам:

$$Q_1^{(k)}(x_1, x_2) = -D_{k,i} [\partial_1^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \partial_1 \partial_2^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = (4.3)$$

$$= -D_{k,i} [\partial_1^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + z_3^{(k)}(x_1, x_2)];$$

$$Q_2^{(k)}(x_1, x_2) = -D_{k,i} [\partial_2 \partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \partial_1^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = (4.4)$$

$$= -D_{k,i} [\partial_1^2 y_2^{(k)}(x_1, x_2) + y_4^{(k)}(x_1, x_2)].$$

Крутящий момент определяется выражением

$$H^{(k)}(x_1, x_2) = M_{12}^{(k)}(x_1, x_2) = M_{21}^{(k)}(x_1, x_2) = -D_{k,i} (1 - \nu) \partial_1 \partial_2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) = (4.5)$$

$$= -D_{k,i} (1 - \nu) \partial_1 y_2^{(k)}(x_1, x_2).$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

Приведенные поперечные силы, часто используемые при задании граничных условий, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1^{(k)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{k,i}[\partial_1^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + (2 - \nu_{k,i})\partial_1 \partial_2^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = \\ &= -D_{k,i}[\partial_1^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + (2 - \nu_{k,i})z_3^{(k)}(x_1, x_2)]; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} V_2^{(k)}(x_1, x_2) &= \\ &= -D_{k,i}[(2 - \nu_{k,i})\partial_2 \partial_1^2 y_1^{(k)}(x_1, x_2) + \partial_2^3 y_1^{(k)}(x_1, x_2)] = \\ &= -D_{k,i}[(2 - \nu_{k,i})\partial_1^2 y_2^{(k)}(x_1, x_2) + y_4^{(k)}(x_1, x_2)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Приведенные к узлам изгибающие моменты  $[M_1^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[M_2^{(k)}]^{(i)}$ , поперечные силы  $[Q_1^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[Q_2^{(k)}]^{(i)}$ , крутящий момент  $[H^{(k)}]^{(i)}$  и приведенные поперечные силы  $[V_1^{(k)}]^{(i)}$ ,  $[V_2^{(k)}]^{(i)}$  определяются аналогично частным производных от искомым функций (см. формулы пункта 3) с учетом соответствующих операций осреднения.

## 5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДККЭ

Функционал энергии конструкции можно представить в виде суммы функционалов, определенных на дискретно-континуальных конечных элементах. С учетом вышеизложенного можем установить следующее соответствие между континуальными операторами, представленными в [2] и их дискретно-континуальными аналогами на дискретно-континуальном конечном элементе:

$$\mathcal{L}_{k,4} = \theta_k D_k \Rightarrow K_{k,4}^{(i)}; \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,2} &= \\ &= -[\partial_1^2 \theta_k D_k \nu_k + 2\partial_1 \theta_k D_k (1 - \nu_k) \partial_1 + \theta_k D_k \nu_k \partial_1^2] \\ &\Rightarrow K_{k,2}^{(i)} = K_{k,2,1}^{(i)} + K_{k,2,2}^{(i)} + K_{k,2,3}^{(i)}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,0} &= -\partial_1^2 \theta_k D_k \partial_1^2 + \theta_k c_k \\ &\Rightarrow K_{k,0}^i = K_{k,0,1}^i + K_{k,0,2}^i, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{где } K_{k,4}^{(i)} = \theta_{k,i} D_{k,i} h_{k,i} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t} \bar{t}^T dt \right] N_i^0; \quad (5.4)$$

$$K_{k,2,1}^{(i)} = -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} \nu_{k,i}}{h_i} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t} \bar{t}^T dt \right] N_i^0; \quad (5.5)$$

$$K_{k,2,2}^{(i)} = 2 \frac{\theta_{k,i} D_{k,i} (1 - \nu_{k,i})}{h_i} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t}' (\bar{t}')^T dt \right] N_i^0; \quad (5.6)$$

$$K_{k,2,3}^{(i)} = -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} \nu_{k,i}}{h_i} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t} (\bar{t}'')^T dt \right] N_i^0; \quad (5.7)$$

$$K_{k,0,1}^{(i)} = \frac{\theta_{k,i} D_{k,i}}{h_i^3} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t}'' (\bar{t}'')^T dt \right] N_i^0; \quad (5.8)$$

$$K_{k,0,2}^{(i)} = c_{k,i} h_{k,i} (N_i^0)^* \left[ \int_0^1 \bar{t} \bar{t}^T dt \right] N_i^0; \quad (5.9)$$

$$\bar{t}' = \frac{\partial}{\partial t} \bar{t}; \quad \bar{t}'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{t}; \quad (5.10)$$

$c_{k,i}$  – значение коэффициента, характеризующего жесткость основания на дискретно-континуальном конечном элементе  $\omega_{k,i}$ .

Вычислив интегралы в (5.4)-(5.9), получим:

$$\begin{aligned} K_{k,4}^{(i)} &= \frac{\theta_{k,i} D_{k,i} h_i}{420} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 156 & 22h_i & 54 & -13h_i \\ 22h_i & 4h_i^2 & 13h_i & -3h_i^2 \\ 54 & 13h_i & 156 & -22h_i \\ -13h_i & -3h_i^2 & -22h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} K_{k,2,1}^{(i)} &= -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} \nu_{k,i}}{30h_i} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -36 & -3h_i & 36 & -3h_i \\ -33h_i & -4h_i^2 & 3h_i & h_i^2 \\ 36 & 3h_i & -36 & 3h_i \\ -3h_i & h_i^2 & 33h_i & -4h_i^2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} K_{k,2,2}^{(i)} &= \frac{\theta_{k,i} D_{k,i} (1 - \nu_{k,i})}{15h_i} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 36 & 3h_i & -36 & 3h_i \\ 3h_i & 4h_i^2 & -3h_i & -h_i^2 \\ -36 & -3h_i & 36 & -3h_i \\ 3h_i & -h_i^2 & -3h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$K_{k,2,3}^{(i)} = -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} v_{k,i}}{30h_i} \times \begin{bmatrix} -36 & -33h_i & 36 & -3h_i \\ -3h_i & -4h_i^2 & 3h_i & h_i^2 \\ 36 & 3h_i & -36 & 33h_i \\ -3h_i & h_i^2 & 3h_i & -4h_i^2 \end{bmatrix}; \quad (5.14)$$

$$K_{k,0,1}^{(i)} = 2 \frac{\theta_{k,i} D_{k,i}}{h_i^3} \times \begin{bmatrix} 6 & 3h_i & -6 & 3h_i \\ 3h_i & 2h_i^2 & -3h_i & h_i^2 \\ -6 & -3h_i & 6 & -3h_i \\ 3h_i & h_i^2 & -3h_i & 2h_i^2 \end{bmatrix}; \quad (5.15)$$

$$K_{k,0,2}^{(i)} = \frac{\theta_{k,i} c_{k,i} h_i}{420} \times \begin{bmatrix} 156 & 22h_i & 54 & -13h_i \\ 22h_i & 4h_i^2 & 13h_i & -3h_i^2 \\ 54 & 13h_i & 156 & -22h_i \\ -13h_i & -3h_i^2 & -22h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix}; \quad (5.16)$$

Формулы (5.11)-(5.16) удобно представить в мультипликативном виде (верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования):

$$K_{k,4}^{(i)} = \frac{\theta_{k,i} D_{k,i} h_i}{420} H_i A_4 H_i; \quad (5.17)$$

$$K_{k,2,1}^{(i)} = -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} v_{k,i}}{30h_i} H_i A_{2,1} H_i;$$

$$K_{k,2,2}^{(i)} = \frac{\theta_{k,i} D_{k,i} (1 - v_{k,i})}{15h_i} H_i A_{2,2} H_i;$$

$$K_{k,2,3}^{(i)} = -\frac{\theta_{k,i} D_{k,i} v_{k,i}}{30h_i} H_i A_{2,3} H_i; \quad (5.18)$$

$$K_{k,0,1}^{(i)} = 2 \frac{\theta_{k,i} D_{k,i}}{h_i^3} H_i A_{0,1} H_i;$$

$$K_{k,0,2}^{(i)} = \frac{\theta_{k,i} c_{k,i} h_i}{420} H_i A_{0,2} H_i; \quad (5.19)$$

где  $A_4 = A_{0,2} = \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}; \quad (5.20)$

$$A_{2,3} = A_{2,1}^T = \begin{bmatrix} -36 & -33 & 36 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 33 \\ -3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad (5.21)$$

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} -36 & -3 & 36 & -3 \\ -33 & -4 & 3 & 1 \\ 36 & 3 & -36 & 3 \\ -3 & 1 & 33 & -4 \end{bmatrix}; \quad (5.22)$$

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad (5.23)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_i \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

## 6. ФОРМИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Формирование глобальных матриц  $K_{k,4}$ ,  $K_{k,2}$  и  $K_{k,0}$   $2N$ -мерного порядка для всего ансамбля дискретно-континуальных конечных элементов осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости (метод «конечных вкладов» – суммирование с накоплением [6, 14, 16]).

Заметим, что при наличии в рассматриваемой конструкции «пустот» (т.е. дискретно-континуальных элементов с нулевыми значениями характеристической функции) матрица  $K_{k,4}$  будет вырожденной, что, очевидно, приведет к невозможности вычисления  $K_{k,4}^{-1}$ . В этой связи необходима коррекция матрицы  $K_{k,4}$ . Алгоритм этой коррекции следующий:

1. Последовательно перебираем  $i = 1, 2, \dots, 2N$ .
2. Для каждого значения  $i$  следующее: если все элементы  $i$ -й строки матрицы  $K_{k,4}$  нулевые и все элементы  $i$ -го столбца матрицы

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

$K_{k,4}$  также нулевые, то следует положить (7.3)

$(K_{k,4})_{i,i} = 1$ , где  $(K_{k,4})_{i,i}$  – элемент матрицы  $K_{k,4}$ , расположенный в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце.

Континуальные операторы, представленные в [2], и матрицы сопоставлены следующим образом:

$$\mathcal{L}_{k,4} \Rightarrow K_{k,4}; \quad \mathcal{L}_{k,2} \Rightarrow K_{k,2}; \quad \mathcal{L}_{k,0} \Rightarrow K_{k,0}; \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k \Rightarrow A_k = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ K_{k,4}^{-1}K_{k,0} & 0 & K_{k,4}^{-1}K_{k,2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

## 7. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Статические граничные условия на прямых  $x_1 = x_{1,1}$  и  $x_1 = x_{1,N}$  (части границы области  $\omega$ ) для рассматриваемой конструкции учитываются, как правило, в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи также должны быть приняты во внимание статические граничные условия на остальных элементах границы (если заданы) и кинематические граничные условия.

Пусть  $x_{2,k}^b$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_k$  – координаты граничных поперечных сечений конструкции (рис. 7.1). Граничные условия в них записываются в виде:

$$B_k^- Y_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ Y_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, 3, \dots, n_k - 1; \quad (7.1)$$

$$B_1^- \bar{Y}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^+ \bar{Y}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (7.2)$$

где  $B_k^-, B_k^+$  – матрицы граничных условий, квадратные  $8N$ -го порядка;  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, 3, \dots, n_k - 1$ ;  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  – заданные  $8N$ -мерные векторы правых частей граничных условий;

$$\bar{Y}_k = \bar{Y}_k(x_2) = [(\bar{y}_{k,1})^T \quad (\bar{y}_{k,2})^T \quad (\bar{y}_{k,3})^T \quad (\bar{y}_{k,4})^T]^T,$$

где

$$\bar{y}_{k,j} = \bar{y}_{k,j}(x_2) = [(\bar{y}_{n,j}^{(k,1)})^T \quad (\bar{y}_{n,j}^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{y}_{n,j}^{(k,N)})^T]^T, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (7.4)$$

– глобальные вектор-функции узловых неизвестных.

Рассмотрим задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению основному направлению в форме (7.1)-(7.2) в произвольной граничной точке с координатой  $x_{2,k}^b$ . Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  – промежуточная граничная точка; 2)  $k = 1$  – крайняя левая (первая) граничная точка; 3)  $k = n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

*Жесткая заделка.*

Имеем следующие граничные условия:

– для случая  $1 < k < n_k$

$$y_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad y_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.5)$$

$$y_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad y_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.6)$$

– для случая  $k = 1$

$$y_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad y_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.7)$$

– для случая  $k = n_k$

$$y_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad y_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.8)$$

На дискретно-континуальном уровне условиям (7.5)-(7.8) отвечают условия вида

– для случая  $1 < k < n_k$

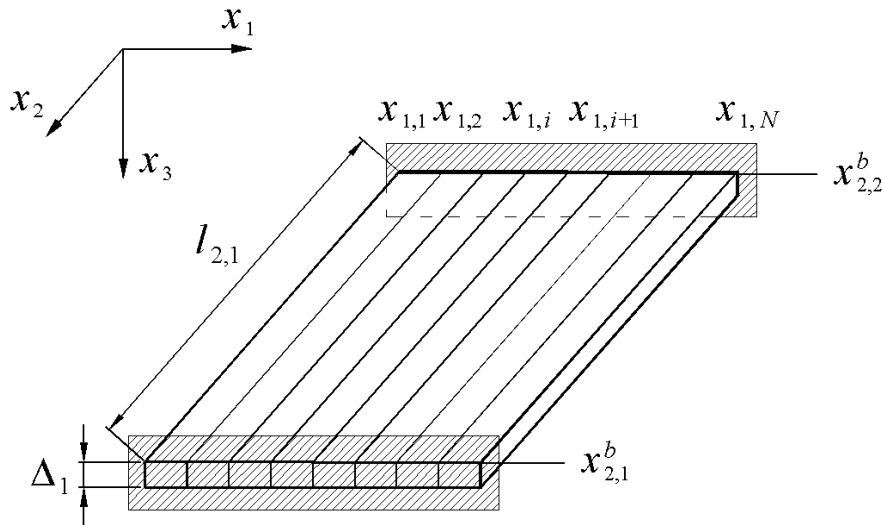


Рис. 7.1. Пример расположения координат граничных сечений, поперечных по отношению к основному направлению конструкции.

$$y_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = y_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.9)$$

$$z_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = z_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.10)$$

$$y_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = y_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.11)$$

$$z_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = z_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.12)$$

– для случая  $k = 1$

$$y_1^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.13)$$

$$z_1^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.14)$$

$$y_2^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.15)$$

$$z_2^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.16)$$

– для случая  $k = n_k$

$$y_1^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.17)$$

$$z_1^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.18)$$

$$y_2^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.19)$$

$$z_2^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.20)$$

В данном случае уместно пояснить связь между континуальными и дискретно-континуальными условиями. Первые задаются по «поперечному» (по отношению к переменной  $x_2$ ) сечению плиты непрерывно ( $x_1 \in [0, l_1]$ ), тогда как вторые дискретно в конечном наборе точек  $((x_1^i, x_2), i = 1, 2, \dots, N)$ . В этой связи, например, для выполнения условия (7.5)-(7.6) мало потребовать равенств (7.9) и (7.11), которые означают лишь равенство нулю соответствующих функций в узлах. Для тождественного непрерывного равенства соответствующих функций нулю по всему сечению, очевидно, следует дополнительно положить их первые производные по  $x_1$  также нулевыми в этих же самых узлах (т.е. задать равенства (7.10) и (7.12)).

Записав граничные условия в виде (7.7)-(7.18), перейдем теперь к вопросу их представления в форме (8.1)-(8.2). Алгоритм формирования матриц  $B_k^-$  и  $B_k^+$  представлен в таблицах 7.1 и 7.2 соответственно. Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, 3, \dots, n_k - 1, \bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е.

$$\bar{g}_k^- = 0, \quad \bar{g}_k^+ = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n_k - 1; \\ \bar{g}_1^+ = 0; \quad \bar{g}_{n_k}^- = 0. \quad (7.21)$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

Таблица 7.1. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(N + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
3	$(2N + i, 2N + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
4	$(3N + i, 2N + 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 3 граничной точки матрица  $B_k^+$  задается нулевой.  
2. Все элементы матриц  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 7.2. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании жесткой заделки в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(4N + i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(5N + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
3	$(6N + i, 2N + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
4	$(7N + i, 2N + 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 2 граничной точки матрица  $B_k^-$  задается нулевой.  
2. Все элементы матриц  $B_k^-$  не указанные в таблице равны нулю.

*Шарнирное закрепление.*

Имеем следующие граничные условия:

– для случая  $1 < k < n_k$

$$y_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ y_3^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.22)$$

$$y_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ y_3^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.23)$$

– для случая  $k = 1$

$$y_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \\ y_3^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.24)$$

– для случая  $k = n_k$

$$y_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \\ y_3^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.25)$$

На дискретно-континуальном уровне условиям (7.22)-(7.25) отвечают условия вида

– для случая  $1 < k < n_k$

$$y_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = y_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.26)$$

$$z_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = z_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.27)$$

Таблица 7.3. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании шарнирного опирания в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(N + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
3	$(2N + i, 4N + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_3^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
4	$(3N + i, 4N + 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_3^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 3 граничной точки матрица  $B_k^+$  задается нулевой.  
 2. Все элементы матриц  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 7.4. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании шарнирного опирания в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	$(4N + i, 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(5N + i, 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
3	$(6N + i, 4N + 2i - 1), i = 1, 2, \dots, N$	1	$y_3^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
4	$(7N + i, 4N + 2i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$z_3^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 2 граничной точки матрица  $B_k^-$  задается нулевой.  
 2. Все элементы матриц  $B_k^-$  не указанные в таблице равны нулю.

$$y_3^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = y_3^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad (7.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$z_3^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = z_3^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad (7.29)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

– для случая  $k = 1$

$$y_1^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.30)$$

$$z_1^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.31)$$

$$y_3^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.32)$$

$$z_3^{(1,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.33)$$

– для случая  $k = n_k$

$$y_1^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.34)$$

$$z_1^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.35)$$

$$y_3^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.36)$$

$$z_3^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.37)$$

Граничные условия (7.26)-(7.37) можем переписать в форме (7.1)-(7.2). Алгоритм формирования матриц  $B_k^-$  и  $B_k^+$  представлен в таблицах 7.3 и 7.4.

Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, 3, \dots, n_k - 1, \bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (7.21).

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

*Свободный край.*

Рассмотрим ниже два наиболее характерных частных случая:

– при  $k = 1$

$$M_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \\ V_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.38)$$

– при  $k = n_k$

$$M_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \\ V_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.39)$$

Принимая во внимание известные соотношения [5, 16], можем переписать (7.38) и (7.39) в следующем виде:

– при  $k = 1$

$$-D_1 \{v_1 [\partial_1^2 y_1^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + y_3^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \\ D_1 \{(2 - v_1) [\partial_1^2 y_2^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + y_4^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.40)$$

– при  $k = n_k$

$$-D_{n_k-1} \{v_{n_k-1} [\partial_1^2 y_1^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + y_3^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \\ D_{n_k-1} \{(2 - v_{n_k-1}) [\partial_1^2 y_2^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + y_4^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \\ x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.41)$$

На дискретно-континуальном уровне условиям (7.40) и (7.41) отвечают условия вида

– при  $k = 1$

$$-D_{1,i} \{v_{1,i} [\partial_1^2 y_1^{(1)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) + y_3^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.42)$$

$$-D_{1,i} \{v_{1,i} [\partial_1^3 y_1^{(1)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) + z_3^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.43)$$

$$D_{1,i} \{(2 - v_{1,i}) [\partial_1^2 y_2^{(k)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) + y_4^{(k,i)}(x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.44)$$

$$D_{1,i} \{(2 - v_{1,i}) [\partial_1^3 y_2^{(k)}]^{(i)}(x_{2,1}^b + 0) + z_4^{(k,i)}(x_{2,1}^b + 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.45)$$

– при  $k = n_k$

$$-D_{n_k-1,i} \{v_{n_k-1,i} [\partial_1^2 y_1^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) + y_3^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.46)$$

$$-D_{n_k-1,i} \{v_{n_k-1,i} [\partial_1^3 y_1^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) + z_3^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.47)$$

$$D_{n_k-1,i} \{(2 - v_{n_k-1,i}) [\partial_1^2 y_2^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) + y_4^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (7.48)$$

$$D_{n_k-1,i} \{(2 - v_{n_k-1,i}) [\partial_1^3 y_2^{(n_k-1)}]^{(i)}(x_{2,n_k}^b - 0) + z_4^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.49)$$

Граничные условия (7.42)-(7.49), очевидно, можно переписать в матричной форме (7.1)-(7.2). Соответствующие таблицы приведены в [4].

*Идеальный контакт.*

Характерным здесь, очевидно, является случай  $1 < k < n_k$ . Имеем:

$$y_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = y_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0), \\ x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.50)$$

$$y_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = y_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b + 0), \\ x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.51)$$

$$M_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = M_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0), \\ x_1 \in [0, l_1]; \quad (7.52)$$

$$V_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = V_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0), \\ x_1 \in [0, l_1]. \quad (7.53)$$

Принимая во внимание известные соотношения [5, 16], можем переписать (7.52) и (7.53) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -D_{k-1} \{v_{k-1} [\partial_1^2 y_1^{(k-1)}] (x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + y_3^{(k-1)} (x_1, x_{2,k}^b - 0)\} = \\
 & = -D_k \{v_k [\partial_1^2 y_1^{(k)}] (x_1, x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + y_3^{(k)} (x_1, x_{2,k}^b + 0)\}, \quad x_1 \in [0, l_1];
 \end{aligned} \tag{7.54}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{k-1} \{(2 - v_{k-1}) [\partial_1^2 y_2^{(k-1)}] (x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + y_4^{(k-1)} (x_1, x_{2,k}^b - 0)\} = \\
 & = D_k \{(2 - v_k) [\partial_1^2 y_2^{(k)}] (x_1, x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + y_4^{(k)} (x_1, x_{2,k}^b + 0)\}, \quad x_1 \in [0, l_1].
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

На дискретно-континуальном уровне условиях (7.50)-(7.51), (7.54)-(7.55) отвечают условия

$$y_1^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0) = y_1^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \tag{7.56}$$

$$z_1^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0) = z_1^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \tag{7.57}$$

$$y_2^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0) = y_2^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \tag{7.58}$$

$$z_2^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0) = z_2^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned}
 & -D_k \{v_k [\partial_1^2 y_1^{(k)}]^{(i)} (x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + y_3^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0)\} + \\
 & \quad + D_{k-1,i} \{v_{k-1,i} [\partial_1^2 y_1^{(k-1)}]^{(i)} (x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + y_3^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\begin{aligned}
 & -D_k \{v_k [\partial_1^3 y_1^{(k)}]^{(i)} (x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + z_3^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0)\} + \\
 & \quad + D_{k-1,i} \{v_{k-1,i} [\partial_1^3 y_1^{(k-1)}]^{(i)} (x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + z_3^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{k,i} \{(2 - v_{k,i}) [\partial_1^2 y_2^{(k)}]^{(i)} (x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + y_4^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0)\} - \\
 & \quad - D_{k-1,i} \{(2 - v_{k-1,i}) [\partial_1^2 y_2^{(k-1)}]^{(i)} (x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + y_4^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{k,i} \{(2 - v_{k,i}) [\partial_1^3 y_2^{(k)}]^{(i)} (x_{2,k}^b + 0) + \\
 & \quad + z_4^{(k,i)} (x_{2,k}^b + 0)\} - \\
 & \quad - D_{k-1,i} \{(2 - v_{k-1,i}) [\partial_1^3 y_2^{(k-1)}]^{(i)} (x_{2,k}^b - 0) + \\
 & \quad + z_4^{(k-1,i)} (x_{2,k}^b - 0)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Граничные условия (7.56)-(7.64), очевидно, можно переписать в матричной форме (7.1)-(7.2). Соответствующие таблицы приведены в [4].

О задании граничных условий в объекте с «пустотами».

Выше были рассмотрены алгоритмы задания граничных условий в виде шарнирного закрепления, идеального контакта и свободно-го края, при этом всюду полагалось, что в рассматриваемом объекте отсутствуют «пустоты», т.е. выполняется условие:

$$\theta_{k-1,i} = 1, \quad \theta_{k,i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, n_k; \tag{7.65}$$

Вместе с тем, очевидно, что в рассматриваемой конструкции могут иметься пустоты. Рассмотрим, например, случай, изображенный на рис. 7.2.

Заштрихованная область здесь условно показывает материал конструкции, а незаштрихованная – «пустоты».

В данном случае для узлов с номерами  $i = 1, 2, \dots, p$  и  $i = q, q+1, \dots, N$  следует задать условия идеального контакта, тогда как для узлов с номерами  $i = p+1, p+2, \dots, q-1$  – условия свободного края.

## 8. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Итак, согласно (7.1)-(7.3) континуальной постановке соответствует дискретно-континуальная постановка в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{y}'_{k,1} = \bar{y}_{k,2} \\ \bar{y}'_{k,2} = \bar{y}_{k,3} \\ \bar{y}'_{k,3} = \bar{y}_{k,4} \\ K_{k,4} \bar{y}'_{k,4} = K_{k,0} \bar{y}_{k,1} + K_{k,2} \bar{y}_{k,3} - s \bar{y}_{k,1}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \tag{8.1}$$

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

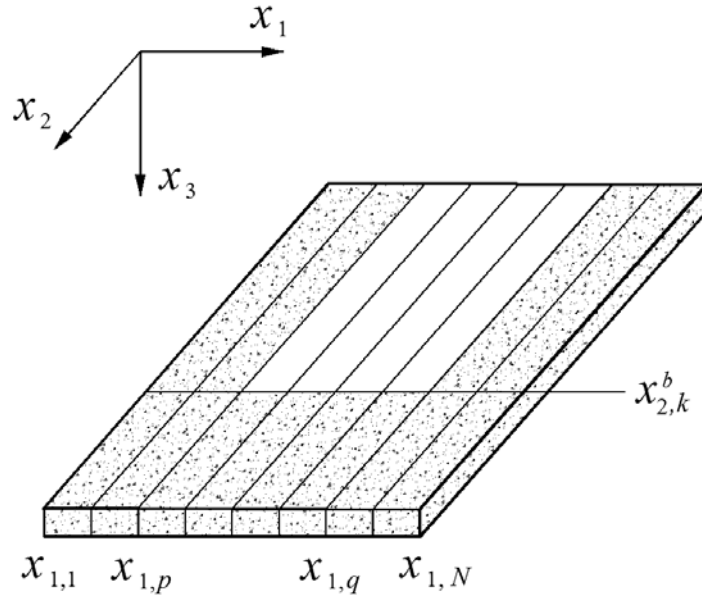


Рис. 7.2. Пример конструкции с «пустотами».

где  $s$  – искомое собственное значение;  
 $\bar{y}_{k,1} = \bar{y}_{k,1}(x_2)$  – искомая собственная функция на подобласти  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$ ;

$$\bar{y}'_{k,i} = \bar{y}'_{k,i}(x_2) = \frac{d}{dx_2} \bar{y}_{k,i}(x_2), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (8.2)$$

Системы (8.1) могут быть записаны иначе в более удобной форме

$$\begin{bmatrix} \bar{y}'_{k,1} \\ \bar{y}'_{k,2} \\ \bar{y}'_{k,3} \\ \bar{y}'_{k,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ K_{k,4}^{-1}(K_{k,0} - sE) & 0 & K_{k,4}^{-1}K_{k,2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_{k,1} \\ \bar{y}_{k,2} \\ \bar{y}_{k,3} \\ \bar{y}_{k,4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{k,4}^{-1}\bar{R}_{k,1} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (8.3)$$

где  $E$  – единичная матрица  $2N$ -го порядка. Вводя обозначения

$$A_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ K_{k,4}^{-1}(K_{k,0} - sE) & 0 & K_{k,4}^{-1}K_{k,2} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Y}'_k = \partial_2 \bar{Y}_k \quad (8.4)$$

и рассматривая соотношения (8.3) совместно с граничными условиями (8.1)-(8.2), заключаем, что расчет конструкции в рамках ДКМКЭ сводится к решению набора многоточечных краевых задач для систем  $8N$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \bar{Y}'_k(x_2) = A_{k,s} \bar{Y}_k(x_2), \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{Y}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{Y}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ B_1^+ \bar{Y}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{Y}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- \end{cases} \quad (8.5)$$

## 9. ОБ УЧЕТЕ УПРУГОПОДАТЛИВЫХ ОПОР.

Пусть  $c_{k,i}$  – характеристика упругоподатливой опоры в  $i$ -м узле модели на подобласти



Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

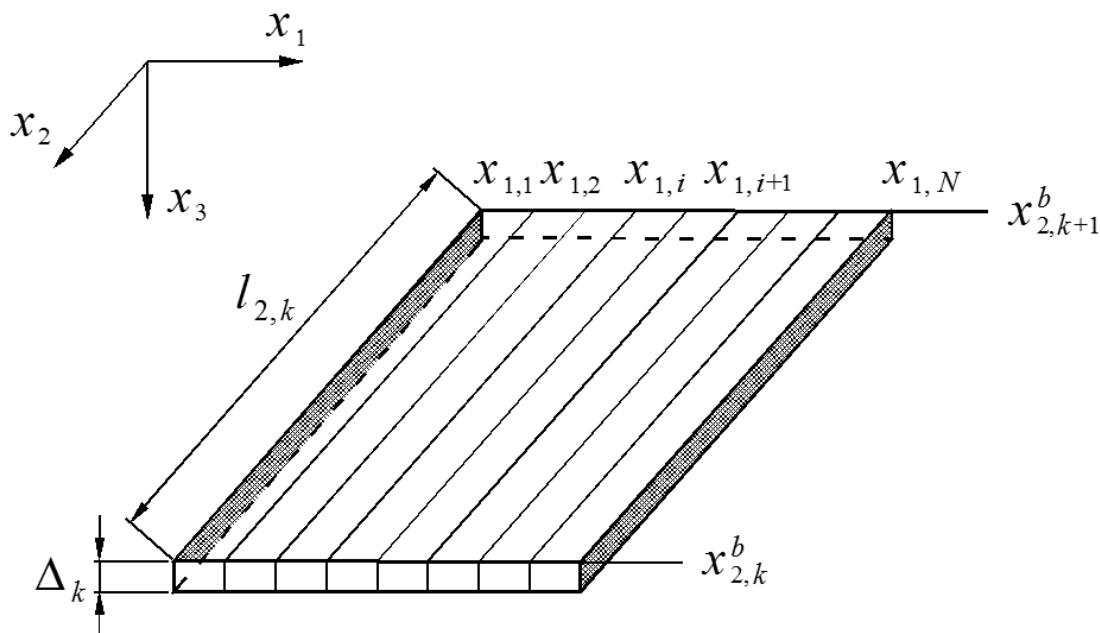


Рис. 10.1. Задание граничных условий вдоль основного направления.

Кроме того, из соображений совместности неизвестных, при задании граничных условий в сечения поперечных по отношению к основному направлению следует положить перемещение узла 1 и его производную по переменной  $x_2$  равными нулю, т.е.

$$\begin{aligned} y_1^{(k,1)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_k; \\ y_2^{(k,1)}(x_{2,k}^b + 0) = 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

*Жесткая заделка.*

Для сечения  $x_1 = x_{1,1}$  имеем пару континуальных граничных условий:

$$\begin{aligned} y_1^{(k,1)}(x_2) = 0, \quad z_1^{(k,1)}(x_2) = 0, \\ x_2 \in [x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Здесь, как и в случае шарнирного закрепления, постановку (8.5) следует модифицировать, представив в виде (10.3), при этом элементы матрицы  $\chi_k$  необходимо вычислять по формуле

$$\{\chi_k\}_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i,1} - \delta_{i,2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 8N. \quad (10.7)$$

## 11. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Корректное аналитическое решение многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами производится по методу, описанному в [1]. После определения узловых перемещений и их производных по переменной  $x_2$  по формулам (4.1)-(4.7) вычисляются изгибающие моменты, поперечные силы, крутящие моменты и приведенные поперечные силы.

### ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработ-

ка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета конструкций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. // Вестник МГСУ, №1, 2011, с. 11-16.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета упругой изотропной тонкой пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Москва. МГСУ. Сб. науч. тр. №15, 2012, с. 40-47.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета тонких пластин с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 2. – М.: МГСУ, 2011, с. 65-104.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Харитонов В.А.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний упругих изотропных тонких пластин с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №16. – М.: МГСУ, 2013 (в печати).
5. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 572 с.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: АСВ, 2004. – 200 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: АСВ, 2006. – 208 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элемен-

Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для определения собственных частот и форм колебаний конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Часть 3: Упругие изотропные тонкие пластины

- тов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: АСВ, 2008. – 336 с.
12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2009. – 336 с.
13. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1992. – 86 с.
14. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
15. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
16. **Трушин С.И.** Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: АСВ, 2008. – 256 с.
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

## СПОСОБ СОЗДАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

*М.П. Саинов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Рассмотрен способ создания конечных элементов высокого порядка и конечных элементов с неравномерным распределением степени аппроксимации перемещений внутри элемента.

Предложено для создания конечных элементов высокого порядка не вводить дополнительные узлы на сторонах элемента, а вводить внеузловые степени свободы. В этом случае через функции формы угловых узлов будет выражаться только линейное распределение перемещений в элементе. Повышение степени аппроксимации может быть достигнуто путём введения дополнительных степеней свободы на рёбрах элемента и соответствующих им функций формы. При этом каждая из дополнительных функций формы будет “отвечать” только за свою степень аппроксимации (квадратичная, кубическая) и не будет зависеть от вида других функций формы.

Такой подход позволяет легко создавать элементы, в которых по разным осям степени аппроксимации будут разными. Это удобно для сопряжения конечных элементов с разными степенями свободы и для описания работы элементов, в которых один размер намного больше другого.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, функции формы, аппроксимация перемещений

## METHOD OF CREATING HIGH-ORDER FINITE ELEMENTS

*Michail P. Sainov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The method is considered for creation of high-order finite elements and finite elements with non-uniform distribution of approximation level of movements inside the element.

For creating high-order finite elements it is suggested not to introduce additional nodes at the element sides, but introduce out-of-node degree of freedom. In this case only linear distribution of movements in the element will be expressed through the function of corner node shapes. Increase of approximation level may be reached by introducing additional degrees of freedom at the element edges and shape functions corresponding to them. At that, each of additional shape functions will be “responsible” only for its own degree of approximation (square, cubical) and will be free from other shape function types.

Such an approach permits easy creation of elements, whose degrees of approximation on various axes will be different. This is convenient for adjoining finite elements with different degrees of approximation and for description of elements operation, where one dimension is much higher than the other.

**Key words:** finite element method, shape function, approximation of movements

Метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время является основным методом расчёта при проектировании сооружений и конструкций различного назначения. Это объясняется тем, что он позволяет решать самые сложные задачи прикладной механики, при чём в пространственной постановке. МКЭ применяется для выполнения статиче-

ских, динамических, фильтрационных, температурных расчётов.

При расчётах напряжённо-деформированного состояния (НДС) грунтовых и бетонных плотин только МКЭ позволяет наиболее полно и точно учесть последовательность возведения сооружения, нелинейность деформирования материалов и

взаимодействия между элементами конструкции, между сооружением и основанием.

В зависимости от класса решаемых задач используются разные виды конечных элементов: стержневые, плоские, объёмные, элементы-оболочки, контактные элементы и др. Кроме того, конечные элементы различаются и по степени аппроксимации неизвестной функции внутри элемента.

В частности, при решении задач о напряжённо-деформированном состоянии плотин неизвестной функцией является функция перемещений. При решении пространственных задач чаще всего используют объёмные конечные элементы в виде тетраэдра. Такой конечный элемент имеет линейную аппроксимацию перемещений, а деформация является константой. Реже используют шестигранные неправильные призмы с квазилинейной аппроксимацией перемещений и соответственно линейной функцией деформаций. Обычно точности этих элементов вполне достаточно, если конечно-элементная дискретизация является довольно подробной.

Однако, как показала практика, существует класс задач, в котором нельзя применять конечные элементы низкого порядка. Это задачи о НДС грунтовых плотин с тонкими негрунтовыми противофильтрационными элементами (“стена в грунте”, железобетонные экраны, жёсткие диафрагмы и др.). Их особенностью является то, что деформируемость материала тонкостенной конструкции очень сильно (на порядок или на два) отличается от деформируемости вмещающего грунта. Из-за этого в них возникают напряжения, на порядок отличающиеся от напряжений в грунте. При этом напряжения значительно изменяются как по длине, так и по толщине жёсткой тонкостенной конструкции. Многочисленные расчёты показали, что с помощью конечных элементов низкого порядка не удаётся отразить сложный характер деформирования и напряжённого состояния тонкостенной конструкции [1].

Существует два способа решения этой проблемы:

- 1) максимально “сгустить” сетку МКЭ в тонкой конструкции,
- 2) применить конечные элементы высокого порядка.

Первый способ ведёт к резкому увеличению узлов сетки МКЭ, но не гарантирует достижение требуемой точности решения, поэтому обычно применяют второй способ. Обычно достаточно применять элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений. Это гарантированно увеличивает точность решения, а также упрощает процедуру генерации сетки МКЭ.

В элементе высокого порядка количество узлов больше, чем в обычном. Например, в шестигранном объёмном элементе при линейной аппроксимации 8 узлов, а при квадратичной – 20 (рис. 1), а при кубической –  $32^1$ . Поэтому использование элементов более высокого порядка также ведёт к росту числу узлов в сетке МКЭ. При решении пространственных задач увеличение количества узлов – не всегда желательно. Оно ведёт к возрастанию порядка системы, к резкому увеличению объёма используемой памяти ЭВМ и времени счёта.

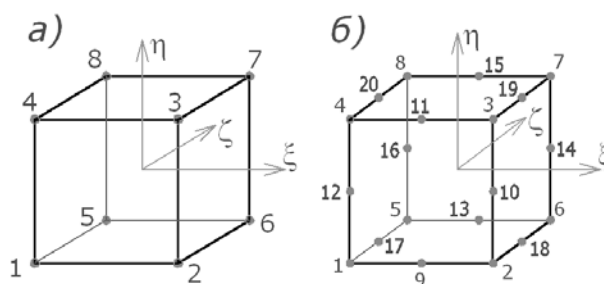


Рис. 1. Объёмные конечные элементы (а – с линейной аппроксимацией перемещений, б - с квадратичной аппроксимацией).

<sup>1</sup> Сказанное относится к конечным элементам Сирендипова семейства. В Лагранжевом элементе с квадратичной аппроксимацией перемещений 21 узел, а с кубической – 40.

Поэтому логично использовать конечные элементы высокого порядка только там, где это действительно необходимо, а в остальной области – применять обычные элементы. Например, при решении задачи о НДС грунтовой плотины с железобетонным экраном целесообразно грунтовую насыпь разбивать на простые элементы, а железобетонный экран – на элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений.

Однако возникает проблема сопряжения конечных элементов с разной степенью аппроксимации. На рис. 2а показана одна из возможных схем сопряжения, в которой одна сторона квадратичного элемента сопрягается с двумя сторонами линейных элементов.

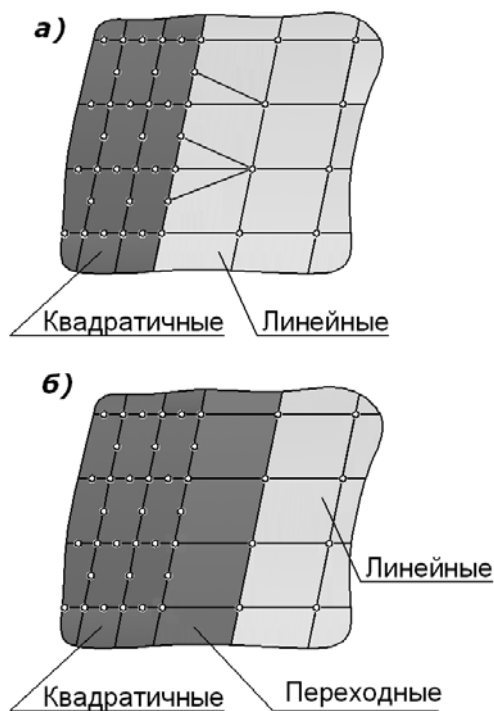


Рис. 2. Схемы сопряжения элементов с линейной и квадратичной степенью аппроксимации перемещений (а – неверная, б – правильная, с помощью элементов промежуточной аппроксимации перемещений)

Такая схема сопряжения является неверной, она не удовлетворяет требованиям совместности элементов [2]. У одного из гранича-

щих друг с другом элементов функция перемещений – линейная, а другого – квадратичная. Это означает, что между элементами может образовываться зазор и они могут не взаимодействовать друг с другом.

Таким образом, в зоне сопряжения линейных и квадратичных элементов необходимо использовать элементы с некоей промежуточной степенью аппроксимации перемещений, у которых на границе с линейными элементами функция перемещений – линейна, а на границе с квадратичными – квадратичная (рис. 2б).

Итак, необходимо создать конечные элементы с промежуточной степенью аппроксимации.

Обычно в элементах любой степени аппроксимации функцию перемещений обычно записывают через перемещения узлов и их функции формы:

$$U = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n, \quad (1)$$

где  $u_1, u_2, u_n$  – перемещения соответственно узлов 1, 2 и n.

$N_1, N_2, N_n$  – функции формы соответственно узлов 1, 2 и n.

Функции формы узлов элемента обычно записывают в локальных координатах, в которых любой элемент представляет себя правильную фигуру с длиной стороны, равной 2 (в плоской задаче – квадрат, в пространственной – куб). Чтобы перемещение, вычисленное по (1) для узла j, соответствовало перемещению этого узла, функции формы должны быть записаны таким образом, что при подстановке локальных координат своего узла они принимали бы значение 1, а при подстановке координат другого узла были равны 0.

В шестигранной призме с линейной аппроксимацией перемещений функции формы 8 угловых узлов определяются формулой:

$$N_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j)(1 + \eta \eta_j)(1 + \zeta \zeta_j), \quad (2)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты произвольной точки в локальной системе координат,

$\xi_j, \eta_j, \zeta_j$  – локальные координаты узла  $j$ .

Если степень аппроксимации – квадратичная, то в элементе появляются ещё 12 узлов в серединах каждого из рёбер, так называемые промежуточные узлы. Их функции формы выражаются формулами:

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j) \quad (3a)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\xi$ ,

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_j) (1 + \zeta \zeta_j) \quad (3б)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\eta$ ,

$$N_j = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \eta \eta_j) (1 + \xi \xi_j) \quad (3в)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\zeta$ . Однако при этом должны быть изменены функции формы угловых узлов:

$$N_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j) (\xi \xi_j + \eta \eta_j + \zeta \zeta_j - 2) \quad (4)$$

Они получены путём вычитания из функций формы угловых узлов функций формы узлов на рёбрах [2]:

$$N_j = \bar{N}_j - \frac{1}{2} (N_\xi + N_\eta + N_\zeta), \quad (5)$$

где  $\bar{N}_j$  – функция формы узла  $j$  при линейной аппроксимации перемещений, определённая в соответствии с (2),

$N_\xi, N_\eta, N_\zeta$  – функции формы узлов, расположенных на рёбрах, исходящих из узла  $j$ . Из формулы (5) видно, что в элементе с промежуточной аппроксимацией, функции формы угловых узлов будут изменяться в зави-

симости от того, есть ли на исходящих рёбрах промежуточные узлы.

Это неудобно, потому нами предлагается применять другой подход – использовать для создания нелинейных функций перемещений внеузловые степени свободы. Это означает, что в формуле (1) дополнительные слагаемые, отвечающие за нелинейность функции, не относятся к каким-либо узлам. Дополнительные узлы не вводятся, соответственно их функции формы не изменяются. В этом случае дополнительные слагаемые формулы (1) будут представлять собой приращения перемещений относительно перемещений, созданных угловыми узлами (рис. 3).

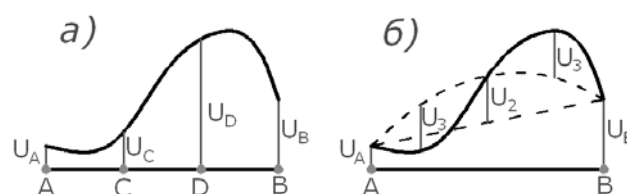


Рис. 3. Способы создания нелинейной функции перемещений на грани (стороне) конечного элемента (а – с помощью введения дополнительных узлов, б – с помощью внеузловых степеней свободы).

Формулы квадратичных функций формы внеузловых степеней свободы элемента будут такими же, как для дополнительных узлов – (3). Их максимум приходится на середину стороны (когда локальная координата равна 0), следовательно, перемещение  $u_j$  для квадратичной функции формы представляет собой приращение перемещения в середине стороны по сравнению с линейной функцией перемещений.

Формулы для кубических функций формы предложены следующими:

$$N_j = (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_j) (1 + \zeta \zeta_j) \xi \frac{\sqrt{27}}{8} \quad (4a)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\xi$

$$N_j = (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_j)(1 + \zeta \zeta_j) \eta \frac{\sqrt{27}}{8} \quad (4б)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\eta$

$$N_j = (1 - \zeta^2)(1 + \xi \xi_j)(1 + \eta \eta_j) \zeta \frac{\sqrt{27}}{8} \quad (4в)$$

– для узлов на сторонах, параллельных оси  $\zeta$ . Максимум кубических функций наблюдается сразу в двух точках (с относительной координатой  $\pm \sqrt{1/3}$ ). Её нельзя отнести к какому либо узлу, эта степень свободы – внеузловая.

В кубических функциях формы перемещение  $u_j$  представляет собой дополнительное перемещение относительно квадратичной функции распределения перемещения

Как видим, предложенный подход обеспечивает независимость степени аппроксимации по каждой из сторон рёбер. За счёт этого можно создавать элементы, в которых степени аппроксимации в направлении каждой из локальных осей координат ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) будут разными. Это удобно не только для сопряжения разных типов элементов, но и для элементов в которых один из размеров значительно превышает другой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саинов М.П. Особенности численного моделирования напряжённо-деформированного состояния грунтовых плотин с тонкими жёсткими противофильтрационными элементами. // Вестник МГСУ, 2012, №2, с.102-108.
2. Numerical methods in finite element analysis / К.-J. Bathe, E.L. Wilson/ Prentice Hall, Inc., 1976.

---

Саинов Михаил Петрович, Московский государственный строительный университет. кафедры гидротехнических сооружений. 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,

e-mail: mp\_sainov@mail.ru.

Michail P. Sainov, Department of hydraulic structures, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mp\_sainov@mail.ru.