

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**  
*Volume 9, Issue 2* *2013*

---

EXECUTIVE EDITOR

**Valery I. Telichenko**, Professor, Rector  
Moscow State University of Civil Engineering  
Moscow, Russia  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

**Pavel A. Akimov**, Professor, Vice-Rector  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Research Center STADYO  
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

**William Begell**, President  
Begell Publishing House  
USA

**Nadezhda S. Nikitina**, Director  
ASV Publishing House  
Moscow, Russia

**Valery I. Telichenko**, Rector  
Moscow State University  
of Civil Engineering  
Moscow, Russia

## ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

**Vladimir I. Andreev**, Professor  
Department of Strength of Materials,  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering, Yaroslavskoe shosse 26,  
129337 Moscow, Russia

**Nikolaj V. Banichuk**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo  
117526, Russia

**Klaus-Jürgen Bathe**, Professor  
Department of Mechanical  
Engineering, Massachusetts Institute  
of Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Zdenek Bittnar**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Czech Technical University  
7, Thakurova, 16629 Prague 6  
Czech Republic

**Alexander S. Bratus**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Evgeny G. D'yakov**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Alexander S. Gorodetsky**  
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.  
2a, Ul. M. Krivonosy  
252180 Kiev, Ukraine

**Vladimir Karpov**, Professor  
St. Petersburg University  
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,  
St. Petersburg, 198005 Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
and Computer Technology  
Perm State Technical University  
29, Komsomolsky Prospekt,  
Perm, 614990, Russia

**Hartmut Koppler**, Professor  
Bauhaus-Universität  
31a, Windmühlen Str.  
99425 Weimar, Germany

**Andrey V. Korgin**, Professor  
Structure Testing Department  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vadim G. Korneev**, Professor  
Dept. of Math. and Mechanics  
St. Petersburg State University  
198904, St. Petersburg, Russia

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo,  
117526, Russia

**Pierre Ladeveze**, Professor  
Lab. de Mecanique et Technologic  
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.  
Paris VI, 61 Av. du President Wilson  
94235 Cachan Cedex, France

**Ralf Lindberg**, Professor  
3, Korkechoulunkatu,  
33101, Tampere, Finland

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya Pl.,  
634003 Tomsk, Russia

**Herbert Mang**, Professor  
Inst. Fur Haustatiken und  
Festigkeitslehre  
Techische Universitaet Wien  
13, Karlsplatz,  
A-1040 Wien, Austria

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vladimir I. Myachenkov**, Professor  
Department of Strength of Materials  
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"  
3a, Vadkovsky Per.,  
104472 Moscow, Russia

**L'Eugenio Onate**, Professor  
E.T.S. Ing. Caminos  
Jorge, Girano Salgado, 31-08034  
Barcelona, Spain

**Vladimir A. Palmov**, Professor  
Physical-Mechanical faculty  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Polytechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Stan Pietruszczak**, Professor  
Department of Civil Engineering  
McMaster University  
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing

**Ekkerhard Ramm**, Professor  
University of Stuttgart  
Institute for Baustatik  
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,  
Germany

**E. Daya Reddy**, Professor  
University of Cape Town  
Department of Applied Mathematics  
7700 Rondebosch, South Africa

**Sunil Saigal**, Professor  
National Science Foundation  
4201 Wilson Blvd.,  
Arlington, VA 22230, USA

**Vadim N. Savostyanov**, Professor,  
Department of Applied Mechanics  
and Mathematics, Moscow State  
Univ. of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Bernhard A. Schrefler**, Professor  
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.  
Via, Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Department of Comp. Aided Design  
Moscow State Univ. of Railways  
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,  
101475 Moscow, Russia

**D.V. Singh**, Professor  
Vice chairman all India council for  
Technical Education, New Delhi,  
India

**Wacław Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Nils-Eric Wiberg**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Chalmers University of Technology  
S-41296 Goteborg, Sweden

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wroclaw University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wroclaw, Poland

**Peter Wriggers**, Professor  
Technical School of Department  
1, Hochschulstrabe,  
D-6100 Darmstadt, Germany

## INVITED REVIEWERS

**Akimbek A. Abdikalikov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov  
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

**Jan Buynak**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Ján Čelko**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

**Sergiy Yu. Fialko**, Professor, Dr.Sc.,  
Cracow University of Technology  
Warszawska 24 St., 31-155 Kraków, Poland

**Marek Iwański**, Professor, Dr. hab., Ing.,  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

**Konstantin I. Khenokh**, Ing.  
General Dynamics C4 Systems,  
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

**Christian Koch**, Dr.-Ing.  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Markus König**, Professor, Dr.-Ing.,  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

**Amirlan A. Kusainov**, Professor, Dr.Sc.,  
Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering  
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043 Almaty, Republic of Kazakhstan

**Nikolai P. Osmolovskii**, Professor, Dr. hab.  
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom  
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

**Jerzy Zbigniew Piotrowski**, Professor, Dr. hab., Ing.,  
Kielce University of Technology,  
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

**Josef Vičan**, Professor, PhD, Ing.  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij} . \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

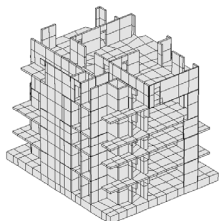


Figure 1

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

**to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

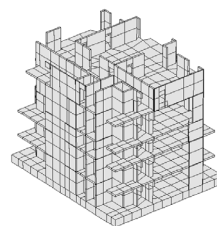


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

#### ➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
кафедра информатики  
и прикладной математики,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

#### ➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
Научно-образовательный центр  
компьютерного моделирования  
уникальных зданий, сооружений  
и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- <sup>1)</sup> Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com.
- <sup>2)</sup> Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* pavel.akimov2@gmail.com.
- <sup>3)</sup> Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* niccm@mgsu.ru.

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 9, Issue 2*

*2013*

TABLE OF CONTENTS

<b>Исполнилось 80 лет А.В. Перельмутеру</b>	<u>14</u>
<b>Заметки о прикладной науке</b> <i>А.В. Перельмутер</i>	<u>15</u>
<b>Роль парадоксов в оценке корректности расчетных моделей</b> <i>Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер, <u>В.И. Сливкер</u></i>	<u>34</u>
<b>Модели взаимодействия гибких, нелинейно-деформируемых оболочек с агрессивной внешней средой</b> <i>В.В. Петров</i>	<u>43</u>
<b>Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>51</u>
<b>Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>56</u>
<b>Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>80</u>
<b>Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий</b> <i>М.С. Барабаш</i>	<u>98</u>
<b>Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования</b> <i>В.А. Белов, А.А. Гусев, С.В. Щербина</i>	<u>108</u>
<b>Алгоритм корректировки вычислительной расчетной модели сооружения при его мониторинге</b> <i>В.Н. Сидоров</i>	<u>118</u>

<b>Оценка живучести однопоясной металлической оболочки покрытия цилиндрической формы вследствие погрешностей изготовления и монтажа</b> <i>А.М. Югов, А.Б. Бондарев</i>	<u>124</u>
<b>Investigation of Repair Compositions Delamination Mechanism by Restoration Structures After Sulfurous Connection Corrosion Attack</b> <i>Andrey N. Avrenyuk, Anastasia A. Avrenyuk</i>	<u>132</u>
<b>The Finite Element Method for the Equilibrium Problem of Flexible String</b> <i>Alexander V. Baenkhaev</i>	<u>136</u>
<b>An Assessment of Potential of Strength Increase in Earth Dams Due to the Use of Anti-Seismic Belts</b> <i>Tohirjon Z. Sultanov, Mirziyod M. Mirsaidov</i>	<u>140</u>

## ИСПОЛНИЛОСЬ 80 ЛЕТ А.В. ПЕРЕЛЬМУТЕРУ



*Анатолий Викторович Перельмутер* – доктор технических наук, профессор, иностранный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), хорошо известный ученый, опытный, тонкий, высокоэрудированный специалист и эксперт в теории сооружений, численных методах, конструировании и оптимальном проектировании строительных конструкций и сооружений, информационных технологиях, разработке программных комплексов промышленного типа для расчетного обоснования и автоматизированного проектирования строительных объектов, наш неунывающий, доброжелательный и общительный коллега.

В этом номере журнала мы публикуем «Заметки о прикладной науке» Анатолия Викторовича с его равнодушными размышлениями о положении и путях развития отечественной науки и образования в области строительства.

Желаем Анатолию Викторовичу дальнейших творческих и профессиональных успехов и крепкого здоровья!

Редакционный Совет журнала  
International Journal  
for Computational Civil and Structural Engineering

## ЗАМЕТКИ О ПРИКЛАДНОЙ НАУКЕ

*А.В. Перельмутер*

НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

**АННОТАЦИЯ:** Обсуждаются особенности развития прикладной науки, в частности, дисциплин прочностного цикла и теории сооружений (строительная механика, теория конструктивной формы и проблемы автоматизированного проектирования). Указываются основные противоречия, присущие современному этапу их развития. Обращается внимание на принципиальные особенности информационных технологий.

**Ключевые слова:** новая техника, прикладная наука, образование, научная школа, информация

## NOTICES REGARDING APPLIED SCIENCE

*Anatoly V. Perelmuter*

SCAD Soft Ltd, Kyiv, UKRAINE

**ABSTRACT:** Special features of development process for applied science, in particular, for disciplines of strength branch and structural theory (structural mechanics, theory of structural form and problems of computer-aided design) have been considered. Basic contradictions appropriated for contemporary stage of its development have been specified. Attention on principal particularities of informational technologies has been paid.

**Key words:** new technique, applied science, education, scientific school, information

*Если ты не знаешь никакой теории, то это еще не означает, что ты практик*

Хачиян Л.Г. Избранные труды.- М.: МЦНМО, 2009 – 520 с.

Вся профессиональная деятельность автора этих заметок была связана с прикладными проблемами, и то, что изложено ниже, является некоторыми выводами из личных наблюдений. Эти наблюдения охватывают более чем сорокалетний период развития таких прикладных наук, как строительная механика, теория конструктивной формы и проблемы автоматизированного проектирования. Указанные направления представляются типичными для всей области прикладных исследований технического профиля и дают почву для достаточно далеких обобщений, однако мы хотели бы уделить основное внимание циклу проблем, связанных со строительными науками, по крайней мере, примеры будут связаны именно с этим циклом.

### 1. СОЗДАНИЕ НОВОЙ ТЕХНИКИ – НАУКА ИЛИ ИСКУССТВО

Прежде всего, нужно сразу же оговориться, что под новой техникой мы понимаем такие технические устройства, машины или ооружения, которые обладают новизной на уровне изобретения, т.е. не были известны (описаны) ранее, и о которых можно сказать знаменитую ключевую фразу патентной формулы «отличающиеся тем, что ...». Часто понятие новой техники трактуют расширительно, о ней, например, говорят, когда запускается в производство нечто, вообще говоря, известное, но ранее не производившееся в этой стране, регионе, на предприятии. Не отрицая полезности и таких новаций, заметим, что их анализ в рамках целевой направленности этих заметок не представляет интереса.

Возвращаясь к тому, что выше определено, как новая техника и что защищено (или, в

принципе, может быть защищено патентом) отметим, что достижения такого рода очень редко вытекают из простого логического рассуждения, которое развивает некоторое научное направление. Конечно, в основу идеи замысла может быть положен некоторый научный принцип, но саму конструкцию, воплощающую в материале этот принцип, от первоначального идейного замысла отделяет трудный и неформализуемый процесс разработки, очень напоминающий творческий процесс в искусстве. Я глубоко убежден, что процесс конструирования скорее является актом искусства, чем аналитической работой науки.

Научить этому в рамках некоторой формально описанной технологии нельзя, несмотря на предпринимавшиеся попытки создания таких технологий (см., например, [1]). Повидимому, лучше всего о затронутой проблеме говорит то, что обучение конструированию происходит по тому же принципу, что обучение художественному творчеству: учитель говорит «Делай, как я», а ученик становится настоящим мастером лишь тогда, когда начинает делать не так, как учитель. Конечно, наряду с творческой, имеется и ремесленная часть этого процесса, которую тоже изучают в процессе профессиональной подготовки, и здесь, как в процессе грунтовки холста или растирания красок, вполне возможно пунктуальное обучение некоторым правилам и законам выполнения работы.

Другая аналогия вырисовывается, если задать вопрос — что изучает такая наука, как искусствоведение. Конечно не вопрос о том, как писать гениальные стихи, а вопрос о том, что (возможно, и почему) получилось у Пушкина или у целого литературного направления. Поверка алгеброй гармонии. Вполне аналогична ситуация, когда в детальном анализе выявляются результаты конструкторских прорывов в некоторой области. Достаточно типичным может быть пример книги [2], в которой проанализированы осуществленные в разных странах мира большепролетные конструкции покрытий и

показано, что в некоторой параметрической системе координат наглядно представляются закономерности распределения обобщенных технико-экономических показателей для множества конструкций этого класса. Упомянутая книга — это типичное научное исследование, но объекты этого исследования создавались не по «правилам научного поиска», а на основании творческих озарений авторов рассматривавшихся конструкций. Естественно, что такие озарения прочно основываются на целом ряде научных положений, выводов и рекомендаций, использование которых обеспечило прочность, долговечность или другие обязательные качества объекта, хотя сам замысел контруктивного решения (если он не был повторением пройденного) этими научными результатами не определялся. В этом смысле исследования типа [3], претендующие на универсальное описание процесса проектирования в форме трехактной драмы «расчленение задачи на части — соединение частей по-новому — изучение последствий от практического внедрения нового», ничего не говорят о сути создания нового (соединения частей по-новому).

Упоминание о повторениях в предыдущем абзаце не случайно. В этой части именно техническое творчество весьма примечательно. Новый объект содержит в себе множество ранее найденных и известных деталей, более того, таких деталей заведомо больше, чем новаций. Здесь снова уместно вспомнить структуру патентной формулы, которая перед ключевым оборотом «отличающиеся тем, что ...» содержит детальный перечень заимствований. Здесь имеется определенная характерная черта технического творчества, в котором трудно (скорее, невозможно) представить себе абсолютное новаторство типа Кандинского или Малевича — конкретность предметной области не дает свободу абстракционистическому своеволию<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Редкими исключениями являются так называемые «пионерские патенты», где нельзя указать устройство-предшественник. Таким был патент Эдисона на фонограф

Но время от времени и в технике появляются абсолютно новые идеи, которые обычно связаны с реализацией ранее неизвестных или не использовавшихся областей знания. Тогда появляются не отдельные технические устройства, а новые разделы техники (электротехника, радиотехника, телекоммуникации, лазеры и т.п.). Вот такие глобальные прорывы, меняющие окружающий нас «искусственный мир», обычно являются следствием научных исследований, хотя и здесь бывают исключения (вспомним появление паровых двигателей).

Однако прорывы этого типа достаточно редки и чаще всего в инженерном сообществе, когда говорят о разработке новой техники, имеют в виду нечто иное, гораздо менее глобальное и революционное. Здесь чаще всего уместно высказывание Д. Томпсона [16], который предварил свою работу такими словами: *«В этой книге речь идет о том, что называется чистой наукой, об интеллектуальном поиске, результаты которого совершенно отличаются от результатов техники. Конечно, техника тоже увлекательное и трудное занятие, но она столь же далека от науки, как фермерская работа от выращивания роз или архитектура от скульптуры».*

## 2. НАУКОПОДОБИЕ

В разных странах, согласно бытующим там традициям, понятию «инженер» придают различный статус — от технического управляющего производством до исследователя, конструктора или руководителя высокого ранга. В некоторых странах различают инкорпорированного (зарегистрированного) инженера и профессионального (лицензированного) инженера. При этом существуют еще и три уровня вузовской подготовки — бакалавр, специалист, магистр. Как в пер-

---

— эксперты Патентного бюро, как полагается, пытались разыскать прецедент, но не нашли ничего даже отдаленно напоминающего устройство для записи, сохранения и воспроизведения звука.

вых, так и во вторых трех соснах легко заблудиться, что, на мой взгляд, успешно делает наша система высшего образования. Конечно, мне — инженеру по образованию — более импонирует этимология слова «инженер», происходящего от латинского *ingenium* и родственному понятию *genius*, т.е. «гений».

Однако, инженерная деятельность из элитного занятия, каким она была в начале двадцатого столетия, достаточно быстро превратилась в рутинное дело, как всегда случается в тех ситуациях, когда соответствующая профессия становится массовой (вспомните историю таких профессий как летчик, шофер, учитель). Массовость предполагает усреднение, но всегда остаются яркие представители профессии и эта элита хотела бы как-то выделяться. В нашей стране сложилась традиция отмечать чисто инженерные достижения практиков-новаторов присвоением академических званий. Сначала это были звания почетных академиков (например, Шухов или Бардин), затем слово «почетный» исчезло и в обществе постепенно утвердилось мнение, что любое серьезное изобретение или технический прорыв обязательно является формой проявления результатов научного исследования. Это мнение тем более легко проникло в общественное сознание, поскольку некоторые (но далеко не все) прорывы действительно завершали собой труд ученых, правда не всегда это были те инженеры, которые создавали новую технику. И самое главное — технические достижения являются результатом творчества, что роднит их с научными исследованиями (правда, на родство с художественным творчеством почему-то никто не претендовал).

Далее все пошло по указанному пути и появились многочисленные кандидаты или доктора технических наук такого же типа. Многие из них осознавали, что то, чем они занимаются (и вполне успешно) не является «настоящей наукой»<sup>2</sup>, им казалось, что ус-

---

<sup>2</sup> Для сравнения полезно привести следующую цитату: «Фон Браун всегда реально оценивал свои профессиональ-

пешное инженерное творчество следовало бы «обнаучить», для чего использовались такие приемы, как классификация и определение места своего детища в некоторой классификационной системе (тем более, что с классификации наблюдений за реальным миром начиналось естествознание), погружение своего достижения в некое (чаще всего модное) общематематическое или общезначимое понятие (в силу своей общности, последние почти всегда допускали такое действие) или заимствование некоторого стиля изложения, как, например, «теоремно-доказательный» язык математики и соответствующая «строгость». Возможно, что следовало бы детально исследовать весь набор приемов «обнаучивания», подобно тому, как по отношению к «математической строгости» было сделано в блестящей работе [4].

Достаточно характерным является следующий пример. В статье [5] весьма расширительно утверждается, что любое твердое тело (и, следовательно, любая конструкция) является природной нейроподобной системой. Бедные конструкции! Кем только они не становились, как только в науке появлялось новое модное течение. Только на профессиональной памяти автора они побывали и каналами связи [6], и бионическими устройствами [7], а вот теперь стали нейронными сетями. Вряд ли это их последний наряд, поскольку любители использовать модные термины переведутся не скоро.

Обратной чертой и, в некотором роде, антитезой такого «общеонаучивания» является стремление объявить некую достаточно специфическую проблему «теорией чего-то». Типичным примером может служить «теория железобетона» [8], которая трактуется как самодостаточная научная дисциплина. Понимаю, что можно говорить о теории армированной среды из материала, лишенного способности воспринимать растягивающие напряжения, но ведь армирование тогда не

обязательно стальное (железное) и материал не обязательно бетон. Мне неспециалисту трудно понять, чем, например, гипс, армированный алюминиевой проволокой будет в теоретическом смысле отличаться от железобетона. При этом я ничуть не хочу умалить практическую ценность работ, направленных на изучение свойств железобетонных конструкций, но при чем здесь теория?

И следует подчеркнуть, что речь здесь не идет о формулировках. Дело в том, что такого рода локальные теории отрываются от общенаучной столбовой дороги и при этом иногда теряют фундаментальность и обоснованность. Появляются новые гипотезы, которые вряд-ли были бы уместными при сохранении более общего подхода. Это естественно, поскольку предмет исследований конкретизируется, но здесь есть и определенная опасность вступить в противоречие с общими принципами, поскольку уровень обоснованности новых гипотез далеко не всегда соответствует требованиям научной строгости.

Типичным примером из близкой мне области является использование в расчетах стальных конструкций принципа ограничения остаточных пластических деформаций, не опирающегося ни на какую теорию пластичности. Пока речь идет о простейшем изгибаемом элементе, этот подход еще как-то образом срабатывает, а его «обоснование» заключается в наглядности. Но ведь этот принцип пытаются применить и для анализа сложного напряженного состояния, где его применимость более чем сомнительна.

Мне помнится вопрос, заданный на защите докторской диссертации «Технологичность стальных конструкций» одним известным математиком (тогда еще не было специализированных советов и совет был представлен представителями самых разных наук): «Известно, что каждая прикладная наука восходит к какой-то фундаментальной. Например, строительная механика — к разделу физики, называемому механикой. К какой же

---

ные качества. Он, например, всегда считал себя «чистым» инженером и никогда не пытался «рядиться в мантию» ученого» (Ю. Кираш. Тайны лунной гонки)

*фундаментальной науке восходит технологичность?». Соискатель был растерян, а мне же представляется, что такое прослеживание истоков является абсолютно обязательным для специалиста, занимающегося определенной областью прикладных исследований. Такое выяснение генезиса работ своего направления является хорошим лекарством от преждевременного рождения теории того-то.*

### 3. ИСТОРИЯ БОРЬБЫ

Широко распространилось мнение, что режим, основанный на коммунистической идеологии, заметно задержал развитие отечественной науки. При обсуждении этой темы сразу же вспоминается преследование «буржуазной лженауки кибернетики» или лысенковские гонения на генетику. Все это правда, но по-видимому не вся правда. Здесь полезно привести слова Э.Маха *«Конфликты между наукой и теологией или, вернее сказать, с церковью — тема, которой занимаются весьма охотно... Но эти конфликты были уже достаточно описаны и, если останавливаться только на них, человек становится односторонним, а потому и несправедливым. Человек легко тогда переходит к тому взгляду, будто бы наука была задержана в своем развитии только давлением церкви и сейчас же достигла бы необычайного развития, если бы этого давления не было»*. [9, стр.381]. В этом тексте стоит только поменять слово «церковь» на «коммунистическая идеология», как все станет относиться к предмету нашего рассмотрения.

Если же высказываться по сути проблемы воздействия идеологии, то представляется, что наибольший вред принесла не религиозная или коммунистическая идеология, а сама постановка задачи об «идеологизации» науки. Именно тогда появляются замечательные перлы типа «антимарксистские факты» (только вдумайтесь — не идеи, а факты!) или ярлыки типа «идеализм», «грубый материализм» и т.п.

Более значительным представляется торможение науки за счет общей закрытости нашего общества в прошлом. И, несмотря на то, что для некоторых сфер деятельности (разработка оружия, например) в закрытых учреждениях и городах разведка распахивала перед некоторым отобранном контингентом весь профессиональный мир, для собственно научного творчества это была трагедия. Она обернулась тем, что подавляющее число наших ученых не только плохо представляли себе общемировой уровень достижений в своей отрасли знаний, но и не понимала такой, например, простой мысли: в науке не бывает первенства района, города и даже страны; наука — это всегда первенство мира. Эта болезнь распространена неравномерно; в некоторых областях научного творчества (например, в математике) ориентация на мировой уровень всегда оставалась правилом, а в более прикладных областях болезнь «защоренности» проникла глубоко и отравила несколько поколений. Даже сейчас это легко увидеть, если проанализировать обзорные разделы в диссертационных работах с точки зрения списка упоминаний, хотя тут сказывается еще один фактор — традиция упоминания всех членов Совета, оппонентов и других власть имущих лиц.

Своеобразной отрыжкой изоляционистского направления в науке являются требования ВАК относительно того, какие издания засчитываются при подсчете числа публикаций по теме диссертации. Даже самый крупный международный форум здесь не может конкурировать со сборником трудов провинциального ВУЗа, если последний своевременно зарегистрирован в качестве «профессионального издания».

Сейчас часто можно услышать такое оправдание незнания современного уровня зарубежных исследований: *«Ну что можно поделать, когда наши библиотеки не получают зарубежных журналов?»*. Остается только удивляться, что такая точка зрения имеет право на существование, когда имеется реальная возможность доступа к необходимой

информации через интернет. Многие мои коллеги не верят, что на веб-сайте Американского института стальных конструкций можно читать журналы *Modern Steel Construction* или *Engineering Journal*, что имеется доступ к оглавлениям и аннотациям<sup>3</sup> статей практически всех международных научных журналов, и все это не требует специальной оплаты.

Проверка на мировой уровень является достаточно жесткой процедурой, которую далеко не всегда выдерживают определенные научные коллективы. А последним очень хочется стать «головными», «ведущими» и, вообще, начальствующими. В независимой Украине это стало поветрием, как для прикладных НИИ, так и для высших учебных заведений. Лишь немногие Вузы можно считать крупными центрами науки и образования, каковыми должны быть университеты. Но сейчас типичной становится такая картина — прозябал себе тихонько какой-нибудь Мухохранский филиал Малоознанского индустриального института и, глядь, имеем Мухохранский технический университет. При этом прилагательное «технический», по мнению некоторых, дает некую индульгенцию, дескать, мы же не говорим, что мы «настоящий» университет.

К сожалению, эта тенденция поддерживается государственными органами, которым тоже лестно иметь в своем подчинении всякого рода «головные» и «национальные».

Кстати, о руководящих органах. Одним из критериев настоящего ученого является способность самостоятельно выбирать путь исследований, не подлаживаясь под начальственные мнения [16]. Поэтому наука, как прикладная, так и фундаментальная, должна защищать себя от попыток управлять собою. Но делают это разными путями: прикладная наука может выйти со своими результатами на рынок и обрести экономическую незави-

симось, а продукты деятельности фундаментальной науки товаром обычно не являются. В первом случае результат исследования имеет стоимость, а во втором — таковой не имеет (сколько стоят законы Кирхгофа или теорема Пифагора?)<sup>4</sup>.

Фундаментальной науке нужны неэкономические средства защиты, и единственный разумный способ ее существования — быть финансируемой не на основе ожидаемых результатов, а на доверии. Этому учит опыт средневековых университетов, которым монархи-покровители даровали особые права вольности. Этому учит и опыт западной науки, имеющей многообразные фонды финансирования фундаментальных исследований.

А для прикладной науки основой финансирования должен быть заказ потенциального потребителя. Это, конечно, маленькая разница, но она напоминает анекдот о том, как на банкете сидящая рядом с Бернардом Шоу феминистка заявила, что между мужчиной и женщиной разница весьма мала. В ответ на такое заявление Шоу предложил тост за эту маленькую разницу.

#### 4. НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ

Известные ученые привлекают к себе внимание молодых исследователей и зачастую создают научные школы. Одним из наиболее успешных способов их создания и работы является «развитие идей», которое подразумевает, что создатель школы разработал основы некоторого научного направления, а его последователи это направление продолжают.

Однако иногда описанная процедура подменяется простой детализацией и конкретизацией положений, выдвинутых шефом, и практически ни к какому их развитию в идейном, а не в чисто техническом смысле отношения не имеет. Пишутся статьи, защищаются диссертации, делаются доклады на

<sup>3</sup> Заметим, что знакомство только с оглавлениями и аннотациями уже дает огромный материал о направлениях исследований и достигнутом уровне исследований по рассматриваемой тематике.

<sup>4</sup> Точнее надо было бы говорить, что стоимость они имеют, а вот цены не имеют.

научных конференциях, но все это лишь увеличивает чисто фактологическую сторону проблемы, ничуть не обогащая ее основополагающие научные основы. Особенно характерна эта картина для школ, составляемых из аспирантов, где указание руководителя «копай здесь» приводит к относительно простой работе по написанию диссертации. Такие «школы» вырождаются уже в первом поколении, поскольку ученики не приучены самостоятельно искать направление исследований<sup>5</sup>.

Деградация также способствует то, что яркий ученый привлекает внимание не только бескорыстных исследователей, но именно к нему стремятся попасть в ученики ловкие люди (зачастую совсем не бесталаные), для которых карьерные соображения важнее сути выполняемых исследований, и именно такие особы чаще всего занимают освободившийся после смерти шефа трон. Мне представляется почти справедливой гипотеза, что чем ярче создатель научного коллектива, тем меньше его «период полураспада». Существует, к счастью, и другой тип научных школ, чаще всего функционирующий в виде неформального «незримого» коллектива, где развиваются именно идеи, высказанные основателем. Незримый коллектив — это группа ученых, работающих одновременно в одном направлении, над одним кругом проблем, в разных организациях и, зачастую, в разных странах. Члены незримого коллектива связаны информационными каналами и рекрутируются не через аспирантуру или совместную работу в одном отделе, а через публикации, встречи на научных конференциях, переписку. Распознаются такие школы не по записям в трудовой книжке,

а по ссылкам в публикациях и взаимному цитированию. Конечно, имеется традиция «ритуального цитирования», но оно может распознаваться достаточно простыми средствами, а сам механизм выявления незримых научных коллективов был в свое время блестяще проиллюстрирован на примере анализа публикаций из области планирования эксперимента в работе [10].

Не следует слишком жестко противопоставлять два указанных типа научных школ, близкодействующую и дальнедействующую. Так в физике, «непосредственные» ученики были у Э.Резерфорда, Дж. Дж. Томсона, Н.Бора, А.Ф.Иоффе, Л.Д.Ландау, а вот М.Планк, А.Эйнштейн, П.Дирак, А.Д.Сахаров таких учеников не имели. Однако кто может сосчитать их последователей с гордостью считавших себя учениками этих великих ученых.

## 5. ПОДГОТОВКА КАДРОВ

Современное состояние прикладной науки, заметная потеря ее связей с фундаментальными дисциплинами и определенная «хуторная» психология основных кафедр наложила свой отпечаток и на проблему подготовки кадров. Многие дисциплины растащены по отдельным курсам, каждая кафедра все больше углубляется в специфику своего направления и тем самым разваливает общие подходы. Мне трудно понять, почему нужно иметь отдельные кафедры (и, соответственно, курсы) стальных, железобетонных, деревянных конструкций, не имея некой объединяющей их дисциплины. Кто должен говорить об общих проблемах любых несущих конструкций (как обеспечивается их надежность, что такое живучесть конструкции, как и почему создаются смешанные каркасы, как связаны требования прочности и устойчивости с требованиями ремонтпригодности и обеспечением доступа к ответственным деталям для их осмотра, ремонта и замены и многое другое). Кто, на-

<sup>5</sup> Известная легенда говорит, что стажер, выполнивший по указанию Резерфорда какую-то работу и спросивший что нужно делать дальше, был уволен из руководимой Резерфордом Кавендишской лаборатории. Кстати, предшественник Резерфорда Дж. Дж. Томсон отчет о своем 35-летнем директорстве представил в виде списка его учеников, удостоенных Нобелевской премии (7 человек) или избранных в Королевское общество (27 человек). Вот такие бывают школы!

конец, расскажет о методе расчетных предельных состояний именно как об общем методе расчета любых несущих конструкций и при этом остановится не только на левой (несущая способность), но и на правой (воздействия) части предельного неравенства. Вот и получается, что студента обучают, например, способам оценки прочности стальной или железобетонной балки, но ничего не говорят ему о свойствах тех нагрузок, для которых эта прочность должна обеспечиваться. Тому же студенту могут очень долго и детально говорить о том, что узел сопряжения стальной колонны с фундаментом может иметь такое или такое конструктивное решение, и его расчет по действующим нормам выглядит следующим образом, но ничего не говорят, почему нормы требуют выполнения той или иной проверки.

Когда я писал последнюю фразу, то решил, что могу обидеть каких-то преподавателей, которые, может быть, и говорят о происхождении нормативных требований. Но заглянув в несколько учебников по курсу стальных конструкций, я успокоился — нет там ничего о происхождении нормативных требований, особенно в части правил конструирования. Аналогично обстоит дело и с курсами других конструкций. Вообще, учебники все в большей степени становятся сборниками рецептов (на манер кулинарной книги), и при этом с каждым новым изданием они «худеют». Так трехтомный учебник по курсу металлических конструкций (1940 – 1944 г.г.) имел объем (844 + 488 + 499) страниц, однотомный выпуск 1952 г. — 852 страниц; 1961 г. — 776 страниц; 1973 г. — 687 страниц сегодня этот курс излагается на 560 страницах. Трогательная забота о студенте, который в период обучения в ВУЗе не может «переварить» чрезмерные объемы данных (и это верно), но абсолютно недалёковидная политика, если учесть, что профессиональная подготовка специалиста продолжается все время, и иметь систематизированный материал для самостоятельной проработки ему необходимо.

Зато как сорная трава разрастаются многочисленные методические пособия. Их суммарный объем намного превышает те сокращения, которые были сделаны в учебнике. Эти «методички», в которых расписано любое движение руки (не мысли) студента требуют от него только внимательности и исполнительности (возьми это число, подставь в эту формулу и т.д.), они не могут претендовать на материал для послевузовского использования, поскольку слишком сильно привязаны к учебному процессу, его делению на отдельные задания и части, специально упрощены и подогнаны под «уровень студенческого понимания». Мне представляется, что более серьезную диверсию в деле подготовки кадров для прикладных исследований было бы трудно придумать.

В качестве примера, достойного подражания, хочу указать на деталь из старого курса железобетонных мостов акад. Г.П. Передерия, который я буду цитировать по памяти. В нем, говоря о том, что в шарнирной арке усилия растут от замка к пяте, а увеличение высоты сечения в пяте еще в большей степени увеличивает усилия, автор замечает — «...инженеры поняли (не все, впрочем), что нужно увеличивать не высоту, а ширину арки в пяте». Эта фраза говорит больше о работе конструкции, чем специальная методичка. Полезно заметить, что Г.П. Передерий отрешивался от слова «учебник», исходя из того, что так следует называть книгу, излагающую основополагающие сведения, требующие заучивания. Свои книги он называл «курсом», т.е. книгами, задача которых состоит в том, чтобы научить читателя самостоятельной творческой работе [11].

При описании конструктивных решений учебник часто попросту констатирует различные факты, вместо того, чтобы объяснить из каких соображений они получаются. Вместо обучающей книги мы имеем иллюстрированный справочник (справочники тоже очень нужны, но не взамен учебников). При этом приводятся примеры только удачной

проектировки, хотя было бы полезно указать и на неудачно выполненные конструкции, объяснив в чем именно состоит неудача. По этому поводу Робертом Стефенсоном давно было сказано *«Нет ничего более поучительного для молодых инженеров, чем отчеты об авариях больших сооружений и о средствах, используемых для исправления поврежденных. Добросовестное изложение этих происшествий и способов, которыми исправляли их последствия, имеют бóльшую ценность, чем описание самых успешных работ»* [12]. Можно привести еще и мнение одного из основных разработчиков ракетно-космической техники Н.А. Пилюгина: *«Один аварийный пуск дает нам для познания и улучшения системы больше, чем десяток благополучных»* [18].

Еще один аспект проблемы — это соотношение между знанием и пониманием (вряд ли нужно доказывать, что это не одно и то же). Понимание приходит тогда, когда одному и тому же явлению дается несколько интерпретаций, сопоставляя которые можно понять значительно больше чем из самого подробного описания, независимо от формы этого описания (чертеж, схема, математическая модель и т.п.). Блестящим примером является вопрос, который Кириак Самсонович Завриев задавал своим студентам<sup>6</sup>:

*Работа несущей конструкции во многом определяется плечом внутренней пары. У фермы оно равно расстоянию между поясами, в арке — расстоянию от замка до затяжки, у купола — примерно расстоянию между вершиной и опорным кольцом. А каково плечо внутренней пары у оболочки двоякой кривизны на прямоугольном плане?*

Ответ на этот вопрос требует понимания работы конструкции «в целом», что во многом противоположно практикуемому детальному анализу напряженно-деформированного состояния. Такой анализ направлен на изучение деталей (отыскание пиков напряжений, мест с максимальными прогибами и т.п.), и

иной раз уводит от рассмотрения целостной картины явления. По образному выражению А. Пуанкаре *«...стал ли бы думать какой-нибудь натуралист, что он достаточно знает слона, если бы он всегда изучал это животное под микроскопом?»* [17, стр. 165]. Хотелось бы затронуть еще вопрос о компьютеризации образования. Как справедливо отмечается в [11], вопрос «Как использовать компьютер для обучения студентов?» глубоко ошибочен, а правильная формулировка должна быть такой «Как учить студентов в век компьютеров?»

Выработка ответа далеко не тривиальна, и при этом следовало бы учесть следующие соображения. Когда машина делает что-то за студента, он этому не учится. Эта парадигма определяет ограничения на использование промышленных программ в процессе обучения. Такие программы создаются для инженеров, они быстро и точно выполняют за него некоторую часть расчетной работы, но для их правильного применения инженер должен знать и понимать методику, положенную в основу программной разработки. Но студент не может освоить методику, используя программу, представляющую для него «черный ящик», который преобразует задаваемые исходные данные в некоторые результаты некоторым непонятным для обучающегося способом. В результате можно получить скорее вред, чем пользу.

Отсюда следует вывод, что обучающие программы должны быть построены на других принципах. В частности, может быть использован принцип максимальной прозрачности «черного ящика» с работой в пошаговом режиме (очередной шаг должен выбрать обучаемый, возможно из предложенного ему меню) и с возможным доступом к промежуточным результатам. Студент должен оценить каждый промежуточный результат и выбрать дальнейший план действий, включая возможность возврата на несколько шагов назад и изменения параметров расчета. Таким образом обучающая программа активизирует роль студента, превращая его в ли-

<sup>6</sup> Мне об этом рассказывал Л.Г.Дмитриев, ученик Кириака Самсоновича.

цо получающее и оценивающее информацию и принимающее решения.

Мне рассказали об одной интересной американской разработке такого рода, предназначенной для обучения инженеров-дорожников. Она основана на следующей педагогической посылке: «Человек обучается только на своих собственных ошибках. Поэтому дадим ему возможность ошибаться на компьютерном тренажере». Итак, обучаемому дается задание на прокладку автодороги из А в Б. Компьютер представляет карту и все необходимые справочные материалы, для указанной трассы выполняет подсчеты объемов работ и стоимость. Когда студент остановился на окончательном (как ему кажется) варианте, после небольшой паузы компьютер демонстрирует ему мультфильм, где видны возможные неприятности (перекресток обзор, слишком крутой поворот или уклон и нарисованные автомобили вылетают в кювет, буксуют при гололеде и т.п.). Мне представляется, что ценность такого обучающего тренажера несомненна.

Означает ли это, что промышленные программы вообще не должны использоваться в обучении? Конечно, нет. Мне видится, по крайней мере, два способа их использования. Первый способ, это использование такой программы в штатном режиме. Студент уже после изучения и усвоения соответствующего курса (например, строительной механики) использует программу при выполнении курсовых или дипломного проекта, экономя время на рутинных частях работы. Более интересен, на мой взгляд, второй способ, когда используя возможности программы, студент выполняет серию параметрических расчетов, исследуя влияние того или иного параметра конструкции на поведение конструкции (показатели прочности, устойчивости и т.п.). В таком режиме, в частности, могут использоваться программные продукты, входящие в пакет SCAD Office, где наиболее распространены конструктивные элементы стальных и железобетонных конструкций

могут анализироваться в режиме немедленного ответа.

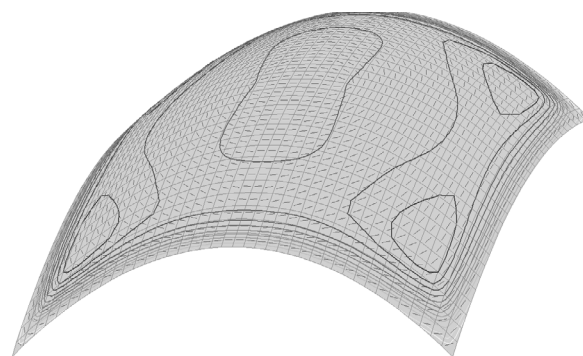


Рис. 1.

Полезна демонстрация особенностей напряженно-деформированного состояния сложных объектов. Например, показ картины распределения главных напряжений и направлений главных площадок у оболочки на прямоугольном плане (рис. 1) дает представление об общей картине поведения оболочки и позволяет ответить и на вопрос К.С. Завриева, который цитировался выше.

В заключение этого раздела заметим, что система образования, наряду с армией и церковью, является одним из самых старых и консервативных социальных институтов, которые близки между собой своей иерархичной структурой, поклонением канонам и абсолютной уверенностью в собственной исключительности и незаменимости. Кроме того, в этих организациях неуклонно соблюдается «календарный принцип» карьерного продвижения, ориентированный, главным образом, на параметры стажа. К тому моменту, когда некто достиг уровня выработки решений, ему остается только ориентироваться на свой уровень понимания проблем, а этот уровень соответствует давно прошедшему времени<sup>7</sup>. Поэтому серьезно надеяться на быстрые изменения здесь почти не приходится.

<sup>7</sup> Не зря говорится, что генералы всегда обучают методике ведения боевых действий для прошедшей войны.

## 6. О «ВУЗОВСКОЙ НАУКЕ»

Многие работники Вузов проводят научные исследования. И хотя разнообразные указания министерства высшего образования или аналогичных организаций, имеющих отношение к руководству высшей школой, нацеливают их на такую деятельность, реальным является главенствование учебного процесса. Чтобы, каким то образом совместить решение этих, не всегда совпадающих задач, высшая школа построила свою исследовательскую работу, главным образом, вокруг тех исследований, которые выполняются при подготовке диссертационных работ. Об их авторах чаще говорят «работает над такой-то диссертацией», а не «решает такую-то научную задачу», и эти формулировки весьма характерны.

Очень интересно проанализировать тематику исследований вузовской науки. Учтем, что весьма грубо тематику всех научных работ можно разделить на два больших потока: решение некоторых научных проблем (задачное направление) и совершенствование методики исследования (инструментальное направление).

В первом случае во главе угла стоит некая задача, которую необходимо решить любым способом, а если ни один из известных способов не годится, то разработать новый или усовершенствовать известный. Если задача, о которой идет речь, рождена требованиями практики (еще лучше — поставлена практиками перед исследователем), то после ее решения все проблемы «внедрения результатов» решаются достаточно просто.

Во втором случае в основе работы лежит поиск новых методов решения некоторых задач и лишь затем поиск тех проблем, к которым полученный способ может быть эффективно применен. Здесь проблема внедрения результатов иногда сильно осложняется неготовностью практиков ее использовать. Ведь против смены методологии работает привычка, а также элементы недоверия, которые возникают при использовании нового инструментария.

И все же вузовская наука заметно тяготеет к инструментальному направлению. Нетрудно понять причины этого: такое направление подразумевает несколько большую привязанность к индивидуальной работе, чем к коллективной, и в меньшей степени зависит от внешних обстоятельств. А это удобно в условиях таких относительно небольших коллективов ученых, которыми являются университетские кафедры.

Еще одной особенностью вузовской науки является ее ориентация на привлечение студентов. Ее руководители любят повторять, что главный объект внедрения научных достижений в Вузе — студент, и что работа над новыми технологиями Вузу нужна не только для решения проблем народного хозяйства, но и для формирования у будущего специалиста четкого видения всей цепочки нахождения решения — от идеи до результата. Только так можно отработать методику подготовки инженера, думающего, инициативного и самостоятельного.

Эта, в общем-то, верная идея на практике, к большому сожалению, иногда приобретает уродливые формы. Организация многочисленных конкурсов (олимпиад) научных студенческих работ оказывается такой, что либо эти работы, строго говоря, не являются научными, либо выполнены они в основном руководителями (преподавателями), либо и то, и другое вместе. Трудно сказать, что оказывается преобладающим: безусловно положительное явление приобщения к исследованию, или же сомнительный урок приобщения к авторству чужого научного исследования, когда идеи не твои, а чисто техническое участие представляется творческим.

Необходимо отметить, что сказанное выше относится к отечественной традиции. В университетах США проводится гораздо большая, чем у нас доля научных исследований, на базе Вузов там создаются национальные лаборатории, от которых затем отпочковываются малые внедренческие предприятия. При этом учитывается, что университеты

располагают более молодыми, более энергичными научными кадрами, что позволяет им добиваться существенных научных результатов, наличие молодых кадров там является одним из главных преимуществ университетской науки.

Здесь также уместно заметить, что наше привычное деление науки на академическую, вузовскую и отраслевую (по подчиненности научных учреждений) часто не понятно нашим зарубежным коллегам. Они привыкли говорить об ученых, работающих в промышленности и работающих в университетах (академии наук, как правило, не создают своих специальных институтов), при этом в обоих случаях могут решаться фундаментальные или абсолютно прикладные проблемы. Блестящим примером могут служить так называемые Лаборатории Белла (Bell Labs), созданные крупнейшей в мире частной корпорацией "Белл телефоун систем".

По замыслу своих создателей Bell Labs была первым отраслевым исследовательским учреждением, созданным для того, чтобы вытеснять настоящее, как нечто отжившее, каким бы прибыльным и эффективным оно ни казалось. И научно-технические разработки, сделавшие возможными ряд блестящих успехов в телефонии, были рождены в стенах Лабораторий Белла, в том числе, и на основе фундаментальных исследований, за которые 11 учёных центра были удостоены шести Нобелевских премий.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Наиболее известные работы: в 1933 г. Карл Янский обнаружил радиоволны, идущие из центра галактики (основание радиоастрономии); в 1947 г. изобретён транзистор, Джон Бардин, Вильям Брэдфорд Шокли и Уолтер Хаузер Брэттен были удостоены за это Нобелевской премии по физике за 1956 г.; в 1948 г. Клод Шеннон опубликовал статью «A Mathematical Theory of Communication», одну из основополагающих работ в теории информации; в 1948 г. изобретены фотоэлементы; в 1964 г. Арно Пензиас и Роберт Вильсон открыли реликтовое излучение, за что были удостоены Нобелевской премии по физике за 1978 г.; в 1970-х гг. Брайан Керниган, Деннис Риччи и Кен Томпсон разработали первые версии операционной системы UNIX и языка Си; в 1980 г. разработан первый в мире 32-разрядный микропроцессор; в 1980-х гг. Бьярне Струоструп разрабатывал язык C++.

## 7. НОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ДРУГОЕ

Имеется давняя традиция, состоящая в том, что нормативные документы по проектированию разрабатываются в научно-исследовательских институтах и, тем самым, создается тесная связь между исследованиями и нормированием. Здесь, как и в других случаях, имеется и положительная и негативная сторона вопроса. Понятно, что нормы, по замыслу своему отображающие передовую практику (в США даже существуют нормативные документы с названием типа Best practices) требуют систематизации, классификации и обобщения этой практики, что является типичной исследовательской проблемой. Но сами по себе нормы адресованы не исследователям, о чем часто забывают их разработчики из НИИ. Кроме того, существует соблазн «внедрения через нормы», когда в нормативные документы попадают результаты исследований, выполненных силами института-разработчика (в принципе в этом ничего плохого нет), но еще не нашедшие своего точного места в структуре всех требований, представляемых нормами. Появляются внесистемные островки, на которых «продвинутость» проблемы имеет значительное опережение, по сравнению со средним уровнем документа, что сильно затрудняет использование документа в целом. Существует и обратная связь между нормированием и прикладной наукой. Многие исследования выполняются применительно к лозунгу «нормы требуют», и зачастую в научных спорах это может прозвучать как аргумент в пользу одной из точек зрения. Выдумайте только — не истина фиксируется в нормативном документе, а нормативный документ создает истину. По крайней мере так звучали многие доводы в спорах об определении расчетных длин элементов, когда в Пособие [13] были включены «исправленные» формулы, с помощью которых снимался вопрос о чрезмерных гибкостях недогруженных стоек в верхних этажах

многоэтажных рам, вместо того, чтобы отказаться от жесткого нормирования предельных гибкостей малонагруженных стержней (или, вообще, перевести указания о значениях предельных гибкостей из разряда обязательных в разряд рекомендуемых). Таким же образом на совершенно эклектичном уровне принимались решения об использовании критерия ограниченных пластических деформаций, который не следует ни из какой теории пластического течения, а основывается на анализе весьма частного случая изгибаемой упругопластической балки.

И дело даже не в том, что нарушена стройность теории. Нет, конечно, можно представить себе, что многие указания норм являются по сути полуэмпирическими, однако этот факт впоследствии забывается и, освященные грифом «Утверждены и введены в действие ...», такие положения затем воспринимаются как истина в последней инстанции.

Мне представляется, что одной из важных задач прикладной науки является четкое описание всякого рода упрощающих предположений и компромиссов, содержащихся в нормативных документах. Отсутствие таких описаний затрудняет не только сознательное использование норм, но и делает практически невозможным их научное рецензирование. По традиции проект нормативного документа направляется на отзывы в ряд исследовательских и проектных организаций, но если последние могут легко оценить ряд особенностей нового документа (полноту, удобство использования, ясность изложения и т.п.), то оценка научной обоснованности довольно затруднительна без четкого описания принятых предпосылок. А такое описание обычно отсутствует в краткой пояснительной записке, прилагаемой к рассылаемому проекту.

Привлечение ученых к созданию нормативных документов является абсолютно естественным решением органов, отвечающих за нормативное обеспечение. Сложность здесь состоит в том, что текст норм предназначен не для читателя-ученого, которому многие из

разработчиков привыкли адресовать свои публикации, а для практикующего инженера. Понять его психологию и смоделировать реакцию на предлагаемый текст иногда чрезвычайно трудно. Очень доходчиво эта ситуация представлена в одном из американских руководств по управлению автомобилем: *«Когда ты вздумаешь выехать на проезжую часть, помни, что ты не единственный идиот среди сидящих в данный момент за рулем»*. Приходится все время помнить об этих других «идиотах» (проектировщиках, контроллерах, администраторах и т.д.) и мысленно моделировать их реакцию на предлагаемый текст.

Нучно-исследовательские работы, направленные на создание нормативных документов, являются только одним из целого ряда примеров, когда наука привлекается для обслуживания органов государственного управления.

Сейчас многие высокопоставленные бюрократы стремятся заручиться «научным обоснованием» своей деятельности и готовы финансировать именно такие (а часто — только такие) работы. Отсюда идет буйный расцвет такого жанра научного творчества, как «аналитические записки», подготавливаемые для органов государственного управления и иллюстрирующие важность некоторых задач, которыми занимается то или иное ведомство. Обычно такие записки являются профессионально подготовленными справками по определенной конкретной проблеме и весь научный анализ сводится только к подбору фактов. Анализ в прямом смысле этого слова, т.е. выявление причин, лежащих в основе приведенных фактов, редко возникает в процессе работы над такими записками, и если он представлен, то чаще всего является заимствованным.

Как и в случае творческой инженерной работы, я ничего не имею против такого рода деятельности, но и здесь возникает вопрос — является ли составление аналитических записок научно-исследовательской работой? Чаще всего нет, хотя готовятся и подписыв-

ваются они лицами с учеными степенями и званиями. Здесь они выступают в роли освещенных специалистов, а не исследователей, и этот факт должен четко осознаваться.

## 8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Говоря об информатике, полезно помнить лаконичную формулировку проспекта Программы политики в области информационных ресурсов Гарвардского университета: *“Без материалов ничего не существует. Без энергии ничего не происходит. Без информации ничто не имеет смысла”* [14]. Последняя фраза этой триады определяет тот интерес, который имеется по отношению к методам использования информации, т.е. к информационным технологиям.

Становление и победное шествие информационных технологий в техническом творчестве происходило на глазах автора настоящих заметок и в некоторой мере при его участии. От первых победных реляций типа «эта задача решена с помощью ЭВМ» (нужно сказать, что речь шла о достаточно скромных по современным меркам задачах) до современного умолчания, подразумевающего «а как же иначе можно вообще решать такие задачи» прошло совсем немного времени.

Если попытаться подвести некоторые итоги, то оказывается, что менялась не только вычислительная техника (а ее изменения огромны), но и психология создателей и пользователей информационных ресурсов (и эти изменения намного скромнее). Представляется, что очевиден некоторый кризис, основанный на этой разнице уровней развития.

Далее мы будем исходить из определения информации как преобразованной формы знания, отчужденного от непосредственного владельца и перенесенного на какой-либо материальный носитель. С такой точки зрения профессиональная деятельность автора имела отношение как к самому началу этой

цепочки (приращению знаний в результате научных исследований), так и к ее концу (перенесению информации на материальный носитель в форме публикации или в форме программного продукта).

Интересно проанализировать место информации в ряду продуктов и услуг как результатах процессов производства. Особенности информации как продукции, произведенной для удовлетворения тех или иных потребностей индивидуальных либо групповых субъектов, достаточно полно учитываются в следующем определении. Информацией (информационным продуктом, интеллектуальным продуктом, продуктом духовного или нематериального производства и т. п.) будем называть вещь или действие (продукт или услугу), которые:

- предназначены их производителем для доставки определенного знания получателю;
- способны пополнить знания последнего без проведения им каких-то специальных, нетипичных для него познавательных действий, то есть, как правило, знания должны восприниматься непосредственно: чтением, наблюдением, слушанием.

Только те данные являются информацией для потребителя, которые восприняты им, понятны ему и, наконец, полезны, хотя бы потенциально, для решения какой-то задачи или проблемы. Информация сегодня рассматривается в качестве одного из важнейших ресурсов развития общества наряду с материальными, энергетическими и людскими. Понятно, что информация всегда была ресурсом, но лишь совсем недавно она заняла то место, которое в общественном производстве всегда занимали материя и энергия. Отметим основные особенности информационного продукта, которые кардинально отличают информацию от других товаров. Во-первых, информация не исчезает при потреблении, а может быть использована многократно. Информационный продукт сохраняет содержащуюся в нем информацию,

независимо от того, сколько раз она была использована. Это свойство информации — неуничтожимость — можно проиллюстрировать известной притчей Б.Шоу: *«Если у вас есть яблоко, и у меня есть яблоко, и если мы обмениваемся этими яблоками, то у вас и у меня останется по одному яблоку. А если у вас есть идея, и у меня есть идея, и мы обмениваемся идеями, то у каждого из нас будет по две идеи».*

Во-вторых, информационный продукт со временем подвергается своеобразному «моральному износу». Хотя информация и не изнашивается при употреблении, но она может терять свою ценность по мере того, как предоставляемое ею знание перестает быть актуальным. В различных областях науки и техники темпы обесценения знания неодинаковы, процесс «старения» информации может длиться от пяти до пятнадцати лет. Благодаря свойству старения, потребность в информационном продукте никогда не может быть удовлетворена раз и навсегда.

В-третьих, производство информации, в отличие от производства материальных товаров, требует заметно больших затрат по сравнению с затратами на тиражирование. Копирование того или иного информационного продукта обходится, как правило, намного дешевле его производства. Это свойство информационного продукта — трудность производства и относительная простота тиражирования — создает немало проблем в связи с определением прав собственности в рамках сферы информационной деятельности.

В этом, в частности, проявилась неготовность всей экономической инфраструктуры человечества к эре информационных технологий. Например, такое принципиальное понятия, как стоимость производства (продажная цена, прибыльность и т.п.), вырабатывалось исторически в то время, когда практически все, что производилось, подчинялось закону сохранения энергии и материи. Следовательно, неявно имелось в виду, что создать материальную ценность

можно только затратив некоторое количество материала и энергии, стоимость которых во многом определяла стоимость продукции. А когда такого типа затраты практически отсутствуют, то начинаются совершенно новые игры, которые и приводят к тому, что список самых богатых людей планеты возглавляют боссы информатики. Возможность ситуации отсутствия стоимости, но наличия цены, вообще говоря, известна (вспомните некоторые выдающиеся произведения искусства и их продажу на аукционе Сотби). Но ранее это было исключением, а по отношению к продукции информационных технологий становится массовым явлением.

В качестве еще одной важной особенности укажем на такую черту как противоречие между кажущейся (можно сказать и действительной) легкостью использования информационных технологий в техническом творчестве и проблемой оценки результата, полученного вне зоны человеческого контроля. Человеку свойственно ошибаться, человеку вооруженному компьютером — не менее. И если ранее, проверка на безошибочность во многом была связана с контролем над промежуточными результатами, то выдаваемое современной программной системой техническое решение (чертеж, расчет и т.п.) предстает чаще всего сразу в завершенной форме, а все промежуточные шаги, приведшие к такому решению, остаются «внутри машины».

Наиболее опытные пользователи информационных технологий давно поняли несправедливость стандартной рекламной фразы типа: «Купите нашу программу, и то, что ранее у вас делал высокооплачиваемый инженер, сможет сделать простой техник». Использование компьютерного проектирования не понижает, а повышает требования к уровню квалификации людей, ответственных за использование информационных технологий. Правда, помощники таких людей, выполняющие рутинную часть работы, могут быть менее квалифицированными специали-

стами в той предметной области, где используется программный продукт.

Остаются справедливыми слова Р.А. Резникова: «*В прежние времена ошибки исследователей оседали на страницах научных публикаций и спокойно лежали на библиотечных полках. Появление ЭВМ позволило их тиражировать и широко внедрять в проектную практику*». К ним можно только добавить, что анализ ошибок, тиражируемых программными средствами, стал важной частью работы научного сообщества. И еще одна проблема — заимствования конструкторских идей, технических решений, использование прототипов и т.п. Все это относится к сфере интеллектуальной собственности, а относимый к ней, сложившееся в мировой практике, очень неоднородно. Всемирная организация интеллектуальной собственности определяет ее как права, относящиеся к: литературным, художественным и научным произведениям; исполнительской деятельности артистов, звукозаписи, радио и телепередачам; изобретениям во всех областях человеческой деятельности; научным открытиям; промышленным образцам; товарным знакам, знакам обслуживания, фирменным наименованиям и коммерческим обозначениям; защите против недобросовестной конкуренции и все другие права, относящиеся к интеллектуальной деятельности в производственной, научной, литературной и художественной областях [15].

В соответствии с этим определением можно заключить, что на интеллектуальную собственность распространяется авторское и изобретательское право. «Научного права» в мировой практике не существует, что вызывает проблемы, связанные с приданием товарной формы продуктам интеллектуальной деятельности. Если для материальных продуктов форма представления однозначно связана с внутренней сущностью, то сущность научного результата мало зависит от формы представления. В то же время по канонам авторского права один и тот же результат, выраженный по-разному, может

иметь самостоятельную ценность. Защита здесь представляется не содержанию, а внешней форме, что предотвращает копирование, но не препятствует заимствованию содержания.

Различного рода художественные произведения «по мотивам» или ремейки спектаклей и кинофильмов ярко свидетельствуют об этом. Заимствуются не только сценарии, но и многие художественные детали первоначального образца (здесь трудно не упомянуть архитекторов, где такое заимствование распространено чрезвычайно широко).

С другой стороны, появились такие примеры защиты авторских прав, как описание алгоритма решения той или иной математической задачи в форме схемы некоего прибора, который реализует логическую схему этого алгоритма. Такого рода «материализация идеи» достаточно просто реализуется в схеме из источников тока, сопротивлений, транзисторов и т.п.

## 9. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Известна старая шутка, которая говорит, что теоретическим результатам обычно никто не верит, кроме автора, а экспериментальным результатам верят все ... кроме автора.

О необходимости экспериментального обоснования правильности используемых расчетных моделей писалось и говорилось бесчисленное число раз (см., например, [1] — [2]), и иногда это приводит к выполнению некоторых поверочных экспериментов. Наблюдается и обратное — авторы экспериментальных исследований, желая показать, что измеренные ими значения являются достоверными и обладают некоторой общностью, проводят выборочные сопоставления с так называемыми «теоретическими результатами», в качестве которых чаще всего выступают данные некоторого общепринятого расчета.

В обоих случаях важную роль играет методология сопоставления расчетных и экспе-

риментальных данных, которая, к сожалению, оставляет желать лучшего. Интерпретация результатов эксперимента чаще всего сводится к выборочному сопоставлению некоторых измерений с результатами расчета и выводам типа «...наблюдается хорошее соответствие», «...данные качественно совпадают» или же, в лучшем случае, «... расхождение не превышает столько-то процентов». Достаточно типичной иллюстрацией может служить заимствованный из одной научной публикации рис. 2, где в графической форме проводится такое сопоставление.

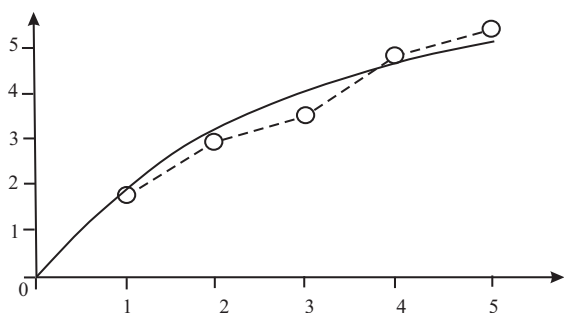


Рис. 2.

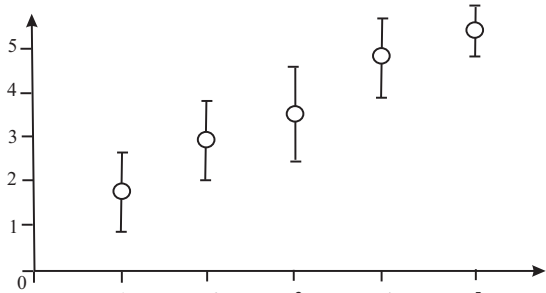


Рис. 3.

Если же обратиться к представленной на рис. 3 схеме экспериментальных результатов, где кроме средних значений приведены и характеристики разброса (к сожалению, чаще всего такие схемы отсутствуют), то нетрудно видеть, что экспериментальным данным могут соответствовать и другие теоретические закономерности, например, такая, что приведена пунктиром на рис. 4.

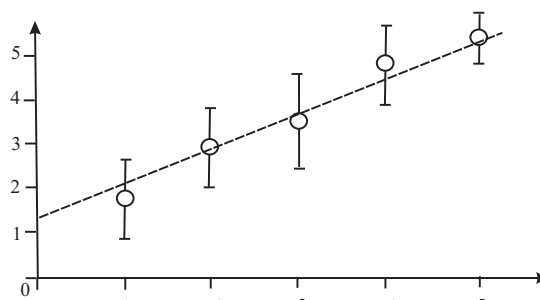


Рис. 4.

Если трактовать единичный эксперимент, как проверку некоего теоретического положения примером его применения, то следует помнить, что и сотни примеров не могут служить доказательством правильности некоей теоремы, в то время как для ее опровержения достаточно одного примера. Не зря физики говорят, что чем дальше эксперимент от теории, тем он ближе к Нобелевской премии.

В нашей отрасли экспериментальные исследования чаще всего проводятся для выяснения только одного вопроса: «Когда сломается?» и очень редко с дополнением «Как сломается?» Как будто другие вопросы природе задавать не имеет смысла. Эта традиция во многом опирается на логику расчета конструкций по методу расчетных предельных состояний, но эта логика не является абсолютно универсальной.

Действительно, интересуясь только предельным состоянием конструкции и принципиально игнорируя все другие ее состояния, трудно говорить о тех качествах конструкции, которые не связаны с исследованием модели поведения в координатах «нагрузка – прочность». Да и в этих координатах, зачастую теряются многие особенности поведения конструкции, особенно изменения во времени.

Приняв, например, за одно из предельных состояний условие прочности и запроектировав конструкцию так, чтобы с определенной степенью уверенности можно было говорить, что в течение всего срока службы это условие не будет нарушено, мы ничего не можем говорить о том, какой уровень факти-

ческих напряжений будет соответствовать нормальному (непредельному) состоянию при наиболее часто реализующихся условиях эксплуатации. И с этой точки зрения почти равноправными могут оказаться конструкция плотины, обычный уровень нагружения которой не очень далек от расчетного (например, он составляет 80% расчетного), и конструкция телевизионной башни, у которой появление расчетной нагрузки является весьма редким событием, а обычное нагружение соответствует, например, 15% расчетного. Такое «равноправие» правомочно с точки зрения исчерпания прочности, но совершенно несправедливо для оценки деградиационных процессов или для оценки риска, связанного с появлением некоего дополнительного (не учитываемого обычными проектными расчетами) возмущения.

Возвращаясь к проблеме экспериментального анализа работы конструкции, полезно немного порассуждать и о численных экспериментах, которые все более формируют современный образ научного исследования. С физическим экспериментом наиболее тесно связана вероятностная симуляция явлений, поскольку большинство в основе используемых распределений вероятностей (нагрузок, прочностных свойств и т.п.) в конце концов находятся эмпирические факты и измерения.

Поскольку в большинстве практически важных случаев нас интересуют редкие события, то иногда приходится экстраполировать в область малых и очень малых вероятностей те вероятностные распределения, которые хорошо обоснованы экспериментальным материалом лишь в области немалых вероятностей. Для такой экстраполяции используются сведения о теоретических свойствах распределений (например, асимптотические распределения экстремальных значений).

Если же оценки далекой асимптотики неизвестны и выводы в области малых вероятностей получены, например, простым

машинным моделированием поведения конструкции на основе метода Монте-Карло или его модификаций, то это не может не настораживать исследователя. Дело в том, что при этом обычно моделируется некоторое теоретическое распределение  $F(x)$ , которому якобы подчинены исходные данные рассматриваемой задачи. А вид закона распределения  $F(x)$  очень часто постулируется достаточно умозрительно.

Не имея ничего против метода Монте-Карло по существу и понимая его достоинства, связанные, главным образом, с универсальностью, автор хотел бы предостеречь от переоценки результатов, полученных с помощью этого метода, если эти результаты никак дополнительно не анализировались. Сказанное особенно важно для тех случаев, когда речь идет о вероятностях порядка  $10^{-6}$  и ниже при оценке эффектов явлений и процессов, которые сами по себе недостаточно исследованы теоретически.

Конечно, не всякое значение очень малой вероятности должно нас настораживать. Имеется немало ситуаций, когда в задаче присутствуют несколько входных параметров, функции которых хорошо обоснованы имеющимися эмпирическими данными, и их значения, используемые в расчете, лежат в диапазоне не очень малых вероятностей. Совместное использование таких входных параметров в рамках корректной расчетной модели может привести и к результатам с весьма малыми вероятностями, но к ним нельзя предъявить претензий о необоснованности. По сути важным является лишь одно соображение: во всяком вероятностном выводе необходима согласованность с лежащей в основе анализа первичной статистикой данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшулер Г.С. Алгоритм изобретения. — М.: Московский рабочий, 1969. — 126 с.

2. Большепролетные покрытия. Анализ и оценка: Учебное пособие / **Н.Н.Никонов**.— М.: Изд-во АСВ, 2000.— 400 с.
3. **Джонс Дж.К.** Инженерное и художественное проектирование. Современные методы проектного анализа.—М.: Мир, 1976.—
4. **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики.— М.: Наука, 1983.— 328 с.
5. **Абовский Н.П.** Управляемые конструкции и нейрноподобные системы // Пространственные конструкции в Красноярском крае. Сборник научных трудов.— Красноярск: КрасГАСА, 1998.—С. 57–72.
6. **Проскуряков М.Н.** Метод оценки критических состояний конструкции // Строительные конструкции. Вып.1. Расчет сооружений.— М.: ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко, 1969.— С. 239–244.
7. **Masri S.F., Bekoy G.A., Udwardia F.E.** On-line pulse control of tall building // Structural Control. Proceeding International IUTAM Symposium, Ontario, 1979.— Amsterdam: 1980/
8. **Коршунов Д.А.** Теория железобетона: немного истории и реальная перспектива // Бетон и железобетон в Украине, 2001, №3.— С. 2-3.
9. **Эрнст Мах.** Механика. Историко-критический очерк ее развития.— Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.— 456 с.
10. **Адлер Ю.П., Грановский Ю.В., Мультченко З.М.** Статистический анализ публикаций по планированию эксперимента // Новые идеи в планировании эксперимента. Под ред. В.В.Налимова.— М.: Наука, 1969, с. 315-334.
11. **Владимирский С.Р.** Спасение гения: Заметки о мостостроительном образовании.— СПб.: 2000.— 300 с.
12. **Сендеров Б.В., Барков Ю.В.** Повреждения зданий и меры их предотвращения.— М.: Знание, 1986.— 34 с. (Сер. Строительство и архитектура).
13. Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81\*) / ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко Госстроя СССР.— М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989.— 148 с.
14. The Programme of Information Resources Policy. Harvard University. Centre for Information Policy Research. Cambridge, 1989.
15. **Боденхаузен Г.** Парижская конвенция по охране промышленной собственности. М., 1977.—283 с.
16. **Томсон Д.** Дух науки.— М.: Изд-во «Знание», 1970.— 176 с. Шрейдер Ю.А. Свобода как условие развития науки // Вопросы философии. 1989. № 4.— С. 85—87.
17. **Пуанкаре А.** О науке. — М.: Наука, 1983.— 560 с.
18. **Черток Б.Е.** Ракеты и люди. Лунная гонка, — М.: РТСофт, 2004.—..544 с

---

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член РААСН, профессор, доктор технических наук, НПО СКАД Софт,  
03037, Украина, г.Киев, ул. Освиты, дом 3а, офис 2;  
e-mail: avp@scadsoft.com.

Anatolii V. Perelmuter, Foreign member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, SCAD Soft, Ltd,  
3a, Osvity street, office 2, Kiev, 03037, Ukraine;  
e-mail: avp@scadsoft.com.

## РОЛЬ ПАРАДОКСОВ В ОЦЕНКЕ КОРРЕКТНОСТИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

*Л.С. Ляхович<sup>1</sup>, А.В. Перельмутер<sup>2</sup>, В.И. Сливкер*

<sup>1</sup> Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

<sup>2</sup> НПО «СКАД Софт», г. Киев, УКРАИНА

**АННОТАЦИЯ:** Обсуждаются парадоксы, причины их появления и роль в оценке корректности расчетных моделей. На примерах из строительной механики показано, что появление некоторых парадоксов связано с выбором расчетных моделей, не вполне учитывающих особенности реального объекта. Отмечено, что некоторые особенности реального объекта, незначительно влияющие на результаты расчета в одних случаях, могут качественно изменить результат в других и что парадокс может исчезнуть при малом изменении условий расчета или наблюдения. Наличие парадокса стимулирует к новым исследованиям, более глубокому осмыслению теории, её «очевидных» постулатов и иногда приводит к полному её пересмотру.

**Ключевые слова:** парадоксы, устойчивость, собственные колебания, неконсервативные системы, плоская форма изгиба, диссипация, дестабилизация, предельная нагрузка, пластический шарнир, грубая система

## ROLE OF PARADOXES WHEN ESTIMATING THE CORRECTNESS OF DESIGN MODELS

*Leonid S. Lyakhovich<sup>1</sup>, Anatolii V. Perelmuter<sup>2</sup>, Vladimie I. Slivker*

<sup>1</sup> Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

<sup>2</sup> SCAD Soft, Ltd, Kiev, UKRAINE

**Abstract:** Paradoxes, the causes of its occurrence as well as its role when estimating the correctness of design models have been considered by this paper. Using examples of structural mechanic it has been shown that occurrence of the some paradoxes is caused by choice of the design models which do not take into account properly the particularities of the real design object. It has been noted that some particularities of the real object having an insignificant influence on calculation results in one design cases, can change the results qualitatively in another design cases. Paradox can vanish when small changing in conditions of calculation or observations. Presence of paradox creates incentives for new investigation, for deeper comprehension of theory, its «evident» postulates, and sometimes leads to the complete revision of it.

**Key words:** paradoxes, stability, eigenmodes, non-conservative systems, lateral-torsional buckling, dissipation, destabilization, ultimate load, plastic hinge, rough system.

### 1. ПАРАДОКС ПАРАДОКСУ РОЗНЬ

Парадоксальные результаты, к которым приводит анализ поведения некоторых механических систем (точнее, их расчетных моделей), широко известны. Пожалуй, наилучшим образом коллекция парадоксов представлена в работах Я.Г. Пановко [5], [6], ряд парадоксальных решений указал в своей работе [11] В.И. Феодосьев, имеются и другие

публикации (см., например, [2], [3], [7], [9]). И что же, все эти результаты являются попросту развлечением, некоторой игрой ума научных работников? Или же за ними кроется более глубокое содержание?

В самом широком смысле под парадоксом понимают высказывание, которое расходится с общепринятым мнением и кажется нелогичным (зачастую лишь при поверхностном понимании). Наличие парадокса стимулирует к

новым исследованиям, более глубокому осмыслению теории, её «очевидных» постулатов и иногда приводит к полному её пересмотру. Нам представляется, что следует отметить два различных типа парадоксов:

а) парадоксальные результаты опытов или расчетов, связанных с выходом в такую область параметров, для которых привычные методы анализа и предсказания уже неприменимы — такой парадокс указывает на ограниченность наших знаний;

б) парадокс реализуется только в некоторых исключительных обстоятельствах и он исчезает при малом изменении условий расчета или наблюдения — такой парадокс указывает на несовершенство (недостаточную общность) подхода к проблеме.

Классическим примером парадокса первого типа может служить опыт Майклсона, в котором было установлено, что привычное правило суммирования скоростей не срывает, когда речь идет о скорости света. Однако парадоксов такого типа относительно немного, и чаще всего мы имеем дело с парадоксами второго типа, которые часто называют апориями<sup>1</sup>.

Далее мы приведем примеры из более близкой нам области науки, а именно из строительной механики.

## 2. ПРИМЕРЫ ПАРАДОКСОВ ПЕРВОГО ТИПА

### *Предельная нагрузка упруго-пластической балки*

При решении задачи предельного равновесия методом пластических шарниров можно

<sup>1</sup> Из Википедии: Парадокс (от древнегреческого παράδοξος — неожиданный, странный) это ситуация (высказывание, утверждение, суждение или вывод), которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения. Следует различать парадокс и апорию. Апория, в отличие от парадокса, является логически верной, ситуацией (высказыванием, утверждением, суждением или выводом), которая не может существовать в реальности.

указать на парадокс, обнаруженный Казинчи [133]. Схема представлена на рис. 1.

Если мы сравниваем предельную нагрузку двух систем, показанных на этом рисунке, то она оказывается вдвое большей для трехпролетной балки, чем для простой шарнирно опертой балки. Однако, про беспредельном увеличении крайних пролетов ( $l_i \rightarrow \infty$ ) защемление среднего пролета исчезает и трехпролетная балка становится практически эквивалентной простой шарнирно опертой балке. Этот факт не улавливается при анализе методом пластических шарниров.

Только через двадцать лет Саймондс и Нил аккуратно объяснили этот парадокс [144]. Они исследовали перемещения в упруго-пластическом стержне и обнаружили, что при непрерывном росте величины крайних пролетов прогиб в центре среднего пролета также имеет тенденцию к бесконечному увеличению, и это означает, что вычисления предельной нагрузки теряют свой смысл. Так был указан определенный предел применявшемуся методу анализа.

### *Устойчивость плоской формы изгиба при действии моментов*

Предполагается, что внешний момент порождается парой мертвых сил, когда эти силы не меняют своей ориентации в пространстве и своей величины, т.е. система является консервативной и задача может решаться в статической постановке.

Если рассмотреть набор задач об устойчивости плоской формы изгиба консольного стержня под воздействием моментов, (рис 2), то получаем неожиданный результат [8] — критическое значение момента,

$$M_{cr} = \pm \frac{K}{l} \sqrt{EI_z GI_x}$$

заданного по-разному сконструированными парами сил, зависит от способа его реализации. При этом коэффициент  $K$  меняется в широких пределах.

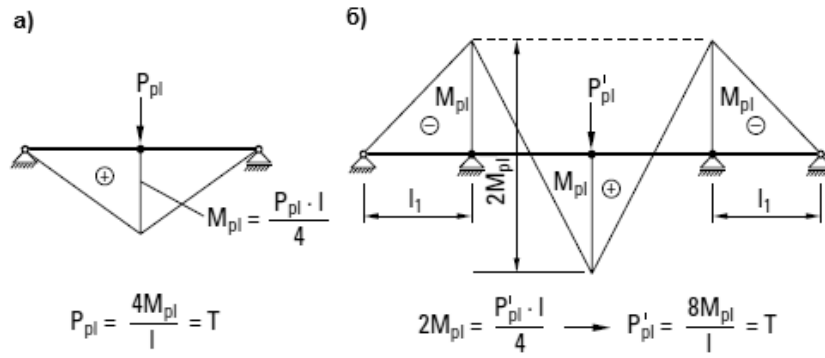


Рис. 1. Упруго-пластические решения.

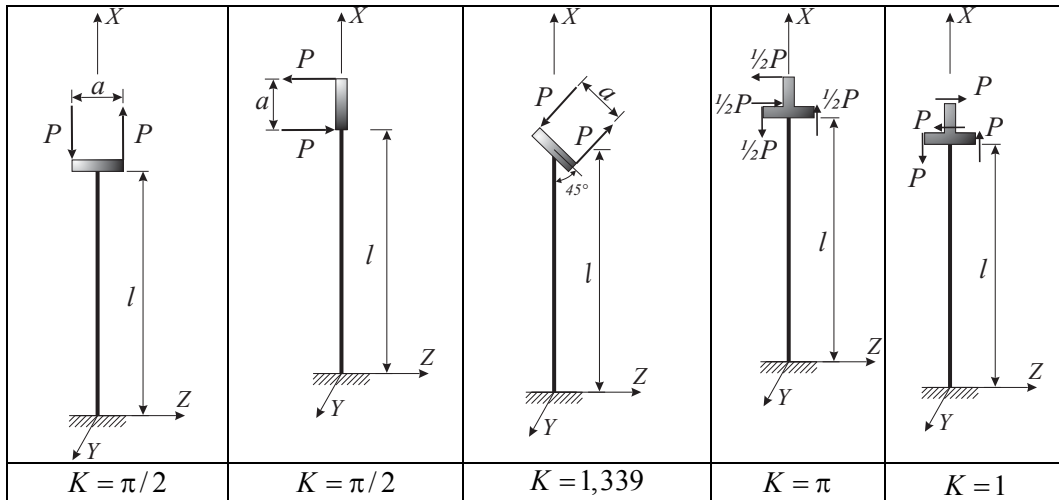


Рис. 2. Варианты реализации моментной нагрузки.

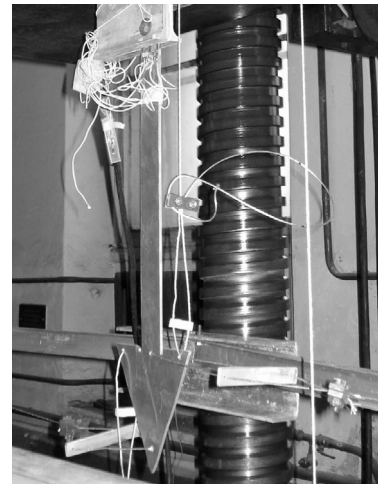
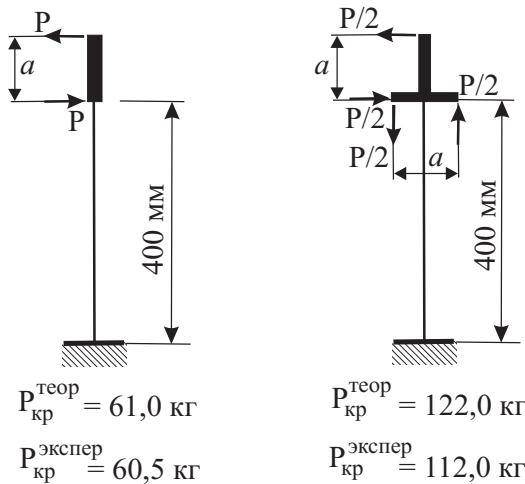


Рис. 3. Экспериментальная проверка устойчивости равновесия консольного стержня.

Столь неожиданный результат был проверен экспериментально проф. Белым Г.И. в испытательной лаборатории кафедры стальных конструкций СПбГАСУ, что подтвердило совпадение теоретического решения с данными эксперимента (рис. 3).

Здесь в основе парадокса лежит незаконный перенос представлений о поведении пары сил с плоского на пространственный случай. В случае плоской задачи момент, вызываемый парой мертвых сил, остается постоянным и в смещенном состоянии, а в простран-

ственном случае компоненты этого момента меняются при деформировании из первоначальной плоскости. Математически корректный анализ [8] показывает, что при конечных поворотах узлов в качестве обобщенной силы, отвечающей этим поворотам как обобщенным перемещениям, выступают так называемые обобщенные моменты (или  $L$ -моменты). В линейных задачах, а также в нелинейных, но двумерных задачах, различие между обобщенными и обычными моментами исчезает, но в трехмерных задачах это не так.

### 3. ПРИМЕРЫ ПАРАДОКСОВ ВТОРОГО ТИПА

#### *Неконсервативные внешние силы и диссипация.*

Добавление демпфирующих сил к модели консервативной системы неспособно дестабилизировать систему, но этот эффект может отсутствовать в неконсервативной системе. Оказалось, что *введение в систему сколь угодно малого вязкого трения приводит к уменьшению критической силы скачком на конечную величину*. Эта особенность влияния демпфирования на неконсервативные системы получили название *парадокса Циглера*. В случае потенциальной нагрузки, напротив, граница области устойчивости, полученная при исчезающе малом трении, совпадает в пределе с границей устойчивости, определенной в предположении, что трение тождественно равно нулю. Для системы же с неконсервативными внешними силами получается, что оценка устойчивости зависит от того, на каком этапе анализа было сделано предположение об отсутствии демпфирования: сразу же при построении расчетной модели или при анализе решения, найденного с учетом демпфирования для частного случая  $\beta \rightarrow 0$ . Область устойчивости на полуплоскости  $(p, \beta)$  изображена на рис. 4. На этом рисунке символом  $p_{0,cr}$  обозначена критическая нагрузка, вычисленная в предположении отсутствия диссипации, тогда как  $p_{cr}(0)$  это

критическая нагрузка в системе с исчезающе малой диссипацией.

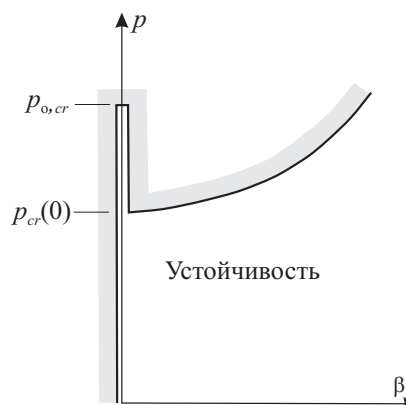


Рис. 4. Дестабилизирующее влияние вязкого трения.

Представленная на рис. 4 область устойчивости по образному выражению авторов работы [5] имеет «*бесконечно узкий аппендикс, отходящий от материка устойчивости и омываемый с обеих сторон морем неустойчивости*». Отсюда можно заключить, что состояния равновесия, соответствующие участку  $[p_{cr}(0), p_{0,cr}]$  нельзя считать устойчивыми в полном смысле этого слова, поскольку их «устойчивость» разрушается любым сколь угодно малым трением; такие состояния называют *квази- или псевдоустойчивыми*».

Более детальные исследования показали, что квазиустойчивые состояния равновесия практически неустойчивы и учет диссипативных свойств в неконсервативных задачах, по-видимому, является столь же обязательным, как и учет начальных геометрических несовершенств в задачах устойчивости тонкостенных конструкций под действие консервативных сил. Подобно тому, как начальные геометрические неправильности могут в разы изменить оценку критических сил, полученную для идеальной системы, для упругой неконсервативной системы малое вязкое сопротивление, являющееся своего рода возмущением, может иметь исключительно большое влияние.

Естественно, окончательный ответ должен был принадлежать эксперименту, но хотя

число известных экспериментальных исследований устойчивости неконсервативных систем относительно невелико, они практически не зафиксировали явления типа парадокса Циглера.

Анализ этого парадокса приводит к утверждению, что возмущения должны испытывать все параметры задачи (коэффициенты дифференциальных уравнений при производных всех порядков, начальные и граничные условия). При этом расчетная модель должна отображать все известные элементы рассматриваемой задачи, даже те, которые обычно могут не учитываться в силу малого влияния (для задач устойчивости консервативных стержневых систем, например, — демпфирование, моменты инерции вращения поперечных сечений, сдвиговая податливость и т.п.). И если при этом в некотором частном случае обнаруживаются парадоксальные результаты, то это означает, что обнаружена неполнота наших знаний о проблеме.

### ***Ложная основная система***

Как известно, критические нагрузки потери устойчивости и частоты в задаче о собственных колебаниях определяются при отыскании нетривиального решения однородной системы канонических уравнений устойчивости. Существование нетривиального решения связано с обращением в нуль детерминанта этой системы, что при использовании метода сил записывается как

$$D_{\delta} = |\delta_{ij}(P)| = 0,$$

а при использовании метода перемещений — как

$$D_r = |r_{ij}(P)| = 0.$$

Аналогично решаются такие задачи и в смешанном методе. Корнями этих уравнений являются лишь те решения, у которых хотя бы одно неизвестное не равно нулю.

Но оказывается, что существуют и другие критические значения (собственные частоты). Они реализуют такую собственную форму, у которой все неизвестные усилия (метод сил) или перемещений (метод перемещений) равны нулю. По отношению к этим решениям основная система, с помощью которой строились канонические уравнения является ложной. Впервые понятие ложной основной системы было введено А.Ф. Смирновым [9].

Простейший пример представлен на рис. 5. Поскольку форма потери устойчивости такова, что опорные моменты равны нулю (из за равенства пролетов углы поворота одинаковы слева и справа от опоры), то введение шарниров в основной системе не меняет картину напряженно-деформированного состояния этой формы потери устойчивости и она становится скрытой.

Приведем простой пример ложной основной системы метода перемещений в задаче о собственных колебаниях. Очевидно, что вторая и любые другие четные формы собственных колебаний балки (рис. 6-б) не будут вызывать поворота сечения над промежуточной опорой. Поэтому такие формы будут скрытыми и выбранная основная система метода перемещений (рис. 6-а) в этом случае не обнаружит четных частот.

Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Как и в предыдущем случае, небольшое изменение условий задачи (нарушение симметрии) ведет к исчезновению замеченного эффекта и, казалось бы, что следует попросту избегать суперсимметричных (суперрегулярных) расчетных моделей, поскольку в реальной жизни эти идеальные условия не наблюдаются. Но при этом часто теряется удобство составления расчетной схемы и, кроме того, возникает нетривиальная проблема подбора требуемых возмущений. Более логичным является уточнение алгоритма отыскания собственных значений, учитывающего возможность появления ложной основной системы [4].

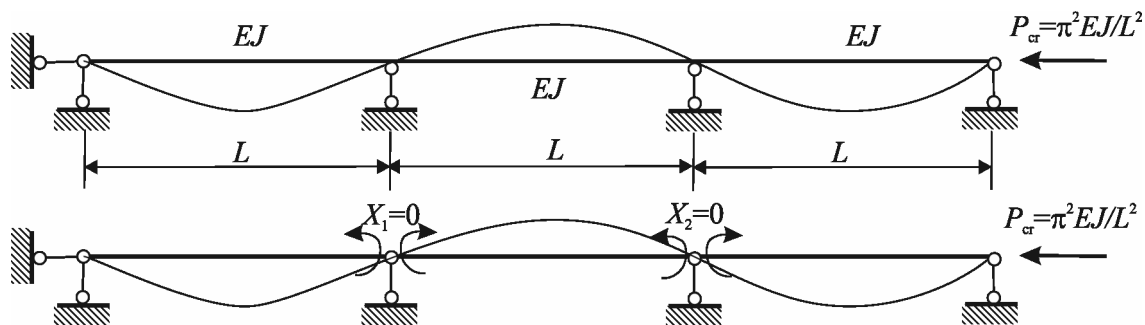


Рис 5. Пример ложной основной системы метода сил.

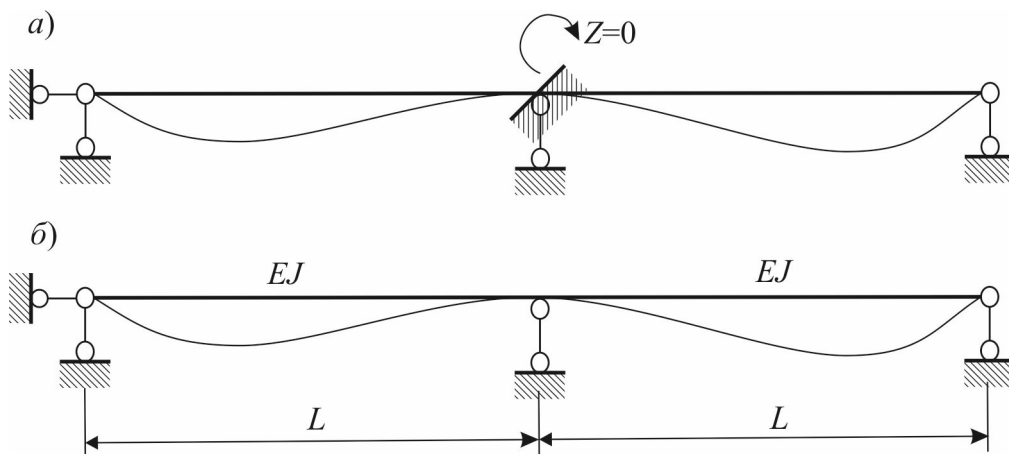


Рис. 6. Пример ложной основной системы метода перемещений.

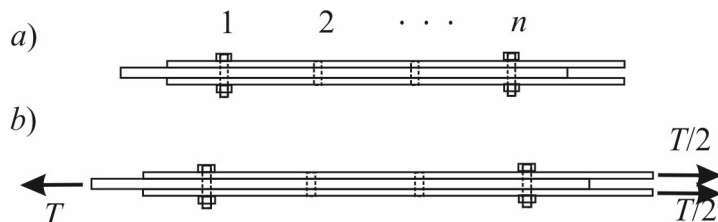


Рис. 7. Работа многорядного фрикционного соединения.

**Многорядное фрикционное соединение на высокопрочных болтах**

Рассмотрим упрощенную модель многорядного болтового соединения, передающего продольную силу  $T$  и состоящее из металлических полос. Полосы соединены высокопрочными болтами, которые затянуты так, что сила  $T$  может передаваться усилиями сухого трения. Будем полагать, что в заготовке просверлено  $n$  отверстий, но болты установлены лишь в крайних отверстиях с номерами 1 и  $n$  (рис. 6,а). Остальные отверстия с номерами 2, ...,  $n-1$  оставим свободными.

Если к такому соединению приложить силу  $T$  которую полагаем постепенно возрастающей, то нетрудно заметить, что полосы растягиваются равномерно и свободные отверстия все время будут оставаться друг против друга (рис. 7,б). Следовательно, если бы в этих отверстиях стояли болты, то они не передавали бы никакого усилия. Таким образом мы пришли к парадоксальному результату, который был установлен В.Н.Гордеевым [2]: *при упругом деформировании и при отсутствии проскальзывания в многорядном соединении работают только крайние болты.*

Этот результат заставил пересмотреть некоторые устоявшиеся положения, в соответствии с которыми требовалось обеспечить безсдвиговую работу фрикционного соединения, но одновременно предлагалось использовать нормативную методику расчета, в соответствии с которой усилие  $T$  равномерно передавалось на все болты.

#### 4. КОНЦЕПЦИЯ СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ: МИР РЕАЛЬНЫЙ И МИР РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Анализ парадокса должен включать его проверку на исключительность, которая состоит в том, что обнаруженное явление не должно исчезать при незначительном изменении условий задачи. Такая проверка устойчивости явления по отношению к возмущениям (не смешивать с проверкой устойчивости равновесия конструкции, которая является лишь частным случаем) позволяет различать парадоксы, связанные с несовершенством расчетной модели, и парадоксы опровергающие устоявшиеся заблуждения.

Действительно, все, что наблюдается в реальном мире, должно быть в каком-то смысле устойчивым против малых возмущений окружающей среды ибо *«...в реальном мире мы никогда не встречаемся с системами или ситуациями, которые являются в некотором смысле патологическими»* [9].

Требование структурной устойчивости (грубости) является понятием, введенным А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [1]. Они исходили из того факта, что точные значения параметров реальной системы никогда не могут быть известны. Поэтому, основное требование к любой физически значимой аналитической модели должно быть таким: малые изменения номинальных значений параметров, как правило, не должны приводить к резкому, «существен-

ному» изменению в поведении системы. Модели, удовлетворяющие это требование, называют структурно устойчивыми (грубыми) и только такие модели могут быть значимыми, осуществимыми, и заметными как физические явления и системы. А.А. Андронову принадлежит такая формулировка принципа грубости: *«Без ошибки нет модели, а потому негрубые модели — плохие»*. Еще одна удачная формулировка принадлежит Трефцену: *"Если ответ высокочувствителен к возмущению, то возможно Вы задали неправильный вопрос"* [155]. Понятие структурной устойчивости лежит в основе связанного с ним понятия исчислимости, известного как постулат Фредкина [12]: *«Есть непосредственная связь между тем, что возможно в реальном мире, и что теоретически возможно в мире численного моделирования ... "То, что не может, в принципе, быть моделировано на компьютере, не может быть частью физики»*.

Связь между исчислимостью и структурной устойчивостью состоит в том, что неизбежная конечная точность вычисления и, особенно, входных данных создают малые возмущения параметров системы. Только для структурно устойчивой системы это гарантировано не приводит к «существенному» изменению в решениях, таким образом делая значимыми результаты выполненного вычисления, для систем структурно неустойчивых такой гарантии нет и здесь возможны серьезные ошибки в результатах анализа. Короче говоря, структурная устойчивость является предпосылкой и к физической и к числовой реализуемости расчетной модели.

Таким образом, грубость (структурная устойчивость, исчислимость) определяют возможность экспериментальной проверки того или иного явления, его реализуемость в реальном мире. Но отказ от рассмотрения исключительной ситуации, не наблюдаемой в природе, может оказаться очень неудобным с точки зрения построения алгоритмов расчета.

Действительно, в реальном мире нет строго симметричных систем, или строго повторяющихся ячеек регулярной конструкции, однако они существуют в идеализированном мире расчетных схем и часто очень помогают при построении таких схем. Здесь уместно процитировать Дж.М.Т. Томсона [9]: «...использование проектировщиком симметрии и оптимизации зачастую приводит к построению системы, являющейся весьма патологической, и в топологическом смысле структурно неустойчивой. В природе нельзя найти, например, идеально симметричные объекты, однако они возникают на чертежных досках проектировщиков. Человек, сам являющийся продуктом природы, требует от вещей того, что не может достичь природа: но поскольку он стремится построить такие вещи, природа этому противится, и это проявляется в нарушающих симметрию несовершенствах».

Поскольку предметом расчета является модель, соответствующая замыслу проектировщика (то, что есть на чертежной доске), а не то, что будет фактически существовать в реальном мире, то анализу часто подлежат структурно неустойчивые схемы. Но здесь решающим может быть тот факт, что мы заранее знаем, к каким парадоксам ведет такая идеализация (кратные собственные частоты, ложные основные системы, сингулярность и другие аналогичные результаты) и, зная это, можем соответствующим образом усовершенствовать алгоритм расчета, для того чтобы обойти возникающие сложности. Подчеркнем — сложности расчетного анализа, а не необычного поведения реального объекта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андронов А.А., Понтрягин Л.С.** Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. — С. 247-250.
2. **Гордеев В.Н.** Особенности работы многорядных фрикционных соединений на высокопрочных болтах // Збірник наукових праць Українського науководослідного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. Вип. 5. — К.: Сталь, 2010 — С. 172-180.
3. **Ле Суань Ань.** Парадоксы Панлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // Прикладная математика и механика, 1990, т. 54, вып. 4. — С. 520-529.
4. **Ляхович Л.С.** Разделение критических сил и собственных частот упругих систем.— Томск: Изд-во Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2004.— 140 с.
5. **Пановко Я.Г., Губанова И.И.** Устойчивость и колебания упругих систем. Издание третье.— М.: Физматгиз, 1979. — 384 с.
6. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, парадоксы и ошибки. — М.: Физматгиз, 1985. —288 с.
7. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Некоторые ошибки в постановках и решениях задач устойчивости равновесия конструкций // Международная научно-техническая конференция «Вычислительная механика деформируемого твердого тела». Труды. Том 2.— М.: МИИТ, 2006.— С. 316-323.
8. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1.— М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010.— 704 с.
9. **Смирнов А.Ф.** Статическая и динамическая устойчивость сооружений.— М.:Трансжелдориздат, 1947. — 308 с.
10. **Томпсон Дж.М.Т.** Теория катастроф и ее роль в прикладной механике // Теоретическая и прикладная механика. Труды XIV международного конгресса УИТАМ.— М.: Мир, 1979.— С. 695-710.
11. **Феодосьев В.И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1967. — 375 с.

12. **Fredkin E.** An Introduction to Digital Philosophy // International Journal of Theoretical Physics, Vol. 42, No. 2, 2003. — P. 189-247.
13. **Kazinczy G. von.,** Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre // Technika, 1931/2, Vol. 12, No. 5–7, — P. 168–172.
14. **Symonds P. S., Neal B. G.** The Interpretation of Failure Loads in the Plastic Theory of Continuous Beams and Frames // Journal of the Aeronautical Sciences, 1952, Vol. 19, No. 15, — P. 15–22.
15. **Trefethen L.N.** Maxims About Numerical Mathematics // Computers, Science, and Life, SIAM News, 1998.

---

Ляхович Леонид Семенович, действительны член РААСН, профессор, доктор технических наук, кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, Россия, г. Томск, пл. Соляная, 2;  
e-mail: [lsl@sibmail.com](mailto:lsl@sibmail.com).

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член РААСН, профессор, доктор технических наук, НПО СКАД Софт, 03037, Украина, г.Киев, ул. Провещения, дом 3а, офис 2;  
e-mail: [avp@scadsoft.com](mailto:avp@scadsoft.com).

Сливкер Владимир Исаевич, почетный член РААСН, профессор, доктор технических наук,

Leonid S. Lyakhovich, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building;  
e-mail: [lsl@sibmail.com](mailto:lsl@sibmail.com).

Anatolii V. Perelmuter, Foreign member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, SCAD Soft, Ltd, Kiev, Ukraine;  
e-mail: [avp@scadsoft.com](mailto:avp@scadsoft.com).

Vladimir I. Slivker, Honorary Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor

## МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИБКИХ, НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБОЛОЧЕК С АГРЕССИВНОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

*В.В. Петров*

Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, г. Саратов, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Элементы многих конструкций подвергаются совместному воздействию эксплуатационных факторов: механических нагрузок, высоких или низких температур, агрессивных рабочих сред и т.п. Воздействие агрессивных сред приводит к изменению во времени кратковременных и длительных механических характеристик материала, что вызывает изменение напряженно-деформированного состояния в конструкции и порождает проблему ее долговечности.

**Ключевые слова:** агрессивная среда, гибкая оболочка, математическая модель, деградация материала

## MODEL OF INTERACTION OF FLEXIBLE NONLINEARLY DEFORMABLE SHELLS WITH AN AGGRESSIVE ENVIRONMENT

*Vladilen V. Petrov*

Saratov State Technical University, Saratov, RUSSIA

**Abstract:** Elements of many structures are exposed to the joint operational factors: mechanical loads, high or low temperatures, aggressive media, etc. Exposure of aggressive media results in a change in time of short and long-term mechanical properties of the material, which causes a the stress-strain state changing in the construction and gives rise to the problem of its durability.

**Key words:** aggressive environment, flexible shell, mathematical model, degradation of the material

Взаимодействие материалов с агрессивными средами имеет сложную физико-химическую природу, поэтому применяется феноменологический подход, позволяющий на основе экспериментальных данных строить математическую модель этого взаимодействия, не требуя полной ясности в содержании тех физико-химических процессов, которые протекают при таком взаимодействии. Однако для построения математических моделей необходимы целенаправленные эксперименты, требования к которым формулируются в процессе построения модели. Влияние агрессивной рабочей среды на материал конструкции отличается разнообразием, которое в рамках одной общей модели

учесть невозможно. Речь может идти о построении частных моделей, объединенных общими похожими результатами воздействия, выявленными экспериментальным путем. Однако у всех моделей есть и нечто общее: воздействие агрессивных сред (агрессивных жидкостей и газов, физических сред, радиационного облучения и т.д.) делает однородный исходный материал неоднородным, то есть его физико-механические характеристики изменяются с течением времени вдоль пространственных координат. Математическая модель при решении поставленной проблемы строится так. В уравнения, описывающие напряженно-деформируемое состояние, вводятся либо

функции учитывающие изменения толщины (поверхностная коррозия), либо функции накопления рассеянных повреждений, либо функции деградации механических свойств материала, которые зависят от пространственных координат и времени и нам заранее не известны. Чаще всего эти функции вводятся в физическую группу уравнений. Поэтому для того, чтобы число неизвестных функций соответствовало бы числу уравнений необходимо сформулировать дополнительные уравнения, которые носят кинематический характер и связывают скорость изменения введенных дополнительных функций с функцией, определяемой по результатам экспериментальных исследований, содержащей необходимое число параметров, влияющих на ее формирование. Кинетические уравнения обычно получаются существенно нелинейными.

Согласно теории структурных параметров для любого процесса, происходящего в сплошной среде, может быть построено некоторое уравнение состояния, из которого характеристики процесса определяются как функции параметров внешнего воздействия и структурных параметров. Для структурных параметров составляются кинетические уравнения, по которым можно восстановить историю нагружения. При построении таких уравнений обычно полагается, что структурные параметры макроскопические и их можно вводить формально, но при необходимости им можно придать и некоторый физический смысл. Используя эти уравнения и исключая внутренние параметры, можно определить характеристики процессов деформирования и микроразрушения, не исследуя при этом микроструктуру материала. В общем случае структурные параметры вводятся с помощью гипотез, опирающихся на экспериментальные исследования.

Для расчета напряженного состояния и долговечности конструкций при воздействии агрессивной среды можно использовать теорию накопления повреждений, которые приводят к преждевременному разрушению

конструкции. Тем самым формулируется задача о длительной прочности элементов конструкций в агрессивных средах. Диффузионные модели коррозионного разрушения, пригодны для тех случаев, когда под действием агрессивной среды образуется слой, пораженный коррозией, механические характеристики которого плавно изменяются по толщине.

Следует иметь в виду, что чем проще построенная модель, чем меньше параметров модели реагируют на действие агрессивной среды, тем меньше требуется экспериментальной информации. Сложные модели приводят к построению сложных кинетических уравнений и требуют проведения порой трудновыполнимых экспериментов. Параметры, характеризующие свойства материала будут изменяться во времени по некоторому закону определяемому экспериментально. Поэтому к физическим уравнениям необходимо добавить кинетические уравнения, отражающие изменения размеров конструктивного элемента или свойств материала вызванные агрессивной внешней средой. Кинетические уравнения описывают изменения во времени параметров конструкции или материала, из которого она выполнена, и не описывают те физико-химические процессы, которые вызвали эти изменения. Они опираются лишь на гипотезы и предположения феноменологического характера, являются математической формализацией полученных экспериментальных данных и, желательнее, должны отличаться математической простотой. Поэтому кинетические уравнения не могут претендовать на большую общность, и пригодны лишь для получения разумного приближения при описании ограниченного класса явлений.

Повреждение металлов в коррозионной среде происходит по-разному: материал полностью или частично растворяется; продукты коррозии образуются на поверхности (ржавление); возникают локальные разрушения (питтинг, трещины); некоторые физико-механические свойства металлов могут из-

меняться без заметных следов на поверхности (водородное охрупчивание). Коррозионное воздействие является комплексным процессом, учитывающим влияние температуры, времени, эрозии, сорбционных, кавитационных и других процессов. С точки зрения термодинамики, коррозионные процессы являются необратимыми, а получить оценку протекания коррозионного процесса с позиций термодинамики оказывается затруднительным. Химическое сопротивление строительных композиционных материалов зависит, с одной стороны, от вида и концентрации агрессивного компонента среды, времени его воздействия и температуры, с другой – от макро- и микроструктуры композита. Химическое сопротивление полимерных композиционных материалов определяется стойкостью связующего.

В результате коррозии толщина конструктивного элемента уменьшается, а напряжения в нем увеличиваются. Так как процесс ржавления протекает во времени, то, и процесс увеличения напряжений также протекает во времени. В результате наступает такой момент, когда в одной из точек конструктивного элемента напряжения достигнут уровня опасного с точки зрения разрушения материала. Этот момент времени мы будем называть *опасным состоянием* конструкции, а время с начала эксплуатации конструкции в агрессивной среде до времени наступления опасного состояния будем называть ее *долговечностью*.

Невозможно построить одну обобщенную модель, которая могла бы корректно описывать поведение различных материалов в разных агрессивных средах. Влияние агрессивной среды на элементы конструкций может проявляться по-разному. Агрессивная внешняя среда может привести к изменению размеров сечения элементов (например, в случае сплошной коррозии), к изменению сплошности материала (в случае коррозионного растрескивания) или же к изменению механических свойств материала конструкций. Ввиду многообразия видов воздействий

агрессивной среды получим и многообразие математических моделей. Эти модели можно объединить в несколько характерных групп:

- поверхностное разрушение материала, сопровождающееся растворением, разрыхлением поверхностного слоя, выключением его из рассмотрения при расчете, то есть изменением геометрических характеристик конструкции;
- появление внутренних структурных повреждений, изменяющих механические характеристики поверхностного слоя материала, но не изменяющие при этом геометрические размеры конструкции;
- модели, накопления рассеянных микроповреждений в толще материала.

Интегральной характеристикой свойств материала следует считать кривую деформирования. В ней отражаются все процессы, которые происходят в материале, при его взаимодействии с агрессивной средой. По изменению диаграммы деформирования можно судить о пределе прочности и деформационных свойствах материала, о его способности к упрочнению или разупрочнению, степени агрессивности внешней среды по отношению к рассматриваемому материалу. Наибольшие изменения наблюдаются в области площадки текучести (уменьшение вплоть до полного исчезновения), кривой упрочнения (замедленное понижение и укорачивание). На начальном (упругом) участке кривой деформирования изменения незначительны, несколько изменяется модуль упругости (как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения).

При построении математических моделей, описывающих поведение нагруженных элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой, используются уравнения механики сплошных сред, которая не описывает происходящие в материале физические или химические процессы. Поэтому необходимо привлечение дополнительных уравнений, описывающих влияние физико-химических процессов на изменение тех или иных параметров, имеющих в физическом

уравнении механики сплошных сред, которые строятся на основании экспериментальных результатов.

Для введения структурных параметров в физические уравнения, в качестве которых берем уравнения кривых деформирования, необходимо аппроксимировать экспериментальную кривую деформирования, полученную в нейтральной среде, подходящим выражением, содержащим физические параметры. Кривую деформирования необходимо записать в виде

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где  $\xi_j$  – некоторые ее физические параметры. Например, если кривую деформирования можно аппроксимировать кубической параболой  $\sigma_i = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3$ , то параметры  $E$  и  $m$  следует считать функциями времени или иного параметра внешней среды, например, ее концентрации в материале конструкции. После этого в зависимости от вида пары «материал – среда» выбирается тип кинетического уравнения. Примеры типов кинетических уравнений можно найти в [1]. В примере с кубической параболой кинетические уравнения можно взять в виде

$$\frac{1}{F_E} \frac{dF_E}{dt} = f_1(F_E, B), \quad \frac{1}{F_m} \frac{dF_m}{dt} = f_2(F_m, B) \quad (1)$$

где  $B$  – концентрация агрессивной среды, рассматриваемая как функция пространственных координат и времени,  $F_E$  – функция деградации модуля упругости,  $F_m$  – функция, связанная с деградацией временного сопротивления материала, а функции  $f_1, f_2$  определяются из эксперимента. Левая часть уравнений (1) есть относительная скорость изменения параметра деградации. Часто относительную скорость можно считать постоянной, и тогда уравнения (1) приобретают вид

$$\frac{1}{F_E} \frac{dF_E}{dt} = \lambda_1, \quad \frac{1}{F_m} \frac{dF_m}{dt} = \lambda_2$$

с начальным условием:

$$\text{при } t = 0, \quad F_E = F_m = 1.$$

Решения этих уравнений – функции деградации –

$$F_E = e^{-\lambda_1 t}, \quad F_m = e^{-\lambda_2 t}.$$

Кривую деформирования теперь для произвольного момента времени можно представить в виде

$$\sigma_i = e^{-\lambda_1 t} \left( E\varepsilon_i - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} m\varepsilon_i^3 \right).$$

Если относительные скорости деградации можно считать равными получим

$$\sigma_i = e^{-\lambda_1 t} \left( E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3 \right).$$

При построении инкрементальных физических уравнений за основу принимаем деформационную теорию пластичности несжимаемого материала. в соответствии с которой имеем уравнение

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_\varepsilon \quad (2)$$

где  $D_\sigma = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$  – девиатор тензора напряжений,  $D_\varepsilon = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0$  – девиатор тензора деформации  $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ ,  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$  среднее напряжение и средняя деформация, которая для несжимаемого материала равна нулю,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформации.

Так как рост дефектов, вызванный внутренними напряжениями, возникающими от приложенной нагрузки и воздействия агрессивной среды, вызывает увеличение эффективных напряжений

$$\sigma^* = \sigma_{\max} / \varphi,$$

то в уравнение (2) необходимо внедрить скалярную функцию деградации  $F$ . характеризующую изменение прочностных свойств материала.

Введем понятие девиатора тензора эффективных напряжений

$$D_{\sigma}^* = D_{\sigma} / F.$$

В этом случае физическое уравнение примет вид

$$D_{\sigma}^* = \frac{1}{F} D_{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\varepsilon} \quad (3)$$

Его можно переписать в следующем виде

$$D_{\sigma} = \frac{2}{3} F E_c D_{\varepsilon} \quad (4)$$

Для получения инкрементальных уравнений вычислим дифференциал Габо уравнения (6.62), в результате получим инкрементальное уравнение

$$\Delta D_{\sigma} = \frac{2}{3} (F E_c \Delta D_{\varepsilon} + F D_{\varepsilon} \Delta E_c + E_c D_{\varepsilon} \Delta F) \quad (5)$$

Приращения компонент девиатора тензора напряжений вида  $\Delta \sigma_x / F, \dots, \Delta \tau_{zx} / F$  будем называть приведенными (эффективными) напряжениями. Так как функция  $F \leq 1$ , то приведенные приращения напряжений, с учетом разупрочнения материала будут больше. Учитывая это уравнению (5) придадим следующий вид

$$\frac{\Delta D_{\sigma}}{F} = \Delta D_{\sigma}^* = \frac{2}{3} \left( E_c \Delta D_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} \Delta E_c + E_c D_{\varepsilon} \frac{\Delta F}{F} \right). \quad (6)$$

где  $\Delta D_{\sigma}^*$  – приращение девиатора тензора приведенных напряжений.

Приращения секущего модуля и составляющих функции деградации вычислим по формулам

$$\Delta E_c = \frac{dE_c}{d\varepsilon_i} \Delta \varepsilon_i, \quad \Delta F = \frac{dF}{dt} \Delta t \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и, полагая равными направляющие тензоры девиатора деформаций и приращения девиатора деформаций

$$D_{\varepsilon} / \varepsilon_i = \Delta D_{\varepsilon} / \Delta \varepsilon_i,$$

получим окончательно следующее инкрементальное физическое уравнение

$$\Delta D_{\sigma}^* = \frac{2}{3} \left( E_k \Delta D_{\varepsilon} + E_c D_{\varepsilon} \frac{\Delta F}{F} \right), \quad (8)$$

Инкрементальные геометрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x \Delta w, \\ \Delta \varepsilon_y &= \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y \Delta w, \\ \Delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

Инкрементальные уравнения изгиба пологих оболочек с учетом как геометрической, так и физической нелинейностей в смешанной форме были получены нами в [2] и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{11}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{12}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= 0, \\ -\Omega_{21}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{22}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= \Delta q_{j+1} - \Delta q_{j+1}^{(\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $j$  – номер этапа возмущения ведущего параметра,  $\Delta w_{j+1}$  – приращение прогиба срединной поверхности оболочки,  $\Delta \varphi_{j+1}$  – приращение функции усилий на  $j+1$  этапе возмущения ведущего параметра (этапа нагружения),  $\Delta q_{j+1}$  – приращение поперечной нагрузки,  $\Delta q_{j+1}^{(\phi)}$  – приращение фиктивной поперечной нагрузки имитирующей действие агрессивной среды.

Полученная рекуррентная относительно индекса  $j$  система линейных дифференциальных уравнений кососимметрична относительно дифференциальных операторов  $\Omega_{mn}^{(j)}$ , что является следствием теоремы Бетти. Дифференциальные операторы в (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}^{(j)} &= \frac{4}{3} \nabla^2 (\beta_j \nabla^2) - 2L(\beta_j, \dots), \\ \Omega_{12}^{(j)} &= \Omega_{21}^{(j)} = \nabla_k^2 + L(W_j, \dots), \\ \Omega_{22}^{(j)} &= \nabla^2 (D_{k,j} \nabla^2) - \frac{1}{2} L(D_{k,j}, \dots) - L(\Phi_j, \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\beta_j = 1/J_{k,j}$ , а  $W_j, \Phi_j$  – соответственно суммарный прогиб и суммарная функция усилий за все  $j$  предыдущие ступени нагружения оболочки,  $J_{k,j}, D_{k,j}$  – жесткостные параметры, определяемые по формулам

$$J_{k,j} = \frac{4}{3} \int_{-h/2}^{h/2} E_{k,j} dz, \quad D_{k,j} = \frac{4}{3} \int_{-h/2}^{h/2} E_{k,j} z^2 dz, \quad (12)$$

где  $E_k = d\sigma_i / d\varepsilon_i$  – касательный модуль, где  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – интенсивности напряжений и деформаций соответственно,  $h$  – толщина оболочки. Здесь использованы также обозначения следующих дифференциальных операторов

$$L(A, \dots) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad (13)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (14)$$

Дифференциальный оператор с переменными коэффициентами  $L(A, \dots)$  учитывает влияние геометрической нелинейности или физической нелинейности. Здесь следует понимать, что  $A = W_j(x, y)$  или  $A = \Phi_j(x, y)$ , то есть это суммарный прогиб за все предыдущие ступени нагружения (геометрическая нелинейность) или суммарная функция усилий (физическая нелинейность). Уравнения (10) дополняются четырьмя граничными условиями в каждой точке контура оболочки, два из которых формулируются через функцию  $\Delta w$ , два других – через функцию  $\Delta \varphi$ . Так как система уравнений (10) линейная, то применяя принцип суперпозиции, сначала последовательно решаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{11}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{12}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= 0, \\ -\Omega_{21}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{22}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= \Delta q_{j+1} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

пока сумма приращений нагрузки не станет равной заданному значению. Затем нагрузка не изменяется, а последовательно увеличивается фиктивная нагрузка. При этом последовательно решаем следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{11}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{12}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= 0, \\ -\Omega_{21}^{(j)} \Delta \varphi_{j+1} + \Omega_{22}^{(j)} \Delta w_{j+1} &= -\Delta q_{j+1}^{(\phi)} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Приращение фиктивной поперечной нагрузки  $\Delta q_{j+1}^{(\phi)}$  определяется по формуле

$$\Delta q_{j+1}^{(\phi)} = -\nabla^2 (D_{c,j}^* \nabla^2 W_j) + \frac{1}{2} L(D_{c,j}^*, W_j) \quad (17)$$

где жесткостная характеристика оболочки определяются по формуле

$$D_{c,j}^* = \frac{4}{3} \int_{-h/2}^{h/2} E_{c,j} \frac{\Delta F}{F} z^2 dz \quad (18)$$

Если относительная скорость изменения функции деградации при изменении концентрации агрессивной среды есть величина постоянная, фиктивная нагрузка имеет вид

$$\Delta q_{o+1}^{(\phi)} = - \left( \frac{B_0 \lambda_E h}{2 \delta_j} \right) \left[ q(x, y) + \nabla_k^2 \Phi_j \right] \frac{\Delta \delta_{j+1}}{\delta_j} \quad (19)$$

где  $B_0$  – концентрация агрессивной среды на поверхности оболочки,  $q(x, y)$  – уровень нагрузки оболочки поперечной нагрузкой,

$\delta_j$  – толщина слоя материала оболочки поврежденного агрессивной средой,  $\Delta \delta_{j+1}$  – задаваемое последовательное изменение толщины поврежденного слоя.

На Рис. 1 приведены результаты расчета пологой оболочки на квадратном плане с размерами  $2a \times 2a$  при шарнирно подвижном опирании по контуру на действие равномерно распределенной нагрузки. Оболочка выполнена из полимербетона, агрессивная среда – раствор едкого натра

В верхней части Рис. 1 приведены характеристики оболочки «нагрузка – прогиб». Пунктиром показано изменение прогиба в центре оболочки, сплошной линией показано изменение максимального прогиба, штрихпунктирная линия получена при учете только физической нелинейности.

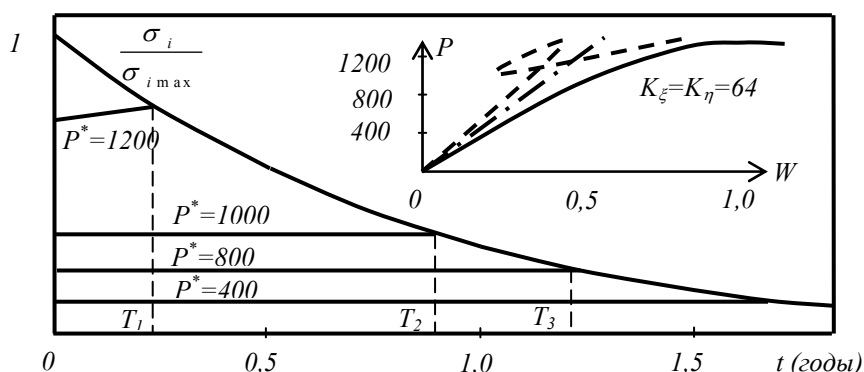


Рис.1

Использованы следующие безразмерные величины

$$K_\xi = K_\eta = \frac{k_x (2a)^2}{h}, W^* = \frac{W}{h}, P^* = \frac{12qa^4(1-\mu^2)}{Eh^4}. \quad (20)$$

По вертикальной оси откладываем отношение  $\sigma_i / \sigma_{i,max}$ , где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений в центре оболочки, вызванная поперечной безразмерной нагрузкой  $P^*$ ,  $\sigma_{i,max}$  – максимальная интенсивность напряжений, возникающая в оболочке в области критической нагрузки. По горизонтальной оси от-

кладываем время воздействия агрессивной среды,

$$t = (\delta(t) / \alpha)^2,$$

где  $\alpha = 13,05 \text{ мм/год}^{0,5}$  – экспериментальный коэффициент. Нисходящая кривая – изменение временного сопротивления  $\sigma_e^*(t)$  материала представляет собой отношение  $\sigma_e(t)/\sigma_e$ , где  $\sigma_e$  – временное сопротивление материала в нейтральной среде. Пересечение восходящих ветвей решения с нисходящей ветвью определяет долговечность конструкции в агрессивной среде. На каждом шаге нагружения или перемещения фронта разрушения задача решалась методом сеток с размером  $32 \times 32$ , шаг двустороннего симметричного проникновения в материал оболочки агрессивной среды принят  $\Delta\delta_j = h / 256$ .

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что долговечность оболочек  $T_i$ , соответствующая различным уровням нагружения, с увеличением нагрузки  $P^*$  уменьшается не пропорционально ее величине. При определении долговечности оболочек под действием нагрузки и агрессивной среды можно ограничиться последовательным решением двух систем уравнений. На этапе нагружения нагрузкой необходимо учитывать и геометрическую и физическую нелинейность, а при определении долговечности можно решать более простую систему уравнений, учитывающую только физическую нелинейность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М.** Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Издательство Сарат. ун-та, Саратов, 1987.
2. **Петров В.В.** Прочность и устойчивость нелинейно деформируемых пологих оболочек /В.В. Петров, И.В. Кривошеин // АСАСЕМІА. Архитектура и строительство, 2009, №3. С. 83 – 86.

Петров Владилен Васильевич, профессор, доктор технических наук, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, заведующий кафедрой Теории сооружений и строительных конструкций Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина, 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77,  
E-mail: vvp@sstu.ru

# ОБ ОДНОМ КОРРЕКТНОМ ВАРИАНТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК ЧАСТЬ 1: КОНТИНУАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья открывает серию публикаций авторов посвященных постановке и численному решению краевой задачи расчета балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Ниже рассматриваются континуальные операторная и вариационная постановки задачи.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, континуальные постановки, краевая задача, строительные конструкции, балки-стенки, кусочно-постоянные параметры

## ABOUT ONE CORRECT VERSION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD OF STATIC ANALYSIS OF DEEP BEAMS PART 1: CONTINUAL FORMULATIONS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper begins a series of publications devoted to formulation and numerical solution of the boundary problem of static analysis of deep beam with piecewise constant physical and geometrical parameters within discrete-continual finite element method. Continual operational and variational formulations of the problem are under consideration.

**Key words:** discrete-continual finite element method, continual formulations, boundary problem, structures, deep beam, piecewise constant parameters

### 1. КОНТИНУАЛЬНАЯ ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Будем рассматривать балку-стенку, физико-геометрические параметры которой изменяются кусочно-постоянно вдоль некоторого координатного направления, условно называемого основным направлением.

Пусть  $x_1, x_2$  – используемые декартовы координаты;  $x_2$  – переменная, соответствующая основному направлению (заметим, что по переменной  $x_1$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольным образом);  $l_2$  – длина конструкции по основному направлению ( $x_2 \in [0, l_2]$ );  $x_{2,k}^b, k = 1, \dots, n_k^b$  – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где

происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки);  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – соответствующие фрагменты (области), на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2) : a_k < x_1 < b_k, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}, \quad k=1, \dots, n_k^b; \quad (1.1)$$

$\Gamma_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – соответствующие границы перечисленных фрагментов;  $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$  – характеристическая функция области  $\Omega_k$ ;  $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$  – дельта-функция границы  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$  [1, 4, 5],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.3)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нормали к границе  $\Gamma_k$ ;  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}; \quad (1.4)$$

$\bar{\lambda}_k$  и  $\bar{\mu}_k$  – параметры Ламе, определенные на расширенной области  $\omega_k \supset \Omega_k$  и равны нулю вне  $\Omega_k$ , т.е.

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (1.5)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s=1, 2; \quad (1.6)$$

Можно показать, что операторная континуальная постановка задачи расчета балки-стенки [6-9] после выделения основного направления имеет следующий вид [1, 4, 5]:

$$\bar{U}'_k = \tilde{\mathcal{L}}_k \bar{U}_k + \bar{F}_k, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k=1, \dots, n_k^b-1; \quad (1.7)$$

$$\text{где } \bar{U}_k = \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{U}'_k = \partial_2 \bar{U}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{u}_k \\ \partial_2 \bar{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

$$\bar{u}_k = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_k = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (1.9)$$

$$\bar{v}_k = \partial_2 \bar{u}_k = \bar{u}'_k; \quad v_i^{(k)} = \partial_2 u_i^{(k)}, \quad i=1, 2; \quad (1.10)$$

$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$  – компоненты  $u_1, u_2$  вектора перемещений соответственно внутри области  $\Omega_k$ ;

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathcal{L}_{k,vv}^1 \mathcal{L}_{k,uu} & \mathcal{L}_{k,vv}^1 \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} = \mathcal{L}_{k,uv} - \mathcal{L}_{k,vu}; \quad \mathcal{L}_{k,vu} = \mathcal{L}_{k,uv}^*; \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}_{k,uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \partial_1; \quad (1.14)$$

$$\bar{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{F}_{k,vv}^1 \bar{\mathcal{F}}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{k,1} \\ \mathcal{F}_{k,2} \end{bmatrix}; \quad (1.15)$$

$$\mathcal{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma,k} f_i, \quad i=1, 2; \quad (1.16)$$

$\bar{F}_k = [F_{k,1} \ F_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области  $\Omega_k$ ;  $\bar{f}_k = [f_{k,1} \ f_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ ;  $E$  – тождественный оператор.

Уравнения (1.6), разумеется, следует дополнить граничными условиями, задаваемыми в сечениях с координатами  $x_{2,k}^b$ ,  $k=1, \dots, n_k$ .

Эти граничные условия представимы в виде

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \\ = \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k^b-1; \end{aligned} \quad (1.17)$$

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 1: Континуальные постановки задачи

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \\ = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{u}_k, \bar{v}_k) = 0.5 \cdot [(\mathcal{L}_{k,vv} \bar{v}_k, \bar{v}_k) + \\ + 2(\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \bar{v}_k, \bar{u}_k) + (\mathcal{L}_{k,uu} \bar{u}_k, \bar{u}_k)] - (\tilde{\mathcal{F}}_k, \bar{u}_k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\tilde{B}_k^-, \tilde{B}_k^+, k = 2, \dots, n_k^b - 1, \tilde{B}_1^+$  и  $\tilde{B}_{n_k}^-$  – матрицы (операторы) коэффициентов граничных условий, 4-го порядка;  $\tilde{g}_k^-, \tilde{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k^b - 1, \tilde{g}_1^+$  и  $\tilde{g}_{n_k}^-$  – векторы правых частей граничных условий, четырехмерные.

Объединяя (1.6), (1.13) и (1.14) получаем континуальную операторную постановку многоточечной краевой задачи с выделением основного направления:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}'_k &= \tilde{\mathcal{L}}_k \bar{U}_k + \tilde{F}_k, \\ x &\in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k^b - 1; \\ \tilde{B}_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \\ &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k^b - 1; \\ \tilde{B}_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \\ &= \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-. \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

## 2. КОНТИНУАЛЬНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ.

Непосредственно из операторной постановки задачи следует вариационная постановка [9]

$$\Phi(\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n_k^b-1} \Phi_k(\bar{u}_k), \quad (2.1)$$

$$\text{где } \Phi_k(\bar{u}_k) = 0.5 \cdot (\mathcal{L}_k \bar{u}_k, \bar{u}_k) - (\tilde{\mathcal{F}}_k, \bar{u}_k), \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_k = -\mathcal{L}_{k,vv} \partial_2^2 + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \partial_2 + \mathcal{L}_{k,uu} \quad (2.3)$$

или с учетом (1.9), (1.10) после преобразований получим

Можно показать, что функционал, соответствующий операторной постановке (1.7) представим в виде

$$\Phi_k(\bar{U}_k) = 0.5 \cdot (\tilde{\mathcal{L}}_k \bar{U}_k, \bar{U}_k) - (\tilde{\mathcal{F}}_k, \bar{U}_k), \quad (2.4)$$

$$\text{где } \tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{k,uu} & \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}^* & \mathcal{L}_{k,vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{k,uu} & \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{k,vu} & \mathcal{L}_{k,vv} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_k \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Решением поставленной задачи является точка (функция) условного экстремума этого функционала с условием (1.9). Кроме того, разумеется, должны быть приняты во внимание граничные условия (1.17)-(1.18).

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделиро-

вания состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка задачи. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 97-107.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Численная реализация. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 108-118.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Герман А.Ю.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 3: Программная реализация и пример расчета. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 119-128.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
6. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
8. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
9. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 1: Континуальные постановки задачи

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

# ОБ ОДНОМ КОРРЕКТНОМ ВАРИАНТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК ЧАСТЬ 2: ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья продолжает серию публикаций авторов посвященных постановке и численному решению краевой задачи расчета балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Ниже рассматривается численная реализация метода.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, численная реализация, краевая задача, строительные конструкции, балки-стенки, кусочно-постоянные параметры

## ABOUT ONE CORRECT VERSION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD OF STATIC ANALYSIS OF DEEP BEAMS PART 2: NUMERICAL IMPLEMENTATION

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper begins a series of publications devoted to formulation and numerical solution of the boundary problem of static analysis of deep beam with piecewise constant physical and geometrical parameters within discrete-continual finite element method. Numerical implementation of this method is under consideration.

**Key words:** discrete-continual finite element method, numerical implementation, boundary problem, structures, deep beam, piecewise constant parameters

### 1. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ (ДККЭ)

Для постановки и решения рассматриваемой задачи каждая исходная область  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k^b-1$  окаймляется соответствующей расширенной областью  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k^b-1$  [7, 8]. Принимается следующая дискретно-континуальная модель: по

основному направлению (вдоль оси  $Ox_2$ ) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси  $Ox_1$ ) производится конечноэлементная аппроксимация [6, 12], т.е. конструкция разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ)  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k^b-1$  (см. рис. 1.1, 1.2). Таким образом, каждая область  $\omega_k$  разбивается на элементы (ДККЭ)  $\omega_{k,i}$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$ ,  $i=1, 2, \dots, N_k-1$  (рис. 1.1, 1.2).

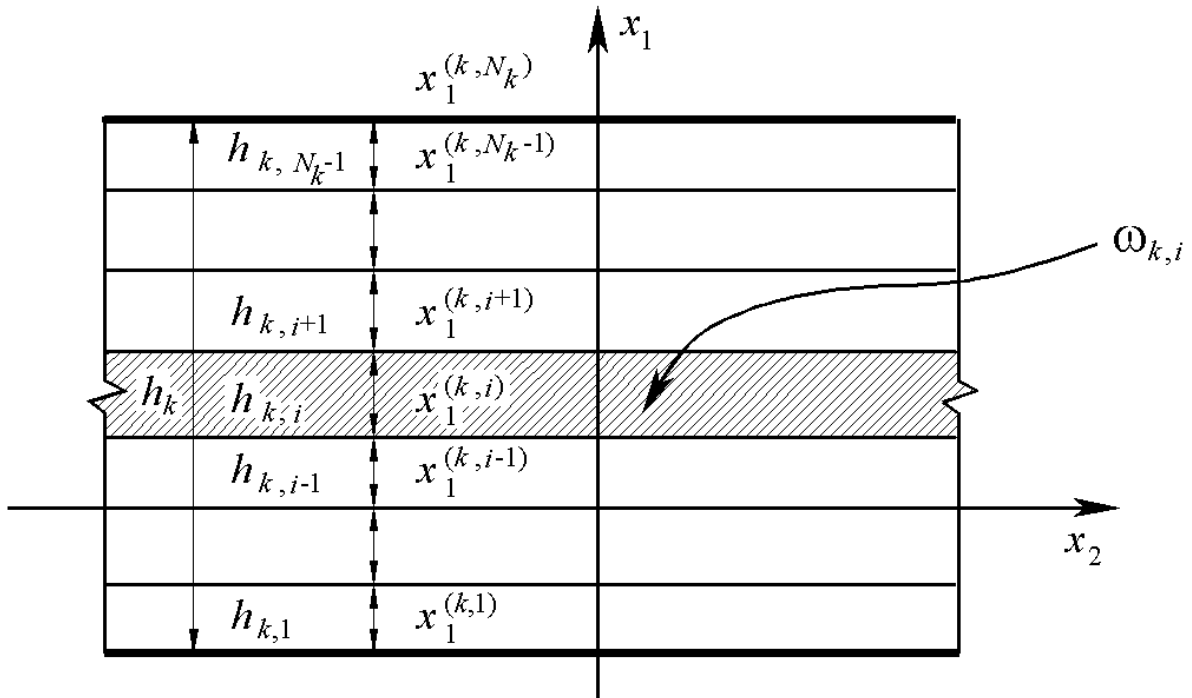


Рис. 1.1. Схема дискретизации конструкции.

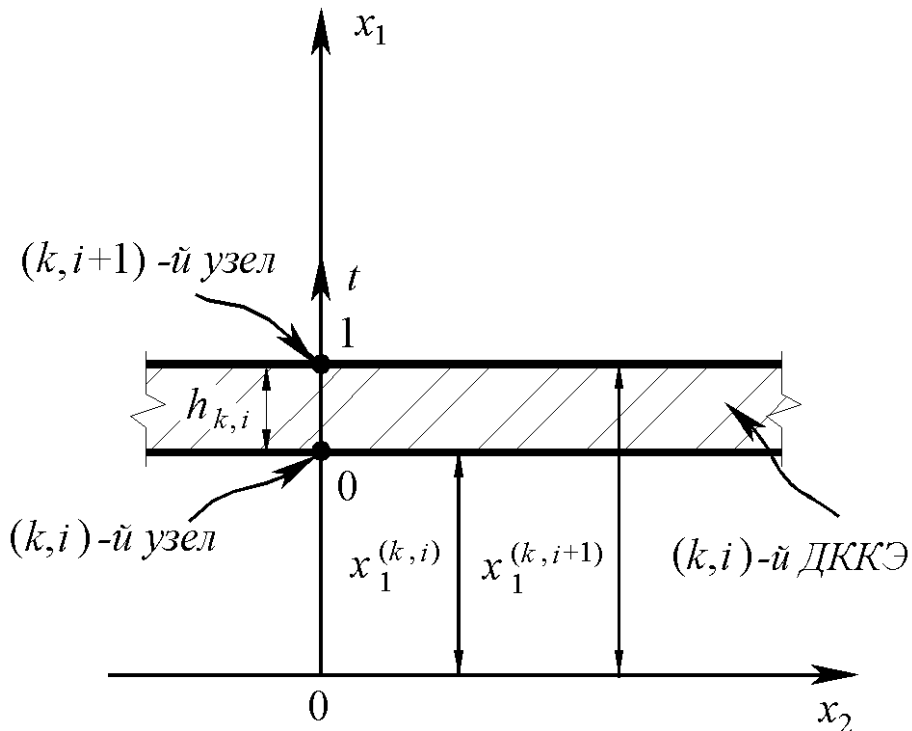


Рис. 1.2. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

$$\omega_k = \bigcup_{i=1}^{N-1} \omega_{k,i}; \quad (1.1)$$

$$\omega_k = \{(x_1, x_2): a_k \leq x_1 \leq b_k, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.2)$$

$$\omega_{k,i} = \{(x_1, x_2): x_1^{(k,i)} \leq x_1 \leq x_1^{(k,i+1)}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

$$x_1^{(k,i+1)} = x_1^{(k,i)} + h_{k,i}; \quad h_{k,i} = x_1^{(k,i+1)} - x_1^{(k,i)} \quad (1.4)$$

где  $l_{1,k} = b_k - a_k$ ,  $l_2$  – соответственно размеры конструкции по неосновному и основному направлениям;  $N_k$  – количество узлов конечноэлементной сетки по неосновному направлению;  $(x_1^{(k,i)}, x_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_k$  – координаты узлов сетки;  $h_{k,i}$  – шаги сетки (размеры элементов по неосновному направлению).

Определяем характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента  $\omega_{k,i}$  и поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i} \not\subset \Omega_k; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\bar{\lambda}_{k,i} = \theta_{k,i} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i} = \theta_{k,i} \mu. \quad (1.6)$$

Рассмотрим произвольный  $(k,i)$ -й элемент модели (рис. 1.2). Переходим от исходной системы координат к элементной:  $(x_1, x_2) \Rightarrow (i, t, x_2)$ , т.е. выполняем локальную замену переменных внутри элемента. Здесь  $t$  – локальная координата, введенная по направлению оси  $Ox_1$  и связанная с ДККЭ:

$$t = (x_1 - x_1^{(k,i)}) / h_i; \quad t \in [0, 1], \quad x_1 \in [x_{1,i}, x_{1,i+1}]. \quad (1.7)$$

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$  и их производные  $v_1^{(k)}$  и  $v_2^{(k)}$  по переменной  $x_2$ , т.е. для  $(k,i)$ -го узла это  $u_{1,n}^{(k,i)}$ ,  $u_{2,n}^{(k,i)}$ ,  $v_{1,n}^{(k,i)}$ ,  $v_{2,n}^{(k,i)}$  и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{(k,i)} = \bar{U}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,i)} \\ \bar{v}_n^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где 
$$\bar{u}_n^{(k,i)} = \bar{u}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} u_{1,n}^{(k,i)} \\ u_{2,n}^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_n^{(k,i)} = \bar{v}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} v_{1,n}^{(k,i)} \\ v_{2,n}^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\bar{U}^{(k,i)} = \bar{U}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,i)} \\ \bar{v}_n^{(k,i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,n}^{(k,i)} \\ \bar{u}_{2,n}^{(k,i)} \\ \bar{v}_{1,n}^{(k,i)} \\ \bar{v}_{2,n}^{(k,i)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где 
$$\bar{u}_n^{(k,i)} = \bar{u}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,n}^{(k,i)} \\ \bar{u}_{2,n}^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\bar{v}_n^{(k,i)} = \bar{v}_n^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,n}^{(k,i)} \\ \bar{v}_{2,n}^{(k,i)} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\bar{u}_{j,n}^{(k,i)} = \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} u_{j,n}^{(k,i)} \\ u_{j,n}^{(k,i+1)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2; \quad (2.7)$$

$$\bar{v}_{j,n}^{(k,i)} = \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \begin{bmatrix} v_{j,n}^{(k,i)} \\ v_{j,n}^{(k,i+1)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Поля  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$  и  $v_1^{(k)}$  и  $v_2^{(k)}$  по «поперечному» (по отношению к основному направлению) сечению  $(k,i)$ -го дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются линейно (здесь можно провести прямую аналогию с функциями формы, которые используются в стандартном методе конечных элементов (МКЭ) при решении задач, связанных с продольными деформациями прямолинейных стержней) [6, 12]:

$$u_j^{(k,i)}(t, x_2) = N(t) \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}; \quad (2.9)$$

$$v_j^{(k,i)}(t, x_2) = N(t) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.10)$$

где 
$$N = N(t) = [N_1 \quad N_2]; \quad (2.11)$$

$$N_1(t) = 1 - t; \quad N_2(t) = t \quad (2.12)$$

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

– матрица функций формы («поперечных» по отношению к основному направлению) по сечению ДККЭ.

Матрица (2.11) после переобозначений также представима в виде

$$N = N(t) = \bar{t}^T N_0, \quad (2.13)$$

где 
$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Также справедливы следующие соотношения:

$$\bar{u}^{(k,i)}(t, x_2) = N_n(t) \bar{\bar{u}}_n^{(k,i)}(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.15)$$

$$\bar{v}^{(k,i)}(t, x_2) = N_n(t) \bar{\bar{v}}_n^{(k,i)}(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega_{k,i}, \quad (2.16)$$

где 
$$N_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N(t) = \begin{bmatrix} N(t) & 0 \\ 0 & N(t) \end{bmatrix}; \quad (2.17)$$

$\otimes$  – символ, обозначающий операцию прямого произведения матриц;

$$\bar{u}^{(k,i)}(t, x_2) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,i)}(t, x_2) \\ u_2^{(k,i)}(t, x_2) \end{bmatrix}; \quad (2.18)$$

$$\bar{v}^{(k,i)}(t, x_2) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,i)}(t, x_2) \\ v_2^{(k,i)}(t, x_2) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Руководствуясь (2.13)-(2.14) и (2.17) можем записать:

$$N_n = N_n(t) = T(t) N_{0,n}, \quad (2.20)$$

где 
$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \bar{t}^T = \begin{bmatrix} \bar{t}^T & 0 \\ 0 & \bar{t}^T \end{bmatrix}; \quad (2.21)$$

$$N_{0,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N_0 = \begin{bmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & N_0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ.

Выражения для частных производных первого порядка от неизвестных функций по переменным  $x_1$  и  $x_2$  в пределах  $(k, i)$ -го дискретно-континуального конечного элемента записываются в виде (ниже  $t \in [0, 1]$ ):

$$\partial_1 u_j^{(k,i)}(t, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t) \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (3.1)$$

$$\partial_2 u_j^{(k,i)}(t, x_2) = N(t) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (3.2)$$

$$\partial_1 v_j^{(k,i)}(t, x_2) = \frac{1}{h_i} N'(t) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2; \quad (3.3)$$

$$\partial_2 v_j^{(k,i)}(t, x_2) = N(t) \partial_2 \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2), \quad j = 1, 2, \quad (3.4)$$

где 
$$N'(t) = \frac{d}{dt} N(t) = [N'_1 \quad N'_2]^T. \quad (3.5)$$

Производные от матрицы функций формы (3.5) находятся дифференцированием ее элементов (2.12), т.е.

$$N'_1(t) = -1; \quad N'_2(t) = 1. \quad (3.6)$$

Как видно, элементы (3.6) не зависят от  $t$ . Вместе с тем, очевидно, что при характере аппроксимации, отличном от (2.11)-(2.12), зависимость соответствующих элементов от  $t$  может иметь место.

Обозначим через  $\partial_1 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2)$ ,  $\partial_2 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2)$ ,  $\partial_1 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2)$  и  $\partial_2 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2)$  (здесь  $j = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_k$ ) отнесенные к узлу  $(k, i)$  соответствующие функции (3.1)-(3.4), представляющие собой производные от перемещений.

Очевидно, что соответствующие узловые функции определяются с учетом соответствующих операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (3.1)-(3.4):

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{g_{k,i}}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{u}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_{k,i}} N'(0) \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.7)$$

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,1)}(x_2) = \frac{\theta_{k,1}}{h_{k,1}} N'(0) \bar{u}_{j,n}^{(k,1)}(x_2); \quad (3.8)$$

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,N_k)}(x_2) = \frac{\theta_{k,N-1}}{h_{k,N-1}} N'(1) \bar{u}_{j,n}^{(k,N_k-1)}(x_2); \quad (3.9)$$

$$\partial_2 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = v_{j,n}^{(k,i)}(x_2); \quad (3.10)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{g_{k,i}}{\theta_{k,i-1} + \theta_{k,i}} \times \left[ \frac{\theta_{k,i-1}}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{v}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{\theta_{k,i}}{h_{k,i}} N'(0) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.11)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,1)}(x_2) = \frac{\theta_{k,1}}{h_{k,1}} N'(0) \bar{v}_{j,n}^{(k,1)}(x_2); \quad (3.12)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,N_k)}(x_2) = \frac{\theta_{k,N-1}}{h_{k,N-1}} N'(1) \bar{v}_{j,n}^{(k,N_k-1)}(x_2), \quad (3.13)$$

где

$$g_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1} + \theta_{k,i} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1} + \theta_{k,i} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1;$$

Рассмотрим важные частные случаи формул (3.7) и (3.11). Очевидно, что если  $\theta_{k,i-1} = \theta_{k,i} = 1, i = 2, 3, \dots, N_k - 1$  будем иметь:

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{u}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_{k,i}} N'(0) \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.15)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{1}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{v}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2) + \frac{1}{h_{k,i}} N'(0) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2) \right],$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.16)$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 0, \theta_{k,i} = 1, i = 2, 3, \dots, N_k - 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i-1}$  аппроксимирует «пустоту») имеем:

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{h_{k,i}} N'(0) \bar{u}_{j,n}^{(k,i)}(x_2),$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.17)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{h_{k,i}} N'(0) \bar{v}_{j,n}^{(k,i)}(x_2),$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.18)$$

В случае  $\theta_{k,i-1} = 1, \theta_{k,i} = 0, i = 2, 3, \dots, N_k - 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,i}$  аппроксимирует «пустоту») имеем:

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{u}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2),$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1; \quad (3.19)$$

$$\partial_1 v_{j,n}^{(k,i)}(x_2) = \frac{1}{h_{k,i-1}} N'(1) \bar{v}_{j,n}^{(k,i-1)}(x_2),$$

$$i = 2, 3, \dots, N_k - 1. \quad (3.20)$$

Если  $\theta_{k,1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.8) и (3.12), очевидно, будем иметь:

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,1)}(x_2) = 0; \quad \partial_1 v_{j,n}^{(k,1)}(x_2) = 0. \quad (3.21)$$

Если  $\theta_{k,N_k-1} = 1$  (дискретно-континуальный элемент  $\omega_{k,N_k-1}$  аппроксимирует «пустоту»), то вместо (3.9) и (3.13), очевидно, будем иметь:

$$\partial_1 u_{j,n}^{(k,N_k)}(x_2) = 0; \quad \partial_1 v_{j,n}^{(k,N_k)}(x_2) = 0. \quad (3.22)$$

#### 4. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

Выражения для деформаций и напряжений [9-11, 13] в пределах  $(k, i)$ -го дискретно-континуального конечного элемента на основании известных соотношений записываются следующим образом (ниже  $t \in [0, 1]$ ):

– деформации

$$\varepsilon_{11}^{(k,i)}(t, x_2) = [\partial_1 u_1^{(k,i)}](t, x_2); \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{22}^{(k,i)}(t, x_2) = v_2^{(k,i)}(t, x_2); \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{(k,i)}(t, x_2) &= \varepsilon_{21}^{(k,i)}(t, x_2) = \\ &= 0.5 \cdot (\partial_1 u_2^{(k,i)}(t, x_2) + v_1^{(k,i)}(t, x_2)); \end{aligned} \quad (4.3)$$

– напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k,i)}(t, x_2) &= (\lambda_{k,i} + 2\mu_{k,i})[\partial_1 u_1^{(k,i)}](t, x_2) + \\ &+ \lambda_{k,i} v_2^{(k,i)}(t, x_2); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(k,i)}(t, x_2) &= \lambda_{k,i} \partial_1 u_1^{(k,i)}(t, x_2) + \\ &+ (\lambda_{k,i} + 2\mu_{k,i}) v_2^{(k,i)}(t, x_2); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(k,i)}(t, x_2) &= \sigma_{21}^{(k,i)}(t, x_2) = \\ &= \mu_{k,i} (v_1^{(k,i)}(t, x_2) + \partial_1 u_2^{(k,i)}(t, x_2)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Обозначим через  $\varepsilon_{11,n}^{(k,i)}$ ,  $\varepsilon_{12,n}^{(k,i)}$ ,  $\varepsilon_{21,n}^{(k,i)}$ ,  $\varepsilon_{22,n}^{(k,i)}$  и  $\sigma_{11,n}^{(k,i)}$ ,  $\sigma_{12,n}^{(k,i)}$ ,  $\sigma_{21,n}^{(k,i)}$ ,  $\sigma_{22,n}^{(k,i)}$  (здесь  $i = 1, 2, \dots, N_k$ ) отнесенные к узлу  $(k, i)$  соответствующие функции (4.1)-(4.6), представляющие собой деформации и напряжения. Эти приведенные к узлу функции определяются аналогично частным производных от искомым функций (см. формулы пункта 3) с учетом соответствующих операций осреднения.

#### 5. АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Рассмотрим аппроксимацию следующих операторов на  $(k, i)$ -м дискретно-континуальном конечном элементе:

$$\bar{a}_k, \partial_1^* \bar{a}_k \partial_1, \partial_1 \bar{a}_k, \bar{a}_k \partial_1, \quad \text{где } \bar{a}_k = \theta_k a_k; \quad (5.1)$$

$a_k$  – некоторая функция-коэффициент, определенная в области  $\Omega_k$ ;  $\theta_k$  – соответствующая характеристическая функция области  $\Omega_k$ .

При выводе формул аппроксимации следует рассмотреть выражения

$$\begin{aligned} (\bar{a}_k w_k, w_k), (\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1 w_k, w_k), \\ (\partial_1^* \bar{a}_k z_k, w_k), (\bar{a}_k \partial_1 z_k, w_k), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $w_k$  и  $z_k$  – некоторые функции, линейные по переменной  $x_1$ , определенные на элементе, т.е. представимые в виде

$$w_k = w_{k,i} + t \Delta w_{k,i}; \quad z_k = z_{k,i} + t \Delta z_{k,i}, \quad (5.3)$$

$$\text{где } \Delta w_{k,i} = w_{k,i+1} - w_{k,i}; \quad \Delta z_{k,i} = z_{k,i+1} - z_{k,i}; \quad (5.4)$$

$w_{k,i}$ ,  $z_{k,i}$  и  $w_{k,i+1}$ ,  $z_{k,i+1}$  – значения функций  $w$  и  $z$  в узлах  $i$  и  $i+1$  элемента с координатами соответственно  $x_1 = x_1^{(k,i)}$  и  $x_1 = x_1^{(k,i+1)}$ .

Введем обозначение

$$\bar{a}_{k,i} = \frac{\theta_{k,i}}{h_{k,i}} \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} a dx_1, \quad (5.5)$$

т.е.  $\bar{a}_{k,i}$  – осредненное на  $(k, i)$ -м элементе значение функции  $a$ ;  $\theta_{k,i}$  – соответствующее значение характеристической функции на элементе.

Итак, выведем далее основные формулы аппроксимации.

1) Оператор  $\bar{a}_k$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_k w_k, w_k) &= \int_{\omega_k} \bar{a}_k w_k w_k dx_1 = \\ &= \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} \bar{a}_k w_k^2 dx_1 \approx \bar{a}_{k,i} \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} w_k^2 dx_1. \end{aligned}$$

После перехода под интегралом от переменной  $x_1$  к локальной переменной  $t$  получим:

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}_k w_k, w_k) &= \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \int_0^1 (w_{k,i} + t\Delta w_{k,i})(w_{k,i} + t\Delta w_{k,i}) dt = \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \int_0^1 ((1-t)w_{k,i} + tw_{k,i+1})^2 dt = \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \times \\
 &\times \int_0^1 [(1-t)^2 w_{k,i}^2 + 2t(1-t)w_{k,i}w_{k,i+1} + t^2 w_{k,i+1}^2] dt = \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \left[ -\frac{1}{3}(1-t)^3 w_{k,i}^2 + \right. \\
 &+ \left. \left( t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right) w_{k,i}w_{k,i+1} + \frac{t^3}{3} w_{k,i+1}^2 \right]_0^1 = \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \left[ \frac{1}{3} w_{k,i}^2 + \frac{1}{3} w_{k,i}w_{k,i+1} + \frac{1}{3} w_{k,i+1}^2 \right] = \\
 &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \times \\
 &\times \left[ \frac{1}{3} w_{k,i}^2 + \frac{1}{6} w_{k,i}w_{k,i+1} + \frac{1}{6} w_{k,i+1}w_{k,i} + \frac{1}{3} w_{k,i+1}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}_k w_k, w_k) &= \bar{a}_{k,i} h_{k,i} \left( K_0^{(0,0)} \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix} \right), \\
 \text{где } K_0^{(0,0)} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

2) Оператор  $\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1 w_k, w_k) &= \int_{\omega_i} \bar{a}_k (\partial_1 w_k) (\partial_1 w_k) dx_1 = \\
 &= \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} \bar{a}_k (\partial_1 w_k)^2 dx_1 \approx \bar{a}_{k,i} \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} (\partial_1 w_k)^2 dx_1.
 \end{aligned}$$

После перехода под интегралом от переменной  $x_1$  к локальной переменной  $t$  будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1 w, w) &= \\
 &= \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} \int_0^1 (\Delta w_{k,i})^2 dt = \\
 &= \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} \int_0^1 (w_{k,i+1}^2 - 2w_{k,i}w_{k,i+1} + w_{k,i}^2) dt = \\
 &= \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} (w_{k,i}^2 - 2w_{k,i}w_{k,i+1} + w_{k,i+1}^2) = \\
 &= \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} (w_{k,i}^2 - w_{k,i}w_{k,i+1} - w_{k,i+1}w_{k,i} + w_{k,i+1}^2).
 \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1 w, w) &= \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} \left( K_0^{(1,1)} \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix} \right), \\
 \text{где } K_0^{(1,1)} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

3) Оператор  $\partial_1^* \bar{a}$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k z_k, w_k) &= \\
 &= \int_{\omega_i} \bar{a}_k z_k (\partial_1 w_k) dx_1 = \\
 &= \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} \bar{a}_k z_k (\partial_1 w_k) dx_1 \approx \\
 &\approx \bar{a}_{k,i} \int_{x_1^{(k,i)}}^{x_1^{(k,i+1)}} z_k (\partial_1 w_k) dx_1.
 \end{aligned}$$

После перехода под интегралом от переменной  $x_1$  к локальной переменной  $t$  будем иметь:

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k z_k, w_k) &= \bar{a}_{k,i} \int_0^1 (z_{k,i} + t \Delta z_{k,i}) \Delta w_{k,i} dt = & (\bar{a}_k \partial_1 z_k, w_k) &= \bar{a}_{k,i} \int_0^1 \Delta z_{k,i} (w_{k,i} + t \Delta w_{k,i}) dt = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \int_0^1 (z_{k,i} \Delta w_{k,i} + t \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i}) dt = & &= \bar{a}_{k,i} \int_0^1 (\Delta z_{k,i} w_{k,i} + t \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i}) dt = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \left[ z_{k,i} \Delta w_{k,i} t + \frac{t^2}{2} \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i} \right]_0^1 = & &= \bar{a}_{k,i} \left[ \Delta z_{k,i} w_{k,i} t + \frac{t^2}{2} \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i} \right]_0^1 = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \left[ z_{k,i} \Delta w_{k,i} + \frac{1}{2} \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i} \right] = & &= \bar{a}_{k,i} \left[ \Delta z_{k,i} w_{k,i} + \frac{1}{2} \Delta z_{k,i} \Delta w_{k,i} \right] = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \left[ z_{k,i} w_{k,i+1} - z_{k,i} w_{k,i} + \right. & &= \bar{a}_{k,i} \left[ w_{k,i} z_{k,i+1} - w_{k,i} z_{k,i} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (z_{k,i+1} - z_{k,i})(w_{k,i+1} - w_{k,i}) \right] = & &+ \left. \frac{1}{2} (z_{k,i+1} - z_{k,i})(w_{k,i+1} - w_{k,i}) \right] = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \left[ z_{k,i} w_{k,i+1} - z_{k,i} w_{k,i} + \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i+1} - \right. & &= \bar{a}_{k,i} \left[ w_{k,i} z_{k,i+1} - w_{k,i} z_{k,i} + \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i+1} - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i} - \frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i+1} + \frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i} \right] = & &- \left. \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i} - \frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i+1} + \frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i} \right] = \\
 &= \bar{a}_{k,i} \left[ -\frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i} - \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i} + \right. & &= \bar{a}_{k,i} \left[ -\frac{1}{2} z_i w_i + \frac{1}{2} z_{i+1} w_i - \frac{1}{2} z_i w_{i+1} + \frac{1}{2} z_{i+1} w_{i+1} \right]. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} z_{k,i} w_{k,i+1} + \frac{1}{2} z_{k,i+1} w_{k,i+1} \right]. & &
 \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 (\partial_1^* \bar{a}_k z_k, w_k) &= \bar{a}_{k,i} \left( K_0^{(0,1)} \begin{bmatrix} z_{k,i} \\ z_{k,i+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix} \right), \\
 \text{где } K_0^{(0,1)} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}_k \partial_1 z_k, w_k) &= \bar{a}_{k,i} \left( K_0^{(1,0)} \begin{bmatrix} z_{k,i} \\ z_{k,i+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{k,i} \\ w_{k,i+1} \end{bmatrix} \right), \\
 \text{где } K_0^{(1,0)} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Итак, резюмируя (5.6)-(5.9), записываем следующие окончательные формулы аппроксимации операторов:

4) Оператор  $\bar{a}_k \partial_1$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}_k \partial_1 z_k, w_k) &= \int_{\omega_i} \bar{a}_k (\partial_1 z_k) w_k dx_1 = \\
 &= \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} \bar{a}_k (\partial_1 z_k) w_k dx_1 \approx \bar{a}_i \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} (\partial_1 z_k) w_k dx_1.
 \end{aligned}$$

После перехода под интегралом от  $x_1$  к  $t$  будем иметь:

$$\bar{a}_k \varphi_k = \bar{a}_{k,i} h_{k,i} K_0^{(0,0)} \bar{\varphi}^{(k,i)}; \quad (5.10)$$

$$\partial_1^* \bar{a}_k \partial_1 \varphi_k = \frac{\bar{a}_{k,i}}{h_{k,i}} K_0^{(1,1)} \bar{\varphi}^{(k,i)}; \quad (5.11)$$

$$\partial_1^* \bar{a}_k \varphi_k = \bar{a}_{k,i} K_0^{(0,1)} \bar{\varphi}^{(k,i)}; \quad (5.12)$$

$$\bar{a}_k \partial_1 \varphi_k = \bar{a}_{k,i} K_0^{(1,0)} \bar{\varphi}^{(k,i)}, \quad (5.13)$$

$$\text{где } K_0^{(0,0)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad K_0^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$K_0^{(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad K_0^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5.14)$$



$$\mathcal{L}_{k,uu} \bar{u}_k \Rightarrow K_{k,uu} \bar{u}_n^{(k)}; \quad (7.4) \quad \bar{R}_{v,j}^{(k)} = \bar{R}_{v,j}^{(k)}(x_2) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad j=1,2; \quad (8.5)$$

$$K_{k,vv} = \begin{bmatrix} A_{2,1}^{(k)} & 0 \\ 0 & A_{2,2}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (7.5)$$

$$K_{k,uu} = \begin{bmatrix} A_{0,1}^{(k)} & 0 \\ 0 & A_{0,2}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (7.6)$$

$$K_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,1}^{(k)} \\ A_{1,2}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.7)$$

$$K_{k,vu} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,3}^{(k)} \\ A_{1,4}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.8)$$

$$\tilde{K}_{k,uv} = K_{k,uv} - K_{k,vu}; \quad (7.9)$$

$$K_{k,vu} = K_{k,uv}^*; \quad (7.10)$$

$$\bar{u}_n^{(k)} = \bar{u}_n^{(k)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,n}^{(k)} \\ \bar{u}_{2,n}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (7.11)$$

$$\bar{v}_n^{(k)} = \bar{v}_n^{(k)}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,n}^{(k)} \\ \bar{v}_{2,n}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (7.12)$$

$$\bar{u}_{j,n}^{(k)} = \bar{u}_{j,n}^{(k)}(x_2) = [u_{j,n}^{(k,1)} \ u_{j,n}^{(k,2)} \ \dots \ u_{j,n}^{(k,N_k)}]^T, \quad j=1,2; \quad (7.13)$$

$$\bar{v}_{j,n}^{(k)} = \bar{v}_{j,n}^{(k)}(x_2) = [v_{j,n}^{(k,1)} \ v_{j,n}^{(k,2)} \ \dots \ v_{j,n}^{(k,N_k)}]^T, \quad j=1,2. \quad (7.14)$$

## 8. ФОРМИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО ВЕКТОРА НАГРУЗОК

Пусть приложенная к конструкции нагрузка представляет собой совокупность сосредоточенных сил или сводится к такой совокупности. Глобальный вектор нагрузок имеет следующую структуру:

$$\bar{R}_k = \bar{R}_k(x_2) = [(\bar{R}_{k,u})^T \ (\bar{R}_{k,v})^T]^T, \quad (8.1)$$

$$\text{где } \bar{R}_{k,u} = \bar{R}_{k,u}(x_2) = [(\bar{R}_{u,1}^{(k)})^T \ (\bar{R}_{u,2}^{(k)})^T]^T; \quad (8.2)$$

$$\bar{R}_{k,v} = \bar{R}_{k,v}(x_2) = [(\bar{R}_{v,1}^{(k)})^T \ (\bar{R}_{v,2}^{(k)})^T]^T; \quad (8.3)$$

$$\bar{R}_{u,j}^{(k)} = \bar{R}_{u,j}^{(k)}(x_2) = [(\bar{R}_{u,j}^{(k,1)})^T \ (\bar{R}_{u,j}^{(k,2)})^T \ \dots \ (\bar{R}_{u,j}^{(k,N)})^T]^T, \quad (8.4) \\ j=1,2,$$

$R_{u,1}^{(k,i)}$  и  $R_{u,2}^{(k,i)}$  – значения сосредоточенных нагрузок, приложенных в  $i$ -м узле по направлению осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно. Пусть  $x_{2,q,k}^f$ ,  $q=1,2,\dots,n_q^{(k)}$  – координаты нагруженных поперечных сечений конструкции (см., например, рис. 8.1). Тогда можем записать:

$$\bar{R}_{k,u} = \bar{R}_{k,u}(x_2) = \sum_{q=1}^{n_q^{(k)}} \bar{R}_{k,q,u} \delta(x_2 - x_{2,q,k}^f), \quad (8.6)$$

где  $\bar{R}_{k,q,u}$  – вектор значений узловых нагрузок, приложенных в сечении с координатой  $x_{2,q,k}^f$ , структура которого аналогична вектору  $\bar{R}_{k,u}$ .

## 9. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Статические граничные условия на прямых  $x_1 = x_1^{(k,1)}$  и  $x_1 = x_1^{(k,N)}$  (части границы области  $\omega$ ) для рассматриваемой конструкции учитываются, как правило, в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи также должны быть приняты во внимание статические граничные условия на остальных элементах границы (если заданы) и кинематические граничные условия.

Пусть  $x_{2,k}^b$ ,  $k=1,2,\dots,n_k$  – координаты граничных поперечных сечений конструкции. Будем рассматривать ниже простейший случай, когда

$$N_k = N, \quad k=1,2,\dots,n_k; \quad (9.1)$$

$$x_1^{(k,i)} = x_{1,i}, \quad k=1,2,\dots,n_k, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (9.2)$$

причем

$$a_k = a, \quad k=1,\dots,n_k^b; \quad b_k = b, \quad k=1,\dots,n_k^b, \quad (9.3)$$

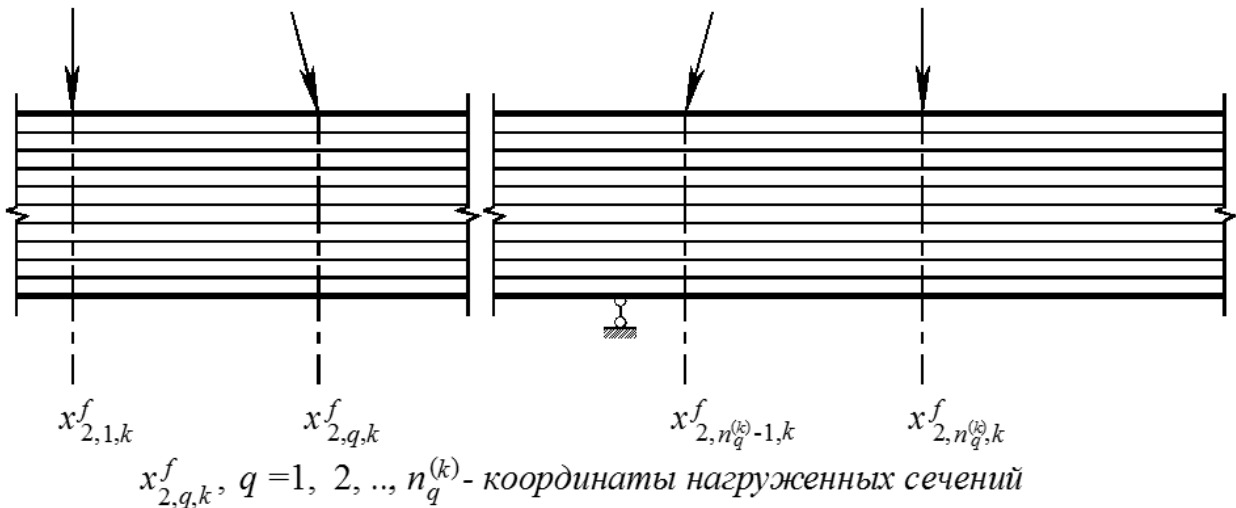


Рис. 8.1. Пример расположения координат нагруженных сечений.

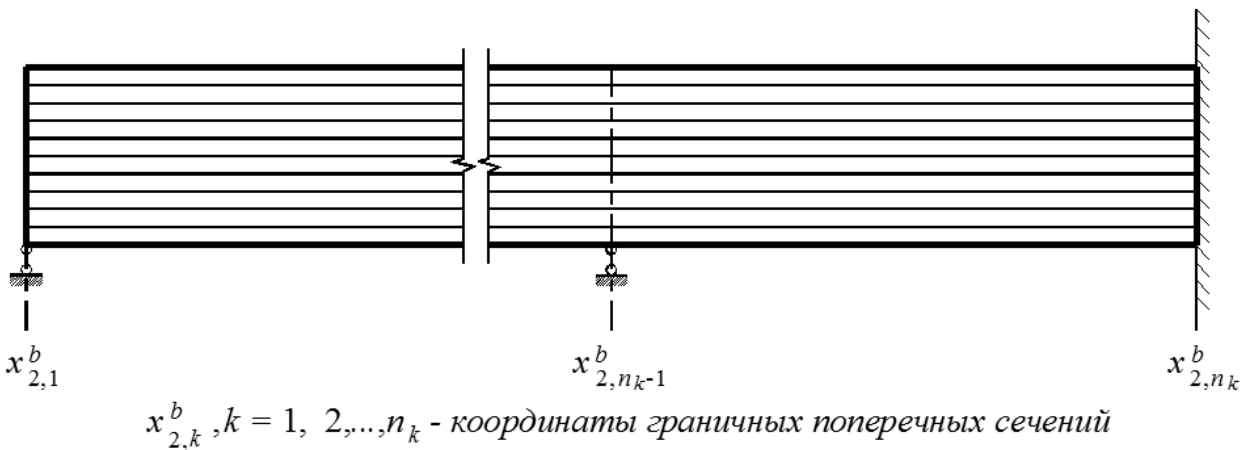


Рис. 9.1. Пример расположения координат граничных поперечных сечений.

т.е. сетка дискретно-континуальных конечных элементов одинакова для всех областей  $\omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  (см., например, рис. 9.1).

Граничные условия в точках  $x_{2,k}^b, k = 1, 2, \dots, n_k$  могут быть записаны в следующем виде

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (9.4)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (9.5)$$

где  $B_k^-, B_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $B_1^+, B_{n_k}^-$  - заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные  $4N$ -го порядка;

$\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  - заданные  $4N$ -мерные векторы правых частей граничных условий;

$$\bar{U}_n^{(k)} = \bar{U}_n^{(k)}(x_2) = [(\bar{u}_n^{(k)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k)})^T]^T. \quad (9.6)$$

Рассмотрим задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению основному направлению в форме (9.4)-(9.5) в произвольной граничной точке с координатой  $x_{2,k}^b$ . Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  - промежуточная граничная точка; 2)  $k = 1$  - крайняя левая (первая)

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

граничная точка; 3)  $k = n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.14)$$

*Шарнирное закрепление.*

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]; \quad (9.7)$$

$$u_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]. \quad (9.8)$$

На дискретно-континуальном уровне вместо (9.6)-(9.7) имеем:

$$u_{1,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad u_{2,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.9)$$

$$u_{1,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \quad u_{2,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.10)$$

Для случая  $k = 1$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad u_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]. \quad (9.11)$$

Дискретно-континуальный аналог (9.11) имеет вид:

$$u_{1,n}^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad u_{2,n}^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.12)$$

Для случая  $k = n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad u_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]. \quad (9.13)$$

Дискретно-континуальный аналог (9.13) имеет вид:

$$u_{1,n}^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad u_{2,n}^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0,$$

Условия (9.9)-(9.10), (9.12), (9.14) представимы в форме (9.4)-(9.5). Алгоритм формирования матриц  $B_k^-$  и  $B_k^+$  указан в таблицах 9.1 и 9.2 соответственно.

Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1$  и  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е.

$$\bar{g}_k^- = 0, \quad \bar{g}_k^+ = 0, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ \bar{g}_1^+ = 0, \quad \bar{g}_{n_k}^- = 0. \quad (9.15)$$

*Идеальный контакт.*

Случаи  $k = 1$  и  $k = n_k$  здесь, очевидно, неактуальны.

Рассмотрим случай  $1 < k < n_k$ , причем пусть

$$\theta_{k-1,i}(x_1, x_2) = 1, \quad \theta_{k,i}(x_1, x_2) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.16)$$

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - u_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]; \quad (9.17)$$

$$u_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - u_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]; \quad (9.18)$$

$$\mu_k \cdot ([\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + v_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0)) - \\ - \mu_{k-1} \cdot ([\partial_1 u_2^{(k-1)}](x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\ + v_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0)) = 0, \quad x_1 \in [a, b]; \quad (9.19)$$

$$\lambda_k [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + \\ + (\lambda_k + 2\mu_k)v_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) - \\ - \lambda_{k-1} [\partial_1 u_1^{(k-1)}](x_1, x_{2,k}^b - 0) - \\ - (\lambda_{k-1} + 2\mu_{k-1})v_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ x_1 \in [a, b]. \quad (9.20)$$

Дискретно-континуальный аналог (9.17)-(9.20) имеет вид:

$$u_{1,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - u_{1,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.21)$$

**Таблица 9.1.** Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании шарнирного закрепления в граничной точке (варианты граничной точки 1, 2).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1	$(i, i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$u_1^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(N + i, N + i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$u_2^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 3 граничной точки матрица  $B_k^+$  задается нулевой. 2. Все элементы матриц  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

**Таблица 9.2.** Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании шарнирного закрепления в граничной точке (варианты граничной точки 1, 3).

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное Условие
1	$(2N + i, i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$u_1^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$
2	$(3N + i, N + i), i = 1, 2, \dots, N$	1	$u_2^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, i = 1, 2, \dots, N$

Примечание: 1. При варианте 2 граничной точки матрица  $B_k^-$  задается нулевой. 2. Все элементы матриц  $B_k^-$  не указанные в таблице равны нулю.

$$u_{2,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - u_{2,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.22)$$

$$\sigma_{12,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - \sigma_{12,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.23)$$

$$\sigma_{22,n}^{(k,i)}(x_{2,k}^b + 0) - \sigma_{22,n}^{(k-1,i)}(x_{2,k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.24)$$

При  $k = 1$  имеем следующие граничные условия:

$$\mu_1 \cdot ([\partial_1 u_2^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + v_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0)) = 0, \quad x_1 \in [a, b]; \quad (9.25)$$

$$\lambda_1 [\partial_1 u_1^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + (\lambda_1 + 2\mu_1)v_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad x_1 \in [a, b]. \quad (9.26)$$

Дискретно-континуальный аналог (9.25)-(9.26) имеет вид:

$$\sigma_{12,n}^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.27)$$

$$\sigma_{22,n}^{(1,i)}(x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.28)$$

При  $k = n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$\mu_{n_k-1} \cdot ([\partial_1 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + v_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0)) = 0, \quad x_1 \in [a, b]; \quad (9.29)$$

После записи граничных условий в виде (9.21)-(9.24), переписываем их в форме (9.4)-(9.5), используя при этом формулы (3.7)-(3.22).

Алгоритм формирования матриц  $B_k^+$  и  $B_k^-$ , учитывающих приведенные выше соотношения, описан в таблицах 9.3 и 9.4 соответственно. Векторы  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$  задаются нулевыми, т.е. определяются формулой (9.15).

*Свободный край.*

Рассмотрим ниже два наиболее характерных частных случая.

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

Таблица 9.3. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^+$  при задании идеального контакта в граничной точке  $x_{2,k}^b$ ,  $1 < k < n_k$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, i), i = 1, 2, \dots, N$	1	(9.21)
2	$(N+i, N+i), i = 1, 2, \dots, N$	1	(9.22)
3	$(2N+1, N+1)$	$\mu_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.23) $i = 1$
4	$(2N+1, N+2)$	$\mu_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
5	$(2N+1, 3N+1)$	$\mu_{k,1}$	
6	$(2N+i, N+i-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.23) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
7	$(2N+i, N+i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{k,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
8	$(2N+i, N+i+1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{k,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
9	$(2N+i, 2N+i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} (\mu_{k,i-1} + \mu_{k,i})$	
10	$(3N, 2N-1)$	$\mu_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.23) $i = N$
11	$(3N, 2N)$	$\mu_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
12	$(3N, 3N)$	$\mu_{k,N-1}$	
13	$(3N+1, 1)$	$\lambda_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.24) $i = 1$
14	$(3N+1, 2)$	$\lambda_{k,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
15	$(3N+1, 2N+1)$	$\lambda_{k,1} + 2\mu_{k,1}$	
14	$(3N+i, i-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{k,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.24) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
15	$(3N+i, i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{k,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{k,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N+i, i+1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \lambda_{k,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	

1	2	3	4
17	$(3N+i, 3N+i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2}(\lambda_{k,i-1} + \lambda_{k,i}) + \mu_{k,i-1} + \mu_{k,i}$	(9.24) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
18	$(4N, N-1)$	$\lambda_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.24) $i = N$
19	$(4N, N)$	$\lambda_{k,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N, 4N)$	$\lambda_{k,N-1} + 2\mu_{k,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_k^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 9.4. Алгоритм заполнения матрицы  $B_k^-$  при задании идеального контакта в граничной точке  $x_{2,k}^b, 1 < k < n_k$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Соответствующее условие
1	2	3	4
1	$(i, i), i = 1, 2, \dots, N$	-1	(9.21)
2	$(N+i, N+i), i = 1, 2, \dots, N$	-1	(9.22)
3	$(2N+1, N+1)$	$-\mu_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.23) $i = 1$
4	$(2N+1, N+2)$	$-\mu_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	(9.23) $i = 1$
5	$(2N+1, 2N+1)$	$-\mu_{k-1,1}$	
6	$(2N+i, N+i-1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \mu_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.23) $i = 2, 3, \dots,$ $N-1$
7	$(2N+i, N+i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{k-1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
8	$(2N+i, N+i+1),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \mu_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
9	$(2N+i, 2N+i),$ $i = 2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} (\mu_{k-1,i-1} + \mu_{k-1,i})$	
10	$(3N, 2N-1)$	$-\mu_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.23) $i = N$
11	$(3N, 2N)$	$-\mu_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
12	$(3N, 3N)$	$-\mu_{k-1,N-1}$	
13	$(3N+1, 1)$	$-\lambda_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.24) $i = 1$

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

1	2	3	4
14	$(3N+1, 2)$	$-\lambda_{k-1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	(9.24) $i=1$
15	$(3N+1, 2N+1)$	$-(\lambda_{k-1,1} + 2\mu_{k-1,1})$	
14	$(3N+i, i-1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \lambda_{k-1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.24) $i=2, 3, \dots,$ $N-1$
15	$(3N+i, i),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{k-1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{k-1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N+i, i+1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} \lambda_{k-1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(3N+i, 3N+i),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$-\frac{1}{2} (\lambda_{k-1,i-1} + \lambda_{k-1,i})$ $-\mu_{k-1,i-1} - \mu_{k-1,i}$	(9.24) $i=2, 3, \dots,$ $N-1$
18	$(4N, N-1)$	$-\lambda_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.24) $i=N$
19	$(4N, N)$	$-\lambda_{k-1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N, 4N)$	$-(\lambda_{k-1,N-1} + 2\mu_{k-1,N-1})$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_k^-$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 9.5. Алгоритм заполнения матрицы  $B_1^+$  при задании свободного края в граничной точке  $x_{2,1}^b = 0$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(1, N+1)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.27) $i=1$
2	$(1, N+2)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
3	$(1, 2N+1)$	$\mu_{1,1}$	
4	$(i, N+i-1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.27) $i=2, 3, \dots,$ $N-1$
5	$(i, N+i), i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
6	$(i, N+i+1),$ $i=2, 3, \dots, N-1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	

1	2	3	4
7	$(i, 2N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2}(\mu_{1,i-1} + \mu_{1,i})$	(9.27) $i = 2, 3, \dots,$ $N - 1$
8	$(N, 2N - 1)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.27) $i = N$
9	$(N, 2N)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
10	$(N, 3N)$	$\mu_{1,N-1}$	
11	$(N + 1, 1)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.28) $i = 1$
12	$(N + 1, 2)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
13	$(N + 1, 2N + 1)$	$\lambda_{1,1} + 2\mu_{1,1}$	
14	$(N + i, i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.28) $i = 2, 3, \dots,$ $N - 1$
15	$(N + i, i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(N + i, i + 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(N + i, 3N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} (\lambda_{1,i-1} + \lambda_{1,i}) + \mu_{1,i-1} + \mu_{1,i}$	
18	$(2N, N - 1)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.28) $i = N$
19	$(2N, N)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(2N, 4N)$	$\lambda_{1,N-1} + 2\mu_{1,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_1^+$  не указанные в таблице равны нулю.

Таблица 9.6. Алгоритм заполнения матрицы  $B_{n_k}^-$  при задании свободного края в граничной точке  $x_{2,n_k}^b = l_2$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1	2	3	4
1	$(2N + 1, N + 1)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.31) $i = 1$

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенки. Часть 2: Численная реализация метода

1	2	3	4
2	$(2N + 1, N + 2)$	$\mu_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	(9.31) $i = 1$
3	$(2N + 1, 2N + 1)$	$\mu_{1,1}$	
4	$(2N + i, N + i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.31) $i = 2, 3, \dots,$ $N - 1$
5	$(2N + i, N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\mu_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
6	$(2N + i, N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \mu_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
7	$(2N + i, 2N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} (\mu_{1,i-1} + \mu_{1,i})$	
8	$(3N, 2N - 1)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.31) $i = N$
9	$(3N, 2N)$	$\mu_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
10	$(3N, 3N)$	$\mu_{1,N-1}$	
11	$(3N + 1, 1)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_1(0)$	(9.32) $i = 1$
12	$(3N + 1, 2)$	$\lambda_{1,1} \frac{1}{h_1} N'_2(0)$	
13	$(3N + 1, 2N + 1)$	$\lambda_{1,1} + 2\mu_{1,1}$	
14	$(3N + i, i - 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i-1} \frac{1}{h_{i-1}} N'_1(1)$	(9.32) $i = 2, 3, \dots,$ $N - 1$
15	$(3N + i, i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{1,i-1}}{h_{i-1}} N'_2(1) + \frac{\lambda_{1,i}}{h_i} N'_1(0) \right]$	
16	$(3N + i, i + 1),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} \lambda_{1,i} \frac{1}{h_i} N'_2(0)$	
17	$(3N + i, 3N + i),$ $i = 2, 3, \dots, N - 1$	$\frac{1}{2} (\lambda_{1,i-1} + \lambda_{1,i}) + \mu_{1,i-1} + \mu_{1,i}$	
18	$(4N, N - 1)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_1(1)$	(9.32) $i = N$
19	$(4N, N)$	$\lambda_{1,N-1} \frac{1}{h_{N-1}} N'_2(1)$	
20	$(4N, 4N)$	$\lambda_{1,N-1} + 2\mu_{1,N-1}$	

Примечание: Все элементы матрицы  $B_{n_i}^-$  не указанные в таблице равны нулю.

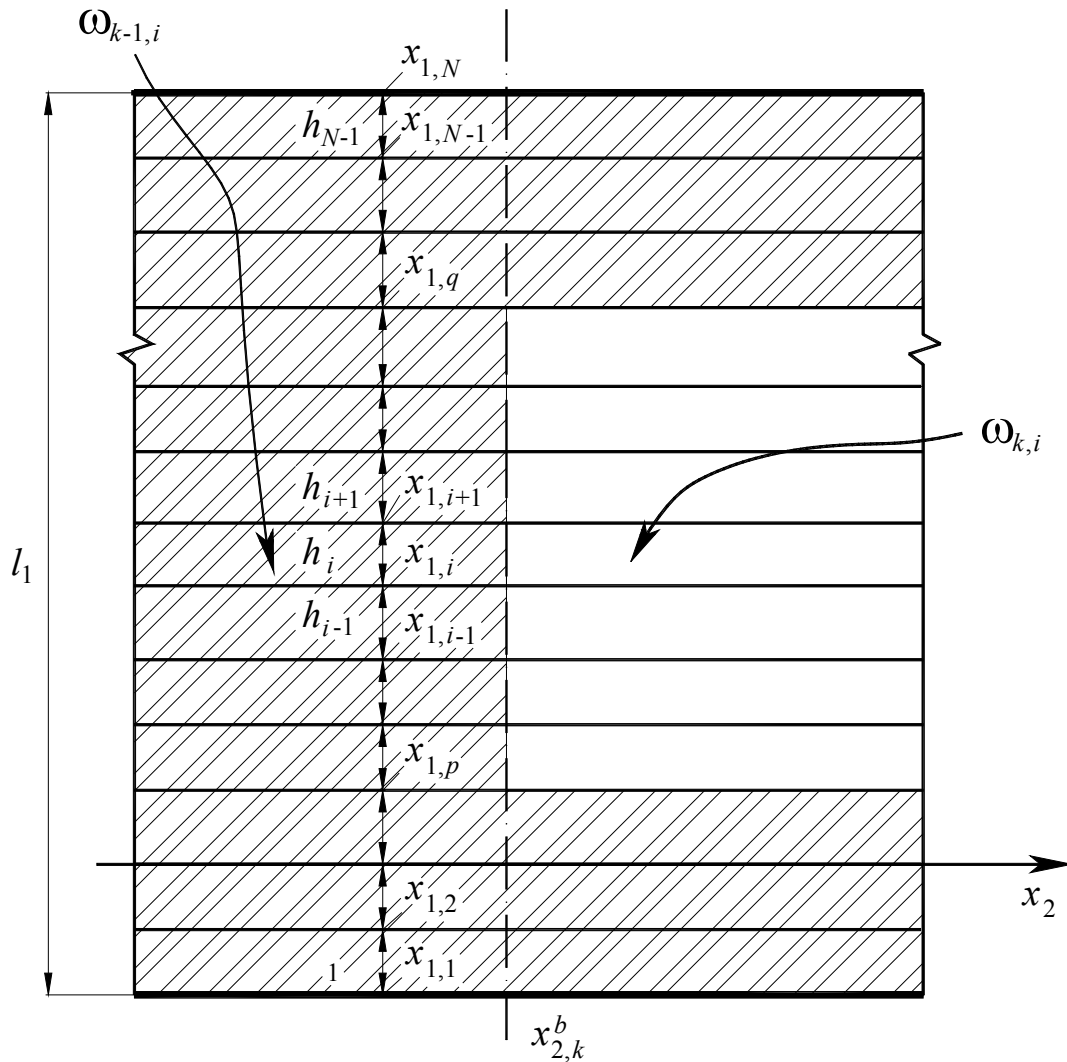


Рис. 9.2. Пример конструкции с «пустотами».

$$\lambda_{n_k-1}[\partial_1 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + (\lambda_{n_k-1} + 2\mu_{n_k-1})v_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad x_1 \in [a, b]. \quad (9.30)$$

Дискретно-континуальный аналог (9.29)-(9.30) имеет вид:

$$\sigma_{12,n}^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (9.31)$$

$$\sigma_{22,n}^{(n_k-1,i)}(x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.32)$$

После записи граничных условий в виде (9.27)-(9.28) и (9.31)-(9.32), представляем их в форме (9.3)-(9.4), используя формулы (3.7)-(3.22).

Алгоритм формирования соответствующих матриц  $B_1^+$  и  $B_{n_k}^-$ , учитывающих приведенные выше соотношения, описан в таблицах 9.5 и 9.6. Векторы  $\bar{g}_1^+$ ,  $\bar{g}_{n_k}^-$  задаются нулевыми, т.е. определяются приведенной ранее формулой (9.15).

О задании граничных условий в объекте с «пустотами».

Выше были рассмотрены алгоритмы задания граничных условий в виде шарнирного закрепления, идеального контакта и свободного края, при этом всюду полагалось, что в рассматриваемом объекте отсутствуют «пустоты», т.е. выполняется условие:





Таблица 13.1. Алгоритм заполнения матрицы перестановок  $I_G$ .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1.	$(4p-3, p),$ $p=1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $u_{1,n}^{(k,i)}, i=1, 2, \dots, N$
2.	$(4p-2, N+p),$ $p=1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $u_{2,n}^{(k,i)}, i=1, 2, \dots, N$
3.	$(4p-1, 2N+p),$ $p=1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $v_{1,n}^{(k,i)}, i=1, 2, \dots, N$
4.	$(4p, 3N+p),$ $p=1, 2, \dots, N$	1	перестановка элементов $v_{2,n}^{(k,i)}, i=1, 2, \dots, N$

Примечание: Все элементы матрицы  $I_G$  не указанные в таблице равны нулю.

$$\begin{aligned} \bar{U}_k &= [u_{1,n}^{(k,1)} \quad u_{1,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad u_{1,n}^{(k,1)} \\ &\quad u_{2,n}^{(k,1)} \quad u_{2,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad u_{2,n}^{(k,1)} \\ &\quad v_{1,n}^{(k,1)} \quad v_{1,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad v_{1,n}^{(k,1)} \\ &\quad v_{2,n}^{(k,1)} \quad v_{2,n}^{(k,2)} \quad \dots \quad v_{2,n}^{(k,1)}]^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{U}_k &= [u_{1,n}^{(k,1)} \quad u_{2,n}^{(k,1)} \quad v_{1,n}^{(k,1)} \quad v_{2,n}^{(k,1)} \\ &\quad u_{1,n}^{(k,2)} \quad u_{2,n}^{(k,2)} \quad v_{1,n}^{(k,2)} \quad v_{2,n}^{(k,2)} \quad \dots \\ &\quad \dots \quad u_{1,n}^{(k,N)} \quad u_{2,n}^{(k,N)} \quad v_{1,n}^{(k,N)} \quad v_{2,n}^{(k,N)}]^T. \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1^+ &= I_G^T \tilde{B}_1^+ I_G, \quad \tilde{B}_{n_k}^- = I_G^T \tilde{B}_{n_k}^- I_G, \\ \tilde{g}_1^+ &= I_G^T \tilde{g}_1^+, \quad \tilde{g}_{n_k}^- = I_G^T \tilde{g}_{n_k}^-, \end{aligned} \quad (13.5)$$

$I_G$  – матрица перестановок, элементы которой определяются по таблице 13.1.

Матрицы коэффициентов  $\tilde{A}_k, k=1, \dots, n_k-1$  в системах (13.1) по аналогии с матрицами жесткости в традиционном МКЭ имеют блочно-диагональную структуру.

Тогда преобразованный набор многоточечных краевых задач имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_k'(x_2) &= \tilde{A}_k \bar{U}_k(x_2) + \tilde{R}_k(x_2), \\ &\quad k=1, 2, \dots, n_k-1; \\ \tilde{B}_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \\ &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k-1; \\ \tilde{B}_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \\ &= \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \end{aligned} \right. \quad (13.2)$$

где

$$\tilde{A}_k = I_G^T A_k I_G, \quad \tilde{R}_k(x_2) = I_G \bar{R}_k(x_2), \quad (13.3)$$

$$\bar{U}_k(x_2) = I_G^T \bar{U}_k(x_2), \quad k=1, \dots, n_k-1;$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k^- &= I_G^T \tilde{B}_k^- I_G, \quad \tilde{B}_k^+ = I_G^T \tilde{B}_k^+ I_G, \\ \tilde{g}_k^- &= I_G^T \tilde{g}_k^-, \quad \tilde{g}_k^+ = I_G^T \tilde{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k-1; \end{aligned} \quad (13.4)$$

#### 14. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Корректное аналитическое решение многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами производится по методу, описанному в [1]. После определения узловых перемещений и их производных по переменной  $x_2$  по формулам (4.1)-(4.6) вычисляются деформации и напряжения.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Точное аналитическое решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wrocław, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 21-30.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка задачи. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wrocław, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 97-107.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Численная реализация. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wrocław, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 108-118.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Герман А.Ю.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 3: Программная реализация и пример расчета. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wrocław, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 119-128.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. Статья в настоящем журнале.
6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.

7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.  
Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.  
Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
9. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.  
Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
10. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
11. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
12. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
13. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

# ОБ ОДНОМ КОРРЕКТНОМ ВАРИАНТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА БАЛОК-СТЕНОК ЧАСТЬ 3: ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья продолжает серию публикаций авторов посвященных постановке и численному решению краевой задачи расчета балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Ниже кратко рассматривается программная реализация метода, приводятся сведения о некоторых простейших примерах расчета.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный метод конечных элементов, численная реализация, краевая задача, строительные конструкции, балки-стенки, кусочно-постоянные параметры

## ABOUT ONE CORRECT VERSION OF DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD OF STATIC ANALYSIS OF DEEP BEAMS PART 3: SOFTWARE & SAMPLES

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper begins a series of publications devoted to formulation and numerical solution of the boundary problem of static analysis of deep beam with piecewise constant physical and geometrical parameters within discrete-continual finite element method. Corresponding software and several verification samples are under consideration.

**Key words:** discrete-continual finite element method, boundary problem, structures, deep beam, piecewise constant parameters, software, samples

### 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Разработанный вариант дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному их направлений (услов-

но называемому основным направлением) реализован в авторском программном комплексе *DCFEM2Dpc*.

Разработанный программный комплекс может использоваться на современных ПЭВМ с процессорами типа Intel Xeon и Intel Core (имеются соответствующие оптимизированные версии исполнительных модулей). Рекомендуемый объем оперативной памяти – 6

гигабайт и более. На жестком диске требуется около 1 гигабайта свободного пространства. Поддерживаются операционные системы Microsoft Windows XP/Vista/7/8. При написании текущих версий вычислительных модулей комплекса использовался язык программирования FORTRAN стандарта FORTRAN-90/95, среда Microsoft Visual Studio 2008 и компилятор Intel Fortran Compiler 11.1.038.

Для описания геометрии области, занимаемой конструкцией, используется характеристическая функция области, задаваемая для каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимирующей сетки. Пользователю предоставляется возможность самому указать соответствующие значения характеристической функции.

При задании физических параметров (характеристик), относящихся к рассматриваемому объекту, следует учитывать то обстоятельство, что в физические параметры в пределах дискретно-континуального конечного элемента считаются постоянными.

Внешние нагрузки (а также краевые условия второго рода) задаются, как правило, в виде сосредоточенных воздействий, расположенных на проекциях в соответствии с размерностью задачи и принятой системой координат, и с указанием координат точек их приложения. Для задания краевых условий первого рода (закреплений) возможны два варианта. Первый вариант: все крепления попадают в узлы сетки. Второй вариант: крепление находится в произвольном месте – в этом случае при решении задачи используется метод «штрафа», а в исходных данных указываются координаты крепления. Формирование набора разрешающих систем и правых частей производится программным путем, на основе изложенных в [6] алгоритмов и формул. Решение разрешающей многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами выполняется аналитически, в соответствии с методом, предложенным в статье [1].

При разработке авторского программного комплекса большое внимание было уделено удобству ввода исходной информации и наглядности получаемых результатов. Исходные данные вносятся пользователем вручную. Кроме ручного способа задания сетки для этих целей может быть использована автоматизированная система проектирования AutoCAD (версии 2008/2009/2010/2011/2012/2013/ 2014) [7, 8], в среде которой пользователь может вычертить заданную конструкцию, нанести на нее сетку, а затем определить координаты узлов. Такой визуальный способ их нахождения упрощает этот процесс и, по сути, сводит к минимуму возможные ошибки при задании сетки.

В целом, использование топологически регулярных сеток позволило разработать удобные средства для задания не только геометрической информации, но и механических характеристик, нагрузок и граничных условий. Для проверки правильности задания исходной информации предусмотрена возможность ее программной диагностики с выдачей при обнаружении ошибок соответствующих предупредительных сообщений. Выходная информация может выдаваться различными способами. Первый: таблица чисел. Удобство представления чисел в табличной форме заключается в том, что каждый узел на соответствующей «распечатке» располагается в окружении своих непосредственных соседей. Границы исходной области легко определяются, поскольку узлам, не принадлежащим области, описываемой конструкцией, всегда соответствуют нулевые значения, тогда как точный ноль для реальной функции во внутреннем узле является большой редкостью. Кроме того, естественная для топологически регулярной сетки мультииндексная нумерация узлов и элементов существенно повышает «читаемость» таблиц с результатами. Для большей наглядности получаемой информации при выдаче результатов на печать или визуализации на экране монитора могут быть дополнительно использованы программные комплексы

GRAPHER (например, версия 8.0) и SURFER (например, версия 10.0) фирмы Golden Software. С их помощью интересующие пользователя функции представляются в виде двумерных и трехмерных графиков, топологических поверхностей, изополей, изолиний и т.д.

Файлы исходных данных комплекса располагаются в поддиректории INPUTDATA и имеют расширение DAT, например, MAIN.DAT. При задании исходных данных вся вводимая информация должна располагаться в определенном порядке. Ниже приводится структура ввода исходной информации с указанием соответствия заполняемых файлов определенным разделам данных: общие сведения о задаче (MAIN.DAT); сведения о координатах узлов сетки задаче (MESH.DAT, XHG.DAT); сведения о параметрах упругого основания при наличии последнего (MBOUND.DAT, SBOUND.DAT); сведения о длинах участков постоянства физико-геометрических параметров конструкции (DL.DAT); сведения о толщинах участков постоянства физико-геометрических параметров конструкции (H3DTH.DAT); сведения о приложенных нагрузках (XF.DAT, F.DAT, NXF.DAT); сведения о граничных точках и граничных условиях (XB.DAT, IDXB.DAT, IDBOUNDARY.DAT); сведения о физических параметрах дискретно-континуальных конечных элементов (LAME.DAT, IDEL.DAT); сведения о точках и сечениях табуляции искомым величин (N2TAB.DAT, X2TAB.DAT, TABSECTIONS.DAT).

Общие сведения о задаче включают в себя следующие данные: мерность решаемой задачи; количество узлов в аппроксимирующей сетке по неосновному направлению; количество граничных точек; общее количество участков по основному направлению; количество участков постоянства параметров по основному направлению; количество дискретно-континуальных конечных элементов; максимальное количество нагруженных поперечных сечений на участке; максимальное

количество сечений табуляции по основному направлению на участке; максимальное общее количество сечений табуляции по основному направлению; идентификатор задания упругого основания; величины характеризующие точность вычислений; идентификатор уровня проверок вычислений.

Координаты узлов сетки задаются в установленном порядке. Область, занимаемая конструкцией, описывается характеристической функцией, задаваемой поэлементно. При задании физических характеристик принято, что все они остаются постоянными в пределах дискретно-континуального конечного элемента. При задании внешней нагрузки вся она приводится к сосредоточенным воздействиям, приложенным к заданной конструкции. Граничные условия задаются соответствующими матрицами коэффициентов и векторами правых частей в соответствии с приведенным в [...] видом.

Программный комплекс представляет собой наборы независимых программных модулей. Обмен информацией между модулями производится на уровне входных и выходных, как правило, бинарных файлов (с расширением BIN). Стандартная конфигурация комплекса состоит из нескольких основных программных модулей, которые кратко характеризуются ниже.

1) Модуль *DCFEM2DPCDATA* отвечает за подготовку и проверку исходных данных по решаемой задаче. Здесь производится формирование массива координат узлов аппроксимирующей сетки, массивов координат и идентификаторов граничных точек, массивов координат сечений с приложенными внешними нагрузками по основному направлению и их величин в узлах аппроксимирующей сетки, массивов координат и идентификаторов точек табуляции по основному направлению, массива длин участков конструкции по основному направлению, массивов физических характеристик (параметров Ламе) дискретно-континуальных конечных элементов и идентификаторов «пустот», массивов узловых характеристических функций и па-

раметров граничных условий, массивов идентификаторов граничных условий и т.д., реализована многоуровневая система диагностики ошибок.

2) Модуль *DCFEM2DPCMATRIX* отвечает за формирование матриц коэффициентов разрешающей многоточечной краевой задачи. Здесь выполняется формирование локальных матриц жесткости дискретно-континуальных конечных элементов, а затем и соответствующих глобальных матриц на основании использования известного в теории метода конечных элементов метода конечных вкладов.

3) Модуль *DCFEM2DPC EIGEN* отвечает за определение собственных значений и собственных векторов исходных и транспонированных матриц коэффициентов разрешающей многоточечной краевой задачи.

4) Модуль *DCFEM2DPC DECOMP* отвечает за определение характеристик и сортировку собственных значений исходных и транспонированных матриц коэффициентов разрешающей многоточечной краевой задачи (алгебраическая и геометрическая кратности), формирование соответствующих матриц левых и правых собственных векторов, вычисление максимальных порядков жордановых клеток, соответствующих нулевым собственным значениям.

5) Модуль *DCFEM2DPC PROJECTORS* отвечает за определение матриц проектирования на подпространства ненулевых и нулевых собственных значений матриц коэффициентов разрешающей многоточечной краевой задачи.

6) Модуль *DCFEM2DPC VECTOR* отвечает за формирование векторов правых частей разрешающей многоточечной краевой задачи.

7) Модуль *DCFEM2DPC FUNCTION* отвечает за формирование массивов соответствующих значений фундаментальной матрицы-функции, необходимых для построения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов в выражениях

для общего решения многоточечной краевой задачи.

8) Модуль *DCFEM2DPC BOUNDARY* отвечает за формирование матриц коэффициентов и векторов правых частей граничных условий.

9) Модуль *DCFEM2DPC SVECTORS* отвечает за вычисления вектор-функции решения многоточечной краевой задачи в соответствующих точках, необходимые для формирования вектора правых частей разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов в выражениях для общего решения многоточечной краевой задачи.

10) Модуль *DCFEM2DPC SYSTEM* отвечает за формирование разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов в выражениях для общего решения многоточечной краевой задачи.

11) Модуль *DCFEM2DPC COEFFICIENTS* отвечает за решение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов в выражениях для общего решения многоточечной краевой задачи.

12) Модуль *DCFEM2DPC SOLUTION* отвечает за определение вектор-функции решения многоточечной краевой задачи в заданных точках табуляции.

13) Модуль *DCFEM2DPC DISPLACE* отвечает за определение узловых перемещений (в точках (сечениях) табуляции) дискретно-континуальных конечных элементов.

14) Модуль *DCFEM2DPC DISPLACE PRN* отвечает за распечатку (как правило, в файлы) узловых перемещений (в точках (сечениях) табуляции) дискретно-континуальных конечных элементов.

15) Модуль *DCFEM2DPC STRESS* отвечает за определение напряжений и деформаций в заданных точках (сечениях) дискретно-континуальных конечных элементов, а также соответствующих напряжений и деформаций, приведенных к узлам в заданных точках (сечениях) табуляции конструкции.

16) Модуль *DCFEM2DPCSTRESSPRN* отвечает за распечатку (как правило, в файлы) напряжений и деформаций в заданных точках (сечениях) дискретно-континуальных конечных элементов, а также соответствующих напряжений и деформаций, приведенных к узлам в заданных точках (сечениях) таблицы конструкции.

Как уже отмечалось выше, при разработке авторского программного комплекса особое внимание было уделено вопросам наглядности представления результатов. В связи с этим, результатом работы вышеперечисленных модулей является создание трех типов файлов. Файлы с расширением DAT содержат результаты вычислений в табличной форме; некоторые из файлов с расширением DAT также могут использоваться для работы с пакетами SURFER и GRAPHER фирмы Golden Software; файлы с расширением BIN требуются для последующих модулей комплексов; файлы с расширением TMP являются временными (в пределах модуля).

## 2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА.

### Пример 1.

Пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения и перемещения) простейшей однопролетной балки-стенки с постоянными физико-геометрическими характеристиками.

Пусть боковые вертикальные грани конструкции шарнирно закреплены (рис. 2.1). Геометрические расчетные параметры:  $l = 300$  см;  $h = 300$  см;  $a_1 = a_2 = 150$  см. Толщина  $\delta = 20$  см. Расчетные параметры материала балки  $E = 3000$  кН/см<sup>2</sup> (модуль упругости),  $\nu = 0.16$  (коэффициент Пуассона). Расчетный параметр внешней нагрузки:  $P = 100$  кН.

Результаты расчета, выполненного с использованием авторского программного комплекса *DCFEM2Dpc*, представлены на рис. 2.2-2.9. Для контроля получаемых результатов использовался верифицированный программный комплекс промышленного типа «Лира» (версия 9.6R9).

На рисунках 2.10-2.12 приведены результаты сопоставления перемещений и напряжений по сечениям «1-1» ( $x_1 = 10$  см) и «2-2» ( $x_1 = 15$  см). По результатам проведенных сопоставлений можно сделать вывод о хорошей согласованности данных.

### Пример 2.

Пусть требуется выполнить статический расчет (определить напряжения и перемещения) балки-стенки, боковые вертикальные грани которой шарнирно закреплены (рис. 2.1). Геометрические расчетные параметры:  $l = 600$  см;  $h = 300$  см;  $l_1 = l_2 = 300$  см;  $a_1 = a_2 = 150$  см. Толщина (условная)  $\delta = 1$  см. Расчетные параметры материала балки: для первой половины  $E_1 = 3000$  кН/см<sup>2</sup>,  $\nu = 0.16$ ; для второй половины  $E_2 = 3500$  кН/см<sup>2</sup>,  $\nu = 0.14$ . Расчетные параметры внешней нагрузки:  $P_1 = P_2 = 100$  кН.

Результаты расчета, выполненного с использованием авторского программного комплекса *DCFEM2Dpc*, представлены на рис. 2.14-2.21. Для контроля получаемых результатов использовался верифицированный программный комплекс промышленного типа «Лира» (версия 9.6R9).

На рисунках 2.22-2.24 приведены результаты сопоставления перемещений и напряжений по сечениям «1-1» ( $x_1 = 10$  см) и «2-2» ( $x_1 = 15$  см). По результатам проведенных сопоставлений можно сделать вывод о хорошей согласованности данных.

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов

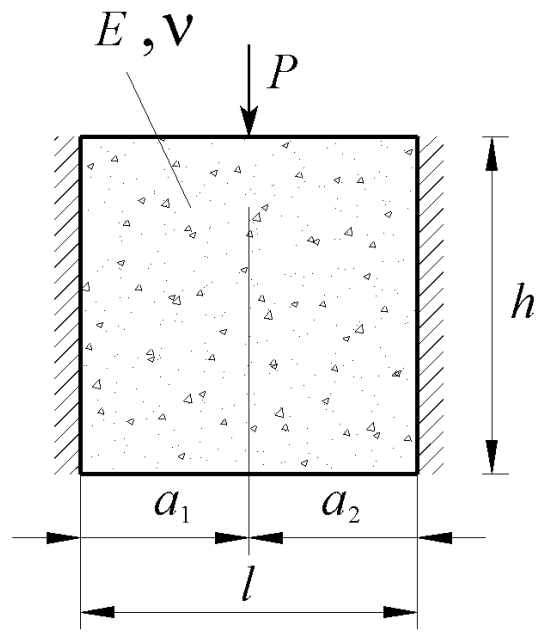


Рис. 2.1. Рассматриваемая конструкция.

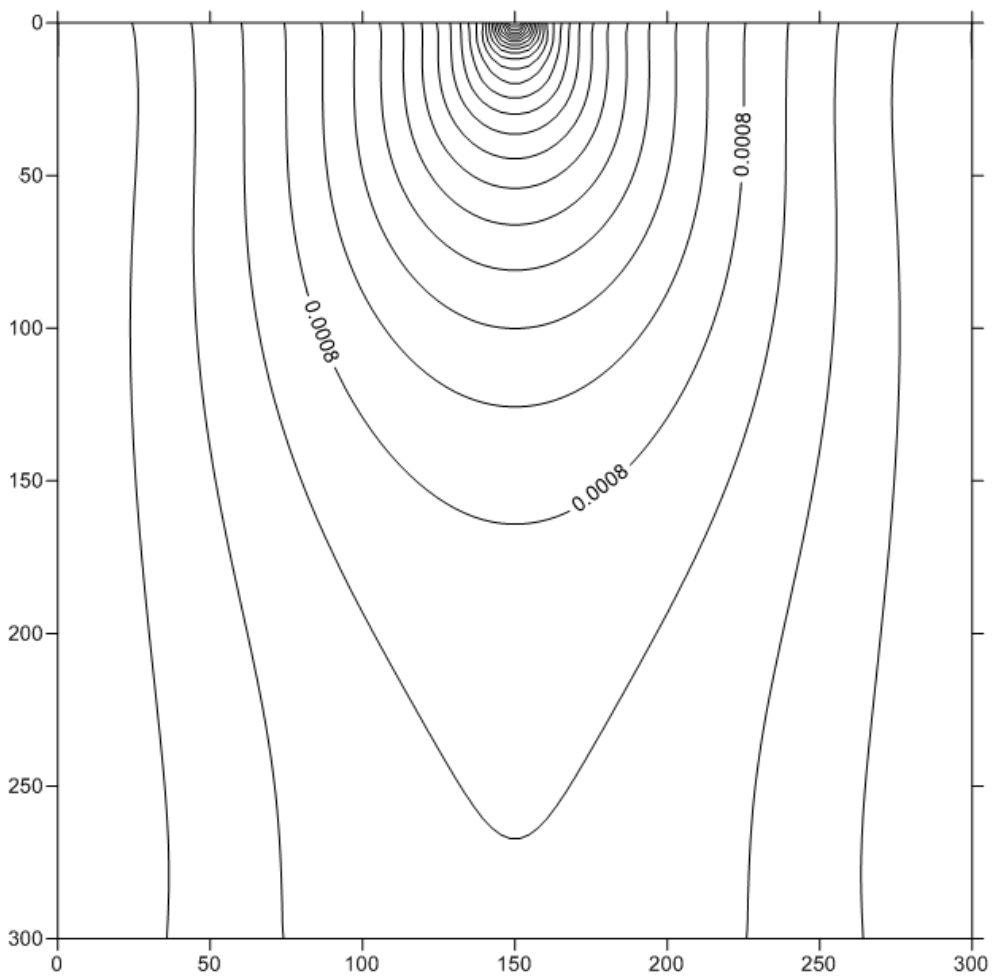


Рис. 2.2. Изополе перемещений  $u_1$  (в см).

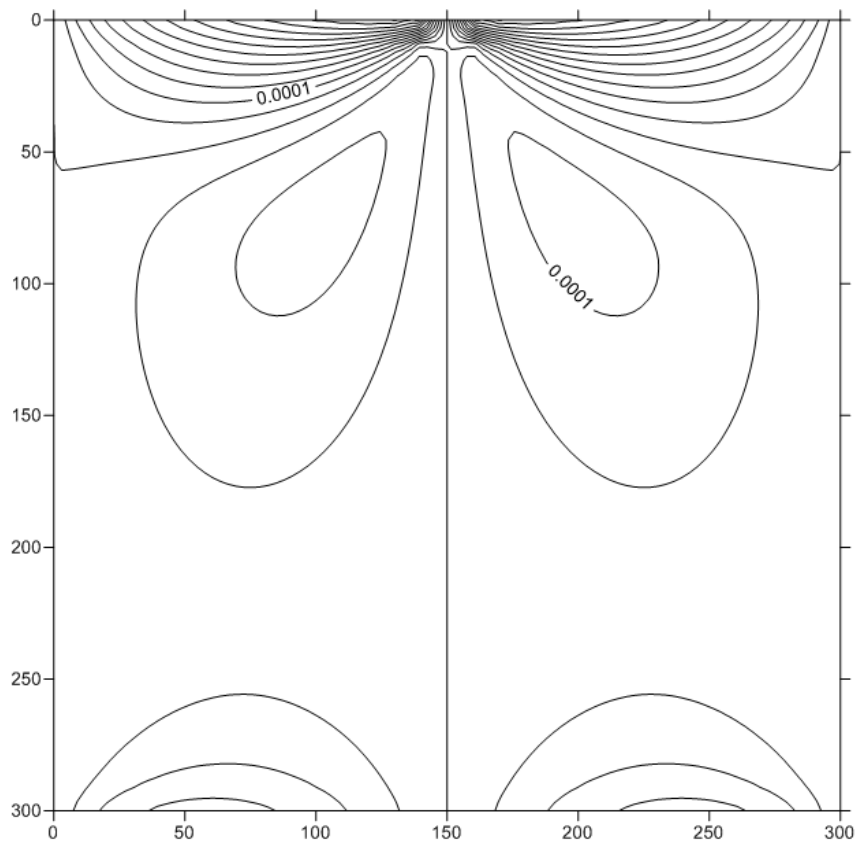


Рис. 2.3. Изополе перемещений  $u_2$  (в см).

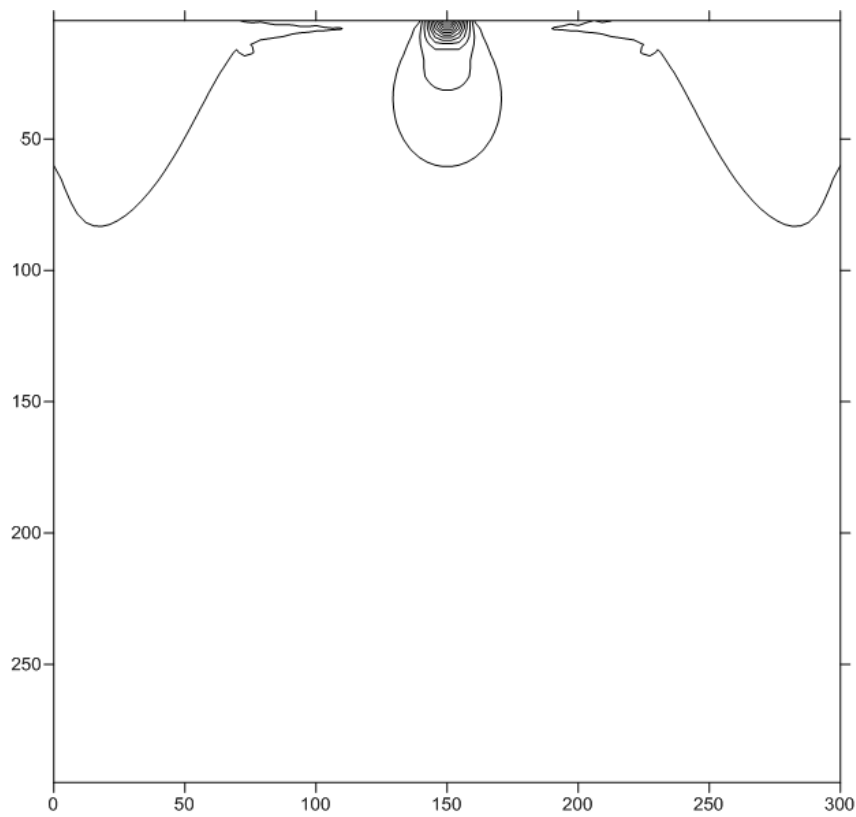


Рис. 2.4. Изополе напряжений  $\sigma_{11}$  (приведенных к элементам).

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов

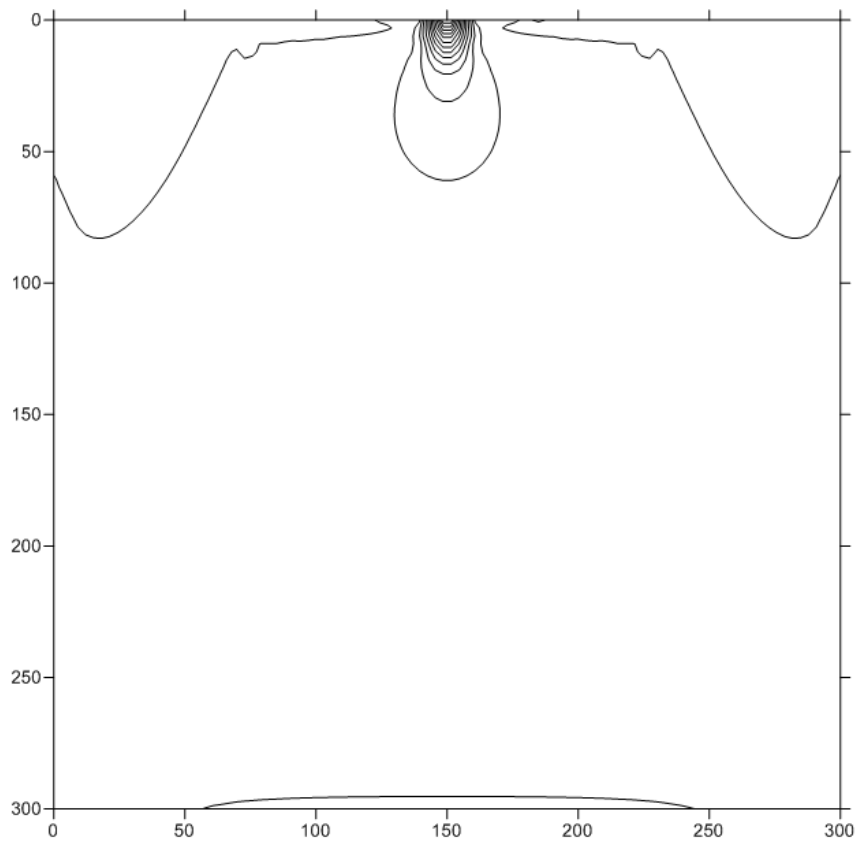


Рис. 2.5. Изополе напряжений  $\sigma_{11}$  (приведенных к узлам).

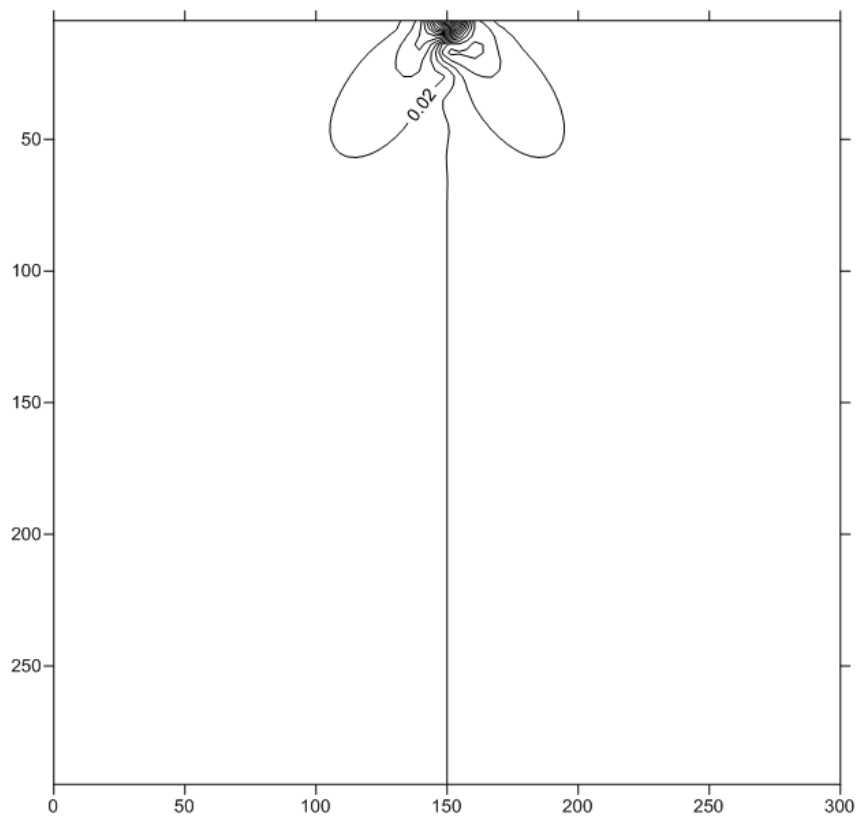


Рис. 2.6. Изополе напряжений  $\sigma_{12}$  (приведенных к элементам).

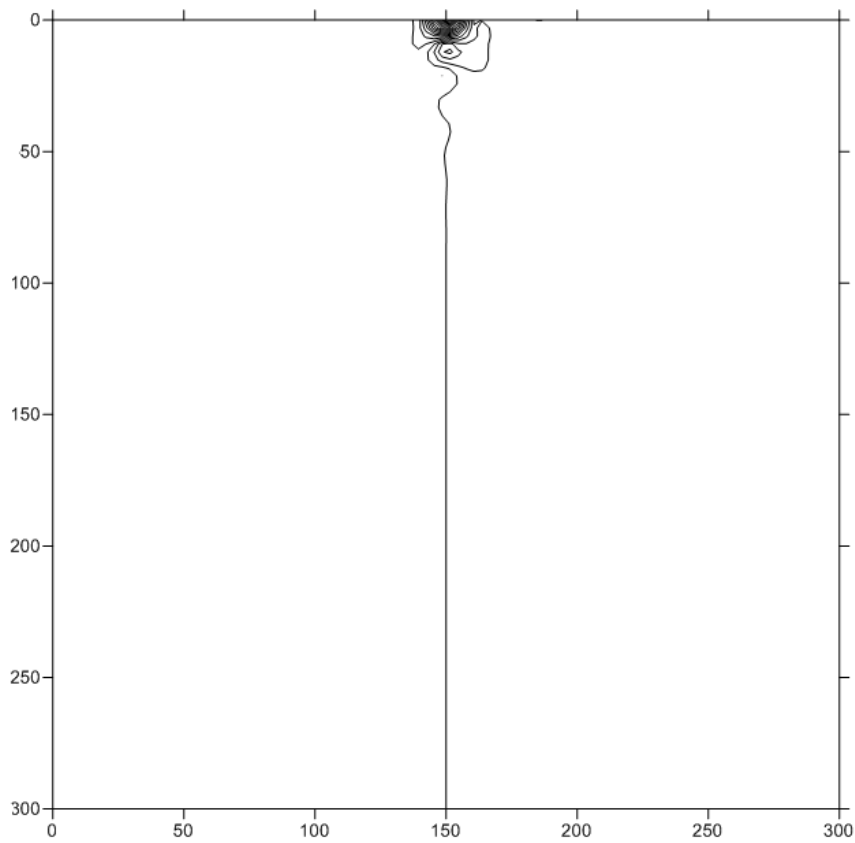


Рис. 2.7. Изополе напряжений  $\sigma_{12}$  (приведенных к узлам).

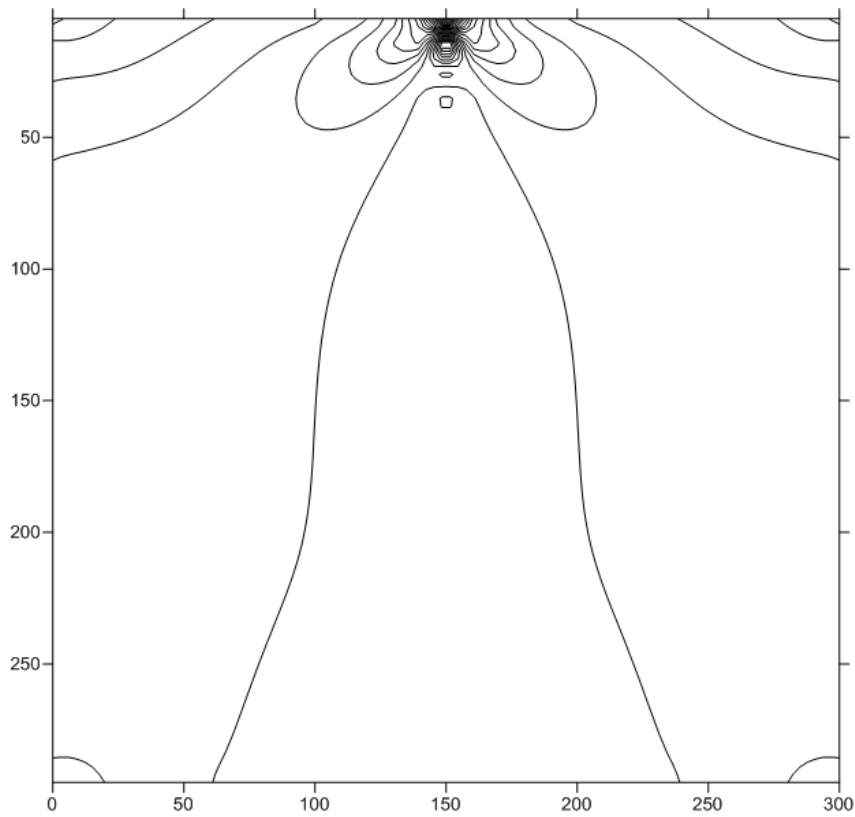


Рис. 2.8. Изополе напряжений  $\sigma_{22}$  (приведенных к элементам).

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов

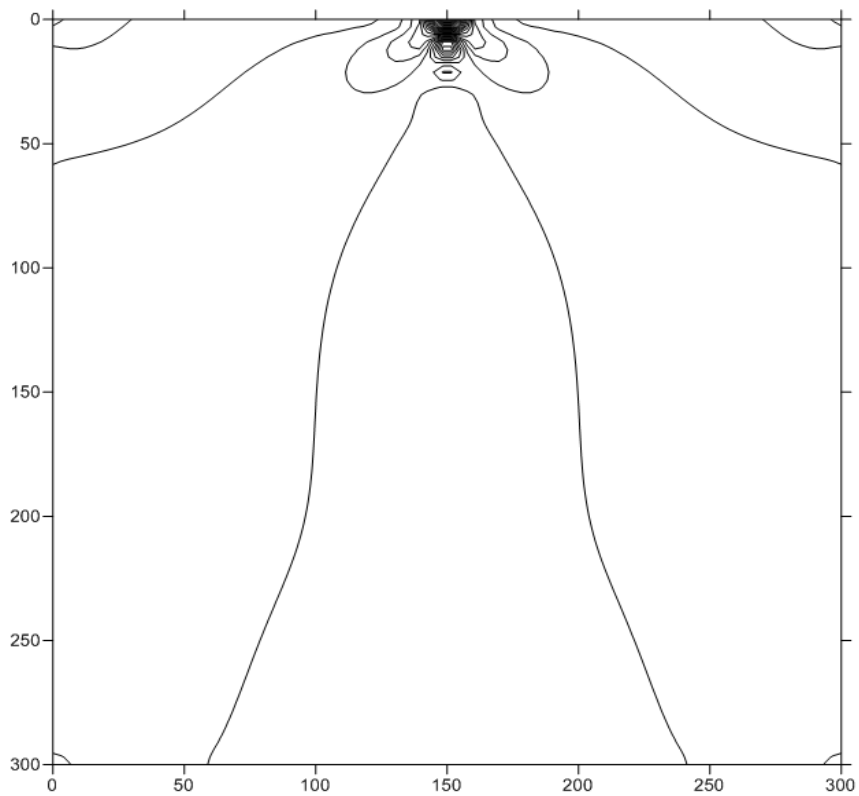


Рис. 2.9. Изополе напряжений  $\sigma_{22}$  (приведенных к узлам).

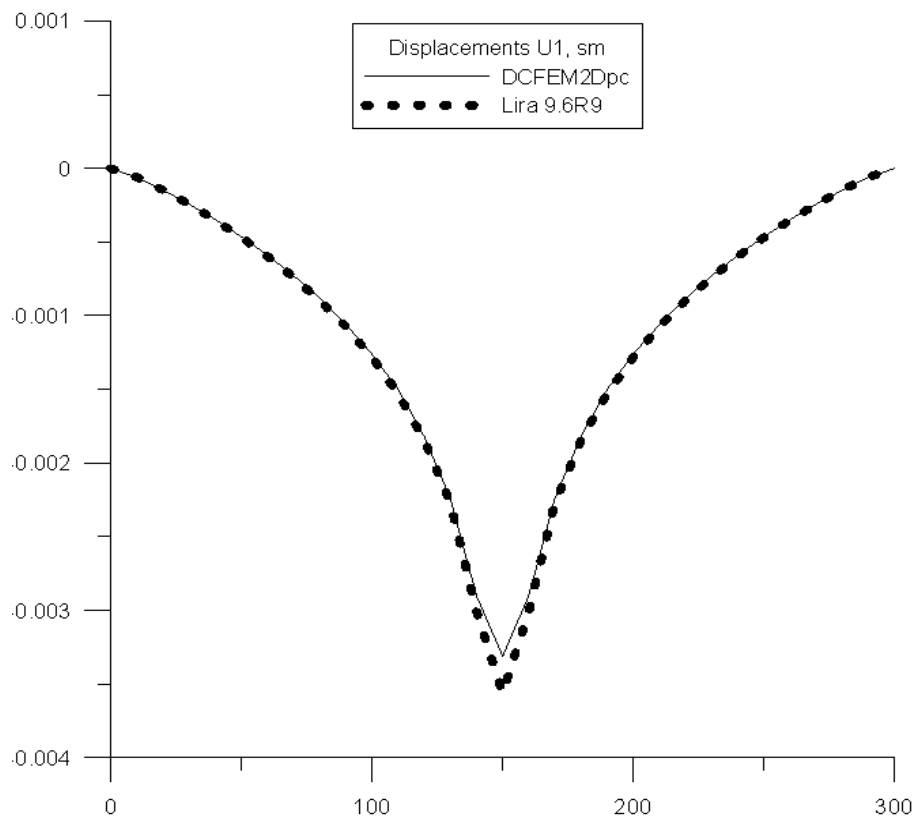


Рис. 2.10. Сопоставление перемещений  $u_1$  по сечению «1-1», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.

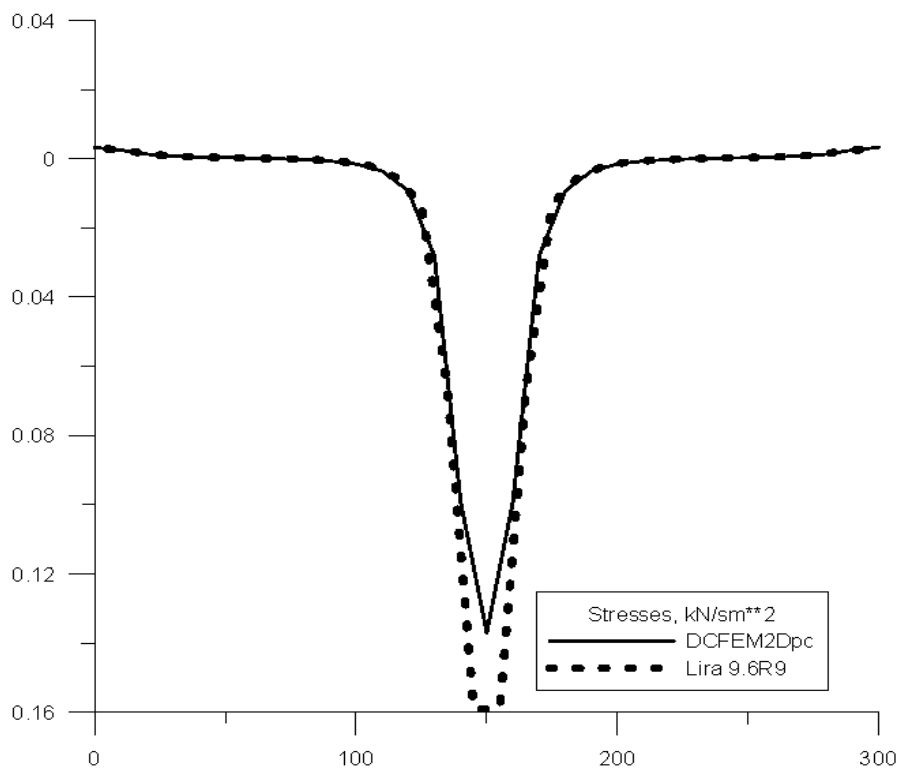


Рис. 2.11. Сопоставление напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению «2-2», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.

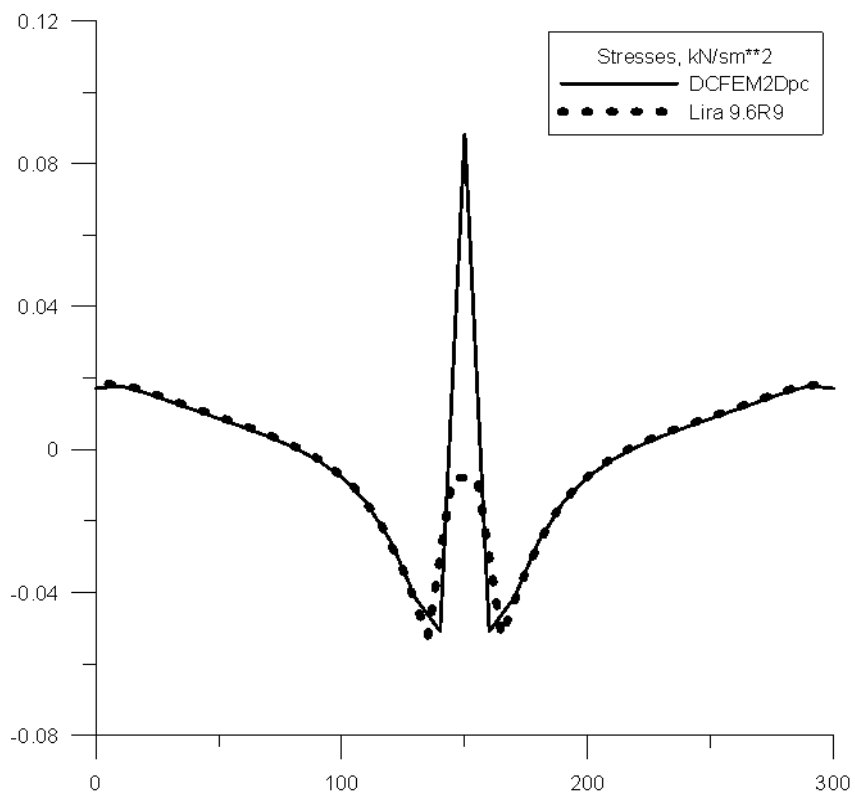


Рис. 2.12. Сопоставление напряжений  $\sigma_{22}$  по сечению «2-2», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов

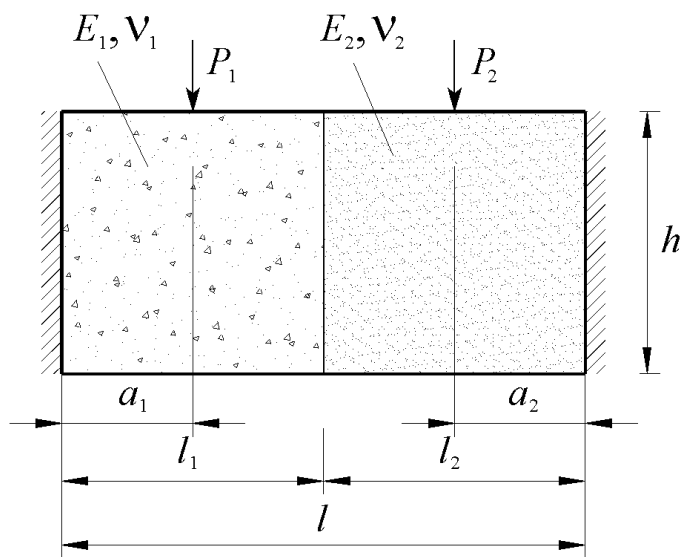


Рис. 2.13. Рассматриваемая конструкция.

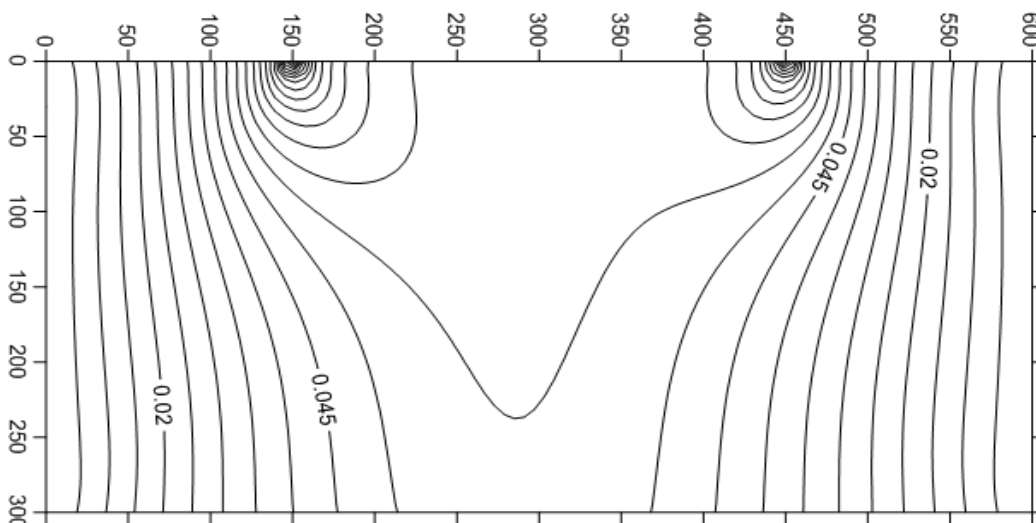


Рис. 2.14. Изополе перемещений  $u_1$ .

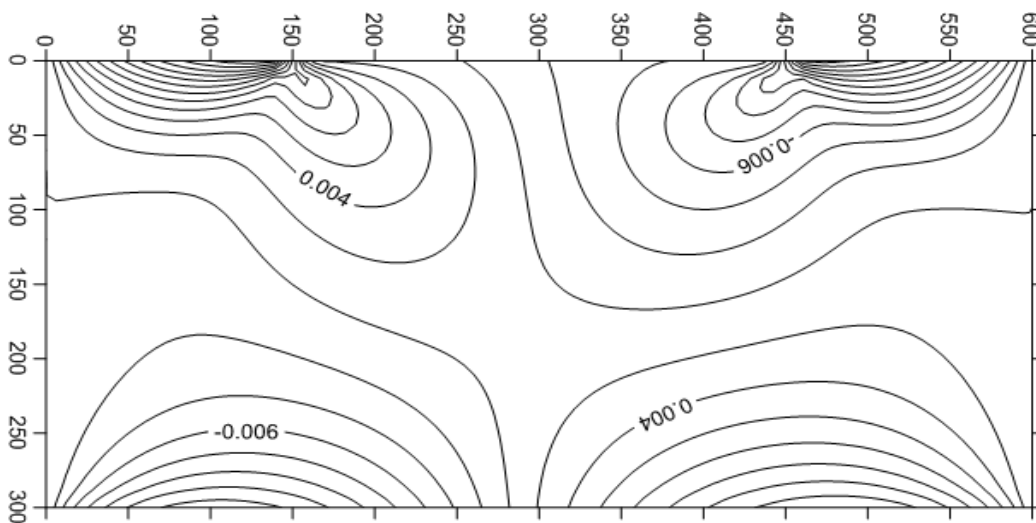


Рис. 2.15. Изополе перемещений  $u_2$ .

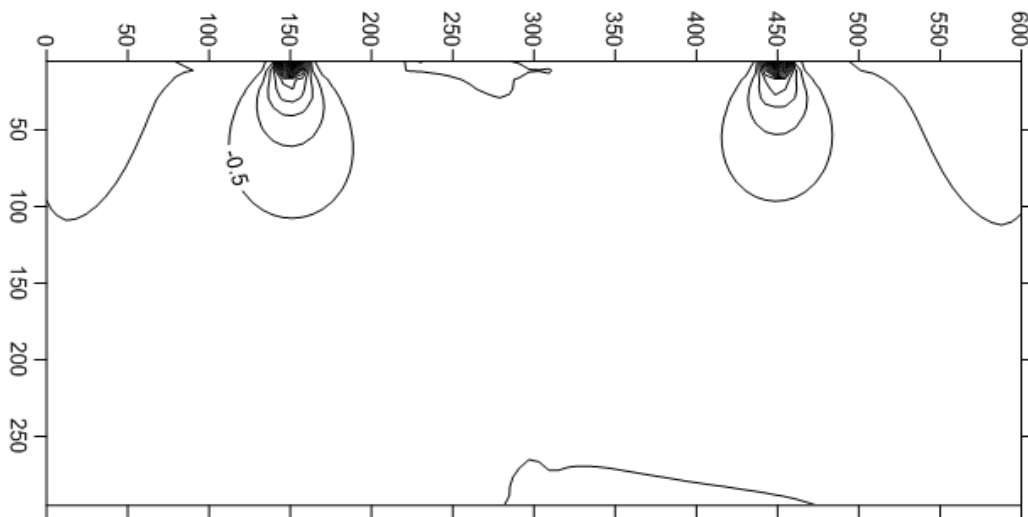


Рис. 2.16. Изополе напряжений  $\sigma_{11}$  (приведенных к элементам).

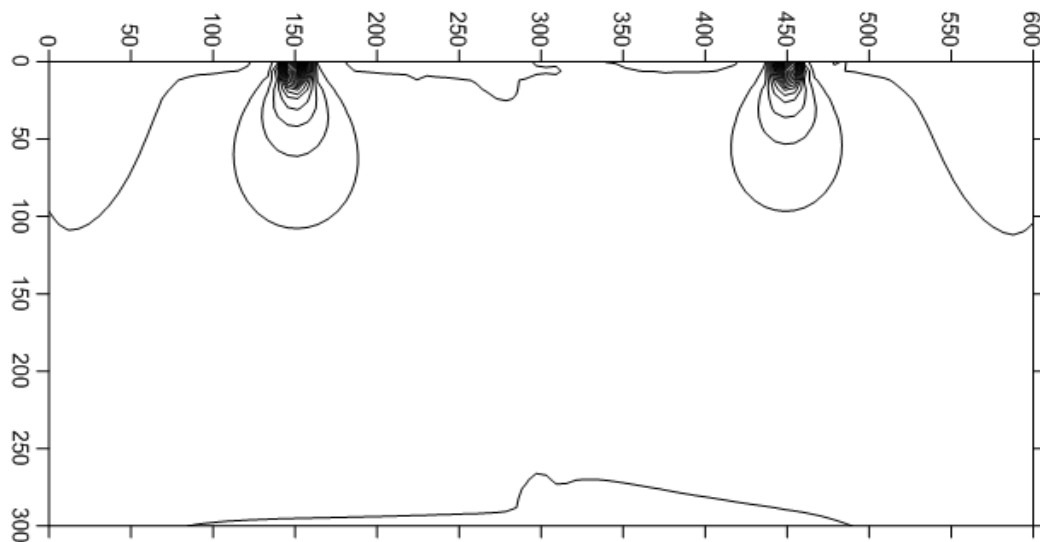


Рис. 2.17. Изополе напряжений  $\sigma_{11}$  (приведенных к узлам).

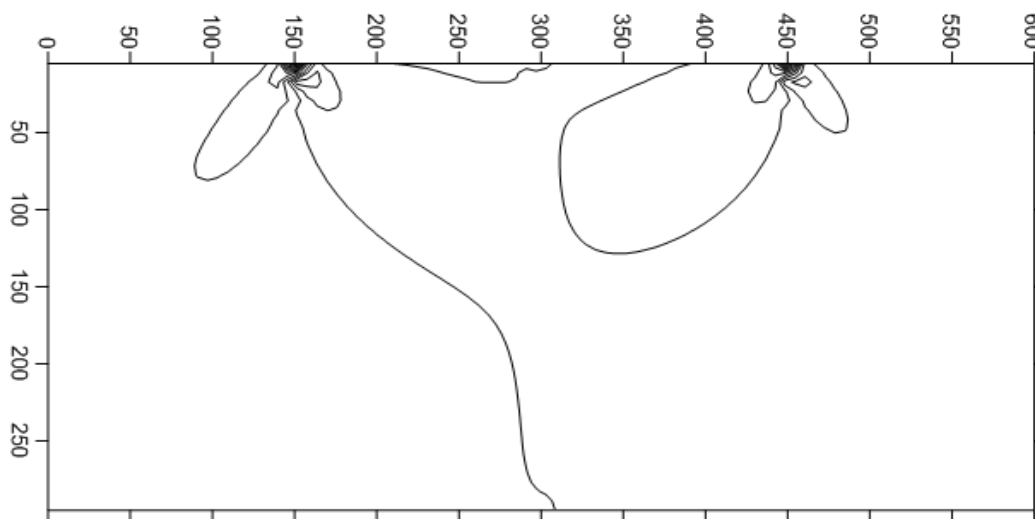


Рис. 2.18. Изополе напряжений  $\sigma_{12}$  (приведенных к элементам).

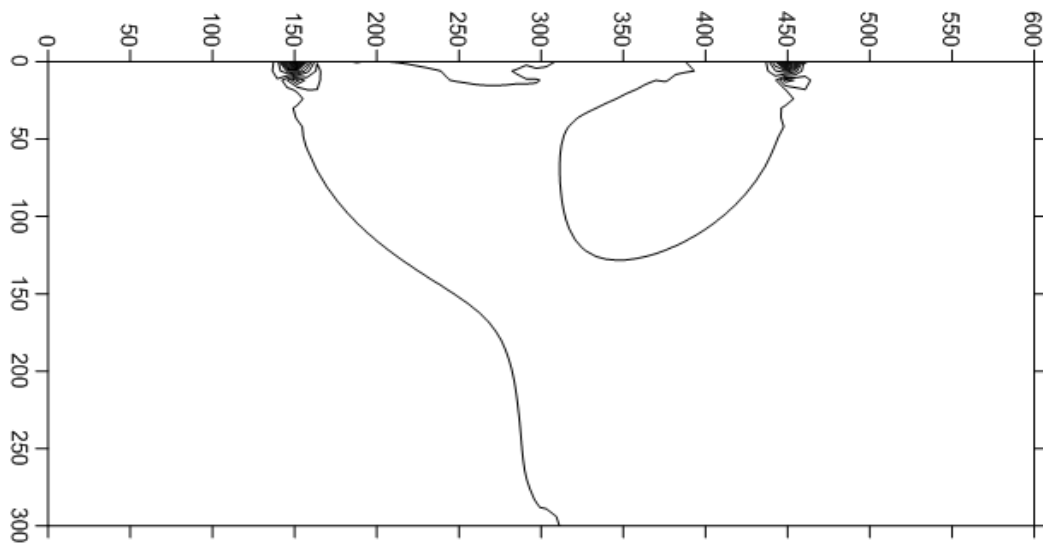


Рис. 2.19. Изополе напряжений  $\sigma_{12}$  (приведенных к узлам).

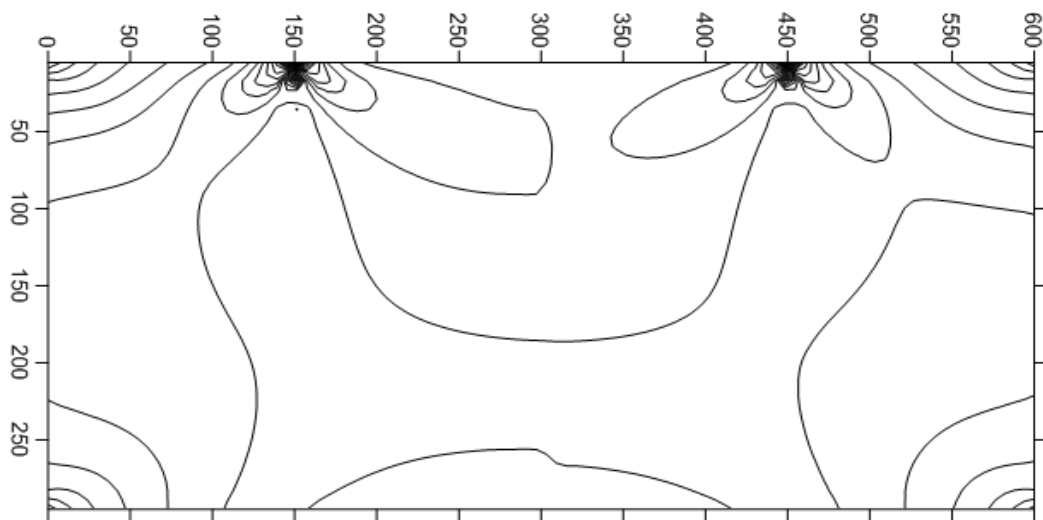


Рис. 2.20. Изополе напряжений  $\sigma_{22}$  (приведенных к элементам).

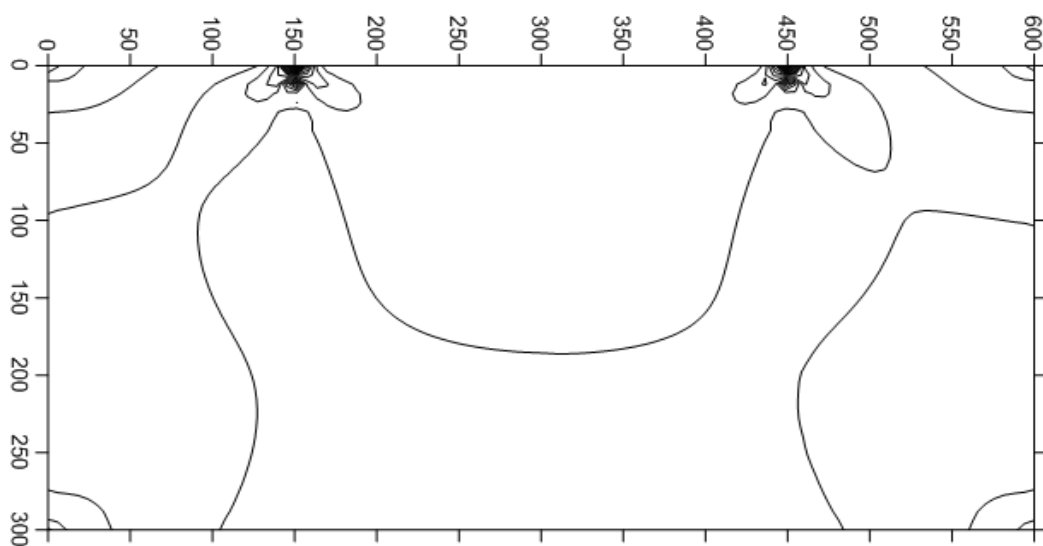


Рис. 2.21. Изополе напряжений  $\sigma_{22}$  (приведенных к узлам).

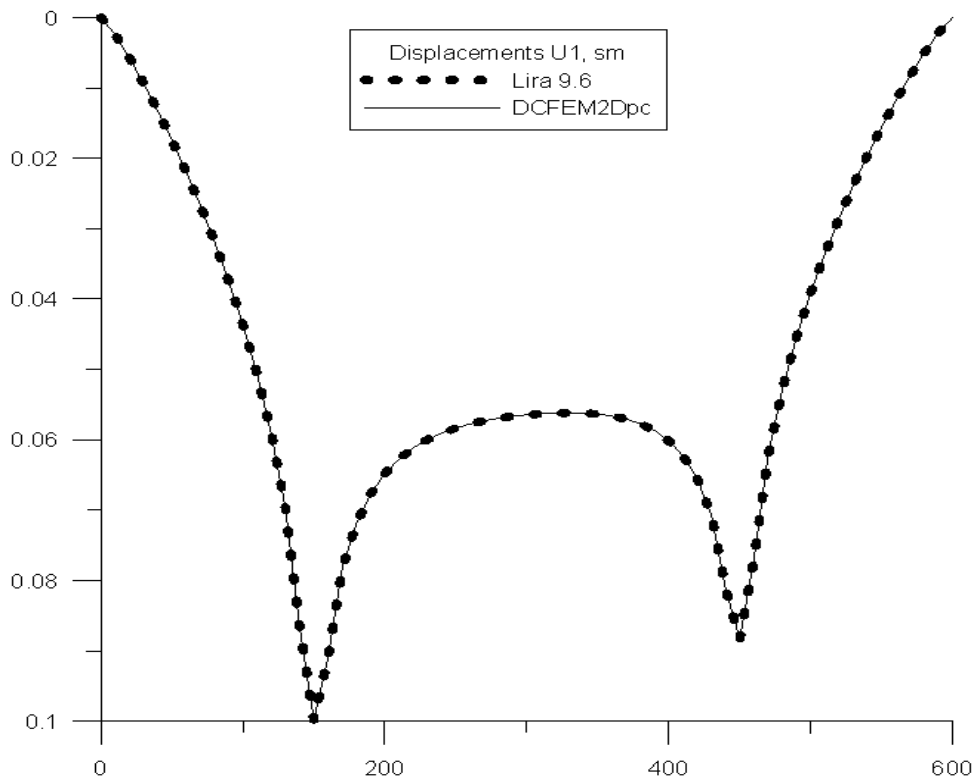


Рис. 2.22. Сопоставление перемещений  $u_1$  по сечению «1-1», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.

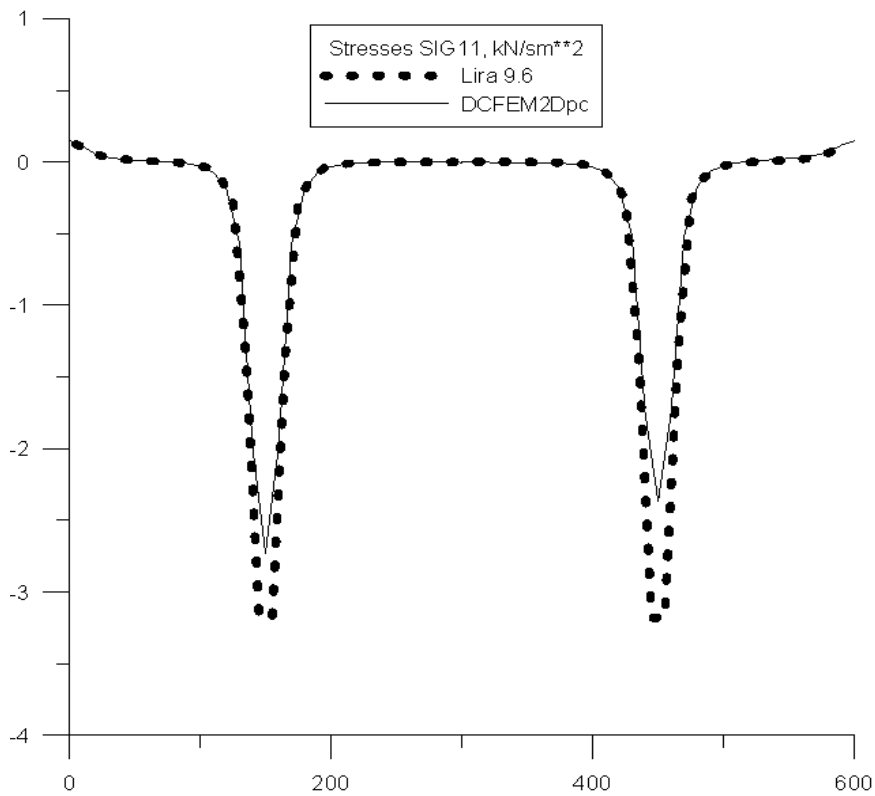
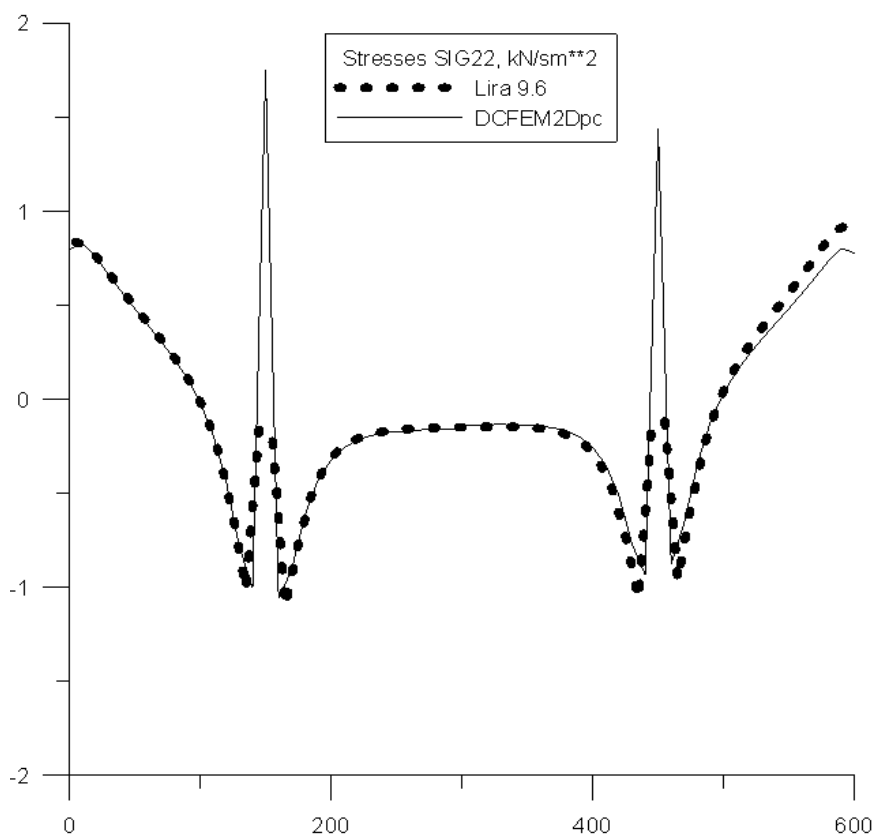


Рис. 2.23. Сопоставление напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению «2-2», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.



**Рис. 2.24.** Сопоставление напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению «2-2», определенных по программным комплексам «Лира» 9.6R9 и DCFEM2Dpc.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А.** Точное аналитическое решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar

- “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 21-30.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка задачи. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 97-107.
  3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Численная реализация. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 108-118.
  4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Герман А.Ю.** Статический расчет двумерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 3: Программная реализация и пример расчета. // XX Polish – Russian – Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Warszawa, Wroclaw, 05.09.2011 – 10.09.2011. Zilina, VTO Print, 2011, pp. 119-128.
  5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. Статья в настоящем журнале.
  6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация. Статья в настоящем журнале.
  7. **Журавлев А.С.** AutoCAD для конструкторов. Стандарты ЕСКД в AutoCAD 2009/2010/2011. Практические советы конструктора. – М.: Наука и техника, 2010. – 384 с.
  8. **Полещук Н.Н.** Самоучитель AutoCAD 2013. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 464 с.
- 
- Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: [marina.mozgaleva@gmail.com](mailto:marina.mozgaleva@gmail.com)

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: [sidorov.vladimir@gmail.com](mailto:sidorov.vladimir@gmail.com)

## МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВОЗВЕДЕНИЯ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ

*М.С. Барабаш*

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

**АННОТАЦИЯ:** В статье рассматривается влияние процесса возведения на усилия, возникающие в элементах каркасного здания с монолитным ядром жесткости. Цель теоретических исследований состоит в установлении влияния процесса возведения на напряженно-деформированное состояние несущих систем высотных зданий.

**Ключевые слова:** моделирование, жизненный цикл, процесс возведения, несущая система, информационная технология

## THE METHODS OF COMPUTER SIMULATION ERECTION PROCESS OF HIGH-RISE BUILDINGS

*Maria S. Barabash*

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

**ABSTRACT:** In given article is considered the influence of erection process on efforts that arise in elements of skeleton type buildings with cast-in-situ stiffening core. The aim of theoretical research was concluded in determination of erection process influence on bearing systems' stress-strain state of multistory buildings.

**Key words:** modeling, life cycle, erection process, bearing system, information technology

### АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Прогресс в строительстве и во многих других отраслях промышленности в значительной мере определяется достигнутыми к настоящему времени результатами в области математического моделирования тех или иных процессов и физических явлений, в частности, процессов деформирования и разрушения конструкций зданий. В области строительства принятие многих проектных решений для какого-либо сооружения, как правило, регламентируется строительными нормами и правилами, которые зачастую дают лишь рекомендации по учету особенностей, отражающих действительное напряженно-деформированное состояние (НДС). Кроме того, регламентирующие документы не всегда используют последние достижения в области математического моделирования

процессов деформирования и разрушения. В частности, разделы строительных норм, относящиеся к методам прочностного анализа элементов строительных конструкций, содержат более простые методы по сравнению с современными возможностями математического описания и численного моделирования процессов деформирования сложных систем многоэтажных зданий. В этом плане существует определенный разрыв между существующими нормами, регламентирующими деятельность проектировщиков и строительную практику, и возможностями уточненных расчетов элементов конструкций и сооружений, основанных на современных методах, использующих более точную постановку практических задач и их реализацию на компьютере.

С развитием крупных городов в строительстве выявилась тенденция к росту этажности возводимых объектов, обусловленная увеличением населения с одной стороны и ограниченностью городского пространства с другой, рост этажности, в свою очередь, усложняет архитектурные и конструктивные формы зданий. В последнее время часто возникают вопросы, связанные с реконструкцией или утилизацией жилых, общественных зданий и сооружений старой застройки. Это приводит к необходимости более точной оценки НДС несущих систем. Так как с одной стороны необходимо обеспечить полную безопасность людей находящихся в здании, а с другой обеспечить минимальные затраты на его возведение, эксплуатацию и утилизацию или реконструкцию. Традиционные методы расчёта не всегда позволяют полностью обеспечить данные требования. В связи с этим развиваются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Большое значение приобретает выбор математических моделей, адекватно описывающих пространственную работу несущих систем высотных зданий.

## ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЙ

Информация об объекте и НДС несущей системы на каждой из стадий жизненного цикла претерпевает значительные изменения, причины которых могут быть различны. Стадией, формирующей НДС, является стадия возведения. На этом этапе НДС изменяются в зависимости от последовательности возведения, что обуславливает изменение конструктивной и расчетной схемы здания. На стадии эксплуатации, самой продолжительной для многоэтажных зданий, к несущей системе прикладываются временные нагрузки, изменяются свойства материала несущих конструкций. Эти изменения зависят от многих факторов, при этом материалы и

конструктивные элементы проявляют нелинейный характер работы.

В процессе эксплуатации жилых, общественных, зданий происходит старение конструкционных материалов, зависящее не только от времени, но и от различного рода аварийных и нештатных ситуаций, техногенных воздействий. В связи с этим часто возникают вопросы, связанные с реконструкцией, демонтажем, утилизацией и капитальным ремонтом зданий. Для оценки безопасности здания необходимо знать историю его нагружения, схемы приложения внешних нагрузок, историю формирования усилий в конструктивных элементах, иметь возможность определить его НДС в любой момент времени. Поэтому необходимо обобщить в единую информационную модель соответствующие математические модели, создать программный комплекс, обеспечивающий моделирование этих процессов. Реальное НДС несущих конструктивных элементов можно определить при проведении на базе программного комплекса ряда численных экспериментов, моделирующих те или иные ситуации и процессы.

Таким образом, информационная поддержка жизненного цикла несущей системы производится посредством использования информационной модели конкретного здания или сооружения, отражая его свойства, состояние, взаимосвязь с внешней средой. В настоящее время, во многих отраслях промышленности, при создании информационных систем используют CALS-технологии (Continuous Acquisition and Lifecycle Support), которые позволяют в период проектирования и строительства формировать информационную модель объекта. Основным блоком CALS являются стандарты, обеспечивающие взаимосвязанность данных в процессах проектирования, производства и эксплуатации объекта. Стандартом CALS является модель, которая определяет технологию электронного представления

данных об объекте (составе, свойствах, геометрических и физических характеристиках, изменениях модели и т.д.), и логическую модель данных представляющую собой готовое решение, на основе которого создается логично организованная база инженерных данных. Исходя из этого, создание информационной модели многоэтажного здания может основываться на использовании CALS-технологий.

Поэтому обобщение в единую информационную модель математических моделей, методов, и программного обеспечения для определения НДС элементов несущей системы здания, адекватно описывающих поведение несущих конструкций на любой стадии жизненного цикла объекта строительства, является актуальной задачей.

## РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Методы расчёта, основанные на классических численных методах, не всегда позволяют полностью обеспечить выполнение данных требований. В связи с этим создаются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Поэтому большое значение приобретает выбор математических моделей адекватно

описывающих пространственную работу несущих систем многоэтажных зданий.

Конструктивной основой многоэтажных зданий служит пространственная несущая система, состоящая в основном из вертикальных (колонны, пилоны, диафрагмы), горизонтальных (плиты перекрытий, фундаментные плиты) и наклонных (пандусы, лестничные марши, связи) элементов. Вертикальные несущие элементы объединены в единую пространственную систему с помощью горизонтальных несущих конструкций - перекрытий здания.

Современные концепции численного исследования конструкций высотных зданий рекомендуют учитывать совместную работу конструктивной схемы (наземная часть – фундаментная плита – основание)[1]. Такая постановка задачи дает результаты, достаточно отличающиеся от ранее используемых схем: сначала рассчитывалась надземная часть на жестких опорах, а затем фундаментная плита на упругом основании на нагрузку от опорных реакций (рис.1.).

Расчетная схема содержит информацию о топологии (взаиморасположение конструктивных элементов), геометрии системы, сечениях и материале элементов, нагрузках. В задачу расчета входит определение перемещений, усилий (напряжений) в элементах на основе этой информации.

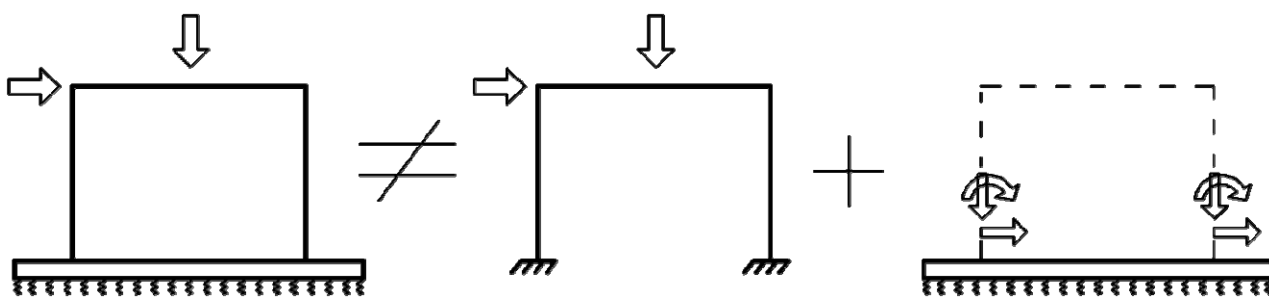


Рис. 1. Учет совместной работы «надземное строение – фундаментная плита – грунтовое основание»

Учет процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей. В работах

Перельмутера А.В. [2] введено понятие «генетической нелинейности». Этот термин

достаточно логичен, так как отображает родословную конструкции. Хотя, с другой стороны, существующий термин «конструктивная нелинейность» для описания процесса возведения также подходит. Генетическая (конструктивная) нелинейность проявляется даже тогда, когда расчет с учетом процесса возведения выполняется в линейной постановке. Рассмотрим пример – двухэтажная рама (рис.2) возводится поэтапно. На первом этапе возведения к ригелю первого этажа приложена монтажная нагрузка  $P = 60$  т. После того, как возведен второй этаж рамы, эта нагрузка убирается. Для корректности численного эксперимента нагрузка от собственного веса не учитывается. На рис.3 приведено НДС возведенной ненагруженной конструкции. Т.е. усилия в конструкции

имеются после того, как удалена приложенная нагрузка. Это говорит о том, что конструкция хранит свою историю (родословную) возведения. На рис.4 схематично отмечено, что суперпозиция отсутствует, а это первый признак нелинейности.

Необходимость учета совместной работы конструктивной схемы «надземная часть – фундаментная плита – грунтовое (свайное) основание», нерегулярное расположение колонн, пилонов, диафрагм, сложное очертание перекрытий в плане с наличием большого количества отверстий и много других конструктивных особенностей обуславливает применение численных методов расчета, основанных на непосредственной дискретизации конструктивных схем.

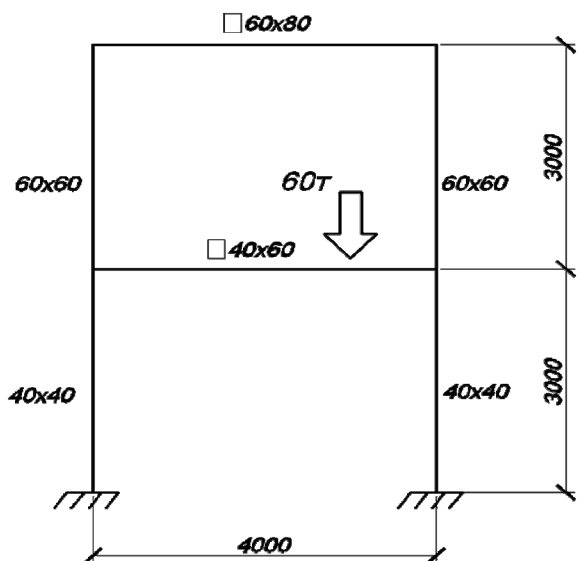


Рис. 2. Расчетная схема двухэтажной рамы

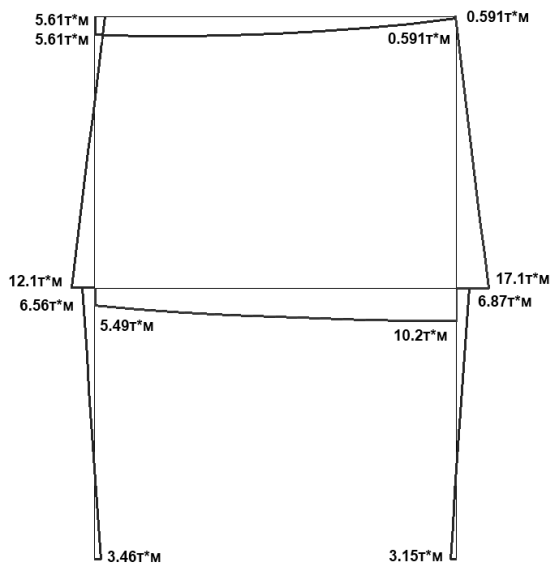


Рис. 3. НДС возведенной конструкции

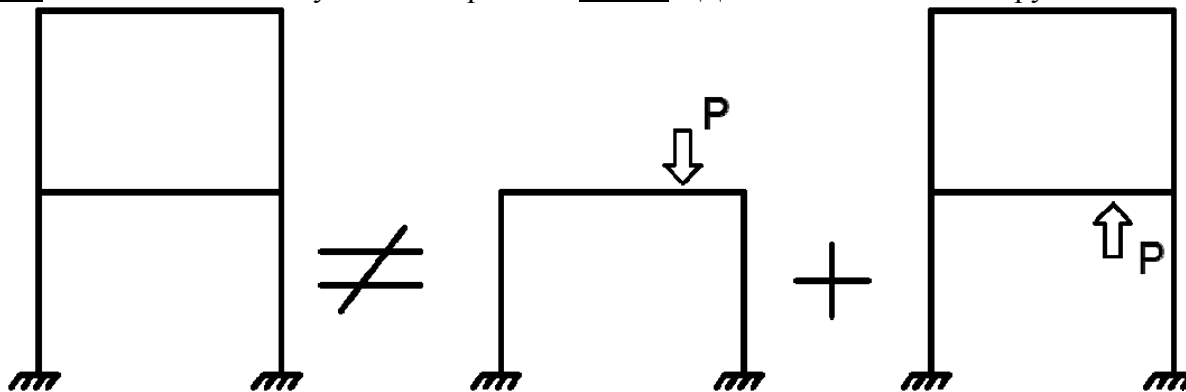


Рис. 4. Учет процесса возведения.

Метод конечных элементов (МКЭ) [2,3] основан на дискретизации самого объекта, который представляется в виде отдельных конечных элементов. Каждый конечный элемент имеет свои размеры, жесткостные характеристики, нагрузки, законы интерполяции узловых значений параметров НДС. В этом основное отличие конечно-элементной сетки, которая представляет конструкцию в виде набора конечных элементов от абстрактной разностной сетки, которая служит только для того, чтобы заменить дифференциальные операторы разностными аналогами. В настоящее время используется метод конечных элементов в перемещениях, т.е. в узлах сетки сначала находятся перемещения, а затем остальные параметры НДС.

Процедура решения задачи по МКЭ в перемещениях выглядит следующим образом:

- нанесение конечно-элементной сетки;
- назначение каждому конечному элементу необходимых характеристик – тип, жесткости, размеры и др.;
- построение для каждого конечного элемента матрицы жесткости;
- построение канонических уравнений МКЭ;
- решение канонических уравнений и определение перемещений в узлах сетки;
- определение параметров НДС (усилий, напряжений, перемещений) по всей области конструкции.

Эта процедура полностью соответствует механике стержневых систем. Если в докомпьютерный период методы строительной механики стержневых систем и методы теории упругости для расчета пластинчатых и трехмерных объектов были различны, то МКЭ решает эти задачи однотипно. Следовательно, возможно решение комбинированных конструкций, например, расчет каркасного здания совместно с основанием: каркас – это стержневая система, плиты перекрытий, фундаментная плита и диафрагма – это

пластинчатые системы, грунтовое основание – это трехмерный объект.

Последовательность численного решения метода конечных элементов описана в работе [3,4]. Однако применение метода для расчета высотных зданий затруднено. Это связано с тем, что реальные размеры зданий не позволяют расчленивать их на большое число конечных элементов, т.к. это приводит к увеличению объема исходных данных, числа уравнений и времени расчетов на компьютере. В работе [5] было предложено использовать пространственные конечные элементы, предварительно создавая библиотеки матриц жесткостей крупных элементов здания, и только затем определять перемещения всей системы. Это приводит к определенным трудностям, связанным с многообразием конструктивных решений многоэтажных зданий, а предложенный метод требует введения гипотез о законе перемещений для горизонтальных сечений всего здания. В этом случае использование метода суперэлементов представляется более целесообразным.

## ДААННЫЕ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ

Для современных сложных сооружений (мосты, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только эксплуатационной стадией, но и стадией возведения. В процессе возведения конструктивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения «замораживаться», определяя сечения элементов и конструкции узлов именно на этой стадии.

Для изучения физической системы методами математического моделирования ее заменяют абстрактной системой - математической моделью.

Реализация математической модели на компьютере дает возможность многократно

и в широком диапазоне изменять входные параметры и условия функционирования сложных систем, заменяя, таким образом, экспериментальные исследования вычислительным экспериментом. Кроме того, при решении ряда сложных конструкторских задач возможно и необходимо применение вариантного проектирования.

На современном этапе развития компьютерной техники разработано множество программных комплексов (ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР, SCAD, STARK, COSMOS, ANSYS, NASTRAN и др.), реализующих метод конечных элементов и позволяющих производить расчеты сложных систем.

Программный комплекс ЛИРА-САПР предназначен для расчета и проектирования строительных конструкций различного назначения с реализацией метода суперэлементов и визуализацией на всех этапах, производит расчеты геометрически и физически нелинейных сложных систем. Он позволяет пользователю быстро и удобно создать расчетную схему сооружения, обладает функциями документирования, встроенной графической средой САПФИР-Конструкции, выполняющей функции препроцессора. С помощью программного комплекса МОНОМАХ-САПР рассчитываются и проектируются железобетонные конструкции многоэтажных зданий с планами произвольной конфигурации, в том числе зданий из монолитного железобетона. Автором настоящей статьи проводились исследования каркасно-монолитных зданий. В расчетах колонны и ригели моделировались пространственными стержнями с жесткими узлами, несущие стены, диафрагмы - универсальными конечными элементами плоской задачи теории упругости, перекрытия - конечными элементами плиты, работающими в двух плоскостях.

Моделирование процесса возведения имеет большое значение для конструкций

высотных зданий из монолитного железобетона, так как в этом случае необходимо учитывать такие эффекты:

- неравномерная осадка вертикальных элементов (колонны и пилоны имеют большие деформации, чем стены и диафрагмы);
- конструкции, как правило, включаются в работу до набора бетоном расчетной прочности (как правило, распалубка производится значительно раньше, чем бетон наберет расчетную 28-дневную прочность);
- установка и удаление временных стоек, которые существенно изменяют конструктивную схему здания на этапах возведения;

и многие другие эффекты.

Учет особенностей возведения железобетонных конструкций высотных зданий реализован в программных комплексах ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР. Моделирование процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей, обусловленной не только последовательно изменяющейся расчетной схемой (генетическая и конструктивная нелинейность), но и учетом нелинейных свойств материала (физическая нелинейность). Решение этой задачи в ПК ЛИРА САПР и МОНОМАХ САПР основана на основных методах, которые в физическом смысле представляют собой моделирование процесса нагружения с изменяемой расчетной схемой.

### **ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА ВОЗВЕДЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ РАБОТУ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ЗДАНИЙ.**

Существует большое число работ, авторы которых имеют разные подходы к расчету зданий и сооружений. Однако не каждый метод позволяет отразить реальную работу несущей системы здания. Большая часть этих методов предполагает определение

НДС несущих элементов, исходя из готовой расчётной схемы здания, нагруженной полной нагрузкой. Часть методов ориентирована на определение характеристик только отдельных элементов здания, что также приводит к искажению реальной работы здания. Поэтому требуется их дальнейшее развитие и доработка. Целью теоретических и экспериментальных исследований многих ученых в настоящее время является определение влияния процесса возведения на НДС элементов несущих систем зданий. Исследование формирования НДС несущих систем в процессе возведения проводилось в работах Городецкого А.С., Перельмутера В.С., и других отечественных и зарубежных ученых [1,2,5,6]. В них отмечается влияние изменения расчетной схемы и величины вертикальной нагрузки в процессе монтажа на формирование конечных внутренних усилий в элементах несущих систем многоэтажных зданий.

В зависимости от конструктивных решений, экономичности и безопасности, а также других условий строительного производства применяют различные методы возведения многоэтажных зданий. Но во всех случаях процесс возведения заключается в том, что собственная масса здания растет по мере монтажа, с возведением нового этажа изменяется высота здания, погонная жесткость вертикальных элементов и нагрузка на каждом новом этапе возведения прикладывается к новой расчетной схеме. Это подтверждает значимость данных параметров при математическом моделировании процесса возведения.

Наибольшее влияние процесс возведения оказывает на НДС несущих систем многоэтажных зданий с ядром жесткости. В случае возведения зданий каркасного типа ядро жесткости служит мощной пространственной конструкцией, воспринимающей не только часть вертикальной нагрузки, но и всю горизонтальную нагрузку, действующую на

здание. При возведении зданий каркасного или панельного типа, возникают плотные связи сдвига, при монтаже зданий методом подъема этажей или перекрытий связи сдвига устраиваются одновременно с монтажом наружных стен. В возведенном до монтажа наружных стен ядре жесткости успевают произойти упругие деформации, часть деформаций ползучести и усадки. Несущие вертикальные элементы и несущие стены деформируются по мере увеличения нагрузки в процессе возведения уже в составе всей несущей системы, поскольку при возведении вертикальных несущих элементов и ограждающих конструкций одновременно происходит их соединение с ядром жесткости. Обычно монолитное ядро жесткости возводится с опережением по отношению к ограждающим конструкциям, поэтому основная часть деформаций ядра происходит до монтажа ограждающих конструкций. Колонны каркаса, напротив, укорачиваются по мере возведения и возрастания нагрузки. Разность продольных деформаций колонн и ядра приводит к соответствующему деформированию перекрытий. Каждое новое перекрытие возводится в строго горизонтальном положении после того, как колонны уже укоротились от всех нижерасположенных перекрытий. Поэтому каждое вновь возведенное перекрытие будет деформироваться, в основном, только от действия местной нагрузки, и нагрузки от вышерасположенных этажей.

На рис.5 представлен пример расчета многоэтажной рамы, который демонстрирует необходимость учета процесса возведения.

Рама (рис.5, а, б) в определенной степени моделирует каркасное здание – ригели имеют сечение 400x20 см, что моделирует плиту перекрытия. Нагружение, кроме собственного веса включает полезную нагрузку  $q=2.06$  т/м и нагрузку от стен  $P=3$  т. Как правило, перекрытия высотных зданий рассчитываются исходя из предположения, что опоры перекрытий (колонны, пилоны,

диафрагмы) не имеют вертикальных перемещений. В такой постановке моменты в верхнем ригеле (определенный аналог верхнего перекрытия) **АВ** (рис.5,а) будут равняться  $M_A = -2.7$  т м и  $M_B = -7.7$  т м ; а прогиб в центре ригеля  $W_C = 0.5$  см. На рис. 6 приведена деформированная схема рассматриваемой конструкции при расчете с учетом процесса возведения. Расчет выполнялся по изменяемой в процессе возведения схеме: сначала первые два этажа, затем два последующих этажа, затем два

верхних этажа. Расчет выполнялся на нагрузку только от собственного веса.

К окончательной (возведенной) схеме прикладывалась полезная нагрузка. Расчет выполнялся в физически нелинейной постановке, т.е. учитывались нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями для бетона и арматуры. Методы расчета конструкций в физически нелинейной постановке описаны в работах [1,6,7].

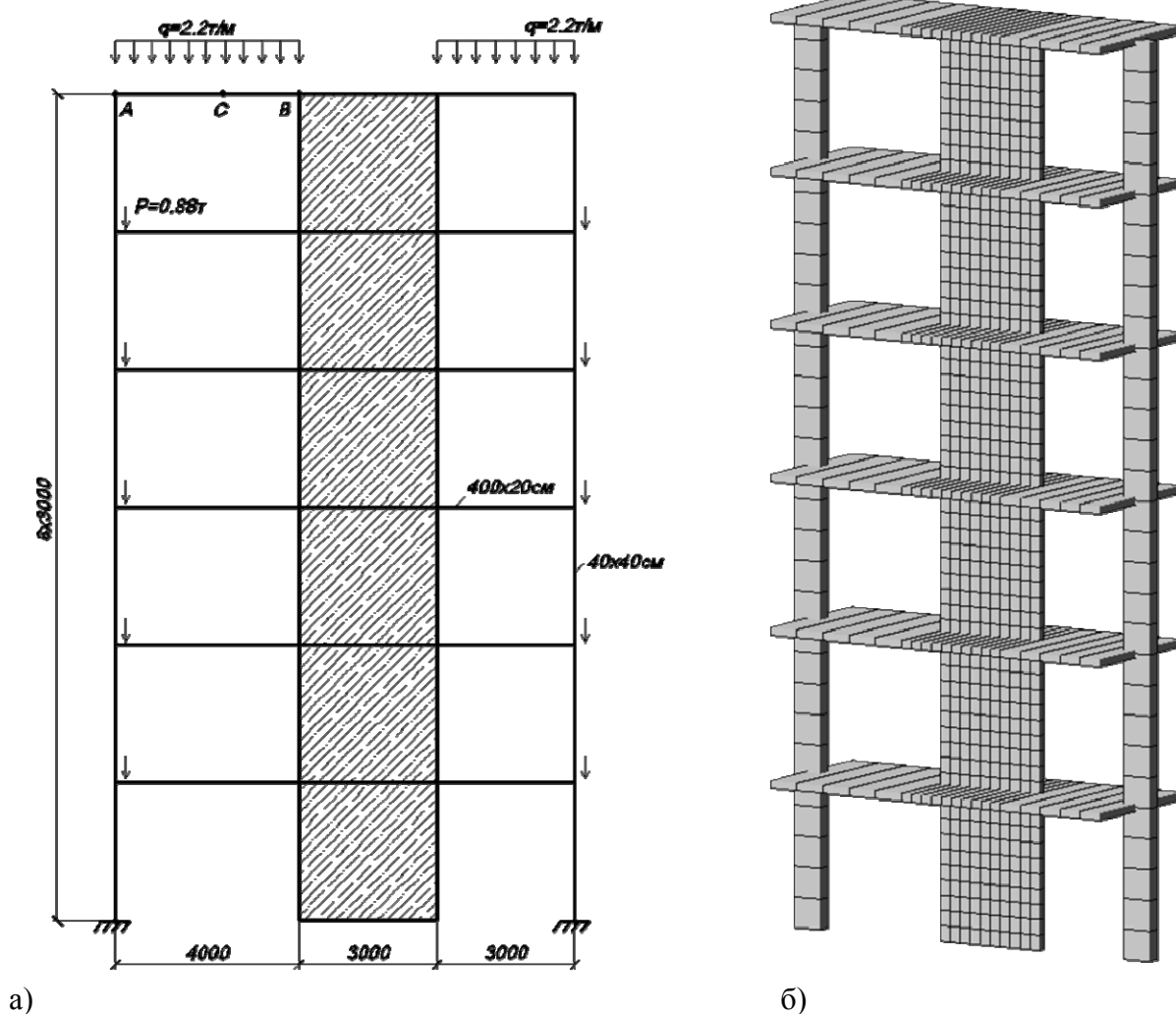


Рис. 5. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) многоэтажной рамы.

Для сравнения рассматриваемая конструкция рассчитывалась без учета процесса возведения, т.е. на окончательную схему прикладывалась вся нагрузка.

В таблице 1 приведены усилия ригеля **А-В**, полученные по трем различным схемам. Анализируя результаты расчета, приведенные в таблице 1 можно сделать вывод, что НДС ригеля (аналог перекрытия),

полученное на основе нелинейного расчета для всей схемы и, особенно, с учетом возведения значительно отличается от результатов расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) в линейно-упругой постановке.

В процессе исследований было установлено:

- монтаж элементов несущей системы приводит к изменению расчетной схемы здания, приложение увеличивающейся вертикальной нагрузки к измененной расчетной схеме здания влияет на НДС конструктивной схемы;

- формирование напряженно-деформированного состояния несущей системы в значительной степени зависит от способа монтажа;

- расчет ригелей (перекрытий) в общей системе здания значительно отличается от расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) на несмещаемых вертикальных опорах;

- расчет с учетом возведения дает результаты, несколько отличающиеся от традиционного расчета (окончательная схема рассчитывается на всю нагрузку).

Учет процесса возведения показывает насколько меньше перемещения вертикальных элементов, что объясняется моделированием выборки зазоров, которые обусловлены деформациями вертикальных элементов от собственного веса возведенной конструкции, при бетонировании перекрытий.

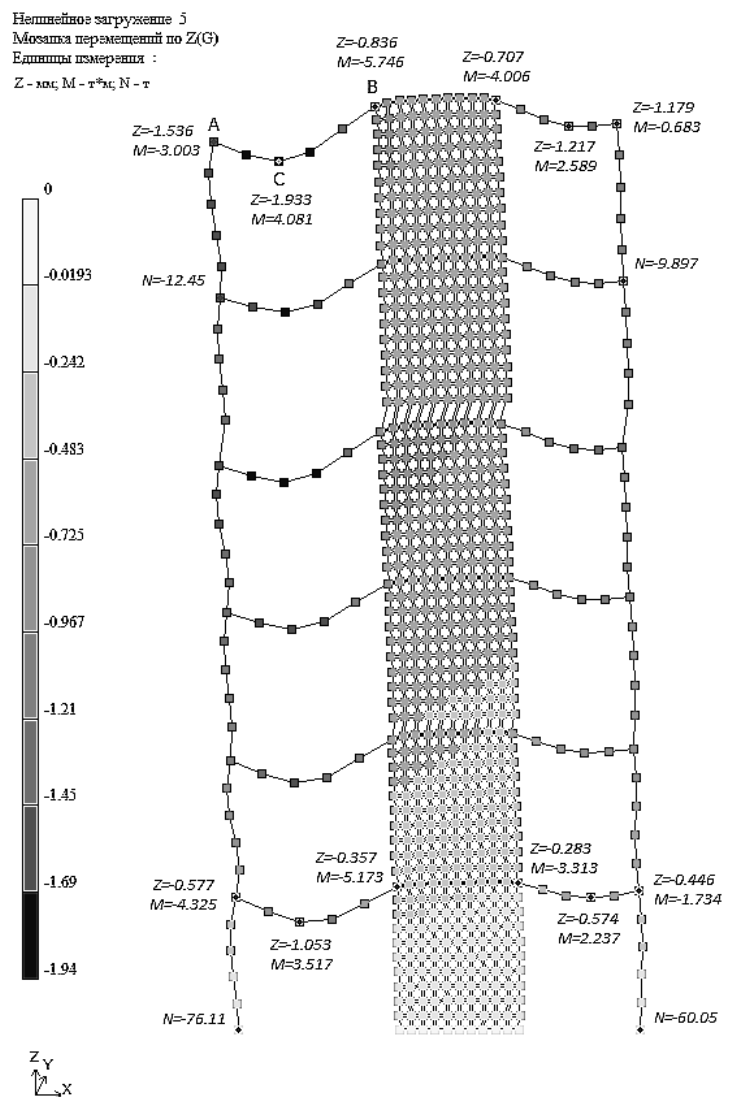


Рис. 6. Деформированная схема многоэтажного здания

Таблица 1

Сравнительная таблица результатов расчета рамы многоэтажного здания

Усилия и перемещения в сечениях ригеля АВ	Линейный расчет при несмещаемых вертикальных опорах	Нелинейный расчет без учета возведения	Нелинейный расчет с учетом возведения
Момент в сечении А, тм	-2.7	-2.9	-3.0
Момент в сечении В, тм	-7.7	-5.9	-5.7
Перемещения узла С, см	-0.5	-2.3	-1.9
Перемещения узла А, см	0	-2.0	-1.5
Перемещения узла В, см	0	-1.1	-0.8

## ВЫВОДЫ

1. На современном этапе развития информационных технологий разработано множество программных комплексов, позволяющих производить расчеты сложных систем. Все они реализуют метод конечных элементов. Наиболее развитым программным комплексом, учитывающим реальную пространственную работу конструктивных элементов в процессе возведения, является ПК ЛИРА-САПР.
2. Большое число проведенных экспериментальных исследований пространственной работы несущих систем многоэтажных зданий дает возможность использовать существующие математические модели, и, используя разработанное на их основе программное обеспечение, проводить серии численных экспериментов.
3. Для определения напряженно-деформированного состояния несущей системы здания и обеспечения его информационной поддержки на протяжении всего жизненного цикла необходимо создание информационной модели объекта строительства, которая должна основываться на математических моделях, адекватно отражающих пространственную работу несущей системы на каждой стадии жизненного цикла. Внедрение CALS-технологии проектирования в строительную индустрию позволит: оперативно реагировать на аварийные ситуации; моделировать процессы развития тех или иных негативных процессов; оценивать напряженно-деформированное состояние на любой стадии жизненного цикла; решать ряд проектных и конструкторских задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – М: Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.
2. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (издание 4-е переработанное и дополненное).- Москва: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во ДМК Пресс, Изд-во АСВ, 2011, 736 с
3. **Бате К., Вилсон Э.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. - М. :Стройиздат, 1982. - 448с.
4. **Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С.** Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикл. мех. - 1972. -Т.8, №8. - с.3-28
5. **Норри Д., Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ.- М.: Мир, 1981.-304с.
6. **Верюжский Ю.В., Колчунов В.И., Барабаш М.С., Гензерский Ю.В.** Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. – Учебное пособие. – К.: Книжное издательство НАУ, 2006. – 808с.
7. **Городецкий А.С. и др.** Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Изд-вл «Транспорт», 1981., - 143 с.

---

Барабаш Мария Сергеевна, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, дом 1  
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, Department of Computer Technology Construction, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE,  
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

# МОДЕРНИЗАЦИЯ ПЕРВОГО И ТРЕТЬЕГО УРОВНЕЙ КРЕСТООБРАЗНЫХ ОБРАЗЦОВ С ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМОЙ ДЛИНОЙ ФЛАНГОВЫХ ШВОВ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНОГО КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*В.А. Белов, А.А. Гусев, С.В. Щербина*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье описана предложенная методика модернизации сварных соединений с фланговыми швами, повышающей надежность швов, перераспределением массы наплавленного металла по их длине и поперечному сечению. Методика предусматривает, в отличие от существующих норм, расчет по трем сечениям – металлу шва и двум границам сплавления. Предложенная модернизация реализована в конечноэлементном программном комплексе ANSYS Mechanical 14.0. Приведены примеры применения предложенной методики для крестообразных образцов с изменяемой геометрией прикрепляемого элемента.

**Ключевые слова:** модернизация, численные методы, сварные соединения, фланговые швы

## MODERNIZATION OF FIRST AND THIRD LEVELS OF CROSSING SAMPLES WITH LIMIT LENGTH OF FLANK SEAMS BASED ON THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MODELING

*Viktor A. Belov, Anton A. Gusev, Sergey V. Scherbina*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** In article the technique of the developed modernization of welding joints with the flank seams, increasing reliability of seams, by redistribution of weight of the flux metal on their length and cross section. The technique provides existing norms, design for the three cross sections ( for seam metal and two borders of melting). The offered modernization is realized in the finite element program ANSYS Mechanical 14.0. Examples of application of the offered technique for cross samples with changeable geometry of an attached element.

**Key words:** modernization, numerical methods, welding joints, flank seams

Разработана численная методика модернизации сварных соединений с фланговыми швами на трех уровнях. Для фланговых швов с длиной до предельно допустимой выполняется предложенная модернизация первого (М1) и третьего (М3) уровней. Модернизация второго уровня (М2) выполняется только для фланговых швов, фактическая длина которых превышает предельно допустимую нормами.

**Модернизация первого уровня (М1)** выполняется для коротких фланговых швов, при которых нерационально на слабо нагруженном участке уменьшать катет шва. В случае если большая нагруженность на участках  $d_1$  и  $d_2$  происходит с одной из границ сплавления, то швы выполняются по всей длине с большим катетом на один калибр (мм) в ее сторону. Если большая нагруженность на участках  $d_1$  и  $d_2$  происходит на разных границах сплавления с прикрепляе-

Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования

мым или основным элементами, то швы выполняются разнокатетными от концов шва до его середины с большим катетом на один калибр в сторону более нагруженных границ сплавления.

**Модернизация второго уровня (М2)** выполняется для швов большой протяженности, фактическая длина швов которых значительно превышает предельно допустимую нормами. Конечноэлементным моделированием определяется наименьший катет, при котором уровни максимальных и средних приведенных напряжений не превышают значения напряжений в образцах с предельно допустимой длиной.

**Модернизация третьего уровня (М3)** может следовать за модернизацией второго уровня для швов длиной превышающей предельно допустимую нормами путем перехода от равнокатетных к разнокатетным швам на сильнонагруженных участках и минимальным катетом на слабонагруженном участке, так и отдельно для швов, протяженностью до предельно допустимой нормами.

На основе проведенных ранее экспериментально-теоретических исследований установлено, что основным геометрическим параметром, влияющим на неравномерность распределения напряжений по длине фланговых швов, является расстояние между фланговыми швами (толщина или ширина прикрепляемого элемента).

В этой статье показаны модернизации первого (М1) и третьего (М3) уровней на примере крестообразных (рис.1) образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов 480 мм при катете 8 мм, выполненных ручной дуговой сваркой (РДС) с изменяемым расстоянием между фланговыми швами.

Размеры основного элемента - 1000x880x32 (мм), размеры прикрепляемых пластин - 928x880x16 (мм) для образца К1 и 464x880x32 (мм) для образца К2. В образце К2 расстояние между фланговыми швами (толщина прикрепляемого элемента) в 2 раза больше чем в образце К1 при одинаковой площади поперечного сечения прикрепляе-

мого элемента. Учитывая условия симметрии, рассматривалась 1/4 часть соединения. Задача решалась в линейно-упругой постановке. Нагрузка на образец прикладывалась по первой схеме нагружения (рис. 2). Методика предусматривает, в отличие от существующих норм, расчет по трем сечениям – металлу шва и двум границам сплавления (рис. 3).

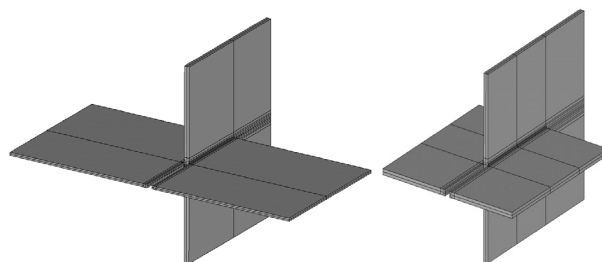


Рис. 1. Геометрическая модель крестообразного сварного соединения К1(слева) и К2 (справа).

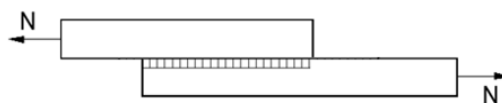


Рис. 2. Первая схема нагружения.

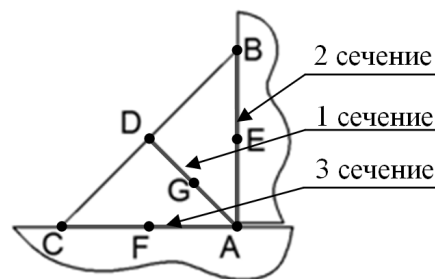
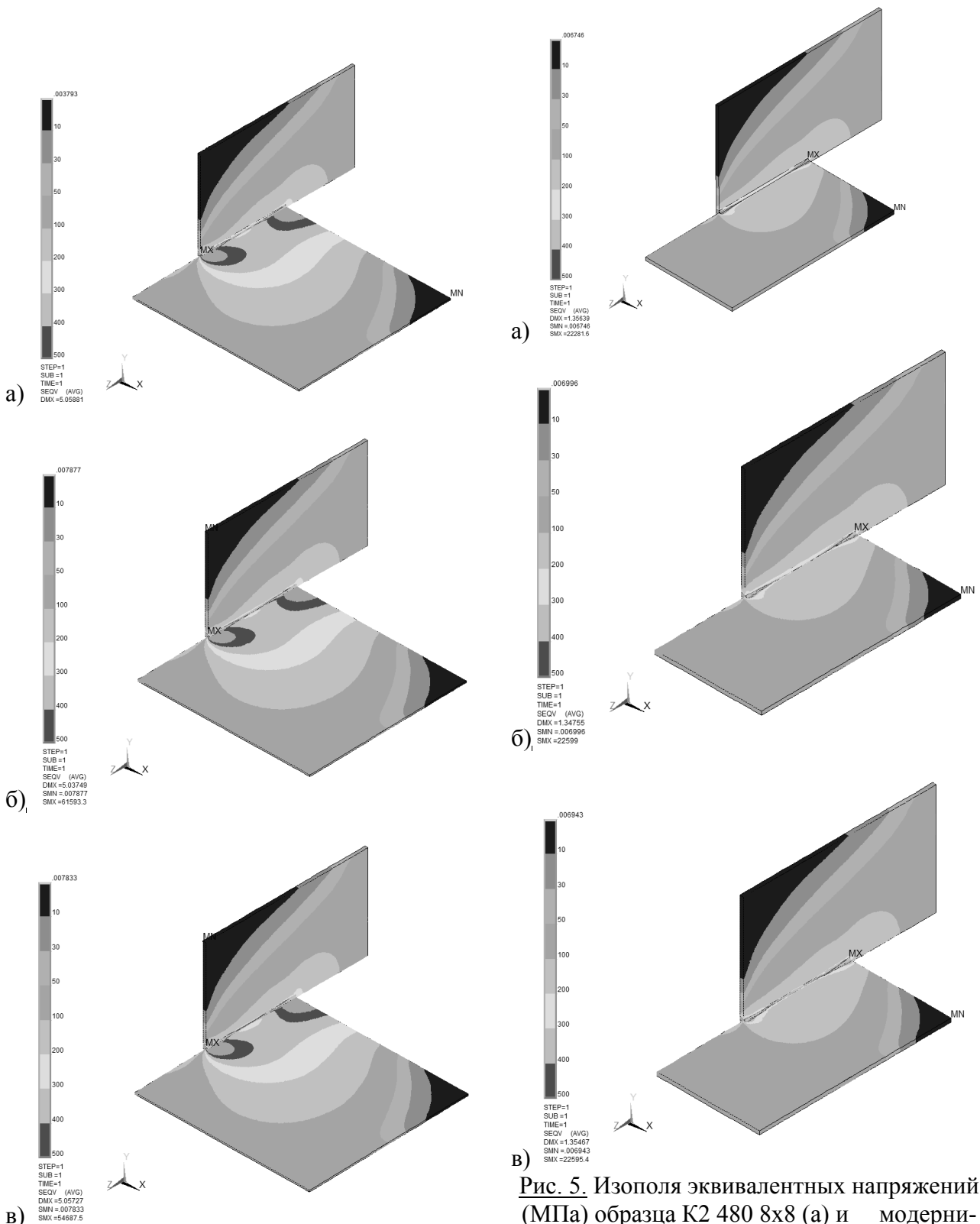


Рис. 3. Поперечное сечение сварного шва с тремя расчетными сечениями – по металлу шва (1 сечение) и двум границам сплавления (2 и 3 сечение).

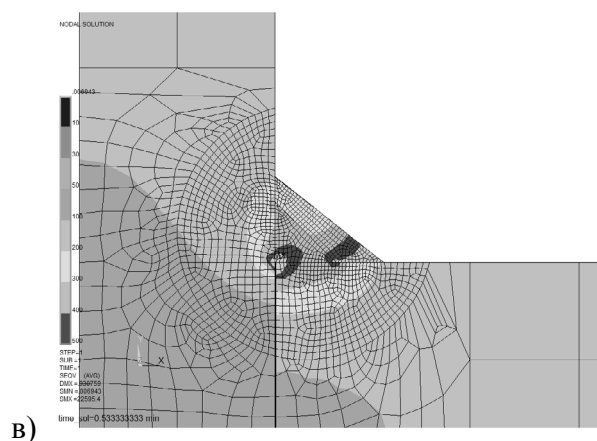
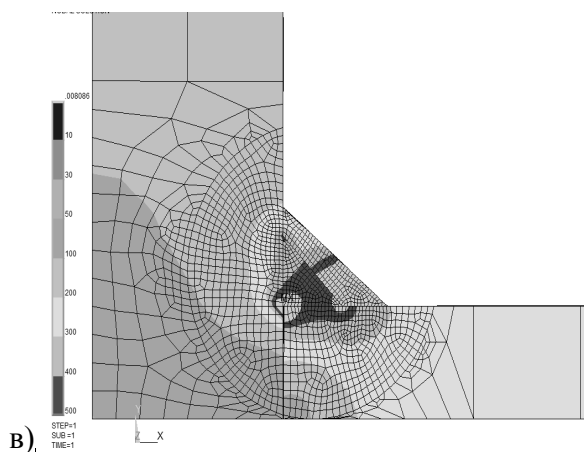
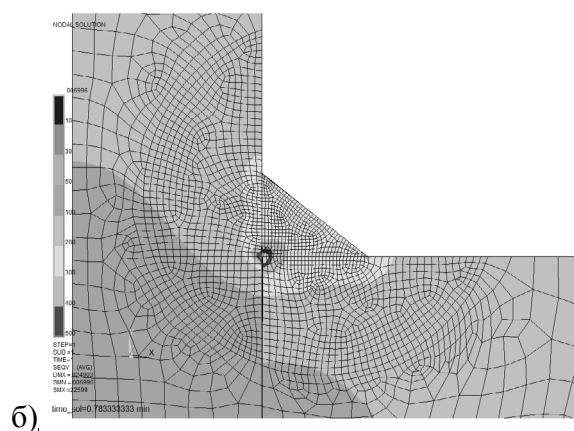
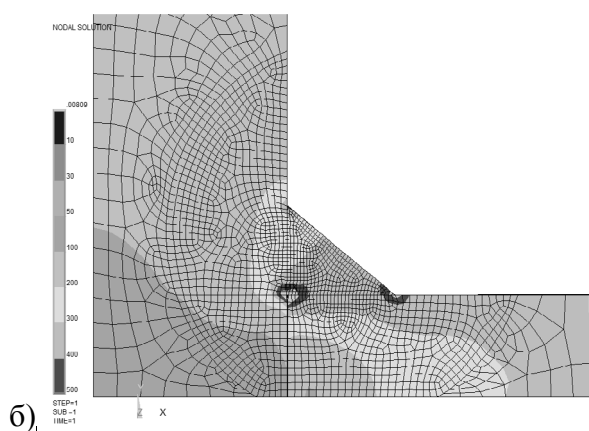
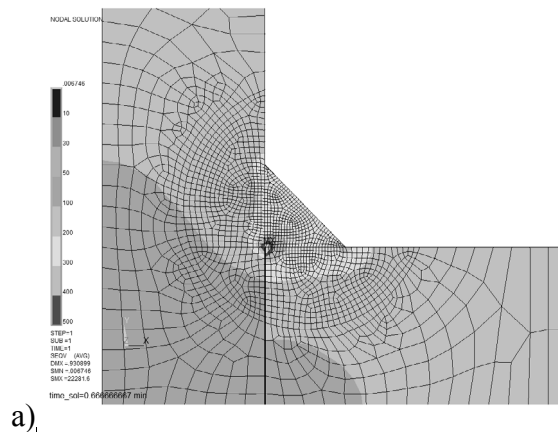
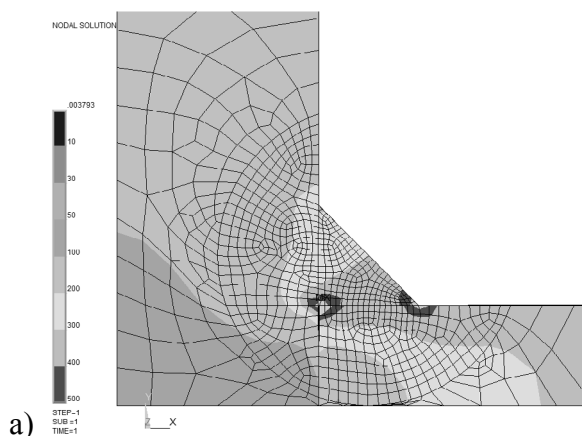
Поставленная задача решалась методом конечных элементов (МКЭ), реализованном в универсальном верифицированном программном комплексе ANSYS Mechanical. Использовались 8-ми узловые объемные КЭ типа SOLID185. Размерность СЛАУ порядка 500 000 неизвестных.



**Рис. 4.** Изополя эквивалентных напряжений (МПа) образца К1 480 8x8 (а) и модернизированных М1\_К1 480 9x7 (б) и М3\_К1 480 9x7+5x5+9x7 (в) образцов.

**Рис. 5.** Изополя эквивалентных напряжений (МПа) образца К2 480 8x8 (а) и модернизированных М1\_К2 480 7x9+9x7 (б) и М3\_К2 480 7x9+5x5+9x7 (в) образцов.

Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования



**Рис. 6.** Изополя эквивалентных напряжений (МПа) в поперечном сечении образца K1 480 8x8 (а) и модернизированных M1\_K1 480 9x7 (б) и M3\_K1 480 9x7+5x5+9x7 (в) образцов в поперечном сечении.

**Рис. 7.** Изополя эквивалентных напряжений (МПа) в поперечном сечении образца K2 480 8x8 (а) и модернизированных M1\_K2 480 7x9+9x7 (б) и M3\_K2 480 7x9+5x5+9x7 (в) образцов в поперечном сечении.

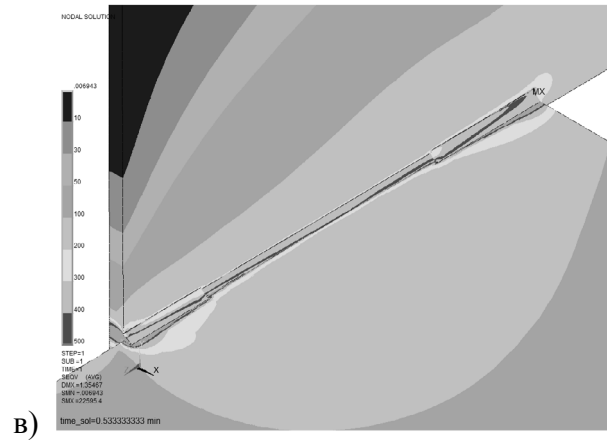
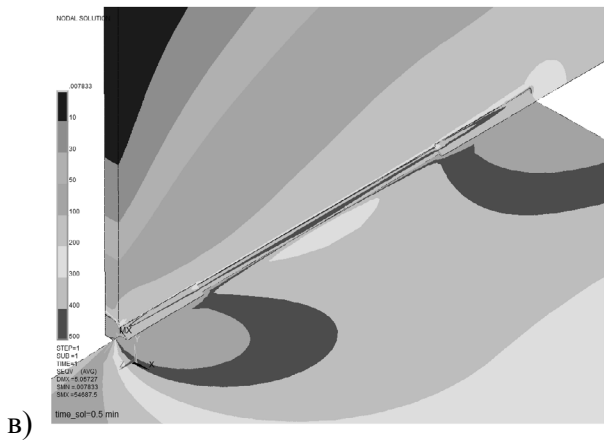
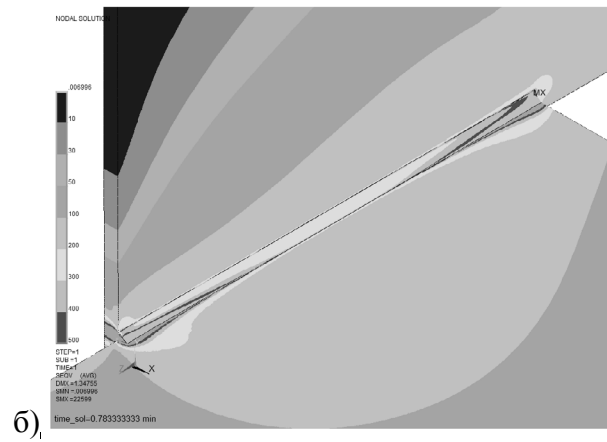
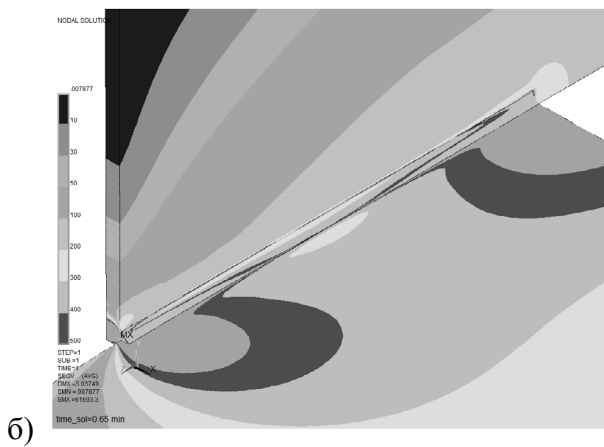
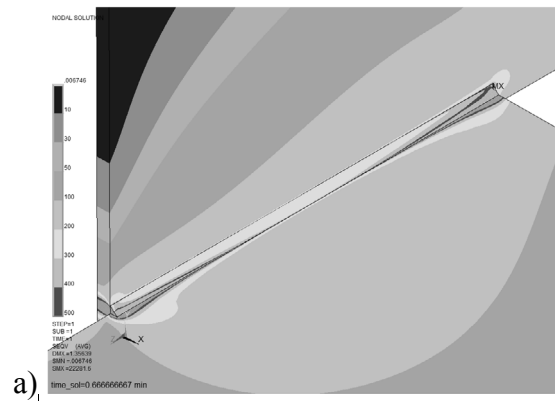
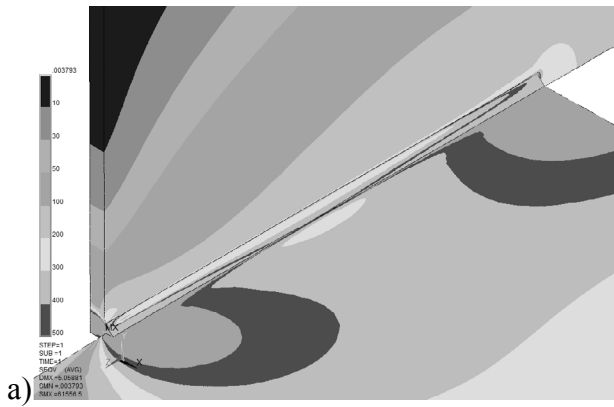


Рис. 8. Изополя эквивалентных напряжений (МПа) в шве и околошовной зоне образца K1 480 8x8 (а) и модернизированных M1\_K1 480 9x7 (б) и M3\_K1 480 9x7+5x5+9x7 (в) образцов в поперечном сечении.

Рис. 9. Изополя эквивалентных напряжений (МПа) в шве и околошовной зоне образца K2 480 8x8 (а) и модернизированных M1\_K2 480 7x9+9x7 (б) и M3\_K2 480 7x9+5x5+9x7 (в) образцов в поперечном сечении.

Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования

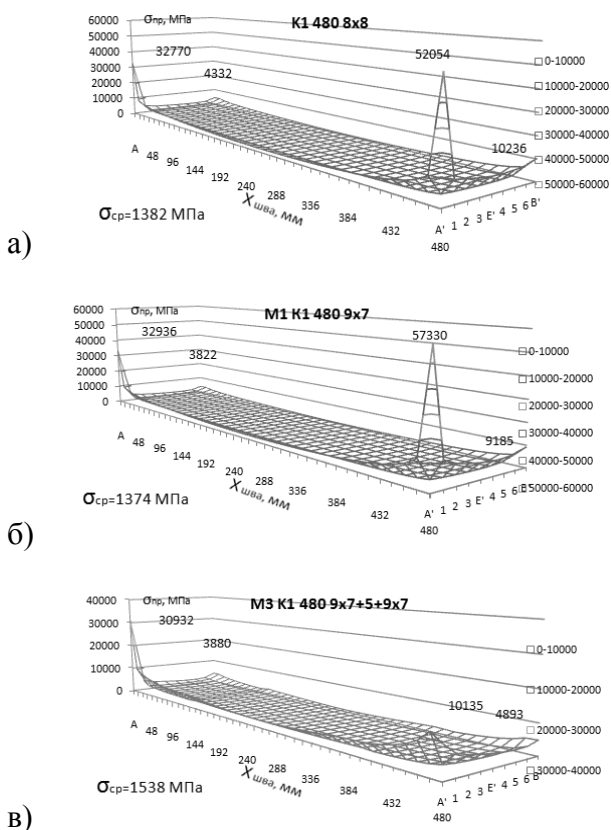


Рис. 10. Эквивалентные напряжения (МПа) на сильно нагруженной границе сплавления с прикрепляемым элементом исходного (а) и модернизированных (б) и (в) образцов.

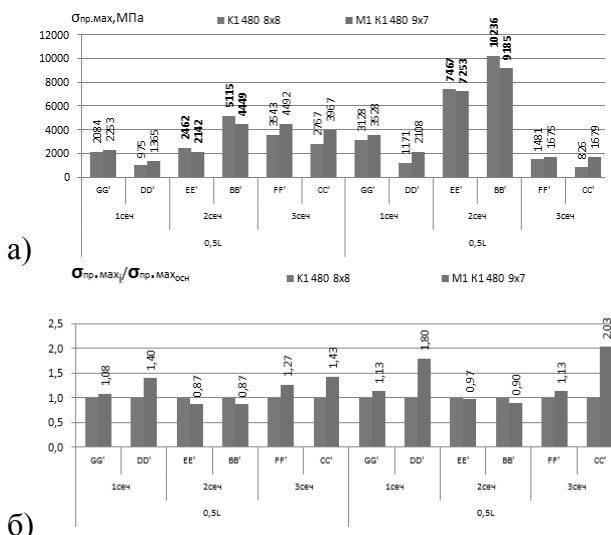


Рис. 11. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) **максимальных** приведенных напряжений в модернизированном образце (M1\_K1) в сравнении с исходным.

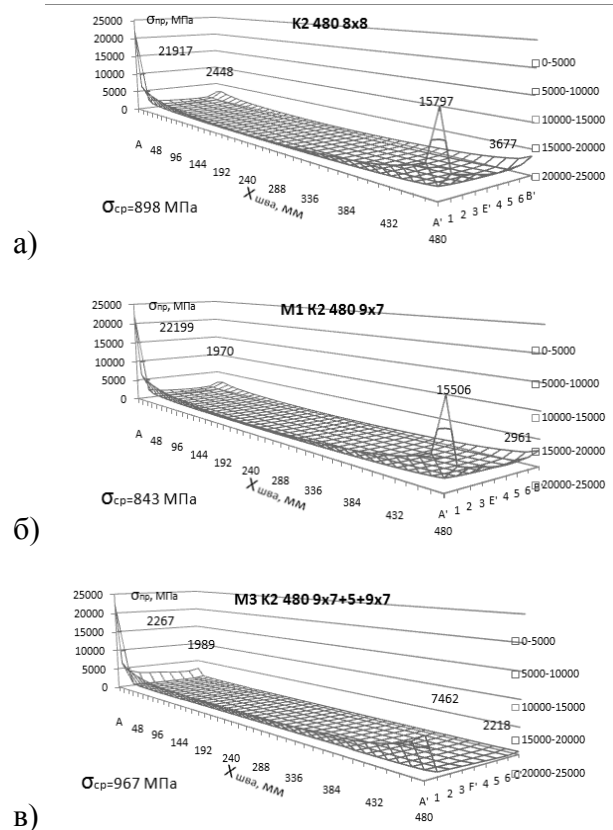


Рис. 12. Эквивалентные напряжения (МПа) на сильно нагруженной границе сплавления с прикрепляемым элементом исходного (а) и модернизированных (б) и (в) образцов.

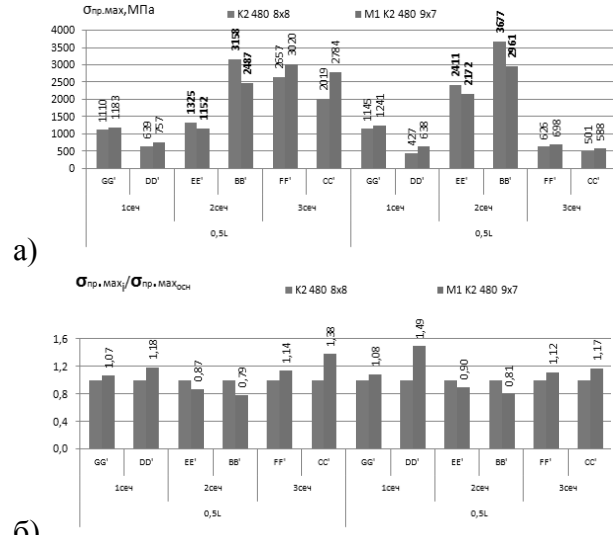
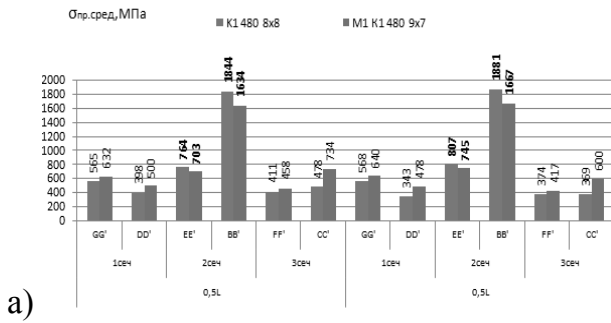
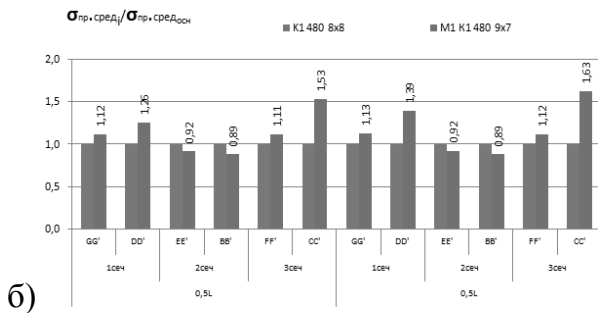


Рис. 13. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) **максимальных** приведенных напряжений в модернизированном образце (M1\_K2) в сравнении с исходным.

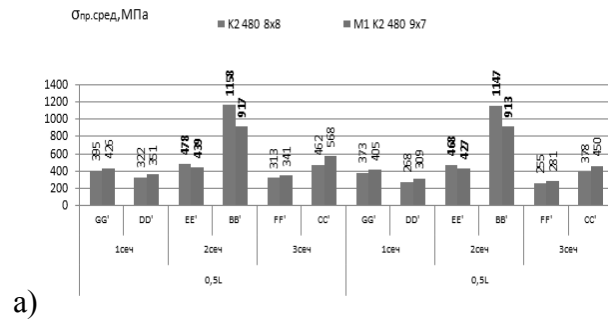


а)

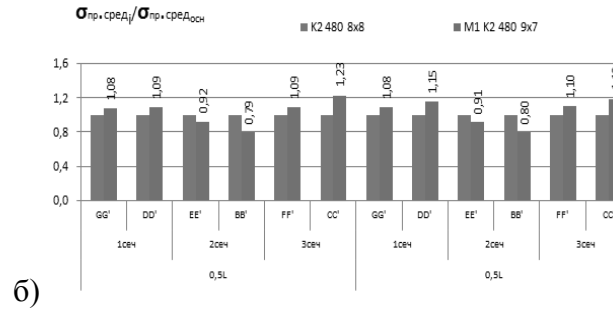


б)

Рис. 14. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) *средних* приведенных напряжений в модернизированном образце (M1\_K1) в сравнении с исходным.

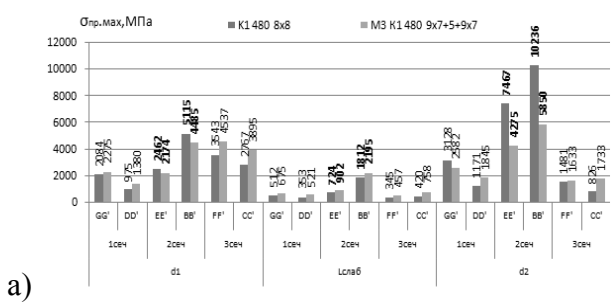


а)

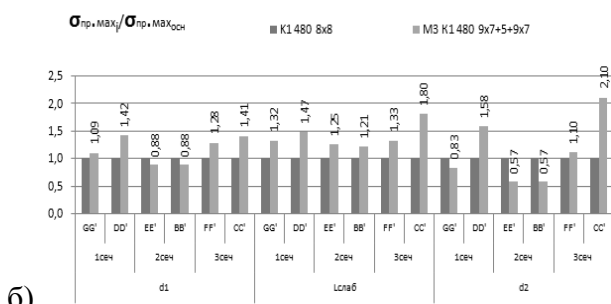


б)

Рис. 16. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) *средних* приведенных напряжений в модернизированном образце (M1\_K2) в сравнении с исходным.

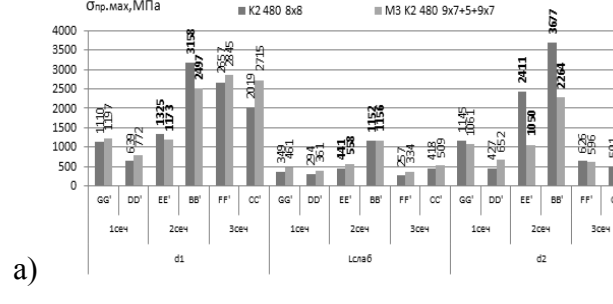


а)

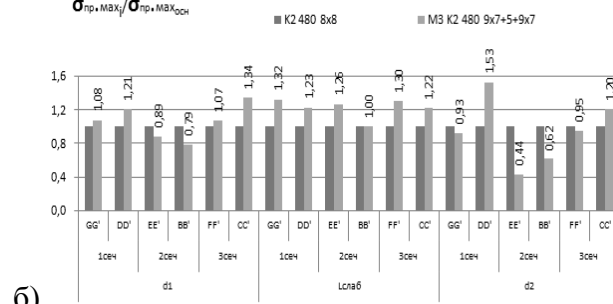


б)

Рис. 15. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) *максимальных* приведенных напряжений в модернизированном образце (M3\_K1) в сравнении с исходным.



а)



б)

Рис. 17. Уровень абсолютных (а) и относительных (б) *максимальных* приведенных напряжений в модернизированном образце (M3\_K2) в сравнении с исходным.

Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования

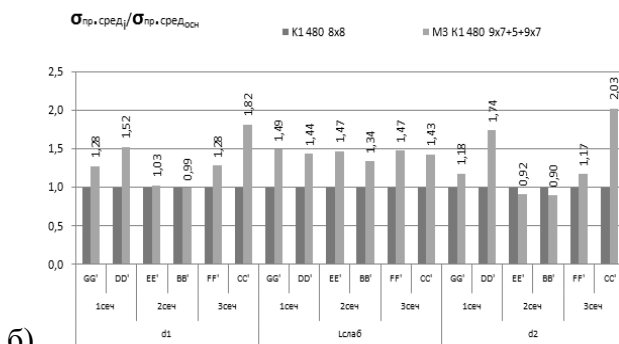
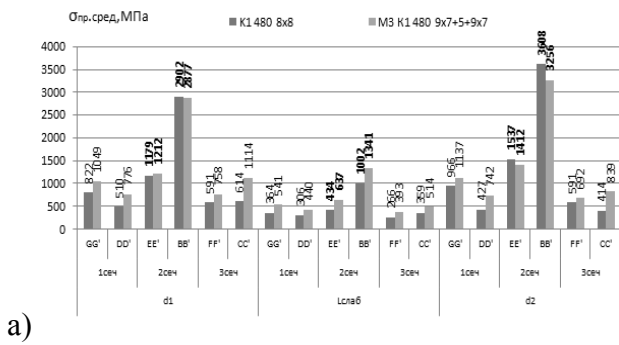


Рис. 18. Уровни абсолютных (а) и относительных (б) *средних* приведенных напряжений в модернизированном образце (М3\_K1) в сравнении с исходным.

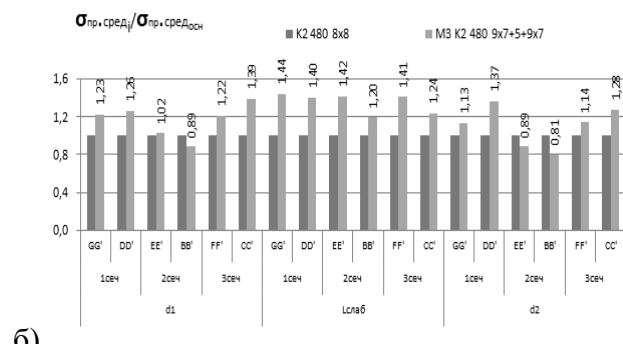
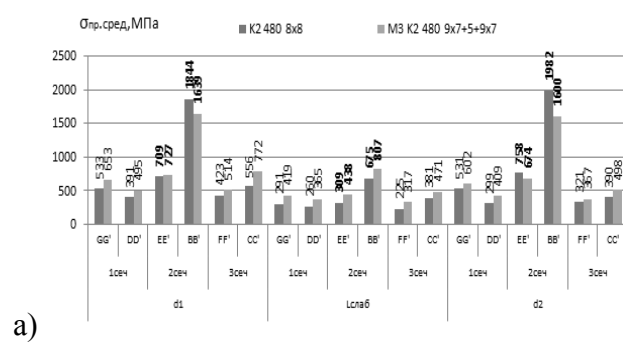


Рис. 20. Уровни абсолютных (а) и относительных (б) *средних* приведенных напряжений в модернизированном образце (М3\_K2) в сравнении с исходным.

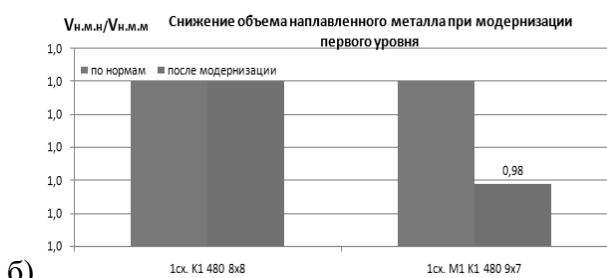
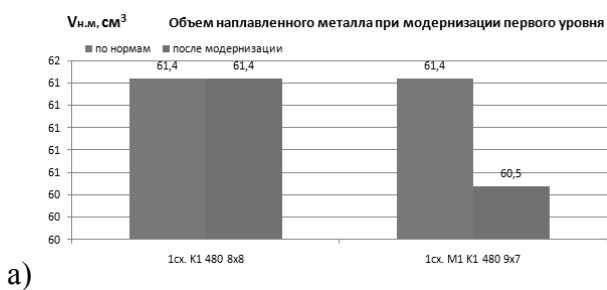


Рис. 19. Уровни абсолютных (а) и относительных (б) снижений объема наплавленного металла при модернизации первого уровня образца (M1\_K1)

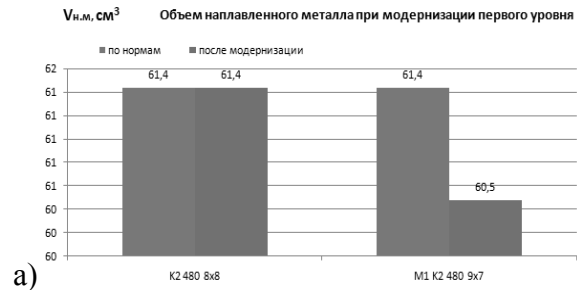


Рис. 21. Уровни абсолютных (а) и относительных (б) снижений объема наплавленного металла при модернизации первого уровня образца (M1\_K2).

## ВЫВОДЫ

1. Разработана методика модернизации сварных соединений с фланговыми швами на основе трехмерного конечноэлементного моделирования.  
 2. Методика апробирована на образцах выполненных РДС в практически значимом диапазоне:

- схем нагружения;
- геометрических параметров прикрепляемого элемента;
- изменения предельно допустимых длин фланговых швов с соответствующими катетами.

3. Модернизация *первого уровня* образцов К1 и К2 при одинаковом объеме наплавленного металла существенно влияет на снижение уровня приведенных напряжений:

а) по максимальным приведенным напряжениям в модернизированных образцах:

М1 К1 480 9x7 – в 1,11 раза

М1 К2 480 9x7 – в 1,24 раза

б) по средним приведенным напряжениям в модернизированных образцах:

М1 К1 480 9x7 – в 1,13 раза

М1 К2 480 9x7 – в 1,26 раза

Снижение объема наплавленного металла крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов составляет:

М1 К1 480 9x7 – 2%

М1 К2 480 9x7 – 2%

4. Модернизация *третьего уровня* образца также значительно снижает напряжения:

а) по максимальным приведенным напряжениям в модернизированных образцах:

М3 К1 480 9x7+5+7x5 – в 1,75 раза

М3 К2 480 9x7+5+7x5 – в 1,29 раза

б) по средним приведенным напряжениям в модернизированных образцах:

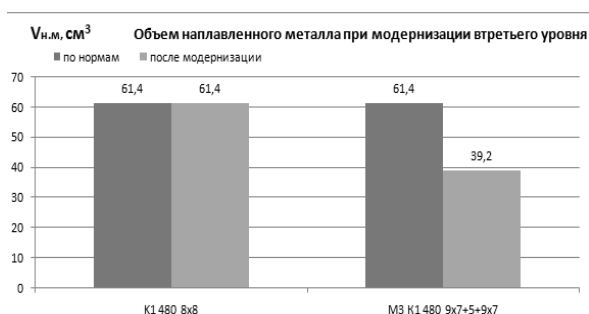
М3 К1 480 9x7+5+7x5 – в 1,11 раза

М3 К2 480 9x7+5+7x5 – в 1,21 раза.

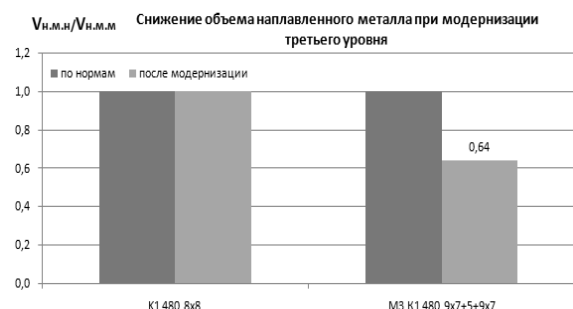
Снижение объема наплавленного металла крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов составляет:

М3 К1 480 9x7+5+9x7 – 36%

М3 К2 480 9x7+5+9x7 – 35%



а)

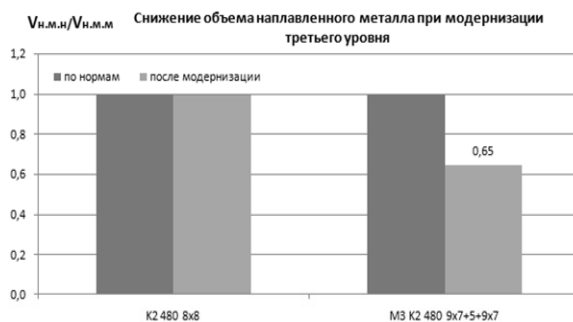


б)

**Рис. 22.** Уровень абсолютных (а) и относительных (б) снижений объема наплавленного металла при модернизации третьего уровня образца (М3\_К1).



а)



б)

**Рис. 23.** Уровень абсолютных (а) и относительных (б) снижений объема наплавленного металла при модернизации третьего уровня образца (М3\_К2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП П-23-81\*. Стальные конструкции. - Москва, 81
2. СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП П-23-81\*. - Москва, 2011.
3. **Белов В.А.** Несущая способность сварных соединений с фланговыми швами в строительных металлических конструкциях : монография / М-во образования и науки Росс. Федерации, ФГБОУ ВПО МГСУ, 2012. –136 с.
4. **Белов В.А., Круль К.** Моделирование и расчет металлических конструкций зданий и сооружений: монография / М-во образования и науки Росс. Федерации, ФГБОУ ВПО МГСУ, 2012. –160 с.
5. **Белов В.А., Гусев А.А., Щербина С.В.** Исследование влияния геометрии соединяемых элементов на распределение напряжений в сварных швах в линейной и нелинейной постановке. // Вестник МГСУ, №1, т.1,2011, с.30-34.
6. **Белов В.А., Гусев А.А., Щербина С.В.** Исследование влияния глубины проплавления на распределение приведенных напряжений вдоль фланговых швов в нелинейной постановке. // Вестник МГСУ, №2, т.2,2011, с.88-92.
7. **Белов В.А., Гусев А.А., Щербина С.В.** Исследование влияния схем нагружения на распределение приведенных напряжений вдоль фланговых швов в линейной и нелинейной постановке. // Вестник МГСУ, №7, 2011, с.559-563.
8. **Белов В.А., Гусев А.А., Щербина С.В.** Модернизация сварных соединений с фланговыми швами при изменяемой толщине прикрепляемого элемента // Механизация строительства. — 2012. — № 12. — с. 29-30. — <http://ms.enjournal.net/article/9026/>
9. **Белов В.А., Гусев А.А., Щербина С.В.** Модернизация сварных соединений с фланговыми швами при изменяемой ширине прикрепляемого элемента // Механизация строительства. — 2013. — № 1. — с. 32-35. — <http://ms.enjournal.net/article/9119/>
10. ANSYS APDL 14.0 User's Guide. // Canonsburg, 2011.
11. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Аул А.А., Нагибович А.И., Афанасьева И.Н., Козырев О.А., Павлов А.С.** Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS Mechanical (4 тома). – М.: ЗАО НИЦ СтаДиО, НОЦ КМ МГСУ, 2009

---

Белов Виктор Александрович, кандидат технических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (926) 381-03-25; e-mail: Belov@mgsu.ru

Гусев Антон Андреевич, аспирант кафедры МОДМТМ ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г.Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (903) 223-17-53; e-mail: Gusev@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, аспирант кафедры МОДМТМ, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г.Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; e-mail: serg\_msk89@mail.ru, niccm@mgsu.ru

Viktor A. Belov, PhD, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (926) 381-03-25; e-mail: Belov@mgsu.ru

Anton A. Gusev, graduate student of chair MODMTM, Moscow State University of Computation Simulation, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (903) 223-17-53; e-mail: GusevA@mail.ru

Sergey V. Scherbina, graduate student of chair MODMTM, engineer of Research & Education Center of Civil Engineering, Moscow State University of Computation Simulation, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: serg\_msk89@mail.ru, niccm@mgsu.ru

# АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ СООРУЖЕНИЯ ПРИ ЕГО МОНИТОРИНГЕ

*В.Н.Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье представлен алгоритм корректировки вычислительной расчётной модели сооружения, предназначенный для оперативного устранения различий в проявлениях сооружения и проявлениях его расчётной модели, выявленных в ходе мониторинга сооружения. Корректировка заключается в регулировке спектра собственных значений расчётной модели с использованием величин частот свободных колебаний, получаемых в ходе мониторинга сооружения. Считается, что замеры в ходе мониторинга могут быть получены некоторые значения собственных частот объекта и установлено их соответствие формам свободных колебаний.

**Ключевые слова:** вычислительная модель, корректировка расчётной модели, мониторинг, свободные колебания, динамические испытания, погрешность возмущения, структура матрицы жёсткости

## STRUCTURE NUMERICAL MODEL UPDATING ALGORITHM ON THE RESULTS OF MONITORING

*Vladimir N.Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The paper presents an algorithm for structure computer simulation model updating designed for prompt elimination differences in the manifestations of structures and manifestations of its computational model, identified during the monitoring of structure. Correction is to adjust the eigenvalues spectrum of calculation model using the values of the frequency of free vibrations obtained in the course of structure monitoring. It is believed that by measurements during the monitoring some of the values of natural frequencies of the object can be obtained and their appropriate forms of free oscillations can be established.

**Keywords:** simulation model, adjustment of the calculation model, natural frequencies, dynamic test, perturbation error, stiffness matrix structure.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Практика мониторинга становится неотъемлемым сопровождением жизненного цикла строительных объектов, пока не всех, но прежде всего уникальных (высотных, большепролётных, имеющих высокую общественную значимость, к ним относятся, например, крупные общественные, зрелищные и спортивные сооружения), объектов повышенной опасности (например, конструкций атомных электростанций) и

других ответственных сооружений [2-5]. Мониторинг строительных объектов перестаёт быть самостоятельной процедурой, от него ожидаются всё более конкретные результаты и выводы, регламентировано определяющие ход их жизненного цикла, прежде всего на стадии эксплуатации. Среди основных требований, предъявляемых к результатам мониторинга сооружений:

– выявление реальных текущих условий работы объекта, в том числе фактических

условий его взаимодействия с окружающей средой и воздействий на сооружение;

- выявление действительных значений геометрических и физических параметров объекта, степени их отклонений от проектных;

- выявление и устранение существенных различий проявлений реального объекта и проявлений его математической (вычислительной) модели, как правило, конечноэлементной расчетной схемы, принятой при расчетном обосновании на стадии его проектирования.

Последнее из упомянутых требований выполняется либо путем критического пересмотра, ревизии на стадии построения или даже замены исходной расчетной схемы, либо путём корректировки (адаптации) расчетной модели сооружения уже принятой и построенной изначально, например, при расчетном обосновании проектных решений. Первый подход (т.н. «интуитивно-инженерный» [1]) плохо согласуется с самой концепцией мониторинга, как процедуры постоянно осуществляемых замеров и их анализа в течение довольно продолжительного времени на этапах изысканий, строительства, эксплуатации и демонтажа сооружения. Излагаемый ниже алгоритм реализует, несомненно, более мобильный путь – второй («математически формализованный» [1]), т.е. оперативную, возможно многократную, обоснованную численную корректировку построенной ранее расчетной модели.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Предположим, в основу расчетной схемы сооружения принята достаточно общая математическая модель механической системы – уравнение движения твёрдого тела с конечным числом степеней свободы. Такое уравнение имеет известный матричный вид, в том числе используемый при численном расчёте инженерных

объектов в перемещениях методом конечных элементов:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{P\}. \quad (1)$$

Матрица масс  $[M]$ , матрица диссипативных характеристик (матрица демпфирования)  $[C]$ , матрица жёсткости  $[K]$ , а также вектор (векторы) сосредоточенных силовых воздействий и кинематических краевых условий  $\{P\}$ , а также искомый вектор (векторы) перемещений  $\{u\}$  по степеням свободы расчетной схемы вполне характеризуют построенную расчетную модель сооружения. Размерность квадратных матриц  $[M]$ ,  $[C]$  и  $[K]$ , а также векторов  $\{P\}$  и  $\{u\}$  равна  $n$  – принятому числу степеней свободы расчетной схемы. Рассмотрим матричную формулировку задачи динамического анализа механической системы без учёта внутренних диссипативных сил

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{P\}. \quad (2)$$

Будем считать, что на текущей стадии мониторинга строительного объекта измерены  $N$  частот его свободных колебаний  $\hat{f}_j$  и выявлено их соответствие формам свободных колебаний  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). В свою очередь выявление соответствия замеренных собственных частот конструктивно сложных сооружений формам их свободных колебаний на практике является отдельной и достаточно содержательной задачей. Возможность установления такого соответствия определяется, прежде всего, выбранной методикой проведения динамических испытаний и параметрами используемого испытательного оборудования. Однако эта информация, а именно «попарное» соответствие замеренных при мониторинге значений  $\hat{f}_j$  и форм свободных колебаний

$\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) для описываемого ниже алгоритма численной корректировки расчетной схемы сооружения принимается исходной.

В случае свободного движения механической системы уравнение (2) имеет вид

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (2a)$$

При этом в случае моделирования движения системы в состоянии её свободных гармонических колебаний можно принять

$$\{u\} = \{\Phi\}_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \quad (3)$$

Если  $f_i$  –  $i$ -ая частота свободных колебаний сооружения за одну секунду, измеряемая в герцах, то в (3)  $\omega_i = 2 \cdot \pi \cdot f_i$  – соответствующая  $i$ -ая циклическая (круговая) частота свободных колебаний сооружения, т.е. количество собственных колебаний сооружения за  $2\pi$  секунд. Подставив (3) в (2a), получим

$$(-\omega_i^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \{\Phi\}_i = \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где  $\{\Phi\}_i$  – собственная форма колебаний расчетной схемы сооружения, соответствующая  $i$ -ой собственной частоте;  $n$  – количество степеней свободы расчетной схемы сооружения, размерность матрицы жесткости  $[K]$  и матрицы масс  $[M]$  в (2), (2a), (4).

### 3. КОРРЕКТИРОВКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Запишем систему уравнений стационарных колебаний механической системы (4) в полном матричном виде

$$[K] \cdot [\Phi] - [M] \cdot [\Phi] \cdot [J] = \{0\}. \quad (5)$$

Здесь  $[\Phi] = [\{\Phi\}_1 \{\Phi\}_2 \dots \{\Phi\}_n]$  – матрица, чьи столбцы  $\{\Phi\}_i$  представляют формы свободных колебаний вычислительной модели механической системы;

$[J] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – диагональная матрица, причём  $\lambda_i = \omega_i^2$ , а  $\omega_i$  –  $i$ -ая циклическая (круговая) частота свободных колебаний расчетной схемы сооружения.

Если представить

$$[A] = [M]^{-1} [K], \quad (6)$$

то матричная форма уравнений свободного движения (5) примет вид

$$[A] \cdot [\Phi] = [\Phi] \cdot [J], \quad (7)$$

Тогда  $[J] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – это жорданова форма матрицы  $[A]$ , а  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  – её собственные числа, соответствующие собственным векторам  $\{\Phi\}_i$  матрицы  $[A]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В последовательности собственных значений расчетной схемы  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  заменим собственные значения  $\lambda_j$  на соответствующие значения  $\hat{\lambda}_j$ , которые получены из измерений на очередной стадии мониторинга сооружения. Причём  $\hat{\lambda}_j = \hat{\omega}_j^2$ , а  $\hat{\omega}_j$  – одно из  $N$  значений циклической (круговой) частоты свободных колебаний сооружения, выявленных в результате динамических испытаний в ходе его мониторинга,  $j = 1, \dots, N$  ( $N \leq n$ ). Оно соответствует некоторому значению  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и значит  $i$ -ой форме свободных колебаний сооружения  $\{\Phi\}_i$ . Таким образом, мы получим скорректированную последовательность собственных чисел расчетной схемы сооружения  $\hat{\Lambda}$ , например вида

$$\hat{\Lambda} = \{ \hat{\lambda}_1, \lambda_2, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \hat{\lambda}_N, \dots, \lambda_n \}. \quad (8)$$

Минимизацию среднеквадратичного значения «потерь» от возможной погрешности измерений  $S$  при замене  $N$  собственных чисел расчетной схемы  $\lambda_j$  на выявленные в результате эксперимента значения  $\hat{\lambda}_j$  осуществляем методом наименьших квадратов. Построим, например, многочлен порядка  $m$ :

$$y(i) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \cdot i^k, \quad (9)$$

сглаживающий последовательность  $\hat{\Lambda}(i)$  (8) из условия

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min,$$

где  $\Delta_i = y(i) - \hat{\Lambda}_i$ .

По полученным из решения системы линейных уравнений коэффициентам  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , многочлена (9) построим спектр собственных частот  $\{ \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n \}$ , с минимизацией потерь измерений, вычисляя его элементы уже по формуле (9):

$$\tilde{\lambda}_i = y(i). \quad (10)$$

Расчетную схему сооружения, скорректированную в процессе мониторинга, представляем матрицей вида (6):

$$[\tilde{A}] = [\Phi] \cdot [\tilde{J}] \cdot [\Phi]^{-1}, \quad (11)$$

формируемой согласно представлению её жорданова разложения:

$$[\tilde{J}] = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n), \quad (12)$$

$$[\tilde{J}] = [\Phi]^{-1} \cdot [\tilde{A}] \cdot [\Phi]. \quad (12a)$$

#### 4. СОХРАНЕНИЕ СТРУКТУРЫ И ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Корректировка расчетной модели сооружения в процессе его мониторинга фактически заключается в замене ключевой матрицы расчетной модели  $[A]$  (6), матрицей  $[\tilde{A}]$  (11). Она выполнена путём изменения ряда её собственных чисел, при этом сохраняет погрешность возмущения жордановой формы  $[J] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  матрицы  $[A]$ , но безусловно нарушает её важное свойство – ленточную (или блочно-ленточную) структуру. В свою очередь формальное сохранение ленточной структуры (или другой первоначальной структуры) матрицы  $[\tilde{A}]$  станет для неё уже существенным возмущением. Сохранение первоначальной структуры матрицы  $[A]$  при её замене на матрицу  $[\tilde{A}]$  с сохранением погрешности за счёт выполненного возмущения изначальной последовательности собственных чисел  $\Lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$  расчетной модели является важной и, в общем-то, неотъемлемой составляющей процедуры корректировки сложной расчетной схемы сооружения в процессе его мониторинга. С этой целью сначала понизим чувствительность разрешающей системы уравнений

$$[M] \cdot \{i\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{P\} \quad (2)$$

её преобуславливанием с использованием неполного разложения Холецкого симметричной, положительно определённой матрицы  $[A]$  (6).

Выберем простую разреженную нижнюю треугольную матрицу  $[h]$ , при этом «вполне схожую» с матрицей  $[g]$  из разложения Холецкого матрицы  $[A]$ :

$$[A] = \{g\} \cdot \{g\}^T. \quad (13)$$

Предобуславливателем системы уравнений (2) станет матрица  $[D]$ , как неполное разложение Холецкого матрицы  $[A]$ :

$$[D] = \{h\} \cdot \{h\}^T. \quad (14)$$

При назначении предобуславливателя  $[D]$  главным критерием является выполнение условия:

$$\text{cond}(Ad) \ll \text{cond}(\tilde{A}),$$

где  $\text{cond}(Ad)$  – число обусловленности матрицы

$$[Ad] = [D]^{-1} \cdot [\tilde{A}], \quad (15)$$

а  $\text{cond}(\tilde{A})$  – число обусловленности матрицы  $[\tilde{A}]$ .

Далее в симметричной матрице  $[Ad]$  (15) будем принимать во внимание её элементы, например, только в пределах ширины ленты исходной матрицы  $[A]$ . Остальные её элементы примем нулевыми. Назовём такую матрицу  $[A\tilde{d}]$ .

Таким образом, например, в случае статического расчёта сооружения решение исходной системы уравнений вида

$$[A] \cdot \{u\} = \{P\} \quad (16)$$

мы заменим на решение системы

$$[A\tilde{d}] \cdot \{u\} = [D]^{-1} \{P\}. \quad (17)$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход, позволяющий корректировать вычислительную расчётную

модель сооружения для оперативного устранения различий в проявлениях сооружения и проявлениях его расчётной модели, выявленных в ходе мониторинга сооружения. Корректировка заключается в регулировке спектра собственных значений расчётной модели с использованием величин частот свободных колебаний, получаемых в ходе мониторинга сооружения. Считается, что замеры в ходе мониторинга могут быть получены некоторые значения собственных частот объекта и установлено их соответствие формам свободных колебаний. Предложенный метод позволяет сохранить погрешность возмущения расчётной модели при её корректировке, и при этом сохранить характерную структуру матрицы жёсткости расчётной схемы сооружения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.** Адаптируемые конечно-элементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Основы разработанной расчётно-экспериментальной методики. *International Journal for Computational Civil Structural Engineering*, v.8, i.4, 2012.
2. **Шаблинский Г.Э., Зубков Д.А.** Натурные динамические исследования строительных конструкций. М., Издательство АСВ, 2009.
3. **Шаблинский Г.Э., Исайкин А.С., Зубков Д.А., Румянцев А.А.** Сравнительный анализ собственных колебаний главного корпуса Нововоронежской АЭС по результатам расчётов и экспериментальных исследований в натуральных условиях. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений №2, 2010.
4. **Дорофеев В.М., Лысов Д.А., Денисов А.С.** Особенности проектирования автоматизированных стационарных

систем мониторинга технического состояния несущих конструкций большепролётных спортивных сооружений Олимпиады 2014 в городе Сочи. Промышленное и гражданское строительство. М., №12, 2011.

5. **Шульман И.З.** Экспериментальные исследования динамических характеристик большепролётных мембранных покрытий. Строительная механика и строительные конструкции. Сборник статей к 80-летию А.В. Перельмутера, М., Издательство СКАД СОФТ, 2013.
6. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М., МИР, 1999.
7. **Тихонов А.Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач. Доклады АН СССР, 1963, т.153, №1, с.49-52.
8. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. М., Издательство ДМК, 2007.
9. **Friswell M.I., Mottershead J.E., Ahmadian H.** Finite Element Model Updating using Experimental Test Data: Parameterization and Regularization. Transactions of the Royal Society of London, s.A, Special Issue on Experimental Modal Analysis, 359 (1778), 01. 2001, pp.169-186.

---

Сидоров Владимир Николаевич, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

# ОЦЕНКА ЖИВУЧЕСТИ ОДНОПОЯСНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОКРЫТИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ВСЛЕДСТВИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И МОНТАЖА

*А.М. Югов, А.Б. Бондарев*

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка, УКРАИНА.

**АННОТАЦИЯ:** В статье выполнен обзор аварий большепролётных покрытий. Проанализированы причины появления аварий. Выявлено, что причинам аварий являются дефекты, приобретённые конструкцией на этапах жизненного цикла. Предложена методика оценки живучести покрытий на этапах жизненного цикла – изготовление и монтаж. На примере однопоясной металлической оболочки покрытия цилиндрической формы показана технология определения живучести вследствие погрешностей изготовления и монтажа. Установлено количество элементов вышедших из работы конструкции при разных способах монтажа.

**Ключевые слова:** большепролётные металлические пространственные покрытия, живучесть, сборочные погрешности, монтажные воздействия

## EVALUATION OF THE SURVIVABILITY ODNOPOYASNOY METAL SHELL COVER CYLINDRICAL FORM ERRORS DUE TO THE CONSTRUCTION AND MOUNTING

*Anatoliy M. Yugov, Alexey B. Bondarev*

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, UKRAINE

**ABSTRACT:** In the article the overview of crashes span coatings. Analyzed the reasons for the appearance accidents. Was revealed that causes of accidents are the defects acquired by by construction of lifecycle. Proposed a method determining the survivability of coatings on stages of life cycle – manufacturing and installation. On the example of odnopoyasnoy metal shell covering the technologies cylindrical shape determining of survivability as a result manufacturing errors and assembly. Found the number of items emerged of the construction work by various methods mounting.

**Ключевые слова:** large-span spatial metal system, survivability, the assembly sequence, mounting state

### ВВЕДЕНИЕ

При возведении каркасов металлических большепролётных покрытий, состоящих из большого количества отправочных марок, неизбежен процесс последовательного накопления погрешностей, возникающих при их изготовлении, укрупнительной сборке и монтаже. Точность проектирования, изготовления и возведения конструкций

большепролётных покрытий влияет в целом на их надёжность, в частности на живучесть. Проблема безопасности сегодня весьма актуальна в различных сферах человеческой жизнедеятельности. В том числе и в сфере эксплуатации строительных конструкций, зданий и сооружений [1]. Желание обеспечить свойство живучести в технических системах требует разработки методов анализа и оценки механизмов и

средств его обеспечения для каждого конкретного класса систем [2]. Надо отметить, что тематика живучести систем является далеко не новой, начало она берет в 50-е и более ранние годы XX века [11].

Появление дополнительных усилий и перемещений в таких системах может сказаться на их напряжённом состоянии, а главное – живучести. Именно дефекты и являются одним из факторов появления дополнительных усилий, и следовательно снижающих живучесть покрытия. Применительно к конструкциям купольных покрытий В.А. Савельев сформулировал понятие живучести. Статистика аварий показывает, что чаще всего обрушения конструкций связаны не с естественным разбросом случайных параметров, а с нарушением норм технических условий. Ошибки людей возникают чаще, чем большие отклонения прочности материала или нагрузок. Поэтому, уникальные большепролётные покрытия, отказы которых приводят к катастрофическим последствиям, необходимо проектировать живучими [13].

Под живучестью понимается сохранение конструкцией способности воспринимать расчётную нагрузку при выходе из строя любого элемента. Низкая точность изготовления и возведения конструкций приводит к большому количеству непредвиденных трудовых и финансовых затрат, как правило, не учтённых в общей стоимости строительного объекта. При наличии в конструкции линейных и угловых отклонений её установку невозможно выполнить без подгоночных операций на стройплощадке. Кроме того, накопление несовершенств может привести к аварии покрытия или как минимум снижению его живучести [13].

Большое количество аварий и обрушений, произошедших за последние годы [3, 9, 19] вызывают необходимость изучения и анализа живучести большепролётных покрытий. Рассматриваемые в данной работе однопоясные оболочки цилиндрической

формы ещё недостаточно исследованы. Однако, несовершенства (дефекты) несущих элементов, имеющие место при их изготовлении, транспортировке и монтаже, таких покрытий также практически не исследованы. Частично исследование таких оболочек представлено в работах [12, 14].

Согласно п. 3.18 [6] живучесть понимается как свойство объекта сохранять ограниченную работоспособность под воздействиями, которые не предусмотрены условиями эксплуатации, при появлении некоторых дефектов и повреждений, а также из-за отказа некоторых компонентов объекта [5].

Однако, незначительное, на первый взгляд, несоответствие конечной геометрии сооружения идеализированной проектной конфигурации, которые для традиционных конструкций не имели бы существенного значения. Для сооружений с большим количеством элементов, каковыми являются все пространственные большепролётные стержневые металлические покрытия несоответствия геометрии могут привести к непредсказуемым последствиям. Погрешности изготовления и монтажа в таких системах, даже во вновь возведенных приводят к возникновению существенных дополнительных усилий и перемещений [18, 19, 20].

Говоря иначе в такой системе должен быть выполнен расчёт собираемости, т.е. размерный анализ действительных геометрических параметров элементов конструкции. Такой расчёт выполняется для оценки показателей точности изготовления и монтажа.

Результаты расчёта собираемости – сборочные погрешности могут, а скорее должны служить дополнительной нагрузкой и воздействием для так называемого **монтажного загрузения** – с целью оценки влияния дефектов изготовления и монтажа на параметры напряжённо-деформированного состояния [10].

## 1. ОБЪЕКТ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Объект исследования** – однополая металлическая оболочка покрытия цилиндрической формы с указанием марок

элементов показана на рис. 1. **Цель исследования** – оценка влияния возможных отклонений формы оболочки от проектного положения на её живучесть.

Исследуемая однополая цилиндрическая

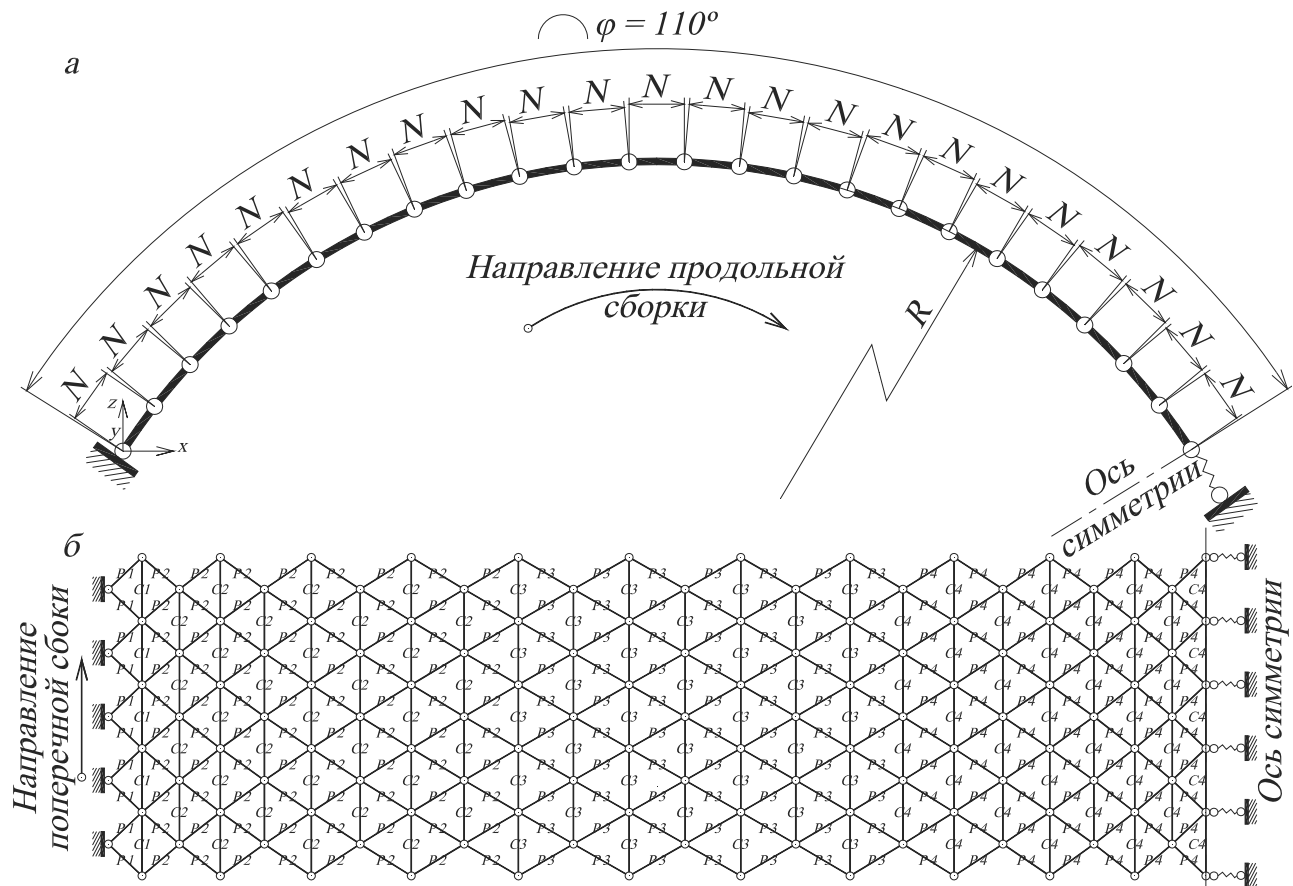


Рисунок 1 Расчётная схема исследуемой оболочки: а – вид сбоку; б – вид сверху с маркировкой элементов

металлическая оболочка радиусом  $R = 10\text{м}$  образована из последовательно соединённых в поперечном направлении  $N = 23$  монтажных элементов, угол раскрытия образующей  $\varphi=110^\circ$ . Длина отдельного стержня оболочки составляет 935мм. Сеть оболочки в плане образована равносторонними треугольниками. В работе принято шарнирное прикрепление оболочки к основанию. Опора справа принята упругоподатливая, т.к. с её помощью моделируется отсутствующая половина оболочки, рассмотренная в работе [15].

## 2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Предварительно с позиции живучести проанализируем конструктивную форму оболочки. Исследуемую сетчатую оболочку можно рассматривать как результат «аппроксимации» треугольниками (дискретный аналог) континуальной оболочки. При мысленном удалении любого узла видно, что покрытие остаётся геометрически неизменяемым. Т.о., выбранная конструктивная форма изначально обладает высокой потенциальной живучестью, что объясняется фактором

многократной внутренней статической неопределимости и связности. С другой стороны, высокая внутренняя статическая неопределимость приводит к повышению чувствительности таких покрытий к несовершенствам и, следовательно, к снижению живучести. Следовательно, необходимы численные расчеты для анализа живучести покрытия. Учитываем, что величины погрешностей будут максимальны в правой опоре оболочки если сборку производить в направлении от левой опоры к правой. Потому можно предположить, что наиболее опасны отказы элементов, которые максимально удалены от левой опоры. Численное определение напряженно-деформированного состояния оболочки и её живучести выполнено методом конечных элементов реализованного в

вычислительном комплексе (БК) Structure CAD. Ранее для рассматриваемой оболочки авторами выполнен статический расчёт [15], расчёт собираемости [17], статический расчёт с учётом дефектов изготовления и монтажа, т.е. вследствие возможных погрешностей возведения, полученных из расчёта собираемости [15].

В результате этих расчётов получены величины погрешностей, усилий в элементах от расчётного сочетания нагрузок и величин сборочных усилий от погрешностей при продольной и поперечной сборке, которые приведены в таблице 1. В работе все узлы оболочки приняты шарнирными. В конструктивно плане предполагается, что система изготовлена из элементов типа «MERO».

Таблица 1 Усилия и перемещения в оболочке

Элементы оболочки		P1	P2	P3	P4	C1	C2	C3	C4
Усилия max, кН		-36	-157	-201	-229	-40	35	69	97
НС-сечения, кН*		189	189	246	246	189	189	189	189
ПДС-м, кН**		-46	-28	-22	-155	-35	59	27	147
ПДС-и, кН		-2	-7	-8	-102	-4	5	12	79
ППС-м, кН		-21	-39	-15	-140	-21	43	24	106
ППС-и, кН		-6	-6	-6	-34	-5	7	5	34
$\delta_z$ max, мм	сим.	-2	-4	-24	-32	-2	-4	-17	-32
	не сим.	-3	-6	-31	-40	-3	-6	-22	-40
$\delta_x$ max, мм	сим.	-8	-12	-27	-7	-8	-12	-13	-7
	не сим.	-10	-16	-35	-9	-10	-16	-17	-9

\*НС-сечения – несущая способность принято сечения. Несущая способность ГСП 80×3 – 189 кН, а ГСП 80×4 – 246 кН.  
 \*\*ПДС-м – погрешности при продольной сборке при отклонениях монтажа согласно [7];  
 ПДС-и – то же изготовления согласно [4];  
 ППС-м – погрешности при поперечной сборке при отклонениях монтажа согласно [7];  
 ППС-и – то же изготовления согласно [4].

### 3. ПРИМЕР РАСЧЁТА ЖИВУЧЕСТИ

На основе статического расчёта оболочки установлено, что при монтаже оболочки появляются элементы, несущей способности узлов которых недостаточно для восприятия сборочных усилий [15]. Однако, не во всех элементах возникает максимальное усилие.

Следовательно, явное разрушение оболочки не происходит. Величины деформаций и максимальных напряжений в системе при наличии погрешностей монтажа от продольной сборки приведены в таблице 2. При погрешностях монтажа от продольной сборки разрушаются 33 элемента Р4 из 40шт., и 14 элементов из 27шт. – Р4. В связи

с этим происходит увеличение деформации и напряжений в оставшихся (работающих) элементах. Допускаемые вертикальные деформации для нашей системы – 67мм [8].

Моделирование разрушения отдельных элементов в узле выполняется путём удаления продольной связи относительно местной оси ОХ элемента.

Таблица 2 Усилия и перемещения в оболочке при погрешностях ПДС-м\*

Элементы оболочки		P1	P2	P3	P4	C1	C2	C3	C4
Усилия max		-36	-157	-201	-229	-40	35	69	97
Усилия max <sub>1</sub> **		41	-168	-349	-187	-50	-20	211	175
НС-сечения		189	189	246	246	189	189	189	189
ПДС-м		-46	-28	-22	-155	-35	59	27	147
$\delta_z$ max, мм	сим.	-2	-5	<b>-167</b>	<b>-395</b>	-2	-5	-29	<b>-395</b>
	не сим.	-2	-6	<b>-211</b>	<b>-487</b>	-2	-6	-37	<b>-487</b>
$\delta_x$ max, мм	сим.	-7	-21	<b>-136</b>	<b>-136</b>	-7	-14	-27	<b>-136</b>
	не сим.	-8	-26	<b>-172</b>	<b>-172</b>	-8	-18	-35	<b>-172</b>
*Усилия max <sub>1</sub> – усилия в оболочке после 1 (первого) снижения живучести (удаления продольных связей).									

Таблица 3 Усилия и перемещения в оболочке при погрешностях ППС-м\*

Элементы оболочки		P1	P2	P3	P4	C1	C2	C3	C4
Усилия max		-36	-157	-201	-229	-40	35	69	97
Усилия max <sub>1</sub>		-60	-148	-221	-137	-81	-119	85	162
НС-сечения		189	189	246	246	189	189	189	189
ППС-м		-21	-39	-15	-140	-21	43	24	106
$\delta_z$ max, мм	сим.	-8	-16	-26	<b>-139</b>	-8	-16	-20	<b>-139</b>
	не сим.	-10	-20	-33	<b>-176</b>	-10	-20	-25	<b>-176</b>
$\delta_x$ max, мм	сим.	-31	-39	-29	-39	-31	-39	-16	-39
	не сим.	-8	-16	-26	<b>-139</b>	-8	-16	-20	<b>-139</b>
*ППС-м – погрешности монтажа при поперечной сборке									

Удаление связи приведёт к локальному отказу элемента оболочки и снижению жёсткости узлового соединения. Поэтому повысится деформативность системы. Потому оболочка не будет способна воспринять расчётную нагрузку. При поперечной сборке погрешности монтажа и сборочные усилия будут меньше. Они приведены в таблице 3. Наличие погрешностей монтажа при поперечной сборке вызывает разрушение узлового соединения элемента, что произойдёт скорее чем непосредственное разрушение самих 4 элементов P2 из 40шт., 16 из 40шт. – P4, и 6 из 27шт. – C4. Из расчёта системы на

живучесть при наличии погрешностей монтажа от продольной сборки, её деформации значительно увеличиваются в сравнении с системой без дефектов сборки. Поэтому при реализации расчётного сочетания в системе может произойти прогрессирующее увеличение деформаций. Последнее может привести к разрушению оболочки покрытия. Срез резьбы муфты – разрушение соединения стержня с узловым элементом. Разрушение соединения элемента с узлом приводит к тому, что в расчётной схеме узла оболочки высвобождается одна внутренняя связь – перемещение вдоль местной оси элемента

ОХ, т.е. шарнир превращается в ползун, как показано на рис. 3. Нужно сказать, что процесс деформирования оболочки сопровождается изменением распределения усилий в элементах оболочки и тем самым приводит к дальнейшему исключению внутренних связей в оболочке. Тем самым, снижается внутренняя статическая связность системы, а самое главное – снижается несущая способность оболочки вплоть до её полного разрушения. Деформации в системе после исключения внутренних связей уже на первом этапе расчёта превышают допустимые в 2...4 раза, т.е. 100...300 мм – в большинстве случаев. Один этап расчёта – исключение связей в узлах тех элементов, которые были разрушены в результате действия монтажных нагрузок – сборочных погрешностей.

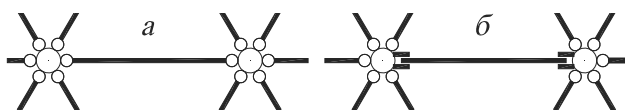


Рисунок 3 Расчётная схема фрагмента оболочки при: а – отсутствии сборочных погрешностей; б – наличии сборочных погрешностей

Критерием, остановки процесса расчёта оболочки покрытия на живучесть является величина предельного вертикального перемещения узлов оболочки.

Конкретные решения по усилению (конструкции узлов, габариты сечений) в работе не приводятся, поскольку могут иметь место большое количество вариантов их реализации. Проработка и оптимизация решений должна быть выполнена на стадии рабочего проектирования усиления. Дополнительно надлежит провести модельные испытания рабочего варианта покрытия с установленной системой конструктивной компенсации – один из способов снижения влияния погрешностей сборки оболочки на её несущую способность и следовательно живучесть.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов, полученных при численном исследовании влияния погрешностей возведения однопоясной цилиндрической оболочки покрытия на её живучесть можно сделать следующие выводы:

1. Согласно результатам статико-конструктивного анализа живучести оболочки она обладает потенциальной живучестью за счёт высокой внутренней статической неопределимости.

2. Система чувствительна к несовершенствам за счёт высокой внутренней статической неопределимости, а наличие сборочных усилий снижает живучесть, что подтверждает высказывания В.А. Савельева [13].

3. Увеличение сечения элементов для увеличения живучести представляет собой не оправданное решение т.к. причина появления сборочных усилий – погрешности, и при увеличении сечения они никуда не исчезнут.

4. Живучесть исследованных оболочек недостаточна. Для обеспечения требуемого уровня живучести оболочки необходимо снизить величины сборочных усилий путём разработки конструктивных, технологических или других мероприятий компенсации на этапе проектирования таких и аналогичных с исследованными объектами.

5. Необходимо проведение экспериментальных исследований, направленных на установление действительного влияния сборочных погрешностей на параметры напряжённо-деформированного оболочки и, следовательно на живучесть системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белостоцкий А.М. Анализ причин обрушения конструкций покрытия СОК

- «Трансвааль-парк». Часть 1. Постановка задач и методология численного моделирования. Часть 2. Моделирование нагрузок и воздействий. Вестник МГСУ. – 2006. – № 3. – С. 20-40.
2. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование в экспертных исследованиях причин обрушения и локального разрушения конструкций большепролетных зданий // *International journal for computational civil and structural engineering*. Vol. 4, Issue 2. – М. – 2008. – С. 26-27.
  3. **Горохов Е.В., Мушанов В.Ф., Касимов В.Р., Назим Я.В., Кузнецов С.Г., Васылев В.Н.** Мониторинг сложных технических систем // *Металлические конструкции*. – 2008. –Том. 14. - № 4. – С. 299-313.
  4. ГОСТ 21779-82. Система обеспечения точности геометрических параметров в строительстве. Технологические допуски. – М.: Издательство стандартов. – 1983. – 14 с.
  5. ГОСТ 27.002-89\*. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. – М.: Госстрой СССР. – 32 с.
  6. ДБН В.1.2-14-2009. Система обеспечения надёжности и безопасности строительных объектов. Общие принципы обеспечения надёжности и конструктивной безопасности зданий, сооружений, строительных конструкций и оснований. – К.: Сталь. – 45 с.
  7. ДБН В.2.6-163-2010. Строительные материалы и конструкции. Стальные конструкции. нормы проектирования, изготовления и монтажа. – К.: Укрархбудінформ, 2011 . – 220 с.
  8. ДСТУ Б В.1.2-3:2006. Система обеспечения надёжности и безопасности строительных объектов. Прогибы и перемещения. – Киев: Минстрой Украины. – 2006. – 9с.
  9. **Канчели Н.В.** Строительные пространственные конструкции: Учеб. пособие. 3-е издание, дополненное и переработанное – М.: АСВ. – 2009. – 112 с.
  10. **Колесниченко В.Г., Югов А.М.** К вопросу расчета металлических конструкций на монтажные нагрузки и воздействия // *Современное промышленное и гражданское строительство*. – 2006. – № 4, т. 2. – С. 195-202.
  11. **Ляхов Г.** Очерки по живучести боевого корабля. – Л.: УВМС РККА. – 1932. – 149 с.
  12. **Матюнёв С.А.** Цилиндрические сетчатые металлические своды. Теоретические и экспериментальные исследования прочности и устойчивости: Диссертация кандидата технических наук – Пенза. – 2002. – 150 с.
  13. **Савельев В.А.** Теоретические основы проектирования металлических куполов: Автореферат диссертации доктора технических наук. – М.: 1995. – 40 с.
  14. **Сиянов А.И.** Металлические однослойные цилиндрические стержневые покрытия: Диссертация кандидата технических наук – К. – 2002. – 200 с.
  15. **Югов А.М., Бондарев А.Б.** Напряжённо-деформированное состояние однопоясной стержневой металлической оболочки покрытия цилиндрической формы при наличии погрешностей изготовления и монтажа // *Металлические конструкции*. – Макеевка: ДонНАСА. – 2013. – Том 19. - №2 – (сдана в печать).
  16. **Югов А.М., Бондарев А.Б.** Статический расчёт однопоясных цилиндрических стержневых металлических оболочек покрытия // *Металлические конструкции*. – 2013. – Том. 19. – №1 – (сдана в печать).
  17. **Югов А.М., Бондарев А.Б.** Численное статистическое исследование погрешностей возведения однопоясной

металлической оболочки покрытия цилиндрической формы // Научно-практическая конференция. Расчёт и проектирование металлических конструкций. Россия, Москва, 28 марта 2013г. – М.: НИУ МГСУ. – 2013. – (сдана в печать).

18. **Bruno Robin J.** Identification of nonlinear joints in a truss structure // Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) / American Society of Mechanical Engineers (ASME) Adaptive Structures Forum, Hilton Head, SC. – Washington, 1994. – P. 402-410.
19. **Bujakas V.I., Gvamichava A.S., Rybakowa A.G.** Petal-Type Deployable Space Antennas for Radio Astronomy // Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS). – Hong Kong. – 1997. Vol. 2. – P. 380.
20. John Chilton Space Grid Structures. – Great Britain: Architectural Press. – 2000. – 180 p.
21. **Makoto Ohsaki** Optimization of Finite Dimensional Structures. – Japan: CRC Press Taylor & Francis Group. – 2011. – 405 p.

---

Югов Анатолий Михайлович, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, кафедра технологии и организации строительства, 86123, Украина, г. Макеевка, ул. Державина 2, e-mail: amyurus@mail.ru

Бондарев Алексей Борисович, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, кафедра технологии и организации строительства, 86123, Украина, г. Макеевка, ул. Державина 2, e-mail: bondarev\_a\_b\_rus@mail.ru

Anatoly Y. Mikhaylovich, Department of Construction Engineering and Management, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Derzhavin str. 2, 86123, Makeyevka, UKRAINE, e-mail: amyurus@mail.ru

Alexey B. Borisovich, Department of Construction Engineering and Management, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Derzhavin str. 2, 86123, Makeyevka, UKRAINE, e-mail: bondarev\_a\_b\_rus@mail.ru

# INVESTIGATION OF REPAIR COMPOSITIONS DELAMINATION MECHANISM BY RESTORATION STRUCTURES AFTER SULFUROUS CONNECTIONS CORROSION ATTACK

*Andrey N. Avrenyuk, Anastasia A. Avrenyuk*  
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, RUSSIA

**ABSTRACT:** Concrete specimens microstructure investigations results after destructive impact of sulfurous connections and after delamination mechanism substantiation of repair compositions on the cement base were presented. The necessity of carefully concrete rust products removing in restoration structures after sulfurous medium attack was shown.

**Key words:** Corrosive to concrete sulfurous connections, reinforced concrete restoration, maintainability

The field experience of concrete and reinforced concrete structures shows that they are failed considerably earlier as compared with the rated resource in the issue of corrosion. According to the statistical data in Europe the repair cost exceed 20 billion euro p.a., in Russia the repair cost of some industrial structures is reached over 40...50 years the sum which is equal in their value. Hereby the cost of executable repair works is already comparable with the means for new construction. It is also specified by the steady rise of present infrastructure units operation life. In recent time the state of majority repaired reinforced concrete facilities is suffered serious deterioration later on just few years after the execution of repair works. About 75% of refusals by reinforced concrete structures restoration are received after only 5...7 years. It is considered to be successful if the repeated restoration is needed after 12...15 years [1]. The field experience of repaired structures after the impact of sulfurous mediums indicates that commonly their service life is low because of the repair material delamination [2, 3].

In fig. 1 the thematic example of failed reinforced concrete repair is shown. When even after six months of exploitation (or even earlier) the delamination of repair composition on the cement base has begun. At that time the ar-

rangement of pits in the sewage well's wall which was repaired after the biogenic sulfuric acid corrosion effect, is demonstrated the risk of keeping corrosion products (mainly as double hydrous gypsum) if the surface preparation is unsatisfactory.

The layers investigation with using the indicator (0,1% phenolphthalein solution) shows that only repair composition 1 and non corroded concrete in deep 3 are colored in raspberry pink, sulfatized layer 2 which was covered by repair composition is not colored.

For investigations of delamination mechanism the real specimens of that repair composition with sulfatized layer on the inner side was chosen (fig.2). Special attention was given to the contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition» to analyse the composition peeling mechanism on-stream.

Electron microscopic and X-ray spectrum microanalysis of concrete specimens was realized by the scanning electron microscope «JEOL-JSM 6610 LV» with detector «Oxford INCA Energy». Researches were conducted without substantial samples preparation of concrete species in low vacuum medium that allows to analyse the surface in its basis quality (after sample full-scale specimens from operated units structures).

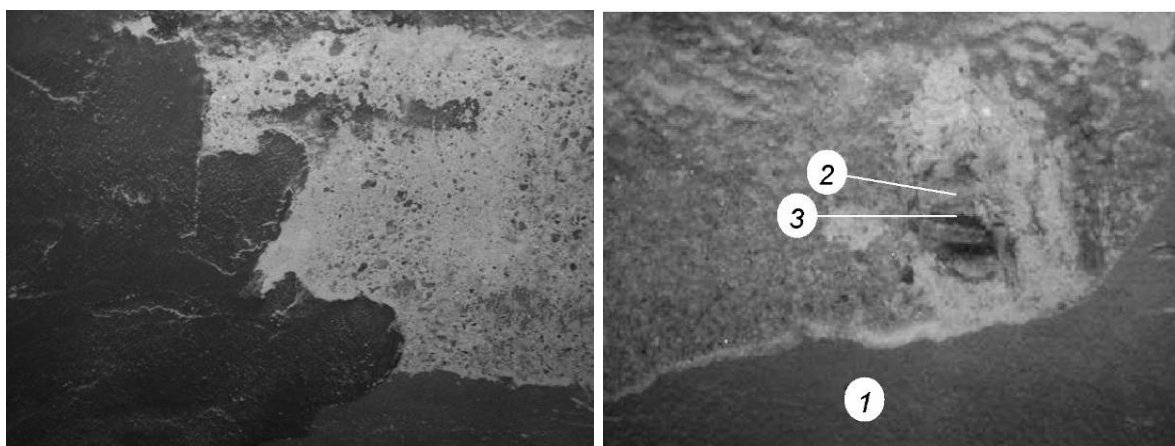


Figure 1. The delamination of repair composition on the cement in case of the unsatisfactory sewage well surface preparation, which contains sulphates mainly as double hydrous gypsum:  
1 – repair composition; 2 – sulfatized layer; 3 – non corroded concrete.



Figure 2. One of the real specimens of repair composition with sulfatized layer on the inner side.

In the issue of investigations has been determined the fact that originally before putting the repair composition new formations with high sulfur content was formed under the influence of corrosive sulfurous mediums in the surface and intermediate layers. S/Ca ratio which is close to stoichiometric makes it possible to number this phases among gypsum and its modifications. That confirmed both structure electronic pictures analysis and X-ray spectrum microanalysis results.

Repair composition coating on the such unsatisfactory prepared surface didn't promote qualitative restoration as well as load transfer to recovered construction parts; and has resulted in delamination of all the materials system on stream (Fig. 1).

The majority of modern repair compositions which are supplied as dry mix enclose the raised content of aluminates to provide dimensional stability ( $C_3A$ ) (shrinkage is one of the main disadvantages of repair material, which is cause adhesion decrease and microcracks appearance) [3, 4]. That provides the formation of extra compounds amount such as ettringite in the contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition» with further delamination of coating (Fig. 3,4). In that case besides ettringite the formation of extra aluminate phases forms is also possible [5].

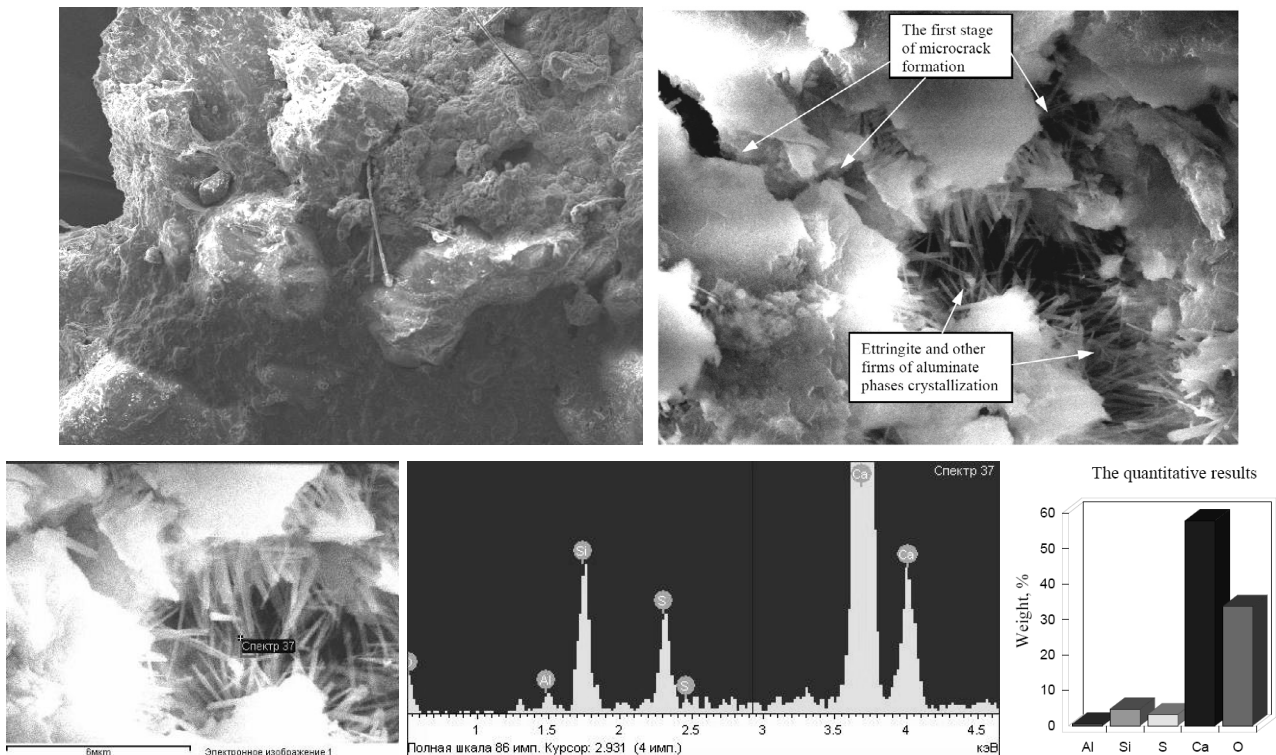


Figure 3. The view of contact area «sulfatized concrete base layer - repair composition», ettringite and other firms of aluminate phases crystallization with microcrack formation. The X-ray spectrum microanalysis results of forming crystals.

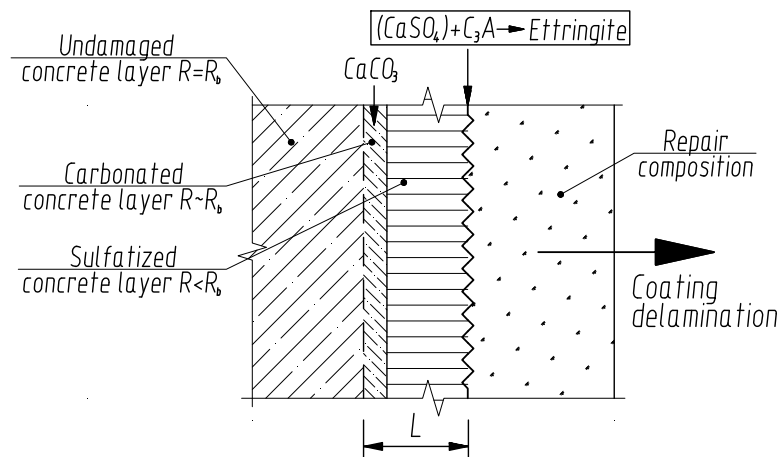


Figure 4. Delamination mechanism of repair coating on the cement base in repairing after the sulfuric acid attack;  $L$ -the layer that should be removed by cleaning.

Consequently the investigations it was determined that during that process of ettringite and other firms of aluminate phases crystallization the stress fields that result in microcracks formation (Fig.3) and following delamination of repair composition on the cement in case (Fig.4) may arise in contact areas. During the layerwise

research it was also determined that besides of sulfatized layer damaged layer is composed of carbonated one. It is stipulated by the advance diffusion of carbonic acid  $\text{CO}_2$  as compared with sulfurous gases  $\text{H}_2\text{S}$ ,  $\text{SO}_2$  and  $\text{SO}_3$ . Thereby in cases of elimination the possibility of ettringite formation and further delamination

of coating the whole removing of the main sulfate contained ingredient of present connection - dihydrophytic gypsum and its modifications - have to be done.

This fact is the key characteristic in cleaning the restorable concrete and reinforced concrete structures. The carbonated layer can be retained because it doesn't contain such substances that may cause the reaction leaking with increase of neoplasms phases volume [4]. Besides in repairing with materials on the cement base the pH renewal in that layer will take place because of the alkalis migration from new coating. It will eliminate the possibility of reinforcement corrosion.

Technological University named by I.I. Polzynov. – Barnayl, 2008. – 302 p.

---

Andrey N. Avrenyuk, Candidate of Technical Science, Assistant, Department of Building Constructions, Ufa State Petroleum Technological University, 1, Kosmonavtov street, 450086, Ufa Russia, E-mail: And-mail@mail.ru

Anastasia A. Avrenyuk, Student, Department of Building Constructions, Ufa State Petroleum Technological University, 1, Kosmonavtov street, 450086, Ufa Russia, E-mail: Anastasia.avrenyuk@mail.ru

## REFERENCES

1. **Neville A. Neville** In Concrete. // An Examination of Issuers in Concrete Practice. ACI International. – 2004.
2. Restoration of concrete and reinforced concrete after the destructive impact of sulfur contained connections / **Latypov V.M., Latypova T.V., Avrenyuk A.N. et al.** // Construction materials. – 2009. – № 3. – p. 58-59.
3. **Latypova T.V.** Surface preparation quality before the repairing of failed reinforced concrete structures at the drainage facilities // International analytic survey «Cement. Concrete. Dry constructional mixes». 2007. №3-4. pp. 83-86.
4. **Latypov V.M.** Rational methods of concrete surface preparation in repairing structures after the destructive impact of sulfur contained connections // Kazan State Architectural University news. – 2009. - №1 (11). – pp. 277-283.
5. **Kozlova V.K.** The composition of aluminate - aluminoferrite phases and their hydration products in different cements and mixed cementing agents: monography. Part 1: Aluminates, aluminoferrites and calcium ferrites composition and their hydration products in different conditions / Altai State

## THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE EQUILIBRIUM PROBLEM OF FLEXIBLE STRING

*Alexander V. Baenkhayev*

Far Eastern Federal University, Vladivostok, RUSSIA

**ABSTRACT:** Variational formulation of the equilibrium problem of flexible string is derived. The technique of the solution of the derived mixed variational task is offered. The finite element discretization is constructed.

**Key words:** the equilibrium problem flexible string, variational formulation, functional, finite element method

Let us write down the differential formulation of the problem of the equilibrium of the flexible inextensible string with a length of  $l$  with the connection at the ends of the string. The displacement of the axis of flexible string can be essential; therefore we will determine its position by the vector of the Cartesian coordinates

$$x = \{x_1, x_2, x_3\}^T$$

Then the complete system of equations of the problem of the equilibrium of flexible string [1] consists of the equation of equilibrium (1), geometrical equation (2), and equation of boundary conditions (3):

$$\frac{d}{ds} \left( T \cdot \frac{dx}{ds} \right) = q \quad (1)$$

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^T \cdot \frac{dx}{ds} = 1 \quad (2)$$

$$x \Big|_{s=0} = x_0, \quad x \Big|_{s=l} = x_1 \quad (3)$$

here  $T$  – force in the string ( $T \geq 0$ );  $s$  – axial coordinate of string;

$$q = \{q_1, q_2, q_3\}^T$$

– the vector of distributed loads;

$$x_0 = \{x_{01}, x_{02}, x_{03}\}^T; \quad x_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}^T$$

– the given vectors of the coordinates of the ends of the string.

For the conclusion of variational formulation we will use the procedure, described in [2]. We will at first obtain *basic integral formula* for this task. Let us introduce vectors

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}^T; \quad b = \{b_1, b_2, b_3\}^T$$

with the components – the functions of coordinate  $s$ .

Let these functions possess the necessary degree of the smoothness, which ensures the possibility of fulfilling the required operations. Then for them formula of integration in parts is valid:

$$\int_0^l \left( \frac{da}{ds} \right)^T b ds = a^T b \Big|_0^l - \int_0^l a^T \frac{db}{ds} ds \quad (4)$$

Integral formula (4) converts the operation of differentiation from the vector  $a$  to vector  $b$ . Let us accept  $a = \bar{x}$  and  $b = T \cdot \frac{d\bar{x}}{ds}$  and let us substitute it into (4). We will obtain basic integral formula for the task:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\left( \frac{d\bar{x}}{ds} \right)^T \bar{T}(d\bar{x})}{ds} ds &= \\ &= \frac{\bar{x}^T \bar{T}(d\bar{x})}{ds} \Big|_0^l - \int_0^l \bar{x}^T \frac{d}{ds} \left( \frac{\bar{T}(d\bar{x})}{ds} \right) ds \end{aligned} \quad (5)$$

Formula (5) is valid for the arbitrary values  $\bar{x}$  and  $\bar{T}$ . If  $\bar{x} = x$  and  $\bar{T} = T$  – are true, i.e. satisfying equations (1) - (3), then formula (5) can be written down in the form:

$$\int_0^l T \cdot 1 \, ds = x_l^T R_l - x_0^T R_0 - \int_0^l x^T q \, ds, \quad (6)$$

where

$$R_l = T \frac{dx}{ds} \Big|_{s=l}, \quad R_0 = T \frac{dx}{ds} \Big|_{s=0}$$

– are the vectors of reactions in the connections. In this case the formula acquires the specific mechanical sense. Let us present two states of system. The first - string is rolled (convoluted) at the origin of the coordinate system. The second state - string assumes the position, which corresponds the given connections and load.

Work of internal force  $T$  on unwinding of string from the first state into the second state (left side of the equality (6)) is equal to work which on these movements is made by external forces (the right part of equality (6)).

Let us give the arbitrary variation to true force  $T$  and the variation to the true vector of coordinates  $x$ , which satisfies (3):

$$\begin{aligned} \bar{T} &= T + \delta T, \\ \bar{x} &= x + \delta x. \end{aligned}$$

Then, substituting them in (5), disregarding the second order from the variation, taking into account, that formula (5) is carried out for the full values, we will obtain the variation equation:

$$\delta \Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \delta T \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds + \int_0^l \left( \frac{\partial \delta x}{\partial s} \right)^T T \frac{dx}{ds} ds + \int_0^l \delta x^T q ds = 0, \quad (7)$$

determined on the class of the vectors  $x$ , which satisfy (3).

Hence let us arrive at stationarity condition of functional [3]:

$$\begin{cases} \Phi(x, T) = \frac{1}{2} \int_0^l T \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds + \\ + \int_0^l x^T q \, ds = \text{stat.}, & (8) \\ x|_{s=0} = x_0, \quad x|_{s=l} = x_l & (9) \end{cases}$$

Functional (8) is mixed, force  $T$  and coordinates  $x$  are unknowns. For solving this mixed problem we will use the procedure, examined in [4], in which calculated area is divided on the sub-areas - elements, and it is assumed that the part of the equations of the mixed method is carried out in each such sub-areas.

Let us break string into  $n$  elements. The length of element with the number  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) we will designate to be  $l^r$ . Let us assume that the variation equation of the indissolubility is carried out on each element:

$$\int_{l^r} \delta T \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^T \frac{dx}{ds} - 1 \right] ds = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Then for solving variational problem (7) we finally need to examine the integral identity:

$$\int_0^l \left( \frac{\partial \delta x}{\partial s} \right)^T T \frac{dx}{ds} ds + \int_0^l \delta x^T q ds = 0, \quad (11)$$

determined on the class of the vectors  $x$ , which satisfy (9).

Let us build the scheme of the finite element method, based on the variational formulation (10), (11). Let us accept on the finite element vector  $x$  and force  $T$  in the form:

$$x = N^r \cdot X^r, \quad T = [1] \cdot t^r \in l^r. \quad (12)$$

where  $N^r$  - the matrix of shape functions;  $X^r$  - vector of the coordinates of the nodes of element  $r$ ;  $t^r$  - value of force in the element  $r$  (force  $T$  accepted by piecewise constant function).

Let us substitute (12) in (10) and, as a result of the arbitrariness of a variation of the force, we will obtain

$$(X^r)^T H^r X^r - t^r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

where 
$$H^r = \int_V \left( \frac{dN^r}{ds} \right)^T \left( \frac{dN^r}{ds} \right) ds.$$

Let us represent (11) in the form sums on the elements and, using (12), we will obtain

$$\sum_{r=1}^n [(\delta X^r)^T (H_r^e X^r - P^r)] = 0, \quad (14)$$

where 
$$H_r^e = t^r H^r, \quad P^r = \int_V (N^r)^T q ds.$$

If we write down  $r$  consecutively in the ascending order into one vector of the vector of the coordinates of the nodes of the elements of  $X^r$  - we will obtain the vector  $X^*$  of the coordinates of the nodes of the elements not linked between each other. Similarly, is introduced the vector of the nodal loads  $P^*$  and the quasi-diagonal matrix  $H_r^e$ . Then (14) it is represented in the form:

$$(\delta X^*)^T (H_r^e X^* - P^*) = 0. \quad (15)$$

The connection of the vector of the coordinates of the nodes of the not linked elements  $X^*$  with the vector of the coordinates of the nodes of the system  $X$  is established with the aid of the matrix of connection  $\Gamma$  [5]:

$$X^* = \Gamma X. \quad (16)$$

We substitute (16) in (15)

where 
$$(\delta X)^T (H_r X - P) = 0,$$

$$H_r = \Gamma^T H_r^e \Gamma, \quad P = \Gamma^T P^*.$$

The variation  $\delta X$ , which considers boundary conditions (9), can be connected with an arbitrary variation  $\delta_1 X$ :

$$\delta X = E_1 \cdot \delta_1 X,$$

where  $E_1$  - diagonal matrix, which considers the assigned coordinates. To each matrix element  $E_1$ , which stands on the diagonal, is associated the node and the direction of coordinates in the same order as in the vector  $X$ . In places, where assigned coordinates, the elements  $E_1$  are taken as equal to zero, remaining diagonal elements are equal to one. As a result of the arbitrariness of  $\delta_1 X$  let us arrive at the system of the algebraic equations:

$$E_1 (H_r X - P) = 0. \quad (17)$$

The final system of equations (13), (17) contains unknown coordinates in the nodes of system  $X$  and unknown forces in the elements  $t^r$  (implicitly in the matrix  $H_r^e$ ).

With the piecewise-linear approximation  $x$  equations (13), (17) are equivalent to the equations of the approximate method, proposed into [6]. Equations (13) in this case can be written down as follows:

$$\sum_{m=1}^3 \left( \frac{x_{mj}^r - x_{mi}^r}{l^r} \right)^2 = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

where  $x_{mi}^r$  - coordinate of  $i$ -th node of element  $r$  in the direction of  $m$ -th coordinate axis.

The iterative procedure of solution of this problem consists of the following. We give the initial values of forces in the elements  $t_{(0)}^r$ . We solve the system of equations (17), linear relative to unknown coordinates. To make more exact values of  $t^r$  we use equation (18) in the following form:

$$t_{(k)}^r = t_{(k-1)}^r \cdot \left[ \sum_{m=1}^3 \left( \frac{x_{mj}^r - x_{mi}^r}{l^r} \right)^2 \right]^{1/2},$$

where  $k$  – is the number of iteration. Iterations are continued until the achievement of the required accuracy of the calculation of forces.

## REFERENCES

1. **Merkin D.V.** Introduction into the mechanics of flexible string. M.: Nauka, 1980. 240 pp.
2. **Rozin L.A.** Variation formulations of the problems for the elastic systems. L.: LGU, 1978. 223 pp.
3. **Baenkhaev A.V.** Variation formulation of the problem of the equilibrium of the flexible string // Strength and the stability of engineering constructions. Barnaul: Altaisky-Polytechinstitute, 1990.
4. **Rozin L.A., Baenkhaev A.V.** Mixed schemes of the finite element method and their application to the solution of the problems of the theory of elasticity // Ivestiya VNIIG. L.: Energy – Atomizdat, 1986. T. 194. pp. 79-84.
5. **Rozin L.A.** The finite elements method applied to elastic systems. M.: Stroyizdat, 1977. 129 pp.
6. **Stotsenko A.A.** Hydro-biotechnical constructions. Vladivostok: Publish house DVGU, 1984. 136 pp.

---

Alexander V. Baenkhaev, Department of Hydraulic Engineering, the Theory of Buildings and Structures, Far Eastern Federal University, 8, Sukhanova Str., Vladivostok, 690950, RUSSIA, e-mail: baenkhaev.av@gmail.com.

# AN ASSESSMENT OF POTENTIAL OF STRENGTH INCREASE IN EARTH DAMS DUE TO THE USE OF ANTI-SEISMIC BELTS

*Tohirjon Z. Sultanov, Mirziyod M. Mirsaidov*

Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, UZBEKISTAN

**ABSTRACT:** This paper is devoted to numeric simulation of an assessment of stress-strain state and dynamic behavior of earth dams with anti-seismic reinforced concrete belts. Lagrange variation equation, based on D’Alambert’s principle, generalized Hooke’s law, Cauchy relations, initial and kinematic conditions are used in the statement of the problem. The problem is solved by the Method of Finite Elements. Three earth dams with different height are considered in the paper. Results of the study show that the installation of anti-seismic belts strengthens the area of slope, directly adjoining it, and, increasing the number of anti-seismic belts, we may achieve required stability practically in all points of a dam.

**Keywords:** Earth dam, strength, stability, seismic-resistance, anti-seismic reinforced concrete belts, kinematic effect

## INTRODUCTION

An increase in strength and seismic stability of earth dams requires the use of original scientifically substantiated engineering solutions and various constructive measures. Solution of these problems is actual for earth dams of any height, but it is more important for high dams. For practical realization of these measures it is necessary to carry out qualitative and quantitative evaluation of efficiency of this or that constructive solution; this will permit us to find for each concrete case an optimal engineering approach, aimed to increase the strength and seismic stability of earth dams [1-6].

Constructive measures to improve seismic stability may be conditionally divided into “active” and “passive” ones. “Active” measures are principal changes of the dam structure, directed exclusively on the improvement of seismic stability and constructive solutions of earth dams in the form of “layer cake” from soils with different dynamic characteristics. Here soil layers may be horizontal, vertical, inclined ones [1-4]. In these dams the concept of amortization consists in mutual damping of natural vibrations of layers with different

dynamic characteristics.

More rational measure is an introduction of strengthening elements into the body of a dam. Such elements are anti-seismic concrete belts. The essence of this proposal, made by [1-4, 7-9], consists in installation of anti-seismic belts made of concrete elements, laid horizontally in the form of large cells, filled with soil.

Specific feature of the operation of anti-seismic reinforced concrete belts is the fact that their interaction with soil of support prism is carried out through the soil between the belts; its deformation is limited and regulated by concrete elements and flexible steel links, which connect these elements. Inclusion of anti-seismic belts into support prisms gives new properties to soil, allotting it with higher cohesion. This should contribute to the stability of strengthened slopes (or large zones of the body of the dam) under the effect of seismic load.

Internal space of the cells of seismic belts is filled up to its whole height by solid stone (material of support prisms presents gravel-pebble soils). That is, anti-seismic belts present a drainage, allowing to exclude the possibility of appearance of high porous pressure in seismic section.

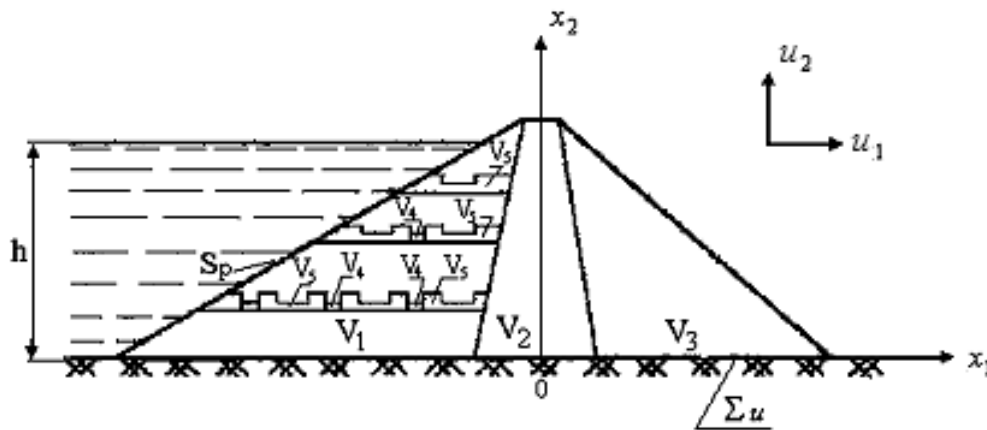


Figure 1. Design model of earth dam with anti-seismic reinforced concrete belts.

To our opinion, this structure of a dam presents the most seismic-resistant structure [3, 4, 8, 9]. All this requires scientific substantiation, namely, the study of stress-strain state and dynamic behavior of earth dams with anti-seismic reinforced concrete belts under different effects with account of different location of seismic belts.

### 1. MATHEMATICAL MODELS AND THE METHODS OF SOLUTION OF THE PROBLEM

For the statement of the problem design model (Fig. 1) is selected, where earth dam with anti-seismic reinforced concrete belts with volume

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \sum V_4 + \sum V_5$$

is in interaction with water medium. Here  $V_1, V_3$  – are volumes of support prisms,  $V_2$  – volume of a kernel,  $\sum V_4, \sum V_5$  – volume of anti-seismic reinforced concrete belts.

Properties of material of each volume are assumed heterogeneous. Lower part of the dam is located on a rigid foundation  $\Sigma_u$ . Hydrostatic pressure of water is acting on the surface  $S_p$ . The dam is under the effect of mass forces  $\vec{f}$ . Material of a dam (earth) and seismic belts is assumed elastic. On the border of division of the

areas of the system  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  displacements, normal and tangential to the surface of division of the component of the tensor of stresses are continuous.

To describe the process of deformation and dynamic behavior of earth dams with seismic belts under different effects, Lagrange variation equation, based on D’Alambert principle is used

$$\begin{aligned} & - \int_{V_1+V_2+V_3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_4} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \\ & - \int_{V_5} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_1+V_2+V_3} \rho_n \ddot{u} \delta \bar{u} dV - \\ & - \int_{V_4} \rho_4 \ddot{u} \delta \bar{u} dV - \int_{V_5} \rho_5 \ddot{u} \delta \bar{u} dV + \\ & + \int_V \vec{f} \delta \bar{u} dV + \int_{S_p} \bar{p}_c \delta \bar{u} dS = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Cauchy linear relations, connecting components of tensors of strains  $\varepsilon_{ij}$  with components of displacements  $u_i$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (2)$$

and generalized Hooke’s law for elastic material

$$\sigma_{ij} = \lambda_n \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_n \varepsilon_{ij}. \quad (3)$$

As the foundation of a structure is assumed rigid, so

$$\bar{x} \in \sum_u : \bar{u} = 0. \quad (4)$$

In solution of dynamic problems arbitrary kinematic conditions are applied on a foundation ( $\bar{x} \in \sum_u$ ):

$$\bar{x} \in \sum_u : \bar{u}_0(\bar{x}, t) = \bar{\psi}_1(t). \quad (5)$$

and initial conditions are given at  $t=0$ :

$$\bar{x} \in V : \bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{\psi}_2(\bar{x}); \dot{\bar{u}}(\bar{x}, 0) = \bar{\psi}_3(\bar{x}) \quad (6)$$

Here  $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – are components of the vector of displacements, tensors of stresses and strains, respectively;  $\delta\vec{u}$ ,  $\delta\varepsilon_{ij}$  – isochoric variations of displacements and strains;  $\rho_n$  – density of material of the elements of a system;  $\vec{f}$  – vector of mass forces;  $\bar{p}_c$  – hydrostatic pressure of water;  $\bar{\psi}_1$  – given function of time;  $\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3$  – given function of coordinates;  $\lambda_n, \mu_n$  – Lamé's constants;  $\rho_o$  – density of water; index  $n=1,2,3,4,5$  refers to mechanical characteristics of material of corresponding element of a dam.

Static load is presented by own weight of a structure  $\vec{f}$  and linearly increasing with depth hydrostatic pressure of water on pressure face  $S_p$  of a dam.

So the problem consists in determination of components of displacements  $\bar{u}(\bar{x}, t)$ , tensors of strains  $\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t)$  and stresses  $\sigma_{ij}(\bar{x}, t)$  with account of mass forces  $\vec{f}$  and hydrostatic pressure  $\bar{p}_c$  under kinematic effect (5), satisfying equations (1)-(3) and initial conditions (6) at any possible displacement  $\delta\vec{u}$ . All problems under static and dynamic effects are solved by the Method of Finite Elements

(MFE).

1. Under static load discussed variation problem by MFE is reduced to the solution of algebraic equations

$$[K]\{u\} = \{P\}. \quad (7)$$

Where the elements of the matrix of rigidity  $[K]$  of homogeneous system (Fig. 1) are constant and depend on elastic physical-mechanical parameters of a structure;  $\{u\}$  – sought for vector of nodal displacements;  $\{P\}$  – vector of external load (from mass forces and hydrostatic pressure of water).

Solution of the system of algebraic equations (7) was carried out by well-known Gauss method or the method of quadratic root [10].

2. In study of natural vibrations of heterogeneous system (fig.1) the problem is reduced to the solution of algebraic problem of eigenvalues:

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0. \quad (8)$$

here  $[K], [M]$  – are matrices of rigidity and mass;  $\omega\{u\}$  – eigenfrequency and eigenvector. The square of eigenfrequencies ( $\omega^2$ ) from equations (8) is determined by Muller' method [11, 12] and natural modes of vibrations  $\{u\}$  – by Gauss method or the method of quadratic root [10].

3. Under the effect of dynamic load the problem is reduced to the solution of the system of ordinary differential equations

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} + \{f(t)\}. \quad (9)$$

with initial conditions

$$\{u(0)\} = \{u_o\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = \{v_o\}. \quad (10)$$

Here  $[K], [M]$  – are matrices of rigidity and mass;  $[C]$  – matrix of dissipative forces taken as  $[C]=2\varepsilon[M]$  [13];  $\{u(t)\}$  – vector of

displacements;  $\{f(t)\}$  - vector of external load from kinematic effect;  $\{F\}$  – summed up vector of external load (mass forces, hydrostatic pressure, etc.);

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi} \omega$$

– doubled coefficient of vibrations damping;  $\delta$  – logarithmic decrement of vibrations;  $\omega$  – eigenfrequencies of structure vibrations.

Solution of the system of differential equations (9) with initial conditions (10) is determined by Newmark's method [14], adjusted to the solution of stated problem.

On each step of time  $\Delta t$  the solution of differential equations (9) is reduced to the solution of algebraic system

$$[A]\{u_{i+1}\} = \{R_{i+1}\} \quad (11)$$

Here

$$[A] = [K] + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [C] \quad (12)$$

Here the right side  $\{R_{i+1}\}$  of equations (11) is determined in the form

$$\begin{aligned} \{R_{i+1}\} = \{F\} + \{f_{i+1}\} + \\ [M] \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{u_i\} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}_i\} + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{u}_i\} \right) + \\ + [C] \left( \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \{u_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{u}_i\} + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{u}_i\} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

To solve the system of algebraic equations (11) it is necessary to give at initial moment ( $t = 0$ ) the values of displacements  $\{u_0\}$ , velocities  $\{\dot{u}_0\}$  and accelerations  $\{\ddot{u}_0\}$ . Usually  $\{\ddot{u}_0\} = 0$  is given

Newmark's method is absolutely stable if  $\beta \geq 0.5$ ,  $\alpha \geq 0,25(\beta + 0,5)^2$ . So algorithm, which realizes Newmark's method

for the solution of the system of differential equations (9) with initial conditions (10), consists in the following:

1. Initial conditions  $\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}, \{\ddot{u}_0\} = 0$  are given.
2. The system of algebraic equations (11) with right side (13) is formed.
3. Obtained algebraic system of equations (11) is solved by Gauss method or square root.

## 2. RESULTS OF INVESTIGATIONS

Natural and forced vibrations, stress-strain state and strength under the effect of static and dynamic loads were studied with described methods for the following three earth dams [4] with anti-seismic reinforced concrete belts.

1. Nurek dam with height  $H=296$  m. This is the highest earth structure located in seismic zone with magnitude 9. Coefficients of laying of upper slope is  $m_1=2.25$ , lower one -  $m_2=2.2$ . Mechanical characteristics are ( $E$  – modulus of elasticity,  $\mu$  - Poisson coefficient,  $\gamma$  - specific weight): for support prisms -  $E=3.06 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.3$ ,  $\gamma=2.2$  t f/m<sup>3</sup>; for the kernel -  $E=2.4 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.25$ ,  $\gamma=2.33$  t f/m<sup>3</sup> (t f/m<sup>2</sup> – ton force on square meter, t f/m<sup>3</sup> – ton force on cubic meter).
2. Ghissarak dam:  $H=138$  m,  $m_1=2.2$ ,  $m_2=1.9$ ; for support prisms -  $E=3.6 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.26$ ,  $\gamma=1.90$  t f/m<sup>3</sup>; for the kernel -  $E=2.4 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.35$ ,  $\gamma=1.7$  t f/m<sup>3</sup>.
3. Pachkamar dam:  $H=70$  m,  $m_1=2.25$ ,  $m_2=2.25$ ; for support prisms -  $E=3.55 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.20$ ,  $\gamma=2.25$  t f/m<sup>3</sup>; for the kernel -  $E=2.4 \cdot 10^5$  t f/m<sup>2</sup>,  $\mu=0.35$ ,  $\gamma=1.8$  t f/m<sup>3</sup>.

Studies, carried out by [7] of stress-strain state of Nurek earth dam with 4 anti-seismic concrete seismic belts under the effect of own weight, show that stresses  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  on the areas of dam between seismic belts are decreasing considerably, comparing with stresses without seismic belts. Decrease of  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  is explained by re-distribution of stresses along the length of seismic belt. This causes the decrease of values  $\sigma_{12}$  near the slope.

Results of the study show the possibility to lessen stress state of upper support prism and upper slope with installation of several seismic belts. The use of one seismic belt reduces stress state of a dam around this belt. In the belt there appear large stresses of both compressive and tensile character.

Results obtained in Nurek dam revealed the necessity of detailed study of the effect of anti-seismic reinforced concrete belts on stress-strain state and strength of earth dams. Therefore complex study of stress-strain state of earth dams was carried out to reveal and predict the weakest zones of upper pressure face, subjected to the largest deformation and damage during operation and under seismic effect. Pachkamar, dam built according to existing Building Codes, was taken as an initial model of structure. Unlike real dam, discussed model is homogeneous, which is permissible as an analysis was carried out for upper slope only, the influence of material of a kernel here is inconsiderable. In treating the model of a dam with steep upper slope, the effect of installation of anti-seismic reinforced concrete belts, intended to strengthen upper slope on the change of stress-strain state in the body of a dam, was studied. Expediency of the use of seismic belts, their number and location in the body of a dam are justified by the analysis of obtained stress-strain state and assessment of the strength of a dam.

All calculations were carried out for each dam with and without consideration of anti-seismic reinforced concrete belts installed in upper

support prism.

In the first variant the model of a dam without seismic belts under own weight was considered. Here the height of a dam is – 70 m, coefficients of laying of both slopes  $m_1$  and  $m_2$  are equal to 2. In the process of investigation of stress-strain state of a dam, the coefficient of laying of upper slope  $m_1$  drops from 2 down to 1, that is the strength of a dam is artificially damaged while lower slope stays unchanged.

The most important parameter of operational serviceability of earth structure is its strength, which is determined by safety factor  $K$  [15]. Here determination of whole pattern of distribution of  $K$  values, including slope zones of a dam, allows us to state the presence, dimensions and location of zones, in which one of three following conditions is satisfied:

- 1)  $K > 1$ - in this part of a structure soils possess safety factor;
- 2)  $K = 1$ - soil is in condition of limiting balance;
- 3)  $K < 1$ - soil strength in particular part of a structure is damaged and there appears a zone of unstable stability.

Distribution of safety factor  $K$  along the section of dam model without seismic belts, depending on the angle of internal friction  $\varphi$  and coefficient of cohesion  $C$ , corresponding to different soils, was studied. Distribution of isolines of safety factor  $K$  for different values ( $\varphi$ ,  $C$ ) of soil was obtained. Distribution of isolines of safety factor, obtained at  $\varphi = 20^\circ$ ,  $C = 3$  t/f/m<sup>2</sup>, is shown in figure 2.



Figure 2. Distribution of isolines of safety factor  $K$  in the body of homogeneous dam.

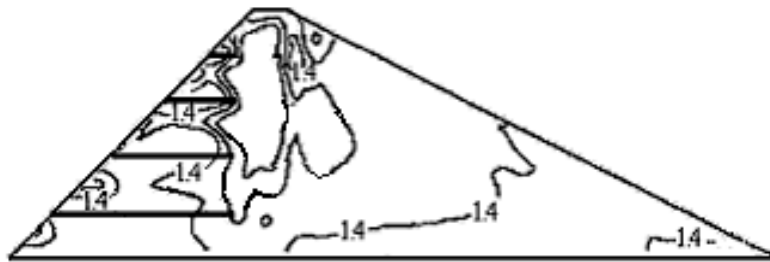


Figure 3. Distribution of isolines of safety factor  $K$  in homogeneous dam at  $\varphi=30^0$ ,  $C=0$  with laying of upper slope  $m_1=1$ ,  $m_2=2$  with 4 anti-seismic reinforced concrete belts.

From results obtained, one may draw conclusion that even at  $\varphi=30^0$ ,  $C=0$  flat upper slope fully conforms the requirements of strength and does not need further strengthening. In the second case (at  $\varphi=20^0$ ,  $C=0$ ), on the top part of a dam – on the level about  $0,6H$  and on the bottom near slope foundation the zones are outlined where the values of  $K < 1$ ; this points on instability of these parts. So, in dry state even flat slopes ( $m_1=2$ ) are not stable along the whole height of a dam and need additional strengthening. With increase of coefficient of cohesion of soil (when  $\varphi=20^0$ ,  $C=3 \text{ t f/m}^2$ ) on the slopes of construction (fig.2) coefficient  $K$  is more than 1; in this case flat slopes of a dam ( $m_1=2$ ) stay stable.

Steep slopes are unstable. For soil with  $\varphi=20^0$ ,  $C=0$  the zone of instability covers whole surface of upper slope and expands inside the body of a dam, embracing central part ( $K \geq 0,9$ ).

Steep slope ( $m_1=1$ ), even of soil with  $\varphi = 30^0$ ,  $C=0$ , stays unstable: as the value of strength coefficient though is close to 1, is still less than 1. The value of  $K$  (at  $\varphi=30^0$ ,  $C=0$ ) in a lower part of a dam with account of hydrostatic pressure of water is increasing but inconsiderably.

Results of the study show, that steep slope presents a zone of higher risk; here formation of slides and slope failure is possible; to strengthen it along the whole height a number of constructive measures must be developed. One of these measures, as been mentioned above, is an installation of anti-seismic reinforced

concrete belts.

Consider the possibility to strengthen steep upper slope with an installation of anti-seismic reinforced concrete belts. To do this we will determine distribution of safety factor  $K$  in the body of a dam depending on the number and location of anti-seismic reinforced concrete belts.

Figure 3 shows distribution of  $K$  in model ( $m_1=1$ ) with four seismic belts, located in regular intervals along the height of seismic belts, and figure 4 - with three seismic belts located on the heights:  $0.4H$ ,  $0.6H$  and  $0.9H$ .

Analysis of distribution of safety factor  $K$  allows to draw a conclusion that an installation of anti-seismic reinforced concrete seismic belts strengthens the area of slope directly adjoining it. Increasing the number of seismic belts up to 4, we may achieve required strength practically on the whole surface of a slope (fig.3). More effectively the effect of seismic belts is seen on the lower part of a slope; an installation of even one centrally located seismic belt increases the strength of this part. The most problem part is the small part of near-crest zone, where the values of  $K$  is, at such regular location of anti-seismic reinforced concrete belts, less than 1 ( $K \leq 1$ ). To prevent the possibility of slides in this part, it is necessary, in our opinion, to strengthen near-crest zone by a seismic belt on the height  $0.9H$  and to install two more on the levels  $0.4H$  and  $0.6H$ , as shown in figure 4.



Figure 4. Distribution of isolines of safety factor)  $K$  in a dam at  $\varphi=30^\circ$ ,  $C=0$  with laying of upper slope  $m_1=1$ ,  $m_2=2$  at irregular ( $0.4H$ ,  $0.6H$  and  $0.9H$ ) location of anti-seismic reinforced concrete seismic belts.

In this case the area of instability, limited by closed isoline with the value of coefficient  $K < 1$ , is removed from the surface of a slope inside the body of a dam (fig.4).

Transformation of all components of stresses in the model of a dam with seismic belts was studied; it shows that an installation of seismic belts decreases tangential stresses along central and lower parts of a slope, leaving near-crest zone rather stressed and weak.

Further dynamic characteristics of the model of dam with anti-seismic reinforced concrete seismic belts were studied. The filling of water reservoir was not taken into consideration. Geometrical dimensions and physical-mechanical parameters of a dam with 4 seismic belts remain without change. Natural modes of vibration of a dam present complex deformation of a structure with vertical and horizontal displacements of nodal points. According to a character of dominating displacements we may determine presented forms by the following way: the first form presents shear of a structure in horizontal direction; in the second form vertical displacements are dominant; the third form is a complex form with deformation of slopes, and so on.

Obtained values of natural frequencies testify an increase in rigidity of a structure, while the character of corresponding to them modes of vibration for homogeneous structure and a structure with four anti-seismic reinforced concrete seismic belts practically do not differ from each other.

Unsteady forced vibrations of dam model (fig.1) under kinematic harmonic effect in the basement with account of own weight of a dam, were considered. The duration of the effect is 1 sec., then the effect stops and the structure passes into the mode of free vibrations:

$$\ddot{u}_0 = \begin{cases} A \sin(2\pi p t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq t^* \end{cases} \quad (14)$$

This kinematic effect with the frequency equal to the basic frequency of own vibrations of a structure without seismic belts ( $p = \omega_1 \approx 4$  Hz), is used to demonstrate dynamic behavior of a structure in dangerous resonant mode.

Solution of this problem for Pachkamar dam with anti-seismic reinforced concrete belts at (14) was obtained at the same geometric and physical-mechanical parameters as given above. In solution of the problem homogeneous initial conditions and coefficient of damping  $\varepsilon = 0.1$  were used. Results of the solution are displacements of nodal points of structure. These solutions were obtained with and without consideration of absorbing properties of soil with frequency of external effect equal to basic frequency of vibration of a structure without seismic belts, that is  $p = \omega_1 \approx 4$  Hz.

Figure 5 shows horizontal and vertical displacements of the point of a crest of homogeneous dam (Fig.5a) and a dam with seismic belts (Fig.5b) under the effect of (14). Here the effect is taken as two-component one with equal components along horizontal and vertical axis.

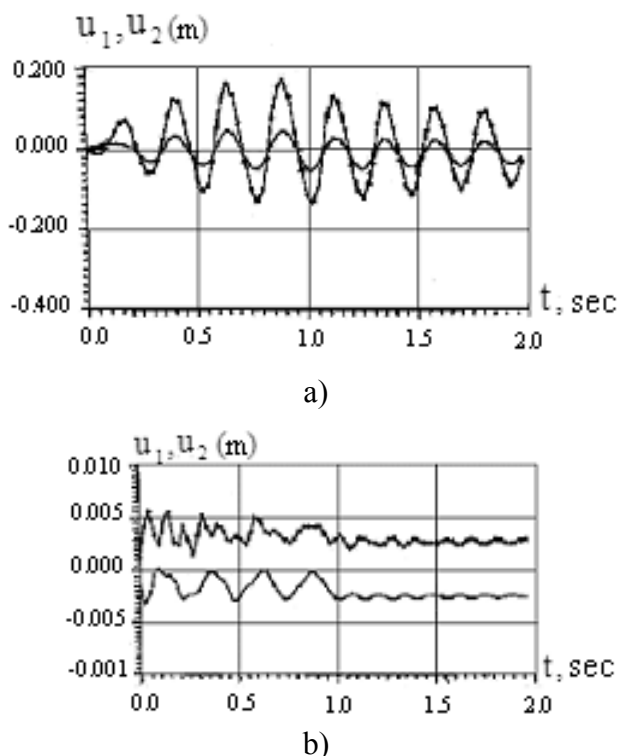


Figure 5: Horizontal (—\*—\*) and vertical (——) displacements of a crest of homogeneous dam (a) and a dam with seismic belts (b) under two-component effect (14)

From presented results it is seen that horizontal and vertical displacements of homogeneous structure (fig.5a) occur according to vibration law with an amplitude increasing with time till the end of the effect ( $t=1\text{sec}$ ). Then vibrations continue with gradual decrease of amplitude due to dissipative properties of soil.

An installation of anti-seismic reinforced concrete belts leads to vibrations of considerably less amplitude, while the law of the effect is the same. The duration of this process is also  $t=1\text{sec}$ , then vibrations are quickly damping and the structure itself acquires the position of the first mode, which is characterized by the shear of central axis horizontally (horizontal shear), accompanied by vertical settlement of the structure due to own weight. The absence in this case of resonance, that is unlimited growth of vibration amplitude, is explained by the presence of seismic belts, which restrict displacements of the points of a structure and change frequency specter of a structure.

Figure 6 shows isolines of distribution of

coefficient of safety factor  $K$  across the section of Ghissarak dam under the effect of own weight, hydrostatic pressure, horizontal seismic effect with amplitude 8 without seismic belts (Fig. 6b) and with three seismic belts, installed regularly along the height in upper support prism.

Inertia forces appearing in a structure under horizontal seismic effect, form stress state in a structure with the value of  $K < 1$  practically on the whole surface of upper slope (Fig.6a). This shows insufficient strength of dam slopes under horizontal seismic effect. An installation of anti-seismic reinforced concrete belts (fig.6b) restrains the development of stresses, strains and considerably increases safety factor  $K$ , especially in the areas near seismic belts.

Based on carried out studies we may state that dam structures equipped with required number of anti-seismic reinforced concrete seismic belts may possess higher seismic stability, and, in our opinion, are very perspective.

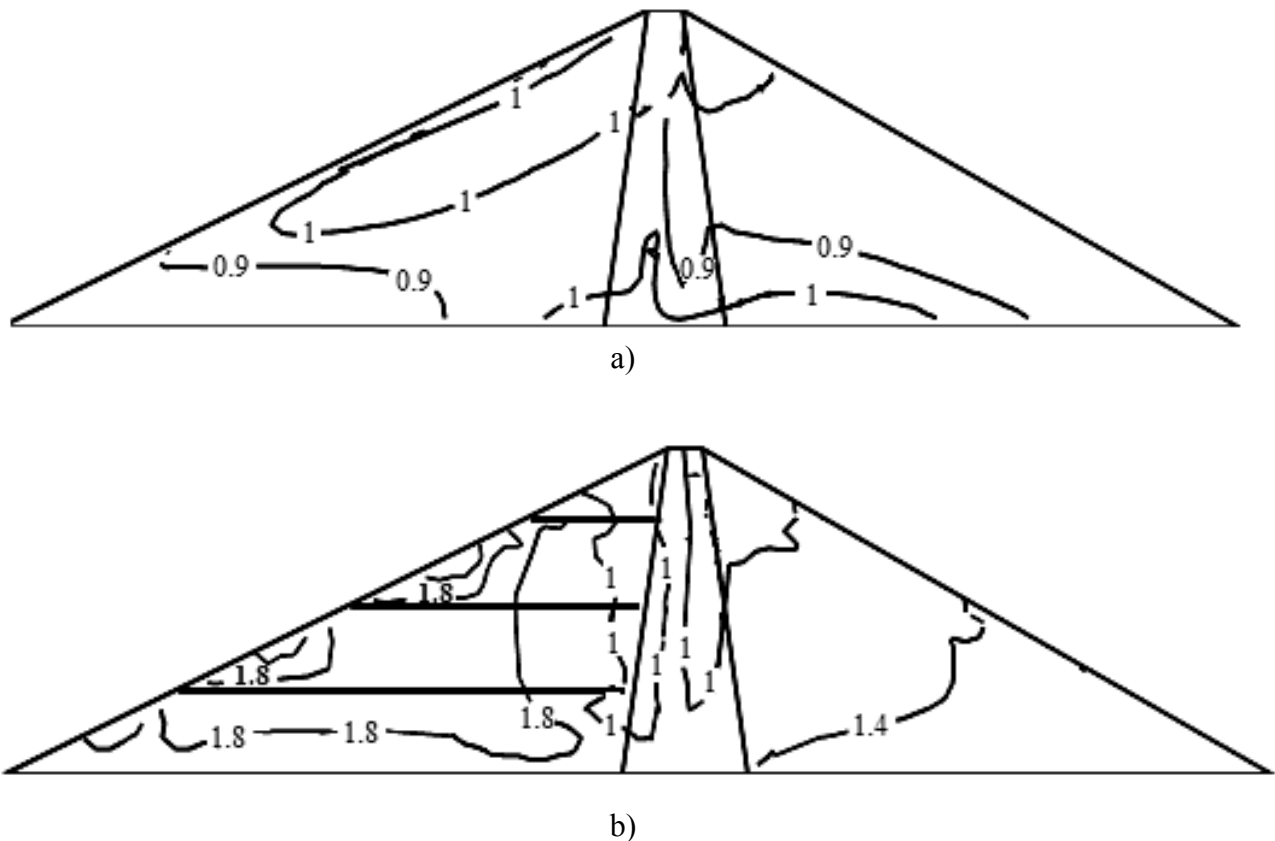


Figure 6. Isolines of distribution of safety factor  $K$  on the model of Ghissarak dam with account of own weight of a structure, hydrostatic pressure and horizontal seismic effect without seismic belts (a) and with three anti-seismic reinforced concrete seismic belts (b)

## CONCLUSION

Finite element model to design earth structures on gravitational, hydrostatic load and kinematic effect with account of constructive features of dams, including an installation of anti-seismic reinforced concrete seismic belts, is worked out. The effect of anti-seismic reinforced concrete seismic belts on improvement of dam strength, its steep slopes, including near-crest zone, was studied.

An analysis of results shows positive influence of seismic belts on restricting the growth of stresses, increase of strength coefficient of slopes and provision of necessary strength of a structure.

Studies, carried out here, show, that an installation of anti-seismic reinforced concrete seismic belts in the body of a dam with steep slopes considerably increases the strength of a

structure on the whole, both under static and dynamic effects.

Here the number of installed seismic belts should be no less than 3 or 4; one of them should be installed in near-crest zone of a slope on the height  $0,9H$  and two others – in upper support prism on the heights  $0,4H$  and  $0,6H$ .

## REFERENCES

1. **Natarius Ya.I.** Increase of seismic stability of dams from earth materials. Moscow, Energoatomizdat, 1984 (*in Russian*). 88p.
2. **Lyakhter V.M., Ivashchenko I.N.** "Seismic Stability of Earth Dams", Nauka, Moscow, USSR, 1986 (*in Russian*). 233p.
3. **Mirsaidov M.M., Godovannikov A.M.** Seismic Stability of Structures. «Uzbekistan», Tashkent, Uzbekistan, 2008

- (in Russian). 220p.
4. **Mirsaidov M.M.** Theory and Methods of Design of Earth Structures on Strength and Seismic Stability. FAN, Tashkent, Uzbekistan, 2010 (in Russian). 312p.
  5. **Mirsaidov M.M.**, “Seismic stability of different earth dams”, 6th International Conference on Dam Engineering, 15-17 February 2011, Pp.787-798, Lisbon, Portugal, 2011. URL:<https://sites.google.com/site/6thdamengineeringconference/new/proceedings>.
  6. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A.** “Stability evaluation of slopes of earth dams with account of soil rheological properties”, Magazine of Civil Engineering, №9, Sankt-Petersburg, Russia, 2012. Pp. 49-58. [www.engstroy.spb.ru/index\\_2012\\_09/mirsaidov.pdf](http://www.engstroy.spb.ru/index_2012_09/mirsaidov.pdf)
  7. **Mirsaidov M.M., Salyamova K.D., Li A.T., Shagrai M.K.** Study of stress-strain state of earth dams with account of seismic belts. Reports of Ac.of Sci., RUz, series of technical sciences. №4. 1989. Pp.31-33.
  8. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.** Increase of strength and seismic stability of earth dams, using seismic belts. Abstract of the paper on IX Russian conference on seismic engineering and seismic zoning, 6-9 September, 2011, Sochi, 2011. Pp.120-121.
  9. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Yuldashev B.SH.** Constructive measures to increase strength and seismic stability of earth dams. Tashkent Institute of Engineers of Railway Transport(TashIIT), VESTNIK №4, Tashkent, 2010. Pp.10-14.
  10. **Fadeev D.K. and Fadeeva V.N.** *Computational Methods of Linear Algebra*. Phymathgiz, Moscow, USSR (1960). (in Russian). 655p.
  11. **Muller D.E.** A Method for Solving Algebraic Equation.Using an Automatic Computer, Mathematical Tabl.,Oktober, 1956.
  12. **Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Serjanova M.** Methods and Algorithm for Determination of Dynamic Characteristics of Structures. Tashkent Institute of Engineers of Railway Transport(TashIIT), VESTNIK № 3-4, Tashkent, 2009. Pp.10-16.
  13. **Rasskasovsky V.T.** Bases of physical methods of determination of seismic effects. FAN, Tashkent, 1973 (in Russian). 160p.
  14. **Bate K., Wilson E.** Numeric Methods of Analysis and the Method of Finite Elements. Stroyizdat, Moscow, USSR, 1982 (in Russian). 448p.
  15. **Tsytoich N.A., Ter-Martirosian Z.G.** Bases of Applied Geomechanics in Engineering. Moscow, Vysshaya shkola, 1981 (in Russian). 317p.
- 
- Sultanov Tohirjon Zokirovich, candidate of technical sciences, associate professor, vice-rector of scientific researches Tashkent Institute of Irrigation and Melioration,39, Qori-Niyoziy st., Tashkent, 100 000, Uzbekistan. e-mail: tohir-zs@mail.ru
- Mirsaidov Mirziyod Mirsaidovich, doctor of technical sciences, professor, head of the faculty „ Theoretical and engineering mechanics“ Tashkent Institute of Irrigation and Melioration,39, Qori-Niyoziy st., Tashkent, 100 000, Uzbekistan.  
e-mail: theormir@mail.ru, mmmirsaidov@gmail.com

