

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**  
*Volume 9, Issue 1* *2013*

---

**EXECUTIVE EDITOR**

**Valery I. Telichenko**, Professor, Rector  
Moscow State University of Civil Engineering  
Moscow, Russia  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

**EDITOR-IN-CHIEF**

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

**TECHNICAL EDITOR**

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**ASSOCIATE EDITORS**

**Pavel A. Akimov**, Professor, Vice-Rector  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Research Center STADYO  
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**PUBLICATION COUNCIL**

**William Begell**, President  
Begell Publishing House  
USA

**Nadezhda S. Nikitina**, Director  
ASV Publishing House  
Moscow, Russia

**Valery I. Telichenko**, Rector  
Moscow State University  
of Civil Engineering  
Moscow, Russia

## ADVISORY EDITORIAL BOARD

**Nikolaj V. Banichuk**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo  
117526, Russia

**Klaus-Jurgen Bathe**, Professor  
Department of Mechanical  
Engineering  
Massachusetts Institute of  
Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Zdenek Bittnar**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Czech Technical University  
7, Thakurova, 16629 Prague 6  
Czech Republic

**Alexander S. Bratus**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Evgeny G. D'yakov**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Alexander S. Gorodetsky**  
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.  
2a, Ul. M. Krivonosa  
252180 Kiev, Ukraine

**Vladimir Karpov**, Professor  
St. Petersburg University  
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,  
St. Petersburg, 198005 Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
and Computer Technology  
Perm State Technical University  
29, Komsomolsky Prospekt,  
Perm, 614990, Russia

**Hartmut Koppler**, Professor  
Bauhaus-Universitat  
31a, Windmuhlen Str.  
99425 Weimar, Germany

**Andrey V. Korgin**, Professor  
Structure Testing Department  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vadim G. Korneev**, Professor  
Dept. of Math. and Mechanics  
St. Petersburg State University  
198904, St. Petersburg, Russia

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo,  
117526, Russia

**Pierre Ladeveze**, Professor  
Lab. de Mecanique et Tecnologic  
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.  
Paris VI, 61 Av. du President Wilson  
94235 Cachan Cedex, France

**Ralf Lindberg**, Professor  
3, Korkehoulunkatu,  
33101, Tampere, Finland

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya Pl.,  
634003 Tomsk, Russia

**Herbert Mang**, Professor  
Inst. Fur Haustatiken und  
Festigkeitslehre  
Techische Universitaet Wien  
13, Karlsplatz,  
A-1040 Wien, Austria

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vladimir I. Myachenkov**, Professor  
Department of Strength of Materials  
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"  
3a, Vadkovsky Per.,  
104472 Moscow, Russia

**L'Eugenio Onate**, Professor  
E.T.S. Ing. Caminos  
Jorge, Girano Salgado, 31-08034  
Barcelona, Spain

**Vladimir A. Palmov**, Professor  
Physical-Mechanical faculty  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Polytechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Stan Pietruszczak**, Professor  
Department of Civil Engineering  
McMaster University  
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing

**Ekkerhard Ramm**, Professor  
University of Stuttgart  
Institute for Baustatik  
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,  
Germany

**E. Daya Reddy**, Professor  
University of Cape Town  
Department of Applied Mathematics  
7700 Rondebosch, South Africa

**Sunil Saigal**, Professor  
National Science Foundation  
4201 Wilson Blvd.,  
Arlington, VA 22230, USA

**Vadim N. Savostyanov**, Professor,  
Department of Applied Mechanics  
and Mathematics, Moscow State  
Univ. of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Bernhard A. Scfhrefler**, Professor  
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.  
Via  
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Department of Comp. Aided Design  
Moscow State Univ. of Railways  
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,  
101475 Moscow, Russia

**D.V. Singh**, Professor  
Vice chairman all India council for  
Technical Education, New Delhi,  
India

**Waclaw Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Nils-Eric Wiberg**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Chalmes University of Technology  
S-41296 Goteborg, Sweden

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wroclaw University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wroclaw, Poland

**Peter Wriggers**, Professor  
Technical School of Department  
1, Hochschulstrabe,  
D-6100 Darmstadt, Germany

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

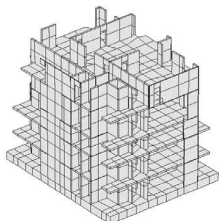


Figure 1

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

**to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail:* niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

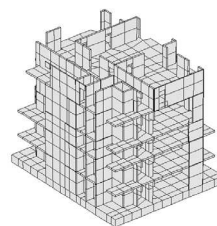


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

#### ➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
кафедра информатики  
и прикладной математики,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*

#### ➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,  
Научно-образовательный центр  
компьютерного моделирования  
уникальных зданий, сооружений  
и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail: niccm@mgsu.ru*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- <sup>1)</sup> Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*.
- <sup>2)</sup> Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: pavel.akimov2@gmail.com*.
- <sup>3)</sup> Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: niccm@mgsu.ru*.

**International Journal for  
Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 9, Issue 1*

*2013*

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Analyzing Large Panel Building Located in Areas of Ground Surface Subsidence</b> <i>Mark P. Son</i>	<b><u>13</u></b>
<b>О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций</b> <b>Часть 1: Двумерная задача теории упругости</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>18</u></b>
<b>О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций</b> <b>Часть 2: Трехмерная задача теории упругости</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>26</u></b>
<b>О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций</b> <b>Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>34</u></b>
<b>Численное моделирование нагрузок и воздействий, расчетное обоснование НДС, прочности и устойчивости конструкций, зданий и сооружений.</b> <b>Опыт 2010 – 2012 гг.</b> <i>А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский, А.А. Аул, А.И. Нагибович, К.И. Островский</i>	<b><u>42</u></b>
<b>Задача о собственных колебаниях с одним узловым диаметром круглых ортотропных и изотропных пластин</b> <i>В.Р. Гросман</i>	<b><u>48</u></b>
<b>Критический анализ и перспективы развития современной теории сейсмостойкости сооружений</b> <i>Г.А. Джинчвелашвили, А.В. Колесников, Н.М. Бондарь</i>	<b><u>53</u></b>
<b>Построение адекватной расчетной динамической модели сооружения путем проведения идентификационного эксперимента</b> <i>Г.А. Джинчвелашвили, А.В. Соснин, А.В. Колесников</i>	<b><u>59</u></b>
<b>Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки</b> <i>С.Б. Косицын, Чан Суан Линь</i>	<b><u>65</u></b>

<b>Метод неособенных продолжений на основе локальной аппроксимации характеристического определителя кривыми второго порядка</b> <i>Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын</i>	<b><u>72</u></b>
<b>Численное исследование пространственной устойчивости упругих круговых защемленных арок</b> <i>Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын</i>	<b><u>78</u></b>
<b>Дифракция плоской продольной волны на сферической полости в упругом пространстве</b> <i>В.В. Немчинов</i>	<b><u>85</u></b>
<b>Численный метод решения плоских динамических задач теории упругости</b> <i>В.В. Немчинов</i>	<b><u>90</u></b>
<b>Исследование годографа АФЧХ консольного стержня при линейных динамических нагрузках</b> <i>М.С. Хлыстунов, Ж.Г. Могилюк</i>	<b><u>98</u></b>
<b>Учет волновой природы сейсмических воздействий при расчете сооружений</b> <i>В.В. Вершинин, С.В. Кузнецов</i>	<b><u>103</u></b>

# ANALIZING LARGE PANEL BUILDINGS LOCATED IN AREAS OF GROUND SURFACE SUBSIDENCE

*Mark P. Son*

Perm National Research Polytechnical University, Perm, RUSSIA.

**ABSTRACT:** in this article the analysis of problems connected with calculation of the panel buildings being in a zone of subsidence of a terrestrial surface is considered. The technique of carrying out numerical experiments for finding of maximum permissible deformations is shown.

**Key words:** subsidence of a terrestrial surface, panel buildings, problems of computer modeling

## 1. INTRODUCTION

In the areas with excavation effect, buildings become deformed due to surface subsidence and earth crust movement. When deformation is significant the question of a structure condition arises as well as of its further serviceability. The Building Code does not stipulate any standards of maximum allowable deformations for large panel buildings. This work describes methods of determining ultimate deformations for the 1-468A series large panel buildings.

## 2. DESIGN BACKGROUND

Karst is a hidden and dangerous process resulting in considerable damage. Thus in Moscow in 1969, an apartment building collapsed because of the ground surface sinking; the same took place in 1977 with two 48-apartment buildings. In 1992 in the city of Dzerzhinsk, a workshop of the PO Dzerzhinskhimash Production Association failed due to surface subsidence. In the cities of Ufa, Kazan, and Samara multiple structural damages were found after sinkhole formation (Fig. 1) or surface subsidence. In October 1981, the Faldinsky sinkhole formed (in 15 km southward Tula). The above examples make up a small part of all cases of material damage at karst development in Russia, where about 300 cities or towns are exposed to hazardous effects. The potential one-time-only economic loss is estimated at millions of dollars [1].



*Fig. 1. The sinkhole.*

Most buildings located in karst and undermined areas were erected over 30 years ago and are structurally unprotected from surface subsidence. A widespread housing type in Russian cities is the standard panel building. Due to sinkhole formation dozens of such buildings have come to be in the shear zone, which caused structural defects and damage (Fig. 2).



*Fig. 2. The panel building structural failure.*

To provide structural assessment, reliability assurance operations and emergency facilities

for the maintained panel buildings, it is necessary to work out an evaluation system of characteristics effecting on development of destruction process and reserve of the building load-carrying capacity. Though such buildings undergo structural survey and part deformation monitoring, the results cannot be benchmarked, as the Building Code lacks any numerical criteria for ultimate deformations.

### 3. MATHEMATICAL MODELING PROBLEMS

Taking the task above, it would be rather difficult to determine ultimate deformations using the tools of mathematical modeling or industrial calculation systems. The following must be taken into account in a design model: physical nonlinearity, panel butt joint compliance, and different building orientation toward ground shear troughs. Any of these factors depend on a few subfactors [2].

A) Subfactors affecting structure non-linear behavior analysis:

- 1) mathematical inelastic model
- 2) selection of a stress-deformation diagram type
- 3) selection of a finite element (FE) type
- 4) effect of FE mesh discretization
- 5) selection of a load (displacement) increment
- 6) convergence criterion
- 7) taking account of different nonlinearity types (physical, geometric, structural)
- 8) selection of a convergence error for balanced iterations
- 9) assigned number of balanced iterations

B) Selecting a model of the panel butt joints:

1. The classic model [3, 4]. The panels are presented as shell elements connected by elastic restraints acting on tension, compression and shear.

2. The model completely allowing for nature's behavior. It consists of 3D FE, allowing for real panel butt joints, including built-ins, dowels, and defects of joints.

3. The simplified model. Based on a preliminary analysis, you determine tension joints, then exclude from them concrete because of its spalling and only retain embedded parts and dowels as per series to model them as physically nonlinear bars.

C) Subfactors affecting foundation behavior analysis:

1. The foundation model (by Winkler, by Pasternak, as an elastically isotropic semispace, etc.).

2. Ambiguity of foundation moduli (dependence on mold size and form, and adopted height of compressible thickness).

3. During a long term operation period the basements of some buildings underwent pipe breaks with subfoundation flooding resulting in deterioration of their physical and mechanical properties.

D) Different orientation of buildings towards soil subsidence troughs resulting in a variety of possible deformations appeared in such area buildings, including: sag, hog, warping or torsion, as well as their combinations.

While performing nonlinear analysis, especially for such an intricate spacial problem, the aforementioned and other factors will affect a final result. Sometimes changing of any parameter can lead to paradoxical or inadequate results.

To guarantee the solution convergence and adequacy, it is required to understand quite well the analyzed building behavior under the design load. To confirm adequacy of any model or analysis results, the following method is used, with a gradual complication of the structure behavior.

### 4. THE CALCULATION PROCEDURE FOR ULTIMATE DEFORMATIONS

The ultimate deformations  $\delta$  are to be understood as those, at which the building turns into an unstable system to collapse in a moment.

1. Noting that the building collapse starts in tension junction points, it is determined the

ultimate building elongation  $\varepsilon_{cr}$ , from uniform kinematic impact imposed on its edge (Fig.3).

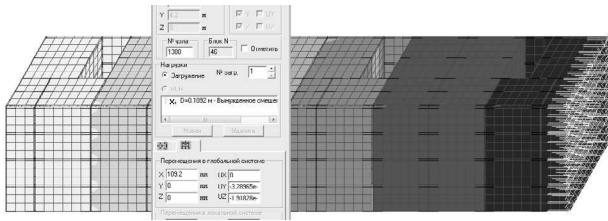


Fig. 3. The uniform building elongation.

This analysis was primarily made to check the model adequacy, as  $\varepsilon_{cr}$  must be not so much as the total length of the building joints (along its axis) multiplied by the value of steel deformation at break (26% for steel St3). Thus if the calculated value  $\varepsilon_{cr}$  for the building section of 60 m long is 10.9cm and the total length of the building joints is 55 cm, then  $\varepsilon_{cr} < 55 \cdot 0.26 = 14.3cm$ . Based on the calculation it was also determined that the building will start to fail in the joints of the stairs landings, which agrees with the results of inspection and monitoring of the real structures (Fig. 4).

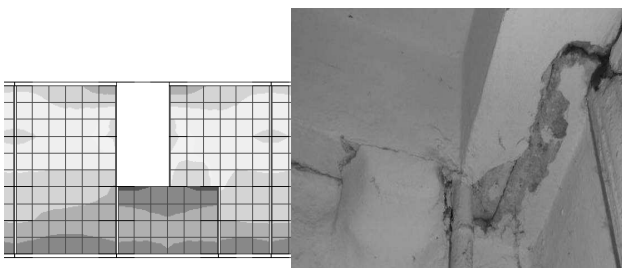


Fig. 4. On the left: tension stress isofields; on the right: joint crack of the landing with interior stairwell panels.

2. It is assumed that in case of bending the ultimate sag/hog  $\delta$  occurs at the moment when one of the building fibers becomes longer by the  $\varepsilon_{cr}$  value.

3. To get a tentative estimate, the building is regarded as elastic bar, in which the fiber elongation can be found as the product of

mutual angular rotation  $\theta$  by one half of the building height (H)  $\varepsilon_{cr} = \theta \frac{H}{2}$  (1).

A few building bending equations, which were taken into account while solving this problem, are given below.

A) A sinkhole has formed under the building, and the bending equation corresponds to the simple beam bending:

$$v(x) = -\frac{a^3}{24}x + \frac{a}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^4,$$

where  $v(x)$  is the sag and  $a$  is the parameter.

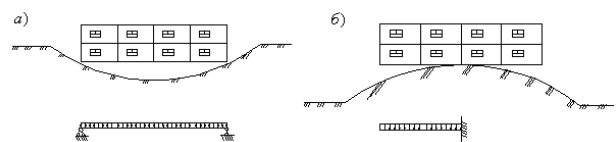


Fig. 5. Possible variants of the building location in relation to the sinkhole.

In this case

$$\frac{\delta}{\theta} = \frac{5l^4}{384} \div 2 \frac{l^3}{24} = \frac{60}{384}l \text{ or } \delta = \frac{60}{384}l \cdot \theta.$$

By substituting the equation obtained into (1) we get

$$\delta = \frac{120}{384} \cdot \frac{l}{h} \cdot \varepsilon_{cr} = 0.3125 \cdot \frac{l}{h} \cdot \varepsilon_{cr}, \quad (2)$$

where  $l$  is the building length.

B) The building center is on a rise (рис.5b), and the bending equation corresponds to the cantilever beam bending:

$$v(x) = -\frac{a^4}{8} + \frac{a^3}{6}x - \frac{1}{24}x^4.$$

By using similar calculation we get:

$$\delta = 0.375 \cdot \frac{l}{h} \cdot \varepsilon_{cr} \quad (3)$$

C) The parabolic bending:

$$v(x) = \frac{4\delta}{l^2} x(l-x), \text{ hence } \theta = \frac{8\delta}{l};$$

by substituting in (1) we get

$$\delta = 0.25 \cdot \frac{l}{h} \cdot \varepsilon_{cr}. \quad (4)$$

4. By comparing possible bending variants with a template, we can find the most adverse one and perform an adjusting analysis using the spatial physically nonlinear model of the building. (Fig.6).

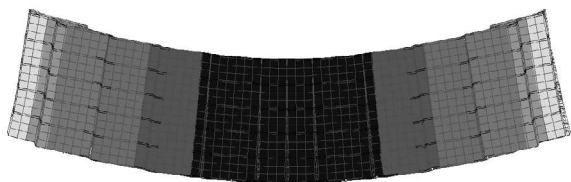


Fig. 6. The Z travel isofields at the building bending.

In this stage, the analysis adequacy is obtained due to correlation of the building ultimate sag/hog with the already checked  $\varepsilon_{cr}$ . The sags found are appeared to correspond to the formulas (2-4) results, e.g. for the building with the bending equation as for the simple beam  $\delta = 14.6\tilde{m}$  by formula (2), while the results of the physically nonlinear model analysis  $\delta = 19\tilde{m}$  have shown the difference of 25%. In this stage it can be said what ultimate deflections are admissible for this type of buildings depending on the accepted bending equations. Finding the equations does not require analysis of the building behavior together with the foundation, as regardless of such we consider all possible bending equations.

5. Further we analyse joint behavior of the building and foundation. In this stage, we bend the foundation, which cause bending of the building itself. At first, the analysis is made using the bar model (like in Paragraphs 2 and

3), following by the adjusting analysis (similar to Paragraph 4). This allows determining a critical radius of curvature R for the ground surface bending and forecasting time of the building's failure on the basis of known subsidence rates.

This method was used for analysis of the 1-468A series large panel buildings located in the city of Berezniki in the areas of negative impacts due to ground surface subsidence.

## SUMMARY

Summary of the results obtained by analysis and investigation of the panel buildings located in the areas as described above:

- The maximum stress concentration is found in the joints of interior and exterior wall panels adjacent to the stairwells, which is confirmed by the field studies data.
- It is revealed that in case of the building bending its maximum deflection depends strongly enough on the building bending equation, which limits can differ by 1.5 times in a few cases. For the buildings under consideration the ultimate deformations, at which the buildings' condition remains operable, are from 15.4 to 2.8 cm depending on the ground surface curvature.
- It is unnecessary to perform an intricate nonlinear analysis of building bending for long or low structures. In this case it is expedient to use the available approximation formulas (1) - (4), multiplying the results obtained by 1.25.

## REFERENCES

1. **Osipov V.I., Kutepov V.M., Zverev V.P.** et al. Hazardous Exogenous Processes. Edited by V. I. Osipov. Moscow, GEOS, 290 p. (in Russian).

2. **Zobacheva A.U., Kashevarova G.G.** Comparative analysis of various finite element models of multi-storey buildings. // *Promishlennoe I grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2011. no. 10. pp. 66-69 (in Russian).
3. **Shapiro G.I., Yagust V.I.** Effect of a Few Factors on the Deformation Capacity of the Horizontal Mortar Junctions of the Wall Panels at Short-term or Long-term Compression. Analysis of Concrete/Reinforced Concrete Structures of Prefabricated Multistory Buildings. Moscow, MNIITEP, 1980 (in Russian).
4. Shapiro G.I., Yuriev R.V. On Panel Building Modeling. // *The Industrial and Civil Engineering*, No. 12, 2004 (in Russian).

---

Сон Марк Петрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики и вычислительных технологий Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29; факс: + 7(342) 2-453-440, E-mail: smivt@pstu.ru

# О КОРРЕКТНОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЧАСТЬ 1: ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Акимов П.А., Мозгалева М.Л.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В настоящей статье рассматривается корректный дискретно-континуальный подход к локальному исследованию напряженно-деформированного состояния строительных конструкций. Объектом исследования являются строительные конструкции с регулярными (в частности, постоянными или кусочно-постоянными) физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений. Изложение ведется на примере двумерной (плоской) задачи теории упругости.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный подход, локальный расчет, строительные конструкции, вейвлет-анализ, кусочно-постоянные параметры, двумерная задача теории упругости

## ABOUT CORRECT MULTILEVEL WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL METHODS OF LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS PART 1: TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to correct discrete-continual approach to local structural analysis. Structures with regular (in particular, constant or piecewise constant) physical and geometrical parameters (properties) in one direction are under consideration. Corresponding design model is two-dimensional problem of elasticity.

**Key words:** discrete-continual approach, local structural analysis, wavelet analysis, piecewise constant parameters, two-dimensional problem of elasticity

### ВВЕДЕНИЕ

Разработка, исследование и верификация корректных математических моделей для расчета строительных конструкций является одним из важнейших аспектов обеспечения безопасности зданий и сооружений и комплексов. При расчете большинства моделей на практике зачастую не требуется получать решения во всех точках рассматриваемой модели – как правило, наиболее точное решение

задачи необходимо определить лишь в некоторых заранее известных областях. Выбор таких областей обусловлен, прежде всего, априорными данными относительно моделируемого объекта. Для строительных объектов это, в частности, могут быть зоны возникновения явлений типа краевого эффекта (там, где существует риск появления значительных напряжений, потенциально способных привести к разрушению конструкций и пр.), а также зоны, к которым предъявляются осо-

бые эксплуатационные требования. Указанное обстоятельство, наряду с очевидными потребностями исследователя в снижении вычислительных затрат при использовании современных дискретно-континуальных (численно-аналитических) методов [4, 5] обуславливают значительную актуальность задачи построения специальных алгоритмов получения локальных решений (в некоторых заранее известных зонах) краевых задач. Мощным, динамично развивающимся в настоящее время инструментарием для проведения такого рода исследований является вейвлет-анализ [1-3, 6]. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет адекватно оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. При этом зачастую оказывается возможным построить не только более высококачественную расчетную модель, но и внести некоторые обоснованные конструктивные изменения [7, 8]. Объектом исследования в рамках развиваемого дискретно-континуального подхода к локальному исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) являются строительные конструкции с регулярными (в частности, постоянными или кусочно-постоянными) физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений (это направление далее условно называется «основным» или «продольным»).

## 1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

Развиваемый авторами дискретно-континуальный подход состоит из двух частей.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению. Изложим это на примере дву-

мерной (плоской) задачи теории упругости, а именно будем рассматривать далее статический расчет балки-стенки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками). Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,vv} \partial_2^2 \bar{u} + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \partial_2 \bar{u} + \mathcal{L}_{k,uu} \bar{u} = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} = \mathcal{L}_{k,uv} - \mathcal{L}_{k,vu}$ ;  $\mathcal{L}_{k,vu} = \mathcal{L}_{k,uv}^*$ ; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{L}_{k,uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k \end{bmatrix} \partial_1; \quad (1.3)$$

символ «\*» здесь и далее обозначает операцию сопряжения;  $x_1, x_2$  – используемые декартовы координаты;  $x_2$  – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно (заметим, что по  $x_1$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно));  $l_2$  – длина конструкции по основному направлению ( $x_2 \in [0, l_2]$ );  $x_{2,k}^b$ ,  $k = 1, \dots, n_k$  – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки);  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}, \quad k = 1, \dots, n_k; \quad (1.4)$$

$\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответствующие границы перечисленных фрагментов;  $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$  – характеристическая функция области  $\Omega_k$ ;  $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$  – дельта-функция границы  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$  [8],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k; \end{cases}$$

$$\delta_{\Gamma, k}(x_1, x_2) = \partial \theta_k / \partial \bar{n}_k; \quad (1.5)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нормали к границе  $\Gamma_k$ ;  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}; \quad (1.6)$$

$\mathcal{L}_{k,vv}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ ,  $\mathcal{L}_{k,uu}$  – операторы задачи в расширенной области  $\omega_k$ , причем  $\mathcal{L}_{k,uv}^*$  – сопряженный с  $\mathcal{L}_{k,uv}$  дифференциальный оператор, а  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$  – кососимметричный оператор;  $\bar{\lambda}_k$  и  $\bar{\mu}_k$  – параметры Ламе, определенные на расширенной области  $\omega_k \supset \Omega_k$  и равны нулю вне  $\Omega_k$ , т.е.

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (1.7)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2; \quad (1.8)$$

$\bar{\mathcal{F}}_k$  – соответствующий вектор правых частей на интервале  $(x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ ,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = [\mathcal{F}_{k,1} \ \mathcal{F}_{k,2}]^T; \quad \mathcal{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma, k} f_i; \quad (1.9)$$

$\bar{F}_k = [F_{k,1} \ F_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области  $\Omega_k$ ;  $\bar{f}_k = [f_{k,1} \ f_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области  $\Gamma_k = \partial \Omega_k$ ;  $\bar{u}$  – вектор перемещений,

$$\bar{u} = [u_1 \ u_2]^T, \quad (1.10)$$

причем  $u_1, u_2$  – соответствующие компоненты вектора перемещений.

Заметим, что

$$\bar{u}_k = \bar{u} = [u_1^{(k)} \ u_2^{(k)}]^T, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b). \quad (1.11)$$

где  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$  – компоненты  $u_1, u_2$  вектора перемещений соответственно на интервале  $(x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов. Далее реализуется техника метода конечных элементов (для дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ)) или вариационно-разностного метода (для дискретно-континуального вариационно-разностного метода (ДКВРМ)). В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, в рамках которой на каждом дискретно-континуальном элементе (дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ) для ДКМКЭ и дискретно-континуальный сеточный элемент (ДКСЭ) для ДКВРМ) искомая функция по «поперечным» направлениям аппроксимируется, как правило, полиномом, а в продольном направлении ее вид остается искомым. Иными словами, функция фактически определяется своим поведением на ребрах дискретно-континуального элемента.

Итак, при рассмотрении двумерной задачи теории упругости переходим от (1.1) к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$-A_{k,vv} \partial_2^2 \bar{y} + \tilde{A}_{k,uv} \partial_2 \bar{y} + A_{k,uu} \bar{y} = \bar{b}_k, \quad (1.12)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где  $A_{k,vv}$ ,  $\tilde{A}_{k,uv}$  и  $A_{k,uu}$  – числовые матрицы, представляющие собой дискретизацию операторных коэффициентов  $\mathcal{L}_{k,vv}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$  и  $\mathcal{L}_{k,uu}$  соответственно;

$$\bar{y}_k(x_2) = \bar{y}(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (1.13)$$

$$\bar{y}_k(x_2) = \begin{bmatrix} y_1^{(k)}(x_2) \\ y_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y_{2i-1}^{(k)}(x_2) \\ y_{2i}^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y_{2N-1}^{(k)}(x_2) \\ y_{2N}^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \vdots \\ u_1^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \vdots \\ u_1^{(k)}(x_1^N, x_2) \\ u_2^{(k)}(x_1^N, x_2) \end{bmatrix}; \quad (1.14)$$

$$\bar{b}_k(x_2) = \begin{bmatrix} b_1^{(k)}(x_2) \\ b_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ b_{2i-1}^{(k)}(x_2) \\ b_{2i}^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ b_{2N-1}^{(k)}(x_2) \\ b_{2N}^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^1, x_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^i, x_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_1^{(k)}(x_1^N, x_2) \\ \mathcal{F}_2^{(k)}(x_1^N, x_2) \end{bmatrix}; \quad (1.15)$$

$(x_1^i, x_2)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  – координаты узлов сетки дискретно-континуальных элементов по неосновному («поперечному») направлению.

Статические граничные условия учитываются в векторе узловых нагрузок. Следует принять во внимание и кинематические граничные условия.

Граничные условия здесь могут быть записаны в виде:

$$B_k^- \bar{y}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (1.16)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.17)$$

где  $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$ ,  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  и  $B_1^+, B_{n_k}^-$  – матрицы  $4N$ -го порядка и векторы правых частей длиной  $4N$  граничных условий в граничной точке  $x_{2,k}^b$ .

## 2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть  $Q$  – матрица базисных функций Хаара, записанных по столбцам, а  $Q_b$  – блочная матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а  $P_{12}$  – матрица перестановок, определяемая формулой

$$P_{12} \bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_2) \\ \bar{u}_2(x_2) \end{bmatrix};$$

$$\bar{u}_i(x_2) = \{u_i(x_1^j, x_2)\}_{j=1,2,\dots,N}, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

После перехода от единичного базиса к базису Хаара получим:

$$\bar{w}_1(x_2) = Q^T \bar{u}_1(x_2); \quad \bar{w}_2(x_2) = Q^T \bar{u}_2(x_2) \quad (2.3)$$

$$\text{или } \bar{u}_1(x_2) = Q \bar{w}_1(x_2); \quad \bar{u}_2(x_2) = Q \bar{w}_2(x_2), \quad (2.4)$$

где  $\bar{w}_i(x_2)$  – компоненты разложения вектора  $\bar{u}_i(x_2)$  в базисе Хаара.

Следуя (2.2)-(2.4), имеем:

$$P_{12} \bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_2) \\ \bar{w}_2(x_2) \end{bmatrix} = Q_b \bar{w}(x_2), \quad (2.5)$$

$$\text{где } \bar{w}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_2) \\ \bar{w}_2(x_2) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\text{или } \bar{y}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{w}(x_2), \quad (2.7)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.8)$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка.

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА

Рассмотрим без ограничения общности интервал  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ .

Введем обозначения:

$$\bar{w}_i^{(k)} = \bar{w}_i^{(k)}(x_2) = \bar{w}_i(x_2), \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b),$$

$$\bar{w}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть  $\bar{w}_i^{(k),red}(x_2)$ ,  $i = 1, 2$  – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов  $\bar{u}_i^{(k)}(x_2)$ ,  $i = 1, 2$  в базисе Хаара, а  $R_k$  – прямоугольная матрица размером  $N \times N_{red}^{(k)}$ , которую будем называть матрицей редукции ( $N_{red}^{(k)}$  – длины векторов  $\bar{w}_i^{(k),red}(x_2)$ ,  $i = 1, 2$ ) на интервале  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ . Сообразно [5] имеем:

$$R_k : \bar{w}_i^{(k),red} \rightarrow \bar{w}_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

т.е. 
$$\bar{w}_i^{(k)} = R_k \bar{w}_i^{(k),red}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\bar{w}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix} = R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_2),$$

где 
$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}; \quad \bar{w}_k^{red}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Таким образом, на основании (1.13), (2.6) и (3.1), получим:

$$\bar{y}_k(x_2) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_2) \quad (3.6)$$

или 
$$\bar{y}_k(x_2) = S_k \bar{w}_k^{red}(x_2), \quad (3.7)$$

где 
$$S_k = P_{12}^T Q_b T_{b,k}. \quad (3.8)$$

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{y}_k), \quad (3.9)$$

где

$$\Phi(\bar{y}) = 0.5 \cdot [(A_{k,vv} \partial_2 \bar{y}_k, \partial_2 \bar{y}_k) + (\tilde{A}_{k,uv} \partial_2 \bar{y}_k, \bar{y}_k) + (A_{k,uu} \bar{y}_k, \bar{y}_k)] - (\bar{b}_k, \bar{y}_k). \quad (3.10)$$

Преобразовывая выражение (3.10) с учетом (3.7)-(3.8) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{y}_k) &= 0.5 \cdot [(A_{k,vv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red})] - \\ &- (\bar{b}_k, S_k \bar{w}_k^{red}) = \\ &= 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,vv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (S_k^T A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{w}_k^{red}) &= 0.5 \cdot [(A_{k,2,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \partial_2 \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (\tilde{A}_{k,1,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ &+ (A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где 
$$A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,vv} S_k; \quad \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k; \\ A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad \bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k, \quad (3.12)$$

причем  $A_{k,2,s}$ ,  $\tilde{A}_{k,1,s}$  и  $A_{k,0,s}$  – матрицы размером  $2N_{red}^{(k)} \times 2N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{b}_s$  – вектор размером  $2N_{red}^{(k)}$ .

Таким образом, после редукции (1.12) принимает вид:

О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 1: Двумерная задача теории упругости.

$$-A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{w}_k^{red} + \tilde{A}_{k,1,s} \partial_2 \bar{w}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red} = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.13)$$

$$\bar{y}_k(x_2) = S_k \bar{z}_k(x_2); \quad (3.22)$$

$$\partial_2 \bar{y}_k(x_2) = \bar{y}'_k(x_2) = S_k \partial_2 \bar{z}_k(x_2) = S_k \bar{t}'_k(x_2). \quad (3.23)$$

Вводя обозначения

$$\bar{z}_k = \bar{w}_k^{red}; \quad \bar{t}_k = \partial_2 \bar{z}_k = \bar{z}'_k; \quad \bar{t}'_k = \partial_2 \bar{t}_k, \quad (3.14)$$

перепишем (3.13) в виде

$$-A_{k,2,s} \partial_2 \bar{z}_k + \tilde{A}_{k,1,s} \bar{z}_k + A_{k,0,s} \bar{t}_k = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.15)$$

Объединяя (3.14) и (3.15), получим следующую систему

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & A_{k,2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

или

$$\begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

где  $E_k$  – единичная матрица размером  $2N_{red}^{(k)} \times 2N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{z}$  и  $\bar{t}$  – векторы размером  $2N_{red}^{(k)}$ .

Окончательно имеем:

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{V}_k + \tilde{F}_k, \quad (3.18)$$

$$\text{где } A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix}; \quad (3.19)$$

$$\tilde{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.20)$$

$$\bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{V}'_k = \partial_2 \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{z}_k \\ \partial_2 \bar{t}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

причем  $A_k$  – матрица размером  $4N_{red}^{(k)} \times 4N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{V}_k$  и  $\tilde{F}_k$  – векторы размером  $4N_{red}^{(k)}$ .

Согласно (3.7) и (3.14) справедливы формулы

Следовательно,

$$\bar{U}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k(x_2) \\ \partial_2 \bar{y}_k(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \bar{z}_k(x_2) \\ S_k \bar{t}_k(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k(x_2) \\ \bar{t}_k(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{или } \bar{U}_k(x_2) = S_{b,k} \bar{V}_k(x_2), \quad (3.24)$$

$$\text{где } S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Заметим, что, пользуясь (3.8) и (2.8), нетрудно получить

$$\begin{aligned} S_k^T S_k &= (P_{12}^T Q_b T_{b,k})^T P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T Q_b T_{b,k} = T_{b,k}^T T_{b,k}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } S_{b,k}^T S_{b,k} = T_{b,k}^T T_{b,k}. \quad (3.26)$$

Граничные условия (1.16) и (1.17) могут быть записаны в виде (в смысле поиска обобщенного решения):

$$\tilde{B}_k^- \bar{V}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{2,k}^b + 0) = \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.27)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \quad (3.28)$$

где

$$\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad \tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.29)$$

$$\tilde{g}_k^- = S_{b,k}^T \bar{g}_k^-, \quad \tilde{g}_k^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.30)$$

$$\tilde{B}_1^+ = S_{b,k}^T B_1^+ S_{b,k}; \quad \tilde{B}_{n_k}^- = S_{b,k}^T B_{n_k}^- S_{b,k}; \quad (3.31)$$

$$\tilde{g}_1^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_1^+; \quad \tilde{g}_{n_k}^- = S_{b,k}^T \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.32)$$

$\tilde{B}_k^-$ ,  $k = 2, \dots, n_k$  – соответственно матрицы размером  $4N \times 4N_{red}^{(k-1)}$ ;  $\tilde{B}_k^+$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответственно матрицы размером  $4N \times 4N_{red}^{(k)}$ ;  $\tilde{g}_k^-$ ,  $k = 2, \dots, n_k$  и  $\tilde{g}_k^+$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – векторы размером  $4N$ .

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad (4.2)$$

где  $M$  – большое число.

#### 4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.18) совместно с граничными условиями (3.27)-(3.28), заключаем, что при решении двумерной задачи теории упругости в рамках дискретно-континуального подхода сводится к решению многоточечной краевой задачи вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}'_k &= A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_k^- \bar{V}_k(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \\ & \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^- \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицами  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  имеет следующие особенности:

- 1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы  $A_k$  к минимальному (по модулю) является большим числом,

3) в спектральном разложении матрицы  $A_k$  присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;

4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [4, 5]. После определения вектора  $\bar{V}_k(x_2)$ , пользуясь формулой (3.24) находим  $\bar{U}(x_2)$  и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

#### ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на ос-

нове кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

Analysis. // Abstract Volume, 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCBE), Moscow, 27-29 June 2012, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Publishing House "ASV", pp. 150-151.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. **Добши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2012. – 158 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
6. **Чуй К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Multilevel Wavelet-based Numerical and Semianalytical Methods of Local Structural

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

# О КОРРЕКТНОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЧАСТЬ 2: ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Акимов П.А., Мозгалева М.Л.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В настоящей статье рассматривается корректный дискретно-континуальный подход к локальному исследованию напряженно-деформированного состояния строительных конструкций. Объектом исследования являются строительные конструкции с регулярными (в частности, постоянными или кусочно-постоянными) физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений. Изложение ведется на примере трехмерной (пространственной) задачи теории упругости.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный подход, локальный расчет, строительные конструкции, вейвлет-анализ, кусочно-постоянные параметры, трехмерная задача теории упругости

## ABOUT CORRECT MULTILEVEL WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL METHODS OF LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS PART 2: THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to correct discrete-continual approach to local structural analysis. Structures with regular (in particular, constant or piecewise constant) physical and geometrical parameters (properties) in one direction are under consideration. Corresponding design model is three-dimensional problem of elasticity.

**Key words:** discrete-continual approach, local structural analysis, wavelet analysis, piecewise constant parameters, three-dimensional problem of elasticity

### 1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

В данном случае, как и прежде [4], дискретно-континуальный подход включает два основных этапа, перечисленные ниже.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет

выделения производных по основному направлению. Изложим это на примере трехмерной (пространственной) задачи теории упругости, а именно будем рассматривать далее статический расчет трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками). Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,vv}\partial_3^2\bar{u} + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}\partial_3\bar{u} + \mathcal{L}_{k,uu}\bar{u} = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$
$$x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} = \mathcal{L}_{k,uv} - \mathcal{L}_{k,vi}$ ;  $\mathcal{L}_{k,vi} = \mathcal{L}_{k,uv}^*$ ; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ 0 & 0 & \partial_2^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & \partial_2^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,uu} = & \sum_{j=1}^2 \partial_j^* \bar{\mu}_k \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\mu}_k \partial_1 & \partial_2^* \bar{\mu}_k \partial_1 & 0 \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k \partial_2 & \partial_2^* \bar{\mu}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ \partial_2^* \bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_2^* \bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.4) \end{aligned}$$

символ «\*» здесь и далее обозначает операцию сопряжения;  $x_1, x_2, x_3$  – используемые декартовы координаты;  $x_3$  – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно (замечим, что по переменным  $x_1$  и  $x_2$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно));  $l_3$  – длина конструкции по основному направлению ( $x_3 \in [0, l_3]$ );  $x_{3,k}^b$ ,  $k=1, \dots, n_k$  – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки);  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_\Omega, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}, \quad k=1, \dots, n_k, \quad (1.5)$$

где  $S_\Omega$  – область, занимаемая «поперечным» по отношению к основному направлению сечением конструкции (постоянно вдоль  $x_3$ );  $\Gamma_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – соответствующие границы перечисленных фрагментов;  $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2, x_3)$  – характеристическая функция области  $\Omega_k$ ;  $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3)$  – дельта-функция границы  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$  [8],

$$\theta_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin \Omega_k \end{cases}; \quad (1.6)$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.7)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2} \ n_{k,3}]^T$  – вектор составляющих нормали к границе  $\Gamma_k$ ;  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}; \quad (1.8)$$

$\mathcal{L}_{k,vv}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$ ,  $\mathcal{L}_{k,uu}$  – операторы задачи в расширенной области  $\omega_k$ , причем  $\mathcal{L}_{k,uv}^*$  – сопряженный с  $\mathcal{L}_{k,uv}$  дифференциальный оператор, а  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$  – кососимметричный оператор;  $\bar{\lambda}_k$  и  $\bar{\mu}_k$  – параметры Ламе, определенные на расширенной области  $\omega_k \supset \Omega_k$  и равны нулю вне  $\Omega_k$ , т.е.

$$\bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad (1.9)$$

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s=1, 2, 3; \quad (1.10)$$

$\bar{\mathcal{F}}_k$  – соответствующий вектор правых частей на интервале  $(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ ,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = [\mathcal{F}_{k,1} \ \mathcal{F}_{k,2} \ \mathcal{F}_{k,3}]^T; \quad (1.11)$$

$$\mathcal{F}_{k,i} = \theta_k F_i + \delta_{\Gamma,k} f_i; \quad (1.12)$$

$\bar{F}_k = [F_{k,1} \ F_{k,2} \ F_{k,3}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области  $\Omega_k$ ;  $\bar{f}_k = [f_{k,1} \ f_{k,2} \ f_{k,3}]^T$  – вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ ;  $\bar{u}$  – вектор перемещений,

$$\bar{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T, \quad (1.13)$$

причем  $u_1, u_2, u_3$  – соответствующие компоненты вектора перемещений.

Заметим, что (ниже  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$  – компоненты  $u_1, u_2, u_3$  вектора перемещений соответственно на интервале  $(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ ):

$$\bar{u}_k = \bar{u} = [u_1^{(k)} \ u_2^{(k)} \ u_3^{(k)}]^T, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b). \quad (1.14)$$

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов. Далее реализуется техника метода конечных элементов (для дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ)) или вариационно-разностного метода (для дискретно-континуального вариационно-разностного метода (ДКВРМ)). В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, в рамках которой на каждом дискретно-континуальном элементе (дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ) для ДКМКЭ и дискретно-континуальный сеточный элемент (ДКСЭ) для ДКВРМ) искомая функция по «поперечным» направлениям аппроксимируется, как правило, полиномом, а в продольном направлении ее вид остается искомым. Иными словами, функция фактически определяется своим поведением на ребрах дискретно-континуального элемента.

Итак, при рассмотрении трехмерной задачи теории упругости переходим от (1.1) к системе дифференциальных уравнений вида:

$$-A_{k,vv} \partial_3^2 \bar{y} + \tilde{A}_{k,uv} \partial_3 \bar{y} + A_{k,uu} \bar{y} = \bar{b}_k, \quad (1.15)$$

$$x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где  $A_{k,vv}$ ,  $\tilde{A}_{k,uv}$  и  $A_{k,uu}$  – числовые матрицы, представляющие собой дискретизацию операторных коэффициентов  $\mathcal{L}_{k,vv}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}$  и  $\mathcal{L}_{k,uu}$  соответственно;

$$\bar{y}_k(x_3) = \bar{y}(x_3), \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b); \quad (1.16)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} \bar{y}_k &= \bar{y}_k(x_3) = \\ &= [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \ (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \ \dots \ (\bar{u}_n^{(k,N,1)})^T \ \dots \\ &\dots \ (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \ (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \ \dots \ (\bar{u}_n^{(k,N,2)})^T \ \dots \\ &\dots \ (\bar{u}_n^{(k,1,N)})^T \ (\bar{u}_n^{(k,2,N)})^T \ \dots \ (\bar{u}_n^{(k,N,N)})^T]^T; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\bar{u}_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,p,q)} \\ u_2^{(k,p,q)} \\ u_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_k &= \bar{b}_k(x_3) \\ &= [(\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,1)})^T \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,1)})^T \ \dots \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,1)})^T \ \dots \\ &\dots \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,2)})^T \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,2)})^T \ \dots \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,2)})^T \ \dots \\ &\dots \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,1,N)})^T \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,2,N)})^T \ \dots \ (\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,N,N)})^T]^T; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_n^{(k,p,q)} = \bar{\mathcal{F}}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_1^{(k,p,q)} \\ \bar{\mathcal{F}}_2^{(k,p,q)} \\ \bar{\mathcal{F}}_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, N;$$

$$\bar{\mathcal{F}}_i^{(k,p,q)} = \bar{\mathcal{F}}_{k,i}(x_1^p, x_2^q, x_3), \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.21)$$

$(x_1^p, x_2^q, x_3)$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ ,  $q = 1, 2, \dots, N$  – координаты узлов сетки дискретно-континуальных элементов по неосновному («поперечному») направлению, т.е. общее количество дискретно-континуальных элементов в модели, аппроксимирующей конструкцию, равно

О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 2: Трехмерная задача теории упругости.

$$n = N^2; \quad (1.22)$$

$\bar{u}_i^{(k,p,q)} = \bar{u}_i^{(k,p,q)}(x_3)$  – функция, определяющая изменение компоненты перемещения  $u_i$  в узле с координатой  $(x_1^p, x_2^q, x_3)$  на интервале  $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ .

Статические граничные условия учитываются в векторе узловых нагрузок. Следует принять во внимание и кинематические граничные условия.

Граничные условия здесь могут быть записаны в виде:

$$B_k^- \bar{y}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (1.23)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.24)$$

где  $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  и  $B_1^+, B_{n_k}^-$  – матрицы  $6n$ -го порядка и векторы правых частей длиной  $6n$  граничных условий в граничной точке  $x_{3,k}^b$ .

## 2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть  $Q$  – матрица базисных функций Хаара, записанных по столбцам, а  $Q_b$  – блочная матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а  $P_{12}$  – матрица перестановок, определяемая формулой

$$P_{12} \bar{y}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_3) \\ \bar{u}_2(x_3) \\ \bar{u}_3(x_3) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{u}_i(x_3) = [ (u_i^{(1,1)})^T \quad (u_i^{(2,1)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,1)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (u_i^{(1,2)})^T \quad (u_i^{(2,2)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (u_i^{(1,N)})^T \quad (u_i^{(2,N)})^T \quad \dots \quad (u_i^{(N,N)})^T ]^T, \quad (2.3)$$

$$i = 1, 2, 3$$

– векторы размером (длиной)  $n$ .

Выполняя переход от единичного базиса к базису Хаара, можем записать, что

$$\bar{w}_i(x_3) = Q^T \bar{u}_i(x_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$\text{или} \quad \bar{u}_i(x_3) = Q \bar{w}_i(x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.5)$$

где  $\bar{w}_i(x_3)$  – компоненты разложения вектора  $\bar{u}_i(x_3)$  в базисе Хаара.

Следуя (2.2)-(2.5), имеем:

$$P_{12} \bar{y}(x_3) = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_3) \\ \bar{w}_2(x_3) \\ \bar{w}_3(x_3) \end{bmatrix} = Q_b \bar{w}(x_3), \quad (2.6)$$

$$\text{где} \quad \bar{w}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(x_3) \\ \bar{w}_2(x_3) \\ \bar{w}_3(x_3) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\text{или} \quad \bar{y}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{w}(x_3), \quad (2.8)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.9)$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка.

## 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА

Рассмотрим без ограничения общности интервал  $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ .

Введем обозначения:

$$\bar{w}_i^{(k)} = \bar{w}_i^{(k)}(x_3) = \bar{w}_i(x_3), \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b);$$

$$\bar{w}_k(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k)}(x_3) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть  $\bar{w}_i^{(k),red}(x_3)$ ,  $i=1,2,3$  – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов  $\bar{u}_i^{(k)}(x_3)$ ,  $i=1,2,3$  в базисе Хаара, а  $R_k$  – прямоугольная матрица размером  $n \times n_{red}^{(k)}$ , которую будем называть матрицей редукции ( $n_{red}^{(k)}$  – длины векторов  $\bar{w}_i^{(k),red}(x_3)$ ,  $i=1,2,3$ ) на интервале  $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ . Сообразно [5] имеем:

$$R_k : \bar{w}_i^{(k),red} \rightarrow \bar{w}_i^{(k)}, \quad i=1,2,3, \quad (3.3)$$

$$\text{т.е.} \quad \bar{w}_i^{(k)} = R_k \bar{w}_i^{(k),red}, \quad i=1,2,3. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\bar{w}_k(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k)}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k)}(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k & 0 & 0 \\ 0 & R_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k),red}(x_3) \end{bmatrix} = T_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_2); \quad (3.5)$$

$$\text{где} \quad R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_k & 0 & 0 \\ 0 & R_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

$$\bar{w}_k^{red}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_2^{(k),red}(x_3) \\ \bar{w}_3^{(k),red}(x_3) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Таким образом, на основании (1.16), (2.8), (3.2), получим:

$$\bar{y}_k(x_3) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{w}_k^{red}(x_3) \quad (3.8)$$

$$\text{или} \quad \bar{y}_k(x_3) = S_k \bar{w}_k^{red}(x_3), \quad (3.9)$$

$$\text{где} \quad S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}. \quad (3.10)$$

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{y}_k), \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{y}_k) = & 0.5 \cdot [(A_{k,vv} \partial_3 \bar{y}_k, \partial_3 \bar{y}_k) + \\ & + (\tilde{A}_{k,uv} \partial_3 \bar{y}_k, \bar{y}_k) + (A_{k,uu} \bar{y}_k, \bar{y}_k)] - \\ & - (\bar{b}_k, \bar{y}_k). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразовывая выражение (3.12) с учетом (3.10) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{y}) = & 0.5 \cdot [(A_{k,vv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (\tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, S_k \bar{w}_k^{red})] - \\ & - (\bar{b}_k, S_k \bar{w}_k^{red}) = \\ = & 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,vv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (S_k^T A_{k,uu} S_k \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - \\ & - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{w}_k^{red}) = & 0.5 \cdot [(A_{k,2,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \partial_3 \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (\tilde{A}_{k,1,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red}) + \\ & + (A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red}, \bar{w}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{w}_k^{red}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad A_{k,2,s} = & S_k^T A_{k,vv} S_k; \quad \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k; \\ A_{k,0,s} = & S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad \bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k, \end{aligned} \quad (3.14)$$

причем  $A_{k,2,s}$ ,  $\tilde{A}_{k,1,s}$  и  $A_{k,0,s}$  – матрицы размером  $3N_{red}^{(k)} \times 3N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{b}_s$  – вектор размером  $3N_{red}^{(k)}$ .

Таким образом, после редукции (1.15) принимает вид:

$$- A_{k,2,s} \partial_3^2 \bar{w}_k^{red} + \tilde{A}_{k,1,s} \partial_3 \bar{w}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{w}_k^{red} = \tilde{F}_{k,s}. \quad (3.15)$$

О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 2: Трехмерная задача теории упругости.

Вводя обозначения

$$\bar{z}_k = \bar{w}_k^{red}; \quad \bar{t}_k = \partial_3 \bar{z}_k = \bar{z}'_k; \quad \bar{t}'_k = \partial_3 \bar{t}_k, \quad (3.16)$$

переписываем (3.15) в виде

$$-A_{k,2,s} \partial_3 \bar{z}_k + \tilde{A}_{k,1,s} \bar{z}_k + A_{k,0,s} \bar{t}_k = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.17)$$

Объединяя (3.16) и (3.17), получим следующую систему

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & A_{k,2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

или

$$\begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

где  $E_k$  – единичная матрица размером  $3n_{red}^{(k)} \times 3n_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{z}$  и  $\bar{t}$  – векторы размером  $3n_{red}^{(k)}$ .

Окончательно имеем:

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad (3.20)$$

$$\text{где } A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} A_{k,0,s} \end{bmatrix}; \quad (3.21)$$

$$\bar{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.22)$$

$$\bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \bar{t}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{V}'_k = \partial_3 \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \partial_3 \bar{z}_k \\ \partial_3 \bar{t}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}'_k \\ \bar{t}'_k \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

причем  $A_k$  – матрица размером  $6n_{red}^{(k)} \times 6n_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{V}_k$  и  $\bar{F}_k$  – векторы размером  $6n_{red}^{(k)}$ .

Согласно (3.9) и (3.16) справедливы формулы

$$\bar{y}_k(x_3) = S_k \bar{z}_k(x_3); \quad (3.24)$$

$$\partial_3 \bar{y}_k(x_3) = \bar{y}'_k(x_3) = S_k \partial_3 \bar{z}_k(x_3) = S_k \bar{t}_k(x_3). \quad (3.25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(x_3) &= \begin{bmatrix} \bar{y}_k(x_3) \\ \partial_3 \bar{y}_k(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \bar{z}_k(x_2) \\ S_k \bar{t}_k(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_k(x_3) \\ \bar{t}_k(x_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{или } \bar{U}_k(x_3) = S_{b,k} \bar{V}_k(x_3), \quad (3.26)$$

$$\text{где } S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Заметим, что, пользуясь (3.9) и (2.9), нетрудно получить

$$\begin{aligned} S_k^T S_k &= (P_{12}^T Q_b T_{b,k})^T P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T Q_b T_{b,k} = T_{b,k}^T T_{b,k}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } S_{b,k}^T S_{b,k} = T_{b,k}^T T_{b,k}. \quad (3.28)$$

Граничные условия (1.23) и (1.24) могут быть записаны в виде (в смысле поиска обобщенного решения):

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k^- \bar{V}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{3,k}^b + 0) &= \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ k &= 2, \dots, n_k - 1; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.30)$$

$$\text{где } \tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad \tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.31)$$

$$\bar{g}_k^- = S_{b,k}^T \bar{g}_k^-, \quad \bar{g}_k^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.32)$$

$$\tilde{B}_1^+ = S_{b,k}^T B_1^+ S_{b,k}; \quad \tilde{B}_{n_k}^- = S_{b,k}^T B_{n_k}^- S_{b,k}; \quad (3.33)$$

$$\bar{g}_1^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_1^+; \quad \bar{g}_{n_k}^- = S_{b,k}^T \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.24)$$

$\tilde{B}_k^-$ ,  $k = 2, \dots, n_k$  – соответственно матрицы размером  $6n \times 6n_{red}^{(k-1)}$ ;  $\tilde{B}_k^+$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответственно матрицы размером  $6n \times 6n_{red}^{(k)}$ ;

$\bar{g}_k^-$ ,  $k = 2, \dots, n_k$  и  $\bar{g}_k^+$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответственно векторы размером  $bn$ .

#### 4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.20) совместно с граничными условиями (3.29)-(3.30), заключаем, что при решении трехмерной задачи теории упругости в рамках дискретно-континуального подхода сводится к решению многоточечной краевой задачи вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}'_k &= A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \bar{B}_k^- \bar{V}_k(x_{3,k}^b - 0) + \bar{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{3,k}^b + 0) &= \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ & \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ \bar{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \bar{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k}(x_{3,n_k}^b - 0) &= \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицами  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n_k - 1$  имеет следующие особенности:

- 1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы  $A_k$  к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad (4.2)$$

где  $M$  – большое число.

- 3) в спектральном разложении матрицы  $A_k$  присутствуют жордановы клетки

неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;

- 4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [4, 5]. После определения вектора  $\bar{V}_k(x_3)$ , пользуясь формулой (3.26) находим  $\bar{U}(x_3)$  и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

#### ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопас-

ности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. **Добши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2012. – 158 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
6. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Multilevel Wavelet-based Numerical and Semianalytical Methods of Local Structural Analysis. // Abstract Volume, 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCSBE), Moscow, 27-29 June 2012, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Publishing House “ASV”, pp. 150-151.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

# О КОРРЕКТНОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ ВЕЙВЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЧАСТЬ 3: ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

*Акимов П.А., Мозгалева М.Л.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В настоящей статье рассматривается корректный дискретно-континуальный подход к локальному исследованию напряженно-деформированного состояния строительных конструкций. Объектом исследования являются строительные конструкции с регулярными (в частности, постоянными или кусочно-постоянными) физико-геометрическими параметрами (характеристиками) по одному из направлений. Изложение ведется на примере задачи об изгибе тонкой пластины.

**Ключевые слова:** дискретно-континуальный подход, локальный расчет, строительные конструкции, вейвлет-анализ, кусочно-постоянные параметры, изгиб пластины

## ABOUT CORRECT MULTILEVEL WAVELET-BASED DISCRETE-CONTINUAL METHODS OF LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS PART 3: PROBLEM OF PLATE ANALYSIS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The distinctive paper is devoted to correct discrete-continual approach to local structural analysis. Structures with regular (in particular, constant or piecewise constant) physical and geometrical parameters (properties) in one direction are under consideration. Corresponding design model is plate in terms of Kirghoff model.

**Key words:** discrete-continual approach, local structural analysis, wavelet analysis, piecewise constant parameters, plate analysis

### 1. ИСХОДНАЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ЕДИНИЧНОМ БАЗИСЕ

В данном случае, как и прежде [4], дискретно-континуальный подход включает два основных этапа, перечисленные ниже.

1) Сведение исходной задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет

выделения производных по основному направлению. Изложим это на примере задачи об изгибе тонкой пластины (в рамках модели Кирхгофа [...]), а именно будем рассматривать далее статический расчет тонкой пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками). Имеем:

$$-\mathcal{L}_{k,4}\partial_2^4 w + \mathcal{L}_{k,2}\partial_2^2 w + \mathcal{L}_{k,0}w = \bar{\mathcal{F}}_k, \quad (1.1)$$
$$x_3 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1;$$

где  $\mathcal{L}_{k,4} = \theta_k D_k$ ; (1.2)

$$\mathcal{L}_{k,2} = -[\partial_1^2 \theta_k D_k \nu_k + 2\partial_1 \theta_k D_k (1 - \nu_k) \partial_1 + \theta_k D_k \nu_k \partial_1^2];$$
 (1.3)

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_1^2 \theta_k D_k \partial_1^2 + \theta_k c_k$$
 (1.4)

$x_1, x_2$  – используемые декартовы координаты;  $x_2$  – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры пластины изменяются кусочно-постоянно (заметим, что по переменной  $x_1$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно));  $l_1$  и  $l_2$  – размеры пластины в плане,  $x_1 \in [0, l_1]$ ,  $x_2 \in [0, l_2]$ ;  $x_{2,k}^b, k = 1, \dots, n_k$  – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров балки-стенки);  $\Omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}, k = 1, \dots, n_k$$
 (1.5)

$\Gamma_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответствующие границы перечисленных фрагментов;  $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$  – характеристическая функция области  $\Omega_k$ ;  $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$  – дельта-функция границы  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$  [9],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k \end{cases}$$
 (1.6)

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k$$
 (1.7)

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$  – вектор составляющих нормали к границе  $\Gamma_k$ ;  $\omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты, в частности, например, можно выбрать

$$\omega_k = \{(x_1, x_2): -\infty < x_1 < +\infty, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b\}$$
 (1.8)

$\mathcal{L}_{k,4}, \mathcal{L}_{k,2}, \mathcal{L}_{k,0}$  – операторы задачи в расширенной области  $\omega_k$ ;  $D_k, \nu_k$  и  $c_k$  – соответственно цилиндрическая жесткость пластины, коэффициент Пуассона материала пластины и коэффициент отпора упругого основания (при наличии) на интервале  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ ,

$$D_k = E_k h_k^3 / [12(1 - \nu_k^2)];$$
 (1.9)

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2;$$
 (1.10)

$h_k$  – толщина в области  $\Omega_k$ ;  $\bar{\mathcal{F}}_k$  – функция правых частей (нагрузки) в области  $\Omega_k$ ,

$$\bar{\mathcal{F}}_k = \theta_k q_k - \delta_{\Gamma,k} Q - \partial_1(\delta_{\Gamma,k} \mathcal{M}_1) - \partial_2(\delta_{\Gamma,k} \mathcal{M}_2)$$
 (1.11)

$q$  – плотность нагрузки;  $Q, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  – поперечная сила и крутящие моменты на границе;  $w$  – прогиб пластины;

Заметим, что

$$w_k = w, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b),$$
 (1.12)

где  $w_k$  – прогиб пластины на интервале  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ .

2) Осуществляется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих функционалов. Далее реализуется техника метода конечных элементов (для дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ)) или вариационно-разностного метода (для дискретно-континуального вариационно-разностного метода (ДКВРМ)). В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, в рамках которой на каждом дискретно-континуальном элементе (дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ)) для ДКМКЭ и дискретно-континуальный се-

точный элемент (ДКСЭ) для ДКВРМ) иско-  
мая функция по «поперечным» направлени-  
ям аппроксимируется, как правило, полино-  
мом, а в продольном направлении ее вид ос-  
тается искомым. Иными словами, функция  
фактически определяется своим поведением  
на ребрах дискретно-континуального эле-  
мента.

Итак, при рассмотрении задачи об изгибе  
тонкой плиты переходим от (1.1) к системе  
дифференциальных уравнений вида:

$$-A_{k,4}\partial_2^4\bar{u} + A_{k,2}\partial_2^2\bar{u} + A_{k,0}\bar{u} = \bar{b}_k, \quad (1.13)$$

$$x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1,$$

где  $A_{k,4}$ ,  $\tilde{A}_{k,2}$  и  $A_{k,0}$  – числовые матрицы,  
представляющие собой дискретизацию опера-  
торных коэффициентов  $\mathcal{L}_{k,4}$ ,  $\mathcal{L}_{k,2}$  и  $\mathcal{L}_{k,0}$  соот-  
ветственно;  $(x_1^i, x_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  – коорди-  
наты узлов сетки дискретно-континуальных  
элементов по неосновному («поперечному»)  
направлению;

$$\bar{u} = \bar{u}(x_2) = [w_1 \ \varphi_1 \ w_2 \ \varphi_2 \ \dots \ w_N \ \varphi_N]^T, \quad (1.14)$$

$$w_i = w(x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\varphi_i = [\partial_1 w](x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.15)$$

$$\bar{u}_k(x_2) = \bar{u}(x_2), \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (1.16)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2) =$$

$$= [w_1^{(k)} \ \varphi_1^{(k)} \ w_2^{(k)} \ \varphi_2^{(k)} \ \dots \ w_N^{(k)} \ \varphi_N^{(k)}]^T; \quad (1.17)$$

$$\bar{b}_k = \bar{b}_k(x_2) = [\mathcal{F}_1^{(k)} \ 0 \ \mathcal{F}_2^{(k)} \ 0 \ \dots \ \mathcal{F}_N^{(k)} \ 0]^T, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{F}_i^{(k)} = \mathcal{F}_i(x_1^i, x_2), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.19)$$

Статические граничные условия учитываются  
в векторе узловых нагрузок. Следует при-  
нять во внимание и кинематические гранич-  
ные условия.

Граничные условия здесь могут быть запи-  
саны в виде:

$$B_k^- \bar{U}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (1.20)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{U}(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.21)$$

где  $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k = 2, \dots, n_k - 1$ ,  $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$  и  
 $B_1^+, B_{n_k}^-$  – матрицы  $4N$ -го порядка и векторы  
правых частей длиной  $4N$  граничных усло-  
вий в граничной точке  $x_{2,k}^b$ ;  $\bar{U}$  – вектор дли-  
ной  $4N$ ,

$$\bar{U} = \bar{U}(x_2) = [\bar{u}^T \ (\partial_2 \bar{u})^T \ (\partial_2^2 \bar{u})^T \ (\partial_2^3 \bar{u})^T]^T; \quad (1.22)$$

– вектор длиной  $8N$ .

## 2. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ В БАЗИСЕ ХААРА

Пусть  $Q$  – матрица базисных функций Хаа-  
ра, записанных по столбцам, а  $Q_b$  – блочная  
матрица вида

$$Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

а  $P_{12}$  – матрица перестановок, определяемая  
формулой

$$P_{12} \bar{u}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{w}(x_2) \\ \bar{\varphi}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } \bar{w} = \bar{w}(x_2) = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T; \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x_2) = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N]^T. \quad (2.4)$$

Выполняя переход от единичного базиса к  
базису Хаара, можем записать, что

$$\bar{h}_1(x_2) = Q^T \bar{w}(x_2); \quad \bar{h}_2(x_2) = Q^T \bar{\varphi}(x_2) \quad (2.5)$$

$$\text{или } \bar{w}(x_2) = Q \bar{h}(x_2); \quad \bar{\varphi}(x_2) = Q \bar{h}_2(x_2), \quad (2.6)$$

где  $\bar{h}_1(x_2)$  и  $\bar{h}_2(x_2)$  – соответственно компо-  
ненты разложения векторов  $\bar{w}(x_2)$  и  $\bar{\varphi}(x_2)$  в  
базисе Хаара.

О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины.

Следуя (2.2)-(2.6), имеем:

$$P_{12}\bar{u}(x_2) = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1(x_2) \\ \bar{h}_2(x_2) \end{bmatrix} = Q_b \bar{h}(x_2), \quad (2.7)$$

где 
$$\bar{h}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(x_2) \\ \bar{h}_2(x_2) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

или 
$$\bar{u}(x_2) = P_{12}^T Q_b \bar{h}(x_2), \quad (2.9)$$

причем справедливо соотношение

$$P_{12}^T P_{12} = E, \quad (2.10)$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующего порядка.

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ОСРЕДНЕНИЯ И РЕДУКЦИИ В БАЗИСЕ ХААРА

Рассмотрим без ограничения общности интервал  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ .

Введем обозначения:

$$\bar{h}_i^{(k)} = \bar{h}_i^{(k)}(x_2) = \bar{h}_i(x_2), \quad i = 1, 2, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b); \quad (3.1)$$

$$\bar{h}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть  $\bar{h}_i^{(k),red}(x_2)$ ,  $i = 1, 2$  – векторы соответствующих редуцированных компонент разложения векторов  $\bar{w}_k(x_2)$  и  $\bar{\varphi}_k(x_2)$  в базисе Хаара, а  $R_k$  – прямоугольная матрица размером  $N \times N_{red}^{(k)}$ , которую будем называть матрицей редукации ( $N_{red}^{(k)}$  – длины векторов  $\bar{h}_i^{(k),red}(x_2)$ ,  $i = 1, 2$ ) на интервале  $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$ . Сообразно [5] имеем:

$$R_k : \bar{h}_i^{(k),red} \rightarrow \bar{h}_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

т.е. 
$$\bar{h}_i^{(k)} = R_k \bar{h}_i^{(k),red}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\bar{h}_k(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k)}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix} = R_{b,k} \bar{h}_k^{red}(x_2); \quad (3.4)$$

где 
$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}; \quad (3.5)$$

$$\bar{h}_k^{red}(x_2) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^{(k),red}(x_2) \\ \bar{h}_2^{(k),red}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Таким образом, на основании (1.16), (2.9) и (3.1), получим:

$$\bar{u}_k(x_2) = P_{12}^T Q_b R_{b,k} \bar{h}_k^{red}(x_2) \quad (3.7)$$

или 
$$\bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{h}_k^{red}(x_2), \quad (3.8)$$

где 
$$S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}. \quad (3.9)$$

Тогда, очевидно, что можем представить выражение для соответствующего определяющего функционала следующим образом:

$$\Phi(\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi_k(\bar{u}_k), \quad (3.10)$$

где 
$$\Phi(\bar{y}) = 0.5 \cdot [(A_{k,4} \partial_2^2 \bar{u}_k, \partial_2^2 \bar{u}_k) + (A_{k,2} \partial_2^2 \bar{u}_k, \bar{u}_k) + (A_{k,0} \bar{u}_k, \bar{u}_k)] - (\bar{b}_k, \bar{u}_k). \quad (3.11)$$

Преобразовывая выражение (3.11) с учетом (3.8) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_k(\bar{u}_k) &= 0.5 \cdot [(A_{k,4} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, S_k \partial_2^2 \bar{w}_k^{red}) + (A_{k,2} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, S_k \bar{h}_k^{red}) + (A_{k,0} S_k \bar{h}_k^{red}, S_k \bar{h}_k^{red})] - (\bar{b}_k, S_k \bar{h}_k^{red}) = \\ &= 0.5 \cdot [(S_k^T A_{k,4} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}) + (S_k^T A_{k,2} S_k \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red}) + (S_k^T A_{k,0} S_k \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red})] - (S_k^T \bar{b}_k, \bar{h}_k^{red}), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$\Phi_k(\bar{w}_k^{red}) = 0.5 \cdot [(A_{k,4,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}) + (A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red}) + (A_{k,0,s} \bar{h}_k^{red}, \bar{h}_k^{red})] - (\bar{b}_{k,s}, \bar{h}_k^{red}), \quad (3.12)$$

где  $A_{k,4,s} = S_k^T A_{k,4} S_k$ ;  $A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,2} S_k$ ;  
 $A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,0} S_k$ ;  $\bar{b}_{k,s} = S_k^T \bar{b}_k$ , (3.13)

причем  $A_{k,4,s}$ ,  $A_{k,2,s}$  и  $A_{k,0,s}$  – матрицы размером  $2N_{red}^{(k)} \times 2N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{b}_s$  – вектор размером  $2N_{red}^{(k)}$ .

Таким образом, после редукции (1.13) принимает вид:

$$-A_{k,4,s} \partial_2^4 \bar{h}_k^{red} + A_{k,2,s} \partial_2^2 \bar{h}_k^{red} + A_{k,0,s} \bar{h}_k^{red} = \bar{F}_{k,s}. \quad (3.14)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^{(k)} &= \bar{h}_k^{red}; \quad \bar{z}_2^{(k)} = \partial_2 \bar{z}_1^{(k)} = \partial_2 \bar{h}_k^{red}; \\ \bar{z}_3^{(k)} &= \partial_2^2 \bar{z}_1^{(k)} = \partial_2^2 \bar{h}_k^{red}; \\ \bar{z}_4^{(k)} &= \partial_2^3 \bar{z}_1^{(k)} = \partial_2^3 \bar{h}_k^{red}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где, разумеется,  $\bar{y}_i^{(k)}$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  – векторы размером (длиной)  $2N_{red}^{(k)}$  каждый, перепишем (3.14) в виде

$$-A_{k,4,s} \partial_2 \bar{z}_4^{(k)} + A_{k,2,s} \bar{z}_3^{(k)} + A_{k,0,s} \bar{z}_1^{(k)} = \bar{b}_{k,s}. \quad (3.16)$$

Объединяя (3.15) и (3.16), получим следующую систему

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{k,4,s} \end{bmatrix} \partial_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,0,s} & 0 & A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

или

$$\begin{aligned} &\partial_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,4,s}^{-1} A_{k,0,s} & 0 & A_{k,4,s}^{-1} A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{k,4,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $E_k$  – единичная матрица размером  $2N_{red}^{(k)} \times 2N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{z}$  и  $\bar{t}$  – векторы размером  $2N_{red}^{(k)}$ .

Окончательно имеем:

$$\bar{Z}'_k = A_k \bar{Z}_k + \bar{F}_k, \quad (3.19)$$

где  $A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ A_{k,4,s}^{-1} A_{k,0,s} & 0 & A_{k,4,s}^{-1} A_{k,2,s} & 0 \end{bmatrix}$ ; (3.20)

$$\bar{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_{k,4,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad (3.21)$$

$$\bar{Z}_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(k)} \\ \bar{z}_2^{(k)} \\ \bar{z}_3^{(k)} \\ \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}'_k = \partial_2 \bar{Z}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 \bar{z}_1^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_2^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_3^{(k)} \\ \partial_2 \bar{z}_4^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

причем  $A_k$  – матрица размером  $8N_{red}^{(k)} \times 8N_{red}^{(k)}$ ;  $\bar{Z}_k$  и  $\bar{F}_k$  – векторы размером  $8N_{red}^{(k)}$ .

О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины.

Согласно (3.8) и (3.15) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(x_2) &= S_k \bar{z}_1^{(k)}(x_2); \quad \partial_2 \bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{z}_2^{(k)}(x_2); \\ \partial_2^2 \bar{u}_k(x_2) &= S_k \bar{z}_3^{(k)}(x_2); \quad \partial_2^3 \bar{u}_k(x_2) = S_k \bar{z}_4^{(k)}(x_2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{U} = \bar{U}(x_2) &= \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \partial_2 \bar{u}_k \\ \partial_2^2 \bar{u}_k \\ \partial_2^3 \bar{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k z_1^{(k)}(x_2) \\ S_k z_2^{(k)}(x_2) \\ S_k z_3^{(k)}(x_2) \\ S_k z_4^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(k)}(x_2) \\ z_2^{(k)}(x_2) \\ z_3^{(k)}(x_2) \\ z_4^{(k)}(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или  $\bar{U}_k(x_2) = S_{b,k} \bar{Z}_k(x_2), \quad (3.24)$

где  $S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_k \end{bmatrix}. \quad (3.25)$

Заметим, что, пользуясь (3.9) и (2.10), нетрудно получить

$$\begin{aligned} S_k^T S_k &= (P_{12}^T Q_b T_{b,k})^T P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T P_{12} P_{12}^T Q_b T_{b,k} = \\ &= T_{b,k}^T Q_b^T Q_b T_{b,k} = T_{b,k}^T T_{b,k}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

т.е.

Граничные условия (1.20) и (1.21) могут быть записаны в виде (в смысле поиска обобщенного решения):

$$\tilde{B}_k^- \bar{Z}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{Z}_k(x_{2,k}^b + 0) = \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.27)$$

$$\tilde{B}_1^+ \bar{Z}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{Z}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-, \quad (3.28)$$

где  $\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad \tilde{B}_k^+ = B_k^+ S_{b,k}, \quad k = 2, \dots, n_k - 1;$  (3.29)

$$\tilde{g}_k^- = S_{b,k}^T \bar{g}_k^-, \quad \tilde{g}_k^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.30)$$

$$\tilde{B}_1^+ = S_{b,k}^T B_1^+ S_{b,k}; \quad \tilde{B}_{n_k}^- = S_{b,k}^T B_{n_k}^- S_{b,k}; \quad (3.31)$$

$$\tilde{g}_1^+ = S_{b,k}^T \bar{g}_1^+; \quad \tilde{g}_{n_k}^- = S_{b,k}^T \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.32)$$

$\tilde{B}_k^-, k = 2, \dots, n_k$  – соответственно матрицы размером  $8N \times 8N_{red}^{(k-1)}$ ;  $\tilde{B}_k^+, k = 1, \dots, n_k - 1$  – соответственно матрицы размером  $8N \times 8N_{red}^{(k)}$ ;  $\tilde{g}_k^-, k = 2, \dots, n_k$  и  $\tilde{g}_k^+, k = 1, \dots, n_k - 1$  – векторы размером  $8N$ .

#### 4. РАЗРЕШАЮЩАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БАЗИСЕ ХААРА

Рассматривая систему дифференциальных уравнений (3.19) совместно с граничными условиями (3.27)-(3.28), заключаем, что при решении двумерной задачи теории упругости в рамках дискретно-континуального подхода сводится к решению многоточечной краевой задачи вида

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}'_k &= A_k \bar{Z}_k + \bar{F}_k, \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ \tilde{B}_k^- \bar{V}_k(x_{2,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{2,k}^b + 0) &= \tilde{g}_k^- + \tilde{g}_k^+, \\ &k = 2, \dots, n_k - 1; \\ \tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{2,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k}(x_{2,n_k}^b - 0) &= \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_{n_k}^-. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Вычислительная специфика при решении рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяется матрицами  $A_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависит от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр каждой из матриц  $A_k, k = 1, \dots, n_k - 1$  имеет следующие особенности:

- 1) наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- 2) «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы  $A_k$  к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}^{(k)}| / |\lambda_{\min}^{(k)}| \geq M, \quad (4.2)$$

где  $M$  – большое число.

- 3) в спектральном разложении матрицы  $A_k$  присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
- 4) жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка не большое.

Методика решения многоточечных краевых задач типа (4.1) достаточно подробно описана, например в работах [4, 5]. После определения вектора  $\bar{V}_k(x_3)$ , пользуясь формулой (3.26) находим  $\bar{U}(x_3)$  и далее по соответствующим формулам вычисляем деформации и напряжения.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. Захарова Т.В., Шестаков О.В. Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2012. – 158 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
6. Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
7. Akimov P.A., Mozgaleva M.L. Correct Wavelet-based Multilevel Numerical Method of Local Solution of Boundary

Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 166-169 (2012), pp. 3155-3158.

8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Multilevel Wavelet-based Numerical and Semianalytical Methods of Local Structural Analysis. // Abstract Volume, 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (14th ICCCBE), Moscow, 27-29 June 2012, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Publishing House "ASV", pp. 150-151.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОК И ВОЗДЕЙСТВИЙ, РАСЧЕТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ НДС, ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ. ОПЫТ 2010-2012 ГГ.

*Белостоцкий А.М.<sup>1,2</sup>, Дубинский С.И.<sup>1</sup>, Аул А.А.<sup>2</sup>,  
Нагибович А.И.<sup>2</sup>, Островский К.И.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> ЗАО "Научно-исследовательский центр СтаДиО", г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Представлен и проанализирован опыт численного моделирования ветровых нагрузок и воздействий, расчетного обоснования статического, температурного и динамического напряженно-деформированного состояния (НДС), прочности и устойчивости пространственных конструкций, уникальных зданий и сооружений, накопленный в ЗАО НИЦ СтаДиО и НОЦ КМ МГСУ в 2010-2012 гг.

**Ключевые слова:** пространственные конструкции, уникальные здания и сооружения, нагрузки и воздействия, напряженно-деформированное состояние, прочность, устойчивость, численное моделирование

## NUMERICAL SIMULATION OF LOADS AND EXITATIONS, STRESS-STRAIN STATES AND STABILITY OF UNIQUE STRUCTURES AND BUILDINGS. LAST YEARS EXPERIENCE

*Alexander M. Belostotsky<sup>1,2</sup>, Sergey I. Dubinsky<sup>1</sup>, Andrey A. Aul<sup>2</sup>,  
Alexander I. Nagibovich<sup>2</sup>, Konstantin I. Ostrovsky<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Last years (2010-2012) practical tasks of computational analysis of unique structures and buildings are presented and discussed.

**Key words:** spatial structures, unique buildings and structures, loads and impacts, the stress-strain state, strength, stability, numerical simulation

Ниже представлены и проанализированы наиболее значимые объекты-задачи, исследованные в ЗАО НИЦ СтаДиО и Научно-образовательном центре компьютерного моделирования (НОЦ КМ) МГСУ по необходимости в сложных постановках с применением современных подходов численного моделирования (нелинейные эффекты, подконструкции, субмоделирование, распараллеливание вычислений и др. [1,2]), реализованных в верифицированных программных комплексах (ПК) [7-14].

**1. Определение ветровых нагрузок на несущие и фасадные (ограждающие) конструкции, параметров пешеходной комфортности на основе численного моделирования трехмерных стационарных и нестационарных задач аэродинамики (ПК ANSYS CFD [11]).**

Исследованные объекты – олимпийский трамплин (Сочи), железнодорожный вокзал в Адлере, ТРЦ "Пулково" (С-Петербург) и московские высотные здания "Дирижабль" и "Рублевские огни", основные сооружения проектируемых АЭС с ВВЭР-ТОИ (реактор-

ное отделение, градирни) и ряд других. Подтверждено, что при очевидных практических достижениях вычислительной строительной аэродинамики требуют дальнейшей разработки и верификации ключевые вопросы: выбор адекватных моделей турбулентности, определение пульсационной составляющей нагрузок и др.

**2. Расчётные исследования статического, температурного и сейсмического НДС большеразмерной системы «строительные конструкции – сепараторы пара – трубопроводы обвязки» Билибинской АЭС с оценкой статической и циклической прочности и сейсмостойкости элементов трубопроводов в соответствии с требованиями действующих “Норм расчёта на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок” [15] (ПК АСТРА-НОВА, аттестованная в Ростехнадзоре отраслевая "ветвь" АСТРА-АЭС [3]).** На исследованной многоуровневой динамической суперэлементной модели системы установлено, что при проектной компоновке трубопроводов и оборудования, расстановке и типе опор максимальные расчетные напряжения нормативных групп (этапов) для всех деталей трубопроводной системы не превышают допустимых значений по критериям статической и циклической прочности, а максимальные перемещения – критериев деформативности. Выявлен уровень максимального расчетного землетрясения (МРЗ повторяемостью 1 раз в 10000 лет), при котором удовлетворяются и критерии сейсмической прочности. Определены также расчетные статические и сейсмические перемещения и нагрузки (силы и моменты) на патрубки оборудования и на опорные конструкции, необходимые для проектирования и оценки прочности опор, оборудования и строительных конструкций.

**3. Расчет НДС и оценка прочности-устойчивости подводных трубопроводов газоконденсатных месторождений на шельфе Сахалина на стадиях монтажа и эксплуатации с учетом контактного взаи-**

**модействия с донными отложениями [4] (ПК АСТРА-НОВА, ANSYS, ABAQUS).**

Как показал анализ, результирующее НДС весьма чувствительно к вариации некоторых исходных параметров КЭ-модели «трубопровод-грунт», в особенности, к осадкам и размыву донного грунта. В связи с этим, актуальным представляется разработка методики и расчетное исследование размыва грунта на основе численного моделирования задач придонной гидродинамики системы "трубопровод-грунт" и литодинамики донных отложений.

**4. Обоснование статического и динамического (морские волнения и сейсмика) НДС и прочности металлических конструкций проектируемого плавучего гидротехнического затвора («батопорта») сухого дока на Дальнем Востоке при действии основных и особых сочетаний нагрузок и воздействий (ПК SCAD, ANSYS).**

Разработаны и верифицированы параметризованные пространственно-оболочечные КЭ-модели несущих металлоконструкций батопорта с необходимой детализацией в зонах максимальных градиентов параметров НДС. Расчетное НДС конструкции батопорта характеризуется общим горизонтальным изгибом мидлшпангоута и местным изгибом «ячеек» обшивки, основной вклад в которые вносят гидростатическое давление и, в меньшей степени – собственный вес. Вычисленный спектр собственных частот и форм колебаний «сухой» конструкции батопорта в сейсмически значимом диапазоне частот (до 33 Гц) характеризуется как «общесистемными» (от 8,29Гц), так и «локальными» формами колебаний (изгиб обшивки торцевых секций, от 28,43Гц).

**5. Расчетные исследования вибрационного состояния несущих конструкций многоэтажных корпусов ЖК "Доминион" (г. Москва), вызванного движением поездов метрополитена в зоне застройки (ПК СТАДИО, ANSYS), с использованием инструментальных записей вибрации свайного основания [5].**

Для 4-х верифицированных пространственных динамических КЭ-моделей секций получены и проанализированы для показательных опорных и пролетных зон перекрытий 1-го, 9-го и последнего (17-го) этажей: временные реализации виброускорений – ответные акселерограммы – по 3-м направлениям (вдоль и поперек линии метро, вертикальные) для значимых интервалов с максимальными колебаниями от движения поездов метрополитена (до 20 сек); "критериальные" среднеоктавные спектры ответных акселерограмм (в дБ).

Максимальные расчетные уровни транспортной вибрации на несущих конструкциях двух секций строящегося корпуса ЖК *меньше предельно допустимых значений* по СН-2.2.4/2.1.566-96:

- при исходных вибрационных воздействиях, соответствующих измеренным на сваях секции – на 7,3 дБ при среднеоктавных частотах 31,5 Гц;

- при вибрационных воздействиях, измеренных на ростверке, горизонтальные и вертикальные компоненты на перекрытии последнего этажа приближаются снизу к предельно допустимому уровню на более низких частотах для среднеоктавной частоты 8,0 Гц (меньше на 4,27 дБ).

Реализованную в работе расчетно-экспериментальную (точнее – натурно-расчетную) методику можно рекомендовать для анализа вибрационного состояния широко класса объектов строительстве в зоне значимой транспортной вибрации.

**6. Расчетные исследования динамических характеристик, НДС и прочности несущих и фасадных конструкций высотного многофункционального жилого комплекса «Дирижабль» (г.Москва) с учетом фактических характеристик бетона, реальной геометрии и усиления возведенных (ПК ANSYS, ОМ СНИИ Железобетон).**

Многopараметрические расчетные исследования высотного комплекса, выполненные на подробных пространственных динамических КЭ-моделях (до 4 млн. степеней свободы) в

обоснование разработки адекватной системы инструментального мониторинга, представлены в статье [6]. Рекомендуются внедрить предложенную комплексную расчетно-экспериментальную методику для динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий на стадиях их строительства и эксплуатации. При этом требуют дальнейшего обоснования и развития как методы измерений, так и численные процедуры параметризации и адаптации-калибровки КЭ-моделей (наиболее перспективным представляется решение некорректных обратных задач идентификации с регуляризацией по А.Н. Тихонову).

**7. Уточненный трехмерный физически нелинейный КЭ-анализ НДС, статической и циклической прочности наиболее нагруженных и сложно решенных конструктивных узлов покрытий аэровокзального терминала "Внуково" и футбольного стадиона "Спартак" (ПК ANSYS).**

Выполненными расчетами с учетом пластического деформирования металла (ассоциированный закон течения с кинематическим упрочнением) и контактных взаимодействий установлено, что при соблюдении принятых параметров проекта (геометрия, свойства материалов и соединений и др.):

- статическая прочность наиболее нагруженных узлов обеспечена с "комфортным" запасом, т.к. средние по характерным сечениям труб, фасонки и др. элементов расчетные упругие напряжения существенно ниже допускаемых;

- циклическая прочность (долговечность), определенная по "передовой" методике Норм ПНАЭ Г-7-002-86 [15], также обеспечена со значительным запасом – при максимальных расчетных пластических деформациях не более 0,018 (0,18%) и амплитудах условных упругих расчетных напряжений не выше 300 МПа допускаемое число полных циклов "фоновая нагрузка–максимальный снег" превышает 2 000.

**8. Расчетное обоснование НДС и армирования железобетонных конструкций санно-бобслейной трассы (СБТ) при статических, температурных и сейсмических воздействиях и инерционных нагрузках от спортивных снарядов (ПК ANSYS, Лира, ОМ СНИИ Железобетон).**

Анализ результатов показал в целом ожидаемую картину распределения параметров НДС в несущих конструкциях виражей трассы СБТ. Сравнительный анализ параметров НДС и динамических характеристик/реакций несущих конструкций СБТ, полученных по альтернативным КЭ-моделям и программным комплексам ANSYS и Лира, позволяет сделать вывод о достоверности критериальных параметров, определяющих прочность железобетонных конструкций.

**9. Комплексное обоснование ветровых нагрузок, НДС, прочности и устойчивости системы "свайное основание - ж/б конструкции фундамента, стилобата и трибун (с преднапряженным "мостом" над выкатным полем) - металлоконструкции стационарной и раздвижной крыши" и наиболее ответственных узлов-элементов строящегося футбольного стадиона "Зенит" (С-Петербург) с использованием ПК ANSYS, ОМ СНИИ Железобетон.**

Анализ единой суперэлементной модели и моделей подсистем показал в целом ожидаемую картину распределения параметров НДС и динамических характеристик несущих ж/б и металлических конструкций стадиона, в частности:

- слабое влияние податливости опорной подсистемы "свайное основание – ж/б конструкции стилобата и чаши" на статическое состояние, динамику и устойчивость подсистемы "металлоконструкции крыши", позволяющее исследовать последнюю в рамках сепаратной подмодели;
  - отсутствие значимых эффектов геометрической нелинейности в деформировании металлоконструкций покрытия
- Установлено, что при соблюдении принятых или скорректированных по результатам рас-

четов параметров проекта (геометрия, свойства материалов и соединений, величины и сочетания нагрузок и воздействий, реализация подтвержденных расчетами мероприятий по усилению и/или изменению условий опирания конструкций ростверка, стилобата, моста, чаши и покрытия):

- состояние железобетонных конструкций удовлетворяет нормативным критериям несущей способности (деформативности, прочности и устойчивости) и зыбкости трибун;
- состояние несущих металлических конструкций крыши (стационарной и раздвижной), включая сложное трехмерное состояние нагруженных узлов, удовлетворяет нормативным критериям несущей способности (деформативности, прочности и устойчивости) при рассмотренных основных сочетаниях нагрузок и воздействий;
- устойчивость несущей системы стационарной крыши против прогрессирующего обрушения обоснована выполненными расчетами в нелинейной постановке для 3-х рассмотренных сценариев инициирующего локального разрушения.

**10. Апробация методики динамического синтеза подконструкций (в сопоставляемых вариантах фиксированной, свободной и "смешанной" границ) на системе «грунтовое основание – строительные конструкции – оборудование – трубопроводы» реакторного отделения АЭС с ВВЭР (ПК СТАДИО, ANSYS, ABAQUS).**

Ожидаемый существенный эффект (безопасность и экономичность конструктивных решений) состоит в внедрении в практику проектирования и эксплуатации численных методик и адекватных моделей пространственных систем АЭС, реализованных в программных комплексах, за счет рассмотрения совместной работы связанных подсистем в единой суперэлементной модели при возможности независимой разработки моделей отдельных подсистем.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В работах, результаты которых использованы в статье, деятельное участие принимали и внесли существенный вклад в их выполнение сотрудники ЗАО НИЦ СтаДиО (И.Н. Афанасьева, Ю.Н. Боровых, Г.А. Воронова, Д.С. Дмитриев, А.Л. Потапенко, Р.Е. Унгаров) и НОЦ КМ МГСУ (П.А. Акимов, В.В. Вершинин, Т.Б. Кайтуков, Ф.М. Котов, С.Б. Пеньковой, О.Н. Петряшев, С.Н. Петряшев, С.В. Щербина).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем “сооружение-основание”. Труды ЦНИИСК им.Кучеренко, 1990г., с.175-180.
2. **Белостоцкий А.М.** Прогнозное математическое моделирование состояния и техногенной безопасности ответственности объектов и комплексов мегаполиса. Вестник МГСУ, 3/2006г., с. 20–61.
3. **Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю., Аул А.А., Островский К.И.** Верификация и аттестация программного комплекса АСТРА-АЭС. Новый уровень прочностных расчетов трубопроводных систем // Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 33-40.
4. **Белостоцкий А.М., Аул А.А., Унгаров Р.Е., Шевинский П.Е.** Конечноэлементное моделирование НДС подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна. // Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 48-54.
5. **Белостоцкий А.М., Аул А.А., Нагибович А.И.** Расчетно-экспериментальное моделирование вибрационного состояния несущих конструкций многоэтажных зданий, вызванного движением поездов метрополитена // Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 40-48.
6. **Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Аул А.А., Нагибович А.И.** Адаптируемые КЭ-модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering Volume 8, Issue 4. 2012.
7. Семейство программных комплексов АСТРА-НОВА (версия АСТРА-НОВА'2011). Общее описание. Руководство пользователя. М. ЗАО НИЦ СтаДиО, 2011.
8. Программный комплекс СТАДИО. Общее описание. Руководство пользователя. М. ЗАО НИЦ СтаДиО, 1999-2012.
9. **Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.** SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD.— М.: Издательство АСВ, 2004.— 592 с.
10. ПК Лира. Версия 9.6. Общее описание. Руководство пользователя. Киев, 2009.
11. ANSYS 14.0 User's Guide. Canonsburg, 2011.
12. Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). М., ЗАО НИЦ СтаДиО, ГОУ ВПО МГСУ, 2009 г. Свидетельство РААСН о верификации ПС № 02/ANSYS/2009 от 10.07.2009.
13. ANSYS CFX 14.0. User's Guide. Canonsburg, 2011.
14. Abaqus Analysis User's Manual. Dassault Systèmes, 2010.
15. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. ПНАЭ Г-7-002-86. М., Энергоатомиздат, 1989

Численное моделирование нагрузок и воздействий, расчетное обоснование НДС, прочности и устойчивости конструкций, зданий и сооружений. Опыт 2010 – 2012 гг.

Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Russia, phone/fax: +7 (495) 737-40-81;  
e-mail: stadyo@stadyo.ru

Alexander I. Nagibovich, Senior engineer of Research Center StaDyO, Moscow;  
Russia, phone/fax: +7 (495) 737-40-81;  
e-mail: stadyo@stadyo.ru

Дубинский Сергей Иванович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник НОЦ КМ ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; E-mail: sergdubpodlipki@mail.ru, niccm@mgsu.ru

Аул Андрей Андреевич, ведущий инженер ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», аспирант Московского энергетического института (МЭИ (ТУ)), Россия, г. Москва; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Нагибович Александр Игоревич, старший инженер ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», Россия, г. Москва; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Островский Константин Игоревич, старший инженер ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», Россия, г. Москва; тел/факс: +7 (495) 737-40-81; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Alexander M. Belostotsky, DSc, Professor, General Director of Research Center StaDyO, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: stadyo@stadyo.ru , niccm@mgsu.ru

Sergey I. Dubinsky, PhD, Ass. professor, Senior researcher of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337; Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru

Andrey A. Aul, Leading engineer of Research Center StaDyO, Moscow; Russia, phone/fax: +7 (495) 737-40-81; e-mail: stadyo@stadyo.ru

Konstantin I. Ostrovsky, Senior engineer of Research Center StaDyO, Moscow;

# ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ С ОДНИМ УЗЛОВЫМ ДИАМЕТРОМ КРУГЛЫХ ОРТОТРОПНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

*В.Р. Гросман*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Получено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях с одним узловым диаметром круглых ортотропных и изотропных пластин. Эти случаи описываются дифференциальными уравнениями четвёртого порядка с переменными коэффициентами, не распадающимися на два сопряжённых дифференциальных уравнения второго порядка. Для получения результатов используется решение Нильсена. Найденное решение получено в замкнутом виде и выражено в функциях Бесселя.

**Ключевые слова:** собственные колебания, ортотропные и изотропные круглые пластины, функции Бесселя

## PROBLEM OF NATURAL VIBRATIONS WITH ONE NODAL DIAMETER OF CIRCULAR ORTHOTROPIC AND ISOTROPIC PLATES

*Valery R. Grosman*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The paper gives the analytical solution of the problem of natural oscillations with one nodal diameter of circular orthotropic and isotropic plates. The cases under study are described by differential equations of the fourth order with variable coefficients. Here the resolving equation cannot be decomposed into two conjugated equations of the second order with variable coefficients. Nielsen's solution is used. The obtained solutions are given in the closed form in terms of Bessel functions.

**Key words:** natural vibrations, circular orthotropic and isotropic plates, Bessel functions

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим собственные колебания с одним узловым диаметром круглых ортотропных пластин. Приведём разрешающее уравнение с учетом сопротивления среды:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (M_r r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} M_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial (M_{r\theta} r)}{\partial r} - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\gamma\beta}{g} h \frac{\partial w}{\partial t} + rq = 0 \quad (1)$$

Здесь  $g$  - ускорение силы тяжести,  
 $\gamma$  - удельный вес,

$h$  – толщина пластины;  
сопротивление среды при колебаниях принимается пропорциональным первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности  $2\beta$ .

Закон Гука для ортотропной пластины, выражающий зависимость компонентов деформации  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\gamma_{r\theta}$  от компонентов напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{r\theta}$ , записывается в форме

$$\varepsilon_r = \frac{1}{En_2} (n^2 \sigma_r - \nu \sigma_\theta),$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{En_2}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_r),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G_{r\theta}}.$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  - приведённые модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$G_{r\theta}$  - модуль сдвига для направлений  $r$  и  $\theta$  (главных).

Параметр

$$n^2 = n_1 n_2$$

определяется из следующих соотношений:

$$E_r = \frac{E}{n_1}; \quad E_{\theta} = En_2; \quad \nu_r = \frac{\nu}{n^2}; \quad \nu_{\theta} = \nu. \quad (2)$$

Для изотропной пластины  $n_1 = n_2 = 1$ .

Зависимость между моментами и прогибом представим в следующем виде:

$$M_r = -Dn_2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w \right) \right],$$

$$M_{\theta} = -Dn_2 \left[ \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w \right) \right], \quad (3)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -Dn_2 c_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right),$$

где 
$$D = \frac{Eh^3}{12(n^2 - \nu^2)}$$

– приведённая цилиндрическая жёсткость пластины при изгибе;

$$c_1 = 2(n^2 - \nu^2)G_{r\theta}/E.$$

Заменяя в уравнении (1) моменты через прогиб  $w$  по формулам (3), получим уравнение, описывающее динамический изгиб с одним узловым диаметром круглой ортотропной пластины:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{(2(c+\nu)+n^2)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{(2(c+\nu)+n^2)}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{(2(c+\nu)+n^2)}{r^4} w \right] + \frac{\gamma}{gn_2} h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\gamma\beta}{gn_2} h \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{q}{n_2}; \quad (4)$$

здесь  $c = c_1/n_2$ .

Для пластины, изготовленной из изотропного материала,

$$c = 1 - \nu.$$

Граничные условия для  $w$  при  $r = const$  могут быть записаны в одной из следующих форм:

а) контур жёстко заделан

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (5)$$

б) контур свободно опёрт

$$w = 0; \quad M_r = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w \right) = 0 \quad (6)$$

в) контур находится под действием изгибающего момента интенсивности  $M$  и поперечной силы интенсивности  $Q$

$$\begin{cases} M_r = M \text{ или } \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w \right) = -\frac{M}{Dn_2}, \\ Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = Q \end{cases} \quad (7)$$

Начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad w = \varphi(r, \theta); \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \chi(r, \theta), \quad (8)$$

где  $\varphi(r, \theta)$  - заданный прогиб в точке с координатами  $r, \theta$ , а  $\chi(r, \theta)$  - заданная начальная скорость в той же точке.

## 2. КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

В соответствии с теорией колебаний круглых пластин [1] общее решение уравнения (4) можно записать в виде:

$$w_{1s} = \left[ (A_{1s} \cos \theta + A'_{1s} \sin \theta) \cos p_{1s} t + (B_{1s} \cdot \cos \theta + B'_{1s} \cdot \sin \theta) \cdot \sin p_{1s} t \right] \cdot W_{1s}, \quad (9)$$

где  $p_{1s}$  - круговая частота свободных колебаний,  $W_{1s}$  - функция только  $r$ ;  $A_{1s}, A'_{1s}, B_{1s}, B'_{1s}$  - постоянные, определяемые из начальных условий.

Далее будем пренебрегать сопротивлением окружающей среды.

Подставляя (9) в (4), получим следующее разрешающее дифференциальное уравнение для  $W_{1s}$ :

$$x^4 \cdot \frac{d^4 W_{1s}}{dx^4} + 2x^3 \cdot \frac{d^3 W_{1s}}{dx^3} - (2(c+\nu) + n^2)x^2 \frac{d^2 W_{1s}}{dx^2} + (2(c+\nu) + n^2)x \cdot \frac{dW_{1s}}{dx} - (2(c+\nu) + n^2)W_{1s} - \frac{\gamma}{gn_2} \frac{h}{D} p_{1s}^2 x^4 W_{1s} = 0. \quad (10)$$

В литературе известны аналитические решения близких задач о собственных колебаниях круглых пластин, сделанных из изотропного материала; в частности, следует назвать монографию [2]. В этих случаях результаты выражены в функциях Бесселя. Указанные выше задачи описываются дифференциальными уравнениями четвёртого порядка с переменными коэффициентами, которые распадаются на два сопряжённых дифференциальных уравнения второго порядка, каждое

из которых интегрируется в функциях Бесселя.

Поставленная в настоящей работе задача о собственных колебаниях с одним узловым диаметром круглой пластины из ортотропного материала также описывается дифференциальным уравнением четвёртого порядка с переменными коэффициентами (10). Проведённое исследование показало, что данное уравнение ни при каких значениях параметров не распадается на два уравнения второго порядка. Следовательно, классическая методика, применявшаяся ранее в литературе, здесь не подходит.

Для получения аналитического решения воспользуемся результатами Нильсена. Ранее с помощью уравнения Нильсена были получены решения следующих задач: об осесимметричной деформации круглой пластины со степенным законом изменения жёсткости, лежащей на упругом винклеровском основании [3]; о собственных осесимметричных колебаниях круглых пластин переменной толщины [4] и об антисимметричной деформации ортотропных круглых пластин на винклеровском основании [5].

Приведём уравнение Нильсена [6]:

$$x^4 \frac{d^4 w}{dx^4} + A_3 \cdot x^3 \frac{d^3 w}{dx^3} - A_2 x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + A_1 x \frac{dw}{dx} + A_0 w = 0, \quad (11)$$

где

$$A_3 = 6 - 4a - 4c,$$

$$A_2 = 2(a^2 - \mu^2 c^2) + 4(a+c-1)^2 + 4(a-1)(c-1) - 1,$$

$$A_1 = [2(\mu^2 c^2 - a^2) - (2a-1)(2c-1)](2a+2c-1),$$

$$A_0 = (a^2 - \mu^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2) - b^4 c^4 x^{4c}.$$

Общее решение (11) было дано Нильсеном; оно имеет вид:

$$w = x^a [C_1 J_\mu(u) + C_2 Y_\mu(u) + C_3 I_\mu(u) + C_4 K_\mu(u)], \quad (12)$$

здесь  $u = bx^c$ ;

$J_\mu$ ,  $Y_\mu$ ,  $I_\mu$  и  $K_\mu$  - функции Бесселя (соответственно цилиндрические функции первого и второго рода; модифицированная функция Бесселя; функция Макдональда).

Сопоставим коэффициенты однородного дифференциального уравнения (10) с коэффициентами уравнения (11) [3] – [5]; в результате получим

$$\begin{cases} 6-4a-4c=2; \\ 2(a^2-\mu^2c^2)+4(a+c-1)^2+ \\ 4(a-1)(c-1)-1=2(c+\nu)+n^2; \\ [2(\mu^2c^2-a^2)-(2a-1)(2c-1)]\cdot(2a+2c-1)= \\ =2(c+\nu)+n^2; \\ (a^2-\mu^2c^2)(a^2+4ac+4c^2-\mu^2c^2)- \\ -b^4c^4x^{4c}=-[2(c+\nu)+n^2]-\frac{\gamma}{gn_2}\frac{h}{D}p_{1s}^2x^4. \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда определим значения параметров функций Бесселя, при которых получаются решения:

$$c=1; a=0; b=\sqrt[4]{\frac{\gamma}{gn_2}\frac{h}{D}p_{1s}^2}. \quad (14)$$

Введём обозначение:

$$A=2(c+\nu)+n^2.$$

Тогда из последней строки (13) получим:

$$A=\mu^2(4-\mu^2); \mu^4-4\mu^2+A=0.$$

Найдем параметр  $\mu$ , решая это биквадратное уравнение:

$$\mu_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-A}}. \quad (15)$$

Таким образом, решение разрешающего дифференциального уравнения (10), описывающего свободные колебания с одним уз-

ловым диаметром круглой ортотропной пластины, выражается в функциях Бесселя и имеет следующий вид:

$$W_{1s}=B_1ber_\mu(bx)+B_2bei_\mu(bx)+B_3ker_\mu(bx)+ \\ +B_4\cdot kei_\mu(bx), \quad (16)$$

где параметры функций Бесселя  $b$  и  $\mu$  определяются выражениями (14) (15).

### 3. КОЛЕБАНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим частный случай свободных колебаний с одним узловым диаметром круглой пластины из изотропного материала. Разрешающее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$x^4\frac{d^4W_{1s}}{dx^4}+2x^3\frac{d^3W_{1s}}{dx^3}-3x^2\frac{d^2W_{1s}}{dx^2}+ \\ +3x\frac{dW_{1s}}{dx}-3W_{1s}-\frac{\gamma}{g}\frac{h}{D}x^4p_{1s}^2W_{1s}=0. \quad (17)$$

Сопоставляя коэффициенты однородного дифференциального уравнения (17) с коэффициентами уравнения Нильсена (11), получим, что при соотношениях параметров

$$c=1, a=0, b=\sqrt[4]{\frac{\gamma}{g}\frac{h}{D}p_{1s}^2}$$

решение также выражается в функциях Бесселя и имеет вид (16).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коваленко А.Д.** Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
2. **Корнев Б.Г.** Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 458 с.

3. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины. // Вестник МГСУ. №8, 2011, с.156-159.
4. **Гросман В.Р.** Собственные колебания круглых ортотропных пластин переменной толщины. Решения в функциях Бесселя. // Строительная механика и расчёт сооружений. №3, 2012, с.52-54.
5. **Гросман В.Р.** Некоторые вопросы статики круглых изотропных и ортотропных пластин. // Вестник МГСУ. №7, 2012, с. 65-68.
6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1968. – 703 с.

---

Гросман Валерий Романович. Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: ipm@mgsu.ru

Valery R.Grosman, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: ipm@mgsu.ru

## КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

*Джинчвелашвили Г.А., Колесников А.В., Бондарь Н.М.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Приводится критический анализ современной теории сейсмостойкости и рассмотрены перспективы ее развития. Доказывается необходимость переосмысления понятия сейсмостойкости на базе инкрементальной теории, что дает возможность исследования геометрически, физически и конструктивно нелинейных систем.

**Ключевые слова:** динамическая система, сооружение, теория сейсмостойкости, физическая и геометрическая нелинейность, нестационарное сейсмическое воздействие, расчетная динамическая модель сооружения, разрушительное землетрясение

## THE CRITICAL ANALYSIS AND PROSPECTS OF DEVELOPMENT OF THE MODERN THEORY OF SEISMIC STABILITY OF CONSTRUCTIONS

*Guram A. Dzhinchvelashvili, Alexey V. Kolesnikov, Nina M. Bondar*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The critical analysis of the modern theory of seismic stability is resulted and prospects of its development are considered. Necessity of reconsideration of concept of seismic stability on base инкрементальной is proved to the theory that gives the chance researches geometrically, physically and structurally nonlinear systems.

**Key words:** dynamic system, a construction, the seismic stability theory, physical and geometrical nonlinearity, non-stationary seismic influence, settlement dynamic model of a construction, destructive earthquake

В последнее время проблемы расчета ответственных зданий и сооружений на сейсмические воздействия приобрела особую актуальность.

Инженерный анализ последствий сильных землетрясений показывает, что качественная картина повреждений и разрушений даже простых сооружений не может быть адекватно объяснена современной теорией сейсмостойкости.

Существующая теория сейсмостойкости - это борьба идей. Здания разрушаются при землетрясениях, несмотря на то, что их проектируют по нормам. Специалисты - сейсмологи и механики разрабатывают свои теории,

в каждой из которых есть свои плюсы и минусы, предлагая в них новые подходы к этой проблеме. Но есть приверженцы традиционной теории сейсмостойкости, которые во многих вопросах с ними не согласны.

Система сейсмобезопасности страны (СБС) должна обеспечивать сейсмостойкость вновь строящихся зданий и сооружений; сейсмостойкость существующего фонда зданий и сооружений, сейсмостойкость зданий и сооружений, находящихся на площадках, сейсмичность которых на последних картах сейсмического районирования повышена на один-два балла. Неотъемлемой частью СБС должен быть прогноз поведения зданий и

сооружений при землетрясениях различной интенсивности.

Методической базой, позволяющей реализовать задачи сейсмобезопасности, являются нормы проектирования в сейсмических районах [1].

Несколько причин вызывает необходимость пересмотра действующих норм проектирования в сейсмических районах.

**1) действующие нормы были утверждены в 1981 г.** За это время на территории страны произошло несколько сильных землетрясений (Газли, Кайраккум, Молдавия, Армения, Курилы, Сахалин), которые позволили в какой-то мере оценить действенность рекомендаций существующих норм.

Землетрясения последних десятилетий отчетливо продемонстрировали, что здания одного типа не обладают достаточной сейсмостойкостью (например, здания со стенами из малопрочных материалов, каркасные здания и др.), а другие обладают весьма высокой степенью сейсмостойкости (крупнопанельные, монолитные и др.). Расчеты на основе действующих норм не могут объяснить этот факт.

**2) Основные допущения, заложенные в [1] позволили представить основную расчетную модель здания в виде консольного стержня для всех без исключения конструкций, независимо от их размеров:**

- перекрытие представлено в виде абсолютно жесткого диска;
- величина воздействия по длине здания не меняется (равномерно).
- два наиболее невыгодных направления действия сейсмической волны - поперек и вдоль здания;
- рассматриваются в основном горизонтальные колебания.
- для любых типов землетрясений принимается единый обобщенный график коэффициента динамичности  $\beta$ .

Однако анализ последствий разрушительных землетрясений последних десятилетий ставит перед исследователями задачу совершенствования указанных выше моделей,

введением в расчет новых факторов, влияющих на прочность сооружения. Роль перекрытий в повышении сейсмостойкости до настоящего времени недооценивается, однако картина повреждений зданий отчетливо указывает на важную роль перекрытий в распределении сейсмического воздействия между несущими вертикальными элементами.

**3) необходимость реализовать ряд мероприятий, обеспечивающих сейсмобезопасность страны, которая, по нашему мнению, должна учитывать новую концепцию сейсмостойкого строительства.**

Эта концепция представляет собой группу основных положений, позволяющих оценить и обеспечить сейсмостойкость зданий и сооружений, включая: цели проектирования (в том числе формулировку понятия "сейсмостойкость"); критерии достижения названных целей (критерии сейсмостойкости); модели сейсмических воздействий; модели поведения здания при землетрясении (модель процесса перехода в предельное состояние); методы расчетов и их критерии.

Итак, есть проблема определения, что такое сейсмостойкость сооружения.

Есть проблемы и в моделях поведения здания при землетрясении. Ведь спектральный метод априори настроен на стационарности расчетной динамической модели. Нельзя же всерьез воспринимать коэффициент  $k_1$  в качестве критерия перехода системы в предельное состояние.

**4) проблема задания внешнего воздействия.**

Сейсмическое воздействие представляет собой нестационарный случайный процесс. Об этом было известно давно. На это обращали внимание крупнейшие ученые, такие как, Болотин В.В., Николаенко Н.А., Корчинский И.Л., Жаров А.М. и др. В свое время в связи со слабой развитостью вычислительной техники, были сделаны известные упрощения, которые и легли в основу спектрального метода теории сейсмостойкости.

Сейсмическое воздействие представлялось в виде стационарного случайного эргодического процесса. В рамках этих и других допущений, к этим процессам была применена корреляционная теория, которая и легла в основу современной спектральной теории сейсмостойкости.

Дело в том, что сейсмические перемещения вообще не являются колебаниями, и тем более гармоническими. При гармонических колебаниях должны были бы происходить возвратно-поступательные перемещения грунта, изменяющиеся по закону синуса или косинуса (как это происходит при колебаниях зданий). На самом же деле землетрясения создают множество хаотичных толчков, т.е. скачкообразных перемещений, которые вызваны происхождением наиболее опасных поверхностных волн сжатия в грунте. Во фронте этих волн скачком появляется скорость перемещения грунта, а за волной она исчезает. Ясно, что попадание собственных колебаний здания в резонанс с хаотичными толчками весьма маловероятно. Если еще учесть, что при пластических деформациях и начальных разрушениях здание сразу "уходит" от резонанса, но при этом никак не может уйти от опасного разрушающего воздействия волн среза, то станет ясно, что вероятность разрушения от действия сейсмических инерционных сил близка к нулю.

По многочисленным наблюдениям большинство сейсмических разрушений зданий происходит сразу после первых наиболее мощных поперечных толчков. Результатом таких толчков, которые, конечно же, не успевают раскачать здание, т.е. вызвать в нем появление опасных сил инерции, является почти мгновенный срез колонн или стен здания, вследствие чего происходит разрушение здания до попадания его в резонанс.

Известно, что при землетрясениях появлению инерционных сил всегда предшествует появление в вертикальных элементах зданий волн поперечного сдвига, вызванных горизонтальными толчками, т.е. толчки и сдвиго-

вые волны первичны, а инерционные силы - вторичны.

Логично было бы считать именно эти толчки и волны сдвига одной из главных причин сейсмического разрушения здания. Тем не менее, единственной общепринятой причиной сейсмических разрушений сооружений до сих пор считаются инерционные силы.

**Итак, сами уравнения движения, описывающие колебания сооружений при сейсмических воздействиях, могут быть подвергнуты сомнению. Расчетные динамические модели сооружений являются нестационарными, следовательно, и расчетные математические модели должны быть нестационарными.**

С нашей точки зрения современная формулировка теории сейсмостойкости сооружений должна включать:

**Во-первых**, формулировку понятия "сейсмостойкость" здания или сооружения. Это понятие включает в себя цели, которые необходимо достичь в результате проектирования и строительства, и условия, при которых эти цели должны достигаться.

Цели: состояние здания после землетрясения должно допускать его дальнейшую эксплуатацию с некоторыми ограничениями (например, в жилых домах без выселения жильцов, в производственных зданиях - без остановки технологического процесса). При этом, конечно, не исключен последующий ремонт некоторых элементов здания.

Условия: цели достигаются при воздействиях, параметры которых указаны на картах сейсмического районирования и в нормах. Таким образом, при других условиях, когда воздействие отличается от прогнозируемого, цели проектирования в сейсмических районах не достигаются.

**Во-вторых**, в проекте норм необходимо предусмотреть критерии сейсмостойкости. Это один из основных вопросов теории и практики сейсмостойкого строительства. Критерии необходимы не только при проектировании, но и при оценке сейсмостойкости существующих зданий, разработке рекомен-

даций по повышению сейсмостойкости зданий, поврежденных землетрясениями, при анализе эффективности систем сейсмозащиты и т.д.

При анализе работы конструкций в упругой стадии деформирования обычно используются "силовые" критерии типа: "наибольшие усилия, возникающие в элементах конструкций при сейсмических воздействиях, должны быть равны или менее несущей способности элемента".

В упругопластической стадии деформирования конструкций, при которой происходит перестройка структуры сооружения и изменение физико-механических характеристик его элементов, силовые критерии уже не могут использоваться. Здесь нужны критерии деформационные.

**В-третьих**, важным положением теории сейсмостойкости должны быть рекомендации о необходимости учета закономерностей процесса перестройки структуры сооружения при сейсмических воздействиях высокой интенсивности.

**В-четвертых**, рассматриваются сейсмические воздействия, которые следует учитывать при проектировании. В частности, факторы непосредственной и дополнительной сейсмической опасности. Предлагается учитывать уровни воздействия, их спектральный состав, эффективную продолжительность колебаний, направление вектора сейсмического воздействия.

В определенных случаях целесообразно учитывать возможность проявления отдельных импульсных движений грунта, а также волновой характер сейсмического поля основания.

**В-пятых**, методы расчета на сейсмические воздействия должны допускать возможность оценки критериев сейсмостойкости. Иными словами, в результате расчетов должны быть определены деформационные параметры для всех несущих элементов сооружения и их соединений. Кроме того, должна быть обеспечена возможность сравнения полученных параметров с их предельно допустимыми

значениями, соответствующими предельному состоянию сооружения в целом.

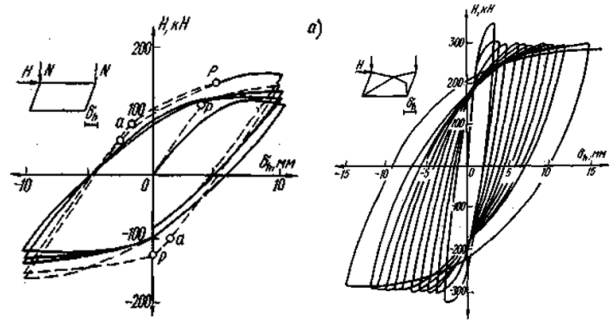


Рис. 1а Различные аспекты учета нестационарности расчетной динамической модели сооружений: физически-нелинейная работа материала.

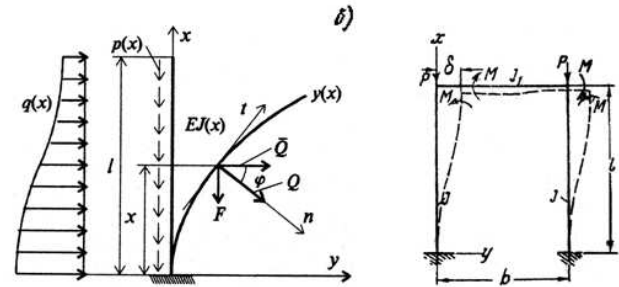


Рис. 1б Различные аспекты учета нестационарности расчетной динамической модели сооружений: геометрически-нелинейная работа конструкции.

В самой общей постановке дифференциальные уравнения движения при сейсмических колебаниях должны записываться в приращениях, с использованием инкрементальной теории пластичности [2, 3]:

$$[M]\{\Delta\ddot{q}\} + [D]\{\Delta\dot{q}\} + [K + K_U + K_\sigma + K_{n_1} + K_{n_2}]\{\Delta q\} = \{\Delta P\}, \quad (1)$$

где  $K, K_U, K_\sigma, K_{n_1}, K_{n_2}$  - матрица жесткости, матрицы начальных усилий и перемещений, матрицы геометрической жесткости, соответственно.

Вышеприведенным условиям отвечает система уравнений (1), которая позволяет рассчитывать системы с учетом физической не-

линейности (рис. 1а), геометрической нелинейности (возможность учета  $P-\Delta$  эффекта) (рис. 1б), нестационарности РДМ (с учетом элементов активной сейсмозащиты).

В результате динамического расчета сооружения на действие разрушительного землетрясения необходимо установить возможность прогрессирующего разрушения или малоциклового усталости элементов несущих конструкций. Однако поведение конструкции при нагружении ее за пределы упругости зависит не только от мгновенных значений перемещений и ускорений элементов, но и от всей истории нагружения, в частности, от напряженно-деформированного состояния сооружения перед приложением сейсмического воздействия. Поскольку такое состояние нам не известно, то на первый взгляд в принципе оказывается невозможным предсказать поведение сооружения при разрушительном землетрясении. Исследования последних лет показывают, что во многих случаях, хотя и нельзя определить истинное напряженно-деформированное состояние конструкции, можно прогнозировать возможность ее разрушения.

Из изложенного следует, что принципиальные вопросы динамического расчета сооружений на сейсмические нагрузки требуют серьезной проработки и исследований. В связи с этим динамические расчеты в полной постановке выполняются в настоящее время лишь при анализе сейсмостойкости наиболее ответственных объектов: больших плотин, АЭС, взрывоопасных производств и т. п.

Для других сооружений применение динамических расчетов может носить пока вспомогательный характер. Весьма важно их применение при оценке сейсмостойкости инженерных сооружений и систем специальной сейсмозащиты, поскольку в этих случаях применение нормативной системы расчетных коэффициентов, отработанной на объектах массовой застройки, не является обоснованным. Во всех случаях применения динамических методов расчета их результаты должны рассматриваться совместно с ре-

зультатами нормативных расчетов (если такие возможны) и материалами экспериментальных исследований.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

- 1) Необходимо продолжить исследования по разработке методики задания сейсмического воздействия в виде нестационарного случайного процесса.
- 2) Следует модифицировать спектральный метод теории сейсмостойкости.
- 3) Необходимо развивать нелинейные динамические методы расчета сооружений, позволяющие получать решения во временной области с учетом физической, геометрической и конструктивной нелинейностей.
- 4) Следует объединить усилия специалистов для выработки единых подходов по совершенствованию нормативной базы, которая должна отвечать современному уровню развития теоретических методов и возможностей вычислительной техники.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **СНиП П-7-81\*** Строительство в сейсмических районах. М.: ЦНС, 2003, - 48 с.
2. **Джинчвелашвили Г.А., Колесников А.В.** Расчет каркасных зданий на сейсмические воздействия с учетом развития неупругих деформаций // Исследования по теории сооружений, Вестник ЦНИИСК им. Кучеренко №1 (XXVI), М. 2009, с. 194-200.
3. **Джинчвелашвили Г.А., Колесников А.В.** Развитие спектральной теории в прикладных задачах теории сейсмостойкости // Сейсмостойкое строительство и безопасность сооружений №3 М. ВНИИТПИ, 2009, с. 21-24.

---

Джинчвелашвили Гурам Автандилович, к.т.н., проф. кафедры «Соппротивление материалов» ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный универ-

ситет», Россия, Москва, Ярославское ш. 26, gugar2004@yandex.ru

Колесников Алексей Викторович, аспирант кафедры «Сопротивление материалов» ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, Москва, Ярославское ш. 26, heallex@yandex.ru

Бондарь Нина Михайловна, аспирантка кафедры «Сопротивление материалов» ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, Москва, Ярославское ш. 26, lion1987@bk.ru

# ПОСТРОЕНИЕ АДЕКВАТНОЙ РАСЧЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СООРУЖЕНИЯ ПУТЕМ ПРОВЕДЕНИЯ ИДЕНТИФИКАЦИОННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

*Джинчвелашвили Г.А.<sup>1</sup>, Соснин А.В.<sup>2</sup>, Колесников А.В.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup>Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Авторы на основе экспериментальных исследований строительных конструкций завода по производству ГКЛ в пгт. Новонукутский Иркутской области, приводят методику экспериментально-теоретического определения импульсной передаточной функции, зная которую, можно определить все основные динамические характеристики системы.

**Ключевые слова:** сейсмостойкость сооружений, строительная механика, колебания конструкций, затухание, каркасные здания, нормы проектирования

## CONSTRUCTION OF ADEQUATE DESIGN OF THE DYNAMIC MODEL STRUCTURE THROUGH THE IDENTIFICATION EXPERIMENT

*Guram Dzhinchvelashvili<sup>1</sup>, Alexey Sosnin<sup>2</sup>, Alexey Kolesnikov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup>Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Authors on the basis of experimental studies constructions plant GKL in the village Novonukutsky the Irkutsk region, the technique of experimental and theoretical determination of the impulse response, knowing that, you can define all the main dynamic characteristics of the system.

**Key words:** earthquake engineering, structural mechanics, structural movement, decay, frame buildings, design codes

Решение задачи прогноза сейсмического риска включает в себя как мероприятия по оценке фактической сейсмостойкости существующих зданий и сооружений, так и выполнение их антисейсмической защиты. Качественное выполнение проектов сейсмоусиления возможно при условии исчерпывающих сведений о техническом состоянии объекта в целом и его отдельных строительных конструкций. Поскольку учет свойств реальной конструкции возможен лишь с определенной степенью приближения, одной из важных и первоочередных задач при создании математической модели несущей конструкции с использованием современного

вычислительного комплекса является возможность ввода в эту модель тех параметров и свойств, которые позволяют обосновать результаты натурных экспериментов. Выходные данные регистрируются в процессе проведения целенаправленных идентификационных экспериментов, когда пользователь может определить перечень и моменты измерения сигналов, причем некоторые из входных сигналов могут быть управляемыми. Задача планирования экспериментов, таким образом, состоит в том, чтобы, учитывая возможные ограничения, выбрать максимально информативные данные о сигналах системы. В некоторых случа-

ях пользователь может быть лишен возможности влиять на ход эксперимента и должен опираться на данные нормальной эксплуатации.

Многие ведущие специалисты уже давно обратили внимание на импульсную микродинамику, т.е. способ определения динамических характеристик зданий при возбуждении микроколебаний. В качестве источников возбуждения использовали и вибромашину, и взрывы, и афтершоки слабых землетрясений, и оттяжку здания тросом с последующим мгновенным сбросом приложенного усилия. Все эти способы оказались достаточно трудоемкими, не были подкреплены соответствующими теоретическими разработками и не давали надежных результатов. Таким образом, возникает проблема разработки расчетной методики, использующей фактические динамические характеристики. Поэтому дальнейшая разработка теоретических основ идентификационного эксперимента импульсной микродинамики является одной из актуальных задач прогноза сейсмического риска [6, 7, 8]. Появление измерительной, регистрирующей и обрабатывающей аппаратуры современного уровня, сразу найдет широкое применение и в значительной степени снимет остроту стоящей проблемы.

Планирование идентификационного эксперимента включает в себя различные вопросы выбора, например, какие сигналы и когда измерять, с какими сигналами как обращаться. Оно также включает в себя более практические аспекты, такие как:

- чем обусловить формирование сигнала до их дискретизации (выбор предварительных фильтров);
- и как произвести (если можно) улучшение этих свойств впоследствии (например, удалением трендов).

Суть подхода к решению поставленной проблемы в подборе адекватной расчетной динамической модели здания, заключается в приведении ее динамических характеристик

в соответствие с фактическими, полученными при испытаниях.

В работе приводится методика экспериментально-теоретического определения импульсной передаточной функции, зная которую, можно определить все динамические характеристики системы.

Движение сосредоточенных в узлах масс расчетной динамической модели сооружения определяется системой дифференциальных уравнений вида:

$$M \cdot \ddot{y}(t) + D \cdot \dot{y}(t) + R \cdot y(t) = \bar{F}(t). \quad (1)$$

В технических приложениях для описания решений системы уравнений (1) применяют так называемую импульсную переходную характеристику или весовую функцию  $h(t)$  доступные непосредственному измерению. Для этого на вход системы подают специальные тестовые сигналы  $f(t)$ , измеряют выходной сигнал системы и по этой информации строят  $h(t)$ .

С точки зрения теории дифференциальных уравнений (ДУ), построенная таким образом весовая функция  $h(t)$  является частным решением неоднородного уравнения (1). В том случае, если на вход линейной системы подается короткий импульс  $f_D(t)$ , в идеальном случае дельта-функция Дирака  $\delta(t)$ , то весовая функция  $h(t)$  в теории ДУ получила название функции Грина.

Если в результате специальных экспериментов для системы (1) построена функция Грина  $h(t)$ . Тогда в установившемся режиме сигнал выхода линейной системы можно выразить через так называемый интеграл свертки [1, 2, 4, 6, 7, 8]:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau \quad (2)$$

В месте предполагаемого размещения источника волн наносят удар по грунту с известной величиной импульса. Для нанесения удара можно использовать, например, ко-

Построение адекватной расчетной динамической модели сооружения путем проведения идентификационного эксперимента

провую бабу или самоходный кран. Нормировочный множитель определяют из условия

$$\frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_D(\tau) d\tau = 1. \quad (3)$$

При ударе регистрируют колебания грунта в тех местах, где необходимо выполнять прогнозирование ожидаемых колебаний. Зарегистрированные колебания характеризуют импульсную передаточную функцию  $h(t)$  системы, экспериментальное определение которой позволяет учитывать особенности геологического строения площадки.

Далее, по полученным данным, расчетным путем определяют ожидаемые колебания при помощи интегралов Дюамеля или Фурье. К примеру, реакция системы на гармоническое воздействие может быть получена сверткой [1-5]:

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \sin(\alpha\tau) \cdot \tilde{y}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(\alpha\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau + \int_0^t \sin(\alpha\tau) \cdot n(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

Решение исходной системы получается с некоторой погрешностью  $N(t)$ . Очистив решение (4) от шумов, получим истинное решение от гармонического воздействия.

Таким образом, проведя эксперимент в виде сбрасывания груза, можно получить выходные характеристики системы в выбранных точках модели, так же, как и при вибрационных испытаниях.

Приведенная методика была реализована во время экспериментальных исследований строительных конструкций завода по производству ГКЛ в пгт. Новонкутский Иркутской области.

При испытании гипсового завода в точку 1 (рис. 1а) сбрасывался груз весом  $P=2.5$  т с высоты 6 м. На рис. 2 приведены ускорения, записанные в точках 2 и 3, в основании и на уровне покрытия, соответственно. На рис. 3 приведены вычисленные импульсно-

переходные функции основания и на уровне покрытия гипсового завода.

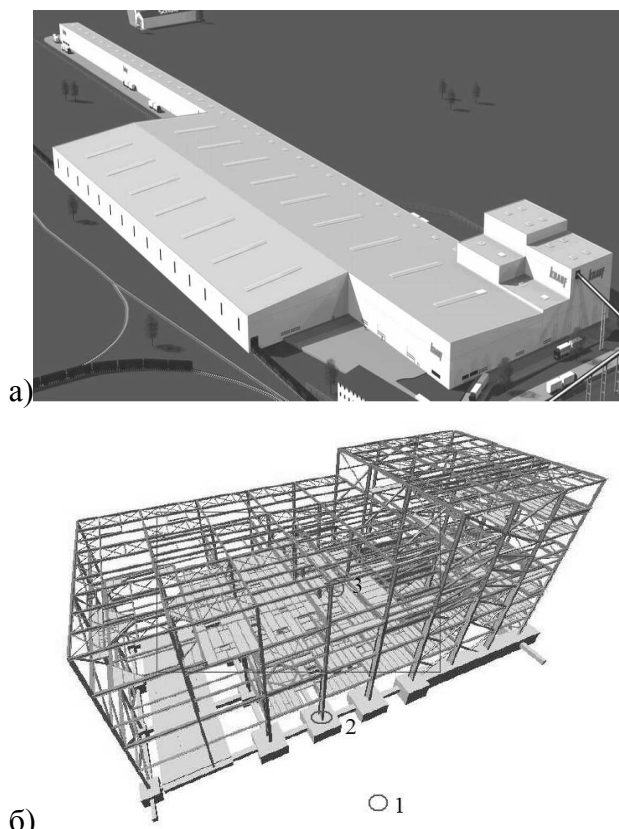


Рис. 1 Конструкции завода по производству гипсокартонных плит (KNAUF) в пгт. Новонкутский Иркутской области: а) общий вид; б) аксонометрический вид расчетной модели гипсового завода

На рис. 4 приведены спектральные кривые для основания и покрытия соответственно. В настоящей работе (в соответствии с нормами по сейсмостойкому строительству) предлагаются и реализованы две схемы определения внутренних усилий от сейсмических нагрузок: спектральная и временная. Согласно I схеме определения внутренних усилий от сейсмических нагрузок принимается расчетная схема модели с определением массы соответствующих частей  $Q_k$  и размещением ее в узлах, где расположены сосредоточенные массы в соответствии с расчетной динамической моделью. По результатам динамических испытаний определяются собственные частоты, эпюры основных форм

колебаний здания, периоды собственных колебаний. Далее по формулам (3-4) [9] с учетом категории грунта и фактических значений периода определяются коэффициенты динамичности для каждой формы колебаний здания.

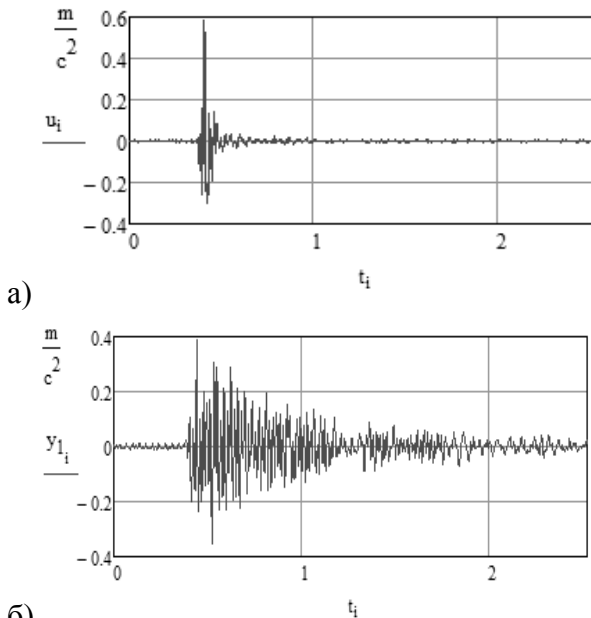


Рис. 2 Ускорения, записанные в точках 2 (а) и 3 (б), в основании и на уровне покрытия, соответственно.

Численные значения форм колебаний -  $X_i(x_k)$  в точках приведения массы определяют либо в результате прямых динамических испытаний, либо теоретически - расчетом по выбранной динамической модели. По полученной форме деформаций (перемещений) в соответствии с формулой (6) из [9] определяются коэффициенты  $\eta_{ik}$ .

Зная фактические значения коэффициентов по формуле (2) из [9] определяется сейсмическая сила в выбранном направлении, приложенная к точке А, в которой сосредоточена масса Q здания.

После определения горизонтальных сейсмических нагрузок дальнейшие расчеты здания ведутся в предположении статического действия сейсмических сил требуемой расчетной интенсивности.

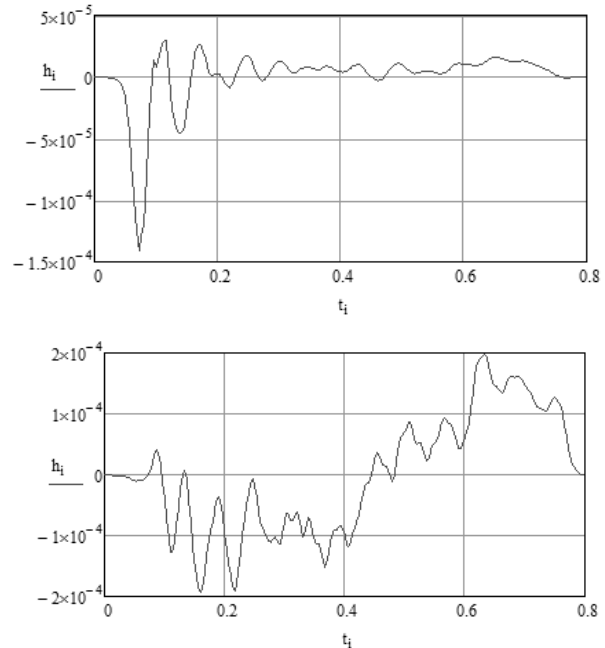


Рис. 3 Вычисленные ИПФ в основании и на уровне покрытия гипсового завода.

Для статического расчета здания может использоваться модель, отличная от принятой динамической модели. При этом допустимы только те упрощения, которые позволяют получать результаты, идущие в "запас прочности" конструкции.

Согласно II схемы определения внутренних усилий от сейсмических нагрузок также принимается расчетная схема модели с определением массы соответствующих частей сооружения. По результатам динамических испытаний определяются импульсные передаточные функции для входного воздействия и основных выходных масс расчетной динамической модели. Вычисляются коэффициенты перехода для расчетного внешнего воздействия.

Далее по формулам (4) вычисляются выходные характеристики (ускорения, скорости, перемещения) для всех масс расчетной динамической модели при расчетном внешнем воздействии и определяются сейсмические силы, приложенные в местах сосредоточения масс расчетной динамической модели.

Построение адекватной расчетной динамической модели сооружения путем проведения идентификационного эксперимента

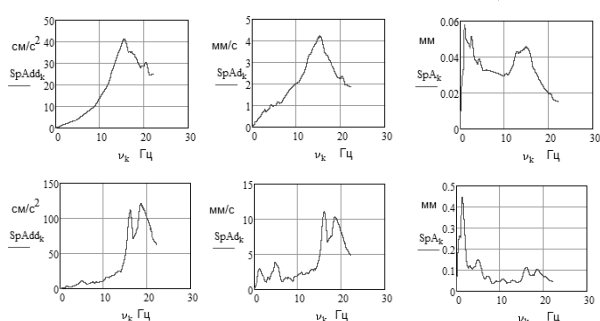


Рис. 4. Вычисленные спектральные кривые для основания (вверху) и покрытия завода (снизу).

Дальнейший расчет проводится следующим образом:

- на уровне перекрытия каждого  $i$ -го этажа определяются поперечные сейсмические силы, равные сумме поэтажных сейсмических нагрузок всех вышерасположенных этажей;
- поперечные силы распределяются между стенами продольного и поперечного направления в зависимости от деформативности перекрытий;
- определяется поперечная сила, действующая на уровне  $k$  на  $n$ -ую стену рассматриваемого направления, между отдельными элементами этой стены
- определяются внутренние усилия в элементах, соответствующие особому сочетанию нагрузок.

Далее выполняется проверка несущей способности элементов.

При наличии пакета расчетных программ, позволяющих проводить оперативные корректировки исходных параметров, можно рекомендовать расчет методом последовательных приближений [8]. При этом адекватность выбранной модели достигается путем подбора исходных данных, например, жесткостных характеристик элементов модели, до получения решений, совпадающих с фактически измеренными характеристиками при динамических испытаниях. Во многих случаях такая корректировка приводит к из-

менению первоначальной (проектной) расчетной схемы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 540 с.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т.1,2. – М.: Мир, 1971. – 316 с. – 285 с.
3. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: «Мир», 1990 – 584 с.
4. Отнес Р., Энноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. – М.: «Наука», 197. – 428 с.
5. Рандалл Р.Б. Частотный анализ. – Копенгаген: Брюль и Кьер, 1989. – 389 с.
6. Добрынин С.А., Фельдман М.С., Фирсов Г.И. Методы автоматизированного исследования вибрации машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
7. Джинчвелашвили Г.А. Некоторые вопросы идентификации динамических систем //Актуальные проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Сб. научных трудов РГОТУПС. – Москва: РГОТУПС, 2003, с. 109-115.
8. Шаблинский Г.Э., Джинчвелашвили Г.А., Васильев А.В., Колесников А.В. Идентификация расчетных схем сооружений на основе экспериментальных исследований //«Строительная механика и расчет сооружений» № 6, 2008, с. 68-73.
9. СНиП П-7-81\* Строительство в сейсмических районах. М.: ЦНС, 2003, 48 с.

Джинчвелашвили Гурам Автандилович, к.т.н., проф. кафедры «Сопrotивление материалов» ФГБОУ ВПО МГСУ, Россия, Москва, Ярославское ш. 26, E-mail: guram2004@yandex.ru

Соснин Алексей Викторович, аспирант МИИТ; E-mail: syabryauskas@mail.ru

Колесников Алексей Викторович, аспирант кафедры  
«Сопротивление материалов» ФГБОУ ВПО МГСУ,  
Россия, Москва, Ярославское ш. 26,  
E-mail: heallex@yandex.ru

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ, ОКРУЖАЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ, С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ОТЛИПАНИЯ ОТ ОБОЛОЧКИ

*Косицын С.Б., Чан Суан Линь*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** рассмотрены различные модели грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки; найдена связь между параметрами этих моделей; проанализированы результаты расчетов, хорошо согласующихся между собой.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, грунтовый массив, упругое основание, упругий слой, плоские, объемные и контактные конечные элементы

## COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIOUS MODELS OF SOIL FOUNDATION, SURROUNDING CYLINDRICAL SHELL WITH A VIEW OF THE POSSIBILITY OF IT'S DETACHMENT FROM SHELL

*Sergey B. Kositsyn, Tran Xuan Linh*

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** In the paper considered various models of soil foundation, surrounding cylindrical shell with a view of the possibility of it's detachment from shell; the relationship is found between the parameters of these models; the results of calculations were analyzed and in a very good agreement.

**Key words:** cylindrical shell, soil array, elastic foundation, elastic layer, flat, three-dimensional and contact finite elements.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиусом 1 м, толщиной 0.02 м, изготовленную из стали с модулем упругости  $E_{об}=2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>, коэффициентом Пуассона  $\mu_{об}=0.3$  и плотностью  $\rho_{об}=7800$  кг/м<sup>3</sup>. Оболочка расположена в грунте на глубине 5 м (рисунок 1, а). Для аппроксимации грунта с учетом возможности его отлипания от оболочки построим три пространственных модели различной степени сложности, изучим их особенности и найдем связь между параметрами моделей с целью получения адекватных

результатов расчета, согласующихся между собой.

### 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ С ОКРУЖАЮЩИМ ОБЪЕМНЫМ МАССИВОМ ГРУНТА

Грунт смоделирован однородным трехмерным массивом, имеющим следующие характеристики: модуль деформации  $E_{гр}=1.634 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>, коэффициент поперечных деформаций  $\mu_{гр}=0.3$ . Материалы оболочки и грунта считались неограниченно линейно упругими. Раз-

меры расчетной области массива приняты с учетом затухания напряженно-деформированного состояния (НДС) грунта по 5 диаметров оболочки в каждую сторону и вниз. Для расчетов использован конечноэлементный комплекс MSC PATRAN – NASTRAN. Оболочка аппроксимирована двумерными плоскими четырехузловыми элементами, основанными на гипотезе прямых нормалей, с шестью степенями свободы в каждом узле. Размеры элементов –  $0.2 \times 0.2$  м. Объемный массив, моделирующий грунт, представлен трехмерными конечными элементами в форме четырехузловых тетраэдров (густая сетка около оболочки) и восьмиузловых параллелепипедов (более редкая сетка в остальных частях массива) с тремя степенями свободы в каждом узле. Использование тетраэдров вызвано тем, что в месте расположения отверстия, подкрепленного оболочкой, геометрия массива является сложной. Расчетная область закреплена от перемещений, нормальных к поверхностям массива, по торцам, с боков и снизу. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели. С целью возможности учета отлипа-

ния грунта между оболочкой и массивом поставлены специальные контактные элементы [1] с разными жесткостями при растяжении и сжатии (в программном комплексе NASTRAN их называют GAP элементами). Эти элементы имели нулевые длины и стремящиеся к нулю жесткости при растяжении ( $S_p=10^{-7}$  н/м). Их жесткости при сжатии стремились к бесконечности и принимались равными  $S_{сж}=10^7$  н/м. Расчет проведен в конструктивно нелинейной постановке (методом последовательных приближений разыскивались зоны отлипания грунта) на действие собственного веса оболочки. Собственный вес грунта при этом не учитывался. В результате расчета определено НДС модели. Величины максимального полного перемещения  $W_{\max}$  и максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу [2] во внутренних  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^B$  и наружных  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^H$  волокнах оболочки приведены в таблице 1 (столбец «вариант 1»). На рисунке 2 показаны деформированный вид оболочки и поле эквивалентных напряжений в ее наружных волокнах.

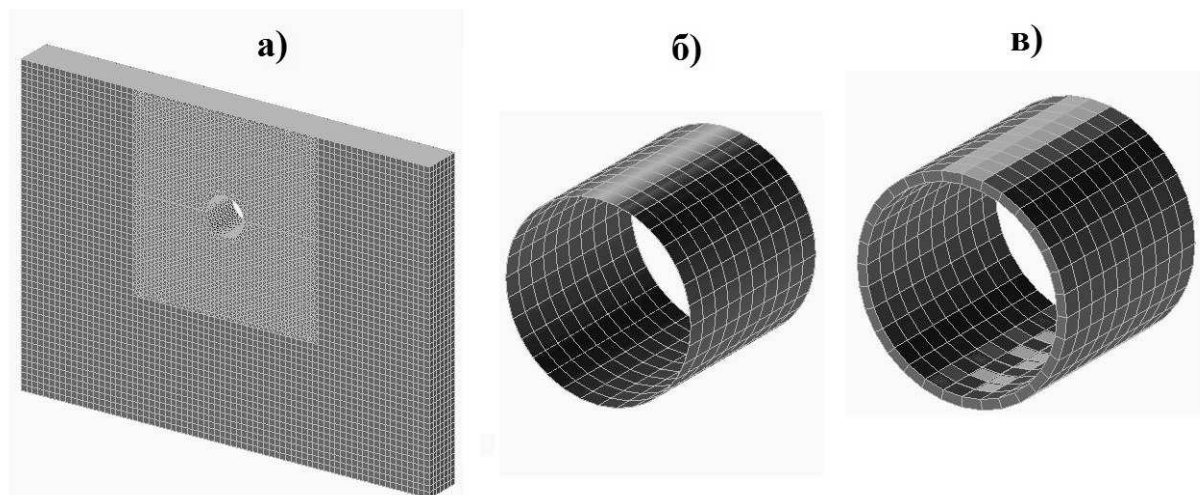


Рис. 1. Конечноэлементные модели системы «оболочка – грунт»:

- а) оболочка с объемным массивом, моделирующим грунт; б) оболочка с GAP элементами, заменяющими упругое основание; в) оболочка с приведенным упругим слоем.

Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки

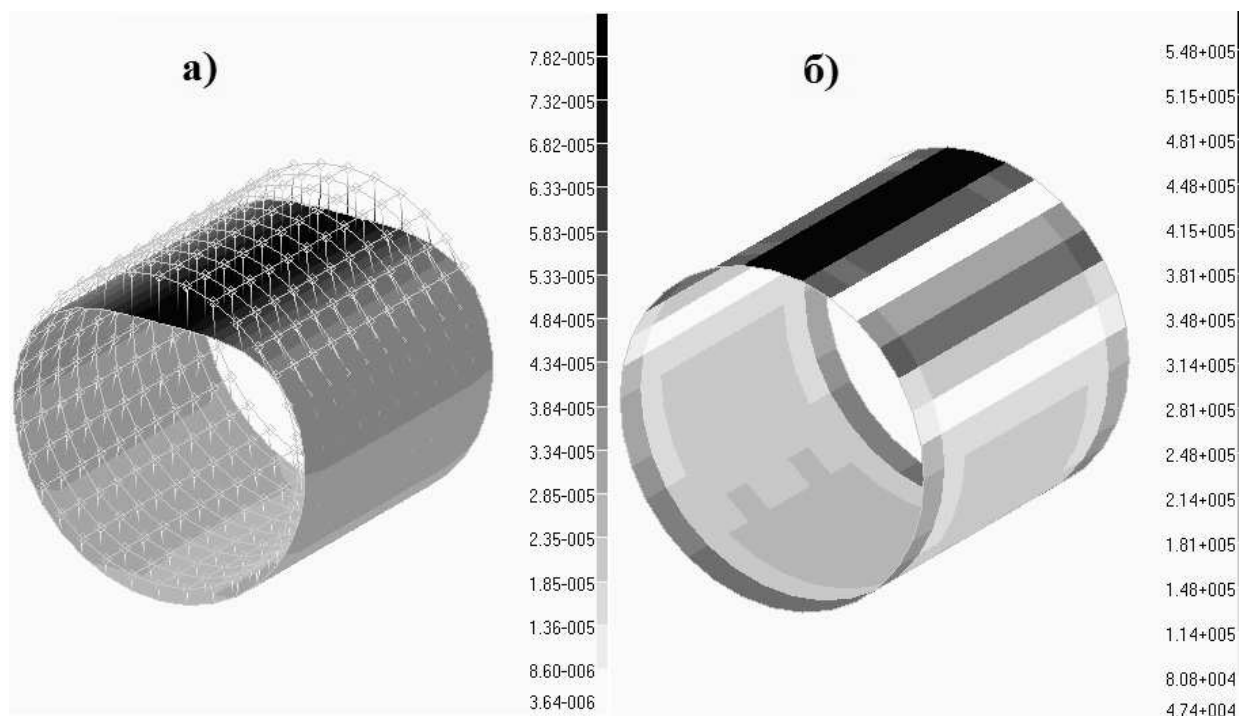


Рис. 2. НДС модели оболочки, взаимодействующей с объемным массивом:  
 а) деформированный вид; б) поле интенсивностей напряжений по Мизесу в наружных волокнах оболочки.

### 3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, КОНТАКТИРУЮЩАЯ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Вторая расчетная схема: окружающий оболочку грунт смоделирован упругим основанием типа Фусса – Винклера, но с возможностью отлипания оболочки от основания (рисунок 1, б). Так как в комплексе NASTRAN отсутствует модель такого упругого основания, то оно заменено специальными контактными элементами (GAP элементами), работающими только при сжатии. Длины GAP элементов приняты нулевыми. Число GAP элементов определено количеством узлов сетки элементов оболочки. Жесткости GAP элементов при растяжении так же, как и в предыдущей модели, принимались стремящимися к нулю ( $S_p=10^{-7}$  н/м), а жесткости GAP элементов при сжатии вычислены по формуле [1]:

$$S_{сж} = Kab$$

Здесь  $K$  – коэффициент постели упругого основания;  $a$  и  $b$  – линейные размеры конечных элементов оболочки (в данном случае  $a = b = 0.2$  м).

Жесткости GAP элементов, расположенных у торцов оболочки, приняты в два раза меньше жесткостей остальных GAP элементов, так как торцевые конечные элементы оболочки примыкают к соответствующим GAP элементам только с двух, а не с четырех сторон.

Для определения коэффициента постели упругого основания, соответствующего объемному массиву, рассмотренному в предыдущем разделе, проведен следующий дополнительный расчет. Рассмотрен трехмерный массив, моделирующий столб грунта ( $E_{гр}=1.634 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>,  $\mu_{гр}=0.3$ ), размерами в плане  $1 \times 1$  м, высотой 10 м (расстояние от низа оболочки до низа массива из предыдущего раздела – принятая глубина сжимаемой толщи грунта), нагруженный сверху давлением 1 Па, передающимся на массив посред-

ством жесткого штампа ( $E_{шт}=2 \cdot 10^{15}$  Па,  $\mu=0.3$ ). Массив закреплен от перемещений по нормальям к боковым поверхностям и снизу. Плита (штамп) закреплена от горизонтальных смещений минимально необходимым числом связей, обеспечивающих ее геометрическую неизменяемость. При построении конечноэлементной модели использованы плоские четырехузловые и объемные восьмиузловые конечные элементы. В результате получено значение максимального полного перемещения плиты (штампа)  $w_1$ . Далее массив грунта был заменен упругим основанием (соответствующими GAP элементами) с коэффициентом постели  $K_0=1 \cdot 10^8$  н/м<sup>3</sup>. Расчетом плиты (штампа) на упругом основании при том же давлении (1 Па) определено значение максимального полного перемещения  $w_2$ . Коэффициент постели основания, примерно соответствующий величине модуля деформации рассматриваемого грунта из предыдущего раздела ( $E_{гр}=1.634 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>), можно определить по следующей формуле

$$K = K_0 \frac{w_2}{w_1}.$$

Найденный таким путем коэффициент постели упругого основания составил  $K=2.20 \cdot 10^8$  н/м<sup>3</sup>. С использованием этого коэффициента постели определены жесткости GAP элементов при сжатии и проведен расчет оболочки, взаимодействующей с основанием, на воздействие ее собственного веса при таких же опорных закреплениях, как и в предыдущем разделе. В результате расчета получены компоненты НДС оболочки. Значения максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внутренних  $\sigma_{экр}^B$  и наружных  $\sigma_{экр}^H$  волокнах оболочки, а также ее максимального полного перемещения  $w_{max}$  приведены в таблице 1 (столбец «вариант 2»).

#### 4. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ С ПРИВЕДЕННЫМ УПРУГИМ СЛОЕМ

Далее рассмотрена еще одна упрощенная модель системы «оболочка – грунт». Окружающий оболочку грунт смоделирован приведенным упругим слоем (рисунок 1, в). Чтобы учесть возможность отлипания грунта от оболочки, приведенный упругий слой и оболочка соединены контактными GAP элементами, работающими только на сжатие, как и в первом случае ( $S_{сж}=10^7$  н/м,  $S_p=10^{-7}$  н/м). Материал упругого слоя принят ортотропным в цилиндрической системе координат с одинаковыми модулями упругости во всех направлениях, коэффициентами Пуассона, равными нулю, а модулями сдвига на 2 порядка ниже, чем для изотропного материала. Это объясняется желанием приблизить поведение упругого слоя как можно ближе к работе упругого основания, то есть уменьшить в упругом слое влияние деформаций сдвига. Свяжем приведенный модуль упругости слоя  $E_{пр}$  с коэффициентом постели упругого основания  $K$  из условия равенства элементарных потенциальных энергий деформации слоя и основания  $dW_{сл} = dW_{ос}$ . При этом считаем, что упругий слой (рисунок 3) работает на растяжение или сжатие только в радиальном и окружном направлениях, а наружная его поверхность закреплена от перемещений ( $w_H=0$ ).

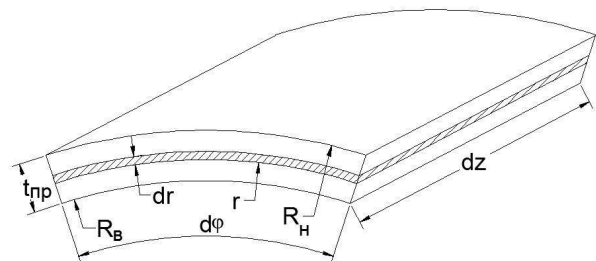


Рис. 3. Элементарный фрагмент упругого слоя.

Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки

Элементарная потенциальная энергия деформации слоя определена формулой

$$dW_{\text{сл}} = \frac{1}{2} \int_{R_b}^{R_H} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r d\varphi dr dz \quad (1)$$

Напряжения и деформации по радиальному и окружному направлениям с учетом принятых допущений о материале соответственно находим так:

$$\sigma_r = E_{\text{пр}} \varepsilon_r; \quad \sigma_\theta = E_{\text{пр}} \varepsilon_\theta; \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{w_H - w_B}{t_{\text{пр}}} = \frac{0 - w_B}{t_{\text{пр}}} = -\frac{w_B}{t_{\text{пр}}}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+w) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{w}{r}. \quad (4)$$

С учетом выражений (2 – 4) формула (1) примет вид

$$dW_{\text{сл}} = \frac{E_{\text{пр}}}{2} \int_{R_b}^{R_H} \left( \left( -\frac{w_B}{t_{\text{пр}}} \right)^2 + \left( \frac{w}{r} \right)^2 \right) r dr d\varphi dz. \quad (5)$$

Радиальные перемещения произвольных точек слоя в предположении, что они меняются по толщине по линейному закону, определим по формуле

$$w = w_B + \frac{w_H - w_B}{t_{\text{пр}}} (r - R_b) = w_B \left( 1 - \frac{r - R_b}{t_{\text{пр}}} \right).$$

С целью упростить вычисление интеграла в выражении (5), примем допущение о том, что

$$w = \text{const} \approx \frac{w_H - w_B}{2} = \frac{0 - w_B}{2} = -\frac{1}{2} w_B. \quad (6)$$

С учетом (6) выражение (5) примет вид

$$dW_{\text{сл}} = \frac{E_{\text{пр}}}{2} \int_{R_b}^{R_H} \left( \left( -\frac{w_B}{t_{\text{пр}}} \right)^2 + \left( -\frac{w_B}{2r} \right)^2 \right) r dr d\varphi dz \quad (7)$$

Вычислив интеграл в (7) и опустив элементарные преобразования, получим

$$dW_{\text{сл}} = \frac{E_{\text{пр}}}{2} w_B^2 \left( \frac{R_H + R_b}{2t_{\text{пр}}} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{R_b + t_{\text{пр}}}{R_b} \right) \right) d\varphi dz \quad (8)$$

Элементарная потенциальная энергия деформации основания определена формулой

$$dw_{\text{ос}} = \frac{1}{2} K w_B^2 R_b d\varphi dz \quad (9)$$

Приравняв выражения энергий (8) и (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{пр}}}{2} w_B^2 \left( \frac{R_H + R_b}{2t_{\text{пр}}} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{R_b + t_{\text{пр}}}{R_b} \right) \right) d\varphi dz &= \\ &= \frac{1}{2} K w_B^2 R_b d\varphi dz \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$E_{\text{пр}} = \frac{K R_b}{\frac{2R_b + t_{\text{пр}}}{2t_{\text{пр}}} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{R_b + t_{\text{пр}}}{R_b} \right)} \quad (11)$$

Например, при

$$R_b = 1 \text{ м}, \quad t_{\text{пр}} = 0.08 \text{ м}, \quad K = 2.2 \cdot 10^8 \text{ н/м}^3$$

найденное значение приведенного модуля упругости слоя составило

$$E_{\text{пр}} = 1.690 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2.$$

Отметим, что формула, аналогичная (11), но не учитывающая деформации слоя в окружном направлении, приведена в [3]. В ней от-

сутствует, член, содержащий натуральный логарифм.

Упругий слой, моделирующий грунт, аппроксимирован восьмиузловыми объемными элементами (рисунок 1, в). Использование только одного слоя объемных элементов в данном случае возможно, так как упругие характеристики этого слоя не реальные, а приведенные. Выполнены пять расчетов для разных случаев толщины упругого слоя на воздействие собственного веса оболочки при таких же опорных закреплениях, как и в предыдущих разделах. Наружная поверхность упругого слоя принималась закрепленной от всех перемещений. В результате всех расчетов получены компоненты НДС оболочки. Значения максимальных полных перемеще-

ний  $w_{\max}$  и максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу во внутренних  $\sigma_{\text{экв}}^B$  и наружных  $\sigma_{\text{экв}}^H$  волокнах оболочки при разных толщинах упругого слоя приведены в таблице 1 (столбцы «вариант 3»). Следует отметить, что для упругих слоев толщиной от 0.08 до 0.4 м ( $0.08R_B \leq t_{\text{уп}} \leq 0.4R_B$ ) рассчитанные величины максимальных перемещений и напряжений в оболочке оказались достаточно близки и неплохо согласуются с аналогичными результатами, полученными при помощи других моделей грунтового основания. Это подтверждает справедливость формулы (11) и допущений, принятых при ее выводе.

Таблица 1

Параметры НДС	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3 ( $t_{\text{уп}}=0.08$ м)	Вариант 3 ( $t_{\text{уп}}=0.1$ м)	Вариант 3 ( $t_{\text{уп}}=0.2$ м)	Вариант 3 ( $t_{\text{уп}}=0.3$ м)	Вариант 3 ( $t_{\text{уп}}=0.4$ м)
$w_{\max}, 10^{-5}$ м	7.8164	7.6874	8.0483	8.0454	8.0316	8.0176	8.0628
$\sigma_{\text{экв}}^B, 10^5$ Н/м <sup>2</sup>	5.1381	5.0986	5.1358	5.1376	5.1366	5.1282	5.1389
$\sigma_{\text{экв}}^H, 10^5$ Н/м <sup>2</sup>	5.4799	5.5400	5.6483	5.6484	5.6440	5.6338	5.6443

## 5. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Результаты расчета оболочки в системе «оболочка – окружающий грунт», полученные по трем рассмотренным моделям грунта, хорошо согласуются друг с другом как качественно, так и количественно, что говорит о достоверности построенных моделей и расчетов. Перемещения, напряжения и деформации оболочки, а также зоны отлипания грунта во всех расчетных случаях идентичны.

Модель приведенного упругого слоя следует применять при отсутствии в программных комплексах конечных элементов, моделирующих упругое основание, или при нерегулярности формы конечных элементов оболочки. В последнем случае затруднен подсчет реальных жесткостей GAP элементов.

При выборе толщины приведенного упругого слоя и использовании формулы (11) не следует принимать его слишком толстым ( $t_{\text{уп}} \leq (0.4 \div 0.5)R_B$ ).

В расчетах следует использовать преимущественно объемные модели массива грунта с контактными элементами для учета его отлипания от оболочки, но ввиду большой трудоемкости таких расчетов допустимо применять как упругое основание, моделируемое GAP элементами, так и модель приведенного упругого слоя с дополнительными контактными элементами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косицын С.Б., Долотказин Д.Б. Расчет стержневых систем, взаимодействующих

Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки

с упругим основанием, методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC/NASTRAN FOR WINDOWS: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2004 – 116 с.

2. **Александров А.В., Потапов В.Д.** Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1990 – 400 с.
3. **Косицын С.Б.** Неклассические криволинейные конечноэлементные модели в линейных и нелинейных задачах строительной механики. Дис. на соискание ученой степени доктора технических наук. – М.: МИИТ, 1993 – 424 с.

---

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;  
e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Чан Суан Линь, аспирант Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127944, Россия, г. Москва, ул. Образцова, дом 9, стр. 9; тел./факс +7 (499) 978-16-73;  
e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

Sergey B. Kositsyn, Moscow State University of Railway Engineering, Obrazsova str. 9, bld. 9, 127944, Moscow, RUSSIA,  
e-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Tran Xuan Linh, Moscow State University of Railway Engineering, Obrazsova str. 9, bld. 9, 127944, Moscow, RUSSIA, e-mail: tranxuanlinh6987@gmail.com

## МЕТОД НЕОСОБЕННЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Предлагается шаговый метод вычисления вещественных корней характеристических уравнений, в котором величина шага зависит от близости текущего приближения к искомому корню, что не позволяет перескочить этот корень в процессе расчета. Приближения к корню могут быть как с избытком, так и с недостатком. Локальная аппроксимация осуществляется кривой второго порядка: эллипс или гипербола в центральных осях, в зависимости от кривизны функции характеристического уравнения.

**Ключевые слова:** корень характеристического уравнения, аппроксимация кривой второго порядка, кривизна функции

## METHOD BASED ON CONTINUED NONSINGULAR LOCAL APPROXIMATION OF THE DETERMINANT WITH THE SECOND ORDER CURVE

*Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn*

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This paper provides a method for calculating the step of real roots of characteristic equation in which the size of the step depends on the proximity of the current approximation to the desired root, which does not allow to skip this root in the calculation. Approximation to the root can be both in abundance, and with a drawback. Local approximation uses curves of second order: an ellipse or a hyperbola in the central axis, depending on the curvature of the function of the characteristic equation.

**Key words:** the root of the characteristic equation, approximation with the curve of the second order, the curvature of the function.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в процессе решения задач устойчивости строительных и транспортных конструкций существенным моментом является определение параметра наименьшей критической нагрузки. Как правило, в результате дискретизации линеаризованной модели консервативной системы (или неконсервативной системы, теряющей устойчивость по типу статической бифуркации), дело сводится к вычислению наименьшего действительного корня характеристического определителя матрицы достаточно высокого

порядка. Если коэффициенты матрицы зависят от параметра нагрузки неявно, или же эти зависимости представлены явными, но весьма сложными не полиномиальными выражениями (в виде рациональных или трансцендентных функций), то в большинстве реализованных алгоритмов используются шаговые процедуры продолжения по параметру нагрузки вплоть до смены знака определителя. После этого включается блок бисекций до достижения желаемой точности. Описанный алгоритм имеет, по крайней мере, два недостатка. Один из них связан с неопределенностью выбора величины «доста-

точно малого» постоянного шага продолжения, необходимого, чтобы не перескочить через один двукратный или два (или другое четное число) близких друг к другу простых наименьших критических параметров. Это особенно часто может проявляться при исследовании устойчивости достаточно сложных систем, имеющих, как правило, весьма густые спектры критических нагрузок. В случае консервативных систем и использовании матрицы жесткости «перескока» можно избежать, если отслеживать информацию о появлении отрицательных коэффициентов устойчивости (коэффициентов главной диагонали треугольной формы Гаусса). Другой недостаток связан с тем, что при нагрузке, меньше критической, непросто оценить насколько данная нагрузка далека от критической. Имея такую информацию, можно было бы назначать шаг продолжений так, чтобы он зависел от близости системы к моменту потери устойчивости, и в то же время всегда был меньше модуля разности между неизвестным критическим параметром и параметром текущей нагрузки. По существу, это давало бы нижнюю оценку критической нагрузки на каждом докритическом шаге нагружения конструкции. Кроме того, весьма полезно одновременно иметь и верхнюю оценку расстояния по параметру нагрузки, которая также зависит от близости системы к моменту потери устойчивости, и уменьшается с приближением текущей нагрузки к ее критическому значению. Реализация вычислений с указанными возможностями позволила бы иметь на каждом шаге двусторонние оценки искомого критического параметра, которые по мере приближения к нему становились бы все более узкими.

## АЛГОРИТМ ВЫБОРА ШАГА НЕОСОБЕННЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ

В задачах устойчивости упругих систем, исследуемых на основе линеаризованных моделей, при изменении параметра докритиче-

ской нагрузки  $v = v_0$  матрица жесткости  $\mathbf{R}(v_0)$  получит некоторое приращение  $\Delta\mathbf{R}(\Delta v_0)$ . Если величина шага догружения  $\Delta v_0$  определяется из условия теоремы С. Банаха - А. Островского о величине «разрешимого» изменения  $\Delta\mathbf{R}(\Delta v_0)$  неособенного оператора  $\mathbf{R}(v_0)$ , при котором сумма  $\mathbf{R}(v_0) + \Delta\mathbf{R}(\Delta v_0)$  останется также неособенным оператором ( $\|\mathbf{R}(v_0)^{-1} \Delta\mathbf{R}(\Delta v_0)\| \leq 1$ ), то новый параметр  $v_1 = v_0 + \Delta v_0$  будет меньше критического значения  $v_{кр1}$ . Покажем, что при выполнении некоторых условий на основе этой теоремы локальная аппроксимация функции  $f(v)$  при помощи эллипса или гиперболы, записанных в центральных осях, дает возможность реализовать одностороннюю сходимость от любого начального значения  $v = v_0$ , расположенного между корнями  $v_j$  и  $v_{j+1}$ ,  $j=1, 2, \dots$ . Соответствующая формула имеет вид

$$v_{m+1} = v_m \pm \frac{|f(v_m)|}{\sqrt{(f'(v_m))^2 - f(v_m)f''(v_m)}}, \quad (1)$$
$$m = 0, 1, \dots$$

В этом выражении знак «плюс» принимается в случае продолжений в сторону алгебраически большего корня  $v_{j+1}$ . Приближения к нему получим с недостатком. При выборе знака «минус» будем иметь последовательность приближений от  $v = v_0$  с избытком для корня  $v_j$ , расположенного левее корня  $v_0$ . Дадим вывод формулы (1), основанный на представлениях отношений производных к значению функции в некоторой точке  $v = v_0$ , не являющейся ее вещественным корнем.

Пусть  $f(v)$  - полином  $n$ -ой степени, имеющий только простые и вещественные корни  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Тогда отношения первой и вто-

рой производных полинома к его значению в точке  $v_0$  можно записать в виде

$$f'(v_0)/f(v_0) = \sum_{j=1}^n 1/(v_0 - v_j),$$

$$f''(v_0)/f(v_0) = \sum_{j,k=1, j \neq k}^n 2/(v_0 - v_j)(v_0 - v_k).$$

Из этого вытекает, что

$$f'(v_0)^2 / f(v_0)^2 = \left( \sum_{j=1}^n 1/(v_0 - v_j) \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^n 1/(v_0 - v_j)^2 + \sum_{j,k=1, j \neq k}^n 2/(v_0 - v_j)(v_0 - v_k)$$

Следовательно

$$f'(v_0)^2 / f(v_0)^2 - \sum_{j,k=1, j \neq k}^n 2/(v_0 - v_j)(v_0 - v_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^n 1/(v_0 - v_j)^2,$$

$$f'(v_0)^2 / f(v_0)^2 - f''(v_0)/f(v_0) =$$

$$= \sum_{j=1}^n 1/(v_0 - v_j)^2$$

Умножив на  $f^2(v_0) \neq 0$  левую и правую части, получим

$$f'(v_0)^2 - f''(v_0)f(v_0) =$$

$$= f(v_0)^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{(v_0 - v_j)^2} > f(v_0)^2 / (v_0 - v_{j^*})^2$$

где  $v_{j^*}$  - ближайший к  $v = v_0$  корень полинома (то есть  $|v_0 - v_{j^*}| = \min |v_0 - v_j|$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Обращение неравенства дает оценку снизу модуля расстояния от  $v_0$  до этого корня

$$|v_0 - v_{j^*}| > \frac{|f(v_0)|}{\sqrt{(f'(v_0))^2 - f(v_0)f''(v_0)}} \quad (2)$$

Таким образом, если принять величину шага продолжений  $\Delta v_0$  равной правой части последнего неравенства, то получим формулу (1). При указанных выше условиях (вообще говоря, лишь достаточных) процесс односторонних приближений с использованием этой формулы сходится к любому из двух ближайших корней полинома, расположенных слева или справа от произвольной точки  $v = v_0$  ( $v_j < v_0 < v_{j+1}$ ). Выбирая начальные приближения  $v_0$  и  $v'_0$  сначала меньше, а затем больше искомого корня  $v_j$ , и выполнив от этих значений два процесса неособенных продолжений, получим двусторонние (теоретически сколь угодно близкие) приближения к этому корню. Можно показать, что скорость сходимости при вычислении простого корня полинома становится асимптотически кубической. Ранее формула (1) несколько иным способом была выведена в работах [1, 2].

Отметим, что формула (1) справедлива и для целых функций рода ноль, имеющих только вещественные корни.

Геометрическая интерпретация формулы (1) показывает, что границы интервала  $(v_0 - \Delta v_0, v_0 + \Delta v_0)$ , не содержащего корней функции  $f(v)$ , есть точки пересечения некоторой кривой второго порядка  $\eta(\Delta v)$  с осью  $v$ . Уравнение этой кривой, имеющей в точке  $v = v_0$  касание второго порядка с кривой  $f(v)$  в центральных осях (центр в точке  $v_0$ ) запишется так

$$A\eta^2(\Delta v) + B\Delta v^2 + 2C\Delta v\eta(\Delta v) - 1 = 0 \quad (3)$$

С учетом условий касания второго порядка

$$\eta_0 = f(v_0), \quad \eta'_0 = f'(v_0), \quad \eta''_0 = f''(v_0),$$

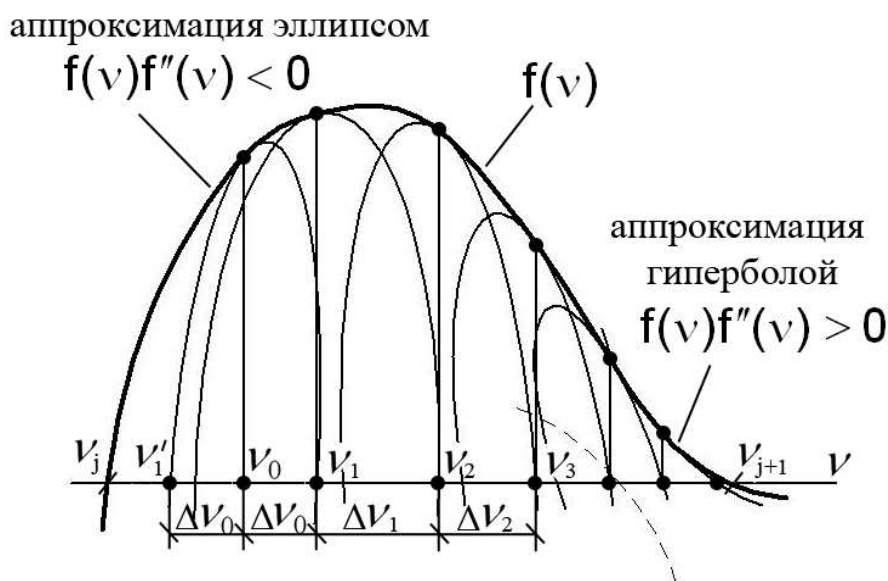


Рис. 1. Геометрическая интерпретация формул для шага неособенных продолжений.

получим следующие выражения для коэффициентов А, В и С:

$$A = f(v_0)^{-2};$$

$$B = (f'(v_0)^2 - f(v_0)f''(v_0)) / f(v_0)^2;$$

$$C = -f'(v_0) / f(v_0)^2$$

Подстановка этих коэффициентов в уравнение (3) дает два одинаковых по модулю значения шага  $\Delta v_0$ , совпадающих с правой частью неравенства (2). Аппроксимация эллипсом ( $AB > C^2$ ) будет при условии, что  $f(v)f''(v) < 0$ . В противном случае имеем аппроксимацию гиперболой ( $f(v)f''(v) > 0$ ) (рис. 1).

### ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА

В качестве простейшего примера, показывающего эффективность неособенных продолжений по формуле (1), приведем процесс вычислений нижних и верхних приближений к наименьшему положи-

тельному корню  $v_1 = 4.4934094$  уравнения  $\text{tg} v = v$  от двух весьма далеких значений  $v_0 = 1$  и  $v'_0 = 6$ . Для этого преобразуем уравнение к виду  $\sin v - v \cos v = 0$ . Вычисление производных и подстановка их в (1) дает выражение для получения последовательных приближений к  $v_1$

$$(v_{m+1} = v_m \pm \frac{(\sin v_m - v_m \cos v_m)}{\sqrt{(v_m^2 - \sin^2 v_m)}})$$

$$v_0 = 1.0, \Rightarrow 1.5574; 2.37735; 3.43618; 4.31173; 4.492359; 4.4934094,$$

$$v'_0 = 6.0, \Rightarrow 4.992167; 4.5145648; 4.493411; 4.4934094.$$

Как видно в первой строке последовательных приближений, величина шага неособенных продолжений сначала возрастает

$$(\Delta v_0 = 0,5574 < \Delta v_1 = 0,81995 < \Delta v_2 = 1,05883)$$

и только начиная с четвертого шага  $\Delta v_3 = 0.87555$  последовательность моду-

лей  $\Delta v_j$  становится монотонно убывающей. Это показывает, что предлагаемый вариант алгоритма неособенных продолжений имеет глобальный характер сходимости (в отличие от большинства алгоритмов типа метода касательных Ньютона, формулы Чебышева, метода касательных гипербол и т.п.).

Отметим, что в задачах устойчивости рамных систем краевые усилия для сжатого стержня  $\varphi_i(v)$  и  $\eta_i(v)$  есть мераморфные функции с полюсами в точках спектра основной системы метода перемещений. Чтобы перейти к целой функции выражение определителя умножим на произведение знаменателей этих функций (число сомножителей равно числу сжатых стержней рамы). Получим спектральную функцию. Для сжатой неразрезной балки, составленной из двух стержней одинаковой длины и жесткости, эта функция имеет достаточно простое выражение

$$S(v) = 6\varphi_1(v)(\sin v - v \cos v)^2 = 2v^2 \sin v(\sin v - v \cos v)$$

Подстановка спектральной функции и ее производных в формулу (1) дает модуль шага неособенных продолжений (множитель  $2v^2 \neq 0$  можно сократить)

$$|\Delta v| = \frac{|(\sin^2 v - v \cos v \sin v)|}{\sqrt{((0.5 \sin 2v - v \cos 2v)^2 - 2v \sin 2v(\sin^2 v - v \sin v \cos v))}}$$

Процесс поиска критического параметра  $v_{kp1} = \pi$  от  $v_0 = 1$  выглядит так

$$v_0 = 1,0 \Rightarrow 1.4647; 2.0786113; 2.7250968; 3.1037251; 3.1415571; 3.1415926.$$

Что бы воспользоваться формулой продолжений (1) в общем случае необходимо вычислять производные определителя матрицы реакций  $\mathbf{R}(v)$  по параметру  $v$ . Они выражаются через коэффициенты

$\delta_{ik}(v)$  обратной матрицы  $\delta(v) = \mathbf{R}^{-1}(v)$  и производные  $dr_{ik}/dv$  и  $d^2r_{ik}/dv^2$ .

$$\frac{d}{dv} \det \mathbf{R}(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial \det \mathbf{R}(v)}{\partial r_{ik}} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} = \det \mathbf{R}(v) \sum_{i,k} \delta_{ki}(v) \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dv^2} \det \mathbf{R}(v) = \det \mathbf{R}(v) \left( \left( \sum_{i,k} \delta_{ki} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \right)^2 + \sum_{i,k} \delta_{ki} \frac{d^2 r_{ik}(v)}{dv^2} + \sum_{i,k} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \left( \sum_{p,s} \frac{\partial \delta_{ki}}{\partial r_{ps}} \frac{dr_{ps}(v)}{dv} \right) \right)$$

Поскольку  $\partial \delta_{ki} / \partial r_{ps} = -\delta_{kp} \delta_{si}$ , то вторая производная определителя выглядит так

$$\frac{d^2}{dv^2} \det \mathbf{R}(v) = \det \mathbf{R}(v) \left( \left( \sum_{i,k} \delta_{ki} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \right)^2 + \sum_{i,k} \delta_{ki} \frac{d^2 r_{ik}(v)}{dv^2} - \sum_{i,k} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \left( \sum_{p,s} \delta_{kp} \delta_{si} \frac{dr_{ps}(v)}{dv} \right) \right) \quad (5)$$

Подстановка в формулу (1) полученных выражений (4) и (5) после упрощений приводит к следующей схеме неособенных продолжений

$$v_{m+1} = v_m \pm \left( - \sum_{i,k} \delta_{ki} \frac{d^2 r_{ik}(v)}{dv^2} + \sum_{i,k} \frac{dr_{ik}(v)}{dv} \left( \sum_{p,s} \delta_{kp} \delta_{si} \frac{dr_{ps}(v)}{dv} \right) \right)^{-1/2} \quad (6)$$

Заметим, что для применения (6) не требуется вычислять определитель, однако необходимо иметь коэффициенты обратной матрицы. Кроме того, прямое вычисление производных мераморфных функций, вхо-

дящих в выражения коэффициентов  $r_{jk}(v)$ , позволяет получить лишь одностороннюю сходимую процесс продолжений сверху к  $v_{кр1}$ .

В заключение отметим, что в работе [1] даны формулы алгоритма неособенных продолжений для вычисления вещественных корней полиномиальных уравнений для случая, когда среди корней имеются и комплексно сопряженные. Величина шага продолжения определяется через евклидову или многоугольные нормы матрицы обратной к сопровождающей матрице полинома. Однако в отличие от изложенного выше варианта неособенных продолжений, указанные формулы не имеют достаточно простого геометрического истолкования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блатгер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
2. **Мануйлов Г.А.** О вычислении корней полиномов методом продолжений // Строительная механика / Труды МИИТ, вып. 371. М.: Изд-во МИИТ, 1971. – С. 133 – 147.
3. **Мануйлов Г.А.** О вычислении вещественных собственных значений матриц методом продолжений // Строительная механика / Труды МИИТ, вып. 342. М.: Изд-во МИИТ, 1969. – С. 169 – 178.

---

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 15; тел./факс +7(499) 972-49-81

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 15; тел./факс +7(499) 978-16-73;

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ АРОК

*Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М.*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В настоящей статье исследовано влияние углов раствора и изгибной жесткости поперечных сечений на характер возможных сценариев потери устойчивости круговых защемленных арок «из плоскости». Для исследования был использован конечноэлементный комплекс NASTRAN. Диаграммы равновесных состояний арок строились при помощи итерационного алгоритма Ньютона-Рафсона. Материал арок считался неограниченно упругим.

**Ключевые слова:** потеря устойчивости, упругий материал, устойчивость арок

## NUMERICAL INVESTIGATION OF THE STABILITY OF ELASTIC FIXED ARCS

*Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kosytsyn, Maxim M. Begichev*

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This paper investigated the effect of the angles of bending stiffness and cross-sectional nature of the possible scenarios of instability clamped circular arches "of the plane." Was used to study the complex finite element NASTRAN. Equilibria diagrams arches were built using the iterative Newton-Raphson algorithm. Material arches considered infinitely elastic.

The distinctive paper is devoted to numerical investigation of the influence of angle of arch and bending stiffness of its cross-section on loss of stability of arch. Finite element complex NASTRAN was used in the study. Equilibria diagrams were built with the the help of Newton-Raphson algorithm. Material of arches was linear elastic.

**Key words:** buckling, elastic material, the stability of the arches

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются задачи плоской и пространственной устойчивости упругих круговых защемленных арок при действии распределенных вертикальных нагрузок ( $ql=P$ ). Исследуется влияние углов раствора арок  $2\alpha$  и изгибной жесткости поперечных сечений «из плоскости» на характер возможных сценариев потери устойчивости. Анализ результатов дается на основе современных представлений теории бифуркаций. Арки считаются неограниченно упругими (модуль упругости  $E=2,1 \cdot 10^6$  итерационного алгоритма Ньютона-Рафсона.

кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu=0,3$ ). Все дуги арок имели длину 100 см с прямоугольным поперечным сечением высотой 1 см и варьируемой шириной (0,5 – 3 см). Расчеты проводились с помощью конечноэлементного комплекса NASTRAN. Модель каждой арки состояла из 100 элементов типа beam. Ранее было установлено, что такое количество элементов указанного типа вполне достаточно для обеспечения приемлемой точности вычисленных критических нагрузок. Диаграммы равновесных состояний арок строились при помощи

## ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Плоская симметричная и симметрично нагруженная в своей плоскости вертикальной распределенной нагрузкой арка испытывает симметричное плоское напряженно деформированное состояние. Это равновесное состояние не полное в плоскости, поскольку оно симметричное и, естественно, не полное в пространстве. В плоскости такое равновесие может терять устойчивость как в предельной точке так и в точке бифуркации (устойчивой или неустойчивой). «Из плоскости» потеря устойчивости этого равновесия может быть только в точке бифуркации. Невозможность пространственной потери плоского равновесия арки в предельной точке объясняется отсутствием других докритических равновесий с той же степенью неполноты, что и исходное плоское равновесие. Известно, что согласно теореме Дж. Томпсона (1973 г.) [1] равновесие, монотонно растущее вместе с нагрузкой, может потерять устойчивость только в точке бифуркации. С другой стороны, согласно теореме Возлинского (1967 г.) если докритическое равновесие единственное, то оно теряет устойчивость в точке симметричной устойчивой бифуркации (т.е. «в малом»). Это достаточное условие потери устойчивости «в малом» и справедливо оно для геометрически симметричных и симметрично нагруженных систем. Именно к такому типу систем относится плоская круговая арка при исследовании возможности ее пространственной потери устойчивости.

В то же время очевидно, что одиночная арка теряет устойчивость из плоскости только в определенном диапазоне «ширины» ее поперечных сечений. При превышении граничного значения указанной ширины, изгибная жесткость сечения из плоскости

окажется настолько большой, что минимальной критической нагрузке будет соответствовать потеря устойчивости в плоскости арки, а не из ее плоскости. Вместе с тем возможны варианты более сложных сценариев потери устойчивости, когда арка сначала теряет устойчивость в плоскости «в малом» и в некотором интервале нагрузок оказывается в устойчивом плоском несимметричном закритическом равновесии [2]. И здесь, не доходя до хлопка их предельной точки, может произойти вторичная потеря устойчивости хлопком из плоскости арки. Такая ситуация характерна для достаточно подъемистых арок с относительно широким поперечным сечением. В настоящей работе сделана попытка численного исследования возможных сценариев потери устойчивости плоских арок в широком диапазоне изменения углов раствора  $2\alpha$  ( $6^\circ \leq 2\alpha \leq 250^\circ$ ) и ширины прямоугольных поперечных сечений  $b$ .

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ АРОК

Весьма пологие арки с квадратным поперечным сечением  $1 \times 1$  см при углах  $2\alpha < 2\alpha_* = 6,6^\circ$  плавно деформируясь выходят из плоскости (для этого в замке прикладывалось малое поперечное горизонтальное воздействие  $\varepsilon P = P/1000$ ), и на всех этапах нагружения сохраняют единственное устойчивое симметричное сжато изгибно скрученное равновесие. При  $2\alpha = 2\alpha_* = 6,6^\circ$  (рис. 1) кривая вертикальных перемещений замкового сечения  $W$  приобретает горизонтальную касательную в точке перегиба, что свидетельствует о возможности начала

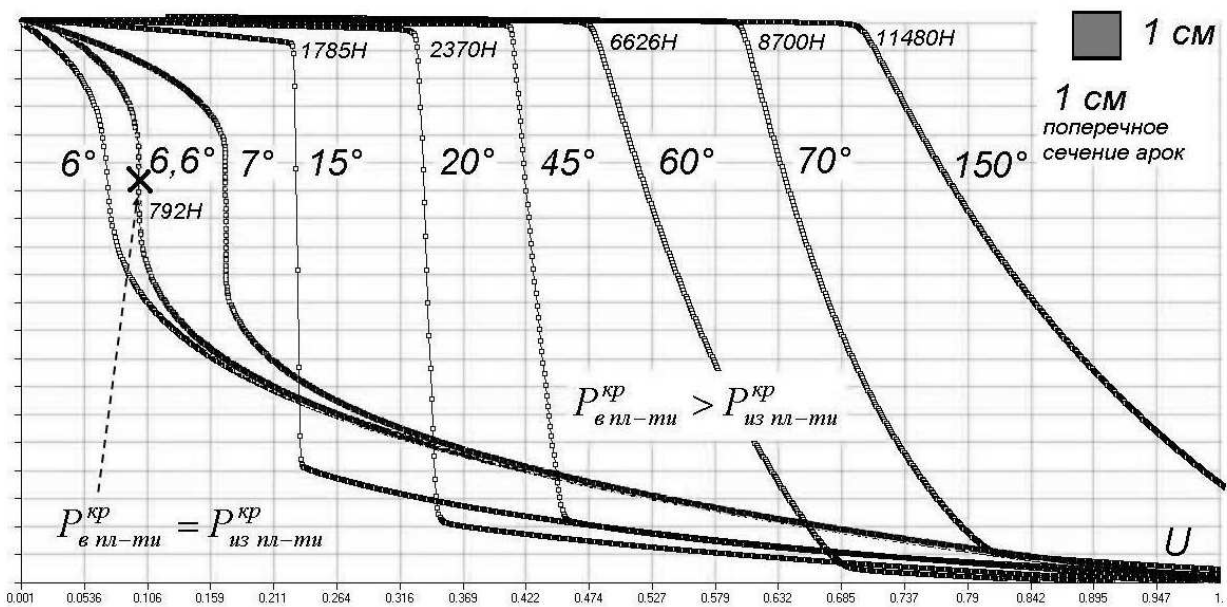


Рис. 1. Кривые вертикальных перемещений  $W$  при потере устойчивости арок из плоскости.

«хлопковой» потери устойчивости «из плоскости». Одновременно с этим в плоскости арка теряет устойчивость в предельной точке при этой же нагрузке. Следовательно, при  $2\alpha=6,6^\circ$  и квадратном поперечном сечении, критическая нагрузка оказывается двукратной, арка может потерять устойчивость как в плоскости так и из плоскости. Соответствующая особенность описывается омбилической катастрофой «ветвление в вершине холма», зависящей от трех параметров [2].

Расчеты показали, что для исследованных арок с квадратным поперечным сечением  $1 \times 1$  см и имеющих углы раскрытия от  $7^\circ$  до  $250^\circ$  (исключая арку с углом  $2\alpha=180^\circ$ ) пространственная потеря устойчивости происходит по типу симметричной устойчивой бифуркации, т.е. «в малом». Соответствующие кривые развития вертикальных перемещений  $U$  в закритическом состоянии монотонно растут по мере увеличения вертикальной нагрузки (рис. 1). При таком сечении вторичной хлопковой потери устойчивости из предельной точки не наблюдалось. Для арки с углом  $2\alpha=180^\circ$  даже при более узком

прямоугольном сечении  $0,5$  см после некоторого развития устойчивой закритической пространственной деформации имела место вторичная потеря устойчивости хлопком из предельной точки. Между тем и для более подъемистой арки с углом  $2\alpha=250^\circ$  (рис. 2) при том же квадратном поперечном сечении никаких вторичных хлопков не наблюдалось. Вертикальные и горизонтальные закритические перемещения плавно нарастали по мере увеличения приложенной вертикальной нагрузки.

Увеличение ширины поперечного сечения арки увеличивает критические нагрузки потери устойчивости в плоскости и из плоскости арки. При этом вторая растет значительно быстрее первой и при каком-то пограничном значении ширины  $b^*$  (для каждой арки это свое значение) минимальной оказывается критическая нагрузка «плоской» потери устойчивости. Вместе с тем увеличение ширины не может внести качественные изменения в характер пространственной бифуркации, но это изменение существенно влияет на

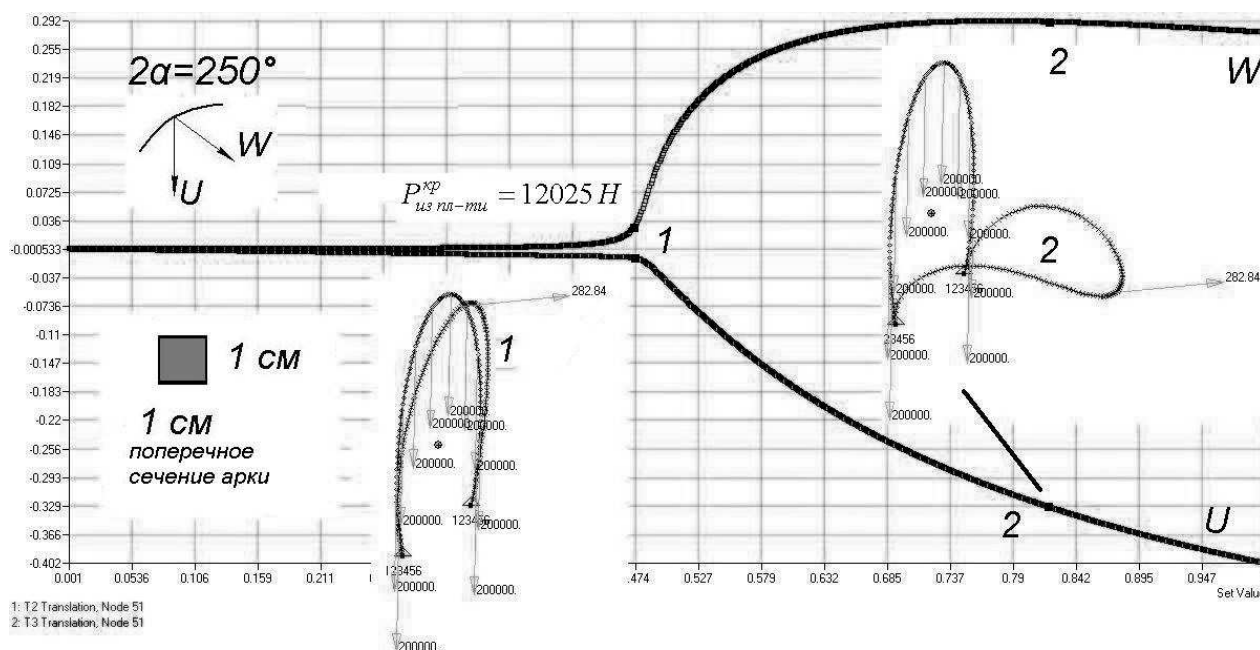


Рис. 2. Монотонное развитие критических вертикальных и горизонтальных перемещений для арки с углом  $2\alpha=250^\circ$  с квадратным поперечным сечением.

закритическое поведение арок и возможность вторичной потери устойчивости хлопком из предельной точки. Рассмотрим это влияние на примере арки с углом  $2\alpha=135^\circ$  (рис. 3). Как уже отмечалось, в случае квадратного сечения (1x1 см) закритическое равновесие такой арки при всех значениях нагрузки остается устойчивым, кривая развития полных перемещений весьма напоминает кривую закритических перемещений эйлерового стержня. При увеличении ширины прямоугольного сечения до 1,2 см при нагрузке в  $\sim 1,5$  раза превышающую критическую (27 кН), развивается вторичная потеря устойчивости хлопком из предельной точки. Однако здесь хлопковые перемещения сравнительно малые. Если же ширину сечения увеличить до 1,5 см, такая же потеря устойчивости из предельной точки развивается при нагрузке 36 кН, незначительно превышающей бифуркационную (35,5 кН).

При этом размеры хлопковых перемещений оказываются достаточно большими, и на первый взгляд может показаться что арка с

таким относительно широким сечением теряет устойчивость в точке неустойчивой бифуркации. На самом деле это не так; просто зона устойчивых закритических деформаций сократилась по нагрузке до 0,5 кН, а характер двухступенчатой пространственной потери устойчивости плоской формы равновесия арки не изменился. Отметим что аналогичное влияние увеличения ширины прямоугольного поперечного сечения наблюдалось и для арки с углом  $2\alpha=180^\circ$ . У такой арки даже при квадратном поперечном сечении вторичная хлопковая потеря устойчивости из предельной точки наблюдалась почти сразу же за бифуркационной.

Как было отмечено выше, если ширина поперечного сечения арки превышает граничное значение  $b^*$ , то минимальной критической нагрузке соответствует плоская потеря устойчивости арки. Так для вышеуказанной арки с углом  $2\alpha=135^\circ$  величина  $b^*\approx 1,8$  см, а для арки с углом раствора  $2\alpha=90^\circ$  пограничное значение.

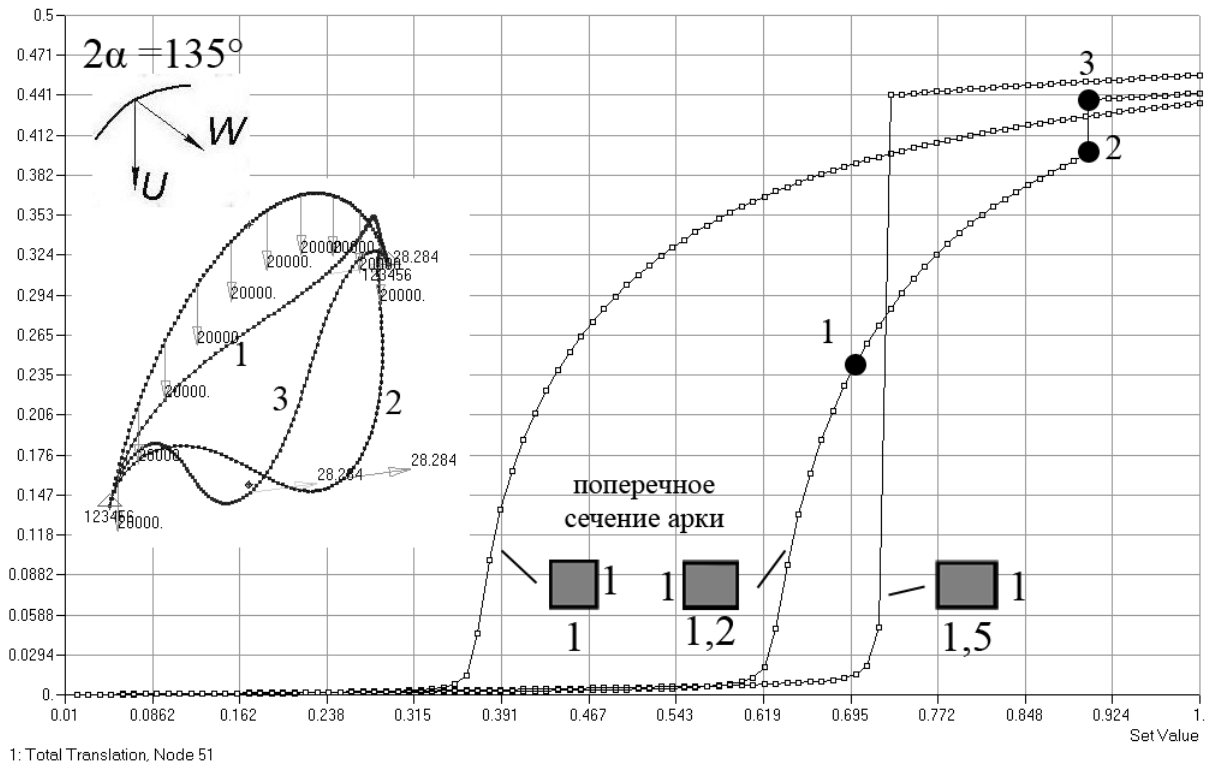


Рис. 3. Влияние ширины поперечного сечения арки на характер вторичной потери устойчивости для арки с углом  $2\alpha=135^\circ$ .

ширины  $b^*\approx 1,6$  см. Однако если произойдет плоская потеря устойчивости арки «в большом», то, естественно, пространственной потери устойчивости уже не будет. Если же плоская потеря устойчивости будет «в малом» (что характерно для симметричных подъемистых арок при действии симметричных вертикальных нагрузок), то при некоторых сочетаниях геометрических параметров арки может произойти вторичная бифуркация из плоскости арки.

Характерный пример – арка с углом раствора  $2\alpha=250^\circ$  и шириной поперечного сечения  $b=2,8$  см ( $b>b^*$ ). На рис. 4 представлена картина трехступенчатой потери устойчивости арки в плоскости, а затем «из плоскости». До нагрузки  $P_{кр\ min}=123,6$  кН арка сохраняет плоскую симметричную сжато-изогнутую форму деформации

(участок 0-1). При  $P_{кр\ min}=124$  кН происходит бифуркация этого равновесия в устойчивую плоскую несимметричную форму. Эта форма сохраняется вплоть до второй критической нагрузки ( $P_{кр2}=134,4$  кН), при которой арка теряет устойчивость плоской формы деформирования в точке неустойчивой симметричной бифуркации (т. 2). Здесь имеет место хлопок в «новое» далекое и полное пространственное сжато-изгибно-крутильное равновесие (т. 3). Это равновесие оказывается устойчивым вплоть до третьей критической нагрузки  $P_{кр3}=144,2$  кН, при которой (т. 4) происходит второй хлопок (но уже из предельной точки) в финальное (качественно) сильно деформированное пространственное равновесие (т.5). Отметим, что при дальнейшем увеличении ширины сечения арки увеличивается вторая критическая нагрузка.

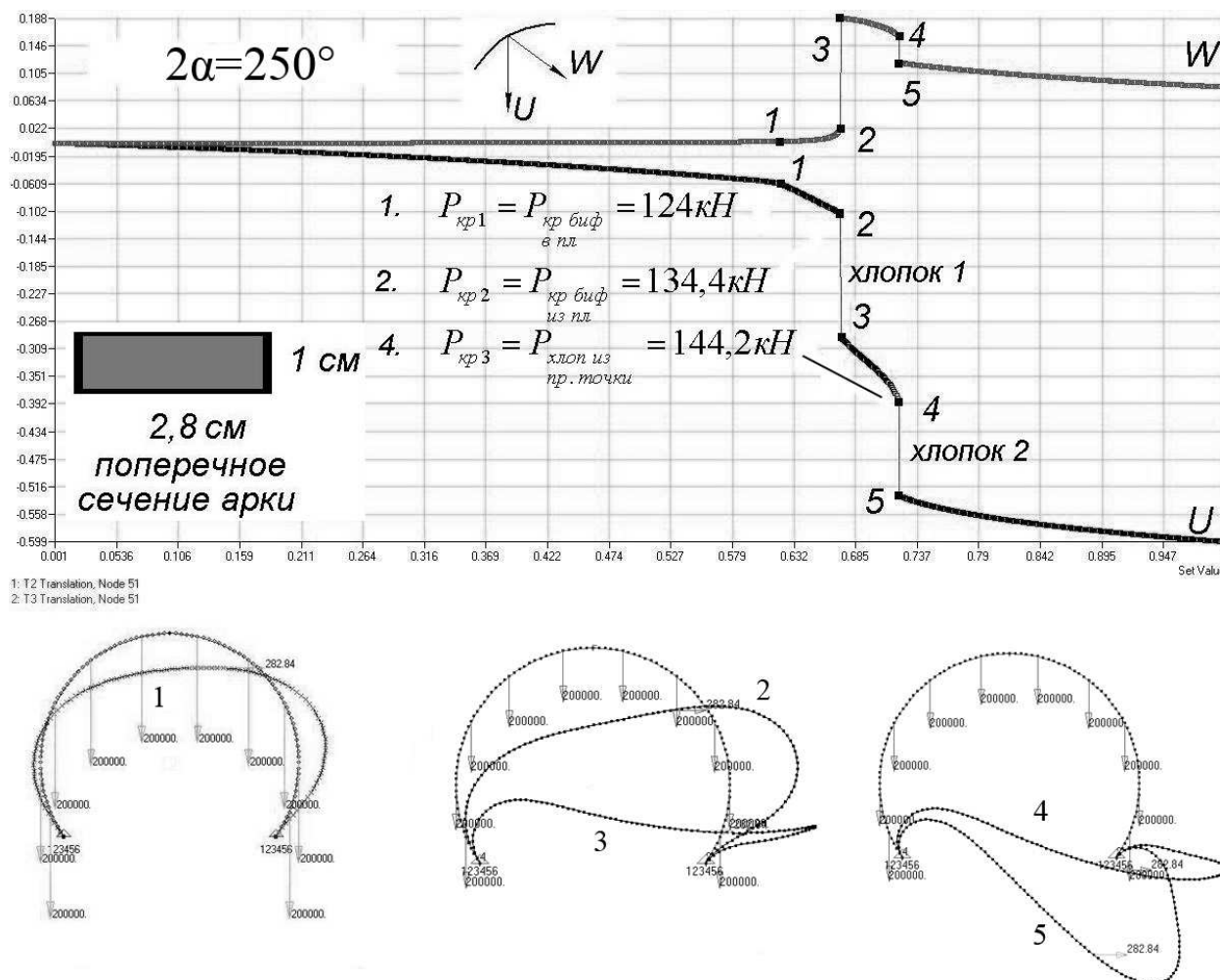


Рис. 4. Развитие горизонтальных и вертикальных закритических перемещений арки с углом  $2\alpha=250^\circ$  при действии вертикальной нагрузки.

Одновременно с этим меняется характер развития пространственных деформаций арки – два последовательных хлопка переходят в один общий большой хлопок (при ширине  $b > 3,45$  см). Отметим, что похожий сценарий развития закритических равновесий наблюдался и для арки с углом  $2\alpha=180^\circ$  при ширине сечения  $b=1,5$  см.

Влияние начальных несовершенств в виде малой поперечной нагрузки  $\epsilon q$ , действующей перпендикулярно плоскости арки, исследовалось для арок с углами раствора  $2\alpha=90^\circ$  и  $180^\circ$ . Однако влияние таких несовершенств на критическую нагрузку в подчиненной предельной точке, как

подсказывает теория, в случае потери устойчивости «в малом», сравнительно невелико. При увеличении  $\epsilon$  от 0 до 0,1 падение критической нагрузки для арки с углом  $2\alpha=90^\circ$  составило не более 11,4% (рис. 5). Примерно такие же результаты были получены и для арки с углом  $2\alpha=180^\circ$ . В заключение отметим, что авторами были выполнены аналогичные исследования пространственной устойчивости круговых арок с шарнирными опорами. Следует отметить, что и для этих арок была выявлена весьма слабая чувствительность критических нагрузок к начальным несовершенствам.

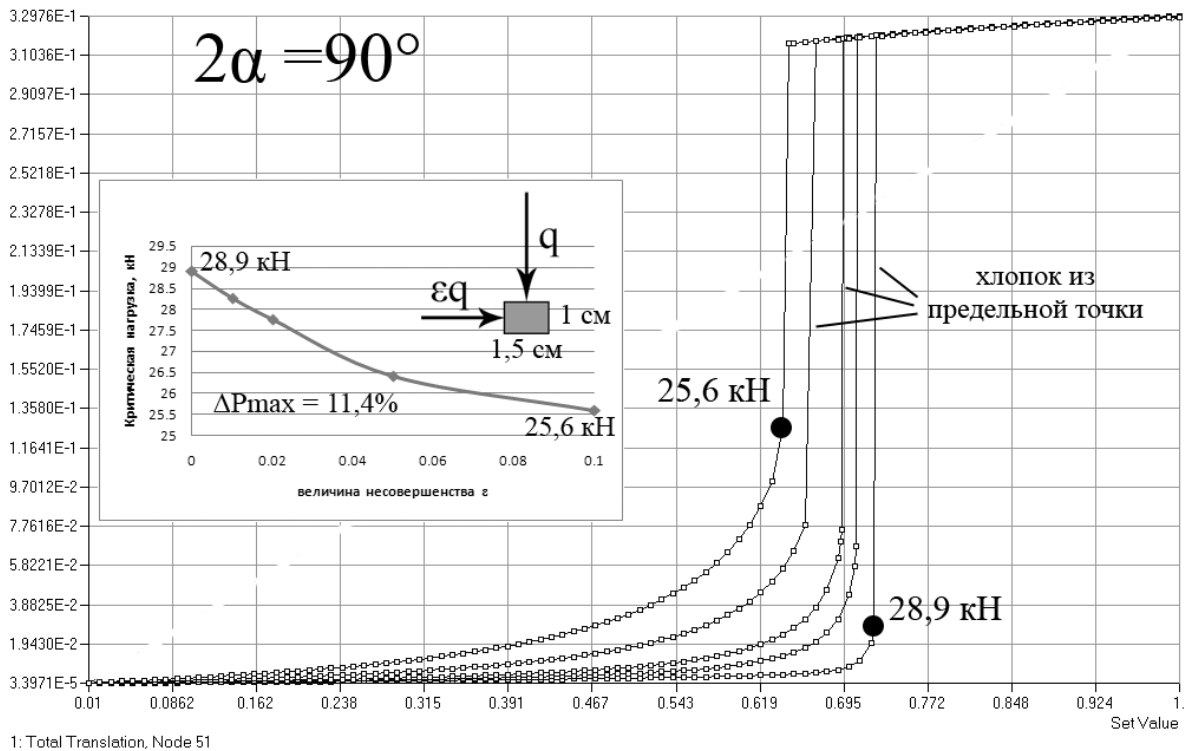


Рис. 5. Влияние начальных несовершенств на величину критической нагрузки пространственной потери устойчивости арки с углом  $2\alpha=90^\circ$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир. 1985.-254 с.
2. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Исследование устойчивости круговых двухшарнирных арок с учетом влияния начальных несовершенств. // Строительная механика и расчет сооружений. №1, 2009. С28-34.

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 15; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru

Бегичев Максим Михайлович, аспирант Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 15; тел./факс +7(499) 978-16-73; E-mail: noxonius@mail.ru

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 15; тел./факс +7(499) 972-49-81

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Немчинов В.В.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Предложен явный по времени численный метод решения динамических упругих задач, основанный на аппроксимации правых частей дифференциальных уравнений методом конечных элементов, но определение скоростей и смещений на следующем временном слое определяются с учётом линейного распределения скоростей между временными слоями. Метод обладает регулируемой аппроксимационной вязкостью и дисперсией численного решения.

**Ключевые слова:** метод решения, динамика, осесимметричная задача, теория упругости, метод конечных элементов, область сложной формы, напряжение

## DIFFRACTION OF A PLANE LONGITUDIAL WAVE BY SPHERICAL CAVITY IN ELASTIC SPACE

*Vladimir V. Nemchinov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Proposed explicit time-numerical method for solving dynamic elastic problems, based on approximation of the right-hand sides of differential equations by the finite element method, but the definition of velocity and displacement of the following temporary layer is defined with the account of the linear velocity distribution between the layers. The method has the regulated approximation viscosity and dispersion of the numerical solution. We studied the accuracy and convergence of numerical solutions for the dynamic problem of diffraction of a longitudinal wave in a spherical cavity.

**Key words:** method of solution, dynamics, axisymmetric problem, elasticity theory, finite element method, the area of the complex form, the voltage.

Взаимодействие упругих волн со сложными строительными объектами является актуальной задачей строительной механики. В осесимметричной системе координат можно моделировать трёхмерные объекты, обладающие осью симметрии, а именно, защитные оболочки ядерных реакторов, подземные газо и нефтехранилищ - т.е. со-

оружения, которые должны обладать максимальной надёжностью. [5, 7 - 13]

В работе предложен явный по времени численный метод решения динамических упругих задач, основанный на аппроксимации правых частей дифференциальных уравнений методом конечных элементов, но определение скоростей и перемещений на следующем временном слое задаётся с

учётom линейного распределения скоростей между временными слоями. Метод обладает регулируемой аппроксимационной вязкостью и дисперсией численного решения. Исследована точность и сходимость численного решения для динамической задачи о дифракции продольной волны на шаровой полости. Уравнения движения в случае осевой симметрии имеет вид [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r}, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} =$$

$$= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\lambda U}{r} + \frac{\lambda \partial W}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} =$$

$$= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\lambda U}{r} + \frac{\lambda \partial U}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\theta + 2\mu \frac{U}{r} =$$

$$= (\lambda + 2\mu) \frac{U}{r} + \frac{\lambda \partial W}{\partial z} + \frac{\lambda \partial U}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (7)$$

где  $U, W$  – перемещения,  $\rho$  – плотность,  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{rz}$  – компоненты тензора напряжений,  $\theta$  – объёмное расширение,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ляме.

Матрица жёсткости и масс для любого конечного элемент определяется формулами [4]:

$$k^{(e)} = \int_V B^T D B 2\pi r \det[J] d\xi d\eta, \quad (8)$$

$$m = \rho \int_V N_i N_j dV =, \quad (9)$$

$$= \rho \int_V N_i N_j 2\pi r \det[J] d\xi d\eta,$$

$$C_0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$D = C_0 \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\varepsilon = \{ \varepsilon_{rr}; \varepsilon_{zz}; \tau_{rz}; \varepsilon_{\theta\theta} \}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}; \tau_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r},$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = B \bar{u}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$m \bar{u}_{tt} + k^{(e)} \bar{u} = F_{\bar{u}}, \quad (16)$$

где  $\bar{u} = \{U, W\}$  – вектор перемещений (14),  $F_{\bar{u}}$  – узловые силы, действующие на конечные элементы.

Скорости и перемещения в дискретный точках расчётной области вычисляются согласно следующим соотношениям, связывающие переменные на следующем временном слое:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \cdot Ru, \quad (17)$$

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta t \cdot Rw, \quad (18)$$

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta t \cdot [\delta \cdot u(t + \Delta t) + (1 - \delta) \cdot u(t)], \quad (19)$$

$$W(t + \Delta t) = W(t) + \Delta t \cdot [\delta \cdot w(t + \Delta t) + (1 - \delta) \cdot w(t)], \quad (20)$$

где  $Ru, Rv$  – правые части уравнений (16), полученных из матрицы жёсткости конечного элемента (8), с обратным знаком, и узловых сил:

$$Ru = -k_{11}^{(e)}U - k_{12}^{(e)}W + F_U, \quad (21)$$

$$Rw = -k_{21}^{(e)}U - k_{22}^{(e)}W + F_W, \quad (22)$$

где  $\Delta t$  – шаг по дискретному времени.  $u(t + \Delta t), w(t + \Delta t)$ ,  $U(t + \Delta t), W(t + \Delta t)$  – скорости и перемещения на временном слое  $t + \Delta t$ .  $u(t) = u, w(t) = w, U(t) = U, W(t) = W$  – скорости и перемещения на временном слое  $t$ .  $\delta$  – параметр схемы.  $\delta \geq 1$  условие устойчивости данного метода. При расчётах параметр берётся из интервала [1.05 – 1.3].

Для иллюстрации работы данного метода решим задачу о дифракции плоской продольной волны на шаровой полости радиуса  $R = 1.0$ .

Рассматривается безразмерная система осесимметричных уравнений движения:

$$\begin{aligned} U' &= U/L, W' = W/L, \\ u' &= u/c_p, w' = w/c_p, \\ t' &= c_p t/L, \sigma_{rr}' = \sigma_{rr}/(\rho c_p^2), \\ \sigma_{zz}' &= \sigma_{zz}/(\rho c_p^2), \end{aligned} \quad (23)$$

Характеристики материала:  $c_s/c_p = 0.5; \beta = (c_s/c_p)^2 = 0.25, (\nu = 1/3), \alpha = 1 - 2\beta = 0.5, L$  – характерный линейный

размер. На шар набегают плоская продольная волна, имеющую единичную скорость по оси  $z$ . Численное решение определялось для различной частоты разбиения большой дуги шара. Дуга, образующая шар при вращении делится на 16, 32, 48 интервалов ( $h_\varphi = \pi/16 = 0.196; r_0 = 1.0;$

$$h_r = r_0 \cdot h_\varphi = 0.196),$$

Для шага по дискретному времени  $\Delta t = 0.098$  – линия 1,  $\Delta t = 0.049$  – линия 2,  $\Delta t = 0.032$  – линия 3.

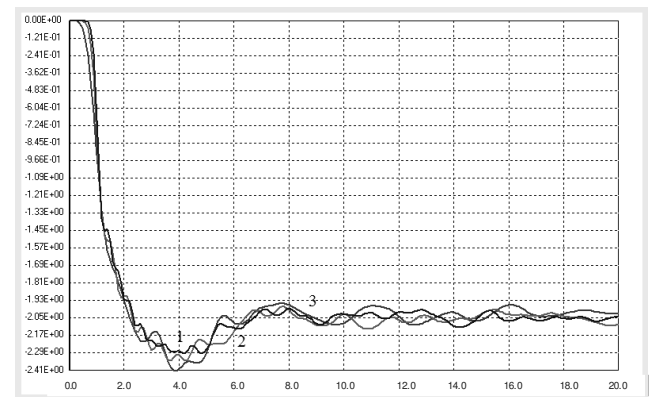


Рис. 1. Значения напряжений  $\sigma_{zz}$  в верхней точке большой окружности шара, параллельной плоскости набегающей волны.

Примерные значения при  $t = 4.5$  равны (-2.28; -2.37; -2.34). Уточнение с помощью экстраполяции Ричарсона даёт значение:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}U_h - 4\frac{U_{h/2}}{2} + \frac{9}{2}\frac{U_{h/3}}{3} = \\ &= -0.5 \cdot 2.3575 + 4 \cdot 2.3305 - 4.5 \cdot 2.33 = \\ &= -2.294. \end{aligned}$$

Получено значение  $\sigma_{zz \max} = -2.294$ . В работе [2] для статической задачи при осевом растяжении среды с шаровой полостью определено  $\sigma_{zz \max} = -2.0625$  при тех же

характеристиках материала, что очень близко к постоянному значению на рис. 1. В работе [3] представлено аналитическое решение динамической задачи о дифракции продольной волны на шаровой полости и показано, что динамическое решение в момент  $t = 4.5$  на 11% больше, чем аналогичное статическое, т.е.  $\sigma_{zz \max} = -2.289375$ , что практически совпадает с уточнённым, методом экстраполяции Ричардсона, численным решением.

Представленный метод численного решения динамических упругих задач, использует конечные элементы для представления расчётных областей сложной формы. Это позволяет использовать библиотеку КЭ, разработанных для статических задач, а явная аппроксимация по времени, использующая параметр  $\delta$ , регулирует спектральные характеристики разностной схемы, что значительно упрощает её использование, в отличие от неявных по времени методов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. // Высшая школа, – М.: 1977. – 216 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. // Наука, – М.: 1975. – 576 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Наукова думка, – Киев:1978. – 308 с.
4. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. // Наука, – М.:1980. – 256 с.
5. Мусаев В.К. Дифракция продольной волны на круглом и квадратном отверстиях в упругой среде // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн. – Фрунзе: Фрунзенский политехнический институт, 1983. – Ч. 1, с. 72-74.
6. Филиппов И.Г., Немчинов В.В. Однородный разностный алгоритм решения плоских динамических задач теории упругости в областях сложной формы // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн. – Фрунзе: Фрунзенский политехнический институт, 1983. – Ч. 1, с. 76-78.
7. Хесин Г.Л., Костин И.Х., Юренина Е.В. Исследование сейсмонапряженного состояния подземных сооружений с учетом влияния свободной поверхности // Гидротехническое строительство. – 1987. – № 7, с. 13-17.
8. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4, с. 74-78.
9. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1, с. 87-110.
10. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3, с. 48–60.
11. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1, с. 55-80.
12. Мусаев В.К. Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2 (XXVII), с. 44-52.
13. Мусаев В.К. Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2 (XXVII), с. 138-149.

Немчнов Владимир Валентинович – кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной механики и математики, Мытищинский филиал, г. Мытищи, Олимпийский проспект, д. 50.  
тел. 8(495) 583-73-81. E-mail: vvnemchinov@mail.com.

Nemchinov Vladimir Vflntinovich. - candidate of technical sciences, professor, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Mytishchi branch MGSU, Mytishchi, Olympic prospect, 50,  
тел. 8(495) 583-73-81. E-mail: vvnemchinov@mail.com.

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Немчинов В.В.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Разработан численный метод решения плоских динамических задач теории упругости, использующий конечные элементы для аппроксимации расчётных областей сложной формы, вычисляющий скорости и напряжения в среде и с высокой точностью выполняющий заданные граничные условия.

**Ключевые слова:** разностная производная, двухслойная разностная схема, дифракция продольной волны, упругая полуплоскость, контурные напряжения, численное моделирование, метод конечных элементов

## NUMERICAL METHODS FOR SOLVING FLAT DYNAMIC ELASTICITY PROBLEMS

*Vladimir V. Nemchinov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Numerical simulation of dynamic problems of elasticity theory remains an urgent task. A complex system of waves occurring in solids: longitudinal waves, transverse, conical and surface Rayleigh waves, etc., does not allow the separation of the fronts of each wave separately, thus it is required to apply so-called "pass-through counting".

The method for solving dynamic problems of plane elasticity theory introduced, which uses finite elements to approximate the computational domains of complex shape, and at each time step calculates the speed and voltage in the medium. Given boundary conditions are satisfied precisely.

The resulting method is classified as explicit, two-layer difference schemes, which formed a special relationship at the boundary points. It is extremely important that the property to perform exactly the given boundary conditions should be allocated separately as the fulfillment of these conditions. Not all of the numerical methods for solving dynamic problems have such capabilities, for example, the classical finite element method that uses a variable displacement.

The method is based on implicit two-layer time-difference scheme based on a system of dynamic equations of the theory of elasticity of the first order in the velocities and stresses, which is converted to an explicit scheme with the help of a Taylor series in time and the basic calculated relations solved using the Galerkin method.

It is shown that the speed and voltage are calculated with the same accuracy as opposed to the classical finite element method, where the determination of stresses have to be numerically differentiating displacement.

It is obtained relations for the calculation of both the internal points of the computational domain and boundary points, which are similar to the ratio of [1-5] obtained by the method of spatial characteristics for a square grid of discrete points.

**Key words:** finite-difference derivative, two-layer difference scheme, the diffraction of a longitudinal wave, circle, contour stress, numerical modeling, finite element method.

Метод численного решения двумерных динамических задач теории упругости, разработанный Клифтонов [1, 2] в середине шестидесятых годов и в дальнейшем развитый в работах Сабодаша П.Ф. и Чередниченко Р.А.

[3, 4, 5], хорошо зарекомендовал себя, но данный метод имеет существенные ограничения на геометрию расчётной области, так как его вывод основан на представлении о конических характеристиках системы диф-

дифференциальных уравнений и, поэтому, реализуется, как правило, на квадратных (прямоугольных) дискретных сетках.

Предлагаемый метод имеет те же положительные свойства метода Клифтона: скорости и напряжения вычисляются с одинаковой точностью как в точках расчётной области, так и на её границе, но он основан на концепции конечных элементов, и поэтому не имеет ограничений на форму расчётных областей [10].

Безразмерная система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая распространение плоских упругих волн, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}, \quad (1,1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}, \quad (1,2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1,3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1,4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \beta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1,5)$$

где

$u, v$  - безразмерные скорости по координате  $x, y$ , полученных из размерных с помощью множителя  $1/c_p$ ,

$p, q, r$  - напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  с множителем  $1/(\rho c_p^2)$ ,

$t$  - безразмерное время, связанное с размерным временем соотношением  $c_p/L$

$\rho$  - плотность среды,  $L$  - характерный линейный размер,

$\alpha = 1 - 2\beta, \beta = (c_s/c_p)^2, c_p, c_s$  - скорость продольной и поперечной волн.

Аппроксимируем данную систему уравнений по времени неявной разностной схемой:

$$u_t = \frac{\partial p^0}{\partial x} + \frac{\partial r^0}{\partial y}, \quad (2.1)$$

$$v_t = \frac{\partial r^0}{\partial x} + \frac{\partial q^0}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$p_t = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$$q_t = \alpha \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$r_t = \beta \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right), \quad (2.5)$$

где, например,

$$u^0 = \frac{(u(t) + u(t + \Delta t))}{2} = \frac{u + \tilde{u}}{2} \quad (3)$$

Производные по времени аппроксимируем разностной производной вперёд, рассматривая скорость по оси  $x$ :

$$u_t = \frac{\tilde{u} - u}{\Delta t}. \quad (4)$$

Остальные скорости и безразмерные напряжения определяются аналогично.

Схему (2) можно преобразовать в явный вид, используя ряд Тейлора по времени до первой производной, например, для скорости  $u$ :

$$u^0 = \frac{u + \tilde{u}}{2} = \frac{u + u + \Delta t \dot{u}}{2} = u + \frac{\Delta t}{2} \dot{u} \quad (5)$$

Соотношения (2) умножаем на функция формы  $N_i$  произвольного конечного элемента (КЭ) и интегрируем по площади элемента  $S$ , для первого уравнения получаем:

$$\int_s u_t \cdot N_i \cdot ds = \int_s \frac{\partial p^0}{\partial x} N_i ds + \int_s \frac{\partial r^0}{\partial y} N_i ds. \quad (8)$$

Меняем порядок дифференцирования:

$$\begin{aligned} & \int_s u_t \cdot N_i \cdot ds + \int_s p^0 \frac{\partial N_i}{\partial x} ds \\ & + \int_s r^0 \frac{\partial N_i}{\partial y} ds = \\ & = \int_s \left[ \frac{\partial(p^0 N_i)}{\partial x} + \frac{\partial(r^0 N_i)}{\partial y} \right] ds = \\ & = \oint_L (p^0 dy - r^0 dx) N_i dl. \end{aligned} \quad (9)$$

Представляем скорости и напряжения внутри КЭ через функции формы:

$$\begin{aligned} u^0 &= u^{0j} N_j, \quad v^0 = v^{0j} N_j, \\ p^0 &= p^{0j} N_j, \quad q^0 = q^{0j} N_j, \quad (10) \\ r^0 &= r^{0j} N_j. \end{aligned}$$

Для разностной производной по времени задаём аналогичные соотношения:

$$\begin{aligned} u_t &= u_t^j N_j, \quad v_t = v_t^j N_j, \\ p_t &= p_t^j N_j, \quad q_t = q_t^j N_j, \quad (11) \\ r_t &= r_t^j N_j. \end{aligned}$$

Имеем для скорости  $u$  (остальные аналогичны):

$$\begin{aligned} u^0 &= u + 0.5 \cdot dt \cdot u_t = u + 0.5 dt \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \\ & = N_j u^j + 0.5 dt \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} p^j + \frac{\partial N_j}{\partial y} r^j \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \int_s N_i \cdot N_j \cdot ds \right) u_i^j \\ & + \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j ds \right) p^j + \\ & + 0.5 dt \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} ds \right) u^j + \\ & + 0.5 dt \alpha \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} ds \right) v^j + \\ & + \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j ds \right) r^j + \\ & + 0.5 dt \beta \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} ds \right) v^j + \\ & + 0.5 dt \beta \left( \int_s \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} ds \right) u^j + \\ & = \oint_G (p^0 dy - r^0 dx) N_i dl. \end{aligned} \quad (13)$$

После применения формулы Грина в правой части, получаем контурный интеграл по границе элемента.

Для получения глобальных соотношений выражение (13) и все аналогичные, необходимо просуммировать по всем элементам расчётной области.

Для внутренних узлов расчётной области при суммировании контурные интегралы сокращаются, так как они вычисляются по границе элемента с учётом направления обхода (против часовой стрелки).

Обозначим матрицы:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j ds, \\ B_{ij} &= \int_s \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j ds, \\ C_{ij} &= \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} ds, \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_{ij} = \int_s \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} ds,$$

$$E_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} ds,$$

$$F_{ij} = \int_s \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} ds,$$

$$M_{ij} = \int_s N_i N_j ds.$$

Получаем:

$$M_{ij} u^J + A_{ij} p^J + B_{ij} r^J + 0.5 dt \left[ (C_{ij} + \beta F_{ij}) u^J + (\alpha D_{ij} + \beta E_{ij}) v^J \right] = \oint_G (p^0 dy - r^0 dx) N_i dl, \quad (15.1)$$

$$M_{ij} v^J + A_{ij} r^J + B_{ij} q^J + 0.5 dt \left[ (\beta C_{ij} + F_{ij}) v^J + (\beta D_{ij} + \alpha E_{ij}) u^J \right] = \oint_G (r^0 dy - q^0 dx) N_i dl, \quad (15.2)$$

$$M_{ij} p^J + A_{ij} u^J + \alpha B_{ij} v^J + 0.5 dt \left[ C_{ij} p^J + (D_{ij} + \alpha E_{ij}) r^J + \alpha F_{ij} q^J \right] = \oint_G (u^0 dy - \alpha v^0 dx) N_i dl, \quad (15.3)$$

$$M_{ij} q^J + \alpha A_{ij} u^J + B_{ij} v^J + 0.5 dt \left[ \alpha C_{ij} p^J + (\alpha D_{ij} + E_{ij}) r^J + F_{ij} q^J \right] = \oint_G (\alpha u^0 dy - v^0 dx) N_i dl, \quad (15.4)$$

$$M_{ij} r^J + \beta A_{ij} v^J + \beta B_{ij} u^J + 0.5 dt \left[ \beta E_{ij} p^J + (\beta C_{ij} + \beta E_{ij}) r^J + \beta D_{ij} q^J \right] = \beta \oint_G (v^0 dy - u^0 dx) N_i dl. \quad (15.5)$$

Разностная схема (15) будет явно по времени, если матрицу масс взять в диагональном виде, например для 4-х угольного элемента:

$$M_{ij} = \frac{S}{4} \delta_{ij} = m_i,$$

где  $S$  – площадь элемента, а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $i$  – дискретная точка.

Обозначим для первого, и аналогично для остальных уравнений:

$$Fu = - \left( A_{ij} p^J + B_{ij} r^J + 0.5 dt \left[ (C_{ij} + \beta F_{ij}) u^J + (\alpha D_{ij} + \beta E_{ij}) v^J \right] \right); \quad (16)$$

Соотношения (15) примут вид:

$$m_i u_t^i = Fu + \oint_G (p^0 dy - r^0 dx) N_i, \quad (17.1)$$

$$m_i v_t^i = Fv + \oint_G (r^0 dy - q^0 dx) N_i, \quad (17.2)$$

$$m_i p_t^i = Fp + \oint_G (u^0 dy - \alpha v^0 dx) N_i, \quad (17.3)$$

$$m_i q_t^i = Fq + \oint_G (\alpha u^0 dy - v^0 dx) N_i, \quad (17.4)$$

$$m_i r_t^i = Fr + \oint_G (\beta v^0 dy - \beta u^0 dx) N_i. \quad (17.5)$$

Соотношения (17) характерны тем, что необходимо выделять граничные точки и в (17) вычислять контурные интегралы.

Рассмотрим, для примера, 4-х точечный элемент с базисными функциями (функции формы):

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned} \quad (18)$$

На границе элемента функции формы линейны, поэтому интегралы вычисляются просто и формулы (17) можно преобразовать к более простому виду. Для первого уравнения имеем:

$$\begin{aligned} m_i u_t^i &= Fu + \oint_G (p^0 dy - r^0 dx) N_i = \\ &= Fu + \oint_G (p dy - r dx) N_i + \\ &+ 0.5 dt \oint_G (p_t dy - r_t dx) N_i. \end{aligned} \quad (19)$$

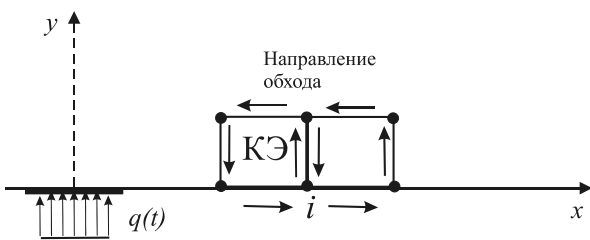


Рис. 1. Схема расчётной области с показом направления обхода конечного элемента.

Соотношения (19) с учетом суммирования двух четырёхугольных конечных элементов на границе расчётной области и вычислением интегралов от функций форм имеют вид:

$$\begin{aligned} m u_t^i &= Fu - dx \cdot r - 0.5 dt \cdot dx \cdot r_t \\ &= \Re u - 0.5 dt \cdot dx \cdot r_t, \end{aligned} \quad (20.1)$$

$$\begin{aligned} m v_t^i &= Fv - dx \cdot q - 0.5 dt \cdot dx \cdot q_t \\ &= \Re v - 0.5 dt \cdot dx \cdot q_t, \end{aligned} \quad (20.2)$$

$$\begin{aligned} m p_t^i &= Fp - dx \cdot \alpha \cdot v \\ &- 0.5 dt \cdot dx \cdot \alpha \cdot v_t \\ &= \Re p - 0.5 dt \cdot dx \cdot \alpha \cdot v_t, \end{aligned} \quad (20.3)$$

$$\begin{aligned} m q_t^i &= Fq - dx \cdot v - 0.5 dt \cdot dx \cdot v_t \\ &= \Re q - 0.5 dt \cdot dx \cdot v_t, \end{aligned} \quad (20.4)$$

$$\begin{aligned} m r_t^i &= Fr - \beta \cdot dx \cdot u \\ &- 0.5 \cdot \beta \cdot dt \cdot dx \cdot u_t \\ &= \Re r - 0.5 \cdot \beta \cdot dt \cdot dx \cdot v_t, \end{aligned} \quad (20.5)$$

где  $m$  – сумма масс элементов в точке  $i$ , равная  $0.5 \cdot h^2$ .

Из соотношений (20) можно получить три линейно независимые комбинации так, чтобы знаменатель соотношений не мог обратиться в ноль.

Сумма (20.1) и (20.5) даёт выражение:

$$u_t + \frac{1}{\sqrt{\beta}} r_t = \frac{\Re u + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Re r}{m + 0.5 \cdot dt \cdot dx \cdot \sqrt{\beta}} \quad (21.1)$$

Сумма (20.2) и (20.4):

$$v_t + q_t = \frac{\Re v + \Re q}{m + 0.5 \cdot dt \cdot dx}, \quad (21.2)$$

Разность (2.3) и (2.4):

$$p_t - \alpha \cdot q_t = \frac{\Re p - \alpha \Re q}{m}. \quad (21.3)$$

Соотношения (21) полностью замыкают разностную схему (15) и позволяют вычислять переменные как во внутренних точках области, так и на её границе.

Полученные соотношения (15), (21) являются обобщением метода пространственных характеристик Клифтона [1, 2] и в дальнейшем развитый Сабодашом П.Ф. и Чередниченко Р.А. [3, 4, 5].

Для иллюстрации работы данного метода рассматривается известная задача о распространении системы упругих волн на полуплоскости, при ударе штампом по границе полуплоскости. (Рис.1)[6 - 14]

Расчётное поле задавалось размером 161 x 81 дискретных точек или 20 единиц по оси  $x$  и 10 единиц по оси  $y$ , шаг по координатам  $hx = hy = 0.125$ . Отношение скорости поперечной и продольной волн

$$\left(\frac{C_s}{C_p}\right) = 0.5, \beta = \left(\frac{C_s}{C_p}\right)^2 = 0.25, \\ \alpha = 1 - 2\beta = 0.5.$$

Полученные результаты представлены на рис.2, рис.3.



Рис.2. Зеркально отражённая относительно оси  $x$  картина полос  $\tau_{\max}$  показывает расположение фронтов продольной, конической волны и волны Релея.

На рис.2 показана картина полос  $\tau_{\max}$  (для удобства приведено зеркальное отражение относительно верхней границы) в момент безразмерного времени  $T \approx 20$ , продольная волна практически дошла до правой границе. Видны все фронты волн, особенно ярко выражена волна Релея.

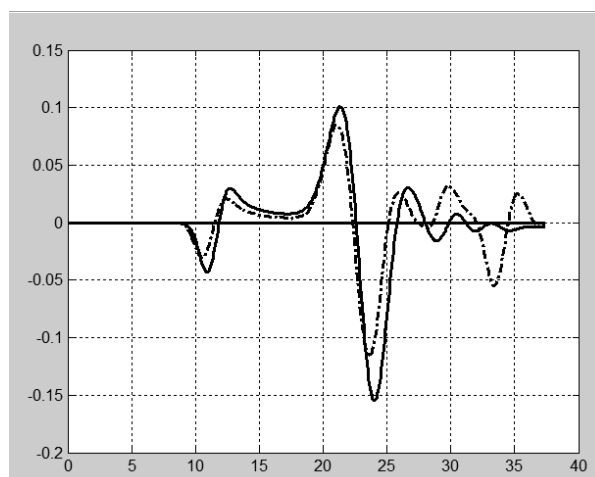


Рис. 3. Величина безразмерного напряжения  $p = \sigma_{xx} / (\rho C_p)^2$  на границе расчётной области в дискретной точке с координатами (81,1) (сплошная линия) и кривая волны Релея, полученная методом [8, 9] (пунктирная линия).

Для сравнения (Рис.3), сплошная линия - напряжения  $p$  в центральной точке границы, в зависимости от безразмерного времени, пунктирная линия получена с помощью метода [8, 9] (МКЭ), но граничные условия задавались не так, как в классическом методе конечных элементов, которые для данных КЭ имеют первый порядок точности правых частей по переменной  $y$ , а граничные напряжения представлялись центральными разностями с учётом фиктивного слоя точек:

$$q(t) = \begin{cases} \sin(\pi \cdot t), & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad r = 0,$$

под поршнем и  $q = 0, r = 0$  на границе вне поршня. Для напряжений

$$q = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ r = \beta \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (22)$$

на шаблоне крест, при аппроксимации центральными разностями, получаем значения перемещений в узлах фиктивного слоя:

$$\begin{aligned} U_{i,1} &= U_{i,3} + (V_{i+1,2} - V_{i-1,2}), \quad (23) \\ V_{i,1} &= V_{i,3} + \alpha \cdot (V_{i+1,2} - V_{i-1,2}) - \\ &- 2q(t) \cdot h, i \in [1, 6] \end{aligned}$$

или, аналогично, для других точек границы, но без слагаемого с функцией  $q$ .

Полученные графики напряжений  $\sigma_{xx} / (\rho C_p)^2$  в центральной точке границы практически совпадают.

Предлагаемый метод основан на уравнениях первого порядка для скоростей и напряжений и переменные вычисляются с одинаковой точностью, как в области, так и на границе, а метод конечных элементов вычисляет перемещения, причем на границе точность падает. Для получения нужных напряжений необходимо перемещения дифференцировать по координатам, что ещё больше снижает точность.

Рассмотренный метод численного решения плоских динамических задач теории упругости более точно определяет скорости и напряжения и может применяться при моделировании динамических задач со сложной геометрией [10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Clifton R.J.** A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. Appl. Math. - 1967. vol 25 - №1, pp. 97-116.
2. **Клифтон Р. Дж.** Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // В сб. "Механика", - №1 (107). - М.: Мир, 1968, с. 103 - 122.
3. **Сабодаш П.Ф., Чердниченко Р.А.** Применение метода пространственных характеристик к решению задач о распространении волн в упругой полуполосе // Известия АН СССР. Механ. твёрдого тела. - 1972, № 6, с. 180-185.
4. **Сабодаш П.Ф., Чердниченко Р.А.** Распространение упругих волн в полосе, составленной из двух разнородных материалов // Сб. "Избранные проблемы прикладной механики" посвященный 60-летию академика В.Н. Челомея. - М.: ВИНТИ, 1974, с. 617-624.
5. **Немчинов В.В., Чердниченко Р.А.** Распространение в слоистом полупространстве упругих волн вызванных сферически симметричным источником возмущений // Газовая и волновая динамика. Вып.3. - М.: Изд. МГУ, 1979, с. 163-166.
6. **Мусаев В.К.** Применение метода конечных элементов к решению плоской нестационарной динамической задачи теории упругости // Механика твердого тела. - 1980. - № 1, с. 167.
7. **Хесин Г.Л., Филиппов И.Г., Костин И.Х., Мусаев В.К., Немчинов В.В.** Применение методов численного анализа и динамической фотоупругости для исследования напряженно-деформированного состояния гидротехнических сооружений при сейсмических воздействиях // Четвертое научно-техническое совещание Гидропроекта «Совершенствование научных исследований, ускорение внедрения достижений науки и техники в проекты с целью повышения эффективности строительства и эксплуатации ГЭС, ГАЭС и АЭС». - М.: Гидропроект, 1982. - Ч. 1. - С. 86-87.
8. **Филиппов И.Г., Немчинов В.В.** Однородный разностный алгоритм решения плоских динамических задач теории упругости в областях сложной формы // Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упруго-пластических волн. Фрунзе: Фрунзенский политехнический институт, 1983. - Ч. 1. 1983, с. 76-78.
9. **Немчинов В.В.** Дифракция плоской продольной и поперечной волны на круглом отверстии. // Вестник ЦНИИСК, №2. 2009. - М.: ЦНИИСК, с. 71 - 76.
10. **Немчинов В.В.** Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости. // Вестник МГСУ, №8, - М.: МГСУ, с. 104 - 111.
11. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование интерференции плоских волн напряжений в виде функции Хевисайда // Тезисы докладов XLVI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии. Секция физики. - М.: РУДН, 2010. - с. 112.
12. **Мусаев В.К.** Математическое моделирование волн напряжений в объектах геотехники при сейсмических воздействиях // Геотехнические проблемы мегаполисов. Труды Международной конференции по геотехнике. - М.: ПИ «Геореконструкция», 2010, с. 1517-1524.
13. **Мусаев В.К.** О численном моделировании упругих волн напряжений в полуплоскости на прямоугольной сетке // Техносферная безопасность, надежность, качество, энерго и ресурсосбережение: Т38. Материалы Международной научно-практической конференции. Выпуск XII. - Рос-

тов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2010, с. 348-352.

14. **Мусаев В.К.** Численное моделирование волн напряжений в сложных деформируемых телах при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Инновационные технологии в строительстве и подготовке отраслевых инженерных кадров. Сборник трудов II регионального научно-практического семинара. – Смоленск: Смоленский филиал МИИТ, 2011. – с. 204-208.

---

Немчнов Владимир Валентинович – кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной механики и математики, Мытищинский филиал, г. Мытищи, Олимпийский проспект, д. 50.  
тел. 8(495) 583-73-81. E-mail: vvnemchinov@mail.com.

Nemchinov Vladimir Vflntinovich. - candidate of technical sciences, professor, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Mytishchi branch MGSU, Mytishchi, Olympic prospect, 50.,  
тел. 8(495) 583-73-81. E-mail: vvnemchinov@mail.com.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ГОДОГРАФА АФЧХ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

*Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** В статье рассматриваются закономерности формирования годографа АЧХ консольного стержня в полосе частот возбуждения основного продольного резонанса и антирезонанса при динамических нагрузках. Анализируются зависимости мнимой и вещественной составляющих АЧХ от частоты динамической нагрузки.

**Ключевые слова:** стержневые конструкции, одномерные конструкции, динамические нагрузки, акустическое возбуждение, резонанс, антирезонанс, амплитудно-частотная характеристика, фазо-частотная характеристика, годограф

## RESEARCH OF CONSOLES GAIN-FAZO-FREQUENCY CHARACTERISTIC HODOGRAPH AT LINEAR DYNAMIC LOADINGS

*Mihail S. Hlystunov, Zhanna G. Mogiljuk*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** In article is considered consoles gain-fazo-frequency characteristic hodograph formation laws in a excitation frequencies strip of the basic longitudinal resonance and an antiresonance at dynamic loadings. Dependences of gain-fazo-frequency characteristic imaginary and material components on dynamic loading frequency are analyzed.

**Key words:** rod designs, one-dimensional designs, dynamic loadings, acoustic excitation, resonance, antiresonance, gain-frequency characteristic, fazo-frequency characteristic, hodograph

В настоящей статье приведены отдельные результаты инициативных исследований авторов в области математического моделирования динамических процессов в элементах строительных конструкций, посвященные физическим принципам построения расчетных математических моделей и годографа АФЧХ [1-5], на примере возбуждения продольного резонанса и антирезонанса в консольно закрепленном стержне.

В ряде статей авторов была рассмотрена схема динамического нагружения и закачки продольной акустической волны в консольно закрепленный стержень на рис.1, который, в общем случае, имеет бесконечное число степеней свободы, так как равномерно распре-

деленные масса и жесткость стержня позволяют возбудить в нем неограниченное число резонансов различных мод колебаний и их гармоник.

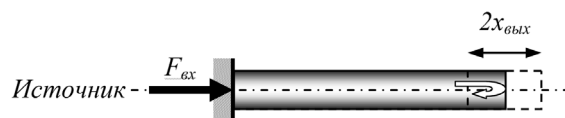


Рис. 1.

Простейшим способом возбуждения волновых процессов в стержне является ударное или вибрационное воздействие на узел его консольной заделки. В качестве первого ша-

га в предыдущих статьях авторов были рассмотрены возможные резонансные проявления различных мод возбуждения колебаний в стержне под действием динамических нагрузок и методы их описания, включая использование методов операционного исчисления, дуальных электромеханических аналогий и удельных акустических импедансов материалов стержневых конструкций.

Было показано, что продольная мода резонансных колебаний стержня вдоль его длины  $L$  на эквивалентной схеме в виде пружинного маятника с эквивалентной акустической жесткостью  $k_0$ , и массой  $m_0$ , которая хотя и имеет ограниченное подобие, но, вместе с тем, позволяет корректно описать механизм возбуждения и АФЧХ продольного резонанса стержня в окрестности его основной гармонии.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ) в окрестности, например, основной продольной моды резонансных колебаний стержня может быть представлена в виде комплексной функции:

$$K(j\bar{f}) = \frac{K_0(1-\bar{f}^2)}{\bar{f}^4 + (4\xi^2 - 2)\bar{f}^2 + 1} - j \frac{2K_0\xi\bar{f}}{\bar{f}^4 + (4\xi^2 - 2)\bar{f}^2 + 1} = K_m(\bar{f})[(1-\bar{f}^2) - j2\xi\bar{f}] = K_m(\bar{f})[Q_m(\bar{f}) - jR_m(\bar{f})]$$

модуль которой определяется выражением:

$$|K(\bar{f})| = \left| \frac{K_0}{\sqrt{1 + (4\xi^2 - 2)\bar{f}^2 + \bar{f}^4}} \right|$$

где  $K_0 = \frac{T_0^2}{m_0}$  – статический коэффициент передачи или преобразования при  $\omega_0=0$ ,

$\bar{f} = \frac{f}{f_0}$  - циклическая частота, нормированная

по основной резонансной  $f_0 = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$

$\xi = \frac{\beta T_0}{m_0}$  - нормированная постоянная затухания.

Для более детального и полного визуального представления зависимости вещественной и мнимой составляющей АФЧХ, а также модуля АФЧХ (АЧХ) на рис.2.а) и ФЧХ на рис.2.б) от частоты построим

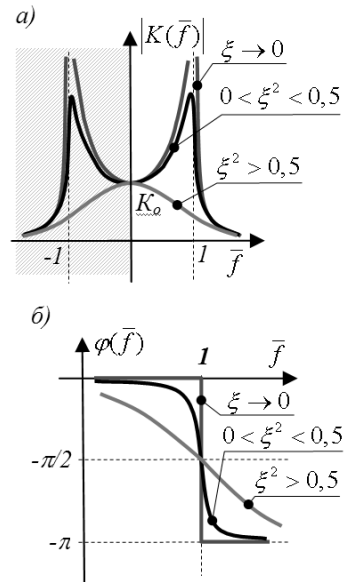


Рис. 2.

кривые (годограф) АФЧХ для положительных частот в комплексной плоскости или в полярных координатах, как показано на рис.3, для чего выражение АФЧХ необходимо представить в следующем виде:

$$K(j\bar{f}) = |K(\bar{f})| e^{j\varphi} = \left| \frac{K_0}{\sqrt{1 + (4\xi^2 - 2)\bar{f}^2 + \bar{f}^4}} \right| e^{-j \arctg \frac{2\xi\bar{f}}{1-\bar{f}^2}}$$

Анализ закономерностей на кривых АЧХ (рис.2.а) и ФЧХ (рис.2.б) и годографа на рис.3 позволяет сформулировать следующие выводы.

1. В идеализированном случае, при нулевом коэффициенте затухания  $\xi = 0$ , фаза в диапазоне нормированной частоты от 0 до 1, то есть в окрестности слева от частоты резонанса, фактически равна нулю, а в окрестности справа «мгновенно» понижается, сразу после превышения частоты резонанса до значения  $-\pi$ .

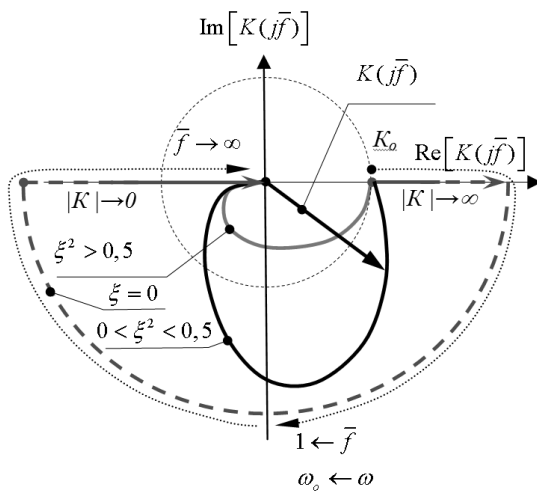


Рис. 3.

Причем переброс фазы с 0 до  $-\pi$  происходит при бесконечной амплитуде АЧХ на частоте резонанса, что показано на рис.3 пунктирной кривой. При промежуточном значении фазы  $-\pi/2$ , когда частота равна резонансной, вещественная составляющая становится равной нулю при бесконечном значении мнимой.

2. В случае если значение коэффициента затухания больше нуля, но меньше критического  $0 < \xi^2 < 0,5$ , положение концов годографа АФЧХ при нулевом и бесконечном значении частоты совпадает положением соответствующих точек для идеализированного случая с нулевым затуханием. Однако по мере роста частоты фаза по гладкой кривой понижается до значения  $-\pi$  с перегибом на резонансной частоте при значении фазы  $-\pi/2$ , а значение модуля АФЧХ на всем протяжении годографа принимает конечное значение, причем при резонансе и промежуточном значении фазы в окрестности  $-\pi/2$  справа, когда частота равна резонансной, с учетом затухания  $\omega_p^2 = \omega_0^2 - \xi^2$ , вещественная составляющая принимает минимальное значение при максимальном значении мнимой.

3. В случае если значение коэффициента затухания больше критического  $\xi^2 > 0,5$ , положение концов годографа АФЧХ при нулевом и бесконечном значении частоты совпадает положением соответствующих точек для

идеализированного случая с нулевым затуханием. По мере роста частоты фаза по гладкой кривой понижается до значения  $-\pi$  с перегибом на резонансной частоте при значении фазы  $-\pi/2$ . Однако значение модуля АФЧХ на всех частотах не будет превышать значение  $K_0$  на нулевой частоте.

Таким образом по мере роста частоты вправо от резонансной и независимо от значения коэффициента затухания модуль АФЧХ стремится к нулю. Учитывая, что стержень имеет достаточно большое число гармоник основного продольного резонанса, то тогда скорость убывания модуля будет увеличиваться по мере пересечения частотой нагрузки значения частоты очередной нечетной гармоники, что противоречит данным экспериментальных исследований АЧХ консольного стержня.

Эта проблема обусловлена тем, что в широкой полосе частот помимо резонансов существуют антирезонансы на частотах четных гармоник, которые «останавливают» падение модуля АФЧХ после пересечения резонансных частот. Причем количество антирезонансов, как правило, равно числу резонансов. Однако «сшивка» фрагментов АФЧХ, построенных в окрестностях резонансов и антирезонансов представляет собой достаточно сложную самостоятельную задачу и будет рассмотрена в следующей статье авторов.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика стержня в окрестности антирезонанса при стабильности коэффициента затухания в широкой полосе частот может быть представлена в виде комплексной функции:

$$K(j\bar{f}) = K_0 [(1 - \bar{f}^2) + 2j\xi\bar{f}],$$

модуль которой определяется выражением:

$$|K(j\bar{f})| = K_0 \sqrt{(1 - \bar{f}^2)^2 + 4\xi^2\bar{f}^2},$$

а фаза выражением:

$$\varphi(\bar{f}) = \text{arctg} \frac{2\xi\bar{f}}{(1-\bar{f}^2)}.$$

В полярных координатах выражение для АФЧХ антирезонанса имеет вид:

$$K(j\bar{f}) = |K(j\bar{f})| e^{-j \text{arctg} \frac{2\xi\bar{f}}{(1-\bar{f}^2)}}.$$

При отсутствии затухания АФЧХ примет вид:

$$K(j\bar{f})|_{\xi=0} = -K_o(\bar{f}^2 - 1).$$

Кривые АЧХ (а) и ФЧХ (б) в окрестности антирезонанса стержня приведены на рис. 4, а годограф на рис. 5.

По расположению особых точек, например, экстремумов функции, АЧХ антирезонансов антисимметричны АЧХ резонансов, у которых в этих точках ( $\bar{f} = \pm 1$ ) расположены максимумы, а на АЧХ антирезонансов - минимумы.

Антисимметричны ФЧХ резонанса также и кривые ФЧХ антирезонанса. По мере приближения к частоте антирезонанса фаза не опускается в отрицательной области до  $-\pi/2$  (как в случае резонанса), а растет в положительной области до значения  $+\pi/2$ .

При пересечении частоты антирезонанса значение фазы асимптотически стремиться к значению  $+\pi$ . Причем, чем меньше значения коэффициента затухания тем резче происходит рост фазы, вплоть до «мгновенного» скачка на частоте антирезонанса при нулевом значении коэффициента затухания, а значение АЧХ, в этом случае, будет строго равным нулю.

Одной из тонких задач построения полного годографа АФЧХ стержня является задача размещения точки начала отсчета АФЧХ антирезонанса на кривой годографа, так как всегда акустическому антирезонансу колебаний стержня предшествует его акустический резонанс.

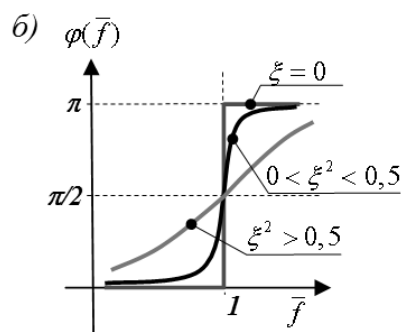
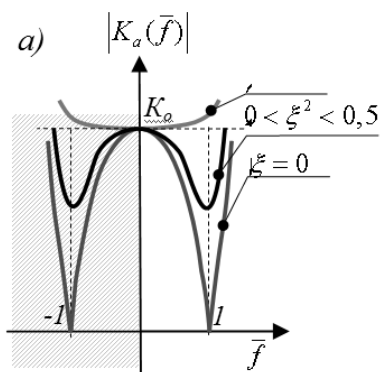


Рис. 4.

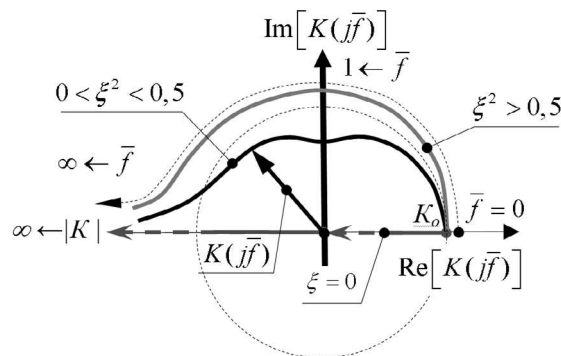


Рис. 5.

Причем на шкале частот нормированных по основному резонансу значения частот антирезонансов будут находиться на четных значениях этой шкалы, а чередующиеся с ними резонансы – на нечетных.

Однако «сшивка» фрагментов АФЧХ, построенных в окрестностях резонансов и антирезонансов представляет собой достаточно сложную самостоятельную задачу и будет рассмотрена в следующей статье авторов.

С высокой точностью количественные значения резонансных и антирезонансных частот и коэффициентов затухания могут быть установлены только экспериментальным путем, но при этом представленные выше формы кривых фрагментов полного годографа в окрестности резонанса и антирезонанса, согласно выражениям (3) и (7), не изменятся и останутся базой для уточнений всего лишь начальных параметров этих выражений, а, следовательно, будут полезны при практическом расчетном моделировании динамической реакции стержневых конструкций на широкополосные динамические нагрузки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
2. **Скучик Е.** Простые и сложные колебательные системы. – М.: МИР, 1971. – 558 с.
3. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
4. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Геоэкологическая эффективность микросейсмических процессов в неоднородных основаниях. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – М.: ВНИИТПИ, №3, 2003, с. 16.
5. Ультразвук. Под ред. И.П.Галямина. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.

---

Хлыстунов Михаил Сергеевич, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

Могилюк Жанна Геннадиевна, доцент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

# УЧЁТ ВОЛНОВОЙ ПРИРОДЫ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ РАСЧЁТЕ СООРУЖЕНИЙ

*В.В. Вершинин<sup>1</sup>, С.В. Кузнецов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Приводится обзор исследований по сейсмическим акустическим волнам различной этиологии, включая объемные волны и поверхностные волны Рэлея, Рэлея – Лэмба и Лява. Анализируются работы по исследованию взаимодействия сейсмических волн с сооружениями. На основе конечноэлементных моделей исследуется воздействие сейсмических волн на сооружения. Проводится сравнение с существующими методами, в которых не учитывается влияние волновой природы сейсмических воздействий.

**Ключевые слова:** сейсмическая волна, волна Рэлея, расчёт сооружений, землетрясение

## SEISMIC ANALYSIS OF STRUCTURES WITH REGARD TO WAVE NATURE OF THE SEISMIC LOADS

*Vladislav V. Vershinin<sup>1</sup>, Sergey V. Kuznetsov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Moscow University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The analysis is performed by the combination of an explicit time-integration algorithm and the finite element method, allowing us to study propagation of Rayleigh, Rayleigh-Lamb, Love and bulk waves. The comparison of the wave dynamics method and the methods based on the spectral decomposition is performed. Such a comparison reveals that account of the wave nature considerably change the deformation field in a structure subjected to action of the seismic waves.

**Keywords:** Seismic wave, Rayleigh wave, structural analysis, earthquake

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемые ниже недавние тектонические землетрясения, произошедшие в различных местах земного шара, привели к неожиданным разрушениям тех сооружений, что, казалось бы, должны были выдержать землетрясения, интенсивность которых не превосходила расчетной.

На рис. 1 показан президентский дворцовый комплекс в Порт-о-Пренсе до и после разрушения землетрясением, произошедшим в марте 2010 г. Эпицентр землетрясения располагался на глубине 13 км и находился в 25 км от Порт-о-Пренса. Историческое здание

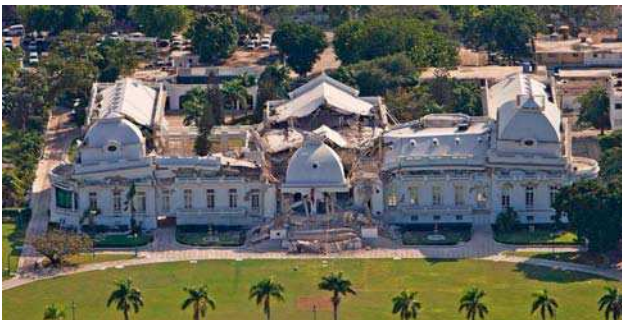
дворцового комплекса постройки 1912-1920 гг. (архитектор George Baussan) было возведено из железобетона [1] в соответствии с французскими проектными нормами того времени. В 2004 г. дворцовый комплекс был реконструирован и оснащен системой сейсмоизоляторов [2]. Анализ разрушений выявил многочисленные трещины в фундаментных конструкциях центральной части комплекса.

В Японии в марте 2011 г. произошло землетрясение магнитудой 8.9 баллов (по некоторым данным в эпицентре было 9 баллов по шкале Рихтера [3]), эпицентр которого располагался на глубине 13 км и в 35 км от столи-

цы префектуры Фукусима. Несмотря на то что в этом районе расчетным является девятибалльное землетрясение, некоторые здания оказались разрушенными. Особенно интересными представляются разрушения фундаментных плит, показанные на рис. 2, см. [4, 5].



а.



б.

*Рис.1. Дворцовый комплекс в Порт-о-Пренсе, Гаити: а) до землетрясения; б) после землетрясения.*

На рис. 3 показано разрушение фундаментной плиты в торговом здании в префектуре Ниигата [6]. Разрушение вызвано землетрясениями в июле 2007 г. интенсивностью 6.6 баллов по шкале Рихтера с эпицентром на глубине 10 км и последовавшим за этим глубоководным землетрясением магнитуды 6.8 баллов с гипоцентром расположенным на глубине 350 км и происшедшим спустя 13 часов после первого землетрясения. Считается, что основные разрушения в Ниигате произведены первым короткофокусным землетрясением.

Разрушение, связанное с нерасчетным изгибом колонн виадука в Сан-Франциско, показано на рис. 4 Разрушения колонн вызваны

землетрясением интенсивностью 6.9 баллов, происшедшим в октябре 1989г. в Северной Калифорнии (Лома-Приета) [7].



а.



б.

*Рис.2. Разрушения фундаментных плит в префектуре Фукусима в марте 2011 г.: а) магистральная трещина в фундаментной плите здания атомной станции Фукусима-1; б) разрушение фундаментной плиты промышленного здания в г. Онагава.*



*Рис.3. Разрушение фундаментной плиты торгового здания в префектуре Ниигата землетрясением интенсивности 6.6 баллов в июле 2007 г.*



Рис.4. Виадук в Сан-Франциско, разрушенный землетрясением интенсивности 6.9 баллов в октябре 1989 г.

Надо отметить, что еще одной весьма частой причиной разрушения мостовых сооружений, наряду с нерасчетным изгибом опорных конструкций, является потеря несущей способности грунта. На рис. 5 показано опрокидывание трех опор виадука в Койзуми-о-Хаши [8] при землетрясении в марте 2011 г. в Фукусиме.



Рис.5. Опрокидывание колонн виадука в Койзуми-о-Хаши (префектура Фукусима, Япония), в результате землетрясения в марте 2011 г.

Возможные причины непредвиденных разрушений фундаментных конструкций, а также изгибных напряжений в опорных конструкциях мостовых сооружений, превышавших расчетные значения, обсуждаются ниже.

## 2. НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ, РЕГЛАМЕНТИРУЮЩИЕ РАСЧЕТЫ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

2.1. *Общестроительные нормы.* Обзор российских [9 – 12] и зарубежных [13 – 20] нормативных документов, регламентирующих расчеты зданий и сооружений на сейсмические воздействия показывает, что в расчетах должны учитываться (1) вертикальная и горизонтальная составляющие сейсмических воздействий (смещения, скорости или ускорения); (2) расположение строительной площадки по отношению к известным активным разломам; (3) здания при необходимости должны разделяться сейсмическими швами [20, Sect.2.2.4] (в старых российских нормах [9, 10] максимальное расстояние  $l$  между швами регламентировалось: для зданий со стальным каркасом  $l < 150$  м, зданий с железобетонным каркасом в зависимости от расчетной балльности площадки  $l < 60 \div 80$  м); (4) основные расчеты зданий и сооружений на сейсмические воздействия должны выполняться (а) по линейному спектральному методу или (б) по динамическому методу во временной области.

Здесь надо отметить, что и в линейном спектральном методе, и в динамическом методе предполагается, что нагрузки по подошве фундамента распределены равномерно, что фактически исключает учет волновой природы сейсмических воздействий.

### 2.2. *Нормы, принятые в атомной энергетике.*

Интересно отметить, что оба этих расчетных метода рекомендованы и для расчетов на сейсмические воздействия в атомной энергетике [21 – 24]. В атомной энергетике в дополнение к требованиям (1) – (4) накладывается дополнительное ограничение на скорость поперечной волны в грунте, например в [24]  $c_s > 700$  м/с, тем самым исключаются площадки со слабыми грунтами. Кроме того, в атомной энергетике для протяженных объектов, например трубопроводов и зданий, протяженностью более 100 м, требуется учи-

тывать волновую природу сейсмических воздействий [21, 23]. Надо отметить, что в российских нормах [21] расчетные формулы для волновых воздействий даны лишь для определения усилий в анкерных узлах, причем в этих формулах фазовая частота сейсмических волн не учитывается, см. [21, формулы (6.1), (6.2)].

### 3. ИСТОЧНИКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ И СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

3.1. *Источники землетрясений.* В зависимости от природы источника землетрясения подразделяются на три класса [25]: (1) тектонические, т.е. вызванные взаимодействием тектонических плит; обычно тектонические землетрясения являются средне- и короткофокусными с глубиной расположения очага, не превышающем 100 км; заметим, что тектонические землетрясения происходят значительно чаще других видов землетрясений; (2) магматические, или глубокофокусные землетрясения с очагом расположенным на глубинах 100 – 600 км; (3) вулканические, - очаги этих землетрясений, как правило, являются короткофокусными.

В случае тектонических землетрясений очаг, как правило лежит на разломе земной коры и, в соответствии с движением тектонических плит, относится к одному из трех основных классов [25, 26]: (1) сброс (normal dip-slip); (2) взброс (reverse dip-slip); (3) горизонтальный сдвиг (strike-slip). В случае разломов, относящихся к первым двум классам, при землетрясениях возникают объемные и поверхностные рэлеевские волны; в последнем случае наряду с объемными волнами могут возникать поверхностные волны Лява [25]. Первые два класса тектонических разломов наблюдаются значительно чаще, чем разломы третьего класса [25].

3.2. *Теоретические исследования по распространению поверхностных волн Рэлея.* Статья Рэлея [27] по исследованию распространения гармонических поверхностных волн в изотропном упругом полупространстве по-

ложила начало методам математического моделирования распространения *поверхностных* сейсмических волн в земной коре вдали от источника землетрясения.

Несколько основополагающих результатов этой статьи представляют исключительную важность для математического моделирования сейсмических волн вдали от эпицентра: (1) волна Рэлея формируется из двух парциальных волн, поляризованных в сагиттальной плоскости, т.е. в плоскости, образованной вектором нормали к свободной поверхности и вектором распространения волны; (2) скорость распространения волны Рэлея в изотропном полупространстве меньше скорости медленной (поперечной) объемной волны, при этом скорость не зависит от частоты, т.е. отсутствует дисперсия; (3) волна Рэлея экспоненциально затухает по глубине, так что ее энергия локализована в приповерхностном слое; (4) вертикальная компонента рэлеевской волны приблизительно в полтора раза больше горизонтальной компоненты. В этой же статье Рэлея высказано предположение о том, что именно поверхностные волны являются основным источником разрушений при землетрясениях.

В дальнейших исследованиях результаты Рэлея были обобщены на анизотропные среды [28, 29] и среды с усложненными свойствами, учитывающими пороупругость [30], а также эффекты замедления скорости распространения и затухания волны, вызванные вязкоупругими свойствами среды [31].

3.3. *Скорости и длины сейсмических волн.* Ниже в табл.1 приведены скорости поперечных волн  $c_S$  в грунтах и скальных породах, определенные по данным экспериментов. Скорости продольных  $c_P$  волн либо вычислены по точной формуле

$$c_P = \sqrt{2}c_S \sqrt{\frac{1-\nu}{1-2\nu}} \quad (1)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона среды, либо определены экспериментально. Скорости

рэлеевских волн вычислены по приближенной формуле Бергманна-Викторова

$$c_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} c_S \quad (2)$$

Данные для скоростей поперечных волн в таблице 1 соответствуют значениям, полученным в [32-35] с помощью осреднения.

В табл. 2 даны расчетные значения длин рэлеевских волн  $\lambda_R$ , отвечающие частотам 2.5 и 5 Hz

$$\lambda_R = \frac{c_R}{f} \quad (3)$$

где  $f$  - фазовая частота волны.

Надо отметить, что при частотах, лежащих в диапазоне 2.5÷7.5 Hz, наблюдаются низкочастотные всплески в акселерограммах землетрясений [36 – 42]. Например, в швейцарских нормах [36, 37] для спектрограммы ускорений частота 5 Hz признана основной расчетной частотой по всей стране.

В [42] приведены данные по спектрограммам ускорений для Ставрополя, см. рис. 6. Пик ускорений для уточненного спектра на рис. 6 соответствует частоте 7.3 Hz.



Рис.6. Спектр ускорений для г. Ставрополя [42]

Заметим, что в области более высоких частот в акселерограммах также могут быть характерные всплески [38], см. рис. 7, где видны локальные максимумы, отвечающие частотам 10.3÷11.5 Hz.

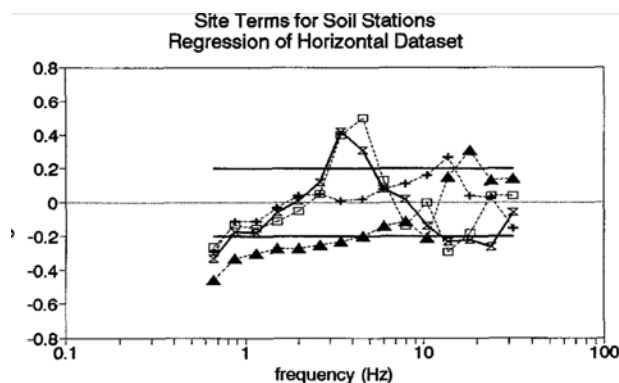


Рис.7. Спектры горизонтальных компонент ускорений для землетрясений в Канаде [38]

В приведенных таблицах закрашены строки, относящиеся по классификации [43] к скальным, слабо трещиноватым породам. Для этих пород ввиду высокой скорости распространения сейсмических волн длины волн весьма значительны, см. табл. 2. Однако для остальных грунтовых оснований учет волновой природы землетрясений представляется необходимым ввиду соизмеримости длин сейсмических волн с характерными размерами сооружений в плане.

#### 4. МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для анализа взаимодействия сейсмических волн с сооружением проводились численные эксперименты в комплексе конечноэлементного моделирования Abaqus®. Рассматривались два варианта расчётной модели: первый вариант применялся для анализа взаимодействия продольной и поперечной волн с моделью сооружения (рис. 8), второй вариант применялся для анализа взаимодействия рэлеевской волны с соответствующей моделью (рис. 9).

В качестве параметров влияния рассматривались: для продольной и поперечной волн – угол между нормалью к волновому фронту и свободной поверхностью и круговая частота волны, для рэлеевской волны – круговая частота волны. Результатами расчёта являлись компоненты перемещения в точках мониторинга (рис. 10).

Табл. 1. Физико-механические характеристики и скорости объемных и рэлеевских волн для различных грунтов

Type of soil	Typical values according to [32 - 35]				Computed values
	Density, Mg/m <sup>3</sup>	Poisson's ratio	c <sub>S</sub> , m/s	c <sub>P</sub> , m/s	c <sub>R</sub> , m/s
Loose sand, saturated	1.75	0.45	75	250	70
Silt, including loess soils	1.75	0.32	75	145	70
Dense sand, unsaturated	2.07	0.30	100	185	95
Soft clay, saturated	1.75	0.45	120	430	110
Stiff clay, unsaturated	2.00	0.20	290	325	265
Gravel soil, unsaturated	2.07	0.25	540	935	500
Sandstone	2.25	0.25	1300	2250	1195
Limestone	2.55	0.30	2650	4960	2460
Granite	2.60	0.25	2900	5020	2670

Табл. 2. Длины рэлеевских волн  $\lambda_R$  при фазовых частотах 2.5 и 5 Hz

Type of Soil	c <sub>R</sub> , m/s	$\lambda_R$ , m	
		2.5 Hz	5 Hz
Loose sand, saturated	70	28	14
Silt, including loess soils	70	28	14
Dense sand, unsaturated	95	38	19
Soft clay, saturated	110	44	22
Stiff clay	265	106	53
Gravel soil, unsaturated	500	200	100
Sandstone	1195	478	239
Limestone	2460	984	492
Granite	2670	1068	534

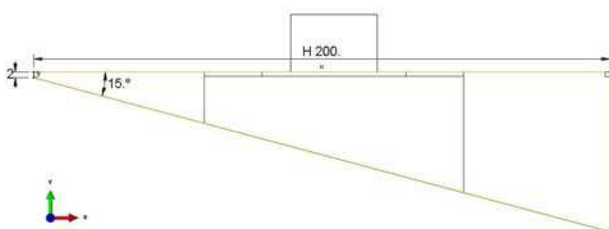


Рис. 8. Геометрия модели сооружения с грунтовым основанием для анализа воздействия продольных и поперечных волн.

Рассматриваемые задачи решались в плоской постановке (обобщенная плоская деформация). Все физические и геометрические параметры задавались в безразмерном виде. Плоские конечноэлементные модели имели единичную толщину в направлении оси  $Z$  (при построении сетки конечных элементов в направлении оси  $Z$  задавался один элемент). Состояние плоской деформации достигалось за счёт наложения на боковые границы модели соответствующих граничных условий  $u_z = 0$ .

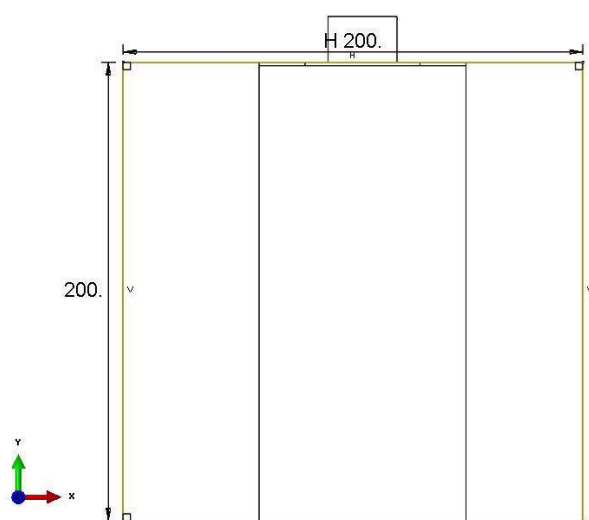


Рис. 9. Геометрия модели сооружения с грунтовым основанием для анализа воздействия рэлеевских волн.

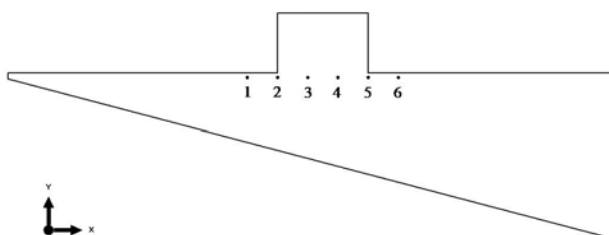


Рис. 10. Точки мониторинга при расчётах.

Материалы, соответствующие грунту основания и сооружению, предполагались линейно упругими. Принимались следующие безразмерные физические параметры материала грунта основания:  $E = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 1$ . Соответствующие безразмерные физические параметры материала сооружения:  $E = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\rho = 1.2$ .

Считалось, что сооружение и основание неразрывно связаны друг с другом и отрыва фундаментной плиты от грунта основания не происходит.

Для анализа взаимодействия с сооружением продольной объёмной волны по нормали к наклонной грани модели (см. рис. 8) прикладывалась равномерно распределенная нагрузка, изменяющаяся по закону

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

где  $p_0 = 0.01$ . Объёмные поперечные волны «генерировались» путём приложения к наклонной грани модели сдвиговой нагрузки, изменяющейся по закону (4).

Нагрузка, вызывающая распространение в упругом полупространстве рэлеевской волны, прикладывается к боковой грани (см. рис. 9) модели. Она состоит из двух компонент, вертикальной (прикладывается по касательной к боковой грани) и горизонтальной (прикладывается по нормали к боковой грани) и записывается с учётом физических параметров материала модели в виде

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \begin{pmatrix} -0.8360(\sin \psi) \exp(0.3740ry) \\ -0.3127(\cos \psi) \exp(0.3740ry) \\ + 0.4765(\sin \psi) \exp(0.8685ry) \\ + 0.5487(\cos \psi) \exp(0.8685ry) \end{pmatrix} \quad (5)$$

где  $r = \omega/c$ , а  $\psi = r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)$ . Верхний ряд соответствует вертикальной компоненте нагрузки, а нижний ряд – горизонтальной. В этих выражениях  $c$  – скорость рэлеевской волны.

Круговая частота  $\omega$  при расчётах как на воздействие объёмных волн, так и поверхностной волны, принималась равной 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, что с учётом «модельных» физических свойств материалов соответствовало сейсмическим частотам 2, 4, 6 и 8 Гц.

Наличие в зависимости (5) косинуса (по  $t$ ) приводит к мгновенному изменению нагрузки от нуля до своей максимальной величины на первом же шаге интегрирования по времени, - это может привести к тому, что скорость деформации элемента при расчёте превысит скорость продольной волны. Последнее недопустимо при использовании явных разностных схем в методе конечных элементов. Для решения данной проблемы было произведено уменьшение величины нагрузки. Рассматривались следующие комбинации частот и амплитуд нагрузок: для  $\omega = 0.05$

$p_0 = 0.01$  , для  $\omega = 0.1$   $p_0 = 0.001$  , для  $\omega = 0.15$   $p_0 = 0.0001$  , для  $\omega = 0.2$   $p_0 = 0.00001$ .

В качестве примера результатов моделирования ниже приводятся (рис. 11 – 16) несколько графиков, на которых изображены зависимости компонент перемещения от времени в точках мониторинга (см. рис. 10), которые расположены на нижней грани фундаментной плиты модельного сооружения.

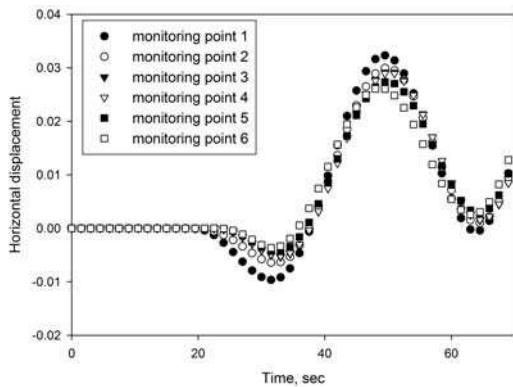


Рис. 11. Горизонтальные перемещения при воздействии продольной волны (угол прихода волны –  $15^\circ$ , эквивалентная циклическая частота воздействия – 8 Гц).

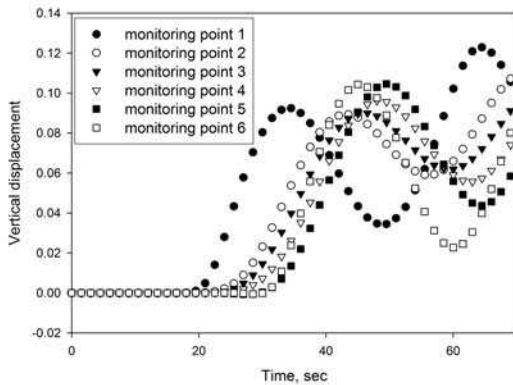


Рис. 12. Вертикальные перемещения при воздействии продольной волны (угол прихода волны –  $15^\circ$ , эквивалентная циклическая частота воздействия – 8 Гц).

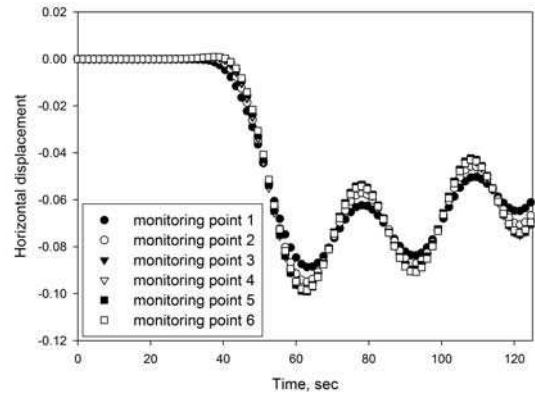


Рис. 13. Горизонтальные перемещения от воздействия поперечной волны (угол прихода волны –  $15^\circ$ , эквивалентная циклическая частота воздействия – 8 Гц).

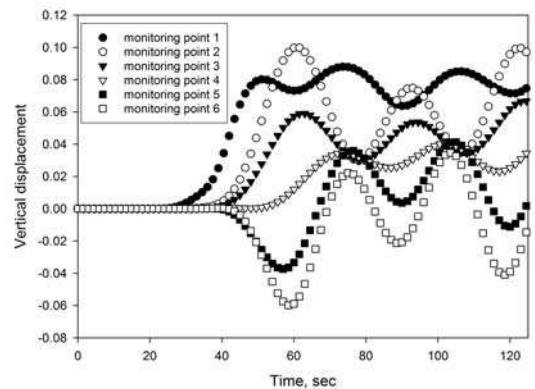


Рис. 14. Вертикальные перемещения от воздействия поперечной волны (угол прихода волны –  $15^\circ$ , эквивалентная циклическая частота воздействия – 8 Гц).

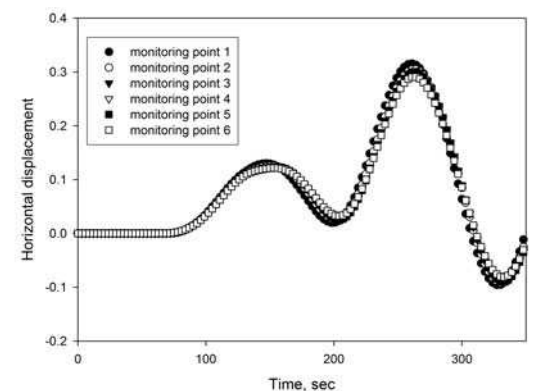


Рис. 15. Горизонтальные перемещения от воздействия рэлеевской волны (эквивалентная циклическая частота воздействия – 2 Гц).

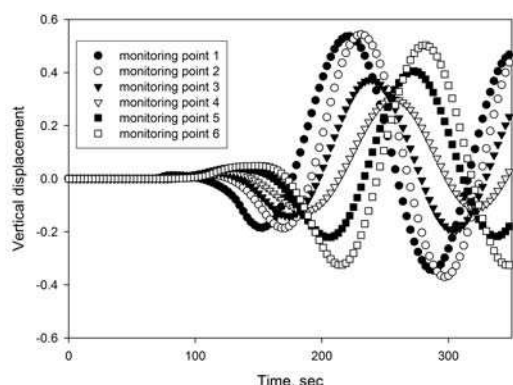


Рис. 16. Вертикальные перемещения от воздействия рэлеевской волны (эквивалентная циклическая частота воздействия – 2 Гц)

## 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА МОДЕЛЬНОЕ СООРУЖЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПО НОРМАТИВНОЙ МЕТОДИКЕ И ПО ВОЛНОВОМУ МЕТОДУ

Анализ основан на сравнении компонент перемещений от сейсмического воздействия на нижней грани фундаментной плиты модельного сооружения (рис. 3.6) и в уровне верха надземной части сооружения (рис 3.7), получающихся при волновом расчёте в Abaqus® и по линейному спектральному методу, в котором волновой характер сейсмических воздействий не учитывается.

Для выявления различий в оценке сейсмических воздействий на сооружения по волновому и линейному спектральному методам в качестве воздействия, на которое проводился расчёт по нормативной методике, рассматривалось гармоническое колебательное воздействие, имеющее горизонтальную

$$u_1 = u_{0_1} \sin \omega t \quad (6)$$

и вертикальную

$$u_2 = u_{0_2} \sin \omega t \quad (7)$$

составляющие, соответствующие некоторой фиксированной частоте  $\omega$ . Гармонические перемещения (6), (7) прикладывались равномерно к площадке контакта фундамента сооружения с основанием.

В качестве амплитуд колебательного воздействия  $u_{0_1}$  и  $u_{0_2}$  в расчёте по нормативной методике брались максимальные значения компонент перемещения на нижней грани фундаментной плиты, получившиеся при расчёте в Abaqus®. Максимальные ускорения определялись непосредственным умножением амплитуд на квадрат круговой частоты.

В табл. 3 – 5 приводятся максимальные значения компонент перемещений и ускорений на нижней грани фундаментной плиты, которые совпадают для волнового и нормативного расчёта, а также максимальные значения угла поворота сооружения и углового ускорения, которые наблюдаются только при расчёте с учётом волнового характера внешнего воздействия. Эти угловые ускорения представляют дополнительную нагрузку на сооружение, не учитываемую существующими нормативными документами.

В табл. 6 – 8 даются максимальные абсолютные значения компонент перемещения и ускорения в верхней угловой точке сооружения, полученных при волновом расчёте, и их превышение над величинами, определенными по нормативной методике в процентах

$$\Delta = \frac{\left| \|u_{\text{волн}}\| - \|u_{\text{норм}}\| \right|}{\|u_{\text{норм}}\|} \cdot 100\% \quad (8)$$

В (8)  $\| \|$  обозначает равномерную норму (амплитуду) соответствующих компонент перемещений.

Необходимо отметить, что при проведении сравнительного анализа считалось, что сооружение является недеформативным по сравнению с основанием, что допустимо в случае мягких грунтов.

Таблица 3. Максимальные абсолютные значения компонент перемещения и ускорения на нижней грани фундаментной плиты, полученных при расчёте на воздействие продольной волны (нагрузка задана в виде нормального напряжения, изменяющегося по закону  $p(t) = 0.01 \cdot \sin(\omega t)$ ).

Круговая частота $\omega$ , <i>рад/сек</i>	$\max u_1$	$\max u_2$	$\max \varphi$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	$\max \ddot{\varphi}$
Угол прихода волны – 15°						
0.05	0.082	0.503	0.00247	0.000205	0.001258	6.18E-06
0.1	0.0732	0.265	0.00187	0.000732	0.00265	1.87E-05
0.15	0.0448	0.156	0.00165	0.001008	0.00351	3.71E-05
0.2	0.0323	0.123	0.00145	0.001292	0.00492	5.80E-05
Угол прихода волны – 30°						
0.05	0.259	0.574	0.00351	0.000648	0.001435	8.78E-06
0.1	0.105	0.237	0.00282	0.00105	0.00237	2.82E-05
0.15	0.0927	0.180	0.00297	0.002086	0.00405	6.68E-05
0.2	0.0520	0.123	0.00214	0.00208	0.00492	8.56E-05
Угол прихода волны – 45°						
0.05	0.292	0.492	0.00397	0.00073	0.00123	9.93E-06
0.1	0.151	0.243	0.00356	0.00151	0.00243	3.56E-05
0.15	0.0840	0.155	0.00253	0.00189	0.003488	5.69E-05
0.2	0.0623	0.119	0.00154	0.002492	0.00476	6.16E-05

Таблица 4. Максимальные абсолютные значения компонент перемещения и ускорения на нижней грани фундаментной плиты, полученных при расчёте на воздействие поперечной волны (нагрузка задана в виде касательного напряжения, изменяющегося по закону  $\tau(t) = 0.01 \cdot \sin(\omega t)$ ).

Круговая частота $\omega$ , <i>рад/сек</i>	$\max u_1$	$\max u_2$	$\max \varphi$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	$\max \ddot{\varphi}$
Угол прихода волны – 15°						
0.05	0.565	0.594	0.0156	0.001413	0.001485	3.90E-05
0.1	0.27	0.264	0.00991	0.0027	0.00264	9.91E-05
0.15	0.156	0.152	0.00655	0.00351	0.00342	0.000147
0.2	0.0991	0.0998	0.00454	0.003964	0.003992	0.000182
Угол прихода волны – 30°						
0.05	0.281	0.664	0.0173	0.000703	0.00166	4.33E-05
0.1	0.135	0.288	0.00995	0.00135	0.00288	9.95E-05
0.15	0.0831	0.16	0.00608	0.00187	0.0036	0.000137
0.2	0.0484	0.13	0.00404	0.001936	0.0052	0.000162
Угол прихода волны – 45°						
0.05	0.0831	0.744	0.0179	0.000208	0.00186	4.48E-05
0.1	0.0894	0.299	0.00936	0.000894	0.00299	9.36E-05
0.15	0.0303	0.186	0.0055	0.000682	0.004185	0.000124
0.2	0.0165	0.15	0.00333	0.00066	0.006	0.000133

Таблица 5. Максимальные абсолютные значения компонент перемещения и ускорения на нижней грани фундаментной плиты, полученных при расчёте на воздействие рэлеевской волны (нагрузка задана в виде нормального и касательного напряжений, изменяющихся по закону (5)).

Амплитуда $p_0$	Круговая частота $\omega$ , рад/сек	$\max u_1$	$\max u_2$	$\max \varphi$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	$\max \ddot{\varphi}$
0.01	0.05	0.316	0.558	0.0218	0.00079	0.001395	5.45E-05
0.001	0.1	0.0302	0.0857	0.0039	0.000302	0.000857	3.90E-05
0.0001	0.15	0.0193	0.0652	0.00144	0.000434	0.001467	3.24E-05
0.00001	0.2	0.0121	0.0469	0.00092	0.000484	0.001876	3.68E-05

Таблица 6. Превышение максимальных абсолютных значений компонент перемещения и ускорения в верхней угловой точке сооружения, полученных при волновом расчёте на воздействие продольной волны, над величинами, полученными по нормативной методике (нагрузка задана в виде нормального напряжения, изменяющегося по закону  $p(t) = 0.01 \cdot \sin(\omega t)$ ).

Круговая частота $\omega$ , рад/сек	Превышение над нормативным расчётом $\Delta$ , %					
	$\max u_1$	$\max u_2$	Magnitude $u$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	Magnitude $\ddot{u}$
Угол прихода волны – 15°						
0.05	60.24	7.37	9.06	60.24	7.37	9.02
0.1	51.09	10.58	13.93	51.09	10.58	13.95
0.15	73.66	15.87	21.24	73.66	15.87	21.25
0.2	89.78	17.68	23.61	89.78	17.68	23.61
Угол прихода волны – 30°						
0.05	27.10	9.17	12.41	27.10	9.17	12.41
0.1	53.71	17.85	24.44	53.71	17.85	24.44
0.15	64.08	24.75	33.95	64.08	24.75	33.94
0.2	82.31	26.10	36.12	82.31	26.10	36.12
Угол прихода волны – 45°						
0.05	27.19	12.10	16.22	27.19	12.10	16.25
0.1	47.15	21.98	29.48	47.15	21.98	29.48
0.15	60.24	24.48	33.44	60.24	24.48	33.43
0.2	49.44	19.41	26.47	49.44	19.41	26.47

Таблица 7. Превышение максимальных абсолютных значений компонент перемещения и ускорения в верхней угловой точке сооружения, полученных при волновом расчёте на воздействие рэлеевской волны, над величинами, полученными по нормативной методике (нагрузка задана в виде нормального и касательного напряжений, изменяющихся по закону (5)).

Амплитуда $P_0$	Круговая частота $\omega$ , $рад/сек$	Превышение над нормативным расчётом $\Delta$ , %					
		$\max u_1$	$\max u_2$	Magnitude $u$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	Magnitude $\ddot{u}$
0.01	0.05	137.97	58.60	81.10	137.97	58.60	81.13
0.001	0.1	258.28	68.26	98.40	258.28	68.26	98.40
0.0001	0.15	149.22	33.13	45.94	149.22	33.13	45.94
0.00001	0.2	152.07	29.42	40.25	152.07	29.42	40.25

Таблица 8. Превышение максимальных абсолютных значений компонент перемещения и ускорения в верхней угловой точке сооружения, полученных при волновом расчёте на воздействие поперечной волны, над величинами, полученными по нормативной методике (нагрузка задана в виде касательного напряжения, изменяющегося по закону  $\tau(t) = 0.01 \cdot \sin(\omega t)$ ).

Круговая частота $\omega$ , $рад/сек$	Превышение над нормативным расчётом $\Delta$ , %					
	$\max u_1$	$\max u_2$	Magnitude $u$	$\max \ddot{u}_1$	$\max \ddot{u}_2$	Magnitude $\ddot{u}$
Угол прихода волны – 15°						
0.05	55.22	39.39	47.12	55.22	39.39	47.12
0.1	73.41	56.31	65.27	73.41	56.31	65.28
0.15	83.97	64.64	74.82	83.97	64.64	74.84
0.2	91.62	68.24	80.23	91.62	68.24	80.23
Угол прихода волны – 30°						
0.05	123.13	39.08	54.82	123.13	39.08	54.83
0.1	147.41	51.82	72.99	147.41	51.82	73.00
0.15	146.33	57.00	79.73	146.33	57.00	79.73
0.2	166.94	46.62	65.99	166.94	46.62	65.99
Угол прихода волны – 45°						
0.05	430.81	36.09	47.53	430.81	36.09	47.52
0.1	209.40	46.96	66.37	209.40	46.96	66.37
0.15	363.04	44.35	60.76	363.04	44.35	60.75
0.2	403.64	33.30	43.49	403.64	33.30	43.49

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ разрушений, вызванных недавними землетрясениями, произошедшими в разных районах Земного шара, наряду с результатами компьютерного моделирования показывает,

что учет волновой природы сейсмических воздействий необходимым для адекватной оценки надежности конструктивных решений, принятых в сейсмостойком строительстве. Результаты проведенных модельных исследований, учитывающие волновую природу сейсмических воздействий, а также расчеты

по рекомендуемой нормативной методике, основанной на линейном спектральном методе, показали, что при гармонической нагрузке магнитуды перемещений и ускорений в отдельных частях сооружения, определенные по волновому методу, могут превышать соответствующие значения магнитуд, определенных по спектральному методу, более чем в 1.3 раза для продольной волны (табл. 6), более чем в 1.8 раза для поперечной волны (табл. 7) и более чем в 1.9 раза для рэлевской волны (табл. 8).

Учет волновой природы особенно важен при проектировании сооружений на слабых грунтах, где скорость распространения всех видов сейсмических волн невелика (естественно, это, прежде всего, относится к рэлевским волнам). Соответственно, на слабых грунтах оказываются малыми длины сейсмических волн, что может представлять серьезную опасность для сооружений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crain E.E.** Historic Architecture in the Caribbean Islands. University Press of Florida, 1994.
2. The Mw 7.0 Haiti Earthquake of January 12, 2010: Report #2. EERI Special Earthquake Report — May 2010.
3. **Stewart J.** Geotechnical Issues and Ground Motions. In: Briefing of the Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER), Berkeley, CA, USA, 2011.
4. **Lignos D.** Effects of the 2011 Tohoku Japan earthquake on steel structures, <http://www.eqclearinghouse.org/2011-03-11-sendai/2011/08/03/eeri-steel-structures-reconnaissance-group/>.
5. The Tohoku, Japan, Tsunami of March 11, 2011: Effects on Structures.
6. 2007 Niigata Chuetsu-Oki, Japan Earthquake Reconnaissance // Report by Global Risk Miyamoto, Japan, 2007.
7. **Praetzellis A., M. Loma-Prieta** earthquake and aftermath. California Dept. of Transportation. Sonoma State Univ. 2004.
8. Bridge Performance in the Mw 9.0 Tohoku, Japan, Earthquake of March 11, 2011 // EERI Special Earthquake Report – September 2011.
9. СНиП 2-8-71 Строительство в сейсмических районах. М.: Стройиздат, 1982.
10. СНиП 2.01.07-85\* Нагрузки и воздействия. М.: Госстрой, 2003.
11. Международные строительные нормы. Строительство в сейсмических районах. М.: МНТКС, 2003.
12. СП 14.13330.2011 (СНиП 2-8-71\*) Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция М.: Минрегион-развития РФ, 2011.
13. UFC 3-310-04, Seismic Design for Buildings, 22 June 2007, Dept. of Defense, US, 2007.
14. International Handbook of Earthquake Engineering: Codes, Programs, and Examples, Edited by M. Paz. NY: Chapman & Hall, Inc., 1994. ISBN: 0-412-98211-0.
15. Standards ASCE/SEI 7-10, Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ASCE, 2010. 608p. ISBN: 9780784410851.
16. Bridge Engineering. Seismic Design. Edited by Chen W.F. and Duan L. CRC Press, 2003, Print ISBN: 978-0-8493-1683-8.
17. NEHRP Recommended Seismic Provisions for New Buildings and Other Structures. Solicitation Number: HSFHQ-11-R-0044, FEMA publication, 2011.
18. Eurocode 8: EN 1998 P1. Design of structures for earthquake resistance – Part 1: General rules seismic actions and rules for buildings. BS publication 29/08/2008.
19. Eurocode 8: EN 1998 P5. Design of structures for earthquake resistance – Part 5: Foundations, retaining structures and geotechnical aspects. BS publication 30/06/2009.
20. Seismic Design of Buildings to Eurocode 8. Edited by Ahmed Elghazouli, Spon Press, 2009. 320p. ISBN 13 978-0-415-44762-1.
21. НП 031-01 Нормы проектирования сейсмостойких атомных станций. Госатомнадзор, 2002.
22. MPR-2610 Application of Advanced Construction Technologies to New Nuclear

- Power Plants Prepared for U.S. Revision 2 September 24, 2004. DOE publication 2004.
23. Standards ASCE 4-98, Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures (4-98) ASCE, 2000, 132 p. ISBN: 9780784404331.
  24. Regulatory Guide for Reviewing Seismic Design of Nuclear Power Reactor Facilities. Appendix. D. 2006. Journal of Disaster Research 2007, Vol.2, No.5 pp.402-409.
  25. **Aki K, Richards P.** Quantitative Seismology. 2nd Edition. University Science Books, 2002. ISBN 0-935702-96-2.
  26. **Магницкий В.А.** Общая геофизика. Изд. МГУ: Москва, 1995 г., 317 с., ISBN: 5-211-03083-4.
  27. **Strutt J.W. (Lord Rayleigh)** On wave propagating along the plane surface of an elastic solid, Proc. London Math. Soc., 1885, vol. 17, pp.4-11.
  28. **Barnett D. M., Lothe J.** Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. J. Phys. Ser. F, 1974, vol. 4, pp. 671 – 678.
  29. **Kuznetsov S.V.** Surface waves of non-Rayleigh type, Quart. Appl. Math. 2003. V.61. No.3. P.575 – 582.
  30. **Kumar R. and Hundal B.S.** Surface wave propagation in a fluid-saturated incompressible porous medium, Sadhana, 2003, vol. 32, Part 3, pp. 155–166.
  31. **Schwab F. and Knopoff L.** Surface Waves on Multilayered Anelastic Media, Bulletin of the Seismological Society of America, 1971, vol. 61, No. 4, pp. 893-912.
  32. **Bourbie, T., Coussy, O., Zinszner, B.** Acoustics of Porous Media, Gulf Pub., 1987.
  33. **Trautmann C.H., and Kulhawy F.H.** CU-FAD - A Computer Program for Compress and Uplift Foundation Analysis and Design, Report EL-4540-CMM, Vol. 16, Electrical Power and Research Institute, 1987.
  34. **Das B.M.** Advanced Soil Mechanics, Second Edition, Taylor & Francis, Washington, DC, 1997, p. 401.
  35. **Bourdeau C., Billiauxand D., Chraibi A.F.** Thermo-Hydro-Mechanical Analysis of a DAM Using *FLAC3D* Software, FLAC/DEM, Minneapolis, 2008.
  36. Code SIA 261:2003 Civil Engineering. Swiss Society of Engineers and Architects. 2003.
  37. Code SIA 261/1 Actions on structures – supplementary specifications. Swiss Society of Engineers and Architects. 2003.
  38. **Atkinson G.M.** The High-Frequency Shape of the Source Spectrum for Earthquakes in Eastern and Western Canada, Bulletin of the Seismological Society of America, 1996, Vol. 86, No. 1A, 106-112.
  39. **Раутиан Т.Г., Халтурин В.И., Новикова И.Е., Кунакова О.К.** Очаговые спектры и параметры землетрясений Средней Азии, Копетдага, Северного Тянь-Шаня и сопредельных территорий. В кн.: Землетрясения в СССР в 1988 году. М., Наука, 1991, с.204-209.
  40. **Раутиан Т.Г., Халтурин В.И.** Очаговые спектры землетрясений Землетрясения и процессы их подготовки. М.: Наука, с.82-93.
  41. **Соколов В.Ю.** Спектры ускорений колебаний грунта при землетрясениях на Кавказе, Физика земли, 1998, №8. С. 56-69.
  42. **Чернов Ю.К.** Уточненные оценки сейсмической опасности с учетом новых требований СНиП и мировой практики. Труды семинара «Дальнейшее направление работ по снижению сейсмического риска за счет учета природных факторов сейсмической опасности». М.: Минрегионразвития, 2012.
  43. ГОСТ 25100-2011. Грунты. Классификация. М.: Изд. Стандарты, 2011.

---

Вершинин Владислав Владимирович, ФГБОУВ ВПО «Московский государственный строительный университет»; e-mail: vlodya\_91@mail.ru

Кузнецов Сергей Владимирович, Институт Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, просп.Вернадского, 101; e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru