

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 8, Issue 3 *2012*

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor, Vice-Rector
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
ASV Publishing House
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University
of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Department of Mechanical
Engineering
Massachusetts Institute of
Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakov, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosa
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics
and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Technologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkehoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatiken und
Festigkeitslehre

Techische Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,
Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics
and Mathematics, Moscow State
Univ. of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Bernhard A. Scfhrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.
Via
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for
Technical Education, New Delhi,
India

Waclaw Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmes University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

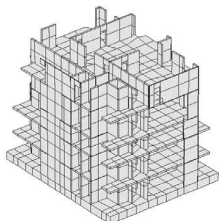


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

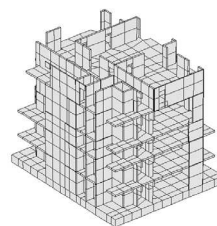


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- ¹⁾ Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*.
- ²⁾ Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: pavel.akimov2@gmail.com*.
- ³⁾ Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: niccm@mgsu.ru*.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 8, Issue 3

2012

TABLE OF CONTENTS

Plasticity of Soil in Finite Elements Modeling <i>Sergei Klovanich, Natalia Jankowska, Galina G. Kashevarova</i>	<u>13</u>
Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Одномерные проблемы <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>17</u>
Вейвлет-анализ и его применение для решения задач расчета конструкций: Библиографический обзор <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>24</u>
Об одном корректном аналитическом методе нахождения фундаментальной функции для линейного дифференциального оператора <i>П.А. Акимов, О.А. Негрозов</i>	<u>38</u>
Изучение трехмерной структуры воздушного турбулентного потока при обтекании призмы прямоугольной формы <i>И.Н. Афанасьева, А.Р. Усманов</i>	<u>50</u>
Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий <i>М.С. Барабаш</i>	<u>58</u>
Численное моделирование нестационарных полей температур в строительных конструкциях при пожарах <i>А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский, С.В. Щербина</i>	<u>68</u>
Биоцидный портландцемент с улучшенными физико-механическими свойствами <i>В.Т. Ерофеев, А.И. Родин, А.Д. Богатов, С.В. Казначеев, В.Ф. Смирнов, Е.Н. Сураева, М.А. Родина</i>	<u>81</u>
Сухие строительные смеси, модифицированные биоцидной добавкой <i>В.Т. Ерофеев, Е.Н. Сураева, А.Д. Богатов, С.В. Казначеев, В.Ф. Смирнов, А.И. Родин</i>	<u>93</u>

О влиянии разброса физико-механических свойств материалов на процесс разрушения строительных конструкций <i>Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Рыбаков, А.С. Мартиросян</i>	<u>101</u>
Удар по поверхности осесимметричной конструкции из вязкоупругого материала твердым телом <i>М.М. Мирсаидов, Т.З. Султанов</i>	<u>107</u>
Разработка и обоснование рациональной конструкции каменной плотины для условий Крайнего Севера <i>М.П. Саинов</i>	<u>116</u>

PLASTICITY OF SOIL IN FINITE ELEMENTS MODELING

Sergei Klovanih¹, Natalia Jankowska¹, Galina Kashevarova²

¹University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Olsztyn, POLAND

²Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

ABSTRACT: The phenomenological model for a soil in the form of the associated theory of the plasticity, based on a loading surface of the closed form, is formulated. The analytical form of this surface is offered. Dilatancy are considered, deformation hardening and softening. The paper is focused on nonlinear analysis using finite elements method. The examples of calculations, confirming reliability of model, are proposed.

Keywords: constitutive model of soil, plasticity, finite elements method.

INTRODUCTION

Soil-base structures refer to the class of hard formalized problems because soil is usually a non-homogenous poorly studied medium.

Modern methods of computing mathematics and industrial programmed systems in powerful computers allow the wide use of numerical load tests with the use of non-linear soil mechanics, whose basis is the notion of soil as an elasto-plastic substance [1].

The theory of a plastic flow with hardening is formulated in the form of relations between increments of deformations $d\{\varepsilon\}$ and stresses $d\{\sigma\}$ and defined as [2]

$$d(\sigma) = [D]_{ep} d\{\varepsilon\}, \quad (1)$$

where $[D]_{ep}$ - elastic-plastic stiffness matrix [2]

$$[D]_{ep} = [D] \frac{[D] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D]}{\left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} + \Lambda}, \quad (2)$$

$[D]$ – initial elastic matrix, corresponding to the Hook’s law for an isotropic material; F and Q - loading function and plastic potential (for associated theory $Q = F$); Λ - hardening function. If a hardening measure χ is the work of stresses on the plastic deformations $\{\varepsilon_p\}$, and

$d\chi = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon_p\}$, that hardening function is defined so

$$\Lambda = \frac{\partial F}{\partial \chi} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (3)$$

The plastic strain rate is normal to the surface, represented by loading function F .

1. LOADING FUNCTION

Expression for a loading surface is accepted as follows

$$F(\sigma_o, \tau_o, \theta) = \tau_o - A_o(b + \sigma_o)\sqrt{a - \sigma_o} = 0. \quad (4)$$

This surface always passes through a point of current loading σ_o, τ_o , closed from two sides and crosses an axis σ_o in points $-b$ and a (fig. 1). In addition on function (4) following conditions are imposed

$$\tau_o|_{\sigma_o=0} = c_o; \quad \partial \tau_o / \partial \sigma_o|_{\sigma_o=0} = M_o, \quad (5)$$

which allow to establish following relations between parameters of a equation (4)

$$A_o = \frac{2\sqrt{a}}{2a + b} M_o; \quad (6)$$

$$b = \frac{2ac_o}{2aM_o - c_o}.$$

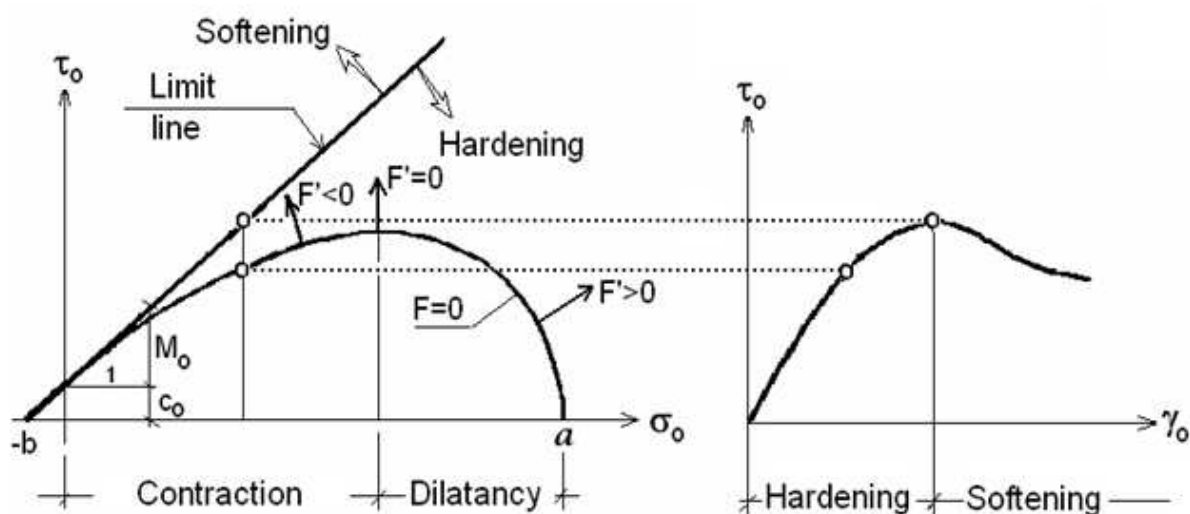


Figure 1: a)-Loading function, b) – diagram $\tau_o - \gamma_o$

The parameter a also can be established from (4). The curve (4) asymptotically comes nearer to a limiting failure line on Mohr $\tau_o = M_o \sigma_o + c_o$ (Fig.1). Thus the site under a this line corresponds to a hardening zone, above a straight line – softening zone. On the stresses-strains diagram $\tau_o - \gamma_o$ (Fig. 1b) it conforms to an ascending and descending branches. Besides, the derivative of function (4) changes a sign on a site from $-b$ to a . Change of a sign of a derivative is the transfer from contraction to dilatancy. General view of loading surface and its characteristic sections are presented on fig. 2. So-called, deviational section of this surface is a curvilinear triangle with maximal τ_1 and minimal τ_2 radiuses (fig. 2), corresponding to extreme values of a corner $\theta = \pi / 3$ at $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ and $\theta=0$ at $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$.

Thus on the Coulomb

$$M_1 = 2\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{3 - \sin \varphi}; \quad M_2 = 2\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{3 + \sin \varphi};$$

$$c_1 = 2\sqrt{2} \frac{\cos \varphi}{3 - \sin \varphi} c; \quad c_2 = 2\sqrt{2} \frac{\cos \varphi}{3 + \sin \varphi} c,$$

where φ and c - corner of an internal friction and coupling.

Between two limiting cases $\theta = 0$ and $\theta = \pi / 3$ it is possible to present interpolation so [5]

$$\rho(\theta) = 1 - 4(1 - g) \cos \beta (1 - \cos \beta), \quad \beta = \frac{\pi}{3} - \theta, \quad (7)$$

where $g = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}$.

Thus $\rho(0) = 1$ and $\rho(\pi / 3) = g$. Then parameters of the formula (4) can be defined so

$$M_o = \rho(\theta) M_1, \quad c_o = \rho(\theta) c_1,$$

and

$$A_o = \rho(\theta) A_1; \quad A_1 = \frac{2\sqrt{a}}{2a + b} M_1. \quad (8)$$

2. HARDENING AND SOFTENING

Change of porosity in process of loadings and unloadings is taken as additional measures of hardening. Thus volume porosity of a ground is defined depending on octahedral normal pressure [4, 6] $e = e^o - \mu \ln \sigma_o$ - at active loading; $e = e^A - \delta \ln \sigma_o$ - at unloading, where e^o - porosity in natural state; e^A - porosity of a

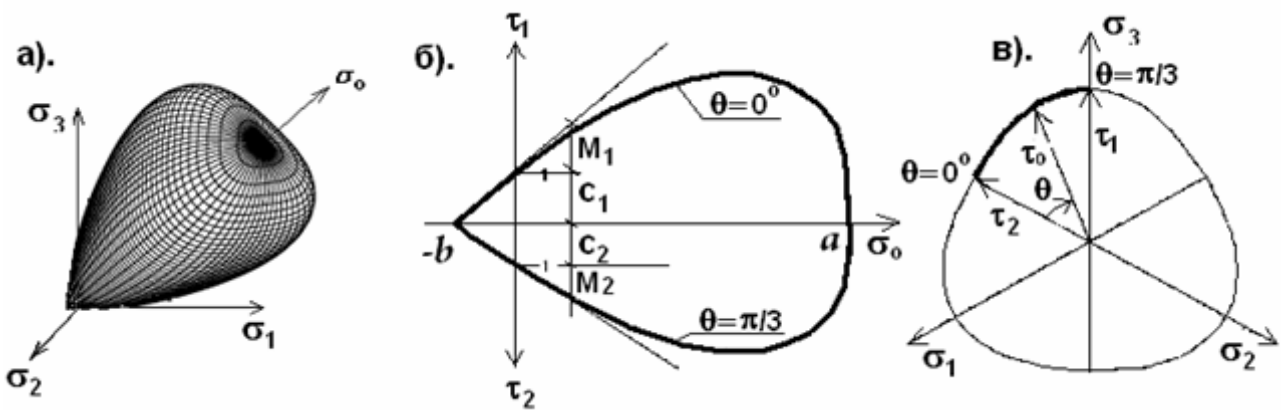


Figure 2: General view of a surface and its intersections.

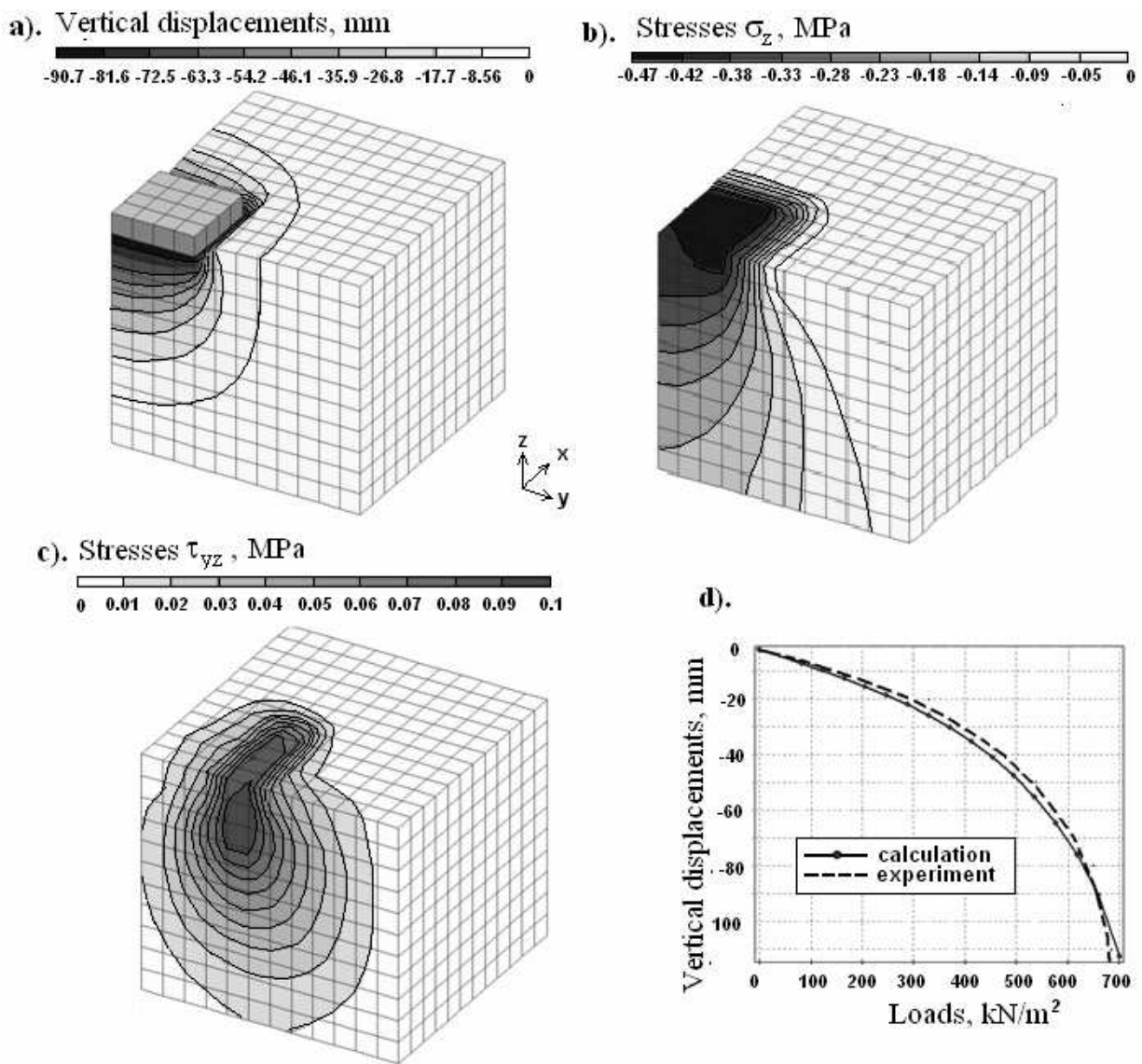


Figure 3: Results of test's calculation

ground by the time of unloading; μ и δ - the parameters, defined from tests. The volumetric strains, caused by change of porosity, are defined so

$$3\varepsilon_o = -\frac{e-e_o}{1+e}, \quad 3d\varepsilon_o = -\frac{de}{1+e}. \quad (9)$$

Increment of a plastic part of the volumetric strains connected with change of porosity, are equal $d\varepsilon_o^p = d\varepsilon_o - d\varepsilon_o^e$, where $d\varepsilon_o^e$ - elastic strains. In other words,

$$3d\varepsilon_o^p = \frac{\mu - \delta}{(1+e)\sigma_o} d\sigma_o. \quad (10)$$

From (10) it is possible to receive expression for a derivative, entering into a equation (3)

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{3(1+e)}{\mu - \delta} \frac{\partial F}{\partial \sigma_o}. \quad (11)$$

At softening the derivative

$$\frac{\partial F}{\partial \chi}$$

is defined from the stresses-strains diagrams (fig.1b)

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{1}{\tau_o} \frac{\partial F}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o}.$$

3. MODEL TESTING

The model is included in computer program "Concord" [5], realizing a finite elements method in nonlinear statement. Let's result a test problem about action of a square rigid stamp on a ground and we will compare results of calculations with experimental data [6]. The sizes of a stamp are 40x40 sm. in Steps of loading are 40 kH/m². For calculation volume isoparametrical eight-nodes finite elements were used. The symmetric part of the sample was considered only. Ground characteristics: $E=2.5$ MPa, $\varphi=18^\circ$, $c=0.045$

MPa, $\nu=0.35$. Results of calculation of vertical displacements of a stamp are presented on fig.3. Here isolines of displacements (fig. 3a) and stresses (fig. 3b,c) are given at $q=680$ kN/m².

REFERENCES

1. **Kashevarova G.G., Smetannikov O.U., Zobacheva A.U.** Study of possible application of different design models of foundation - soil system for a pile-raft foundation of a high-rise building. - International Journal for Computational Civil and Structural Engineering /. 2009. T. 05. № 1-2. C. 45-56.
2. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method, Vol. 2 Solid Mechanics*, fifth ed., - Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
3. **Terzaghi K., Ralph B. Peck**, 1948, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, second ed., - John Wiley and Sons, New York, 1967.
4. **Roscoe K.J., Schofield A.N.** Mechanical Behavior of an Idealised "Wet" Clay, *Proc. European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, v.1, pp.47-54, 1963.*
5. **Klovanih S.F.** *Finite elements method in nonlinear problems of engineering mechanics*, - Zaporozhie (in Russian), 2009.
6. **Balura M.V.** Horizontal displacements of the basis under a rigid stamp, *Osnovania, fundamenti i mehanika gruntov, №6, pp.39-41, (in Russian) 1973.*

Sergei Klovanih, Doctor of technical science, Professor, Department of Mechanics and Fundamentals of Building Design, Faculty of Technical Sciences, University of Warmia and Mazury in Olsztyn, ul. Prawocheńskiego 19, 10-720 Olsztyn, Poland.
e-mail:sergei.klovanih@uwm.edu.pl.

Natalia Jankowska, Dr. Inz., Department of Mechanics and Fundamentals of Building Design, Faculty of Technical Sciences, University of Warmia and Mazury in Olsztyn, ul. Prawocheńskiego 19, 10-720 Olsztyn, Poland. e-mail:sergei.klovanih@uwm.edu.pl.

Galina Kashevarova, Doctor of technical science, Professor, Department of Mechanics and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ggkash@mail.ru.

АЛГОРИТМ РЕДУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ В РАМКАХ МНОГОУРОВНЕВОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ЧАСТЬ 1: ОДНОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В рамках развиваемого многоуровневого численного метода локального решения краевых задач строительной механики правильнее вести речь не о крупной и мелкой аппроксимирующей сетках, а о малом и большом количестве учитываемых членов (уровней) разложения по вейвлет-базису (базису Хаара). Процесс сокращения (обоснованного) количества учитываемых членов базиса Хаара здесь называется редукцией неизвестных. Настоящая статья посвящена алгоритму этой редукции в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач строительной механики на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Изложение материала ведется для простейшего одномерного случая.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, алгоритмы редукции неизвестных, многоуровневые методы, численные методы, краевая задача, строительная механика

WAVELET-BASED ALGORITHM OF REDUCTION OF UNKNOWNNS WITHIN MULTILEVEL NUMERICAL METHOD OF LOCAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Considering local multilevel numerical method of solution of boundary problems of structural mechanics it is correct to speak not about fine and coarse approximating meshes, but about small and large number of members accounted for (levels) the expansion in the wavelet basis (Haar basis). The reduction of the significant terms of the Haar basis is called a reduction of unknowns. The distinctive paper is devoted to the algorithm of this reduction within the local multilevel numerical method for solution of boundary problems of structural mechanics based on multiresolution wavelet analysis. We considering the simplest one-dimensional case.

Key words: wavelet analysis, algorithm of reduction of unknowns, multilevel methods, numerical methods, boundary problem, structural mechanics

ВВЕДЕНИЕ

Проблема решения одномерных краевых задач возникает, в частности, при расчете балок и балочных систем (например, железно-дорожных и подкрановых путей), цилиндри-

ческих оболочек, плитных конструкций (в рамках метода прямых [8], дискретно-континуального метода конечных элементов, дискретно-континуального вариационно-разностного метода [3-5, 7] и пр.), многоэтажных зданий и т.д. В случаях большой

протяженности таких систем (например, железнодорожный путь) при их расчете дискретными методами (например, методом конечных элементов или методом конечных разностей с постоянным шагом) для достижения требуемой точности, как правило, требуется очень большое число шагов. Кроме того, известно, что значительное количество неизвестных в таких случаях приводит к плохой обусловленности системы. Помимо систем со значительной протяженностью, аналогичная ситуация возникает при расчете балочных конструкций, обладающих сильным краевым эффектом. Существует и ряд других соображений (например, малая мощность вычислительных средств), по которым слишком мелкая сетка нежелательна для получения численного решения. Сетка с большим количеством узлов наиболее целесообразна при необходимости получить локальное решение в заранее заданной зоне конструкции.

В рамках развиваемого многоуровневого численного метода локального решения краевых задач строительной механики [6] правильнее вести речь не о крупной и мелкой аппроксимирующей сетках, а о малом и большом количестве учитываемых членов (уровней) разложения по вейвлет-базису (базису Хаара). Процесс сокращения (обоснованного) количества учитываемых членов базиса Хаара будем называть редукцией неизвестных.

При рассмотрении одномерных краевых задач существенным является тот факт, что в ряде случаев для контроля правильности получаемых результатов может быть построено аналитическое решение. Наконец, разработка методов, связанных с получением локального решения применительно к одномерным проблемам, является хорошей моделью для разработки, исследования и развития аналогичных подходов при решении многомерных задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматривается отрезок $[a, b]$, где a и b – соответственно координата начала и конца отрезка. Разделим отрезок $[a, b]$ на $(n - 1)$ равных частей, где $n = 2^M$, M – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, очевидно, определяются по формуле (ниже h – шаг деления)

$$x_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

где
$$h = (b - a)/(n - 1). \quad (1.2)$$

Пусть

$$\bar{y} = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(n)]^T \quad (1.3)$$

– искомый вектор неизвестных (дискретная сеточная функция), где $y(i)$ – значение функции в точке с координатой x_i .

Можно показать [1, 6], что вектор (1.2) представим в виде

$$\bar{y} = Q\bar{v}, \quad (1.4)$$

где Q – матрица нормированных базисных функций Хаара, записанных по столбцам; \bar{v} – вектор коэффициентов разложения функции $y(i)$ по базису Хаара, имеющий следующую структуру

$$\bar{v} = [(\bar{v}^0)^T \ (\bar{v}^1)^T \ \dots \ (\bar{v}^M)^T]^T, \quad (1.5)$$

где
$$\bar{v}^p = \{v_j^p\}_{j=1, N_p}, \quad p = \overline{0, M}; \quad (1.6)$$

N_p – количество функций Хаара на p -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.7)$$

Элементы матрицы Q определяются по формулам

$$\{Q\}_{i,k} = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} 1, & 2^{p+1}(j-1) < i \leq 2^p(2j-1) \\ -1, & 2^p(2j-1) < i \leq 2^{p+1}j \\ 0, & i \leq 2^{p+1}(j-1) \cup i > 2^{p+1}j, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $i=1, 2, \dots, n$; $k = j + \sum_{q=0}^{p-1} N_q$,
 $p=0, 1, \dots, M-1$, $j=1, 2, \dots, N_p$; (1.9)

$$\{Q\}_{i,M} = 1/\alpha_M, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (1.10)$$

α_p – норма функции Хаара на p -ом уровне, т.е.

$$\forall j=1, 2, \dots, N_p \quad \|\psi_j^p\| = \alpha_p, \quad \alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (1.11)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\bar{\chi} = [(\bar{\chi}^0)^T \quad (\bar{\chi}^1)^T \quad \dots \quad (\bar{\chi}^M)^T]^T, \quad (1.12)$$

где $\bar{\chi}^p = \{\chi_j^p\}_{j=1, N_p}$, $p=0, M$; (1.13)

$$\chi_j^p = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j^p \text{ не редуцируется} \\ 0, & \text{если } v_j^p \text{ редуцируется.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Пусть \bar{v}^r – соответствующий редуцированный вектор коэффициентов разложения функции $y(i)$ по базису Хаара

$$\bar{v}^r = [(\bar{v}^{r,0})^T \quad (\bar{v}^{r,1})^T \quad \dots \quad (\bar{v}^{r,M})^T]^T, \quad (1.15)$$

где $\bar{v}^{r,p}$ – n^r -мерный вектор, получающийся путем исключения из вектора \bar{v}^p элементов v_j^p , для которых $\chi_j^p = 0$, причем

$$n^r = \sum_{p=0}^M \sum_{j=1}^{N_p} \chi_j^p. \quad (1.15)$$

Значения исключаемых элементов v_j^p могут быть определены в соответствии с алгоритмом осреднения, подробно описанным в [2]. Очевидно, что можем записать

$$\bar{v} = R\bar{v}^r, \quad (1.17)$$

где R – прямоугольная матрица размером $n \times n^r$, которую будем называть матрицей редукции.

Основной задачей далее является построение матрицы редукции R .

2. НЕКОТОРЫЙ ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим ниже для определенности простейший частный случай $n=16$. Очевидно, имеем (см. формулы (1.5), (1.7)):

$$M=4; \quad N_0=8; \quad N_1=4; \quad N_2=2; \quad N_3=1; \quad N_4=1; \quad (2.1)$$

$$\bar{v} = [v_1^0 \quad v_2^0 \quad v_3^0 \quad v_4^0 \quad v_5^0 \quad v_6^0 \quad v_7^0 \quad v_8^0 \quad v_1^1 \quad v_2^1 \quad v_3^1 \quad v_4^1 \quad v_1^2 \quad v_2^2 \quad v_1^3 \quad v_1^4]^T \quad (2.2)$$

или

$$\bar{v} = [(\bar{v}^0)^T \quad (\bar{v}^1)^T \quad (\bar{v}^2)^T \quad (\bar{v}^3)^T \quad (\bar{v}^4)^T]^T, \quad (2.3)$$

где $\bar{v}^0 = [v_1^0 \quad v_2^0 \quad v_3^0 \quad v_4^0 \quad v_5^0 \quad v_6^0 \quad v_7^0 \quad v_8^0]^T$;

$$\bar{v}^1 = [v_1^1 \quad v_2^1 \quad v_3^1 \quad v_4^1]^T; \quad \bar{v}^2 = [v_1^2 \quad v_2^2]^T;$$

$$\bar{v}^3 = [v_1^3]; \quad \bar{v}^4 = [v_1^4]. \quad (2.4)$$

Пусть задано, что

$$\bar{\chi} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad (2.5)$$

откуда с учетом (1.12) можем записать:

$$\bar{\chi}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$\bar{\chi}^1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \quad \bar{\chi}^2 = [1 \quad 1]^T;$$

$$\bar{\chi}^3 = [1]; \quad \bar{\chi}^4 = [1]. \quad (2.6)$$

Таким образом,

$$\chi_1^0 = \chi_2^0 = \chi_5^0 = \chi_6^0 = \chi_7^0 = \chi_8^0 = \chi_3^1 = \chi_4^1 = 0; \quad (2.7)$$

$$\chi_3^0 = \chi_4^0 = \chi_1^1 = \chi_2^1 = \chi_1^2 = \chi_2^2 = \chi_1^3 = \chi_1^4 = 1. \quad (2.8)$$

Итак, в соответствии с (2.7)-(2.8) из вектора (2.2) следует последовательно исключить компоненты $v_1^0, v_2^0, v_5^0, v_6^0, v_7^0, v_8^0, v_3^1, v_4^1$.

Окончательно будем иметь:

$$\bar{v}^r = [v_3^0 \ v_4^0 \ v_1^1 \ v_2^1 \ v_1^2 \ v_2^2 \ v_1^3 \ v_1^4]^T. \quad (2.9)$$

В соответствии с алгоритмом, подробно описанным в [2, 6], исключенные на этапе редукции неизвестные определяются по соответствующим формулам осреднения, которые в данном случае записываются следующим образом:

$$v_1^0 = v_2^0 = \beta v_1^1; \quad v_5^0 = v_6^0 = v_7^0 = v_8^0 = \beta^2 v_1^2; \\ v_3^1 = v_4^1 = \beta v_2^2, \quad (2.10)$$

$$\text{где} \quad \beta = 1/(2\sqrt{2}) \quad (2.11)$$

– коэффициент осреднения.

Итак, матрица редукции R сообразно приведенным формулам (2.2), (2.9), (2.10) и (1.15) определяется в виде

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

3. МУЛЬТИИНДЕКСЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ИНДЕКСАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Введем глобальную систему индексации элементов вектора (1.5) в соответствии с формулой:

$$k \Leftrightarrow (j, p), \quad \text{где} \quad k = j + \sum_{q=0}^{p-1} N_q; \quad (3.1)$$

k – глобальный индекс; j, p – исходные индексы (мультииндекс).

Будем использовать далее следующие обозначения:

$$N_{tot}^{-1} = 0; \quad N_{tot}^s = \sum_{q=0}^s N_q, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (3.2)$$

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов p и j по глобальному индексу k :

1. Задаемся значением $s = M$.
2. Вычисляем значение N_{tot}^s .
3. Вычисляем значение τ_s по формуле

$$\tau_s = \left\lfloor \frac{k-1}{N_{tot}^s} \right\rfloor, \quad (3.3)$$

причем запись типа $[a]$ здесь и далее обозначает целую часть числа a .

4. Если $\tau_s = 1$, то индексы p и j определяются по формулам

$$p = s+1; \quad j = k - N_{tot}^s. \quad (3.4)$$

Если $s > 0$ и $\tau_s = 0$, то уменьшаем значение s на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если $s = 0$ и $\tau_s = 0$, то следует положить

Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Одномерные проблемы

$$p = 0; \quad j = k. \quad (3.5)$$

$$t = k - N_{tot,red}^s. \quad (4.6)$$

4. МУЛЬТИИНДЕКСЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ИНДЕКСАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РЕДУЦИРОВАННОГО ВЕКТОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Введем глобальную систему индексации элементов вектора (1.15) в соответствии с формулой:

$$k \Leftrightarrow (j, p), \quad (4.1)$$

$$\text{где } k = \sum_{q=1}^j \chi_j^p + \sum_{q=0}^{p-1} N_q^r; \quad N_p^r = \sum_{j=1}^{N_p} \chi_j^p; \quad (4.2)$$

k – глобальный индекс; j, p – исходные индексы (мультииндекс).

Будем использовать далее следующие обозначения:

$$N_{tot,red}^{-1} = 0; \quad N_{tot,red}^s = \sum_{q=0}^s N_q^r, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (4.3)$$

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов p и j по глобальному индексу k :

1. Задаемся значением $s = M$.
2. Вычисляем значение $N_{tot,red}^s$.
3. Вычисляем значение τ_s по формуле

$$\tau_s = \left[\frac{s-1}{N_{tot,red}^s} \right]. \quad (4.4)$$

4. Если $\tau_s = 1$, то индекс p определяется по формуле

$$p = s + 1. \quad (4.5)$$

Далее вычисляем вспомогательную величину t :

Индекс j определяем в рамках описанной ниже процедуры:

- а) Задаемся значением $m = 1$.
- б) Вычисляем величину

$$r_m = \sum_{i=1}^m \chi_i^p. \quad (4.7)$$

- в) Если $t = r_m$, то

$$j = m. \quad (4.8)$$

В противном случае следует увеличить значение m на единицу и перейти к пункту б) процедуры.

Если $s > 0$ и $\tau_s = 0$, то уменьшаем значение s на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если $s = 0$ и $\tau_s = 0$, то следует положить

$$p = 0, \quad (4.9)$$

а индекс j определить согласно описанным выше пунктам а)-в) процедуры.

5. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ РЕДУКЦИИ

1. Изначально задаем всем элементам матрицы R нулевые значения, т.е. задаем $R = 0$.
2. Задаемся значением $i_1 = n$.
3. В соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 3) по глобальному индексу i_1 находим мультииндекс p, j соответствующего элемента вектора (1.5).
4. Здесь следует отдельно рассмотреть два различных случая.
 - 4.1. Если $\chi_j^p = 1$, то в соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 4) по мультииндексу p, j находим соответствующий

глобальный индекс i_2 соответствующего элемента вектора (1.15), после чего определяем значение элемента матрицы редукции по формуле

$$R_{i_1, i_2} = 1, \quad (5.1)$$

где i_1 и i_2 – соответственно номер строки и номер столбца, в которых расположен элемент матрицы.

4.2. Если $\chi_j^p = 0$, то далее вычисляем значения параметров

$$m = 1; \quad q = p + 1; \quad t = j; \quad (5.2)$$

$$s = \left[\frac{t+1}{2} \right]. \quad (5.3)$$

4.2.1. Если $\chi_s^q = 1$, то в соответствии с описанной ранее процедурой (см. пункт 4) по мультииндексу q, s находим соответствующий глобальный индекс i_2 соответствующего элемента вектора (1.15), после чего определяем значение элемента матрицы редукции по формуле

$$R_{i_1, i_2} = \beta^m. \quad (5.4)$$

4.2.2. Если $\chi_s^q = 0$, то увеличиваем величину m на единицу, увеличиваем величину q на единицу, задаем $t = s$ и переходим к формуле (5.3).

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-

- деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по базису Хаара. Часть 1: Введение в проблему, одномерный случай. // «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании». Международная научная конференция. Москва, 19-21 октября 2011 года. Сборник трудов. Том 2. - М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011, с. 631-635.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Введение. Одномерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 30-39.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические

- методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
 5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
 6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
 7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
 8. **Постнов В.А.** Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ: БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена обзорно-аналитическому исследованию приложений вейвлет-анализа в строительной механике и механике деформируемого твердого тела. Соответствующий аппарат стал находить свое применение при решении задач расчета конструкций, начиная со второй половины 90-х годов прошлого века. Кроме того, здесь дано общее понятие о вейвлет-анализе, кратко описана история его развития и основные приложения.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, приложения, библиографический обзор, строительная механика, механика деформируемого твердого тела

WAVELET ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS FOR PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS: BIBLIOGRAPHIC REVIEW

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to an overview and an analytical study of applications of wavelet analysis in structural mechanics and solid mechanics. Corresponding methods began to find their way in solving problems of structural analysis, since the second half of the 90's of the last century. In addition, here we give a general idea of the wavelet analysis, a brief description of the history of its development, and basic applications.

Key words: wavelet analysis, applications, bibliographic review, structural mechanics, solid mechanics

1. ПОНЯТИЕ О ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗЕ

В последние годы тема вейвлет-анализа привлекла в равной степени большое внимание, как со стороны математиков, так и специалистов в области технических наук. Ни одно из направлений чистой и прикладной математики не завоевывало такой популярности за столь стремительно короткий срок. В частности, несмотря на то, что гармонический анализ продолжает быть очень популярной и важной математической дисциплиной, никогда прежде не уделялось столько внимания его вычислительным аспектам, как начиная с появления вейвлетов. Вычислительный гармонический анализ, который с недавнего времени стал активной областью исследова-

ний, построен на базе основных принципов математики вейвлетов. С точки зрения применения в технических науках вейвлет-преобразование привело к использованию мощного математического набора методов локализованного частотно-временного и пространственно-фазового анализов многомасштабных явлений. Эти методы дополнили аппарат современных научных исследований и стимулировали развитие инженерных приложений. В результате вычислительный гармонический анализ можно рассматривать как междисциплинарную область исследований, а вейвлеты представляются привлекательными для специалистов с самыми разными научными интересами. Вместе с тем, вейвлет-анализ находится лишь в процессе своего

бурного развития и еще рано составлять о нем окончательное представление.

Абстрагировавшись от всякой математической строгости, в простейшем случае, следуя авторам [3], дадим понятие о вейвлет-анализе. Как известно, любой сигнал можно разложить в сумму гармоник (синусоид) разной частоты. Но синусоидальные волны бесконечны и не вполне удовлетворительно отслеживают изменения сигнала во времени. Для улавливания этих изменений можно вместо бесконечных волн взять короткие, совершенно одинаковые, но разнесенные по времени «всплески» и, кроме того, добавить для полноты их всевозможные растянутые и сжатые копии. Соответственно сигнал можно разложить в сумму подобных всплесков разного размера и местоположения. Коэффициенты разложения – важная информация об эволюции сигнала. Они зависят от выбора изначального всплеска. Для каждой прикладной задачи можно подобрать наиболее приспособленный (именно для нее) всплеск. Он и называется вейвлетом, а сама описанная методика вейвлет-анализом.

2. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Исторически, концепция «вейвлетов» (англ. «wavelet»; франц. «ondelette» – маленькая волна, волночка) возникла при изучении частотно-временного анализа сигналов, распространения волн и дискретизации сигналов. Одним из главных стимулов к разработке теории вейвлет-преобразования послужил тот факт, что с помощью анализа Фурье не представлялось возможным получить локальную информацию о сигналах. Преобразование Фурье не может использоваться для анализа сигналов в «объединенном» частотно-временном пространстве. Вейвлет-преобразование представляет собой сравнительно новый математический аппарат, появившейся в литературе лишь в начале 80-х

годов прошлого столетия. По сути, концепция вейвлетов может рассматриваться как синтез различных идей, возникших в рамках различных дисциплин, включая математику, физику и инженерные науки.

В 1982 году французский инженер-геофизик J. Morlet предложил вейвлет-преобразование как новый математический метод анализа сейсмических сигналов, особенность которых заключалась в их нестационарности во времени. В качестве вейвлетов J. Morlet рассматривал семейство функций, полученных путем масштабных преобразований и параллельных переносов специально выбранной функции – материнского вейвлета. Французский физик-теоретик А. Grossmann получил точную формулу обратного вейвлет-преобразования. В 1984 году совместные усилия J. Morlet и А. Grossmann привели к детальному изучению непрерывного вейвлет-преобразования и его приложений [92]. В процессе их работы выяснилось, что теория вейвлетов, как и анализ Фурье (разложения в ряд Фурье), представляет новый метод частотного анализа сигналов.

В 1985 году французский математик Y. Meyer установил связь между формулой Кальдерона в гармоническом анализе и новыми методами, предложенным J. Morlet и А. Grossmann. Используя операторы Кальдерона-Зигмунда и теорию Литтлвуда-Пэли, Y. Meyer смог построить математические основания теории вейвлетов. Первым крупным достижением вейвлет-анализа стало построение И. Добеши, А. Grossmann и Y. Meyer [78] разложений по неортогональным вейвлетам. В 1985-1986 годах в работах Y. Meyer и P.G. Lemarie были построены ортонормированные базисы из гладких вейвлет-функций. В то же время S. Mallat установил, что квадратурные зеркальные фильтры играют важную роль в построении вейвлет-базиса Хаара. Y. Meyer [131] и S. Mallat [126] предложили общую процедуру построения ортонормированного вейвлет-базиса. Их совместная работа привела к разработке процедуры кратномасштабного анализа [124,

125]. S. Mallat также предложил алгоритмы вейвлет-разложения и реконструкции (анализа и синтеза) с использованием кратномасштабного анализа. Работа S. Mallat послужила источником дальнейшего развития теории вейвлетов. Через несколько месяцев после ее выхода G. Battle [49] и P.G. Lemarie [115] независимо друг от друга предложили процедуру построения экспоненциально убывающих ортогональных вейвлет-сплайнов.

Работа Y. Meyer натолкнула И. Добеши [76] на теорию создания вейвлет-базиса, сконструированного из ортонормированных вейвлетов с компактным носителем, обладающих, кроме того, определенной гладкостью. Исследования И. Добеши имели огромное влияние на изучение как собственно вейвлетов, так и их приложений, ее труды позволили существенно объяснить связь между непрерывным и дискретным вейвлет-анализом (последний получил широкое распространение при анализе цифровых сигналов). Концепция фреймов была предложена R.J. Duffin and A.C. Schaeffer [84] и позже более детально изучена И. Добеши [7,77].

Однако, несмотря на серьезные успехи, специалисты в области вейвлет-анализа осознали, что довольно затруднительно построить вейвлеты, которые одновременно симметричны, ортогональны и имеют компактный носитель. Для преодоления таких сложностей A. Cohen [63] и И. Добеши [66] детально изучили биортогональные вейвлеты. К. Чуи и Y. Wang [61,62], предложили сплайн-вейвлеты с компактным носителем и концепцию полуортогонального вейвлет-анализа. С другой стороны G. Beylkin [51, 52], R. Coifman [52] и V. Rokhlin [52] с успехом применяли кратномасштабный анализ (с набором ортогональных масштабных функций) к изучению операторов в $L_2(R)$. Указанные работы совпали с созданием новых алгоритмов математического моделирования. Существенный прогресс был достигнут в методах граничных элементов, конечных элементов, численном решении дифферен-

циальных уравнений в частных производных с использованием вейвлет-анализа [337].

Развитие вейвлет-анализа в России велось С.Б. Стечкиным [27,28], Н.М. Астафьевой [2], В.И. Воробьевым [5], В.Г. Грибуниным [5], Ю.К. Демьяновичем [6], И.М. Дреминым [8], О.В. Ивановым [8], В.А. Нечитайло [8], И.Я. Новиковым [27,28], Л.В. Новиковым, И.Р. Стаховским [35] и другими.

Завершая краткий исторический обзор, приведем некоторые области приложения вейвлет-анализа: обработка сигналов, машинное зрение, сейсмология, изучение турбулентности, компьютерная графика, обработка изображений, передача данных в цифровой форме, распознавание образов, теория приближений функций, квантовая оптика, биомедицинская инженерия, теория дискретизации, теория операторов, дифференциальные уравнения, численный анализ, статистика. Вейвлеты позволяют представлять такую сложную информацию как музыка, речь, изображения в виде разложений по элементарным элементам формы («кирпичикам») – вейвлетам.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ И МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Следует сразу отметить, что работ, посвященных вейвлет-анализу в строительной механике и механике деформируемого твердого тела, имеется относительно небольшое число. Аппарат вейвлет-анализа начал находить свое применение при решении задач расчета конструкций, зданий и сооружений, начиная со второй половины 90-х годов прошлого века. Здесь можно перечислить такие приложения как динамика сооружений; мониторинг конструкций и сооружений, выявление в них дефектов, зон разрушения, трещин и т.д.; вероятностная механика; визуализация данных, полученных в результате численных расчетов строительных объектов;

системы распознавания в гражданском строительстве и т.д. [41,42,100,114,130,133,136,138,139,147].

Значимым успехом видятся достижения последних лет, касающиеся использования вейвлетов в численных методах решения различных операторных уравнений, в том числе эллиптических уравнений в частных производных, ГИУ, псевдодифференциальных уравнений и т.д. Указанный факт особенно важен при решении задач теории упругости и пластичности. Выделим в этой связи работы А. Barinka [48], Т. Barsch [48], Р. Charton [48], А. Cohen [48,64], S. Dahlke [48,67], W. Dahmen [48,68-74], S. Dumont [82,83], S. Jaffard [104], А. Kunoth [67,69,70], А. J. Kurdila [71,72,109-111], F. Lebon [82,83], Р. Monasse [132], Р. Oswald [71,72], V. Perrier [132], S. Prossdorf [73,74], S. Qian [145], R. Schneider [73,74], K. Urban [48,69,70,139], J. Weiss [40,145]. Методы, использующие вейвлет-анализ, отличает многоуровневый характер и высокое качество аппроксимации операторов и функций. В развитии данного направления ведутся исследования по построению эффективных преобуславливателей, зависящих от вида решаемой задачи, что обеспечивает появление новых быстрых и высокоточных алгоритмов [70]. Вейвлет-функции применяются в качестве аппроксимирующих функций в различных вариантах метода конечных элементов [38,39-42,55,59,69,81,83,90,91,95,96,105,109-111,119,120,127,142,155,163-166]. Вейвлет-версии метода Галеркина для стационарных задач представлены в работах S. Dahlke [67], W. Dahmen [70], L. Gori, А. Kunoth [67,70], L. Pezza, K. Urban [154]. Вейвлет-версии методов коллокации и вопросы их применение для решения линейных и нелинейных задач строительной механики излагаются у S. Bertoluzza [50,56], G. Naldi [50,85,137-139], Р. Venini [85,137-139]. Отдельные аспекты использования вейвлет-аппроксимации в МГЭ изучались Т. von Petersdorff [158], С. Schwab [158], в МКЭ – G. Bugeda [142], L.M.S. Castro [54,55], M. Papadrakakis [142], J. Wang [165,

166], X. Zheng [165,166], Y. Zhou [165,166]. Среди разработок в области решения задач, зависящих от времени, выделим предложенные S. Bertoluzza, G. Beylkin, J.C. Chen [161], G. Chivassa [60], V. Comincioli, W. Dahmen [70], J.M. Keiser, А. Kunoth [69], Y. Maday, G. Naldi, V. Perrier, J.C. Ravel, Т. Scapolla, Р. Venini, L.A. Wong [161], K. Urban [69], а в области нелинейных проблем – труды D. Fasano [85], K. Hackl [94], G. Naldi [50,85,137-139], Р. Venini [85,137-139], K. Urban [139]. Если говорить о применении вейвлет-преобразования для частотного анализа некоторого сигнала, то в ряде случаев он используется лишь как средство уточнения для традиционных форм модального анализа с использованием преобразования Фурье. Так, в работе J. Lardies и S. Gouttebroze [114] вейвлетное преобразование применяется как частотно-временное преобразование для определения собственных частот, коэффициентов демпфирования и форм колебаний систем. Аналогично в статье L.A. Montejo и L.E. Suarez [133] представлен вейвлетный анализ записей движений ряда сильных землетрясений с целью определения доминантных частот, характерных для различных грунтовых условий. Специфические свойства «частотно-временного микроскопа» для анализа нестационарных и переходных процессов активно используются в [156], где теоретически и экспериментально анализируется процесс внедрения ударника в круговую защемленную по контуру плиту. Вейвлет анализ для колебаний распределенных структур применен в [44], где излагаются результаты обширного обзора развитых методов вейвлет-анализа частот и форм колебаний упругих оболочек и пластин. Благодаря размерным и сдвиговым преобразованиям солитон-функций подчеркивается возможность вейвлетного изучения свойств сигналов совместно в частотной и временной областях. В работах М.В. Жигалова [23,24,113], А.В. Крысько [22,23,44,45], В.А. Крысько [24,25,113] и В.В. Солдатова [23-25,34,45,113] ведется построение математических мо-

делей сложных колебаний распределенных систем (в виде одно- и многослойных балок (спаянных и неспаянных), пластинок, сферических пологих и цилиндрических оболочек), а также разработка программного обеспечения, позволяющего осуществлять вейвлет-анализ сценариев перехода в хаос для таких систем. С.П. Копысов [15-21] и Ю.А. Сагдеева [15-21,30] разработали метод осреднения эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на вейвлет-преобразовании и методе конечных элементов для прогнозирования эффективных свойств и анализа осредненных решений уравнений для композитов с известными структурой и свойствами составляющих компонент.

Серия работ А.Б. Золотова, М.Л. Мозгалева и Д.Н. Алексева была посвящена разработке и изучению численных методов и алгоритмов исследования локального напряженно-деформированного состояния конструкций с помощью вейвлет-анализа [1,11-14,29,31]. В [11-14] решение представляется с позиции определения напряженно-деформированного состояния в заранее выделенной локальной зоне. На основе этих соображений строится оптимальная расчетная сетка, дающая качественную картину степени влияния напряженных состояний конструкции в различных областях друг на друга. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. Строится не только более качественная расчетная модель, но и вносятся некоторые конструктивные изменения. В [11-14] разработаны специальные дискретные модели расчета конструкций, эффективные для применения локальных методов исследования и вейвлет-анализа; предложены методы вычисления фундаментальных функций для задач теории упругости с привлечением вейвлет-анализа; описаны методы дискретного вейвлет-анализа на основе базиса Хаара с позиций его использования в расчете конструкций;

представлены алгоритмы синтеза и анализа по дискретному базису Хаара с выделением локальных и глобальных элементов; разработана методика получения локальных решений; решены практические примеры с введением локализованных сеток и многоуровневого представления решений в вейвлет-базисе Хаара.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев Д.Н.** Численные методы исследования локального напряженно-

- деформируемого состояния конструкций и вейвлет-анализ.: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.13.18. МГСУ. М.: 2002. – 172 с.
2. **Астафьева Н.М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. т. 166. № 11. с. 1145–1170.
 3. **Башилов Г. Левкович-Маслюк Л.И.** Мелковолновый анализ // Компьютерра, №8 (236), 1998.
 4. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
 5. **Воробьев В.И., Грибунин В.Г.** Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: Изд-во ВУС, 1999. – 208 с.
 6. **Демьянович Ю.К.** Всплески & минимальные сплайны. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. – 200 с.
 7. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
 8. **Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.** Вейвлеты и их использование. // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 5. с. 465-561.
 9. **Дьяконов В.П.** Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 400 с.
 10. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2012.–158 с.
 11. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
 12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
 13. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: МГСУ, 2011. – 368 с.
 14. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
 15. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Вейвлет-осреднение в задачах теории упругости композитных материалов // Проблемы термогазодинамики и прочности механических систем. – Ижевск: Изд-во ИПМ УрОР АН, 2005, с. 108-123.
 16. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Вычислительные особенности двумерного вейвлет-осреднения в задачах многомасштабного анализа // Вычислительные методы и программирование, 2005, т. 6, №1, с. 1-8.
 17. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Метод численного определения упругих осредненных характеристик композитов // Проблемы механики и материаловедения. – Ижевск: Изд-во ИПМ УрОР АН, 2006, с. 8-9.
 18. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Об одном методе определения эффективных упругих характеристик композитов с помощью вейвлет-преобразования // Интеллектуальные системы в производстве, 2007, т. 1, с. 49-61.
 19. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Определение эффективного коэффициента теплопроводности с помощью вейвлет-осреднения // Материаловедение и обработка материалов. – Ижевск: Изд-во ИПМ УрОР АН, 2005, с. 243-250.
 20. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Применение вейвлет-преобразования при численном осреднении дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // Известия вузов. Математика, 2007, №7, с. 80-83.
 21. **Копысов С.П., Сагдеева Ю.А.** Численное определение осредненных характеристик композитов на основе МКЭ и вейвлет-преобразования // Известия института математики и информатики УдГУ, 2006, т. 37, №3, с. 67-68.

22. **Крысько А.В., Жигалов М.В.** Математические модели и методы исследования сложных колебаний неклассических распределенных механических систем. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. – 230 с.
23. **Крысько А.В., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Анализ хаотических колебаний распределенных систем в виде балок Эйлера-Бернулли с помощью вейвлет-преобразования. // Известия вузов. Авиационная техника, 2009, №4, с. 21-24.
24. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** Вейвлет-анализ колебаний замкнутых цилиндрических оболочек. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, №4, Вып. 1, с. 24-30.
25. **Крысько В.А., Жигалов М.В., Солдатов В.В.** О выборе типа вейвлета при изучении нелинейных колебаний балок с учетом поперечных сдвигов. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, №3(40), Вып. 1, с. 14-22.
26. **Мозгалева М.Л., Золотов А.Б.** Использование дискретного базиса Хаара для получения локального решения краевых задач. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 5, Issue 1&2, Begell House Inc. Publishers & ASV, 2009, pp. 127-132.
27. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основные конструкции всплесков. // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. т. 3. № 4, с. 999-1028.
28. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков. // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. № 6 (324), с. 53-128.
29. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. трудов №4. – М.: МГСУ, 2001. – с. 248-258.
30. **Сагдеева Ю.А.** Метод численного определения осредненных характеристик композитов на основе вейвлет-преобразования и метода конечных элементов: Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18, Институт прикладной механики Уральского отделения РАН. Ижевск: 2007. – 132 с.
31. **Сидоров В.Н., Акимов П.А.** О научно-творческой деятельности Александра Борисовича Золотова. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 5, Issue 1&2, 2009, pp. 166-185.
32. **Смоленцев Н.К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК, 2008. – 448 с.
33. **Смоленцев Н.К.** Вейвлет-анализ в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 448 с.
34. **Солдатов В.В.** Вейвлет-анализ в исследовании сложных колебаний балок, пластиной и оболочек. Дисс. канд. физ.-мат. наук. 05.13.18. Саратов: 2009, 164 с.
35. **Стаховский И.Р.** Вейвлетный анализ временных сейсмических рядов. // ДАН. 1996. Т. 350. № 3. с. 393-396.
36. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
37. **Al-Bayati A.Y., Ibraheem K.I., Ghatheth A.I.** A Modified Wavelet Algorithm to Solve BVPs with An Infinite Number of Boundary Conditions. // Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, 2011.
38. **Al-Qassab M., Nair S.** Wavelet-Galerkin method for the free vibrations of an elastic cable carrying an attached mass. // J. Sound and Vibr. N 1-2, 2004, T.270, pp. 191-206.
39. **Alvarez Diaz L., Vampa V., Martin M.T.** The Construction of Plate Finite Elements Using Wavelet Basis Functions. // Revista Investigacion Operacional, Vol. 30, No. 3, 2009, pp. 193-204.
40. **Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J.** Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations. // International Journal for Numerical

- Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
41. **Andreev R.** Implementation of Sparse wavelet-Galerkin Finite Element Method for Stochastic Partial Differential Equations. Master thesis, ETH Zurich, 2008.
 42. **Andreev R.** Sparse wavelet-Galerkin methods for stochastic diffusion problems. Bachelor thesis, ETH Zurich, 2007.
 43. **Ashok V., Balakumaran T., Gowrishankar C., Vennila ILA, Nirmal kumar A.** The Fast Haar Wavelet Transform for Signal & Image Processing. // International Journal of Computer Science and Information Security, Vol. 7, No. 1, 2010, pp. 126-130.
 44. **Awrejcewicz J., Krysko A.V.** Wavelets-based analysis of parametric vibrations of flexible plates // International Applied Mechanics. Vol. 39, No. 9, 2003, pp. 997-1028.
 45. **Awrejcewicz J., Krysko A., Soldatov V.** On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally. // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2009, Vol. 19, Issue 10, pp. 3347-3371.
 46. **Babolian E., Shshsawaran A.** Numerical solution of nonlinear fredholm integral equations of the second kind using haar wavelets. // J. Comput. Appl. Math., vol. 225, 2009, pp. 87-95.
 47. **Balser T.** New Approximations for Avoiding Gibbs Phenomenon in Wavelet Subspaces. PhD thesis, The University of Wisconsin-Milwaukee, 1998.
 48. **Barinka A., Barsch T., Charton P., Cohen A., Dahlke S., Dahmen W., Urban K.** Adaptive Wavelet Schemes for Elliptic Problems – Implementation and Numerical Experiments, RWTH Aachen, IGPM Preprint 173, 1999.
 49. **Battle G.** A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions. // Commun. Math. Phys., 110, 1987, pp. 601-615.
 50. **Bertoluzza S., Naldi G.** A wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations. // Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol. 3 n.1, 1996, p. 1-9.
 51. **Beylkin G.** On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, pp. 1716-1740.
 52. **Beylkin G., Coiffman R., Rokhlin V.** Fast wavelet transforms and numerical algorithms. // Connum. Pure Appl. Math., 44, 1991, pp. 141-183.
 53. **Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H.** Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A Primer, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1998.
 54. **Castro L.M.S.** Wavelets e Series de Walsh em Elementos Finitos. PhD thesis, Technical University of Lisbon, 1996.
 55. **Castro L.M.S., Freitas J.A.T.** Wavelets in hybrid-mixed stress elements. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190/31, 2001, pp. 3977-3998.
 56. **Castro L.M.S., Ferreira A.J.M., Bertoluzza S., Batra R.C., Reddy J.N.** A wavelet collocation method for the static analysis of sandwich plates using a leyerwise theory. // Composite Structures, 92, 2010, pp. 1786-1792.
 57. **Cattani C.** Haar wavelet spline. // J. Interdisciplinary Math. 4, 2001, pp. 35-47.
 58. **Chen C.F., Hsiao C.H.** Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. // IEE Proc. Pt. D 144 (1.1), 1997) 87-94.
 59. **Chen X., Yang S., Ma J., He Z.** The construction of wavelet-finite element and its application. // Finite Elements in Analysis and Design, 40, 2004, pp. 541-554.
 60. **Chivassa G.** Algorithmes Adaptatifs en ondelettes pour la resolution d'equation aux derivees partielles, Thesis Universite de la Mediterranee Aix-Marseille II, 1997.
 61. **Chui C.K., Wang J.Z.** A cardinal spline approach to wavelets. // Proc. Amer. Math. Soc. 113, 1991, pp. 785-793.

62. **Chui C.K., Wang J.Z.** On compactly supported spline wavelets and a duality principle. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330, 1992, pp. 903-915.
63. **Cohen A.** Biorthogonal Wavelets, in *Wavelets – A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1992, pp. 123-152.
64. **Cohen A.** Wavelet methods in Numerical Analysis. in P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds. *Handbook of Numerical Analysis Vol. 7*, North-Holland, 2000, p. 417-711.
65. **Cohen A., Dahmen W., DeVore R.** Adaptive Wavelet Techniques in Numerical Simulation. // *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004, Vol. 1, pp. 157-198.
66. **Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.** Biorthogonal basis of compactly supported wavelets. // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 45, 1992, pp. 485-560.
67. **Dahlke S., Kunoth A.** A biorthogonal wavelet approach for solving boundary value problems, preprint, n. 85, RWTH Aachen, 1993.
68. **Dahmen W.** Wavelet and multiscale methods for operator equations, *Acta Numerica* 7, Cambridge University Press, 1997, p. 55-228.
69. **Dahmen W., Kunoth A., Urban K.** A wavelet-Galerkin method for the Stokes Equations. // *Computing*, 56, N.3, (1996), 259-302.
70. **Dahmen W., Kunoth A., Urban K.** Biorthogonal spline – wavelets on the interval – Stability and moment conditions. // *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 6, 1999, pp. 132–196.
71. **Dahmen W., Kurdila A., Oswald P. eds.** Multiresolution analysis and wavelets for the numerical solution of partial differential equations. Academic Press, 1997.
72. **Dahmen W., Kurdila A.J., Oswald P. eds.** Multiscale wavelet methods for partial differential equations, *Wavelet Analysis and its Applications* 6, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
73. **Dahmen W., Prossdorf S., Schneider R.** Multiscale methods for pseudodifferential equations on smooth manifolds. // in C. K. Chui, L. Montefusco, L. Puccio eds. *Proceedings of the International Conference on Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Academic Press, 1994, p. 385-424.
74. **Dahmen W., Prossdorf S., Schneider R.** Wavelet approximation methods for periodic pseudodifferential equation. Part 2 - Fast and matrix compression, *Advances in Computational Mathematics*, 1, 1993, p. 259-335.
75. **Daubechies I.** Recent results in wavelet applications. // *J. Electron. Imaging*, 1998, 7, pp. 719-724.
76. **Daubechies I.** Orthogonal bases of compactly supported wavelets. // *Commun. Pure Appl. Math.*, 41, 1988, pp. 909-996.
77. **Daubechies I.** The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. // *IEEE Trans. Infom. Theory*, 36, 1990, pp. 961-1005.
78. **Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y.** Painless nonorthogonal expansions. // *J. Math. Phys.*, 27, 1986, pp. 1271-1283.
79. **Debnath L.** Wavelet transforms and their applications. Birkhauser Verlag, Boston, Basel, Berlin. 2002. 565 pages.
80. **Donoho D.L., Johnstone I.M.** Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. // *Tech. Rept., Statistics*, Stanford, 1992.
81. **Doreen De Leon.** Wavelet Techniques Applied to Multigrid Methods. Ph.D. Thesis. University of California, 2001.
82. **Dumont S., Lebon F.** Representation of Plane Elastostatics Operators in Daubechies Wavelets. // *Computers and Structures*, Vol. 60, No. 4, 1996, pp. 561-569.
83. **Duffinn R.J., Schaeffer A.C.** A class of nonharmonic Fourier series. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72, 1952, pp. 341-366.
84. **Dumont S., Lebon F.** Wavelet-Galerkin Method for Periodic Heterogeneous Media. // *Computers and Structures*, Vol. 61, No. 1, 1996, pp. 55-65.

85. **Fasano D., Naldi G., Venini P.** Computational softening plasticity by wavelet bases. in B.H.V. Topping ed. Computational techniques for materials, composites and composite structures, CIVILCOMP Ltd., Edinburgh, Scotland, 2000, p.39-45.
86. **Fazal-i-Haq, Arshed A.** Numerical Solution of Fourth Order Boundary-Value Problems Using Haar Wavelets. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, N. 63, pp. 3131-3146.
87. **Fazal-i-Haq, Imran A., Siraj-ul-Islam. A** Haar Wavelets Based Numerical Method for eight-order Boundary Problems. // International Journal of Mathematical and Computer Sciences, 6, 1, 2010, pp. 25-31.
88. **Glabisz W.** The use of walsh-wavelets packets in linear boundary value problems. // Comput. and Struct., 82, 2004, pp. 131-141.
89. **Glowinski R., Lawton W.M., Ravachol M., Tenenbaum E.** Wavelets solution of linear and nonlinear elliptic parabolic and hyperbolic problems in one space dimension in Computing methods in applied sciences and engineering. // SIAM Philadelphia, 1990, pp. 55-120.
90. **Glowinski R., Pan T.W., Wells R.O. Jr., Zhou X.** Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains. // Journal of Computational Physics, Volume 126, Issue 1, June 1996, pp. 41-50.
91. **Gomes S., Cortina E.** Convergence estimates for the wavelet Galerkin method. // Siam J. Numer. Anal., 33-1, 1996, pp. 149-161.
92. **Grossman A., Morlet S.** Decomposition of Hardy functions into square separable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal, 1984, vol. 15, №4, p. 723.
93. **Gurley K., Kijewski T., Kareem A.** First- and Higher-Order Correlation Detection Using Wavelet Transforms. // Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 129(2), 2003, p. 188-201.
94. **Hackl K.** A wavelet based elastoplasticity beam model. // Z. Angew. Math. Mech., 76, 1996, pp. 175-179.
95. **Han J., Ren W., Huang Y.** A multivariable wavelet based finite element method and its application to thick plates. // Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 821-833.
96. **Han J., Ren W., Huang Y.** A spline wavelet finite-element method in structural mechanics. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, 2006, pp. 166-190.
97. **Hariharan G.** Solving Finite Length Beam Equation by the Haar Wavelet Method. // International Journal of Computer Applications, Volume 9, No. 1, 2010, pp. 27-34.
98. **Hariharan G., Kannan K.** A comparison of Haar wavelet and Adomain decomposition method for solving one-dimensional reaction-diffusion equations. // International Journal of Applied Mathematics and Computation, 2010, Volume 2(1), pp 50-61.
99. **Hariharan G., Kannan K., Sharma K.R.** Haar wavelet in estimating depth profile of soil temperature. // Applied Mathematics and Computation 210, 2009, pp. 119-125.
100. **Hou Z., Noori M., St. Amand R.** Wavelet-Based Approach for Structural Damage Detection. // ASCE Journal of Engineering Mechanics, Volume 126, Number 7, July 2000, p. 677-683.
101. **Hsiao C.H.** Haar wavelet approach to linear stiff systems. // Mathematics and Computers in simulation ,Vol. 64, 2004, pp. 561-567.
102. **Hsiao C.H.** Haar wavelet direct method for solving variational problems. // Mathematics and computers in simulation, 64, 2004, pp. 569-585.
103. **Hsiao C.H., Wang W.J.** Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems. // Math. Comput. Simulat, 57, 2001, pp. 347-353.
104. **Jaffard S.** Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, p. 965-98.

105. **Jang G.-W., Kim J.E., Kim Y.Y.** Multiscale Galerkin method using interpolation wavelets for two-dimensional elliptic problems in general domains. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* N2, 2004, T.59, pp. 225-253.
106. **Jerri A.J.** The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines and Wavelet Approximations. Kluwer Academic Publishers, 1998, 364 pp.
107. **Kelly S.E.** Gibbs phenomenon for wavelets. // *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 3, 1996, pp. 72-81.
108. **Kelly S.E.** Pointwise convergence for wavelet expansions. PhD thesis, Washington University, St. Louis, 1992.
109. **Ko J., Kurdila A.J.** A class of finite element methods based on orthonormal compactly supported wavelets. // *Computational Mechanics*, 1995, 16(4), pp. 235-244.
110. **Ko J., Kurdila A.J., Pilant M.S.** Triangular Wavelet Based Finite Elements Via Multivalued Scaling Equations. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 146, 1997, pp. 1-17.
111. **Ko J., Kurdila A.J., Wells R., Zhou X.** On the Conditioning of Numerical Boundary Measures in Wavelet Galerkin Methods. // *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1996, pp. 281-294.
112. **Krishnan J., Runborg O., Kevrekidis I.G.** Bifurcation analysis of nonlinear reaction-diffusion problems using wavelet-based reduction techniques. // *Computers and Chemical Engineering*, 28, 2004, pp. 557-574.
113. **Krysko V.A., Awrejcewicz J., Zhigalov M., Soldatov V., Kuznetsova E.S., Mitskevich S.** Dynamic stability loss of closed circled cylindrical shells estimation using wavelets. // *Proceedings of the International Conference "Chaotic Modeling and Simulation" CHAOS 2009*, Chania, Crete, Greece, June 1-5, 2009, 8 pages.
114. **Lardies J., Gouttebroze S.** Identification of modal parameters using the wavelet transform. // *Int. J. Mech. Sci.* N 11, 2002, T.44, pp. 2263-2283.
115. **Lemarie P.G.** Une nouvelle base d'ondelettes de L2 (Rn). // *J. Math. Pure Appl.*, 67, 1988, pp. 227-236.
116. **Lepik U.** Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations. // *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 2007, 56, 1, pp. 28-46.
117. **Lepik U.** Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method. // *Applied Mathematics and Computation*, 185, 2007, pp. 695-704.
118. **Lepik U.** Numerical Solution Of Differential Equations Using Haar Wavelets. // *Math. and Comp. Simulation Vol. 68*, 2005, pp. 127-143.
119. **Ma J., Xue J.** A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element. // *Finite Element in Analysis and Design*, 2003, 39, pp. 965-975.
120. **Ma J., Xue J., Yang S., He Z.** A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 2003, pp. 965-975.
121. **Majak J., Pohlak M., Eerme M.** Application of the Haar Wavelet based discretization technique to orthotropic plate and shell problems. // *Mechanics of Composite Materials*, 45(6), 2009, pp. 631-642.
122. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Kers J., Velsker T.** Haar Wavelet Based Discretization Technique for Analysis and Design of Composite Structures. // *16th International Conference on Composite Structures ICCS 16 A. J. M. Ferreira (Editor)*, FEUP, Porto, 2011.
123. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Lepikult T.** Weak formulation based Haar wavelet method for solving differential equations. // *Applied Mathematics and Computation*, 211(2), 2009, pp. 488-494.
124. **Mallat S.** A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, 1999.
125. **Mallat S.** A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representa-

- tion. // IEEE Trans. Patt. Recog. And Mach. Intell., 11, 1989, pp. 678-693.
126. **Mallat S.** Multiresolution approximations and wavelet orthonormal basis of $L_2(\mathbb{R})$. // Trans. Amer. Math. Soc., 315, 1989, pp. 69-88.
127. **Martin M.T., Vampa V.** A Daubechies wavelet Mindlin-Reissner plate element. // Asociacion de Mecanica Computacional, Vol XVII, 2008, pp. 2253-2264.
128. **Martinez V., Marquina A., Donat R.** Shooting methods for one dimensional diffusion absorption problems. // SIAM J. Numer. Anal., 31 (1994), pp. 572-589.
129. **Matsusue N., Hasegawa H., Sato K.-I.** Suppression of Boundary Effect and Introduction of Scale Correlation for Wavelet based Traffic Prediction. // Multimedia Signal Processing, 2007, MMSP 2007, pp. 438-440.
130. **Mei H., Agrawall O.P., Pai Shantaram S.** Wavelet-based model for stochastic analysis of beam structures. // AIAA Journal 3, 1998, vol. 36, pp. 465-470.
131. **Meyer Y.** Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees. Lecture Notes. University of Torino, Italy, 1986.
132. **Monasse P., Perrier V.** Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. // SIAM J. Math. Anal., 29(4), 1998, p. 1040-1065.
133. **Montejo L.A., Suarez L.E.** Wavelet-based identification of site frequencies from earthquake records. // J. Earthquake Eng. N 4, 2006, T.10, pp. 565-594.
134. **Morlet J., Arens G., Fourceau E., Giard D.** Wave propagation and sampling theory, Part I: Complex signal land scattering in multilayer media, J. Geophys. 47, 1982, pp. 203-221.
135. **Morlet J., Arens G., Fourceau E., Giard D.** Wave propagation and sampling theory, Part II: Sampling theory and complex waves, J. Geophys. 47, 1982, pp. 222-236.
136. **Moyo P., Brownjohn J.M.W.** Detection of Anomalous Structural Behavior Using Wavelet Analysis. // Mechanical Systems and Signal Processing, 16(2-3), 2002, pp. 429-445.
137. **Naldi G., Venini P.** Postprocessing singular solutions by the wavelet transform. // J.M. Dulieu-Smith, W.J. Staszewski, K. Worden (eds.) Proceedings Euromech 365, She_led, pp. 109-120, 1997.
138. **Naldi G., Venini P.** Wavelet analysis of structures: statics, dynamics and damage identification. // Meccanica, 32, 1997, pp. 223-230.
139. **Naldi G., Venini P., Urban K.** Wavelet Based Methods in Elastoplasticity and Damage Analysis. // WCCM V Fifth World Congress on Computational Mechanics. July 7-12, 2002, Vienna, Austria.
140. **Newland D.E.** Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. Longman, New York, 1993.
141. **Nuku-Lari A.** Structural analysis systems. Pergamon Press, Vol. 1-3, 1986.
142. **Papadrakakis M., Bugeda G.** Hybrid-Mixed Finite Element Elastoplastic Analysis Based on Walsh and Wavelet Interpolation. // Advanced Computational Methods in Structural Mechanics, Barcelona, p. 146-165, Castro, LMSS; Freitas, JAT; 1996, CIMNE.
143. **Percival D.B., Walden A.T.** Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge University Press, 2000.
144. **Potdar R.M., Kharalkar M.** Direct Method for Solving Variational Problems Using Haar Wavelet. // International J. of Multidispl. Research & Advcs. in Engg., Vol. 2, No. III, 2010, pp. 85-99.
145. **Qian S., Weiss J.** Wavelets and the numerical solution of partial differential equations. // J. Comput. Phys., 106, 1993, pp. 155-175.
146. **Resnikoff H.L., Wells Jr. R.O.** Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information, Springer-Verlag, New York, NY, 1998.
147. **Robertson A.N., Park K.C., Alvin K.F.** Identification of Structural Dynamics Mod-

- els Using Wavelet-Generated Impulse Response Data. // *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 120, 1998, pp. 261-266.
148. **Salajegheh E., Heidari A.** Dynamic Analysis of Structures Against Earth-quake by Combined Wavelet Transform and Fast Fourier Transform. // *Asian Journal of Civil Engineering*, Vol. 3, Number 3, September 2002, pp. 75-88.
149. **Shim H.T.** On Gibbs' Phenomenon in Wavelet Subspaces and Summability. PhD thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, 1994.
150. **Shim H.T., Volkmer H.** On the Gibbs phenomenon for wavelet expansions. *J. of Approx. Theory*, 84(1), 1996, pp. 74-95.
151. **Spanos P.D., Rao V.R.S.** Random Field Representation in a Biorthogonal Wavelets Basis. // *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 127, 2001, p. 194-205.
152. **Stark H-G.** *Wavelets and Signal Processing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005. 150 pages.
153. **Strang G., Nguyen T.** *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
154. **Urban K.** *Wavelets in Numerical Simulation*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 22, Springer-Verlag, 2002, 181 pages.
155. **Vampa V., Alvarez Diaz L., Martin M.T.** Daubechies wavelet beam element. // *Mecanica Computacional*, 26, 2007, pp. 654-666.
156. **Vandergheynst P., Antoine J.-P., Van Vyve E., Goldberg A., Doghri I.** Modeling and simulation of an impact test using wavelets, analytical solutions and finite elements. // *Int. J. Solids and Struct.* N 32-33, 2001, v. 38, pp. 5481-5508.
157. **Vivek K., Mani M.** Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction-diffusion problems. // *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol.5, No. 2, 2007, pp. 317-331.
158. **Von Petersdorff T., Schwab C.** Wavelet approximations of the first kind integral equation on polygons, *Numer. Math.*, 74, 1996, p. 479-516.
159. **Walter G.G., Shen X.** Continuous non-negative wavelets and their use in density estimation. Preprint, 1998.
160. **Walter G.G., Shen X.** Positive estimation with wavelets. *Contemporary Mathematics*, 216, 1998, pp. 63-79.
161. **Wong L.A., Chen J.C.** Nonlinear and chaotic behavior of structural system investigated by wavelet transform techniques. // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 36, 2001, p. 221-235.
162. **Xiang J., Chen X., He Y., He Z.** The construction of plane elastomechanics and Mindlin plate elements of B-spline wavelet on the interval. // *Finite Elements in Analysis and Design*, 42, 2006, pp. 1269-1280.
163. **Zhang X.-M., Liu K.-A., Liu J.-Q.** A wavelet Finite Element Method for 2D Wave Equation in the Fluid-Saturated Porous Media. // *Chinese Journal of Geophysics*, Volume 48, No. 5, 2005, pp. 1234-1246.
164. **Xu J., Shann W.** Galerkin wavelets methods for two-point boundary value problems. // *Numer. Math.*, 63, 1992, pp. 123-144.
165. **Zhou Y., Wang J., Zheng X.** Applications of Wavelet Galerkin FEM to Bending of Plate Structure. // *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 12(2), pp. 136-143.
166. **Zhou Y., Wang J., Zheng X.** Applications of wavelet Galerkin fem to bending of beam and plate structures. // *Appl. Math, and Mech. Engl. Ed.* 8, 1998, T.19, pp. 745-755.
167. **Zhu Z., Machiraju R., Fry B., Moorhead R.** Wavelet-based multiresolutional representation of computational field simulation datasets. // *Proc. of the 8th conference on Visualization 97*. Phoenix, Arizona, United States, p. 151, 1997.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный

университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

ОБ ОДНОМ КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

П.А. Акимов, О.А. Негрозов

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматривается корректный аналитический метод нахождения фундаментальной функции для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Представлены краткие базовые теоретические сведения, описаны математические основы предлагаемого метода, имеются сведения о программной реализации, рассмотрены примеры проведенных расчетов с использованием разработанного программного обеспечения.

Ключевые слова: аналитические методы, корректные методы, фундаментальная функция, линейные дифференциальные операторы

ABOUT CORRECT ANALYTICAL METHOD OF CONSTRUCTION OF FUNDAMENTAL FUNCTION OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR

Pavel A. Akimov, Oleg A. Negrozov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to correct analytical method of construction of fundamental function of linear differential operator with constant coefficients. Brief basic theoretical information and mathematical foundations of the method are presented, information about the developed software and corresponding samples are given as well.

Key words: analytical methods, correct methods, fundamental function, linear differential operator

1. ПОНЯТИЕ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_{n-2} y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (1.1)$$

где $a_k = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – коэффициенты, $f(x)$ – известная функция.

Решение (1.1) в случае, когда $f(x) = \delta(x)$, обозначим $\varepsilon(x)$. Тогда

$$L\varepsilon(x) = \delta(x). \quad (1.2)$$

Функция $\varepsilon(x)$, определяемая уравнением (1.1), называется фундаментальной функцией дифференциального оператора

$$L = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \quad (1.3)$$

При произвольной правой части $f(x)$ общее решение задачи может быть записано в виде

Об одном корректном аналитическом методе нахождения фундаментальной функции для линейного дифференциального оператора

$$y(x) = \varepsilon(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (1.4)$$

$$\text{т.е.} \quad L^{-1} = \varepsilon *; \quad L^{-1} f = \varepsilon * f. \quad (1.5)$$

Очевидно, что L^{-1} является интегральным оператором, а функция $\varepsilon(x - \xi)$ является ядром этого интегрального оператора, т.е.

$$L^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (1.6)$$

Покажем, что это, в самом деле, так. Используя приведенную ранее формулу дифференцирования свертки, можем записать:

$$\begin{aligned} Ly(x) &= L(\varepsilon(x) * f(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} (\varepsilon(x) * f(x)) = \\ &= \left[\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} \varepsilon(x) \right] * f(x) = \\ &= L\varepsilon(x) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

На основании приведенных формул становится очевидной важность вычисления фундаментальной функции.

Отметим, что фундаментальная функция определена с точностью до однородного решения. Иными словами, если имеется некоторая функция $\psi(x)$, такая что $L\psi(x) = 0$, то $\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x) + \psi(x)$ также удовлетворяет уравнению $L\tilde{\varepsilon}(x) = \delta(x)$.

С практической точки зрения имеет смысл такой выбор фундаментальной функции, при котором она не возрастает на бесконечности или, во всяком случае, возрастает не быстрее x^k . Так, фундаментальная функция не должна иметь в своем составе функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda x > 0$, λ – некоторое число.

2. ОБ ОДНОМ УНИВЕРСАЛЬНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изложим ниже один достаточно простой способ построения фундаментальных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что более подробно с соответствующей универсальной методикой читатель может ознакомиться в следующем разделе.

Итак, предлагаемый способ заключается в следующем:

1. Записывается характеристическое уравнение

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (2.1)$$

соответствующее исходному дифференциальному оператору (1.3).

2. Определяются корни характеристического уравнения (2.1). Очевидно, это уравнение имеет n корней: $\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$, $p = 1, \dots, n$, часть из которых в общем случае кратные.

3. Записывается общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_{n-2} y^{(n-2)}(x) + \dots + \\ + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Общее решение $y(x)$ можно записать в простом виде, удобном и для ручного счета:

$$y = \sum_{p=0}^{n-1} C_p \psi_p, \quad (2.3)$$

$$\text{где} \quad \psi_p = x^k \exp(\alpha_p x) \begin{cases} \cos(\beta_p x) \\ \sin(\beta_p x) \end{cases}, \quad (2.4)$$

C_p , $p = 0, \dots, n-1$ – некоторые постоянные, подлежащие определению; ψ_p , $p = 0, \dots, n-1$ – базисные функции (или в общей литературе их нередко называют фундаментальными решениями); $k = 0, 1, \dots, \tilde{m}_p - 1$ – показатель степени; \tilde{m}_p – кратность корня.

Отметим, что множитель x^k в формуле (2.4) возникает в случае, когда λ_p – кратный корень.

Формулу (2.3) также можно переписать следующим образом:

$$y = \langle \bar{C}, \bar{\psi} \rangle, \quad (2.5)$$

где $\bar{C} = [C_0 \ C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{n-1}]^T$; (2.6)

$$\bar{\psi} = [\psi_0 \ \psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{n-1}]^T. \quad (2.7)$$

Заметим (в дальнейшем это будет показано более подробно), что при дифференцировании выражений (2.3) и (2.5) их общий вид остается прежним, а меняется лишь вектор коэффициентов \bar{C} , т.е.

$$y' = \langle \bar{C}^1, \bar{\psi} \rangle; \quad y'' = \langle \bar{C}^2, \bar{\psi} \rangle; \quad y''' = \langle \bar{C}^3, \bar{\psi} \rangle$$

и т.д.,

при этом векторы \bar{C}^k вычисляются по рекуррентной формуле

$$\bar{C}^{k+1} = Q\bar{C}^k, \quad (2.8)$$

где Q – матрица перехода.

Это существенно упрощает операции дифференцирования общего решения, особенно при сложном характере базисных функций (см. базисные функции общего вида, определяемые формулой (2.4)).

Используя (2.5) и (2.8), очевидно, можем записать формулу для вычисления производной от $y(x)$ произвольного s -го порядка:

$$y^{(s)} = \langle Q^s \bar{C}, \bar{\psi} \rangle = \langle \bar{C}, (Q^s)^* \bar{\psi} \rangle = \langle \bar{C}, \bar{\psi}^s \rangle, \quad (2.9)$$

где $\bar{\psi}^s = (Q^s)^* \bar{\psi}$, (2.10)

причем матрица Q определяется при вычислении первой производной. Далее при вычислении производных более высокого порядка она остается той же самой. Это позволяет избавиться от многократного вычисления производных, например, по формулам Ньютона – Лейбница.

Также необходимо отметить, что базисные функции (см. формулу (2.4)) могут быть определены неоднозначно (при построении решения возможны различные варианты их выбора). Например, если задача рассматривается в некоторой области $x \in (0, l)$ и базисная функция имеет вид $\exp(\alpha_p x)$, то вместо нее можно взять функцию $\exp(-\alpha_p (l-x))$, что избавит в дальнейшем от многих вычислительных неприятностей, которые могли бы возникнуть, в частности, на этапе компьютерной реализации.

4. Фундаментальную функцию $\varepsilon(x)$ будем искать в виде

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_+(x) = \langle \bar{C}^+, \bar{\psi} \rangle, & x > 0 \\ \varepsilon_-(x) = \langle \bar{C}^-, \bar{\psi} \rangle, & x < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\bar{C}^+ = [C_0^+ \ C_1^+ \ C_2^+ \ \dots \ C_{n-1}^+]^T$; (2.12)

$$\bar{C}^- = [C_0^- \ C_1^- \ C_2^- \ \dots \ C_{n-1}^-]^T \quad (2.13)$$

– векторы постоянных, подлежащие определению.

5. При определении компонент векторов \bar{C}^+ и \bar{C}^- ($2n$ констант) необходимо удовлетворить следующим n условиям (условия стыковки):

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon = 0 \\ \Delta \varepsilon^{(1)} = 0 \\ \Delta \varepsilon^{(2)} = 0 \\ \dots \\ \Delta \varepsilon^{(n-1)} = 1/a_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\Delta \varepsilon = \varepsilon(+0) - \varepsilon(-0)$; (2.15)

$$\Delta \varepsilon^{(s)} = \varepsilon^{(s)}(+0) - \varepsilon^{(s)}(-0), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

Условия (2.14) обеспечивают выполнение (1.2).

6. Другим обязательным условием является равенство нулю соответствующих коэффициентов C_p^+ , если $\psi_p(x)$ содержит функцию $\exp(\alpha_p x)$ при $\alpha_p > 0$. Аналогично коэффици-

циенты C_p^- задаются нулевыми, если $\psi_p(x)$ содержит функцию $\exp(\alpha_p x)$ при $\alpha_p < 0$.

Это обеспечивает отсутствие показательных функций с положительными аргументами в составе окончательной формулы для фундаментальной функции. В противном случае могут возникнуть большие вычислительные неприятности, которые из-за накопления погрешностей при численной реализации приведут к абсолютно неверным результатам или (в лучшем случае) к переполнению разрядной сетки ЭВМ и останову машины.

Что касается $\psi_p(x)$ вида $\psi_p(x) = x^k$, $\psi_p(x) = \cos(\beta_p x)$, $\psi_p(x) = \sin(\beta_p x)$, $\psi_p(x) = x^k \cos(\beta_p x)$ или $\psi_p(x) = x^k \sin(\beta_p x)$, рекомендуется приравнивание к нулю соответствующих коэффициентов C_p^- ($C_p^- = 0$).

Вместе с тем можно использовать и другие подходы в зависимости от желаемого общего вида решения, т.е. данный вопрос можно решать достаточно произвольно. Так, например, можно поставить целью получить симметричный вид решения (тогда следует задавать $C_p^+ = C_p^-$).

Так или иначе, всегда остается n констант, которые вычисляются из условий (2.14).

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В настоящем разделе описывается универсальный метод построения фундаментальной функции обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными ко-

эффициентами, а также эффективные алгоритмы дифференцирования и интегрирования фундаментальной функции. По сути, материал, представленный ниже, уже был очень кратко изложен ранее в предыдущем разделе. Здесь же дается его развернутое изложение, и приводятся более подробные и широкие результаты.

Прежде всего, отметим, что как уже отмечалось раньше, характеристическое уравнение (2.1) имеет n корней. Пусть среди них n_k различных, в общем случае комплексных, $\lambda_k \in C$, $k = 1, \dots, n_k$ с кратностями \tilde{m}_k ; C – множество комплексных чисел.

Фундаментальную функцию заданного обыкновенного линейного дифференциального уравнения (ОЛДУ) (1.1) можно определить однозначно, выбирая для нее некоторый специальный вид. А именно, для корректного использования фундаментальной функции в практических расчетах при решении задач строительной механики представляется целесообразным исключить из ее выражения функции типа

$$\exp(\lambda_k x), \text{ при } x > 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \\ \text{или } x < 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0.$$

Иначе может возникнуть необходимость оперировать в расчетах с очень большими числами, что, как правило, либо препятствует получению результатов с желаемой точностью, либо ведет к переполнению разрядной сетки ЭВМ. Предлагаемое далее выражение для фундаментальной функции позволяет исключить перечисленные крайне нежелательные при расчетах случаи (с этой целью будет введена соответствующая характеристическая функция) и всегда соответствует оптимальной обусловленности системы разрешающих уравнений при решении многоточечных краевых задач.

Фундаментальную функцию ОЛДУ (1.1) можно представить в виде

$$\varepsilon(x) = \sum_{p=1}^{n_k} \varepsilon_k(x), \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_k(x) = \chi(x, k) P_k(z_k) \exp(z_k), \quad (3.2)$

$$\chi(x, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0 \\ & \text{или } x < 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \\ 0, & \text{если } x > 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \\ & \text{и } x < 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

– характеристическая функция;

$$P_k(z_k) = \sum_{j=0}^{m_k} C_{k,j} z_k^j = (\bar{C}_k, \bar{z}_k), \quad (3.4)$$

где $z_k = \lambda_k x; \quad C_{k,j} = \text{const}; \quad C_{k,j} \in C; \quad (3.5)$

$$m_k = \tilde{m}_k - 1; \quad (3.6)$$

$$\bar{C}_k = [C_{k,0} \quad C_{k,1} \quad C_{k,2} \quad \dots \quad C_{k,m_k}]^T; \quad (3.7)$$

$$\bar{z}_k = [1 \quad z_k \quad z_k^2 \quad \dots \quad z_k^{m_k}]^T. \quad (3.8)$$

Величина z_k выполняет также роль единого критерия, связывающего понятия протяженности системы и явления типа краевого эффекта. Корни характеристического уравнения определяются либо аналитически (как правило, это возможно), либо с использованием известных численных методов на ЭВМ. Процесс нахождения фундаментальной функции (3.1), сводится, главным образом, к определению n_k векторов постоянных коэффициентов \bar{C}_k в n_k выражениях (3.4). Компоненты данных векторов определяются из условий непрерывности в точке $x = 0$ функции $\varepsilon(x)$ и ее производных до $(n-2)$ -го порядка включительно, а также того факта, что производная $(n-1)$ -го порядка в этой точке имеет «скачок», равный $1/a_n$:

$$\varepsilon^{(s)}(+0) - \varepsilon^{(s)}(-0) = \frac{1}{a_n} \delta_{s,n-1}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.9)$$

где $\delta_{s,n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = n-1 \\ 0, & \text{если } s \neq n-1. \end{cases} \quad (3.10)$

При определении производных высоких порядков от фундаментальной функции зачас-

тую приходится сталкиваться с трудностями, связанными, прежде всего, с громоздкостью сопутствующих математических выкладок. Еще большие сложности сопряжены с нахождением первообразных фундаментальной функции. Классические пути отыскания производных и первообразных в таком случае не являются самыми рациональными. Представленный далее способ определения производных и первообразных фундаментальной функции любого требуемого порядка позволяет «обойти» упомянутые трудности и значительно уменьшить сложности, связанные с процессами ее дифференцирования и интегрирования.

Дифференцирование ($s > 0$) и интегрирование ($s < 0$) фундаментальной функции сводятся, согласно свойствам операций, соответственно к дифференцированию и интегрированию ее компонент (Z – множество целых чисел):

$$\varepsilon^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{n_k} \varepsilon_k^{(s)}(x), \quad s \in Z. \quad (3.11)$$

Итак, далее ограничимся лишь рассмотрением вопросов дифференцирования и интегрирования компоненты $\varepsilon_k(x)$ в выражении (3.1) для фундаментальной функции. Разрешение данной проблемы будет качественно различаться в зависимости от того, является ли соответствующий корень λ_k характеристического уравнения (2.1) нулевым или нет. Случай 1: λ_k – ненулевой корень ($\lambda_k \neq 0$).

Характерной особенностью случая является тот факт, что общий вид компоненты $\varepsilon_k(x)$ фундаментальной функции после дифференцирования или интегрирования сохраняется. Отличие между ней, ее производными и первообразными любого порядка состоит лишь в постоянных коэффициентах, входящих в соответствующие выражения. С учетом отмеченного приходим к важному заключению: трудоемкие сами по себе операции дифференцирования и интегрирования компоненты $\varepsilon_k(x)$ сводятся, таким образом, к

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{m_k} C_{k,j} x^j = (\bar{C}_k, \bar{x}_k); \quad (3.40)$$

$$\tilde{P}_k^s(x) = \sum_{j=s}^{m_k} C_{k,j}^s x^{j-s} = (\tilde{\bar{C}}_k^s, \tilde{\bar{x}}_k^s); \quad (3.41)$$

$$\bar{x}_k = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{m_k}]^T; \quad (3.42)$$

$$\tilde{\bar{x}}_k^s = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{m_k-s}]^T; \quad (3.43)$$

$$\tilde{\tilde{\bar{x}}}_k^s = [x^{-s} \ x^{1-s} \ x^{2-s} \ \dots \ x^{m_k-s}]^T; \quad (3.44)$$

$$C_{k,j}^{s+1} = (j-s) C_{k,j}^s, \quad C_{k,j}^s = j! / [(j-s)!] C_{k,j}^0, \quad s \geq j > 0; \quad (3.45)$$

$$C_{k,j}^s = 0, \quad s > j; \quad (3.46)$$

$$C_{k,j}^{s-1} = C_{k,j}^s / (j-s+1),$$

$$C_{k,j}^s = (j-s)! C_{k,j}^0 / (j!), \quad s < 0. \quad (3.47)$$

Обобщая (3.12)-(3.47), сформулируем ниже некоторые важные единые соотношения. Фундаментальная функция ОЛДУ может быть записана в виде

$$\varepsilon(x) = (\bar{C}, \bar{\psi}) = \sum_{k=1}^{n_k} (\bar{C}_k, \bar{\psi}_k), \quad (3.48)$$

где $\bar{C} = [\bar{C}_1^T \ \bar{C}_2^T \ \dots \ \bar{C}_{n_k}^T]^T; \quad (3.49)$

$$\bar{C}_k = [C_{k,1} \ C_{k,2} \ \dots \ C_{k,m_k}]^T; \quad (3.50)$$

$$\bar{\psi} = [\bar{\psi}_1^T \ \bar{\psi}_2^T \ \dots \ \bar{\psi}_{n_k}^T]^T; \quad (3.51)$$

$$\bar{\psi}_k = \begin{cases} \chi(x, k) \exp(z_k), & \lambda_k \neq 0; \ m_k = 0 \\ \chi(x, k) \exp(z_k) \bar{z}_k, & \lambda_k \neq 0; \ m_k > 0 \\ \chi(x, k), & \lambda_k = 0; \ m_k = 0 \\ \chi(x, k) \bar{x}_k, & \lambda_k = 0; \ m_k > 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Производные и первообразные (3.48) произвольного порядка имеют вид

$$\varepsilon^{(s)}(x) = (\bar{C}^s, \bar{\psi}) = \sum_{k=1}^{n_k} (\bar{C}_k^s, \bar{\psi}_k), \quad s \in Z, \quad (3.53)$$

где $\bar{C}^s = [(\bar{C}_1^s)^T \ (\bar{C}_2^s)^T \ \dots \ (\bar{C}_{n_k}^s)^T]^T; \quad (3.54)$

$$\bar{C}^{s+1} = Q \bar{C}^s; \quad (3.55)$$

W – матрица перехода, квадратная n -го порядка.

Таким образом, операции интегрирования и дифференцирования сводятся к определению соответствующих коэффициентов в выражении (3.53). Матрица перехода W имеет блочно-диагональную структуру:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & \\ & W_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & W_{n_k} \end{bmatrix}; \quad (3.56)$$

$$W_k = \begin{cases} [\lambda_k], \ m_k = 0, \ s > 0 \\ [1/\lambda_k], \ \lambda_k \neq 0, \ m_k = 0, \ s < 0 \\ [x], \ \lambda_k = 0, \ m_k = 0, \ s < 0 \\ W_{k,1}, \ m_k > 0, \ s > 0 \\ (1/\lambda_k) Q_k^{-1}, \ \lambda_k \neq 0, \ m_k > 0, \ s < 0 \\ W_{k,2}, \ \lambda_k = 0, \ m_k > 0, \ s < 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

где $W_{k,1} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \lambda_k & 2 & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \lambda_k & i+1 \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & \lambda_k & m_k \\ & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}; \quad (3.58)$

$$W_{k,2} = x \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1/2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1/i & \\ & & & & \dots \\ & & & & & 1/m_k \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Для определения коэффициентов в выражениях для фундаментальной функции может использоваться метод базисных вариаций [1-4], наиболее наглядный при реализации на ЭВМ. Суть метода заключается в сведении условий (3.9)-(3.10) к разрешающей СЛАУ n -го порядка относительно искомым величин:

$$A \bar{C}_g = \bar{B}, \quad (3.60)$$

где $\bar{C}_g = [\bar{C}_1^T \ \bar{C}_2^T \ \dots \ \bar{C}_n^T]^T; \quad (3.61)$

$$\bar{B} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T \quad (3.62)$$

Об одном корректном аналитическом методе нахождения фундаментальной функции для линейного дифференциального оператора

– искомый глобальный вектор постоянных коэффициентов и вектор правых частей соответственно; A – матрица коэффициентов СЛАУ.

Элементы глобального вектора постоянных коэффициентов имеют одномерную систему индексации ($c = 1, 2, \dots, n$). Формула перехода от двумерной системы индексации в векторах \bar{C}_k^0 (k, j) к такой одномерной (c индексом v) следующая:

$$v = j + \sum_{d=1}^{k-1} \tilde{m}_d. \quad (3.63)$$

Формирование матрицы A осуществляется по формуле

$$a_{iv} = \varepsilon^{(i)}(+0) - \varepsilon^{(i)}(-0), \quad (3.64)$$

а в (3.1) подставляются коэффициенты, определяемые соотношением

$$C_{kj} = \delta_{v,t}, \quad \text{где } t = j + \sum_{d=1}^{k-1} \tilde{m}_d. \quad (3.65)$$

Приведенные выражения для фундаментальной функции, ее производных и первообразных содержат комплексные постоянные коэффициенты. Такой вид удобен для программирования, однако для привычного аналитического представления целесообразно перейти к действительным коэффициентам:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n_d} \varepsilon_i(x); \quad (3.66)$$

$$\varepsilon^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{n_d} \varepsilon_i^{(s)}(x), \quad s \in Z, \quad (3.67)$$

где
$$\varepsilon_i(x) = \chi(x, i) \exp(\alpha_i x) \cdot [P_{i,1}(x) \cos(\beta_i x) + P_{i,2}(x) \sin(\beta_i x)]; \quad (3.68)$$

$$P_{i,1}(x) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{i,j} x^j = (\bar{a}_i, \bar{x}_i); \quad (3.69)$$

$$P_{i,2}(x) = \sum_{j=0}^{m_k} b_{i,j} x^j = (\bar{b}_i, \bar{x}_i); \quad (3.70)$$

$$\bar{a}_i = [a_{i,0} \ a_{i,1} \ \dots \ a_{i,m_k}]^T; \quad (3.71)$$

$$\bar{b}_i = [b_{i,0} \ b_{i,1} \ \dots \ b_{i,m_k}]^T; \quad (3.72)$$

$$\alpha_i = \operatorname{Re}(\lambda_k); \quad \beta_i = \operatorname{Im}(\lambda_k); \quad (3.73)$$

$$\lambda_k = \alpha_i + i\beta_i; \quad n_d = n_k - 0.5n_{k,imag}; \quad (3.74)$$

$$i = k - g_1^k, \quad (3.75)$$

где g_1^k – число пар комплексно-сопряженных корней среди k рассмотренных (заметим, что вторая из формул (3.74) и последующие соотношения справедливы при условии, что корни уравнения (2.1) отсортированы сначала по возрастанию абсолютных величин их действительных частей, а затем, для корней с равными абсолютными величинами действительных частей, по возрастанию абсолютных величин их мнимых частей); $n_{k,imag}$ – число различных корней (2.1) с ненулевой мнимой частью ($\beta_k \neq 0$).

Процесс перехода от комплексных коэффициентов к действительным сводится к соответствующим переходам в выражениях для каждой из компонент фундаментальной функции. Приведем ниже итоговые сводки формул для каждого из характерных случаев.

Случай 1: λ_k – ненулевой корень ($\lambda_k \neq 0$).

Случай 1.1: λ_k – простой (некратный) корень ($m_k = 0$; $\tilde{m}_k = 1$).

– $\alpha_k \neq 0$ и $\beta_k \neq 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) \exp(\alpha_i x) \cdot [a_{i,0}^s \cos(\beta_i x) + b_{i,0}^s \sin(\beta_i x)], \quad s \in Z; \quad (3.76)$$

$$a_{i,0}^s = \operatorname{Re}(C_{k,o}^s + C_{k+1,0}^s); \quad (3.77)$$

$$b_{i,0}^s = \operatorname{Re}[(C_{k,0}^s - C_{k+1,0}^s)i]. \quad (3.78)$$

– $\alpha_k = 0$ и $\beta_k \neq 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) [a_{i,0}^s \cos(\beta_i x) + b_{i,0}^s \sin(\beta_i x)], \quad s \in Z. \quad (3.79)$$

В данном случае используются формулы перехода (3.77)-(3.78).

– $\alpha_k \neq 0$ и $\beta_k = 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) a_{i,0}^s \exp(\alpha_i x), \quad s \in Z; \quad (3.80)$$

$$a_{i,0}^s = \operatorname{Re}(C_{k,o}^s); \quad b_{i,0}^s = 0. \quad (3.81)$$

Случай 1.2: λ_k – кратный корень ($m_k > 0$; $\tilde{m}_k > 1$).

– $\alpha_k \neq 0$ и $\beta_k \neq 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) \exp(\alpha_i x) \cdot [P_{i,1}^s(x) \cos(\beta_i x) + P_{i,2}^s(x) \sin(\beta_i x)], \quad s \in Z; \quad (3.82)$$

где
$$P_{i,1}^s(x) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{i,j}^s x^j = (\bar{a}_i^s, \bar{x}_i^s); \quad (3.83)$$

$$P_{i,2}^s(x) = \sum_{j=0}^{m_k} b_{i,j}^s x^j = (\bar{b}_i^s, \bar{x}_i^s); \quad (3.84)$$

$$\bar{a}_i^s = [a_{i,0}^s \quad a_{i,1}^s \quad \dots \quad a_{i,m_k}^s]^T; \quad (3.85)$$

$$\bar{b}_i^s = [b_{i,0}^s \quad b_{i,1}^s \quad \dots \quad b_{i,m_k}^s]^T; \quad (3.86)$$

$$a_{i,j}^s = \operatorname{Re}[C_{k,j}^s \lambda_k^j + C_{k+1,j}^s \lambda_{k+1}^j]; \quad (3.87)$$

$$b_{i,j}^s = \operatorname{Re}[(C_{k,j}^s \lambda_k^j - C_{k+1,j}^s \lambda_{k+1}^j) i]. \quad (3.88)$$

– $\alpha_k = 0$ и $\beta_k \neq 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) [P_{i,1}^s(x) \cos(\beta_i x) + P_{i,2}^s(x) \sin(\beta_i x)], \quad s \in Z. \quad (3.89)$$

В данном случае используются формулы перехода (3.88)-(3.89).

– $\alpha_k \neq 0$ и $\beta_k = 0$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) P_{i,1}^s \exp(\alpha_i x), \quad s \in Z; \quad (3.90)$$

$$a_{i,j}^s = \operatorname{Re}(C_{k,j}^s \lambda_k^j); \quad b_{i,j}^s = 0. \quad (3.91)$$

Случай 2: λ_k – нулевой корень ($\alpha_k = 0$; $\beta_k = 0$).

Случай 2.1: λ_k – простой (некратный) корень ($m_k = 0$; $\tilde{m}_k = 1$).

$$\varepsilon_i(x) = \chi(x, i) a_{i,0}; \quad (3.92)$$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = 0, \quad s > 0; \quad (3.93)$$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) a_{i,0}^s x^{|s|}, \quad s < 0. \quad (3.94)$$

Здесь используется формула (3.81) для определения коэффициента $a_{i,0}^s$.

Случай 2.2: λ_k – кратный корень ($m_k > 0$; $\tilde{m}_k > 1$).

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) \tilde{P}_{i,1}^s(x), \quad s \geq 0; \quad (3.95)$$

$$\varepsilon_i^{(s)}(x) = \chi(x, i) \tilde{\tilde{P}}_{i,1}^s(x), \quad s < 0; \quad (3.96)$$

$$\tilde{P}_{i,1}^s(x) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{i,j}^s x^{j-s} = (\bar{a}_i^s, \bar{x}_i^s); \quad (3.97)$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{i,1}^s(x) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{i,j}^s x^{j-s} = (\bar{a}_i^s, \tilde{\tilde{x}}_i^s); \quad (3.98)$$

$$a_{i,j}^s = \operatorname{Re}(C_{k,j}^s); \quad (3.99)$$

$$\bar{a}_i^s = [a_{i,s}^s \quad a_{i,s+1}^s \quad \dots \quad a_{i,m_k}^s]^T; \quad (3.100)$$

$$\bar{x}_i^s = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{m_k-s}]^T; \quad (3.101)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_i^s = [x^{-s} \quad x^{1-s} \quad \dots \quad x^{m_k-s}]^T. \quad (3.102)$$

Обобщая (3.76)-(3.102), сформулируем важные единые соотношения.

Итак, фундаментальная функция ОЛДУ, выраженная через действительные коэффициенты, может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon(x) = (\bar{S}, \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n_d} (\bar{S}_i, \bar{\varphi}_i), \quad (3.103)$$

где
$$\bar{S} = [\bar{S}_1^T \quad \bar{S}_2^T \quad \dots \quad \bar{S}_{n_d}^T]^T; \quad (3.104)$$

$$\bar{S}_i = [a_{i,1} \quad b_{i,1} \quad \dots \quad a_{i,m_k} \quad b_{i,m_k}]^T; \quad (3.105)$$

$$\bar{\varphi} = [\bar{\varphi}_1^T \quad \bar{\varphi}_2^T \quad \dots \quad \bar{\varphi}_{n_d}^T]^T; \quad (3.106)$$

$$\bar{\varphi}_i = \begin{cases} \chi(x, i) \exp(\alpha_i x) [\cos(\beta_i x) \quad \sin(\beta_i x)]^T, & \lambda_k \neq 0; \quad m_k = 0 \\ \chi(x, i) \exp(\alpha_i x) \bar{\varphi}_i, & \lambda_k \neq 0; \quad m_k > 0 \\ \chi(x, i) [1 \quad 0]^T, & \lambda_k = 0; \quad m_k = 0 \\ \chi(x, i) \tilde{\varphi}_i, & \lambda_k = 0; \quad m_k > 0; \end{cases} \quad (3.107)$$

$$\phi_i = [\cos(\beta_i x) \quad \sin(\beta_i x) \quad x \cos(\beta_i x) \quad x \sin(\beta_i x) \dots x^{m_k} \cos(\beta_i x) \quad x^{m_k} \sin(\beta_i x)]^T; \quad (3.108)$$

$$\tilde{\varphi}_i = [1 \quad 0 \quad x \quad 0 \quad x^2 \quad 0 \quad \dots \quad x^{m_k} \quad 0]^T. \quad (3.109)$$

Пример 2. Поперечный изгиб балки (рис. 2).

$$Ly = y^{(4)}(x); \quad \varepsilon(x) = \frac{x_+^3}{6}.$$

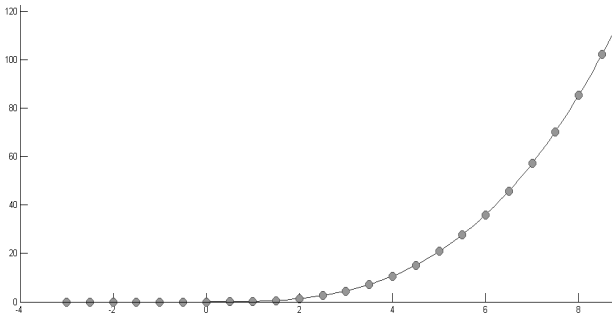


Рис. 2. Верификация методики (линией изображено аналитическое решение, точками решение выданное программой).

Пример 3. Балка Бернулли на упругом основании (рис. 3).

$$Ly = y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x);$$

$$\varepsilon(x) = e^{-\alpha|x|}(\cos(\alpha x) + \sin(\alpha|x|))/(8\alpha^3).$$

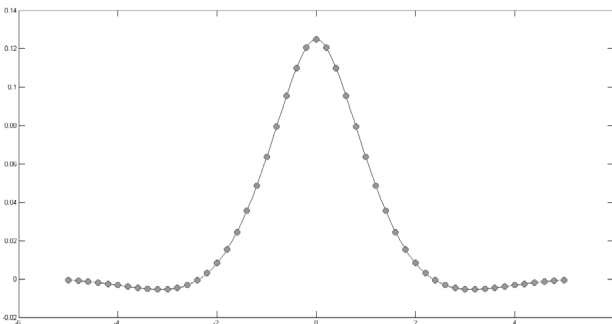


Рис. 1. Верификация методики (линией изображено аналитическое решение, точками решение выданное программой; график построен для $\alpha = 1$).

Пример 4. Балка с двумя коэффициентами упругого основания (рис. 4).

$$Ly = y^{(4)}(x) - 2\beta^2 y^{(2)}(x) + 4\alpha^4 y(x);$$

$$\varepsilon(x) = e^{-\alpha|x|}(\cos(\beta x) + \sin(\beta|x|))/(8\beta^3).$$

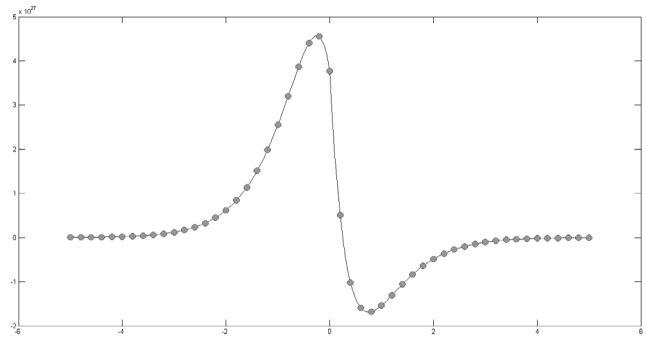


Рис. 4. Верификация методики (линией изображено аналитическое решение, точками решение выданное программой).

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: МГСУ, 2011. – 368 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Негрозов Олег Александрович, студент ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Oleg A. Negrozov, student of Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: genromgsu@gmail.com

ИЗУЧЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ ВОЗДУШНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРИЗМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

И.Н. Афанасьева, А.Р. Усманов

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена исследованиям аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в поперечном сечении 1:5, характерным для объектов строительства. По разработанной численной методике в программном комплексе ANSYS CFX выполнены расчеты в нестационарных постановках для трех вариантов моделей турбулентности – *SST*, *DES* и *SAS SST*. Проведен анализ результатов численного моделирования и сопоставление их с результатами альтернативных численных расчетов и экспериментальными данными, полученными в различных аэродинамических трубах. Методами теории случайных процессов с использованием функции когерентности проведено более подробное исследование трехмерной структуры потока.

Ключевые слова: прямоугольная призма, ветровая аэродинамика, модели турбулентности, численное моделирование, функция когерентности

STUDY OF THREE-DIMENSIONAL FEATURES OF TURBULENT FLOW AROUND A RECTANGULAR CYLINDER

Irina N. Afanasyeva, Anton R. Usmanov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Present paper deals with the aerodynamics of the rectangular cylinder with an aspect ratio of 1:5 in the cross section, typical for the structures of civil engineering. There were performed several types of the computational simulation for different types of turbulence models – *SST*, *DES* and *SAS SST* by using numerical methods in software ANSYS CFX. The task was solved for unsteady cases. Results of numerical simulation of aerodynamics problem were analyzed and compared with the results of the alternative numerical simulations and with the data obtained in different wind tunnels. More detailed study of three-dimensional features of flow was conducted by using methods of the theory of random processes with the use of the coherence function.

Key words: Rectangular cylinder, aerodynamics, turbulence models, numerical simulation, coherence function

1. ВВЕДЕНИЕ

Увеличение числа проектируемых, возводимых и уже эксплуатируемых высотных зданий и протяженных сооружений современных архитектурных форм и оригинальных конструктивных решений, чувствительных к ветровым воздействиям, делает необходимым обоснование их безопасности и комфорта.

Как правило, из-за сложности задачи, несовершенства современных нормативных методик, которые в свою очередь не отражают

специфику ветровых воздействий на рассматриваемые уникальные объекты (не учитывают влияние интерференции, рельефа, изменение спектра набегающего потока в условиях плотной и изменяющейся застройки и т.д.), дорогостоящих и труднореализуемых в короткие сроки натурных испытаний исследователи и проектировщики, работающие в этой области, обращаются к следующим методам: численному моделированию ветровых нагрузок и воздействий и проведению экспериментов в аэродинамической трубе (АДТ).

Последний является методом, отработанным и проверенным временем, хотя, в свою очередь, имеет ряд существенных ограничений-недостатков. Например, для решения строительных задач необходимы больше дорогостоящие климатические аэродинамические трубы (количество которых не так велико в нашей стране) и аппаратура для статистической записи и обработки сигнала, а также создания самих макетов застроек, если таковые создаются не вручную (что, в свою очередь, является наиболее распространенным время- и трудозатратным способом).

Численное моделирование ветровых нагрузок и воздействий на здания, сооружения и комплексы является методом новым и еще малоизученным, но перспективным, т.к. позволяет решать трехмерные гидрогазодинамические задачи более оперативно, точно и подробно. Более того, появляется возможность варьировать в широком практически значимом диапазоне физические и геометрические параметры задачи, проводить как стационарные, так и нестационарные расчеты. Необходимо отметить, что обозначенные вопросы и ошибки, выявленные на основе опыта численного моделирования ветровых воздействий на строительные конструкции уникальной формы за последние несколько лет, связанные с достоверным моделированием турбулентности, заданием физических и вычислительных параметров для получения наиболее аутентичных результатов, качеством и структурой сетки, схемой дискретизации и итерационной сходимостью, остаются актуальными и требуют ответов.

Экспериментальный и численный методы самодостаточны, но совместное их применение может дать наиболее полезные практические и научные результаты. Поэтому становится актуальной разработка комплексных процедур, методики проведения аэродинамического расчета строительных сооружений с применением как численных, так и экспериментальных методов как взаимодополняющих друг друга.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В Милане в июне 2008 года на международной конференции, посвященной вопросам строительной ветровой аэродинамики, был объявлен «бэнчмарк» (BARC benchmark) – исследование аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в поперечном сечении $D:B=1:5$ [2].

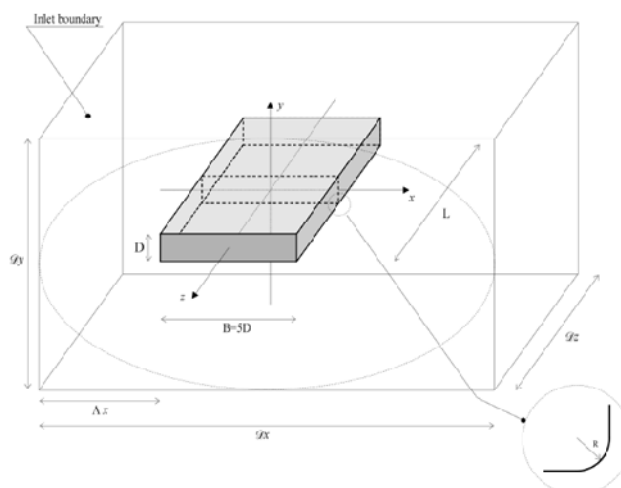


Рис. 1. BARC benchmark. Геометрическая модель

Такое соотношение сторон было выбрано не только с целью фундаментальных исследований, но и получения исчерпывающей информации, основанной на результатах исследований аэродинамики широкого спектра плохобтекаемых тел, представляющих интерес в гражданском строительстве (например, большепролетные мосты, высотные здания и т. д.). Решить задачу было предложено как экспериментальным методом (в АДТ), так и численно.

В рассматриваемой задаче течение происходит в турбулентном режиме – число Рейнольдса, Re , равно $4 \cdot 10^4$. Расчетным направлением ветра выбран угол атаки $\alpha = 0^\circ$, соответствующий положительному направлению оси X (рис. 1).

Основные задачи исследования следующие: – на этой, в принципе, двумерной задаче более глубоко исследовать аэродинамические характеристики сооружений прямоугольного профиля и особенности дву- и трехмерной

структуры турбулентного воздушного потока около конструкций подобной формы;
 – оценить влияние качества и структуры расчетной сетки и различных способов моделирования турбулентности на результаты численных экспериментов;
 – оценить согласованность результатов численного моделирования и экспериментов, проведенных в АДТ;
 – разработать комплексную методику проведения аэродинамического расчета строительных сооружений с применением как численных, так и экспериментальных методов как взаимодополняющих друг друга.

3. ОПИСАНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Основные уравнения

Для проведения гидродинамического расчета, а именно, нахождения полей скоростей и давлений ветра, решалась система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка – "осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса" (Reynolds averaged Navier-Stokes, RANS), и уравнений неразрывности (сплошности):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0,$$

где ρ – плотность среды ($\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости или газа); \bar{p} – средние давления, индексы $i=1,2,3$ и $j=1,2,3$ соответствуют координатам x, y, z . Сдвиговые (рейнольдсовы) напряжения $\rho \overline{u'_i u'_j}$ являются дополнительными шестью неизвестными к параметрам осредненного движения (\bar{u}_i, \bar{p}) и аппроксимируются, как правило, по гипотезе Буссинеска:

$$\rho \overline{u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2)$$

где μ_t – дополнительная вязкость, вызванная пульсациями; k – осредненная энергия турбулентных пульсаций (TKE).

Модели турбулентности

Система уравнений (1) незамкнутая. Способом, позволяющим замкнуть систему, является привлечение полуэмпирических соотношений (моделей турбулентности), связывающих дополнительные члены (напряжения Рейнольдса) с осредненными по времени компонентами скорости.

Поставленная задача решалась при помощи численного моделирования процесса обтекания объекта с использованием следующих моделей турбулентности: SST (shear stress transport), DES (Detached Eddy Simulation), SAS SST (Scale-Adaptive Simulation SST). Пристеночные функции турбулентности задавались автоматически (Turbulent Wall Functions = Automatic).

Граничные и начальные условия

Для интегрирования основных уравнений (1) задавались начальные и граничные условия. На "входе" скорость потока была задана в декартовой системе координат: $u = 5.8$ м/с, $v = 0$ м/с, $w = 0$ м/с. Масштаб турбулентности принят равным 1%. На "выходе" потоку указываются нулевые дополнительные давления. На боковых границах области предполагаются условия симметрии. Поверхностям обтекаемого тела было задано условие "прилипания", т.е. равенство нулю скорости жидкости на "стенке". Шероховатости на "стенках" заданы не были.

В качестве начальных условий для нестационарных расчетов применялись результаты расчетов, выполненных в стационарной постановке.

Пространственная дискретизация

Для пространственной дискретизации применялся "метод конечных объемов" (МКО). Расчетная область цилиндрической формы радиусом 50D (D=0.1) разбивалась на элементы в препроцессоре ПК ANSYS с использо-

ванием разработанного параметризуемого макроса. Для проведения численного эксперимента были созданы три варианта расчетной сетки: 240 000 (вариант А), 900 000 (вариант В) и 1 800 000 (вариант С) ячеек. Размер элементов на поверхности объекта в плоскости потока составляет $0.05D$, в поперечном направлении – $0.1D$. Вблизи обтекаемого объекта моделируется призматический пограничный слой (10 элементов по толщине слоя) со сгущением сетки около "стенки" (рис. 3). Безразмерная величина первого элемента в пограничном слое составляет $\delta l/D = 0.01$. Ближняя зона трапециевидной формы разбита на тетраэдральные элементы размером $0.3D$ (рис. 3). Остальная область разбита также на тетраэдральные элементы, но с постепенным увеличением размеров элементов в направлении к границам расчетной области. Соотношение размеров самого маленького и самого большого элемента составляет 1:500.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для рассмотренных случаев А, В и С выполнены нестационарные расчеты с использованием различных моделей турбулентности (*SST*, *DES*, *SAS SST*).

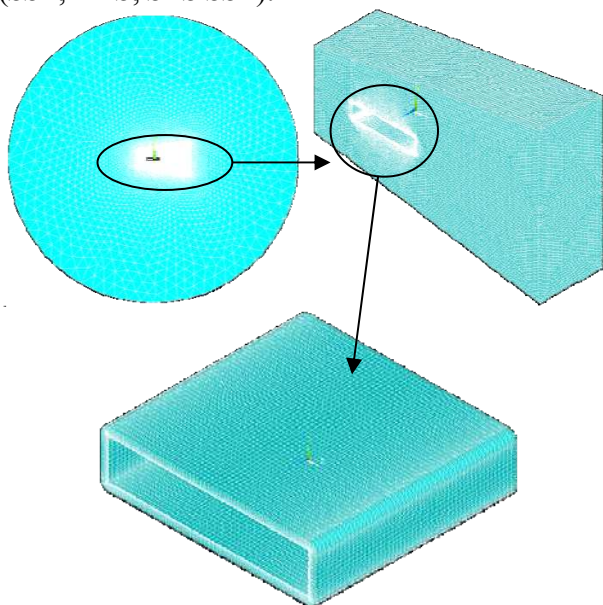


Рис. 3. Расчетная сетка.
Вариант С (1800 000 ячеек)

Физическое время счета для нестационарных расчетов составило 20 с (поток проходит 10 расчетных областей). Шаг по времени выбран $\Delta t = 8 \cdot 10^{-4}$ с. Применялся специализированный программный пакет ANSYS CFX [1]. Расчеты проводились на вычислительном кластере Научно-образовательного центра компьютерного моделирования МГСУ. Для каждой задачи использовался один вычислительный узел кластера с 8 ядрами.

Интегральные и локальные параметры. Двумерная структура потока

В работах [5, 6] приведен подробный анализ полученных результатов на примере средней и пульсационной составляющих аэродинамического коэффициента давления $C_p = p/q$ ($q = \frac{1}{2} \rho V_h^2$ – динамическое давление ветра, V_h – скорость потока на характерной высоте), интегральных характеристик (аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления $C_x = F_x/q$ и подъемной силы $C_y = F_y/q$ (F_x, F_y – составляющие ветровых нагрузок по потоку и в поперечном направлении, соответственно), числа Струхала $St = D \cdot f / U_\infty$ (U_∞ – средняя скорость потока, f – частота срыва вихрей). Проведен анализ двумерной структуры потока – определены размеры и характер зон вихреобразования около обтекаемого объекта и в следе. Для представленных результатов проведено сопоставление с результатами численных и экспериментальных исследований зарубежных авторов [5, 6].

Исследования показали, что для оценки средней и пульсационной составляющих и определения особенностей двумерной структуры турбулентного воздушного потока около сооружений прямоугольного профиля подходы *SAS* и *DES* проявили себя наилучшим образом. Получить же трехмерное поведение потока удалось лишь с применением модели турбулентности *SAS SST*.

Трехмерная структура потока

Более подробное исследование трехмерной структуры потока около прямоугольной

призмы проводилось для варианта расчетной сетки С (1 800 000 ячеек).

На рисунке 4 представлена картина обтекания объекта, полученная в результате *нестационарного* расчета на 20-й секунде физического времени счета. Слева сверху – изополе горизонтальной компоненты скорости, u (м/с). Справа сверху – изоповерхности завихренности (1/с), цветом показаны мгновенные значения модуля скорости (м/с). Слева снизу – линии тока.

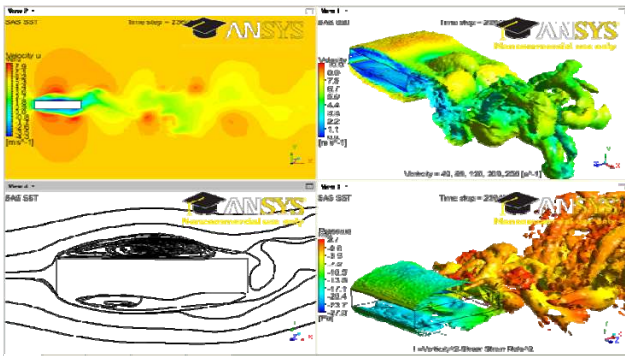


Рис. 4. 3-D структура потока. Нестационарный расчет (SAS SST)

Математическое изучение трехмерных эффектов проводилось с использованием функции когерентности давления, предложенной участникам «бэнчмарка» в качестве меры указанной трехмерности [2].

Функция когерентности определяется как [8]:

$$\text{coh}(\Delta z; \bar{p}, f) = \frac{|S(\Delta z; \bar{p}, f)|}{\sqrt{S_{z=0}(\bar{p}, f)}\sqrt{S_{z=\Delta z}(\bar{p}, f)}} \quad (3)$$

где

$$S(\Delta z; \bar{p}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\Delta z}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau$$

– взаимная спектральная плотность мощности давления \bar{p} для пары точек, расположенных на расстоянии Δz друг от друга,

$$S_{z=0}(\bar{p}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{z=0}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (4)$$

$$S_{z=\Delta z}(\bar{p}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{z=\Delta z}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (5)$$

– спектральные плотности мощности давления на частотах f в соответствующих точках ($z=0$ и $z=\Delta z$),

$$R_{\Delta z}(\tau) = E[\bar{p}_{z=0}(t)\bar{p}_{z=\Delta z}(t+\tau)] - E[\bar{p}_{z=0}(t)]E[\bar{p}_{z=\Delta z}(t+\tau)] \quad (6)$$

– взаимная корреляционная функция давления для пары точек ($z=0$ и $z=\Delta z$),

$$R_{z=0}(\tau) = E[\bar{p}_{z=0}(t)\bar{p}_{z=0}(t+\tau)] - E[\bar{p}_{z=0}(t)]E[\bar{p}_{z=0}(t+\tau)] \quad (7)$$

$$R_{z=\Delta z}(\tau) = E[\bar{p}_{z=\Delta z}(t)\bar{p}_{z=\Delta z}(t+\tau)] - E[\bar{p}_{z=\Delta z}(t)]E[\bar{p}_{z=\Delta z}(t+\tau)] \quad (8)$$

– корреляционные функции давления в соответствующих точках.

Если два процесса идентичны: $\bar{p}_{z=0}(t) \equiv \bar{p}_{z=\Delta z}(t) \Rightarrow R_{\Delta z}(\tau) = R_{z=0}(\tau) = R_{z=\Delta z}(\tau)$ (в контексте рассматриваемой задачи, поток двумерный) – функция когерентности равна единице для всего частотного диапазона ($\text{coh}(\Delta z; \bar{p}, f) = 1 \quad \forall f$). Если процессы независимы: $R_{\Delta z}(\tau) \equiv 0$ (что свидетельствует о наличии трехмерного эффекта) – функция когерентности равна нулю ($\text{coh}(\Delta z; \bar{p}, f) = 0 \quad \forall f$). Также функция когерентности позволяет выявлять частоты, на которых поток наиболее трехмерен.

Для вычисления функции когерентности разработан алгоритм, реализованный в пакете Matlab. Оценка спектральных плотностей мощности (4-6) проводилась встроенным методом дискретной фильтрации.

Функция когерентности давления вычислялась для пар точек: p1–p3, p5–p7, p9–p11, p2–p4, p6–p8, p10–p12 (симметрично расположенных относительно оси X) и p3–p5, p3–p9,

p7–p9, p1–p9, p5–p9, p1–p5, p4–p6, p4–p10, p8–p10, p2–p10, p6–p10, p2–p6 (несимметрично расположенных относительно оси X). Расположение точек и расстояние между ними показано на рисунке 5.

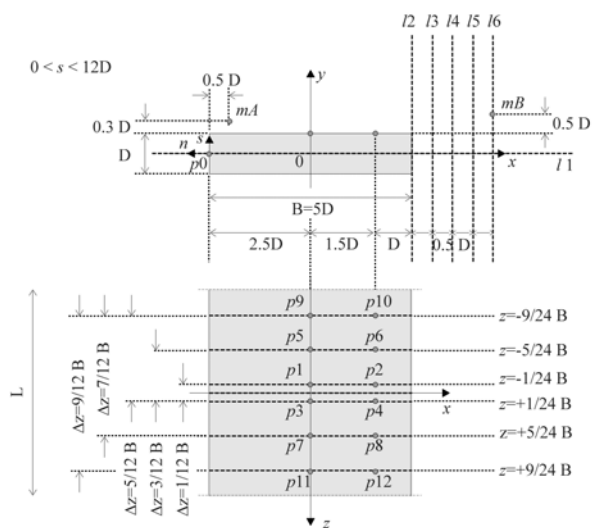


Рис. 5. Расположение точек мониторинга давления с обозначением расстояния Δz между ними

Анализируя полученные результаты, можно сказать, что для точек, симметрично расположенных относительно оси X, минимальное значение функции когерентности составляет для первого пика – 0.6374, второго – 0.6417, третьего – 0.7221, четвертого – 0.7323, пятого – 0.7469. Из этого следует, что поток ведет себя достаточно симметрично, поскольку зависимость двух процессов (что показывают большие значения функции когерентности) свидетельствует об одинаковом их поведении (рис. 6-7).

Для точек, расположенных несимметрично относительно оси X, минимальное значение функции когерентности составляет 0.0001, минимальное значение второго пика – 0.0035, третьего – 0.0052, четвертого – 0.0101, пятого – 0.0154. Из этого следует, что, несмотря на симметричное поведение, в потоке присутствуют значительные трехмерные эффекты на различных частотах (рис. 8-11).

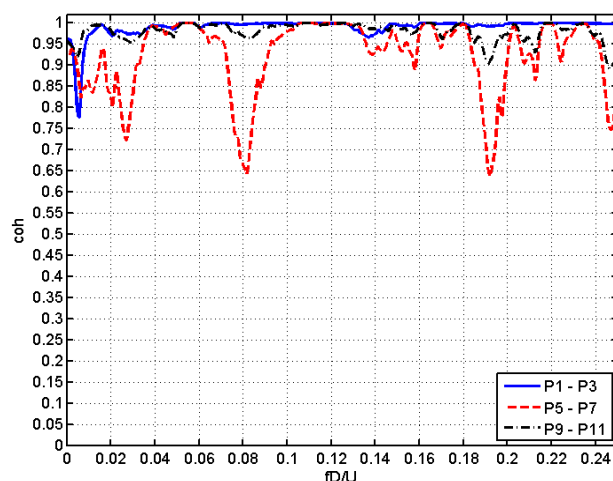


Рис. 6. Функция когерентности давления для пар точек, расположенных симметрично относительно оси X: p1–p9 (сплошная), p5–p7 (пунктирная), p9–p11 (штрихпунктирная).

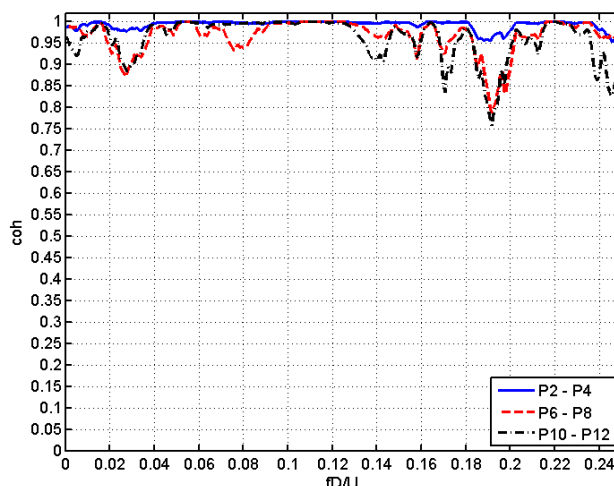


Рис. 7. Функция когерентности давления для пар точек, расположенных симметрично относительно оси X: p2–p4 (сплошная), p6–p8 (пунктирная), p10–p12 (штрихпунктирная).

Наиболее сильные трехмерные эффекты наблюдаются на безразмерных частотах 0.1526 (в точках p5–p9), 0.0327 (в точках p10–p4), 0.0697 (в точках p6–p10), 0.1472 (в точках p1–p5) и 0.1782 (в точках p10–p4), 0.1512 (в точках p9–p7), 0.1465 (в точках p1–p9) и 0.0313 (p2–p10).

Отметим, что трехмерные эффекты (пики) наблюдаются во всем рассмотренном диапазоне частот.

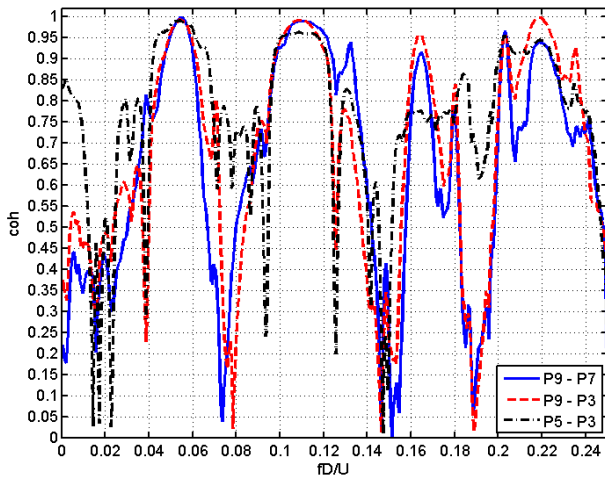


Рис. 8. Функция когерентности давления для пар точек, расположенных несимметрично относительно оси X: p9-p7 (сплошная), p9-p3 (пунктирная), p5-p3 (штрихпунктирная).

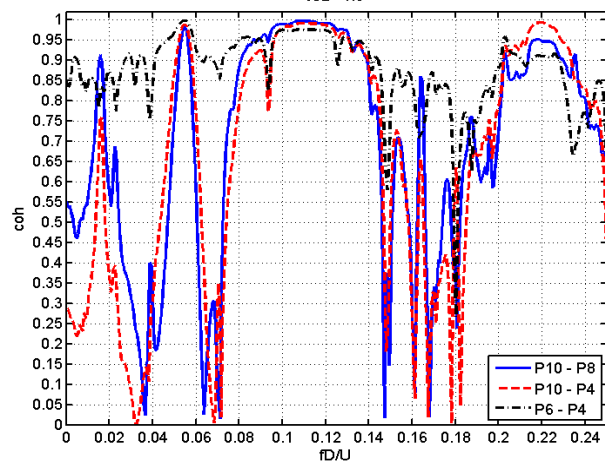


Рис. 9. Функция когерентности давления для пар точек, расположенных несимметрично относительно оси X: p10-p8 (сплошная), p10-p4 (пунктирная), p6-p4 (штрихпунктирная).

На ведущей частоте воздействия (число Струхала $St = 0.10-0.12$) значение функции когерентности больше 0.912. Это свидетельствует о квазидвумерном характере потока на этой частоте.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты численного моделирования ветровой аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в сечении 1:5 (BARC benchmark).

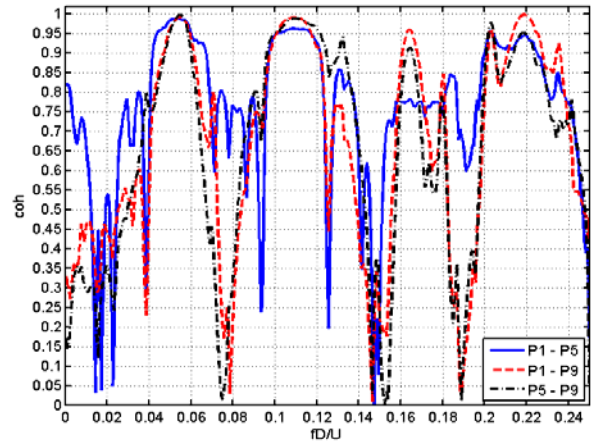


Рис. 10. Функция когерентности давления для пар точек, расположенных несимметрично относительно оси X: p1-p5 (сплошная), p1-p9 (пунктирная), p5-p9 (штрихпунктирная).

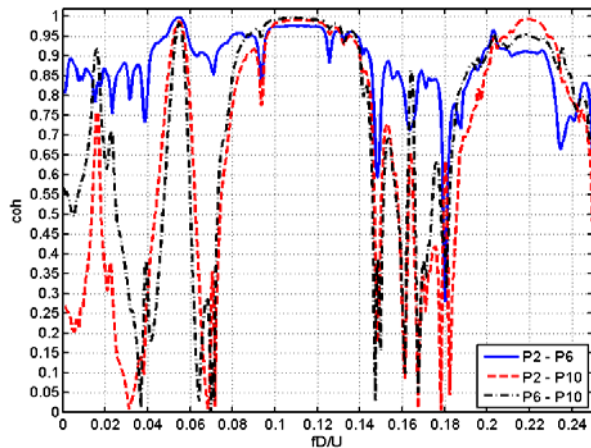


Рис. 11 Функция когерентности давления для пар точек, расположенных несимметрично относительно оси X: p9-p7 (сплошная), p9-p3 (пунктирная), p5-p3 (штрихпунктирная).

Подробно изучено трехмерное поведение турбулентного потока около обтекаемого объекта, полученного из решения нестационарной задачи с моделью турбулентности SAS SST, методами теории случайных процессов с использованием функции когерентности давления для различных пар точек, расположенных на поверхности призмы. Выявлено близкое к симметричному поведение потока относительно оси X (соответствующей направлению потока) и присутствие в потоке значительных трехмерных эффектов как на высоких безразмерных частотах (0.1472, 0.1782, 0.1512, 0.1465), так и на низ-

ких (0.0327, 0.0697, 0.0313). На ведущей частоте воздействия (число Струхала) поток ведет себя преимущественно как двумерный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ANSYS CFX 11.0. User's Guide. // Canonsburg, 2009.
2. **Bruno L., Fransos D., Coste N., Bosco A.** 3D flow around a rectangular cylinder: a computational study. BBA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics and Applications, Milano, 2008.
3. **Bronkhorst A.J., Geurts C.P.W., C.A. van Bentum.** Unsteady pressure measurements on a 5:1 rectangular Cylinder. 13th International Conference on Wind Engineering, July 10-15, 2011.
4. **Mannini C., Schewe G.** Numerical study on the three-dimensional unsteady flow past a 5:1 rectangular cylinder using the DES approach. 13th International Conference on Wind Engineering, July 10-15, 2011.
5. **Афанасьева И.Н., Дубинский С.И., Белостоцкий А.М.** Численное моделирование турбулентного воздушного потока в зоне изолированных сооружений прямоугольного профиля. // Сборник трудов IV Международной научно-практической конференция "Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы", июнь 2011.
6. **Афанасьева И.Н., Дубинский С.И., Белостоцкий А.М.** Численное моделирование турбулентного воздушного потока в зоне изолированных сооружений прямоугольного профиля. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. тр. №13/ МГСУ – Москва, 2010. –372 с.
7. **Кирьянова Л.В., Усманов А.Р.** Оценка спектральной плотности аэродинамического коэффициента лобового сопротивления. Научно-технический журнал Вестник МГСУ, №10, 2012.

8. **Бендат Дж., Пирсол А.** Статистика случайных процессов. М.: Мир, 1989. С. 276-280.

Афанасьева Ирина Николаевна, инженер-программист ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: rena1986@mail.ru.

Усманов Антон Равильевич, студент ИФО МГСУ, лаборант кафедры Информатики и прикладной ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: ysman2d@yandex.ru

Irina N. Afanasyeva, engineer-programmer of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: rena1986@mail.ru.

Anton R. Usmanov, student, assistant of Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: ysman2d@yandex.ru

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВОЗВЕДЕНИЯ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ

М.С. Барабаш

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается влияние процесса возведения на усилия, возникающие в элементах каркасного здания с монолитным ядром жесткости. Цель теоретических исследований состоит в установлении влияния процесса возведения на напряженно-деформированное состояние несущих систем высотных зданий.

Ключевые слова: моделирование, жизненный цикл, процесс возведения, несущая система, информационная технология

THE METHODS OF COMPUTER SIMULATION ERECTION PROCESS OF HIGH-RISE BUILDINGS

Maria S. Barabash

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: In given article is considered the influence of erection process on efforts that arise in elements of skeleton type buildings with cast-in-situ stiffening core. The aim of theoretical research was concluded in determination of erection process influence on bearing systems' stress-strain state of multistory buildings.

Key words: modeling, life cycle, erection process, bearing system, information technology

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Прогресс в строительстве и во многих других отраслях промышленности в значительной мере определяется достигнутыми к настоящему времени результатами в области математического моделирования тех или иных процессов и физических явлений, в частности, процессов деформирования и разрушения конструкций зданий. В области строительства принятие многих проектных решений для какого-либо сооружения, как правило, регламентируется строительными нормами и правилами, которые зачастую дают лишь рекомендации по учету особенностей, отражающих действительное напряженно-деформированное состояние (НДС). Кроме того, регламентирующие документы не всегда используют последние достижения в области математического моделирования процессов деформирования и разрушения. В

частности, разделы строительных норм, относящиеся к методам прочностного анализа элементов строительных конструкций, содержат более простые методы по сравнению с современными возможностями математического описания и численного моделирования процессов деформирования сложных систем многоэтажных зданий. В этом плане существует определенный разрыв между существующими нормами, регламентирующими деятельность проектировщиков и строительную практику, и возможностями уточненных расчетов элементов конструкций и сооружений, основанных на современных методах, использующих более точную постановку практических задач и их реализацию на компьютере.

С развитием крупных городов в строительстве выявилась тенденция к росту этажности возводимых объектов, обусловленная увеличением населения с одной стороны и огра-

ниченностью городского пространства с другой, рост этажности, в свою очередь, усложняет архитектурные и конструктивные формы зданий. В последнее время часто возникают вопросы, связанные с реконструкцией или утилизацией жилых, общественных зданий и сооружений старой застройки. Это приводит к необходимости более точной оценки НДС несущих систем. Так как с одной стороны необходимо обеспечить полную безопасность людей находящихся в здании, а с другой обеспечить минимальные затраты на его возведение, эксплуатацию и утилизацию или реконструкцию. Традиционные методы расчёта не всегда позволяют полностью обеспечить данные требования. В связи с этим развиваются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Большое значение приобретает выбор математических моделей, адекватно описывающих пространственную работу несущих систем высотных зданий.

Область исследований: Информация об объекте и НДС несущей системы на каждой из стадий жизненного цикла претерпевает значительные изменения, причины которых могут быть различны. Стадией, формирующей НДС, является стадия возведения. На этом этапе НДС изменяются в зависимости от последовательности возведения, что обуславливает изменение конструктивной и расчетной схемы здания. На стадии эксплуатации, самой продолжительной для многоэтажных зданий, к несущей системе прикладываются временные нагрузки, изменяются свойства материала несущих конструкций. Эти изменения зависят от многих факторов, при этом материалы и конструктивные элементы проявляют нелинейный характер работы.

В процессе эксплуатации жилых, общественных, зданий происходит старение конструкционных материалов, зависящее не только от времени, но и от различного рода аварийных и нештатных ситуаций, техногенных воздействий. В связи с этим часто возникают

вопросы, связанные с реконструкцией, демонтажем, утилизацией и капитальным ремонтом зданий. Для оценки безопасности здания необходимо знать историю его нагружения, схемы приложения внешних нагрузок, историю формирования усилий в конструктивных элементах, иметь возможность определить его НДС в любой момент времени. Поэтому необходимо обобщить в единую информационную модель соответствующие математические модели, создать программный комплекс, обеспечивающий моделирование этих процессов. Реальное НДС несущих конструктивных элементов можно определить при проведении на базе программного комплекса ряда численных экспериментов, моделирующих те или иные ситуации и процессы.

Таким образом, информационная поддержка жизненного цикла несущей системы производится посредством использования информационной модели конкретного здания или сооружения, отражая его свойства, состояние, взаимосвязь с внешней средой. В настоящее время, во многих отраслях промышленности, при создании информационных систем используют CALS-технологии (Continuous Acquisition and Life-cycle Support), которые позволяют в период проектирования и строительства формировать информационную модель объекта. Основным блоком CALS являются стандарты, обеспечивающие взаимосвязанность данных в процессах проектирования, производства и эксплуатации объекта. Стандартом CALS является модель, которая определяет технологию электронного представления данных об объекте (составе, свойствах, геометрических и физических характеристиках, изменениях модели и т.д.), и логическую модель данных представляющую собой готовое решение, на основе которого создается логично организованная база инженерных данных. Исходя из этого, создание информационной модели многоэтажного здания может основываться на использовании CALS-технологий.

Поэтому обобщение в единую информационную модель математических моделей, методов, и программного обеспечения для определения НДС элементов несущей системы здания, адекватно описывающих поведение несущих конструкций на любой стадии жизненного цикла объекта строительства, является актуальной задачей.

Решение проблемы: Методы расчёта, основанные на классических численных методах, не всегда позволяют полностью обеспечить выполнение данных требований. В связи с этим создаются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Поэтому большое значение приобретает выбор математических моделей адекватно описывающих пространственную работу несущих систем многоэтажных зданий.

Конструктивной основой многоэтажных зданий служит пространственная несущая система, состоящая в основном из вертикальных (колонны, пилоны, диафрагмы), горизонтальных (плиты перекрытий, фунда-

ментные плиты) и наклонных (пандусы, лестничные марши, связи) элементов. Вертикальные несущие элементы объединены в единую пространственную систему с помощью горизонтальных несущих конструкций - перекрытий здания.

Современные концепции численного исследования конструкций высотных зданий рекомендуют учитывать совместную работу конструктивной схемы (наземная часть – фундаментная плита – основание)[1]. Такая постановка задачи дает результаты, достаточно отличающиеся от ранее используемых схем: сначала рассчитывалась надземная часть на жестких опорах, а затем фундаментная плита на упругом основании на нагрузку от опорных реакций (рис.1.).

Расчетная схема содержит информацию о топологии (взаиморасположение конструктивных элементов), геометрии системы, сечениях и материале элементов, нагрузках. В задачу расчета входит определение перемещений, усилий (напряжений) в элементах на основе этой информации.

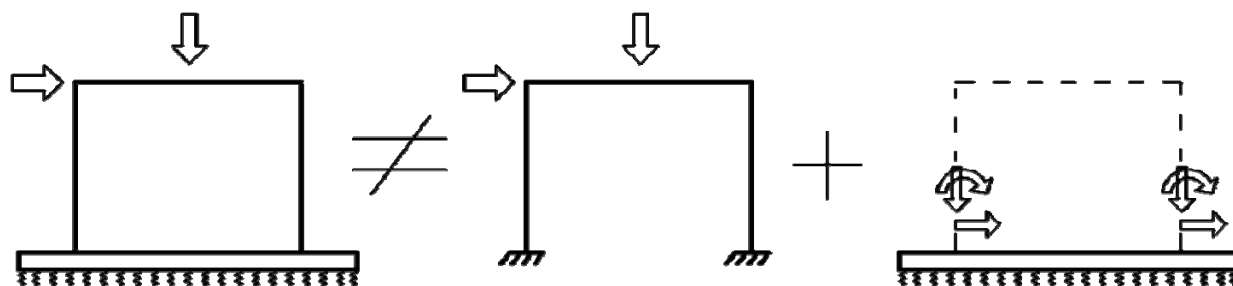


Рис. 1. Учет совместной работы «надземное строение – фундаментная плита – грунтовое основание»

Учет процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей. В работах Перельмутера А.В. [2] введено понятие «генетической нелинейности». Этот термин достаточно логичен, так как отображает родословную конструкции. Хотя, с другой стороны, существующий термин «конструктивная нелинейность» для описания процесса возведения также подходит. Генетическая (конструктивная) нелинейность проявляется даже тогда, когда расчет с учетом процесса возведения

выполняется в линейной постановке. Рассмотрим пример – двухэтажная рама (рис. 2) возводится поэтапно. На первом этапе возведения к ригелю первого этажа приложена монтажная нагрузка $P = 60$ т. После того, как возведен второй этаж рамы, эта нагрузка убирается. Для корректности численного эксперимента нагрузка от собственного веса не учитывается. На рис.3 приведено НДС возведенной ненагруженной конструкции. Т.е. усилия в конструкции имеются после

того, как удалена приложенная нагрузка. Это говорит о том, что конструкция хранит свою историю (родословную) возведения. На рис.4 схематично отмечено, что суперпозиция отсутствует, а это первый признак нелинейности.

Необходимость учета совместной работы конструктивной схемы «надземная часть – фундаментная плита – грунтовое (свайное)

основание», нерегулярное расположение колонн, пилонов, диафрагм, сложное очертание перекрытий в плане с наличием большого количества отверстий и много других конструктивных особенностей обуславливает применение численных методов расчета, основанных на непосредственной дискретизации конструктивных схем.

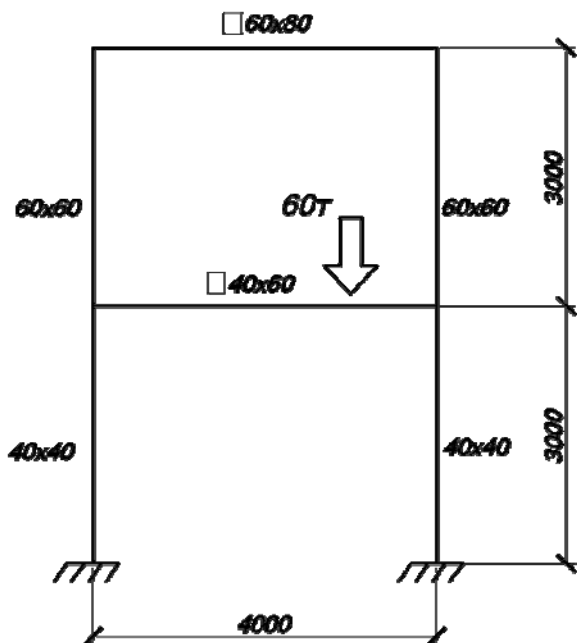


Рис. 2. Расчетная схема двухэтажной рамы.

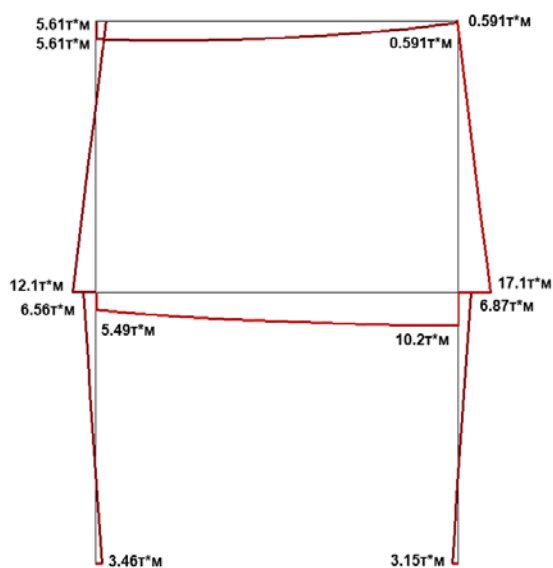


Рис. 3. НДС возведенной конструкции.

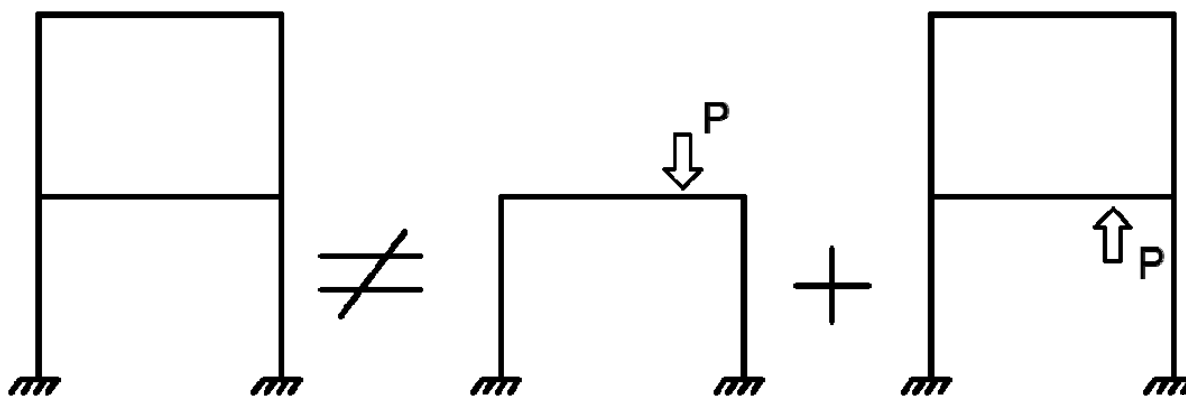


Рис. 4. Учет процесса возведения.

Метод конечных элементов (МКЭ) [2,3] основан на дискретизации самого объекта, который представляется в виде отдельных конечных элементов. Каждый конечный элемент имеет свои размеры, жесткостные ха-

рактеристики, нагрузки, законы интерполяции узловых значений параметров НДС. В этом основное отличие конечно-элементной сетки, которая представляет конструкцию в виде набора конечных элементов от абст-

рактной разностной сетки, которая служит только для того, чтобы заменить дифференциальные операторы разностными аналогами. В настоящее время используется метод конечных элементов в перемещениях, т.е. в узлах сетки сначала находятся перемещения, а затем остальные параметры НДС.

Процедура решения задачи по МКЭ в перемещениях выглядит следующим образом:

- нанесение конечно-элементной сетки;
- назначение каждому конечному элементу необходимых характеристик – тип, жесткости, размеры и др.;
- построение для каждого конечного элемента матрицы жесткости;
- построение канонических уравнений МКЭ;
- решение канонических уравнений и определение перемещений в узлах сетки;
- определение параметров НДС (усилий, напряжений, перемещений) по всей области конструкции.

Эта процедура полностью соответствует механике стержневых систем. Если в докомпьютерный период методы строительной механики стержневых систем и методы теории упругости для расчета пластинчатых и трехмерных объектов были различны, то МКЭ решает эти задачи однотипно. Следовательно, возможно решение комбинированных конструкций, например, расчет каркасного здания совместно с основанием: каркас – это стержневая система, плиты перекрытий, фундаментная плита и диафрагма – это пластинчатые системы, грунтовое основание – это трехмерный объект.

Последовательность численного решения метода конечных элементов описана в работе [3,4]. Однако применение метода для расчета высотных зданий затруднено. Это связано с тем, что реальные размеры зданий не позволяют расчленивать их на большое число конечных элементов, т.к. это приводит к увеличению объема исходных данных, числа уравнений и времени расчетов на компьютере. В работе [5] было предложено использо-

вать пространственные конечные элементы, предварительно создавая библиотеки матриц жесткостей крупных элементов здания, и только затем определять перемещения всей системы. Это приводит к определенным трудностям, связанным с многообразием конструктивных решений многоэтажных зданий, а предложенный метод требует введения гипотез о законе перемещений для горизонтальных сечений всего здания. В этом случае использование метода суперэлементов представляется более целесообразным.

Данные и используемые методы. Для современных сложных сооружений (мосты, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только эксплуатационной стадией, но и стадией возведения. В процессе возведения конструктивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения «замораживаться», определяя сечения элементов и конструкции узлов именно на этой стадии.

Для изучения физической системы методами математического моделирования ее заменяют абстрактной системой - математической моделью.

Реализация математической модели на компьютере дает возможность многократно и в широком диапазоне изменять входные параметры и условия функционирования сложных систем, заменяя, таким образом, экспериментальные исследования вычислительным экспериментом. Кроме того, при решении ряда сложных конструкторских задач возможно и необходимо применение вариантного проектирования.

На современном этапе развития компьютерной техники разработано множество программных комплексов (ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР, SCAD, STARK, COSMOS, ANSYS, NASTRAN и др.), реализующих метод конечных элементов и позволяющих производить расчеты сложных систем.

Программный комплекс ЛИРА-САПР предназначен для расчета и проектирования

строительных конструкций различного назначения с реализацией метода суперэлементов и визуализацией на всех этапах, производит расчеты геометрически и физически нелинейных сложных систем. Он позволяет пользователю быстро и удобно создать расчетную схему сооружения, обладает функциями документирования, встроенной графической средой САПФИР-Конструкции, выполняющей функции препроцессора. С помощью программного комплекса МОНОМАХ-САПР рассчитываются и проектируются железобетонные конструкции многоэтажных зданий с планами произвольной конфигурации, в том числе зданий из монолитного железобетона. Автором настоящей статьи проводились исследования каркасно-монолитных зданий. В расчетах колонны и ригели моделировались пространственными стержнями с жесткими узлами, несущие стены, диафрагмы - универсальными конечными элементами плоской задачи теории упругости, перекрытия - конечными элементами плиты, работающими в двух плоскостях. Моделирование процесса возведения имеет большое значение для конструкций высотных зданий из монолитного железобетона, так как в этом случае необходимо учитывать такие эффекты:

- неравномерная осадка вертикальных элементов (колонны и пилоны имеют большие деформации, чем стены и диафрагмы);
- конструкции, как правило, включаются в работу до набора бетоном расчетной прочности (как правило, распалубка производится значительно раньше, чем бетон наберет расчетную 28-дневную прочность);
- установка и удаление временных стоек, которые существенно изменяют конструктивную схему здания на этапах возведения;
- многие другие эффекты.

Учет особенностей возведения железобетонных конструкций высотных зданий реализован в программных комплексах ЛИРА-

САПР, МОНОМАХ-САПР. Моделирование процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей, обусловленной не только последовательно изменяющейся расчетной схемой (генетическая и конструктивная нелинейность), но и учетом нелинейных свойств материала (физическая нелинейность). Решение этой задачи в ПК ЛИРА САПР и МОНОМАХ САПР основана на основных методах, которые в физическом смысле представляют собой моделирование процесса нагружения с изменяемой расчетной схемой.

Влияние процесса возведения на пространственную работу несущих систем зданий. Существует большое число работ, авторы которых имеют разные подходы к расчету зданий и сооружений. Однако не каждый метод позволяет отразить реальную работу несущей системы здания. Большая часть этих методов предполагает определение НДС несущих элементов, исходя из готовой расчетной схемы здания, загруженной полной нагрузкой. Часть методов ориентирована на определение характеристик только отдельных элементов здания, что также приводит к искажению реальной работы здания. Поэтому требуется их дальнейшее развитие и доработка. Целью теоретических и экспериментальных исследований многих ученых в настоящее время является определение влияния процесса возведения на НДС элементов несущих систем зданий. Исследование формирования НДС несущих систем в процессе возведения проводилось в работах Городецкого А.С., Перельмутера В.С., и других отечественных и зарубежных ученых [1,2,5,6]. В них отмечается влияние изменения расчетной схемы и величины вертикальной нагрузки в процессе монтажа на формирование конечных внутренних усилий в элементах несущих систем многоэтажных зданий.

В зависимости от конструктивных решений, экономичности и безопасности, а также других условий строительного производства

применяют различные методы возведения многоэтажных зданий. Но во всех случаях процесс возведения заключается в том, что собственная масса здания растет по мере монтажа, с возведением нового этажа изменяется высота здания, погонная жесткость вертикальных элементов и нагрузка на каждом новом этапе возведения прикладывается к новой расчетной схеме. Это подтверждает значимость данных параметров при математическом моделировании процесса возведения.

Наибольшее влияние процесс возведения оказывает на НДС несущих систем многоэтажных зданий с ядром жесткости. В случае возведения зданий каркасного типа ядро жесткости служит мощной пространственной конструкцией, воспринимающей не только часть вертикальной нагрузки, но и всю горизонтальную нагрузку, действующую на здание. При возведении зданий каркасного или панельного типа, возникают плотные связи сдвига, при монтаже зданий методом подъема этажей или перекрытий связи сдвига устраиваются одновременно с монтажом наружных стен. В возведенном до монтажа наружных стен ядре жесткости успевают произойти упругие деформации, часть деформаций ползучести и усадки. Несущие вертикальные элементы и несущие стены деформируются по мере увеличения нагрузки в процессе возведения уже в составе всей несущей системы, поскольку при возведении вертикальных несущих элементов и ограждающих конструкций одновременно происходит их соединение с ядром жесткости. Обычно монолитное ядро жесткости возводится с опережением по отношению к ограждающим конструкциям, поэтому основная часть деформаций ядра происходит до монтажа ограждающих конструкций. Колонны каркаса, напротив, укорачиваются по мере возведения и возрастания нагрузки. Разность продольных деформаций колонн и ядра при-

водит к соответствующему деформированию перекрытий. Каждое новое перекрытие возводится в строго горизонтальном положении после того, как колонны уже укоротились от всех нижерасположенных перекрытий. Поэтому каждое вновь возведенное перекрытие будет деформироваться, в основном, только от действия местной нагрузки, и нагрузки от вышерасположенных этажей.

На рис.5 представлен пример расчета многоэтажной рамы, который демонстрирует необходимость учета процесса возведения.

Рама (рис.5, а, б) в определенной степени моделирует каркасное здание – ригели имеют сечение 400x20 см, что моделирует плиту перекрытия. Нагружение, кроме собственного веса включает полезную нагрузку $q=2.06$ т/м и нагрузку от стен $P=3$ т.

Как правило, перекрытия высотных зданий рассчитываются исходя из предположения, что опоры перекрытий (колонны, пилоны, диафрагмы) не имеют вертикальных перемещений. В такой постановке моменты в верхнем ригеле (определенный аналог верхнего перекрытия) АВ (рис.5,а) будут равняться $M_A = -2.7$ т м и $M_B = -7.7$ т м ; а прогиб в центре ригеля $W_C = 0.5$ см. На рис. 6 приведена деформированная схема рассматриваемой конструкции при расчете с учетом процесса возведения. Расчет выполнялся по изменяемой в процессе возведения схеме: сначала первые два этажа, затем два последующих этажа, затем два верхних этажа. Расчет выполнялся на нагрузку только от собственного веса.

К окончательной (возведенной) схеме прикладывалась полезная нагрузка. Расчет выполнялся в физически нелинейной постановке, т.е. учитывались нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями для бетона и арматуры. Методы расчета конструкций в физически нелинейной постановке описаны в работах [1,6,7].

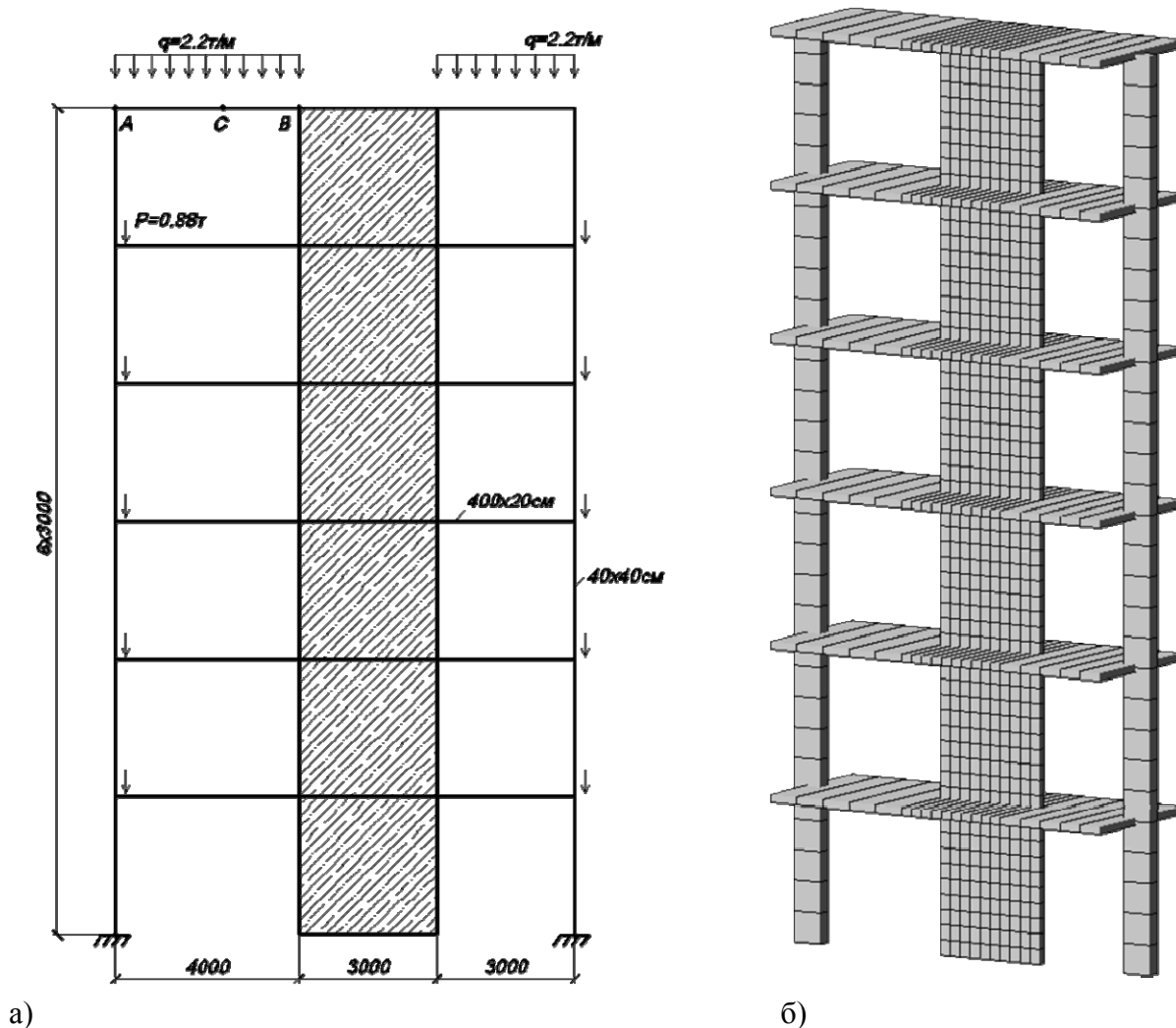


Рис. 5. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) многоэтажной рамы.

Для сравнения рассматриваемая конструкция рассчитывалась без учета процесса возведения, т.е. на окончательную схему прикладывалась вся нагрузка.

В таблице 1 приведены усилия ригеля А-В, полученные по трем различным схемам.

Анализируя результаты расчета, приведенные в таблице 1 можно сделать вывод, что НДС ригеля (аналог перекрытия), полученное на основе нелинейного расчета для всей схемы и, особенно, с учетом возведения значительно отличается от результатов расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) в линейно-упругой постановке.

В процессе исследований было установлено:

- монтаж элементов несущей системы приводит к изменению расчетной схе-

мы здания, приложение увеличивающейся вертикальной нагрузки к измененной расчетной схеме здания влияет на НДС конструктивной схемы;

- формирование напряженно-деформированного состояния несущей системы в значительной степени зависит от способа монтажа;
- расчет ригелей (перекрытий) в общей системе здания значительно отличается от расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) на несмещаемых вертикальных опорах;
- расчет с учетом возведения дает результаты, несколько отличающиеся от традиционного расчета (окончательная схема рассчитывается на всю нагрузку).

Учет процесса возведения показывает на несколько меньше перемещения вертикальных элементов, что объясняется моделированием выборки зазоров, которые обусловлены деформациями вертикальных элементов от собственного веса возведенной конструкции, при бетонировании перекрытий.

ВЫВОДЫ

1. На современном этапе развития информационных технологий разработано множество программных комплексов, позволяющих производить расчеты сложных систем. Все они реализуют метод конечных элементов. Наиболее развитым программным комплексом, учитывающим реальную пространственную работу конструктивных элементов в процессе возведения, является ПК ЛИРА-САПР.

2. Большое число проведенных экспериментальных исследований пространственной работы несущих систем многоэтажных зданий дает возможность использовать существующие математические модели, и, используя разработанное на их основе программное обеспечение, проводить серии численных экспериментов.

Для определения напряженно-деформированного состояния несущей системы здания и обеспечения его информационной поддержки на протяжении всего жизненного цикла необходимо создание информационной модели объекта строительства, которая должна основываться на математических моделях, адекватно отражающих пространственную работу несущей системы на каждой стадии жизненного цикла. Внедрение CALS-технологии проектирования в строительную индустрию позволит: оперативно реагировать на аварийные ситуации; моделировать процессы развития тех или иных негативных процессов; оценивать напряженно-деформированное состояние на любой стадии жизненного цикла; решать ряд проектных и конструкторских задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – М: Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.
2. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (издание 4-е переработанное и дополненное).- Москва: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во ДМК Пресс, Изд-во АСВ, 2011, 736 с

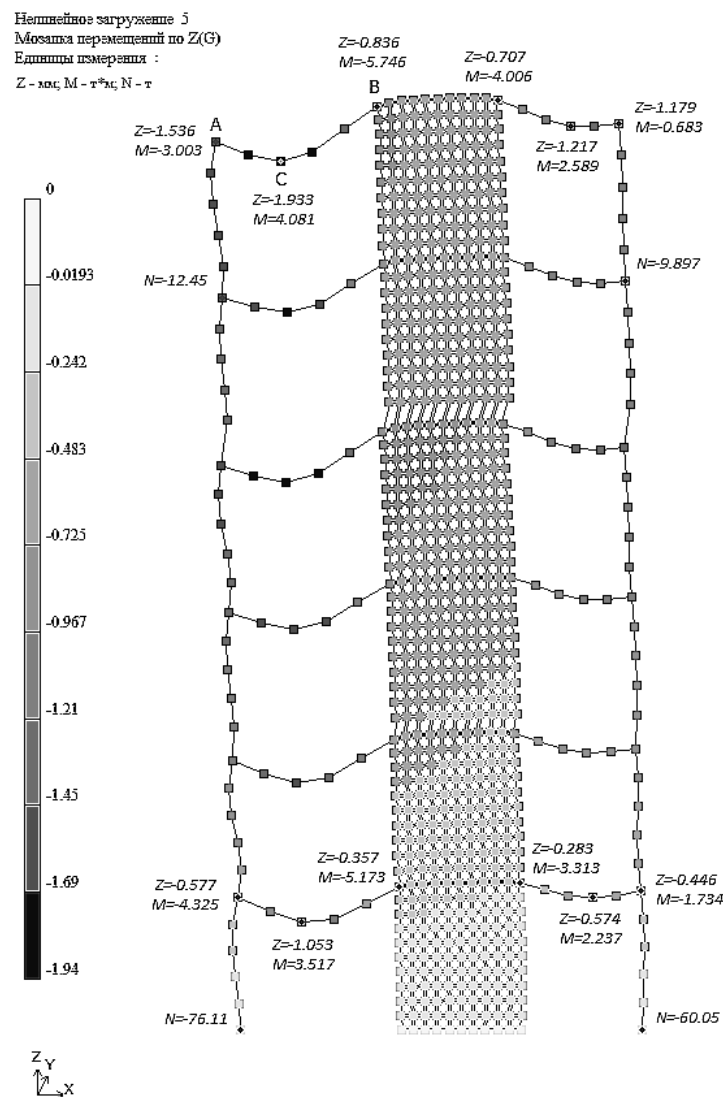


Рис. 6. Деформированная схема многоэтажного здания.

Таблица 1

Сравнительная таблица результатов расчета рамы многоэтажного здания

Усилия и перемещения в сечениях ригеля АВ	Линейный расчет при несмещаемых вертикальных опорах	Нелинейный расчет без учета возведения	Нелинейный расчет с учетом возведения
Момент в сечении А, тм	-2.7	-2.9	-3.0
Момент в сечении В, тм	-7.7	-5.9	-5.7
Перемещения узла С, см	-0.5	-2.3	-1.9
Перемещения узла А, см	0	-2.0	-1.5
Перемещения узла В, см	0	-1.1	-0.8

3. **Бате К., Вилсон Э.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. - М.: Стройиздат, 1982. - 448с.
4. **Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С.** Метод конечного элемента в механике деформируемых тел. // Прикл. мех. - 1972. -Т.8, №8. - с. 3-28
5. **Норри Д., Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304с.
6. **Верюжский Ю.В., Колчунов В.И., Барабаш М.С., Гензерский Ю.В.** Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. – Учебное пособие. – К.: Книжное издательство НАУ, 2006. – 808с.
7. **Городецкий А.С. и др.** Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Изд-во «Транспорт», 1981. – 143 с.

Барабаш Мария Сергеевна, кандидат технических наук, доцент, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, дом 1,
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, candidate of technical sciences, associate professor, Department of Computer Technology Construction, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE,
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ ПОЖАРАХ

А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский, С.В. Щербина

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье описана методика численного моделирования нестационарных полей температур в строительных конструкциях при гипотетических пожарах с использованием универсального верифицированного конечноэлементного комплекса программ ANSYS Mechanical 14.0. Приведены основные теоретические сведения о методах решения, применяемых типах КЭ, теплофизических свойствах стали и бетона. Методика реализована в форме макросов-подпрограмм на внутреннем языке программирования ANSYS APDL. Результаты расчетов сравниваются с полученными по нормативным методикам МДС 21-2.2000, СТО 36554501-006-2006, Eurocode 2 и с экспериментальными данными. Приведены примеры применения предложенной методики для ряда практических задач.

Ключевые слова: моделирование, численные методы, температура, железобетон, пожар

FINITE ELEMENT SIMULATION OF NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN CIVIL STRUCTURES AT FIRE

Alexander M. Belostotsky, Sergey I. Dubinsky, Sergey V. Scherbina

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article describes a method to perform simulation of nonstationary temperature fields in structures using a universal finite element software ANSYS Mechanical 14.0. Provides information about theoretical basis, used thermophysical properties of steel and concrete, boundary conditions and algorithms of simulation. The methodic is realized as library of macros (routines for internal programming language ANSYS APDL). The results are compared with those obtained by the codes (MDS 21-2.2000, SRT 36554501-006-2006, Eurocode 2) and with experimental data. The methodic is used for several important practical problems .

Key words: modeling, numerical methods, temperature fields, reinforced concrete, fire

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ РАСЧЕТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Весьма актуальными являются задачи определения фактических пределов огнестойкости строительных конструкций. Основной причиной повышенного интереса к проблеме является непрерывно возрастающая сложность возводимых строительных конструкций, а также степень их ответственности, определяемая этажностью здания, массовым скоплением людей, стоимостью технологического оборудования и т.д. Вместе с тем определение фактического предела огне-

стойкости является нетривиальной задачей. Наиболее достоверным способом ее решения является огневое испытание натуральных моделей конструкций в условиях стандартного пожара. Однако данный вид испытания является достаточно дорогим, а для широкого спектра конструкций (например, большепролетных балок) – вообще невозможным из-за ограниченных размеров имеющихся огневых камер.

Выходом из этой ситуации может служить определение пределов огнестойкости расчетными методами. Отечественные методики базируются на исследованиях 60-70 гг.

прошлого века и соответствуют вычислительной возможности тех лет.

Развитие численных методов и совершенствование компьютерных технологий позволили успешно решать задачи в более общих постановках, чем рассматриваемые нормами. Задачами исследований, проведенных в НОЦ КМ МГСУ, являлись:

- Разработка методики численного моделирования температурного воздействия на металлические и железобетонные конструкции с использованием наиболее мощных и современных программных комплексов
- Верификация теплофизических свойств материалов, применяемых в расчетах
- Разработка программного модуля, позволяющего ускорить время проведения теплофизического расчета
- Апробация методики на практических и тестовых задачах

Конечная цель разработки заключается в помощи проектным и строительным организациям, а также органам государственного пожарного надзора с целью сокращения затрат времени, труда и материалов на установление реальных пределов огнестойкости строительных конструкций.

2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Среди численных методов решения вариационных задач и дифференциальных уравнений механики метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее эффективным и универсальным. При анализе стационарного теплового состояния формируется и решается глобальная система уравнений

$$[K]\{T\} = \{Q\}, \quad (1)$$

где $[K]$ – матрица теплопроводности; $\{T\}$ – искомый вектор узловых температур; $\{Q\}$ – вектор узловых тепловых потоков.

Матрица $[K]$ описывает не только процессы теплопроводности, но и конвекцию и граничные условия радиационного излучения:

$$[K] = [K_{\text{теплопроводности}}] + [K_{\text{конвекции}}] + [K_{\text{излучения}}], \quad (2)$$

Конвекция учитывается по соотношению:

$$\{q\}^T \{n\} = h_f (T_S - T_B), \quad (3)$$

где h_f – коэффициент теплоотдачи на границе сред; T_B – температура газа; T_S – температура поверхности тела.

Для оценки радиационной составляющей применяется соотношение:

$$Q_i = A_i \varepsilon_i F'_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4), \quad (4)$$

где

$$F'_{ij} = \frac{F_{ij}}{F_{ij}(1 - \varepsilon_i) + \varepsilon_i}$$

– коэффициенты взаимной видимости поверхностей i, j ; Q_i – потеря энергии с поверхности i при излучении; A_i – площадь поверхности i ; ε_i – степень черноты; σ – постоянная Стефана-Больцмана; T_i – температура поверхности тела.

Для решения СЛАУ применяются либо прямой разреженный метод (Sparse), либо итерационный метод сопряженных градиентов с неполным разложением Холецкого (ICCG).

При нестационарном тепловом анализе рассматривается меняющийся во времени отклик системы, сопровождающийся процессами нагревания или охлаждения. Температуры, тепловой поток и тепловые нагрузки изменяются во времени. Разрешающая сис-

тема нестационарных уравнений принимает вид:

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\}, \quad (5)$$

где $[K]$ – матрица теплопроводности; $[C]$ – матрица удельных теплоемкостей; $\{T\}$ – искомые узловые температуры; $\{\dot{T}\}$ – производная температуры по времени; $\{Q\}$ – вектор узлового теплового потока, в общем случае зависящий от времени.

Для получения значений температуры $\{T\}$ используется следующий способ интегрирования по времени:

$$\{T_{n+1}\} - \{T_n\} = \Delta t_n (1 - \Theta)\{\dot{T}\} + \Delta t_n \Theta \{T_{n+1}\}, \quad (6)$$

Этот прием известен как способ Эйлера (или метод трапеций) для интегрирования по времени. В данном случае

- $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ – шаг интегрирования по времени между точками n и $n+1$;
- $\{T_n\}, \{T_{n+1}\}$ – значения температур в моменты времени n и $n+1$;
- $\{\dot{T}_n\}, \{\dot{T}_{n+1}\}$ – производные температур;
- Θ – параметр Эйлера.

Величина параметра Эйлера Θ определяет метод интегрирования по времени. Параметр Θ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1.$$

При $\Theta = 0.5$ имеет место схема интегрирования Кранка-Николсона, при $\Theta = 1$ – обратный метод Эйлера. Метод Кранка-Николсона также называют правилом средней точки, а обратный метод Эйлера – методом обратных разностей.

При этом система уравнений нестационарной теплопроводности на шаге интегрирования принимает вид:

$$[K]\{\Delta T\} = \{Q\}, \quad (7)$$

где $\{\Delta T\} = \{T_{n+1}\} - \{T_n\}$;

$$[K] = \frac{1}{\Theta \Delta t} [C] + [K]$$

– эквивалентная матрица теплопроводности;

$$\{\bar{Q}\} = \{Q\} + \frac{1 - \Theta}{\Theta} [C]\{T_n\} - [K]\{T_n\}$$

– эквивалентный вектор теплового потока.

Анализ стационарной или нестационарной задачи теплопроводности становится нелинейным в том случае, когда возникает:

- зависимость свойств материалов от температуры;
- зависимость от температуры граничных условий;
- наличие нелинейных конечных элементов.

К наиболее распространенным нелинейностям относятся:

- зависимость теплопроводности от температуры;
- зависимость энтальпии от температуры при рассмотрении фазовых превращений (плавление или затвердевание);
- теплопередача излучением;
- зависимость от температуры коэффициента теплоотдачи, используемого для расчета конвекции.

Система нелинейных уравнений решается итерационным методом, известным как метод Ньютона-Рафсона. Целью этого метода является удовлетворение соотношения

$$\{\Phi\} = \{Q\} - \{P\} \rightarrow \{0\}. \quad (8)$$

Разность между вектором внешней нагрузки $\{Q\}$ и вектором внутреннего теплового потока $\{P\}$ рассматривается как остаточный, неравновесный поток или вектор ошибки $\{\Phi\}$.

Фактически, вычисляется некоторая норма остаточного вектора (невязки), и цель состо-

ит в том, чтобы достигнуть выполнения условия

$$|\Phi| \rightarrow 0. \quad (9)$$

Следующий шаг метода Ньютона-Рафсона состоит в применении усеченных рядов Тейлора к остаточному вектору. Этим достигается линеаризация системы уравнений:

$$[K_T^{(i-1)}]\{\Delta T^{(i)}\} = \{Q^{(i)}\} - \{P^{(i-1)}\}, \quad (10)$$

Выполняются равновесные итерации ($i=1, 2, 3, \dots, n$) и пересчитываются температуры для получения новых значений

$$\{T^{(i)}\} = \{T^{(i-1)}\} + \{\Delta T^{(i)}\}, \quad (11)$$

(i – номер итерации) до тех пор, пока критерий сходимости не достигнет допустимой числовой величины.

В уравнении, записанном выше, матрица $[K_T]$ называется матрицей касательных или якобианом.

Разложение вектора $\{\Phi\}$ в ряд Тейлора имеет вид:

$$\{\Phi^{(i)}\} = \{\Phi^{(i-1)}\} + \left(\frac{d\{\Phi\}}{dT} \right)_{i-1} \{\Delta T^{(i)}\}, \quad (12)$$

где $\{\Delta T^{(i-1)}\} = \{T^{(i)}\} - \{T^{(i-1)}\}$.

Матрица касательных определяется как

$$[K_T^{(i-1)}] \equiv \left(\frac{d\{\Phi\}}{dT} \right)_{i-1} \quad (13)$$

В применении к нелинейному нестационарному анализу метод Ньютона-Рафсона комбинируется с вышеупомянутым методом интегрирования по времени, что приводит к следующей системе разрешающих уравнений:

$$[K^{(i-1)}]\{\Delta T^{(i)}\} = \{Q^{(i)}\} - \{P^{(i-1)}\}, \quad (14)$$

$$\{T_{n+1}^{(i)}\} = \{T_n^{(i-1)}\} + \{\Delta T^{(i)}\},$$

где $[K]$ – эквивалентная матрица теплопроводности; $\{P\}$ – эквивалентный вектор внутреннего теплового потока.

Практическое применение МКЭ для задач теплофизики может проводиться с использованием универсальных коммерческих программных комплексов (в частности, ПК ABAQUS, ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, LS-DYNA, MSC.NASTRAN, COSMOS/M, СТАДИО), универсальных некоммерческих программных комплексов, (в частности, OpenFoam, Salome-MECA, CalculiX, Tochnog, Elmer), а также специализированными коммерческими программными пакетами (Temper-3D, HEAT(СИНС) и др.).

Для приведенных далее расчетов применялся универсальный ПК ANSYS, апробированный на реальных двумерных и трехмерных задачах теплопроводности и термоупругости. С участием авторов статьи ПК ANSYS успешно прошел верификацию в системе Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), в том числе, и для задач стационарной и нестационарной теплопроводности и термоупругости [8].

Кроме того, программный комплекс сертифицирован Госатомнадзором РФ (рег. номер ПС в ЦОЭП при РНЦ КИ №490 от 10.09.2002, рег. номер паспорта аттестации №145 от 31.10.2002), а также многими зарубежными органами сертификации (ISO-9001, ISO 9000-3, British standard BS 5750, Lloyd's Register's software certification, NAFEMS QA certification и др.). Сертификат Lloyd's Register's эквивалентен сертификации Морским Регистром РФ.

ПК ANSYS допускает приложение нагрузок всех видов и позволяет включать многие виды нелинейности (пластичность, большие деформации и смещения, контакт с трением, ползучесть, трещинообразование в бетоне и металле и т.д.), в том числе и в нестационарной динамической постановке. Особо нужно отметить возможность проведения связан-

ных многодисциплинарных расчетов (в том числе термоупругих).

На рисунке 1 приведена общая схема проведения расчетов по анализу огнестойкости конструкции. Указаны применяемые программные системы и описана взаимосвязь их исходных данных и получаемых результатов. Модель для ПК ANSYS Thermal, учитывающая теплофизические свойства железобетона, дополняется необходимыми нагрузками (температурами газа), граничными (коэффициенты теплоотдачи для внутренней и внешней поверхностей и др.) и начальными условиями. Расчеты полей температур в конструкции проводятся с сохранением промежуточных результатов (шаг 1-2 минуты). Далее результаты передаются в модуль расчета НДС (ANSYS Structural) и дополняются необходимыми граничными условиями (закрепление, симметрия и др.). Расчет выполняется с учетом физической и геометрической нелинейности, вплоть до окончания пожара (стабилизации полей температур) или истощения несущей способности конструкции в целом. Прерывание итерационного процесса (несходимость) может быть вызвана как неверным выбором опций и параметров итерационного процесса, плохим качеством КЭ-сетки, не позволяющим отследить градиенты напряжений и температур, так и истощением несущей способности. Признаками истощения несущей способности являются: нарастающее увеличение прогибов на графиках, большие и нарастающие пластические деформации арматуры, затрагивающие обширные зоны конструкции, обширные зоны трещинообразования, могущие привести к обрушению конструкции.

В данной статье описана часть методики, касающаяся расчетов нестационарных полей температур ("теплофизика").

Для снижения трудоемкости типовых и вариантных расчетов был разработан специализированный программный модуль TH_FIRE к базовому ПК (на языке пользовательского программирования ANSYS APDL).



Рис. 1. Блок-схема разработанной методики расчета полей температур и огнестойкости на базе ПК ANSYS Mechanical.

Модуль включает в себя упрощенное параметрическое моделирование типовых узлов с вводом специальных "граничных" поверхностных элементов теплопроводности, излучения и конвекции, макросы расчета тепловых полей при пожаре в нестационарной постановке, макрос передачи температурных нагрузок в прочностную модель, макросы с теплофизическими характеристиками по отечественным нормам и Eurocode 2, а также макросы для анализа, обработки и визуализации результатов в графическом и табличном виде.

Для верификации разработанной методики было решено ряд тестовых задач.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ

3.1. Односторонний нагрев плиты.

В [2] рассматривалось одностороннее огневое воздействие стандартного пожара по ИСО 834 на бетонную плиту толщиной 200 мм. Проведен сравнительный расчет.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что применяемая методика расчета полей температур бетонных плит при пожаре пригодна для практического использования, результаты близко согласуются с существующими нормативными документами.

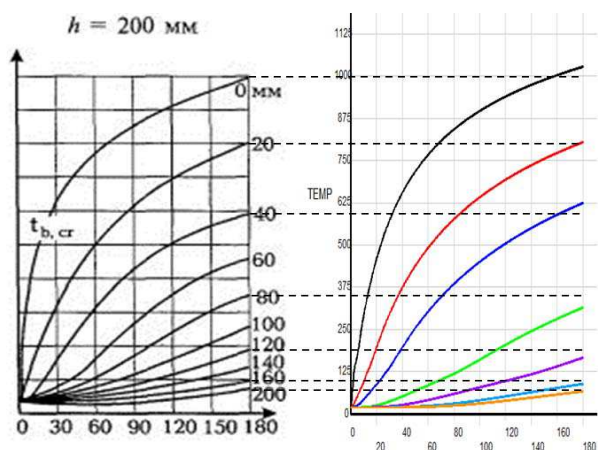


Рис. 2 Сравнение температур прогрева конструкционного керамзитобетона в плитах и стенах высотой сечения 200 мм при одностороннем огневом воздействии ([2] – слева, расчет в ANSYS – справа)

3.2. Нагрев бетонной колонны.

Одной из типовых задач расчетов огнестойкости строительных конструкций является определение полей температур для колонны сечением 400×400 мм при четырехстороннем огневом воздействии стандартного пожара по ISO 834.

Указанные в [2] нелинейные теплофизические характеристики тяжелого бетона на гранитном (силикатном) заполнителе приведены в таблице 1 и на рисунке 2.

Таблица 1.

Теплофизические свойства материалов

Характеристика	Значение
Коэффициент теплопроводности λ Вт/м·°С	$1,2-0,00035 \cdot T$
Коэффициент теплоемкости C , Дж/°С	$710+0,83 \cdot T$
Коэффициент теплообмена для обогреваемой поверхности α_c , Вт/м ² ·°С	29
Плотность бетона, кг/м ³	2350

Выпаривание учтено вводом дополнительной теплоемкости, равной общей теплоемкости содержащейся воды (при типовой влажности 3%), как это показано на рисунке 3.

Ввиду симметрии задачи и нагружения рассмотрена четверть модели. Применялись двадцатиузловые изопараметрические элементы *SOLID90* (один слой КЭ по высоте колонны). Для удобства ввода тепловых нагрузок применены поверхностные элементы *SURF152*.

При расчете температур учитывался конвективный Q_c и лучистый Q_r теплообмен между нагретой средой и поверхностью конструкции. Приведенная степень черноты для системы “нагретая среда – бетонная поверхность” принята равной $\epsilon_{red} = 0,56$. Арматура при тепловом расчете не учитывалась.

Расчеты выполнялись во временном диапазоне 0-240 минут. Применялась процедура Ньютона-Рафсона с автоматическим выбором шага. Начальный шаг принят равным 1 сек.

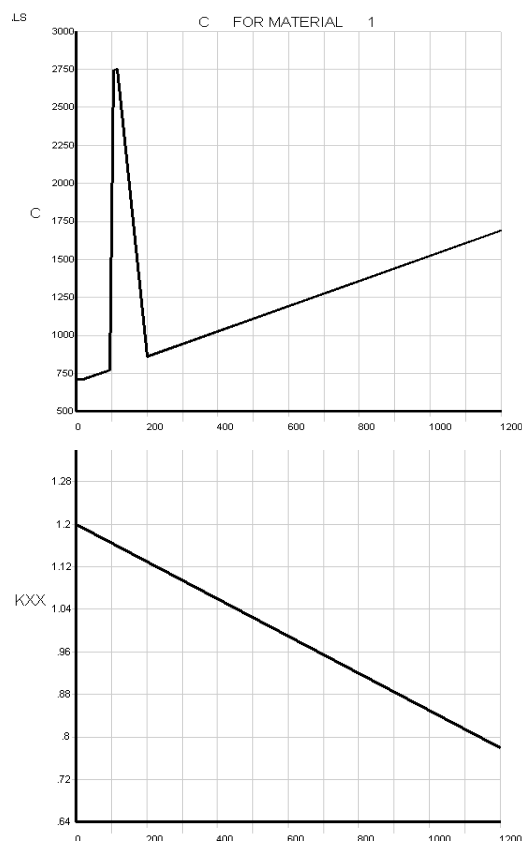


Рис. 3 Используемые при расчетах зависимости теплоемкости (C – сверху) и теплопроводности (λ – снизу) от температуры

Таблица 2.
Температуры характерных точек сечения,
°С. Сопоставление результатов расчёта

T, мин	X, мм	Y, мм	ANSYS	Источник [2]	δ (%)
60	0	0	24	24	0,0
	0	400	869	844	3,0
	400	400	939	933	0,6
120	0	0	64	59	9,0
	0	400	1005	992	1,3
	400	400	1047	1046	0,1
180	0	0	100	100	0,0
	0	400	1078	1068	0,9
	400	400	1109	1109	0,0

На графиках рисунке 4 приведено изменение во времени температур для точек сечения на диагонали. На рисунке 5 для справки приводятся изотермы для T=60, 120 и 180 мин. по результатам расчетов ANSYS и по [2]. Полные результаты сравнения для ряда характерных точек приводятся в таблице. Максимальное по абсолютной величине расхождение (“погрешность”) $\delta: \delta = 9,0\%$

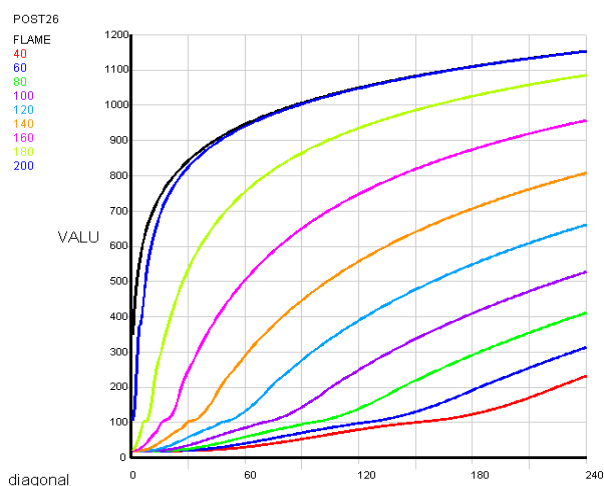


Рис. 4 Изменение во времени температур для характерных точек на диагонали колонны 400×400 мм (координаты X=Y, мм). Температура газа – метка FLAME.

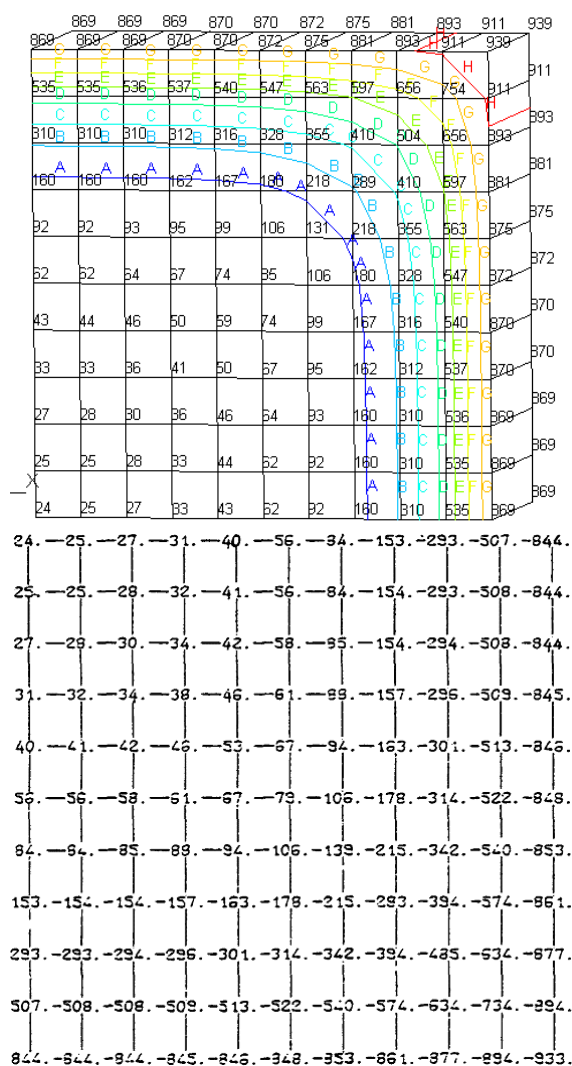


Рис. 5 Изотермы в колонне 400×400 мм (модель 1/4) при четырехстороннем огневом воздействии стандартного пожара длительностью 60 минут по результатам расчетов ANSYS и по данным МДС [2]

3.3. Нагрев стальной колонны коробчатого сечения.

Для проведения вариантных расчетов на огнестойкость колонны произвольного составного сечения из двух швеллеров разработана программа на языке программирования ANSYS APDL. Выполнена верификация результатов расчета путем сравнения с экспериментом для колонны из двух швеллеров номера 22, соединенных планками. Теплофизические свойства материала колонны приведены в таблице 3.



Рис. 6. Натурный эксперимент.

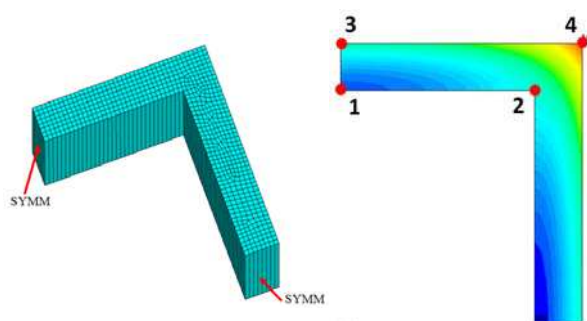


Рис. 7 Расчетная КЭ-модель (слева) и изополя температур с расположением точек для мониторинга результатов (справа) для 1/4 колонны

Таблица 3.
Теплофизические свойства материала.

Характеристика	Значение
Коэффициент теплопроводности λ Вт/м·°С	$48-3,65 \cdot 10^{-2} \cdot T$
Коэффициент теплоемкости C , Дж/°С	$0,44+4,8 \cdot 10^{-4} \cdot T$
Коэффициент теплообмена для обогреваемой поверхности α_c , Вт/м ² ·°С	29
Плотность бетона, кг/м ³	7800
Степень черноты	0,76

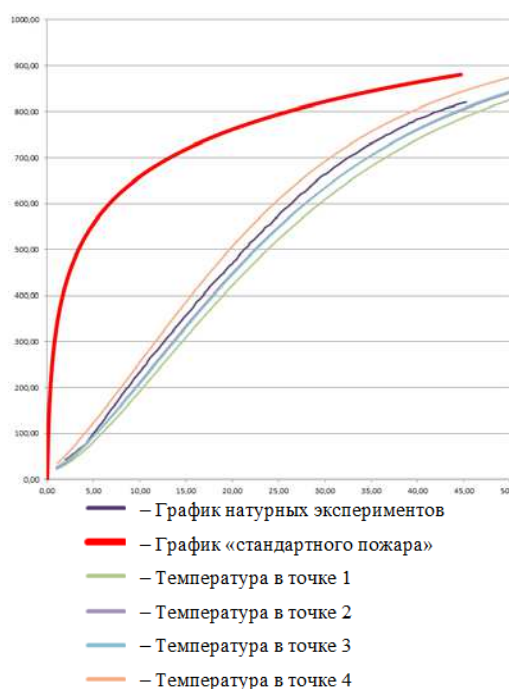


Рис. 8 Сравнения расчета и натурального эксперимента.

На обогреваемой поверхности прикладывалась температура по следующему закону: $T=345 \cdot \lg(0,133 \cdot \tau+1)+T_0$, где τ – время в минутах, T_0 – начальная температура. Задача решается в квазидвумерной постановке с использованием трехмерных 8-ми узловых конечных элементов (тип SOLID70). Учитывая симметрию задачи, рассмотрена 1/4 часть. В задаче учитывается радиационный и конвективный теплообмен.

3.4 Нагрев стальной колонны коробчатого сечения с огнезащитой

Выполнен расчет на огнестойкость колонны составного сечения из двух швеллеров с огнезащитой. Результаты расчета сравнивались с экспериментом для задачи, аналогичной п. 3.3, с добавлением огнезащиты – штукатурки толщиной 20 мм. Материалы колонны и их теплофизические свойства указаны в таблице 4.

Таблица 4 Теплофизические свойства материала

Характеристика	Сталь	Цементно-песчаная штукатурка
Коэффициент теплопроводности λ Вт/м·°С	$48-3,65 \cdot 10^{-2} \cdot T$	$0,62-3,3 \cdot 10^{-4} \cdot T$
Коэффициент теплоемкости C , Дж/°С	$0,44+4,8 \cdot 10^{-4} \cdot T$	$0,77+6,3 \cdot 10^{-4} \cdot T$
Коэффициент теплообмена для обогреваемой поверхности: α_c , Вт/м ² ·°С	29	29
Плотность бетона, кг/м ³	7800	1930
Степень черноты	0,76	0,6

На обогреваемой поверхности прикладывалась температура по следующему закону: $T=345 \cdot \lg(0,133 \cdot \tau+1)+T_0$, где τ – время в минутах, T_0 – начальная температура. Задача решается в квазидвумерной постановке с использованием трехмерных восьмиузловых конечных элементов. Учитывая симметрию задачи, решается 1/4 ее часть (рисунок 9). В задаче присутствует радиационный и конвективный теплообмен.

На рисунках 9 и 10 показаны основные результаты расчетов в сравнении с данными эксперимента.

3.4. Нагрев железобетонного перекрытия

С использованием универсальной параметрической программы на внутреннем языке программирования APDL проведены расчеты на огнестойкость стандартного фрагмента железобетонного перекрытия. Результаты расчетов сопоставлены с данными эксперимента для железобетонного перекрытия толщиной 200 мм (защитный слой арматуры 20 мм).

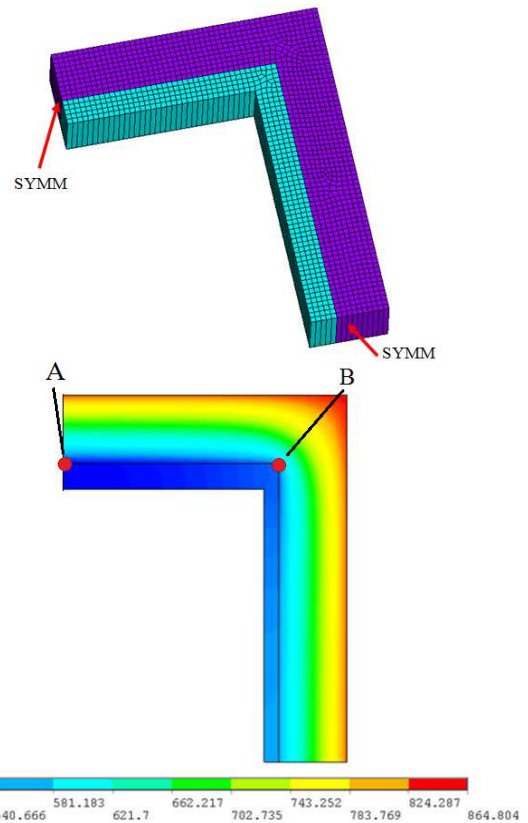


Рисунок 9 Расчетная КЭ модель (сверху) для 1/4 колонны и изополя температур с указанием точек для мониторинга результатов (снизу)

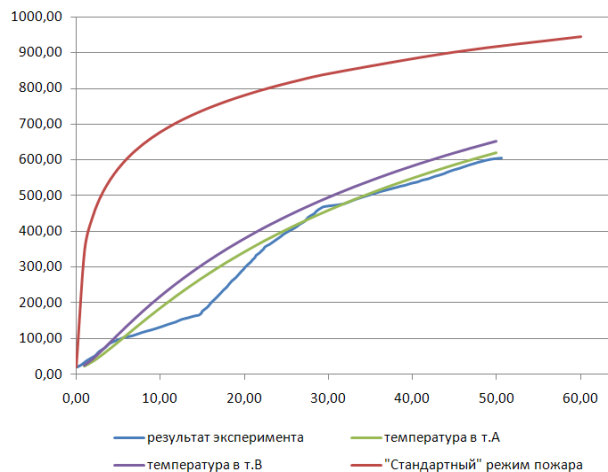


Рисунок 10 Сравнения расчета и натурального эксперимента

Материалы железобетонного перекрытия и их теплофизические свойства указаны в таблице 5.

Таблица 5.
Теплофизические свойства материалов

Характеристика	Сталь	Бетон
Коэффициент теплопроводности λ Вт/м·°С	$48-3,65 \cdot 10^{-2} \cdot T$	$0,62-3,3 \cdot 10^{-4} \cdot T$
Коэффициент теплоемкости C , Дж/°С	$0,44+4,8 \cdot 10^{-4} \cdot T$	$0,77+6,3 \cdot 10^{-4} \cdot T$
Коэффициент теплообмена для обогреваемой поверхности α_c , Вт/м ² ·°С	29	29
Плотность бетона, кг/м ³	7800	2300
Степень черноты	0,76	0,63

На обогреваемой поверхности прикладывалась температура по закону $T=345 \cdot \lg(0,133 \cdot \tau+1)+T_0$, где τ – время в минутах, T_0 – начальная температура. С необогреваемой стороны воздуху назначалась комнатная температура. Рассматривался стандартный фрагмент железобетонного перекрытия, показанный на рисунке 11.

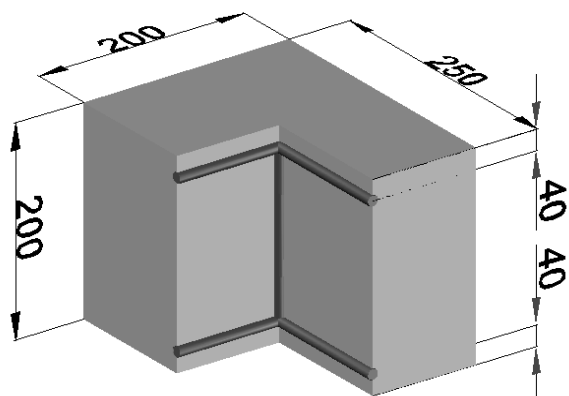


Рис. 11. Стандартный фрагмент железобетонного перекрытия с размерами

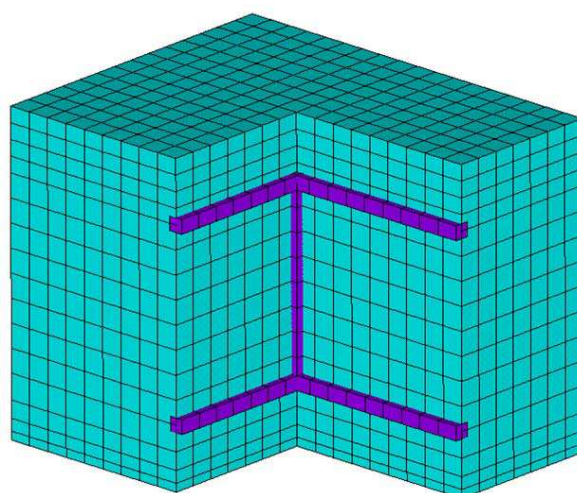


Рис. 12. КЭ-сетка стандартного фрагмента ж/б перекрытия с вырезом 1/4.

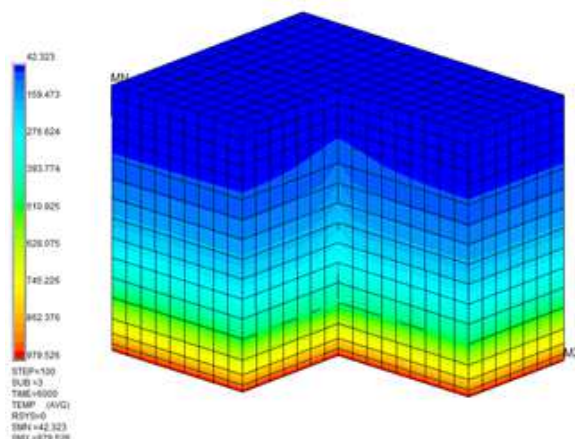


Рис. 13. Изополя температур стандартного фрагмента ж/б перекрытия с вырезом 1/4.

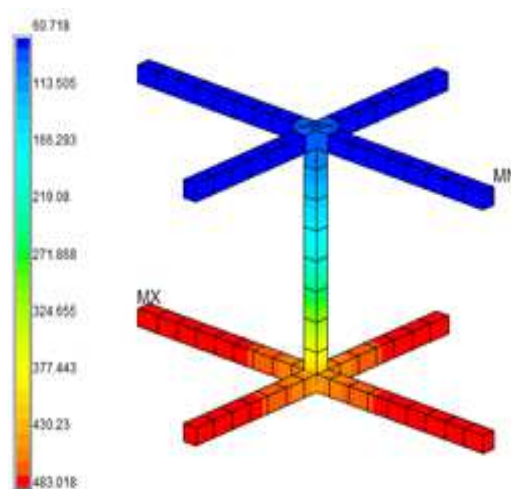


Рис. 14. Изополя температур на арматуре.

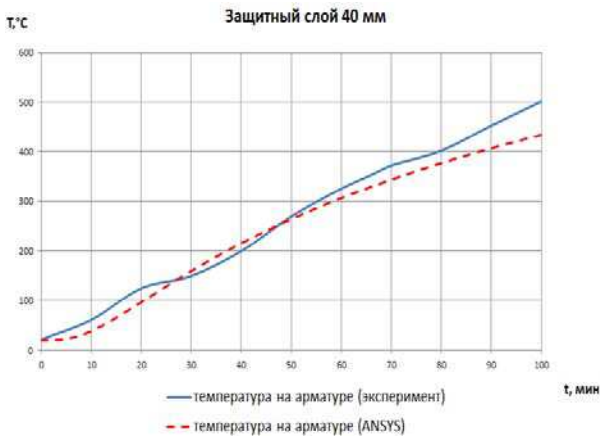


Рис. 15. График сравнения расчета и натурного эксперимента.

4. АПРОБАЦИЯ МЕТОДИКИ НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЗАЩИТНОЙ ОБОЛОЧКЕ АЭС ПРИ ПАДЕНИИ САМОЛЕТА

В рамках контракта [9] проводилось исследование температурных полей в защитном ж/б куполе АЭС при пожаре, вызванном разливом топлива при падении самолета (рисунок 16).

Приведены результаты решения нестационарной нелинейной температурной задачи. КЭ-модель учитывает удаление разрушенных элементов железобетона. Площадь пожара принимается соответствующей площади разлива топлива при разрушении топливных баков в крыльях.

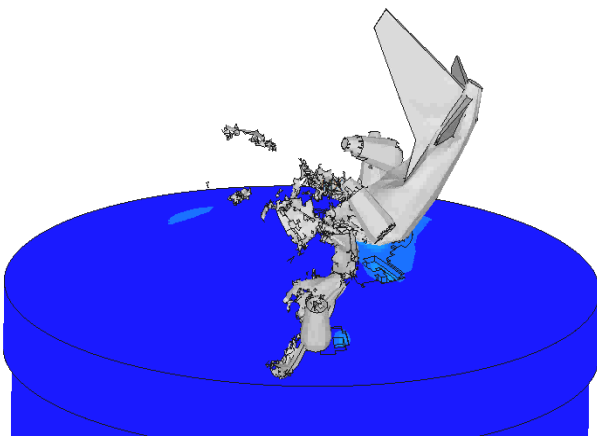


Рис. 16. Разрушение Boeing 707 при ударе в защитную оболочку АЭС (расчет в ПК LS-DYNA).

Температура горящего газа изменяется по стандартному закону [2] (см. рисунок 21) с максимальной температурой 1300°C и принята неизменной на всей поверхности. Основные результаты нестационарных расчетов полей температур показаны на рисунках 18-21.

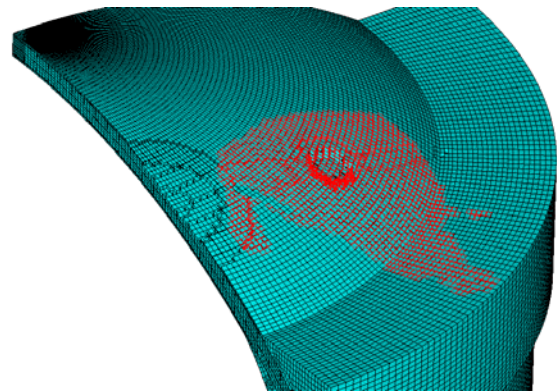


Рис. 17. Конечноэлементная модель с разрушенными элементами и пятном разлива топлива (показано красным цветом).

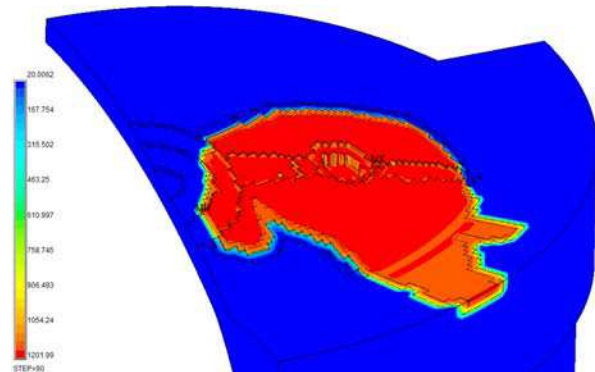


Рис. 18. Изополя температур (°C) в момент времени $t=90$ мин. $T_{max} = 1202^{\circ}\text{C}$.

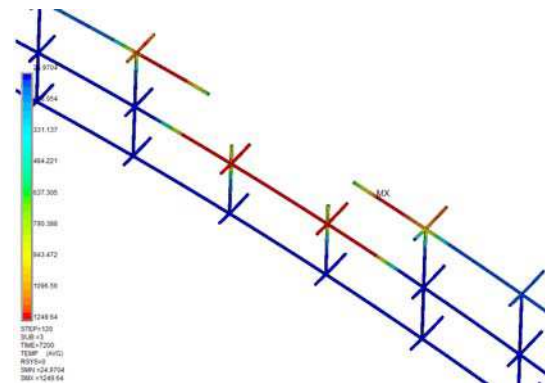


Рис. 19. Изополя температур на арматуре (°C) в момент времени $t=120$ мин.

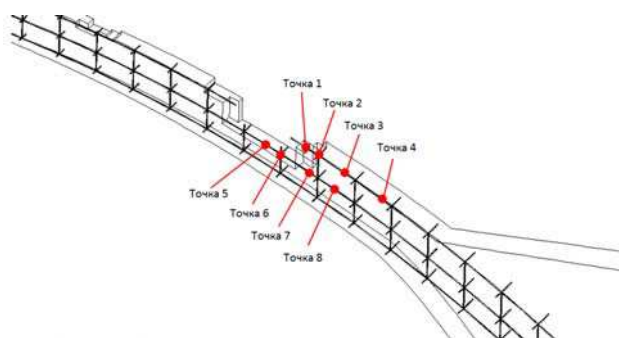


Рис. 20. Точки мониторинга температуры.

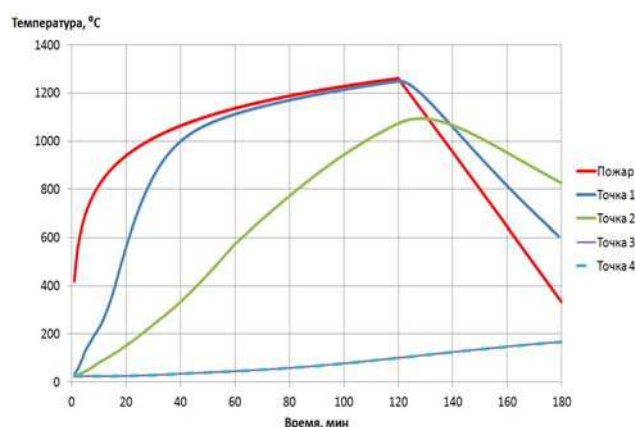


Рис. 21. График изменения температуры (°C) во времени в точках мониторинга.

5. ВЫВОДЫ

По результатам разработок и расчетных исследований, представленных в настоящей статье, можно сформулировать следующие выводы и рекомендации.

1. Разработана методика численного моделирования трехмерного температурного состояния строительных (металлических, бетонных и железобетонных) конструкций, базирующаяся на конечноэлементном решении нелинейных нестационарных задач теплопроводности.
2. Методика реализована в базовом конечноэлементном программном комплексе ANSYS Mechanical.
3. Разработан программный модуль TH_FIRE, позволяющий минимизировать временные затраты и ошибки при подготовке моделей для температурных расчетов строительных конструкций.

4. Методика верифицирована на представительном множестве тестовых задач, включая сравнение с натурными экспериментами.
5. Методика апробирована на трехмерном нелинейном расчете температурного состояния железобетонной защитной оболочки атомной станции, поврежденной при гипотетическом падении пассажирского самолета (с учетом разлива топлива).
6. Вычисленные поля температур могут использоваться для дальнейшего расчета огнестойкости конструкций (подробности – в следующей статье по огнестойкости).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пособие по определению пределов огнестойкости конструкций, пределов распространения огня и групп возгораемости материалов» в части железобетонных конструкций. – Москва: Стройиздат, 1982.
2. Методические рекомендации по расчету огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций. - Москва, 2000.
3. СТО 36554501-006-2006. Правила по обеспечению огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций. - Москва, 2006.
4. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-2: General rules - Structural fire design. English version.
5. ANSYS APDL 14.0 User's Guide. // Canonsburg, 2011.
6. Ройтман В.М. Инженерные решения по оценке огнестойкости проектируемых и реконструируемых зданий. – М.: Пожнаука, 2001. –383 с., ил.
7. Отчет о научно-исследовательской работе. Разработка рекомендаций по использованию химических добавок к тяжелому и особо тяжелому бетонам для ускорения производства бетонных работ и методики оценки эффективности их применения по теме: Исследование распределения температур и напряжений в выбранных конст-

рукциях АЭС при твердении бетонной смеси. Предложения по производству бетонных работ, М.: МГСУ, 2012.

8. Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS Mechanical Москва, М.: ЗАО НИЦ СтаДиО, НОЦ КМ МГСУ, 2009.
9. Разработка, верификация и апробация на объектах отрасли (проект ВВЭР-ТОИ) методик уточненного численного моделирования основных, особых и аварийных нагрузок и воздействий (ветровые и снеговые нагрузки, удар самолета, воздействия ударной волны, сейсмические воздействия, цунами, торнадо) на основные сооружения АЭС, Научно-технический отчет, М.: НОЦ КМ МГСУ, 2011.

Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey I. Dubinsky, PhD, Senior Researcher of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337;
Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey V. Scherbina, Engineer of Research & Education Center of Civil Engineering, Moscow State University of Computation Simulation, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337;
Russia, phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор, директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел/факс: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Дубинский Сергей Иванович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел/факс: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел/факс: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, DSc, Professor, Director Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337;

БИОЦИДНЫЙ ПОРТЛАНДЦЕМЕНТ С УЛУЧШЕННЫМИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

В.Т. Ерофеев, А.И. Родин, А.Д. Богатов, С.В. Казначеев, В.Ф. Смирнов, Е.Н. Сураева, М.А. Родина

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Описана актуальность разработки биоцидных цементов; предложен способ придания им фунгицидных и бактерицидных свойств; подтверждена эффективность применения разработанных в МГУ им. Н.П. Огарева биоцидных добавок; представлены результаты экспериментальных исследований физико-механических свойств цементов, модифицированных разработанными биоцидными добавками

Ключевые слова: микромицеты, биоцидный цемент, фунгицидные и бактерицидные свойства, физико-механические свойства

BIOCIDAL CEMENT WITH THE IMPROVED PHYSICOMECHANICAL PROPERTIES

V.T. Yerofeev, A.I. Rodin, A.D. Bogatov, S.V. Kaznacheev, V.F. Smirnov, E.N. Suraeva, M.A. Rodina

Mordovian State University of N.P. Ogaryov, Saransk, RUSSIA

ABSTRACT: The urgency of working out of biocidal cements is described in work; the way of giving cements fungicide and bactericidal properties is offered; efficiency of the application, of biocidal additives developed in the Mordovian State University of N.P. Ogaryov is confirmed; results of experimental researches of physico-mechanical properties of the cements modified by developed biocidal additives are presented

Key words: micromicetes, biocidal cement, fungicide and bactericidal properties, physico-mechanical properties

ВВЕДЕНИЕ

Производство строительных материалов – одна из самых перспективных сфер деятельности человека. Из широкой номенклатуры различных видов строительных материалов наибольший объем их производства приходится на бетоны и растворы, изготавливаемые на цементных связующих. Как у нас в стране, так и за рубежом интенсивно ведутся исследования по разработке новых видов цементов и совершенствованию известных. Так, к настоящему времени разработаны сульфатостойкие, гидрофобные, пластифицированные и другие виды портландцемента, выбираемые для применения с учетом экс-

плуатационных условий в зданиях и сооружениях. Взаимодействие строительных материалов, изделий и конструкций, изготовленных на вышеперечисленных связующих, с биологическими средами природного и техногенного происхождения сопровождается различными физико-химическими процессами. Долгое время факт биокоррозии в недостаточной степени учитывался при проектировании зданий и сооружений, а ведь при недостаточной стойкости к микробиологической коррозии снижается эксплуатационная надежность изделий и конструкций, ухудшается их внешний вид.

Под действием плесневых грибов пришли в негодность железобетонные конструкции на Кировоградском, Каменец-Подольском, Киевском и других мясокомбинатах [9]. Серьезное повреждение бетонных стен под действием микроорганизмов было обнаружено в туннеле Варшавского метро [3]. По этой же причине обрушился козырек станции метро «Сенная площадь» в г. Санкт-Петербурге [5]. Примеров можно привести еще очень много. Установлено, что в настоящее время более 50 % общего объема регистрируемых в мире повреждений связано с деятельностью микроорганизмов.

Ежегодный экономический ущерб от биоповреждений в мире достигает 40 млрд долларов, что составляет более 2 % от стоимости всей промышленной продукции, производимой человеком на планете. Ежегодно расширяется перечень заболеваний людей, вызванных микроскопическими организмами.

Придание портландцементу, сульфатостойким, гидрофобным, пластифицированным и другим цементам фунгицидных и бактерицидных свойств, а также создание специальных биоцидных цементов является важным направлением в современном строительном материаловедении.

Одним из наиболее эффективных и длительно действующих способов придания стойкости строительным материалам и конструкциям в условиях агрессивного воздействия микроорганизмов является применение биоцидных соединений. Последние вводятся в состав материала в процессе его изготовления или методом пропитки. Все известные биоцидные препараты по механизму воздействия на микроорганизмы делятся на 3 группы: окислители, фенолы, ПАВ (влияют на функцию пограничных структур клетки, вызывая ее повреждение); тяжелые металлы, азотистые соединения, спирты (нарушают функцию белков и ферментов); азотная кислота, окись этилена, некоторые антибиотики (реагируют с ДНК) [12].

Добиться бактерицидного и фунгицидного состава цементных композитов достаточно сложно. Из-за большого количества соединений, входящих в состав портландцемента, трудно предсказать дальнейший ход реакций цементных минералов с вводимыми биоцидными добавками. Кроме того, на стадии затворения цементные композиты обладают высоким уровнем рН, что делает бессмысленным применение большинства органических добавок. Единственным выходом из ситуации по приданию цементным композитам бактерицидных и фунгицидных свойств до недавнего времени было введение на стадии затворения малорастворимых токсичных препаратов. Желаемый результат был достигнут. Например, из результатов ряда исследований [1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13] следует, что применение модифицированных наполнителей в цементных композитах, обработанных раствором перманганата калия 7,5% концентрации, который придает материалу фунгицидные свойства, позволяет повысить грибостойкость материалов; введение в состав цементных композитов технического лигносульфоната СДБ, суперпластификатора на основе нафталинсульфокислоты (С-3), смолы нейтрализованной воздухововлекающей (СНВ) в количествах, не превышающих 1 % от массы цемента, влияет на устойчивость материалов к обрастанию микроскопическими грибами. Доказана эффективность использования катапина в качестве бактерицида для бетона; подтверждена эффективность введения в цементные растворы на основе портландцемента, кварцевого песка и арил-(арилокси)силанов в количестве 0,5–2,5 %, 0,05 % 1,2-дибром-2,4-дицианобутана, жидкого полиамина, древесно-смоляных масел, 3 % пиросульфата натрия от массы цементного связующего, придающих материалу биоцидные свойства; предложен в качестве биоцида для цементных композитов латекс АБП-40, который также придает материалу фунгицидные свойства.

Безусловно, исследователи добились положительных результатов, но параллельно с этим возник целый ряд новых проблем. Во-первых, некоторые из предложенных препаратов оказывают негативное влияние на физико-механические свойства материалов и изделий. Во-вторых, некоторые биоцидные препараты достаточно быстро вымываются из толщи бетона, что приводит к скорой потере материалом биоцидных свойств. В-третьих, токсическое воздействие, которое оказывают отдельные препараты на микроорганизмы, опасно для людей и животных. Существенным недостатком является и достаточно высокая стоимость некоторых видов добавок. Все приведенные факты подтверждают необходимость поиска новых решений по приданию цементным композитам биоцидных свойств.

На основе анализа сложившейся ситуации поставлена цель исследований, заключающаяся в разработке технологии получения биоцидного портландцемента, отличающегося экологичностью, высокими физико-механическими и эксплуатационными показателями и относительно низкой себестоимостью производства.

1. ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Разработанная нами технология получения биоцидного портландцемента основывается на совместном помоле цементного клинкера, двуводного гипса, разработанных нами биоцидных добавок (смесь простых, дешевых, нетоксичных, хорошо растворимых химических препаратов) и иных функциональных добавок.

Для подтверждения возможности использования разработанных в МГУ им. Н. П. Огарёва биоцидных добавок при производстве цементов, а также в цементных композитах для придания последним фунгицидных свойств нами был проведен следующий экс-

перимент. Клинкер цементного завода ОАО «Мордовцемент» минералогического состава $3\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2$ (59–63 %), $2\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2$ (16–18 %), $3\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3$ (6–7,5 %), $4\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ (11–12 %) размалывался до удельной поверхности частиц $3\ 000\ \text{см}^2/\text{г}$ совместно с двуводным гипсом ($\text{CaSO}_4\cdot 2\text{H}_2\text{O}$) второго сорта (ГОСТ 4013) Порецкого месторождения и разработанными нами комплексными добавками: добавкой № 1, придающей фунгицидные свойства материалу и повышающей его прочностные характеристики, и добавкой № 2, придающей фунгицидные свойства и понижающей водоотделение цемента. Содержание двуводного гипса варьировалось в пределах от 0 до 8 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера, содержание добавки № 1 – от 0 до 6 мас. ч., добавки № 2 – от 0 до 4,5 мас. ч. Исследование обрастаемости плесневыми грибами проводилось по ГОСТ 9.049–91 (метод 1 и метод 3) на образцах-балочках из цементного камня, полученного из раствора нормальной густоты, с размерами $1\times 1\times 3$ см. Идентификация микромицетов проводилась на основании их морфолого-культуральных особенностей с использованием определителей: К. Б. Рейпера, С. А. Тома (Raper, Thom, 1949); К. Б. Рейпера, Д. И. Феннела (Raper, Fennell, 1965); Н. М. Пидопличко (1971); М. А. Литвинова (1967); А. А. Милько (1974); Т. С. Кириленко (1977); К. Донша, В. Гамса (Donch, Gams, 1980); А. Ю. Лугаускаса, А. Н. Микульскене, Д. Ю. Шляужене (1987); В. И. Билая, Э. З. Коваль (1988).

Исследование основных физико-механических свойств цементов проводилось по ГОСТ 310.1–76, 310.3–76, 310.4–81, 310.6–85.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На первом этапе исследований была проведена оптимизация составов биоцидных портландцементов по показателям обрастаемости, а также определен видовой состав

микробиоты на поверхности цементного камня сразу после изготовления по стандартной технологии и после месяца испытанный по методу 3 ГОСТ 9.049–91. Результаты приведены в табл. 1 и 2.

Из представленных в табл. 1 данных следует, что материалы, изготовленные на связующем, содержащем 100 мас. ч. клинкера, 6 мас. ч. двуводного гипса и 4,5 мас. ч. добавки № 1, приобретают ярко выраженные фунгицидные свойства.

Идентификация микробиоты на поверхности цементного камня после 1 месяца испытаний по методу 3 показывает доминирование видов *Pen. cyclosporum* и *Asp. terreus* практически на всех составах. Именно эти грибы наиболее распространены на предприятиях перерабатывающей промышленности и относятся к числу особенно агрессивных вредителей строительных конструкций. Следует заметить, что на образцах составов № 16–20 обрастаемость данными микробиотами незначительная, а на образцах состава № 19 и вовсе отсутствует.

Цемент, изготовленный на связующем, содержащем 100 мас. ч. клинкера, 0–8 мас. ч. двуводного гипса и 3–4,5 мас. ч. добавки № 2, также приобретает ярко выраженные фунгицидные свойства (см. табл. 2).

Идентификация микробиоты на поверхности цементного камня, приготовленного по стандартной технологии, говорит о том, что уже сразу после изготовления строительные композиты в толще и на поверхности имеют огромное количество разнообразных микроорганизмов. При использовании таких материалов в условиях, благоприятных для данных микробиот, потенциальная возможность быстрого разрастания плесневых грибов огромная. Необходимо заметить, что потенциальный видовой состав микроорганизмов на поверхности цементного камня на биоцидном портландцементе (составы № 11–20), изготовленном с применением добавки № 2, незначителен по сравнению с другими составами.

Второй этап исследований заключался в определении влияния разработанных нами

биоцидных добавок на основные физико-механические характеристики цемента.

Испытание по ГОСТ 310.3–76. Нормальная плотность портландцемента, изготовленного с применением добавки № 1, не изменяется от количественного содержания добавки и двуводного гипса и для всех 25 составов, представленных в табл. 1, равна 26 %. Иными словами, добавка № 1 не оказывает влияния на реологические свойства модифицированного портландцемента.

Нормальная плотность портландцемента, изготовленного с применением добавки № 2 (см. табл. 2), для составов № 1–5 составила 26 %, для составов № 6–10 – 28 %, для составов № 11–15 – 27,5 % и для составов № 16–20 – 26,5 %. Все говорит о том, что при небольшом содержании добавки № 2 происходит ухудшение реологических свойств цемента. Образцы-лепешки всех составов для определения равномерности изменения объема выдержали испытания по ГОСТу.

Сроки схватывания портландцемента, модифицированного добавкой № 1, отвечают требованиям ГОСТ 310.3–76, кроме составов № 9, 10, 16, 17, 21 и 22. Характерной особенностью его твердения является то, что с увеличением содержания добавки № 1 от 3 до 4,5 мас. ч. и $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ от 4 до 8 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера временные рамки от начала до конца схватывания практически идентичны тем, что характерны для рядового портландцемента (табл. 3). Все это говорит о том, что возникновение каких-либо технологических трудностей применения на строительной площадке портландцемента, модифицированного добавкой № 1 маловероятно. Сроки схватывания портландцемента, модифицированного добавкой № 2, также отвечают требованиям ГОСТ 310.3–76, кроме составов № 1, 11, 12, 16, 17, 18, 19. Особенность его твердения заключается в том, что с увеличением содержания добавки более 4 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера и при любом предельно допустимом содержании $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ время начала схватывания цемента выходит за рамки норм, приведенных в ГОСТ 310–3.76 (табл. 4).

Таблица 1

Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и добавки № 1 на обрастаемость цементного камня и видовой состав доминирующих микромицетов

№ состава	Содержание двуводного гипса, мас. ч.	Добавка № 1, мас. ч.	Оценка роста грибов, баллы		Характеристика по ГОСТ 9.049–91	Идентификация доминирующих микромицетов на поверхности цементного камня после 1 месяца испытаний по методу 3
			Метод 1	Метод 3		
1	0	0	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
2	2	0	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
3	4	0	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. niger</i>
4	6	0	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
5	8	0	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i>
6	0	1,5	2	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Pen. funiculosum</i>
7	2	1,5	2	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
8	4	1,5	0	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Pen. funiculosum</i>
9	6	1,5	2	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
10	8	1,5	2	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i> , <i>Paecilomyces variotii</i>
11	0	3	0	2	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i>
12	2	3	2	3	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Pen. funiculosum</i>
13	4	3	2	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i>
14	6	3	2	4	Грибостоек	<i>Paecilomyces variotii</i> , <i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i>
15	8	3	2	4	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Paecilomyces variotii</i>
16	0	4,5	0	3	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. cycloporium</i>
17	2	4,5	0	3	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. cycloporium</i>
18	4	4,5	0	3	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i> , <i>Asp. niger</i>
19	6	4,5	0	0 (0)	Фунгициден	–
20	8	4,5	0	3	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. funiculosum</i>
21	0	6	1	3	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i> , <i>Asp. terreus</i>
22	2	6	1	4	Грибостоек	<i>Pen. cycloporium</i>
23	4	6	1	3	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. cycloporium</i>
24	6	6	0	4	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. cycloporium</i>
25	8	6	2	4	Грибостоек	<i>Asp. terreus</i> , <i>Pen. cycloporium</i>

Таблица 2

Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и добавки № 2 на обрастаемость цементного камня и видовой состав микромицетов

№ состава	Содержание двуводного гипса, _асс. ч.	Добавка № 2, _асс. ч.	Оценка роста грибов, баллы		Характеристика по ГОСТ 9.049–91	Идентификация микромицетов на поверхности цементного камня сразу после изготовления по стандартной технологии
			Метод 1	Метод 3		
1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	4	Грибостоек	Paecilomyces variotii, P. claviforme, A. ustus, A. terreus
2	2	0	0	4	Грибостоек	A. niger, P. urticae, A. ustus, P. lanosum
3	4	0	0	4	Грибостоек	A. niger, Chaetomium dolichotrichum, Chaetomium bostrychodes, A. ustus, P. meleagrimum, P. urticae, P. canescens, A. terreus, P. nigricans, P. claviforme, A. brevipes
4	6	0	0	4	Грибостоек	A. niger, A.ustus, Chaetomium dolichotrichum, Chaetomium globosum, A. Terreus, A.versicolor, P. Lanosum, A. Brevipes, дрожжи
5	8	0	0	4	Грибостоек	P. chrysogenum, P. meleagrimum, P. canescens, P. urticae, P. nigricans, A. ustus, A.oryzae, Chaetomium globosum, Cladosporium sphaerospermum, Alternaria brassicae, A. various, A. brevipes, дрожжи
6	0	1,5	0	3	Грибостоек	A. ustus, P. notatum, Cladosporium herbarum, A. clavatus, P. urticae, A. terreus
7	2	1,5	0	3	Грибостоек	P. claviforme, A. ustus, P. urticae, A. terreus
8	4	1,5	0	3	Грибостоек	Chaetomium dolichotrichum, A. Fumigatus, A. Ustus, Verticillium nubilum, Mucor circinelloides, P. Urticae, Verticillium album
9	6	1,5	0	3	Грибостоек	P. claviforme, P.cyclopium, P. canescens, A. ustus, P. meleagrimum, Cladosporium resinae
10	8	1,5	0	3	Грибостоек	A. ustus, A. terreus, Alternaria pluriseptata, A. niger, P. urticae, P. claviforme, бактерии

1	2	3	4	5	6	7
11	0	3	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>P. notatum</i> , <i>P. canescens</i> , <i>A. ustus</i> , <i>P. oxalicum</i> , <i>P. claviforme</i> , <i>Verticillium album</i> , <i>A. terreus</i>
12	2	3	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>A. ustus</i> , <i>A. terreus</i>
13	4	3	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>P. chrysogenum</i> , <i>P. notatum</i> , <i>A. ustus</i> , <i>P. meleagrinum</i> , <i>P. claviforme</i>
14	6	3	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>P. claviforme</i> , <i>A. terreus</i> , <i>A. ustus</i> , <i>Fusarium moniliforme</i> , бактерии
15	8	3	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>Fusarium moniliforme</i> , <i>P. claviforme</i> , <i>A. terreus</i>
16	0	4,5	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>Mucor corticola</i> , <i>A. terreus</i>
17	2	4,5	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>P. claviforme</i> , <i>A. ustus</i> , <i>A. terreus</i>
18	4	4,5	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>P. canescens</i> , <i>P. meleagrinum</i> , <i>P. urticae</i> , <i>P. claviforme</i>
19	6	4,5	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>A. clavatus</i> , <i>A. ustus</i>
20	8	4,5	0	0 (40 мм)	Фунгициден	<i>A. niger</i> , <i>A. ustus</i> , <i>P. claviforme</i>

Испытание по ГОСТ 310.4–81. Экспериментальные результаты влияния биоцидной добавки № 1 на прочностные характеристики модифицированного портландцемента представлены на рис. 1 и в уравнениях (1) и (2).

С применением биоцидной добавки № 1 в дозировках от 1 до 3,5 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при содержании в цементе 5–8 мас. ч. CaSO₄·2H₂O прочность цемента при сжатии увеличивается на 50 %. Иными словами, при тех же энергозатратах, что и на производство портландцемента М500, возможно получение цемента М700.

Согласно приведенным выше данным, биоцидность портландцемента достигается при содержании добавки № 1 в цементе в количестве 4,5 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при содержании в цементе 6 мас. ч. CaSO₄·2H₂O. Анализируя рис.1, а и уравнение (1), можно сказать, что биоцидный портландцемент имеет повышенную (на 20 %) прочность при сжатии, по сравнению с рядовым портландцементом. При тех же энергозатратах, что и

на производство портландцемента М500, с применением этой добавки возможно получение биоцидного портландцемента М600.

$$\begin{aligned}
 Y = & 1,242 + 0,379X_1 - \\
 & 0,644X_2 + 0,422X_1^2 + 0,277X_1X_2 - \\
 & 0,485X_2^2 - \\
 & -0,197X_1^4 + 0,209X_1^2X_2 - \\
 & 0,028X_1X_2^2 + 0,502X_2^4 - 0,408X_1^7 - \\
 & 0,267X_1^4X_2 - \\
 & -0,031X_1^2X_2^2 - 0,088X_1X_2^4 + 0,129X_2^7
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Анализируя воздействие биоцидной добавки на реологические свойства, кинетику твердения модифицированного портландцемента, а также зная состав добавки, можно предположить, что механизм действия добавки № 1 на прочностные характеристики цемента заключается в положительном действии сульфатной коррозии на стадии затворения цементного теста.

Таблица 3

Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
и добавки № 1 на сроки схватывания
модифицированного портландцемента

№ состава	Сроки схватывания цемента, ч-мин	
	начало	конец
1	1-00	2-45
2	3-35	4-40
3	3-45	4-50
4	4-25	5-10
5	5-10	5-40
6	1-25	3-25
7	3-45	6-00
8	8-30	9-20
9	9-20	10-10
10	9-55	10-30
11	0-55	1-25
12	1-30	2-40
13	3-40	4-35
14	7-05	7-55
15	8-05	8-45
16	0-35	1-00
17	0-40	1-10
18	1-00	2-20
19	3-00	4-30
20	3-55	5-55
21	0-30	0-55
22	0-35	1-05
23	0-55	1-40
24	2-45	3-20
25	3-30	4-30

В результате чего образование гидросульфатоалюмината кальция, который, как известно, способен увеличиться до 2,86 раза своего объема, происходит с меньшим негативным воздействием на структуру цементного камня. Данное предположение подтверждается и прочностными показателями модифицированного портландцемента при изгибе.

Таблица 4

Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
и добавки № 2 на сроки схватывания
модифицированного портландцемента

№ состава	Сроки схватывания цемента, ч-мин	
	начало	конец
1	0-35	2-00
2	3-15	4-05
3	3-20	4-20
4	3-00	4-20
5	3-45	5-00
6	0-45	1-20
7	0-55	1-35
8	2-35	4-15
9	6-25	7-40
10	6-05	7-10
11	0-25	1-15
12	0-30	1-20
13	0-55	1-55
14	2-05	4-30
15	5-45	7-40
16	0-10	0-15
17	0-10	0-15
18	0-15	0-50
19	0-40	1-50
20	1-30	3-30

$$\begin{aligned}
 Y = & 1,197 + 0,119X_1 - 0,180X_2 - \\
 & 0,053X_1^2 + 0,128X_1X_2 - 0,697X_2^2 - \\
 & - 0,046X_1^4 + 0,092X_1^2X_2 - \\
 & 0,024X_1X_2^2 + 0,260X_2^4 + 0,111X_1^7 - \\
 & 0,037X_1^4X_2 - \\
 & - 0,116X_1^2X_2^2 - 0,170X_1X_2^4 + 0,562X_2^7
 \end{aligned} \quad (2)$$

Прочность цемента при изгибе, как оказывают рис.1, б и уравнение (2), увеличивается при тех же дозировках добавки № 1 и $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, которые положительно повлияли и на прочность цемента при сжатии. Максимальное значение прочности модифицированного портландцемента при изгибе на 25–30 % больше прочности рядового портландцемента.

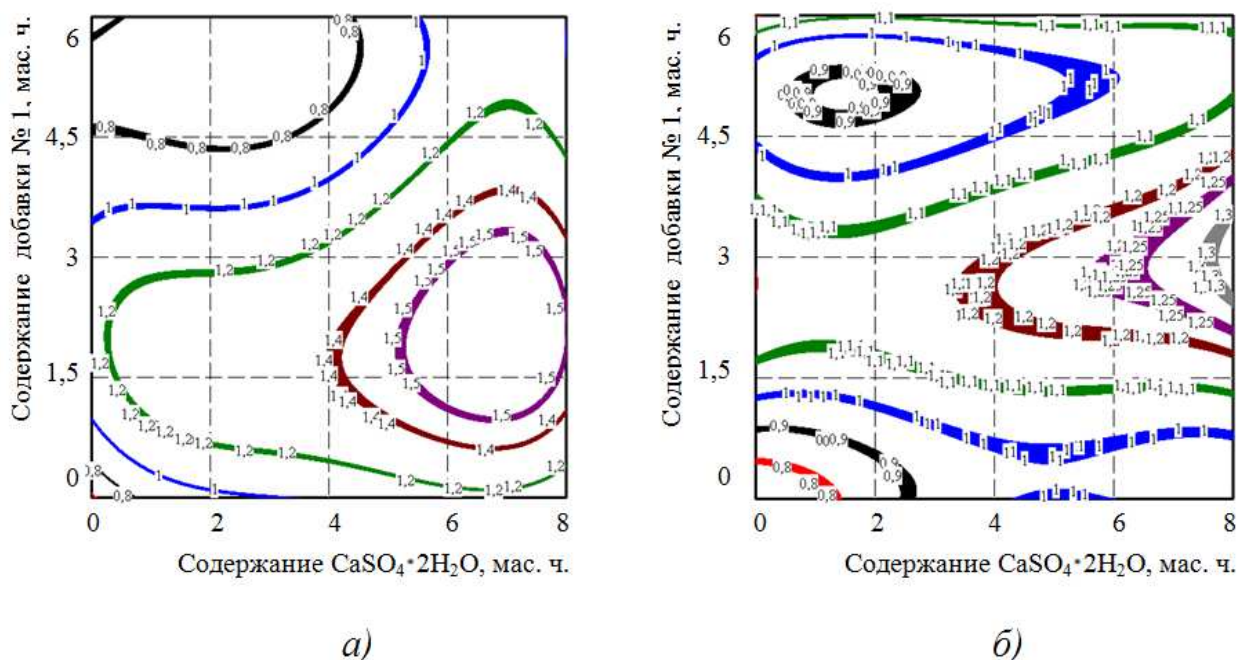


Рис. 1. Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и добавки № 1 на прочность цемента: а – при сжатии; б – при изгибе

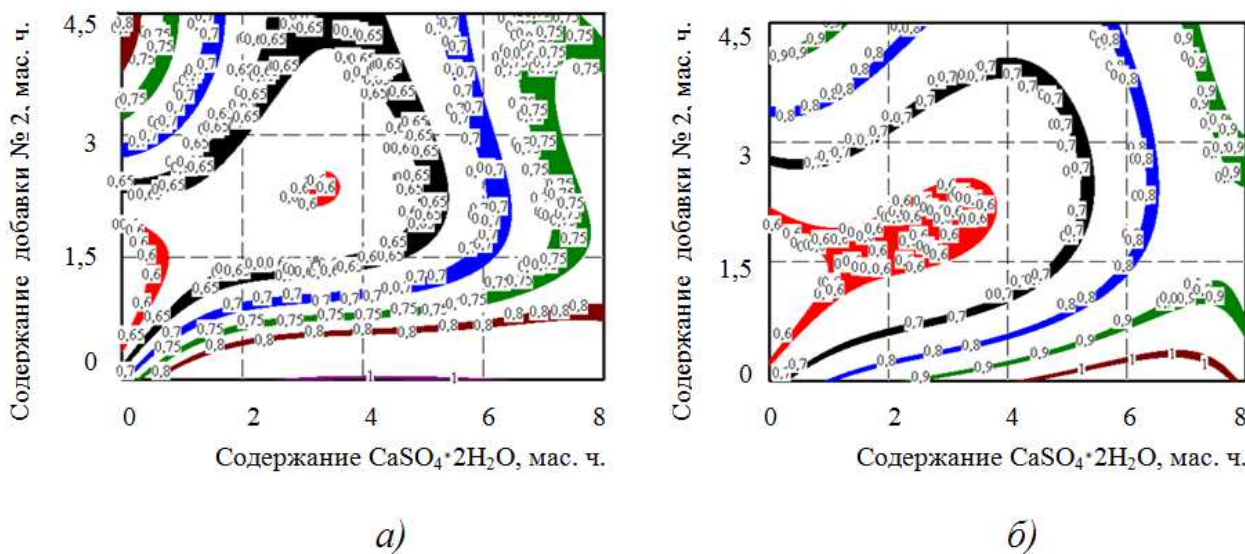
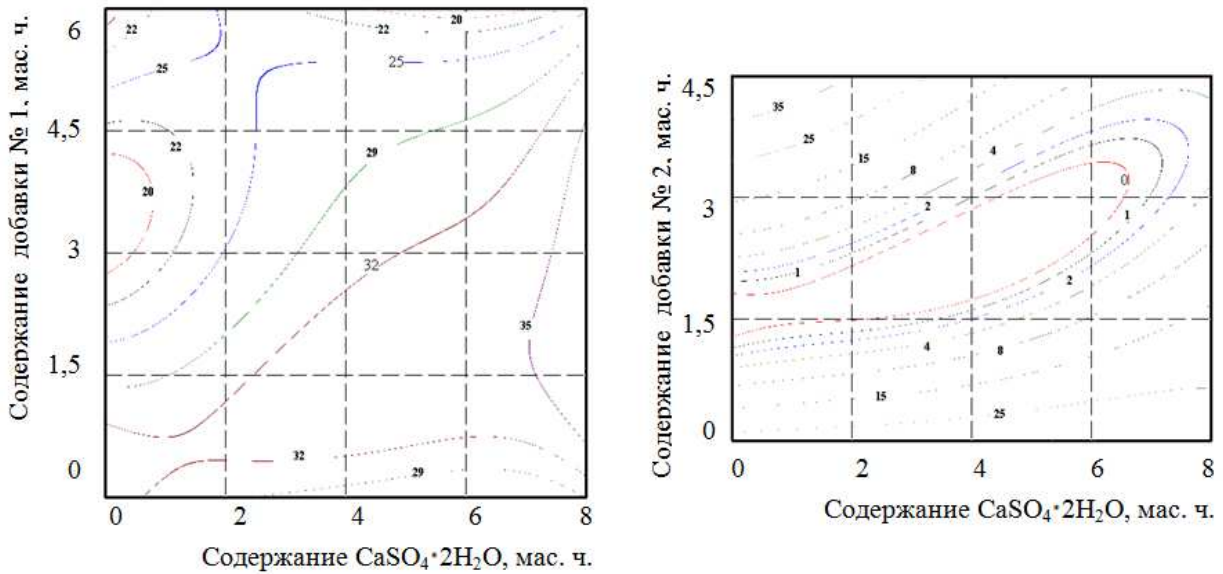


Рис. 2. Влияние содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и ДОБАВКИ №2 на прочность цемента: а – при сжатии; б – при изгибе

Данное значение достигается введением биоцидной добавки № 1 в количестве 2–4 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при содержании в цементе 6–8 мас. ч. $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Прочность биоцидного портландцемента при изгибе больше прочности рядового портландцемента на 10 %.

Экспериментальные результаты влияния биоцидной добавки № 2 на прочностные характеристики модифицированного портландцемента представлены на рис. 2 и в уравнениях (3) и (4).



а)

б)

Рис. 3. Водоотделение цемента (%) в зависимости от содержания:

а – $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и добавки № 1; б – $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и добавки № 2

$$\begin{aligned}
 Y = & 0,625 + 0,058X_1 + 0,054X_2 + 0,206X_1^2 - \\
 & 0,018X_1X_2 + 0,050 \cdot X_2^2 - \\
 & -0,034X_1^4 + 0,113X_1^2X_2 + 0,017X_1X_2^2 - 0,218X_2^4 - \\
 & 0,085X_1^7 - 0,150X_1^4X_2 - \\
 & -0,203X_1^2X_2^2 + 0,085X_1X_2^4 + 0,172 \cdot X_2^7
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

Как видно из рис. 2 и уравнений (3) и (4), биоцидная добавка № 2 несколько снижает прочностные показатели портландцемента. Фунгицидные свойства достигаются при содержании в нем данной добавки в количестве 3–4,5 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при любом предельно допустимом содержании $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Получить биоцидный портландцемент, модифицированный добавкой № 2 марки не менее М400 можно при содержании $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ 6–8 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера.

$$\begin{aligned}
 Y = & 0,640 + 0,092X_1 + 0,148X_2 + 0,379X_1^2 - \\
 & 0,245X_1X_2 + 0,195X_2^2 - \\
 & -0,007X_1^4 + 0,148X_1^2X_2 - 0,008X_1X_2^2 - 0,224X_2^4 - \\
 & 0,197X_1^7 + 0,049X_1^4X_2 - \\
 & -0,204X_1^2X_2^2 + 0,115X_1X_2^4 + 0,073X_2^7
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

Проанализировав влияние данной добавки на реологические характеристики портландцемента, а также кинетику его твердения, мы пришли к выводу, что снижение прочности в большей степени объясняется увеличением количественного содержания воды затворения. Необходимо отметить, что, в отличие от биоцидной добавки № 1, добавка № 2 разрабатывалась с целью улучшения такого показателя цемента, как водоотделение, которое, как известно, напрямую влияет на прочностные показатели строительных растворов различного назначения. *Испытание по ГОСТ 310.6–85.* Экспериментальные показатели влияния биоцидных добавок на водоотделение модифицированного портландцемента представлены на рис. 3 и в уравнениях (5) и (6).

$$\begin{aligned}
 Y = & 30,808 + 7,096X_1 - \\
 & -7,527X_2 - 8,969X_1^2 + 3,553X_1X_2 + \\
 & + 2,842X_2^2 + 2,025X_1^4 + 2,142X_1^2X_2 - \\
 & -12,817X_1X_2^2 + 4,161X_2^4 + 6,372X_1^7 - \\
 & 0,372X_1^4X_2 + 9,224X_1^2X_2^2 - \\
 & -4,252 \cdot X_1X_2^4 - 9,721X_2^7
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

Согласно экспериментальным данным, представленным на рис. 3, а и в уравнении (5), водоотделение портландцемента, модифицированного биоцидной добавкой № 1, уменьшается с увеличением ее содержания при незначительном увеличении содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ в цементе. Увеличение водоотделения, наоборот, происходит с ростом содержания $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ при незначительном увеличении содержания добавки № 1 в цементе.

Водоотделение биоцидных составов портландцемента, модифицированных добавкой № 1, составляет 27–31 %.

$$\begin{aligned}
 Y = & 0,616 - 10,241X_1 + 21,441X_2 + \\
 & + 16,891X_1^2 - 44,377X_1X_2 + 38,903X_2^2 + \\
 & + 3,794X_1^4 + 0,376X_1^2X_2 + 5,173X_1X_2^2 - \\
 & - 18,192X_2^4 - 7,335X_1^7 + 6,926X_1^4X_2 - \\
 & - 13,245X_1^2X_2^2 + 35,900X_1X_2^4 - 3,114X_2^7
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Низкое водоотделение портландцемента достигается введением при помоле разработанной биоцидной добавки № 2. Согласно экспериментальным данным, представленным на рис. 3, б и в уравнении (6), при содержании данной добавки в количестве 0,5–4 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при любом предельно допустимом содержании $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ водоотделение цемента находится в пределах допустимых 25 %. При содержании данной добавки 1–3,5 мас. ч. на 100 мас.ч. клинкера, возможно добиться прекращения водоотделения. Данное явление объясняется особенностями химических соединений, входящих в состав биоцидной добавки № 2.

ВЫВОДЫ

Подводя итог вышеизложенного, можно сказать, что разработан эффективный метод придания цементным композитам бактерицидных и фунгицидных свойств.

Биоцидный портландцемент повышенной прочности (М600) содержит добавку № 1 в количестве 4,5 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при содержании 6 мас.ч. $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Биоцидный портландцемент с пониженным водоотделением (0–4%) содержит добавку № 2 в количестве 3–4 мас. ч. на 100 мас. ч. клинкера при содержании 6–7 мас. ч. $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Новый строительный материал – биоцидный портландцемент показал улучшение физико-механических и эксплуатационных характеристик цементного камня. Отмечается положительный экономический эффект от его производства и применения. А главное, сопротивление цементных композитов биокоррозии теперь стало абсолютно безвредным для человека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончаров В.В.** Биоцидные строительные растворы и бетоны // Бетон и железобетон. – 1984. – № 3.
2. **Ерофеев В.Т.** Биодegradация и биосопротивление цементных бетонов / В.Т. Ерофеев, Е.А. Морозов, А.Д. Богатов [и др.] // Биоповреждения и биокоррозия в строительстве: материалы Междунар. науч. техн. конф. – Саранск, 2004. – С. 135-140.
3. **Заботин К.П.** Полимерные оловоорганические биоциды и окружающая среда / К. П. Заботин, А. Н. Шмелева, З. Г. Чернокурова [и др.] // IV Всесоюзная конференция по биоповреждениям: тез. докл. Н. Новгород, 1991. – С. 29-30.
4. **Иванов Ф.М.** Защита железобетонных транспортных сооружений от коррозии / Ф.М. Иванов – М.: Транспорт, 1968. – 175 с.
5. **Карпенко Н.И.** Проблемы биоповреждений и биозащиты строительных материалов, изделий и конструкций / Н.И. Карпенко, В.Т. Ерофеев, В.Ф. Смирнов [и др.] // Биоповреждения и биокоррозия

- в строительстве: материалы Междунар. науч. техн. конф. – Саранск, 2004. – С. 6-11.
6. **Ларионов Н.М.** Биостойкий бетон на основе химической добавки и активированной воды затворения : дис. ... канд. техн. наук / Н. М. Ларионова. – Л., 1990. – 179 с.
 7. **Морозов Е.А.** Исследование устойчивости цементных композитных материалов к действию микромицетов / Е.А. Морозов, Д.А. Губанов, В.Т. Ерофеев // Биоповреждения и биокоррозия в строительстве: материалы Междунар. науч. техн. конф. – Саранск, 2006. – С. 175–177.
 8. **Рогинская Е.Л.** Биоцидные бетоны для животноводческих помещений: дис. ... канд. техн. наук / Е. Л. Рогинская. – М. : МИСИ, 1987. – 171 с.
 9. **Савченко-Бельская М.А.** Прочность и долговечность железобетонных конструкций в агрессивных микробиологических средах // Повышение надежности и долговечности машин и сооружений : тез. докл. 4-й респ. науч. техн. конф. : в 2 ч. – Киев, 1991. – Ч. 2. С. 68-69.
 10. **Серебренник В.А.** Бетоны пониженной проницаемости, стойкие к микробиологической коррозии: дис. ... канд. тех. наук / В. А. Серебренник. – М. : МИСИ, 1989. – 204 с.
 11. **Соломатов В.И.** Биологическое сопротивление материалов / В.И. Соломатов, В.Т. Ерофеев, В.Ф. Смирнов [и др.]. – Саранск: Изд-во Мордов. унта., 2001. – 196 с.
 12. **Чурбанова И.Н.** Микробиология: Учеб. для вузов / И.Н. Чурбанова. – М.: Высш. шк., 1987. – 237 с.
 13. **Шпынова Л.Г.** Бактерицидный бетон / Л.Г. Шпынова, И.А. Иваськевич. // Бетон и железобетон. – 1985. – № 8. – С. 29-30.

и строительства, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный строитель России, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Лауреат государственной премии Российской Федерации, Иностраннный член академии строительства Украины, член Научного Совета РАН по биоповреждениям,

Ерофеев Владимир Трофимович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительного производства Пензенского государственного университета архитектуры

СУХИЕ СТРОИТЕЛЬНЫЕ СМЕСИ, МОДИФИЦИРОВАННЫЕ БИОЦИДНОЙ ДОБАВКОЙ

*В.Т. Ерофеев, Е.Н. Сураева, А.Д. Богатов, С.В. Казначеев,
В.Ф. Смирнов, А.И. Родин*

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются вопросы получения составов сухих строительных смесей, обладающих биоцидными свойствами. Показано, что введением в составы добавки (натрий сернокислый) достигается получение материалов с грибостойкими и фунгицидными свойствами. Методом математического планирования эксперимента проведена оптимизация содержания добавки в композитах различной плотности и композициях различной подвижности. Разработанные составы рекомендуется применять в зданиях и сооружениях с биологически активными средами.

Ключевые слова: сухие смеси, биоповреждения, натрий сернокислый, биостойкость

THE DRY BUILDING MIXES MODIFIED BY A BIOCIDAL ADDITIVE

*V.T. Yerofeev, E.N. Suraeva, A.D. Bogatov, S.V. Kaznacheev, V.F. Smirnov,
A.I. Rodin*

Mordovian State University of N.P. Ogaryov, Saransk, RUSSIA

ABSTRACT: This article examines the questions of optimization of the dry building mixes with biocidal properties. It is proved that the additive Na_2SO_4 allows to obtain the materials with fungus-proof and fungicidal properties. The optimization of the additive's content in the composites of different densities and mobility is carried out by dint of the mathematical planning's method. It is recommended to use the obtained compositions in building of the structures with biologically active media.

Key words: dry mixes, biocorrosion, Glauber salt, bioresistance

Совершенствование технологий в строительстве, обеспечение долговечности и эксплуатационной надежности конструкций предъявляют все более высокие требования к качеству материалов, применяемых при возведении зданий и сооружений. В настоящее время цемент служит основным связующим при изготовлении бетонов и композиционных материалов другого типа для строительства. Он интенсивно используется также в качестве вяжущего в сухих строительных смесях, которые считаются наиболее эффективными материалами по сравнению с традиционными цементно-песчаными растворами централизованного приготовления.

На сегодняшний день сухие смеси являются продуктом наукоемких технологий. Их применение позволяет заметно увеличить производительность труда, получить гораздо более качественные результаты, которых трудно достичь, используя традиционные цементно-песчаные композиты. В зависимости от их назначения и свойств при изготовлении на заводе можно легко менять состав и характеристики строительных смесей с помощью введения комплекса различных добавок. При проведении ремонтно-восстановительных и отделочных работ в биологически активных средах целесообразно и практично применять биоцидные сухие

строительные смеси. В современном мире проблема исследования биокоррозии и биосопротивления материалов и конструкций является исключительно актуальной, так как процессы биоразрушения прогрессируют с каждым годом. Биоповреждения вызывают различные живые организмы – от бактерий и грибов до растений и животных. Однако основной вред, по мнению многочисленных авторов, наносят именно микроорганизмы [3, 4]. Степень их разрушительного воздействия определяется физическими, химическими, биологическими и другими факторами [3]. При благоприятных для развития микроорганизмов условиях разрушительные процессы начинаются с переноса их на поверхность изделий, адсорбции, образования и роста микроколоний за счет разрастания гифов и спор, сопровождающегося выделением продуктов метаболизма и их накоплением. Вследствие этого строительные материалы разрушаются значительно быстрее расчетных норм. В биозараженных зданиях и сооружениях, наряду со снижением срока службы строительных конструкций, нарушается экологическая ситуация. Микроорганизмы, содержащиеся в помещениях, посредством движения воздушных потоков попадают в легкие человека, оседают на коже, вызывая различные болезни [4]. Негативное воздействие микроорганизмов предотвращается различными способами: обеззараживанием поверхностей материалов и конструкций, введением биоцидных добавок в состав композиционных материалов и т.д. [3]. Несмотря на значительный ущерб, наносимый биологическими разрушениями, налицо актуальность исследований по разработке сухих строительных смесей с биоцидными свойствами. Сухие смеси, модифицированные биоцидными добавками, могут применяться при получении растворных смесей для защиты конструкций зданий и сооружений от заражения биологическими организмами (плесенью, грибом, лишайником, водорослями и т.п.), которые развиваются при повышенной влажности и положительных

температурах и вызывают биокоррозию строительных конструкций.

Первоначальная задача наших исследований заключалась в выявлении изменения свойств цементно-песчаного раствора от количества вводимой биоцидной добавки, в качестве которой служил натрий сернокислый (безводный). При выполнении исследований составы с добавкой изготавливались с соблюдением условия равной подвижности с контрольным составом для достижения одинаковой удобоукладываемости. За контрольные образцы были приняты цементно-песчаные растворы состава Ц:П=1:3 при В/Ц=0,46 (расплыв по вискозиметру 90 мм) на ПЦ М400 и Ц:П=1:3 при В/Ц=0,63 (расплыв 92 мм) на ПЦ М500.

Испытаниями установлено, что водопоглощение модифицированных составов цементно-песчаных растворов снижается на 1,7–2,8 % для составов с цементом М400, на 0,5–1,4 % – с цементом М500.

Исследования биостойкости проводились в средах мицелиальных грибов согласно ГОСТ 9.049–91 двумя методами (1 и 3) [1]. Методом 1 (без дополнительных источников углеродного и минерального питания) устанавливали, является ли материал питательной средой для микромицетов. Методом 3 (на твердой питательной среде Чапека–Докса) определяли наличие у материала фунгицидных свойств и влияние внешних загрязнений на его грибостойкость. Результаты испытаний приведены в табл.1. Испытания показали, что введение в состав раствора добавки в пределах 2,5–5 мас. ч. на 100 мас. ч. цемента придает ему грибостойкие свойства, а при более 5 мас. ч. проявляются уже и фунгицидные свойства.

Механические испытания образцов показали, что добавка влияет на физико-механические свойства цементно-песчаного раствора, модифицируемого натрием сернокислым. Полученные результаты (рис.1) показывают, что при введении добавки от 2,5 до 5 мас. ч. на 100 мас. ч. цемента прочность составов увеличивается на 18–35 %.

Таблица 1

Результаты исследования цементных композитов с добавкой (натрий сернокислый) на биостойкость

Марка цемента	Содержание добавки, мас. ч. на 100 мас. ч. цемента	Устойчивость к действию грибов в баллах по методу		Радиус зоны ингибирования, мм	Характеристика по ГОСТ 9.049–91
		1	3		
M400	0	3	5	-	Негрибостойкий
- " -	2,5	1	2	-	Грибостойкий
- " -	5	0	0	18	Фунгицидный
- " -	7,5	0	0	20	Фунгицидный
M500	0	3	4	-	Негрибостойкий
- " -	2,5	2	0	12	Грибостойкий
- " -	5	1	0	12	Фунгицидный
- " -	7,5	0	0	9	Фунгицидный

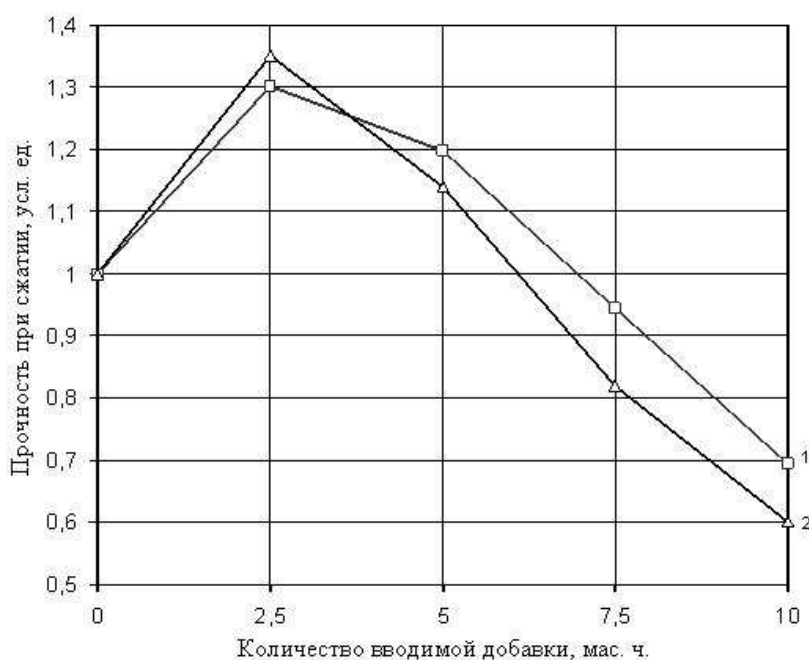


Рис. 1. Изменение относительной прочности цементных композитов от количества введенной добавки (натрия сернокислого) и марки цемента: 1 – цемент M500, 2 – цемент M400.

Введение добавки в количестве более 7 мас. ч. на 100 мас. ч. цемента приводит к снижению прочностных показателей.

В результате проведенных исследований было установлено, что введение биоцидной добавки – натрия сернокислого в цементные составы положительно влияет на биостойкость цементных композитов и на их прочностные показатели [2].

Важно, чтобы при введении в составы строительных материалов биоцидных добавок, наряду с повышением их биологического сопротивления, и не ухудшались другие свойства, например не происходило снижения необходимых для эксплуатации прочностных характеристик цементных композитов и т.д.

Таблица 2

Экспериментальные составы

№ состава	Цемент ПЦ М500	Песок	Биоцидная добавка Na ₂ SO ₄ , мас. ч	Вводимые добавки, мас. ч.	
				Neolith 8800 (1)	Esapon 1850 (2)
0-0	100	300	-	-	-
0-1	100	300	3	-	-
0-2	100	300	6	-	-
1(2) - 1	100	300	-	6,5	1
1(2) - 2	100	300	3	6,5	1
1(2) - 3	100	300	6	6,5	1
1(2) - 4	100	300	-	13	2
1(2) - 5	100	300	3	13	2
1(2) - 6	100	300	6	13	2

Таблица 3

Результаты испытаний

№ состава	Степень обрастания грибами, баллы		Характеристика составов по грибостойкости
	Метод 1	Метод 3	
0-0	3	5	Негрибостойкий
0-1	1	2	Грибостойкий
0-2	0	0	Фунгицидный
1-1	0	3	Грибостойкий
1-2	0	2	Грибостойкий
1-3	0	2	Грибостойкий
1-4	0	1	Фунгицидный
1-5	0	3	Грибостойкий
1-6	0	2	Грибостойкий
2-1	0	2	Грибостойкий
2-2	0	2	Грибостойкий
2-3	0	2	Грибостойкий
2-4	0	3	Грибостойкий
2-5	0	2	Грибостойкий
2-6	0	3	Грибостойкий

В этой связи задача последующих исследований состояла в выявлении зависимостей изменения свойств цементно-песчаного раствора при введении биоцидной добавки (натрия сернокислого) в комплексе с добавками, воздействующими на различные физико-механические свойства материалов. В каче-

стве таких модификаторов рассматривались: поверхностно-активная добавка Esapon 1850 и релаксационный порошок Neolith 8800. Поверхностно-активная добавка Esapon 1850 воздействует как пластификатор, смачивает, диспергирует, а также образует воздушные поры, облегчает переработку и улучшает по-

требительские свойства, особенно штукатурных и шпаклёвочных составов, повышает эластичность раствора, предотвращает усадку и образование трещин. При этом повышается морозостойкость и снижается риск образования высолов. Редисперсные порошки Neolith для сухих строительных смесей хорошо диспергируются в воде. Благодаря им улучшаются свойства сухих строительных смесей. Сухие растворные, клеевые и шпаклевочные массы с добавкой Neolith отличаются хорошей эластичностью во время нанесения, имеют повышенную адгезию к различным поверхностям, улучшенную стойкость к истиранию, высокие показатели пластичности и прочности на изгиб.

При проведении эксперимента изготавливались строительные растворы, содержащие в своем составе портландцемент М500 Д0, кварцевый песок фракции 0,14 – 0,63 мм, добавку и воду затворения. За контрольный вариант был принят цементно-песчаный раствор состава Ц:П=1:3 при В/Ц=0,7. Составы с добавками изготавливались с соблюдением условия равной подвижности с контрольным составом. Составы, принятые для исследований, и результаты испытаний на биостойкость приведены в табл. 2 и 3.

Из результатов исследований составов, содержащих одновременно биоцидную добавку и добавки Neolith 8800 и Esaron 1850, видно, что содержащиеся в составе Neolith 8800 поливиниловый спирт и тройной сополимер ПВА, а в Esaron 1850 – насыщенные жирные спирты с оксидом этилена несколько снижают биостойкость.

Для изучения влияния вводимых добавок на прочностные свойства цементных композиций был применен двухфакторный план второго порядка. В качестве варьируемых факторов выбрано содержание натрия сернокислого (X_1) и содержание Neolith 8800 или Esaron 1850 (X_2). По истечении 28 суток твердения в каждой точке поверхности отклика испытывались 5 образцов размером 2×2×7см. За исследуемые параметры были приняты предел прочности при сжатии ($R_{сж}$) и при изгибе ($R_{и}$). План эксперимента и результаты исследований проч-

ности в относительных величинах приведены в табл. 4 и 5.

После проведения статистической обработки результатов эксперимента получены уравнения регрессии:

– для составов с Na_2SO_4 и Neolith 8800:

$$R_{сж} = 1,082 - 0,235X_1 + 0,235X_2 - 0,158X_1^2 + 0,105X_1X_2 - 0,088X_2^2 - 0,150X_1^2X_2 + 0,230X_1X_2^2;$$

$$R_{и} = 1,094 + 0,015X_1 - 0,140X_2 - 0,062X_1^2 + 0,100X_1X_2 - 0,177X_2^2 + 0,190X_1^2X_2 - 0,030X_1X_2^2;$$

– для составов с Na_2SO_4 и Esaron 1850):

$$R_{сж} = 0,894 + 0,050X_1 + 0,315X_2 - 0,187X_1^2 + 0,085X_1X_2 + 0,048X_2^2 - 0,165X_1^2X_2 - 0,035X_1X_2^2 \text{ и}$$

$$R_{и} = 1,169 - 0,050X_1 - 0,135X_2 + 0,067X_1^2 + 0,050X_1X_2 - 0,258X_2^2 + 0,065X_1^2X_2 + 0,085X_1X_2^2.$$

По уравнениям регрессии были построены графические зависимости, которые приведены на рис. 2 и 3.

Как видно из графиков, наибольшее значение прочности при сжатии (рис. 2) имеет состав, содержащий только биоцидную добавку (натрий сернокислый) в количестве 3 мас. ч. на 100 мас. ч. цемента. В этом случае предел прочности композита выше на 27% по сравнению с показателями контрольного состава (0–0). При введении одновременно двух добавок в составы в некоторых опытах прочностные характеристики образцов также повышаются. Это характерно для составов 1–2, 1–3.

Исследования прочности при изгибе (рис. 2 б, 3 б) показали, что при введении добавок Neolith 8800 и Esaron 1850 совместно с биоцидной добавкой (натрием сернокислым) прочность при изгибе повышается на 13–20%. На графике (рис. 2 б) видно, что при содержании добавок Na_2SO_4 и Neolith 8800 соответственно 3 и 6 мас. ч. на 100 мас. ч. цемента (составы 1–2, 1–3) прочность при

Таблица 4

Матрица планирования и результаты эксперимента для составов с Na_2SO_4 и Neolith 8800

№ состава	Варьируемые факторы				Относительная прочность	
	кодированные значения		натуральные значения			
	X1	X2	X1	X2	R _{сж}	R _и
0-0	-1	-1	0	0	1,00	1,00
0-1	0	-1	3	0	1,27	0,76
0-2	+1	-1	6	0	0,80	0,83
1-1	-1	0	0	6,5	0,76	1,03
1-2	0	0	3	6,5	1,00	1,13
1-3	+1	0	6	6,5	1,20	1,00
1-4	-1	+1	0	13	0,65	0,70
1-5	0	+1	3	13	0,80	1,05
1-6	+1	+1	6	13	0,85	0,93

Таблица 5

Матрица планирования и результаты эксперимента для составов с Na_2SO_4 и Esaron 1850

№ состава	Варьируемые факторы				Относительная прочность	
	кодированные значения		натуральные значения			
	X1	X2	X1	X2	R _{сж}	R _и
0-0	-1	-1	0	0	1,00	1,00
0-1	0	-1	3	0	1,27	0,77
0-2	+1	-1	6	0	0,80	0,83
2-1	-1	0	0	1	0,80	1,17
2-2	0	0	3	1	0,87	1,20
2-3	+1	0	6	1	0,67	1,27
2-4	-1	+1	0	2	0,53	1,05
2-5	0	+1	3	2	0,65	1,03
2-6	+1	+1	6	2	0,67	1,07

изгибе на 11 % больше по сравнению с контрольным составом, а из графика (рис. 3 б) следует, что при введении добавки Esaron 1850 и натрия сернокислого прочность составов повышается от 3 до 20 %.

По результатам проведенных испытаний можно сделать заключение о том, что добавление в цементно-песчаные растворы совместно с биоцидной добавкой препаратов Esaron 1850 и Neolith 8800 приводит к повышению не только биостойкости, но и физико-механических показателей.

Разработанные цементные композиты рекомендуется применять в помещениях с биологически активными средами, в зданиях и сооружениях, в которых значительную роль в

разрушениях играют микроскопические организмы, например на предприятиях пищевой, химической, медицинской, микробиологической промышленности, а также в сельскохозяйственных, транспортных, гидротехнических зданиях и сооружениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ГОСТ 9.049-91. Методы лабораторных испытаний на стойкость к воздействию плесневелых грибов. – М.: Госстандарт, 1992.

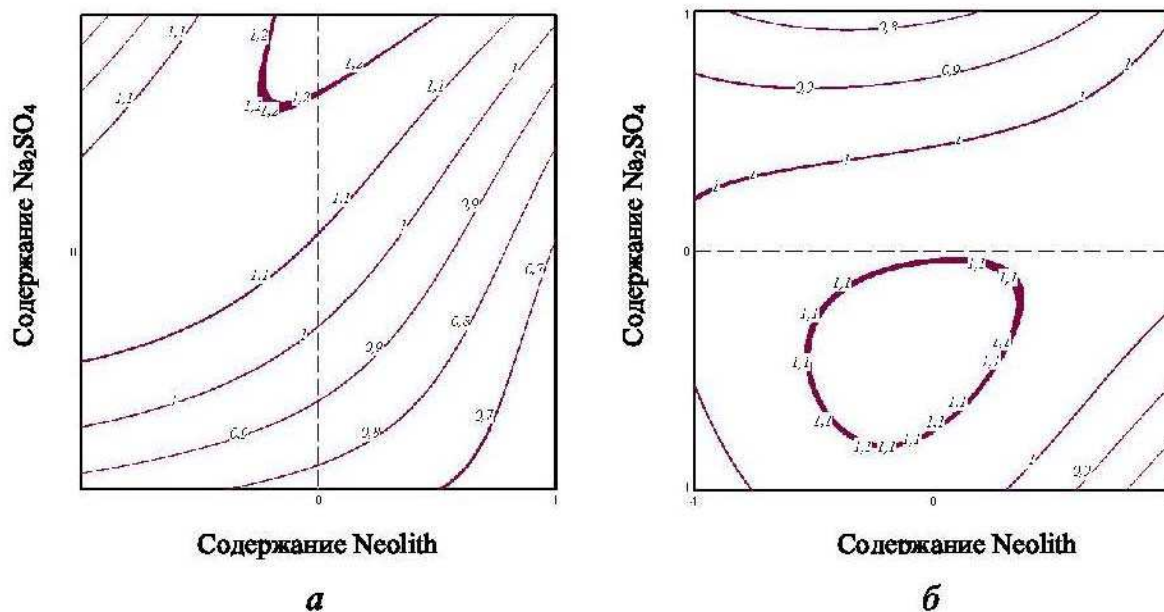


Рис. 2. Зависимости изменения относительной прочности при сжатии (а) и при изгибе (б) композитов от количества вводимых добавок Na_2SO_4 и Neolith 8800.

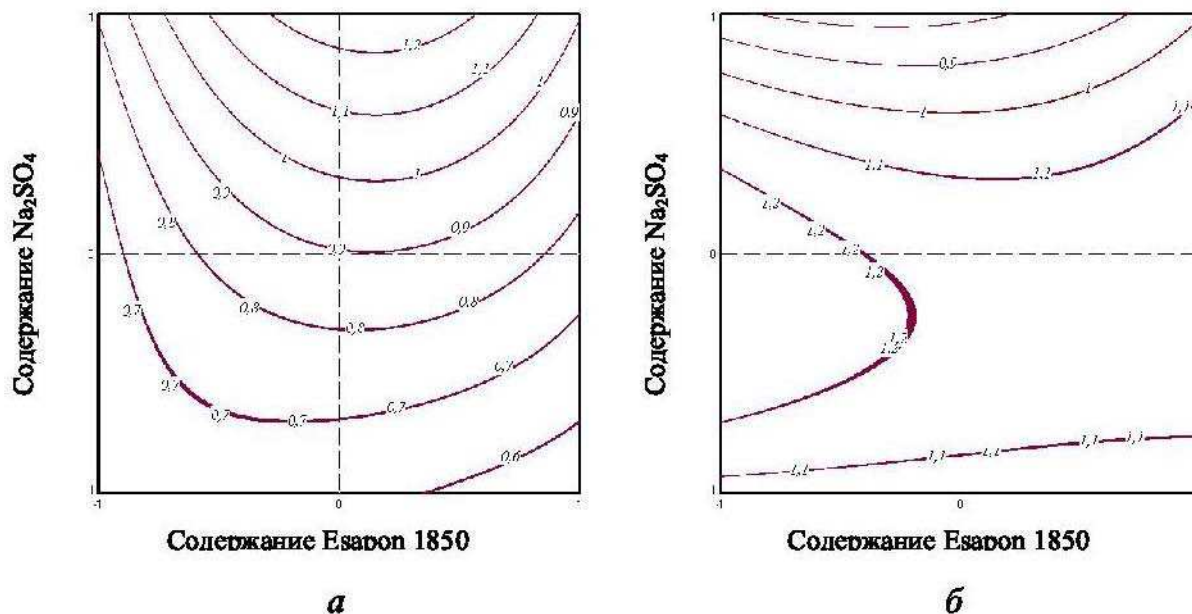


Рис. 3. Зависимости изменения относительной прочности при сжатии (а) и при изгибе (б) композитов от количества вводимых добавок Na_2SO_4 и Esaron 1850.

2. Решение о выдаче патента от 25.02.2011 г. по заявке 2010104275/03, приоритет от 08.02.2010 г. Строительный раствор / В.Т. Ерофеев, В.Ф. Смирнов, Е.Н. Сураева, А. Д. Богатов, С. В. Казначеев.
3. **Соломатов В.И., Ерофеев В.Т., Смирнов В.Ф. и др.** Биологическое сопротив-

- ление материалов. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. – 196 с.
4. Биоповреждения больничных зданий и их влияние на здоровье человека. / Под ред. А.П. Щербо и В.Б. Антонова. – СПбМАПО, 2008. – 232 с.

Ерофеев Владимир Трофимович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительного производства Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный строитель России, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Лауреат государственной премии Российской Федерации, Иностраный член академии строительства Украины, член Научного Совета РАН по биоповреждениям.

О ВЛИЯНИИ РАЗБРОСА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ПРОЦЕСС РАЗРУШЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Г.Г. Кашеварова¹, Ю.Л. Рыбаков², А.С. Мартиросян¹

¹ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

² Ариельский университетский центр Самарии, г. Ариель, Израиль

АННОТАЦИЯ. В данной работе предлагается методика учета разброса свойств материалов, с использованием проблемно-ориентированной программы AnSysBuildingBlock (ASBB), предназначенной для автоматизации процесса создания программного кода на языке APDL и программного комплекса ANSYS. Программа ASBB имеет встроенную функцию учёта разброса физико-механических свойств материалов, которую можно включить для следующих характеристик: плотности материала, модуля упругости и коэффициента Пуассона. Приведен алгоритм реализации этой функции. Рассмотрен пример расчета модели диафрагмы кирпичной кладки с учетом разброса свойств материала в сравнении с результатами эксперимента.

Ключевые слова: свойства материала, программно-алгоритмический комплекс ANSYS, функция разброса, расчет модели диафрагмы кирпичной кладки

EFFECT OF RANDOM SCATTER PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS FOR PROCESS OF CONSTRUCTION'S DESTRUCTION

Galina G. Kashevarova¹, Yuri Ribakov², Anna S. Martirosyan¹

¹ National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

² Ariel University Center of Samaria, Ariel, ISRAEL

ABSTRACT. The paper proposes a method of accounting spread properties of materials, using a problem-oriented program AnSysBuildingBlock (ASBB), designed to automate the creation of program code to APDL and software package ANSYS. ASBB program has built-in account variations of physical and mechanical properties of materials that can be included for the following characteristics: material density, elastic modulus and Poisson's ratio. The algorithm implementing the feature. The example of calculation model aperture brick considering the scatter of material properties in comparison with experimental results.

Key words: properties of materials, software package ANSYS, account variations, calculation model aperture brick

В настоящее время в практике проектирования объектов строительства широко применяются численные методы и современные программные комплексы (SCAD Office, Lira, MicroFE, ANSYS и др.), которые позволяют выполнить расчет намного детальнее и точнее, чем это предусматривается норматив-

ными документами. Но, ни в одном из программных комплексов не предусматривается учет разброса физико-механических свойств материала, имеющих случайных характер, т.е. материал с детерминированными характеристиками считается однородным по всей конструкции. Параметры же расчетной мо-

дели, которыми при этом оперирует исследователь, практически всегда являются величинами неточными, случайными и, принимая то или иное значение, мы имеем дело с некоторой реализацией такой случайности [1]. Случайный характер механических свойств материалов наглядно проявляется при испытаниях конструкций, даже при абсолютно точном выполнении всех установленных технических требований.

Обычно возможные отклонения физико-механических свойств материала от нормы учитываются в СНиПах системой нормируемых коэффициентов надежности. Поэтому при расчётах строительных конструкций господствует вера в то, что узаконенная нормами система коэффициентов надежности обеспечивает если не безопасность самого объекта, то безопасность исполнителя в тех случаях, когда произошли какие-нибудь отказы или аварийные явления.

В данной работе предлагается методика учета разброса свойств материалов, с использованием программного комплекса ANSYS, который имеет встроенный язык параметрического проектирования APDL, расширяющий возможности программы за пределы традиционного конечно-элементного анализа и проблемно-ориентированной программы *AnSysBuildingBlock* (ASBB), предназначенной для автоматизации процесса создания программного кода на языке APDL. Подробное описание этой программы представлено в работе [2]. Программа разработана на профессиональном языке программирования Microsoft Visual Basic, работает в среде Microsoft Windows и является отдельным приложением Windows. Имеет собственный GUI (интерфейс пользователя), предназначенный для специалистов строительного профиля. На *ANSYSBuildingBlock* получено свидетельство Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам об официальной регистрации программы для ЭВМ №2007610746.

Программа ASBB имеет встроенную функцию учёта разброса физико-механических

свойств материалов, которую можно включить для следующих характеристик: плотности материала, модуля упругости и коэффициента Пуассона. Эта функция реализована в виде модуля - макроса на языке APDL, в котором реализованы следующие алгоритм и методика учета разброса свойств материалов.

1. Пользователем задаётся усреднённое значение механического свойства материала (Z_{cp}), как правило, взятое из нормативных документов или ГОСТ.
2. Активируется опция разброса механических свойств для конкретного свойства материала (рис. 1). Опцию можно включить для всех свойств сразу.
3. Задаётся коэффициент вариации – максимального разброса свойств V_{max} в %, определённый либо экспериментальным путём, либо в соответствии с рекомендациями СНиП о коэффициентах запаса по материалу, который в дальнейшем можно изменить.

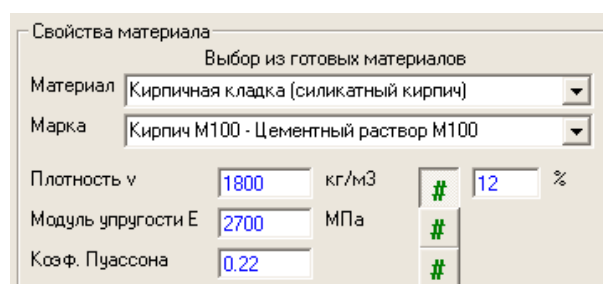


Рис. 1. Опция учёта разброса механических свойств материала (знак #) в диалоге формирования материалов и задание V_{max}

4. На этапе формирования расчётной модели в последние строки препроцессорного цикла программного кода на языке APDL автоматически вносятся дополнительные строки для модификации материалов. При этом включается датчик случайных чисел и для каждого конечного элемента (КЭ) материала, которому задавался разброс свойств.
5. Создаётся *потомственный* материал с новыми свойствами, отличными от родительского материала с разбросом не превышающим V_{max} . По формуле

$$V_{\max} = \frac{|Z_{cp} \pm Z_i|}{Z_{cp}} \cdot 100(\%)$$

автоматически определяются фактические значения свойства (Z_i), которые будут присвоены i -м конечным элементам расчётной модели и обрабатываются все КЭ, принадлежащие одному и тому же материалу трёхмерной модели. В итоге получаем разнородный материал со случайной структурой с механическими свойствами, не превышающими заданные пределы значений в большую и меньшую стороны по отдельным конечным элементам.

Значение V_{\max} рекомендуется принимать в пределах от 0 до 30%. Это в первую очередь связано с непредсказуемым разбросом свойств материала при очень больших значениях V_{\max} .

В соответствии с законами математической статистики и теории вероятности – картина распределения значений свойств потомственных материалов будет выглядеть примерно как на рис. 2.

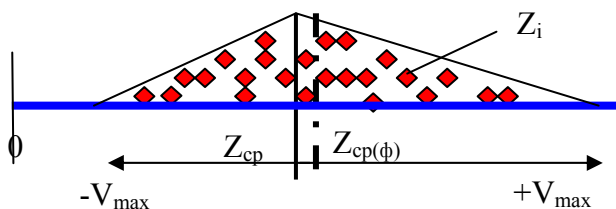


Рис. 2. Картина распределения значений свойств

Здесь наглядно видно, что среднее фактическое значение свойства $Z_{cp(\phi)}$, как среднее значение всех Z_i не совпадает с усреднённым значением, заданным изначально, и имеет относительную погрешность, которая при увеличении значения V_{\max} также увеличивается. Это может привести к ошибочным результатам при больших значениях V_{\max} . Данный эффект вызван непосредственным влиянием абсолютного нуля в меньших значениях, так как коэффициент $-V_{\max}$, являю-

щийся результатом соотношений значений, не может создать отрицательное значение, а верхний предел значений фактически ни чем не ограничен.

Таким образом при значениях V_{\max} больше 30% $Z_{cp(\phi)}$ начинает заметно отличаться от Z_{cp} . Далее был выполнен расчет кирпичной диафрагмы, для которой были проведены натурные эксперименты для определения предельной прочности кирпичных стен и схем их разрушения австралийскими учёными [3]. На рис.3 показана расчетная схема, а на рис.4 - схема образования трещин, соответствующие одной из моделей натурального эксперимента.

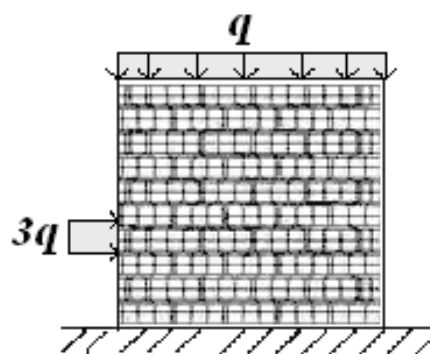


Рис.3. Фрагмент кирпичной стены (диафрагма), испытывающий двухосное напряженное состояние

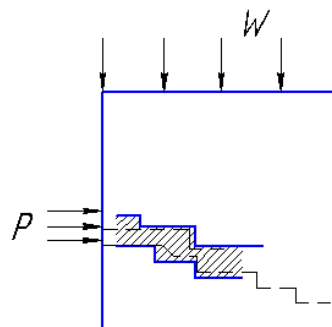


Рис. 4. Схема образования трещин в образцах каменной кладки при отношении плеча сдвига к ширине стены – 0,34
 --- механизм разрушения, полученный экспериментально;
 ▨ - зона разрушения, полученная расчётным путём [5]

Размеры кирпичной диафрагмы – 2500×2500×120 мм; отношение плеча сдвига к ширине стены составляет 0,34. Модуль упругости кирпича и раствора приняты соответственно 7×10^3 МПа и $1,02 \times 10^2$ МПа; коэффициенты Пуассона для кирпича и раствора – 0,3 и 0,22; плотность кирпича и раствора – 2200 кг/м³ и 2000 кг/м³.

Исследовалось влияние разброса механических свойств раствора кирпичной кладки на напряженно-деформированное состояние и процесс разрушения конструкции.

Численное решение задачи разрушения модели кирпичной кладки проводилось методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Модель диафрагмы создавалась в программе ASBB. Учитывалась неоднородность материала кирпичной кладки, границы конечных элементов располагались на границах разделов раствор – кирпич. При решении использовались объемные конечные элементы SOLID65 в виде прямоугольного параллелепипеда.

Механическое поведение упруго-хрупкого материала кирпичной кладки описывалось с использованием математической модели, описанной в [4 - 7], учитывающей накопление структурных повреждений и деформационное разупрочнение, т.е. коэффициенты жесткости C_{ijkl} в определяющих соотношениях при появлении трещин изменялись скачком.

Учитывались разные виды повреждений (растрескивание и раскрашивание) для бесконечно малого элемента среды. При этом принимались следующие гипотезы: материал кирпича и раствора в кирпичной кладке изначально считается изотропным линейно упругим, а при появлении трещин становится ортотропным; трещины возникают в кирпичной кладке только в плоскостях, ортогональных глобальной декартовой системе координат (ДСК), так что оси ортотропии свойств при разрушении совпадают с ДСК. Появление «трещины» в плоскости, перпендикулярной одной из координатных осей x_i ($i = 1,2,3$) приводит к падению жесткости ма-

териала в данном направлении. «Трещина» – это образование в бесконечно малом элементе среды зоны со сниженными механическими характеристиками в результате накопления повреждений.

Для каждой трещины рассматривалось два состояния: трещина *открыта* или *закрыта*.

Расчет проводился для 5 вариантов материала со случайным разбросом механических свойств раствора кирпичной кладки (в частности, модуля упругости) в пределах $V_{\max} = 30\%$.

На рис. 6. показана разница между расчетными значениями напряжений и деформаций (в %) для модели с детерминированными характеристиками и вариантами моделей с применением функции разброса свойств.

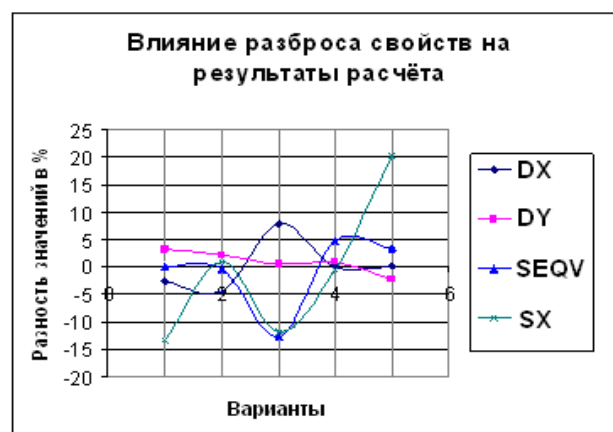


Рис. 6. Разница максимальных напряжений и деформаций (в %) для вариантов моделей с применением функции разброса свойств от модели с детерминированными характеристиками.

Для иллюстрации результатов расчета на рис. 5 приведены изополя распределения напряжений. На рис. 7 представлены картины развития системы трещин для варианта с детерминированными характеристиками без учета разброса свойств и для трех вариантов - с применением функции случайного разброса механических свойств раствора кирпичной кладки.

О влиянии разброса физико-механических свойств материалов на процесс разрушения строительных конструкций

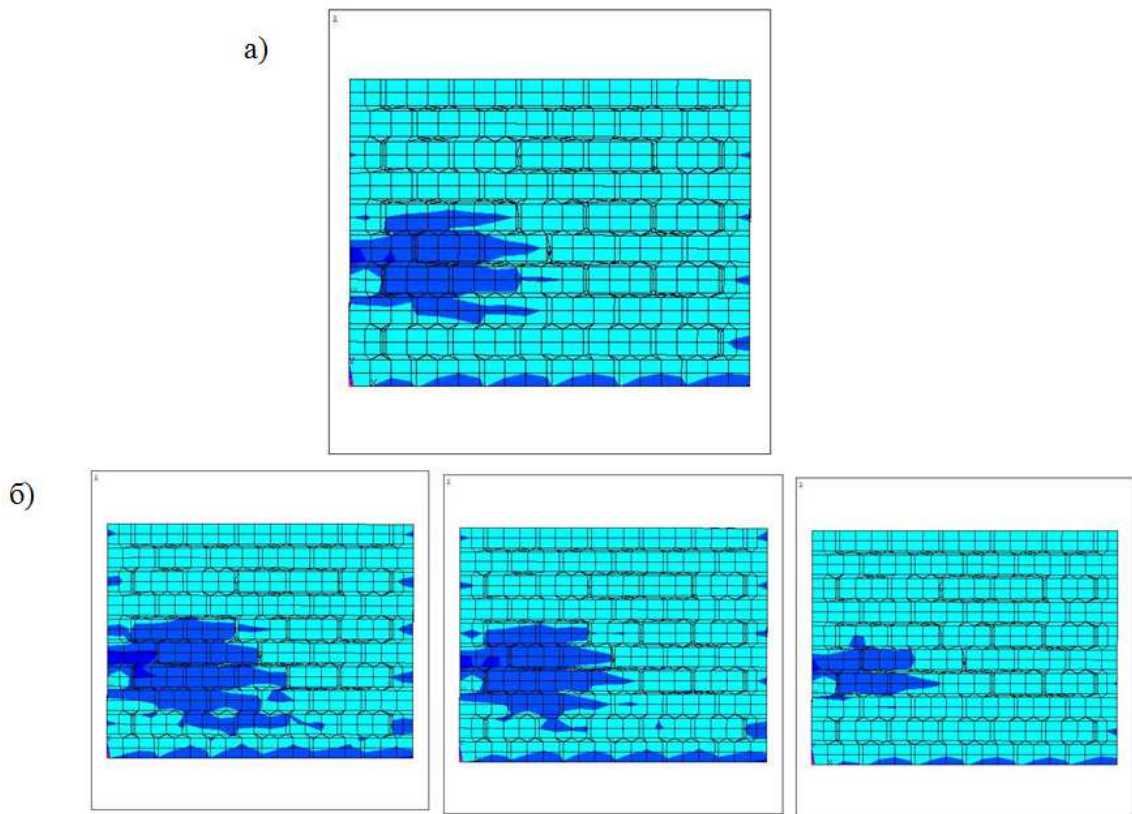


Рис. 5. Картина распределения напряжений по оси X:
а) без применения функции разброса свойств;
б) с применением функции разброса свойств – три варианта результатов.

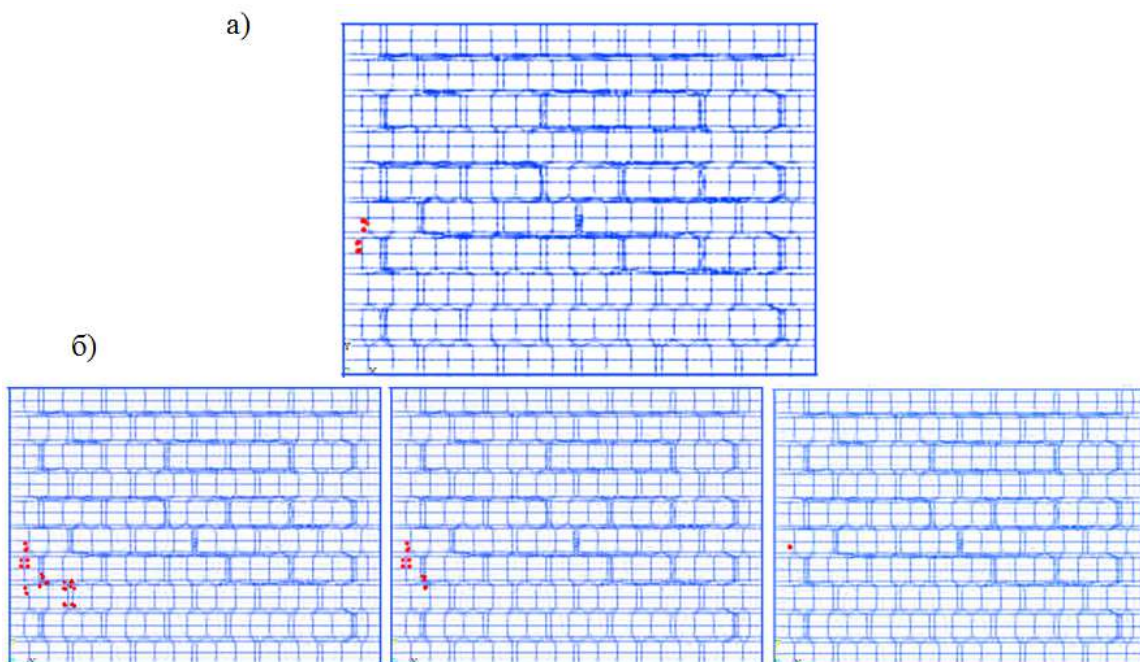


Рис. 7. Картина развития системы трещин:
а) без применения функции разброса свойств;
б) с применением функции разброса свойств – три варианта

Данный пример наглядно показывает, что в каменных кладках учет разброса свойств материала оказывает влияние не только на величину напряжений, но и на характер разрушения, хотя возможная зона повреждений конструкции определяется однозначно.

Случайный характер механических свойств материала влияет на максимальные значения деформаций: D_X и D_Y и напряжений: S_X и эквивалентных по Мизесу $SEQV$ (рис.7). А это в свою очередь влияет на развитие системы трещин в конструкции при одних и тех же критических нагрузках: трещины могут более или менее активно распространяться по конструкции, или вообще могут не появиться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
2. **Кашеварова Г.Г., Поварницын Д.А.** Программа для строительного проектирования AnSysBuildingBlock (ASBB) – приложение к многоцелевому пакету ANSYS. // Промышленное и гражданское строительство. 2011. Т. 2. № 7-2. С. 25-27.
3. **Samarasinghe W., Page A.W., Hendry A.W.** A finite element model for the in-plane behaviour of brickwork. Proc. Inst. Civ. Eng., 1982. Vol. 73. P. 171-178.
4. **Кашеварова Г.Г., Труфанов Н.А.** Численный анализ эффективных упругих свойств материала кирпичной кладки. // Механика композиционных материалов и конструкций. Т.11, №1, с.49-60. 2005.
5. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2010. № 1. С. 106-116.
6. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю., Дубинский С.И.** Моделирование процесса разрушения кирпичной кладки зданий в натурных и численных экспериментах. // Строительная механика и расчет сооружений. №1, 2010. С. 69-73.
7. **Kashevarova G., Zobacheva A., Leschev I.** Experimental and numerical modeling of the destroying of brick masonry for the analysis of buildings accident. Advanced Materials Research. 2011. Т. 250-253. С. 3670-3673.

Кашеварова Галина Геннадьевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительной механики и вычислительных технологий, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ggkash@mail.ru.

Рыбаков Юрий Леонидович, Ариельский Университетский Центр Самарии, Ариель, Израиль. Associated Professor, PhD, Израиль, E-mail: ribakov@ariel.ac.il.

Мартиросян Анна Сергеевна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет. 614083, Россия, г. Пермь, ул. Запорожская, д. 1/1, кв. 43, E-mail: anka_31@mail.ru.

Galina G. Kashevarova, Professor, Department of Mechanics and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, E-mail: ggkash@mail.ru.

Yuri Ribakov, Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ariel University Center of Samaria, P.O.B. 3, Ariel, Israel, E-mail: ribakov@ariel.ac.il.

Martirisyana Anna Sergeevna, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, ul. Zaporozhskaya, 1/1 – 43, E-mail: anka_31@mail.ru.

УДАР ПО ПОВЕРХНОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ТВЁРДЫМ ТЕЛОМ

М.М. Мирсаидов, Т.З. Султанов

Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, УЗБЕКИСТАН

АННОТАЦИЯ: В статье предложена численная модель, методика и алгоритм для определения напряжённо-деформированного состояния и динамического поведения вязкоупругой осесимметричной конструкции при ударе по её поверхности твёрдым телом в пространственной постановке. На примере решения модельных задач с помощью разложения решения по собственным формам колебаний для упругой задачи исследовано напряжённо-деформированное состояние и динамическое поведение вязкоупругой осесимметричной конструкции при ударе в произвольной точке её поверхности твёрдым телом. Представлено определение параметров ядра релаксации для описания вязкоупругих свойств бетона. Выявлены самые напряжённые участки рассматриваемой конструкции.

Ключевые слова: осесимметричная конструкция, удар твёрдым телом, вязкоупругие свойства, собственная форма, динамическое поведение.

AN IMPACT ON THE SURFACE OF VISCOUS-ELASTIC AXIS-SYMMETRICAL STRUCTURE WITH A RIGID BODY

Mirziyod M. Mirsaidov, Tohirjon Z. Sultanov

Tashkent Institute of Irrigation and Melioration, Tashkent, UZBEKISTAN

ANNOTATION: a numeric model, methods and algorithm to determine stress-strain state and dynamic behavior of viscous-elastic axis-symmetrical body at an impact of rigid mass on its surface in a spatial statement is offered in the paper. On the example of solution of model problems with solution expansion on natural mode of vibration of elastic problem, stress-strain state and dynamic behavior of viscous-elastic axis-symmetrical body was studied under different impact of rigid mass on its surface. Parameters of relaxation kernel were determined to describe viscous-elastic properties of concrete. The most stressed sections of discussed body were revealed

Key words: axis-symmetrical structure, an impact of rigid body, viscous-elastic properties, natural mode, dynamic behavior.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи об ударе по куполообразной оболочке твёрдым телом широко рассматривается, начиная с 70-х гг. XX века. Решение таких задач тесно связано с защитой атомных электростанции (АЭС) от соударения самолетов и других твёрдых предметов с защитной оболочкой АЭС. Подробный обзор по методам решения таких задач, связанных с оценкой динамического поведения, напряженно-деформированного состояния

(НДС) и прочности защитной оболочки АЭС приведены в работах [1,2,3,4].

В данной работе приводится математическая модель, методы решения и результаты исследований динамического поведения вязкоупругой осесимметричной конструкции при ударах твёрдым телом по её поверхности в различных точках.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При постановке задачи предполагается, что удар груза массой m приходится на произвольную площадку ограниченных размеров на поверхности осесимметричной конструкции (рис.1) со скоростью \vec{V}_0 . Груз абсолютно жёсткий и его размеры соизмеримы с толщиной конструкции. Исключается случай проникновения груза в тело конструкции и её повреждения. Удар неупругий и происходит при малой скорости соударения. При этом груз сообщает свою скорость конструкции в месте падения, а затем колеблется вместе с ней. Конструкция рассматривается как осесимметричное трёхмерное вязкоупругое тело объёмом V , жестко заземленное в основании и первоначально свободное от напряжений. Ставится задача определения полей перемещений и напряжений в вязкоупругой осесимметричной конструкции после удара.

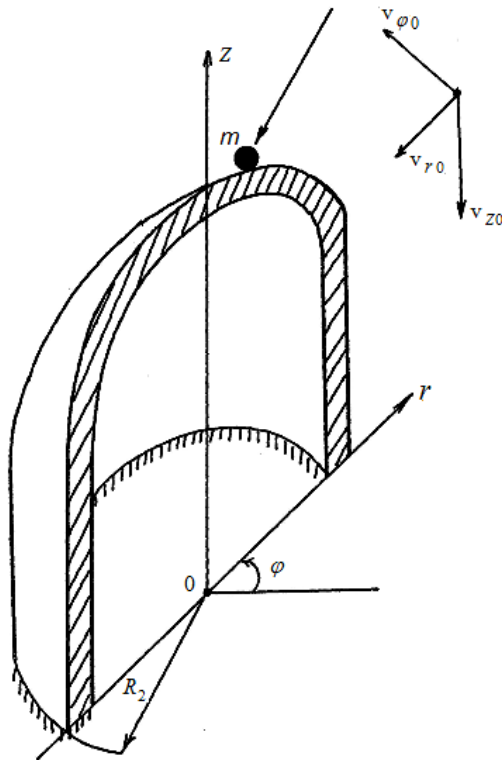


Рис. 1. Расчетная модель вязкоупругой осесимметричной конструкции с ударяющимся телом

Для постановки задачи используются:
– принцип возможных перемещений

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \\
 & - \int_{\Sigma_m} m \ddot{u}_i \delta u_i d\Sigma_m = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

– связь компонент деформации с перемещениями осуществляется линейными соотношениями Коши для трёхмерного осесимметричного тела в цилиндрических координатах

$$\begin{cases}
 \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\
 \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\
 \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\
 \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)
 \end{cases} \tag{2}$$

– вязкоупругие свойства материала конструкции описываются линейной наследственной теорией вязкоупругости Больцмана-Вольтерра [5]:

$$S_{ij} = \mu \left[e_{ij} - \int_0^t \Gamma(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right], \tag{3}$$

$$\sigma = K\theta,$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\theta\delta_{ij}; \quad \theta = \varepsilon_{ii}$$

Граничные и начальные условия имеют вид

$$z = 0: \quad \vec{u}(r, 0, \varphi, t) = 0, \tag{4}$$

$$\bar{x} \in V: \quad \begin{cases} \vec{u}(r, z, \varphi, 0) = 0, \quad \dot{\vec{u}}(r, z, \varphi, 0) = 0, \\ \vec{s}(0) = 0, \quad \dot{\vec{s}}(0) = \vec{v}_0 \end{cases} \tag{5}$$

В (1) - (5) используются следующие обозначения:

$\vec{u}(\vec{x}, t) = \{u_r(\vec{x}, t), u_z(\vec{x}, t), u_\varphi(\vec{x}, t)\}$;
 $\vec{x} = \{r, z, \varphi\}$; u_r, u_z, u_φ - радиальное, осевое и тангенциальное перемещения точки тела в цилиндрических координатах (r, z, φ) ; $\delta\vec{u}, \delta\varepsilon_{ij}$ - изохронные вариации перемещений и деформаций; ρ - плотность материала; K, μ - объёмный и мгновенный сдвиговой модуль упругости; S_{ij}, e_{ij} - компоненты девиатора напряжений и деформаций; σ - шаровая часть тензора деформаций; θ - объёмная деформация; Σ_m - площадь контакта груза с поверхностью тела; m - масса груза; $\vec{s}(t)$ и $\dot{\vec{s}}(t)$ - смещение и скорость груза.

Теперь, рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти поля перемещений и напряжений, возникающие в конструкции после удара о её поверхность груза со скоростью $\vec{V}_0 = \{V_{r0}, V_{z0}, V_{\varphi0}\}$, удовлетворяющие уравнениям (1) - (3) и условиям (4) и (5) на любом возможном перемещении $\delta\vec{u}$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение поставленной задачи ищется в виде разложения [6,7] по собственным формам колебаний осесимметричного упругого тела [8,9], найденным методом конечных элементов с использованием кольцевого конечного элемента треугольного сечения, т.е.:

$$\vec{u}(r, z, \varphi, t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \quad (6)$$

где N - количество собственных форм, удерживаемых в разложении (6); $y_k(t)$ - искомые функции времени; $\vec{u}_k^*(r, z, \varphi)$ - найденные собственные формы колебаний осесимметричного тела (рис. 1), причем

$$\vec{u}_k^*(r, z, \varphi) = \{u_{rk}^*(r, z) \cos l\varphi, u_{zk}^*(r, z) \cos l\varphi, u_{\varphi k}^*(r, z) \sin l\varphi\}$$

где l - номер гармоники.

Подстановка (6) в (1) - (5) и приравнивание к нулю множителя при независимых δy_i приводит к системе интегродифференциальных уравнений вида

$$M_{ik} \ddot{y}_k(t) + K_{ik} y_k(t) - C_{ik} \int_0^t \Gamma(t-\tau) y_k(\tau) d\tau = 0 \quad (7)$$

Порядок системы интегродифференциальных уравнений (7) будет равен N - количеству удержанных собственных форм колебаний упругого тела в разложении (6), т.е.: $i=1, 2, \dots, N$; $k=1, 2, \dots, N$.

Коэффициенты M_{ik}, K_{ik}, C_{ik} системы интегродифференциального уравнения (7) определяются в результате интегрирования собственных форм колебаний $\vec{u}_k^*(r, z, \varphi)$ и их производных по объёму V тела.

При решении задачи первое начальное условие (5) для системы интегродифференциальных уравнений (7) будет иметь вид

$$y_k(0) = 0, \quad (8)$$

Для определения второго начального условия (5) используем осредненные перемещения точек площадки контакта груза с конструкцией, т.е.:

$$\vec{u}(r_0, z_0, \varphi_0, t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) \vec{u}_k^*(r_0, z_0, \varphi_0) \quad (9)$$

Предполагается, что начиная с момента $t=0$, когда груз соприкасается с конструкцией, он движется совместно с соответствующим конечным элементом её расчётной схемы и в момент соударения все точки конструкции мгновенно получают конечные скорости

$$\dot{\vec{u}}(r, z, \varphi, 0) = \sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \quad (10)$$

Соответственно этому, скорость груза мгновенно изменится и вместо \vec{v}_0 , станет равной скорости \vec{v}_1 конечного элемента конструкции, по которому произведен удар

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{u}}(r_0, z_0, \varphi_0, 0) = \sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r_0, z_0, \varphi_0) \quad (11)$$

Так как в момент соударения скорость груза изменилась на величину $\vec{v}_0 - \vec{v}_1$, а скорость произвольной точки конструкции – на величину $\dot{\vec{u}}(r, z, \varphi, 0)$, то потеря энергии определяется как

$$\Delta T = \frac{m \left[\vec{v}_0 - \sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r_0, z_0, \varphi_0) \right]^2}{2} + \frac{1}{2} \int_v \rho \left[\sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \right]^2 dV \quad (12)$$

Имея ввиду ортогональность собственных форм колебаний тела, квадрат суммы, стоящий под интегралом, заменим двойной суммой

$$\left[\sum_{k=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \right]^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^* \vec{u}_i^* \dot{y}_i(0) \quad (13)$$

С другой стороны, потерю энергии можно определить непосредственно как разность между энергиями, которыми обладает система до и после соударения

$$\Delta T = \frac{m \vec{v}_0^2}{2} - \left\{ \frac{m \vec{v}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \rho \int_v \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \dot{y}_k(0) \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \dot{y}_i(0) \vec{u}_i^*(r, z, \varphi) dV \right\} \quad (14)$$

Приравнявая полученные выражения (12), (14) для ΔT и учитывая (13), получим для определения $\dot{y}_i(0)$ систему алгебраических уравнений

$$B_{ki} \cdot \dot{y}_i(0) = D_k \quad (15)$$

где

$$B_{ki} = \int_v \rho \vec{u}_k^*(r, z, \varphi) \cdot \vec{u}_i^*(r, z, \varphi) dv + m \vec{u}_k^*(r_0, z_0, \varphi_0) \cdot \vec{u}_i^*(r_0, z_0, \varphi_0), \\ D_k = m \vec{v}_0 \cdot \vec{u}_k^*(r_0, z_0, \varphi_0)$$

Решение системы алгебраических уравнений (15) даст нам искомые начальные скорости

$$\dot{y}_i(0) = P_i \\ i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (16)$$

Таким образом, для решения системы интегродифференциальных уравнений (7) имеем два начальных условия (8) и (16), т.е.:

$$\begin{cases} y_i(0) = 0, \\ \dot{y}_i(0) = P_i \end{cases} \quad (17)$$

Для решения системы интегродифференциальных уравнений (7) при начальных условиях (17) использован метод предложенный в работе [10].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для решения выше поставленных задач разработана программа расчёта для ПЭВМ, которая защищена авторскими свидетельствами (№DGU 01391 от 29.10.2007г.) Государственного Патентного Ведомства РУз.

В дальнейшем в качестве примера расчёта рассматривается модельная задача об ударе груза по поверхности вязкоупругой осесимметричной конструкции (рис. 2).

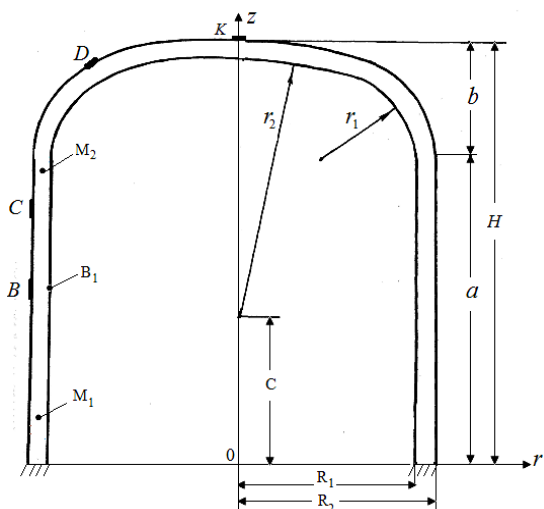


Рис.2. Геометрические параметры, характерные площадки и точки осесимметричной конструкции

3.1. Определение вязкоупругих параметров бетона.

В данной работе для описания вязкоупругих свойств материала конструкции использовалось слабосингулярное, экспоненциальное ядро релаксации А.С. Ржаницина [11]:

$$\Gamma(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1} \quad (18)$$

где A, α, β - параметры ядра, определяемые из экспериментальных кривых оценки ползучести бетона.

В работе [12] функция (18) и её интегралы достаточно подробно протабулированы и разработана эффективная методика определения параметров A, α, β по экспериментальным кривым ползучести или релаксации. С использованием этой методики, нами из экспериментальных кривых ползучести бетона, приведенных в работах [13,14], были определены параметры ядра (18) для различных бетонов, т.е.:

– для образцов-близнецов, впервые нагруженных в возрасте 28 суток до постоянных напряжений различного уровня,

$$A = 0.0194, \quad \alpha = 0.075, \quad \beta = 0.00000014;$$

– для бетона при постоянных напряжениях различных начальных уровней нагруженного в возрасте 4 суток,

$$A = 0.01436, \quad \alpha = 0.075, \quad \beta = 0.000000085;$$

– для бетона, находящегося под действием постоянных напряжений и нагруженного в возрасте 7 суток,

$$A = 0.01718, \quad \alpha = 0.075, \quad \beta = 0.000000095;$$

– для бетона при постоянных напряжениях различных начальных уровней, нагруженного в возрасте 35 суток,

$$A = 0.01594, \quad \alpha = 0.10, \quad \beta = 0.00000011.$$

3.2. Исходные данные для выполнения расчета.

Рассматриваемая задача модельная и материал рассматриваемой конструкции гипотетический, поэтому в исходных данных и в результатах расчётов их размерности не указаны.

Материал тела гипотетический, т.е.: $\rho / E = 1.0/300.0$, $\nu = 0.27$ (ρ , E , ν – соответственно плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона).

Геометрические параметры тела:

$$\begin{aligned} H/R_2 &= 2.346, & R_1/R_2 &= 0.949, & r_1/r_2 &= 0.54, \\ r_2/R_2 &= 1.468, & a/R_2 &= 1.662, & b/R_2 &= 0.684, \\ c/R_2 &= 0.827. \end{aligned}$$

Координаты центров площадок:

$$\begin{aligned} B(r/R_2=1.0, z/R_2=1.10, \varphi=22.5^\circ); \\ C(r/R_2=1.0, z/R_2=1.54, \varphi=22.5^\circ); \\ D(r/R_2=1.0, z/R_2=2.24, \varphi=22.5^\circ); \\ K(r/R_2=0.0, z/R_2=2.41, \varphi=0.0^\circ). \end{aligned}$$

Координаты характерных точек:

$$B_1(r/R_2=0.949, z/R_2=1.10, \varphi=22.5^\circ);$$

$$M_1(r/R_2=0.975, z/R_2=0.447, \varphi=45.0^\circ);$$

$$M_2(r/R_2=0.975, z/R_2=1.760, \varphi=45.0^\circ).$$

При решении этой задачи предполагается, что по внешней поверхности конструкции ударяется груз в форме шара радиусом $r=0.025R_2$, со скоростью $|\vec{v}_0|=1.0$ и массой $m=0.0070M$ (M – масса конструкции, R_2 – внешний радиус цилиндрической части конструкции). Начальную скорость шара \vec{v}_0 разложим на радиальную, осевую и тангенциальную составляющие следующим образом:

$$\begin{cases} v_{r0} = |\vec{v}_0| \cos \alpha \\ v_{\varphi 0} = |\vec{v}_0| \cos \beta \\ v_{z0} = |\vec{v}_0| \cos \gamma, \end{cases}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора скорости \vec{v}_0 .

Условимся различать следующие виды удара. Если $\alpha=0^\circ$ и $\beta=\gamma=90^\circ$, то удар будем называть, поперечно-центральный. В этом случае линия направления груза \vec{v}_0 проходит через оси симметрии тела. Если $\alpha \neq 0^\circ$, $\beta \neq 0^\circ$ ($\alpha + \beta = 90^\circ$) и $\gamma = 90^\circ$, то удар будем называть поперечным. При расчёте принято $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Если $\alpha = \beta = 90^\circ$ и $\gamma = 0^\circ$, то удар будем считать, продольным, поскольку линия действия \vec{v}_0 параллельна к оси симметрии конструкции. Когда направление \vec{v}_0 произвольно, то тип удара будем называть произвольным. В примере расчёта принято $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

3.3. Результаты решения задачи.

Для проверки сходимости решения, в разложении (6) удерживалось различное число собственных форм. Проверка сходимости осуществлялась следующим образом. Выбираются несколько точек, например, находящихся вблизи площадки удара и на опреде-

лённом расстоянии от этой площадки. Для выбранных точек строятся зависимости компоненты вектора перемещений, тензора напряжений и интенсивности напряжений от времени t при различных значениях удержанных собственных форм N в разложении (6).

На рис. 3 показана сходимость полученных решений (радиальных перемещений - u_r) для точки тела B_1 (см. рис 2) при поперечном ударе груза массой m по площадке B . На рис. 3а показана сходимость решения при удержании в разложении (6) $N=10,15$, а на рис. 3б – при удержании $N=20,25,30$.

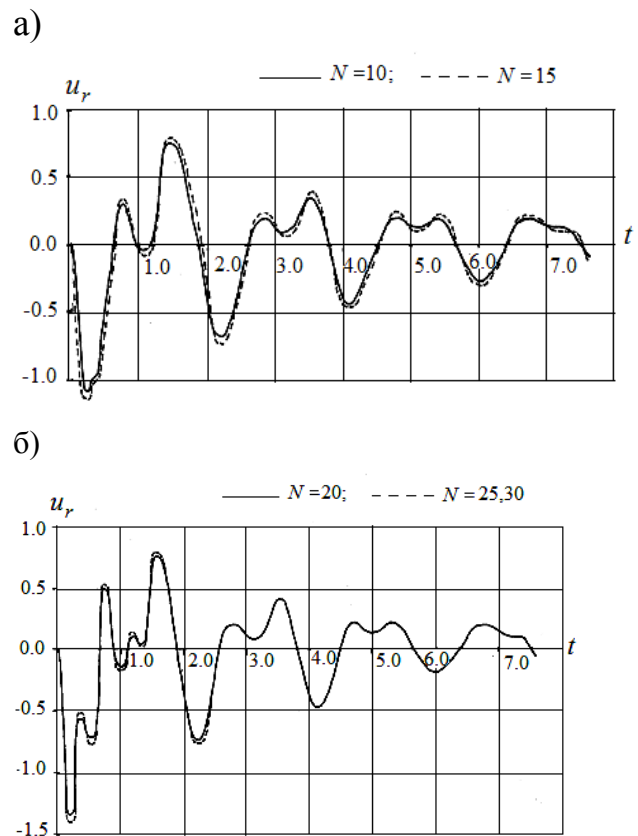


Рис. 3. Изменение радиального перемещения точки B_1 при поперечном ударе на площадку B при удержании в разложении (6) различных чисел N .

При этом обнаружено, что сходимость решения для точек, расположенных на определённых расстояниях от площадки удара достаточно быстрая, т.е. для получения ре-

зультатов с удовлетворительной точностью необходимо удерживать в разложении (6) 15-20 собственных форм колебаний тела. Для точек, расположенных вблизи площадки удара для получения результатов с удовлетворительной точностью по напряжениям необходимо удерживать в разложении (6) не менее 30 собственных форм колебаний тела. Анализ изменения компонент перемещений, полученных, для различных точек тела при ударах по различным площадкам показал, что наибольшие амплитуды колебаний происходят сразу после удара, через короткие промежутки времени, затем амплитуда колебаний за счет влияния вязкости постепенно убывает.

Исследовано напряжённо-деформированное состояние и поведение осесимметричной конструкции в различные моменты времени t , при поперечно-центральной, продольном, и произвольном ударах груза в различных местах оболочки.

На рис.4 показано изменение вертикальных напряжений σ_{zz} в точках конструкции M_1 , M_2 при поперечно-центральной ударе груза массой m по площадке С.

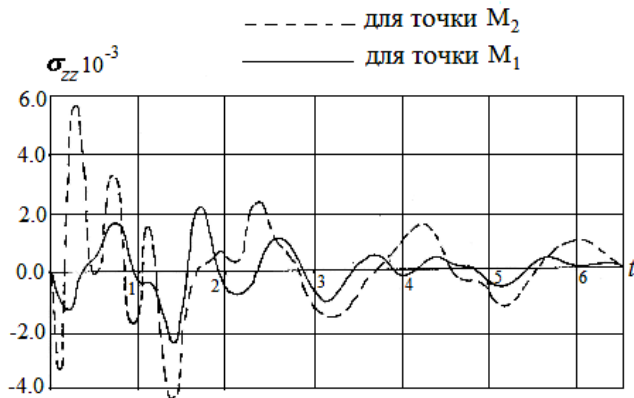


Рис. 4. Изменение вертикальных напряжений σ_{zz} в точках конструкции M_1 , M_2 при поперечно-центральной ударе груза массой m по площадке С.

Анализ напряженного состояния при поперечно-центральной ударе показывает, что величины возникающих напряжений $\sigma_{z\varphi}$

несколько меньше чем σ_{rr} , но намного больше чем касательные напряжения. Наибольшие амплитуды напряжений возникают сразу после удара, в коротком промежутке времени, затем амплитуда напряжений постепенно убывает. При этом, амплитуда напряжений, возникающих вблизи площадки удара в 3-4 раза превышает напряжения, возникающие вблизи основания.

На рис. 5 показано деформированное состояние конструкции в момент времени $t=0.13$ при произвольном ударе по площадке D (рис.5а) и по площадке K (рис.5б). Тёмным цветом показано изменение формы конструкции после удара. Эти результаты показывают, что наибольшее деформирование конструкции приходится на место удара (как и ожидалось). На рис.5 деформированное состояние тела изображено в увеличенном масштабе для его наглядного показа. Исследовалось максимальное значение интенсивности напряжений $\max \sigma_i(r, z, \varphi, t)$ для всех точек тела, т.е. поле напряжений

$$\max \sigma_i(r, z, \varphi, t) \left\{ \begin{array}{l} R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq z \leq H \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq t \leq t^* \end{array} \right.$$

При этом интенсивность напряжений определялась по формуле

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{rz}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{z\varphi}^2)}$$

На рис. 6, как пример, показана эпюра распределения $\max \sigma_i$ по меридиональному сечению, соответствующему $\varphi=45^\circ$, при произвольном ударе груза массой m по площадке D .

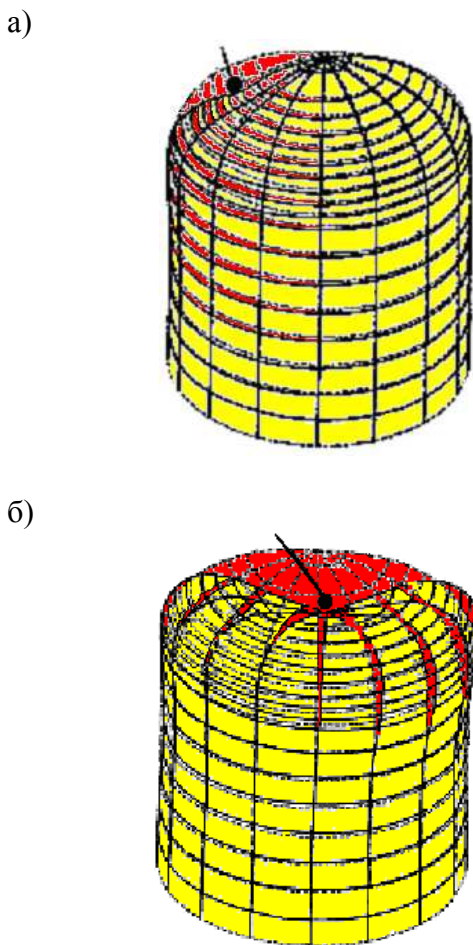


Рис. 5. Деформированное состояние тела в момент времени $t=0.13$ при произвольном ударе по площадкам D и K .

На криволинейной эпюре $\max \sigma_i$ (рис. 6) цифрами указаны места наибольших значений $\max \sigma_i$. Площадь эпюры $\max \sigma_i$ затемнена. При получении этих результатов было принято $t^* = 2.0$.

Анализ результатов распределения интенсивности напряжений по всей осесимметричной конструкции при различных ударах показал, что наибольшее значение интенсивности напряжений возникает при вертикальном (т.е. при продольном и произвольном) ударах груза по верхней части тела.

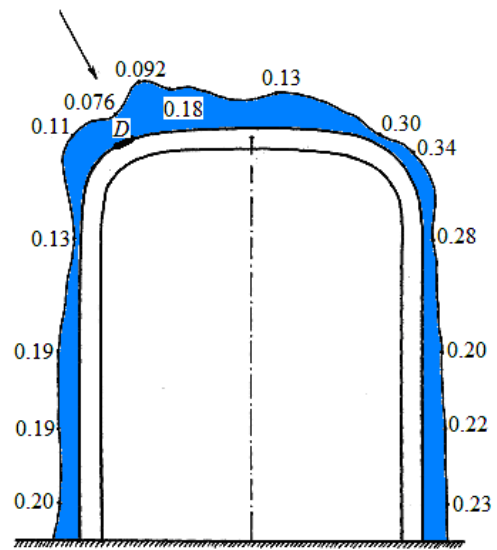


Рис. 6. Эюра распределения $\max \sigma_i$ по сечению тела при произвольном ударе по площадке D .

При этом максимальное значение интенсивности напряжений приходится на зону удара, на зону максимальной кривизны оболочки и на зону опорных сечений.

4. ВЫВОДЫ

Предложена модель для описания динамического поведения вязкоупругой осесимметричной конструкции при ударе по её поверхности недеформируемым телом.

Разработана методика и алгоритм для определения напряженно-деформированного состояния и динамического поведения вязкоупругого осесимметричного тела при ударе по его поверхности твёрдым грузом в пространственной постановке.

Решение задачи строилось с помощью разложения по собственным формам колебаний упругого осесимметричного тела.

Определены параметры ядра А.Р.Ржаницына для описания вязкоупругих свойств бетона.

На примере решения модельных задач исследовано напряженно-деформированное состояние и динамическое поведение вязкоупругого осесимметричного тела при ударе

по различным площадкам его поверхности твердым грузом.

Выявлено, что наибольшее значение интенсивности напряжений возникает при вертикальном: продольном и произвольном ударах груза по верхней части тела. При этом максимальное значение интенсивности напряжений приходится на зону удара, на зону максимальной кривизны оболочки и на зону опорных сечений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бирбраер А. Н., Роледер А.Ю.** Экстремальные воздействия на сооружения. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 594 с.
2. **Бирбраер А. Н., Шульман С.Г.** Прочность и надежность конструкций АЭС при особых динамических воздействиях. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 304с.
3. **Бугаенко С.Е., Буторин С.Л., Шульман Г.С., Шульман С.Г.** Прочность и надежность конструкций АЭС при экстремальных воздействиях. – М.: Энергоатомиздат 2005. – 576 с.
4. **Буторин С.Л., Шульман Г.С., Шульман С.Г.** Методы анализа безопасности АЭС при авиакатастрофах. – М.: Энергоатомиздат 2006. - 328 с.
5. **Ильюшин А.А., Победря Б.Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
6. **Мирсаидов М.М., Трояновский Е.И.** Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. – Ташкент: Фан, 1990. – 108 с.
7. **Мирсаидов М.М.** Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. – Ташкент: Фан, 2010. – 312 с.
8. **Мирсаидов М.М., Мехмонов Я.М.** Несимметричные колебания осесимметричных конструкций с присоединенными массами и выемками (выступами). // Межд. научно-технический журнал «Проблемы прочности». Киев, 1987, N3, с. 111-116.
9. **Мирсаидов М.М., Абдурашидов К.С., Хамраев П.Х.** О собственных колебаниях осесимметричных сооружений // Строительная механика и расчет сооружений, 1986, №5, с. 53-56.
10. **Мирсаидов М., Трояновский И.Е., Балакиров А.** Об одном способе решения задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук, 1985, №6, с.32-36.
11. **Ржаницын А.Р.** Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.
12. **Колтунов М.А.** Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
13. Ползучесть и усадка бетона в железобетонных конструкциях. Под редакцией С.В. Александровского. – М.: Стройиздат. 1976. – 351 с.
14. **Александровский С.В., Багрий Ю.Я.** Ползучесть бетона при периодических воздействиях. – М.: Стройиздат. 1979. – 167 с.

Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович, заведующий кафедрой «Теоретическая и строительная механика», Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан, 100 000, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39.
e-mail: theormir@mail.ru, utmn@tps.uz

Султанов Тохиржон Зокирович, проректор по научным исследованиям, Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан, 100 000, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39.
e-mail: tohir-zs@mail.ru

РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ КАМЕННОЙ ПЛОТИНЫ ДЛЯ УСЛОВИЙ КРАЙНЕГО СЕВЕРА

М.П. Саинов

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье получена принципиально новая конструкция каменной плотины с негрунтовым противофильтрационным элементом, адаптированную к работе в суровых климатических условиях Севера. В ней противофильтрационным элементом служит широкий экран из грунтоцементобетона. Но в отличие от обычных плотин с железобетонным экраном, в ней противофильтрационный элемент находится внутри тела плотины и защищён от воздействия льда и температуры. От фильтрации он может быть защищён геомембраной.

Ключевые слова: каменная плотина, численные исследования, конструктивное решение

RATIONAL STRUCTURE OF A STONE DAM TO THE CONDITIONS OF THE FAR NORTH

Mikhail P. Sainov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Is proposed to construct a stone dam with impervious non-ground element, which would allow you to create large and deep reservoirs in the Far North. This is a dam with a wide internal screen of concrete on the basis of soil and cement (soilcement). An important feature of the developed structure is its maintainability.

Key words: stone dam, numerical analysis, structure

В настоящее время наиболее рациональным и экономичным типом грунтовых плотин считаются каменные плотины с железобетонным экраном [1]. Отсутствие в теле такой плотины глинистых грунтов позволяет строить её в любых климатических условиях. Опыт показал, что они могут строиться практически на любых основаниях. Высота построенных плотин с железобетонным экраном достигла уже 233 м [2]. Даже при такой высоте обычно они показывают высокую надёжность.

Высокая надёжность плотин с железобетонным экраном связан с тем, в таких плотинах вся практически весь объём грунтовой насыпи включается в работу по восприятию гидростатического давления. Это уменьшает осадки и смещения плотины. В отличие от

плотин с ядром или диафрагмой в плотинах с экраном практически весь объём грунта находится в благоприятном напряжённом состоянии всестороннего сжатия под действием гидростатического давления. Это важно, если противофильтрационный элемент грунтовой плотины выполняется из негрунтового материала. Исследования [6] показали, что негрунтовые противофильтрационные материалы находятся в более благоприятном напряжённом состоянии, когда они находятся на поверхности грунтовой плотины, а не внутри её.

Тем не менее, напряжённое состояние железобетонного экрана не всегда благоприятно – экран может испытывать растяжение [5], что может стать причиной образования в нём трещин. Опыт эксплуатации построенных

плотин показывает [1, 2], что нарушение целостности железобетонного экрана не является редкостью. Нижняя часть экрана практически всегда испытывает растяжение, а периметральный шов между экраном и основанием всегда раскрывается.

Возникновение в экране трещин проявляет самый большой недостаток плотин с экраном – его ремонт оказывается затруднительным. Экран невозможно отремонтировать без опорожнения водохранилища. Это обстоятельство часто останавливает проектировщиков от использования плотин с железобетонными экранами в качестве водоподпорных сооружений крупных гидроэлектростанций, в которых опорожнение водохранилища невозможно.

На территории России плотины с железобетонным экраном никогда не строились. Это объясняется во многом тяжёлыми климатическими условиями нашей страны. Значительные по величине температурные воздействия и ледовые нагрузки могут нарушить прочность бетона. Например, понижение температуры на 20°C вызывает в бетоне уменьшение сжимающих напряжений примерно на 7 МПа. Так как обычно уровень сжимающих напряжений в железобетонном экране невелик, то зимой в нём могут возникать растягивающие напряжения такой величины, которая не может быть воспринята арматурой. В этом случае вероятность образования трещин резко возрастает.

Между тем, именно в условиях Крайнего Севера России строительство высоких грунтовых плотин с железобетонными экранами является наиболее целесообразным. Для строительства этих плотин не требуется доставка большого количества цемента и прочного скального основания. Строительство грунтовой плотины может вестись более быстрыми темпами и обойдётся дешевле. Поэтому наша задача – “приспособить” имеющиеся конструкции грунтовых плотин с железобетонным экраном к работе в условиях суровых зим.

Для этого, прежде всего, необходимо теплоизолировать железобетонный экран от колебаний температуры воздуха.

Одним из возможных решений по теплоизоляции экрана является его защита пенобетоном, который является довольно прочным материалом. Однако этот путь получается довольно трудозатратным. Дело в том, что для эффективной теплоизоляции толщина слоя пенобетона должна быть довольно значительной (около 1 м). Кроме того, слой теплоизоляции должен быть защищён от разрушающего действия льда и проникновения воды. Для этого требуется его покрытие ещё одним слоем, например торкретом. В итоге у экрана получается дорогостоящая многослойная конструкция, ремонт которой (в случае необходимости) будет довольно сложным.

Более рациональное конструктивное решение по теплоизоляции железобетонного экрана состоит в его заглублении под верхнюю грань плотины, т.е. в теплоизоляции экрана слоем грунта. Такой железобетонный экран по аналогии с грунтовыми можно назвать внутренним. Однако при заглублении экрана снижается ремонтпригодность плотины, т.к. доступа к экрану с поверхности не будет.

Таким образом, необходимо решить основной вопрос проектирования высоких грунтовых плотин – обеспечение его ремонтпригодности. Для высоких плотин в случае единственным возможным способом восстановления водонепроницаемости (в случае необходимости) является снижение проницаемости зоны повышенной фильтрации путём инъекции цементных растворов. Однако инъекция в камень не всегда может быть проведена успешно. Поэтому желательно, чтобы подэкранный слой был выполнен из удобного для бурения и инъекции материала. Профессор Рассказов Л.Н. предложил в качестве такого материала грунтоцементобетон.

Грунтоцементобетон представляет собой смесь щебенистого грунта и цементного раствора. Он как укатанный бетон укладывается

в тело плотины послойно и уплотняется катками, однако в отличие от укатанного бетона при изготовлении грунтоцементобетона перемешивание камня и раствора производится непосредственно на карте отсыпки (так называемая раздельная технология укладки). В настоящее время плотины из грунтоцементобетона (так называемые “твёрдые насыпи”) [3] успешно используются для создания низко- и средненапорных гидроузлов. Эта технология хорошо разработана.

В грунтовых плотинах с экраном подэкрановая зона из грунтоцементобетона должна быть довольно широкой, чтобы было удобно её инъецировать и чтобы в ней можно было расположить потерны, из которых будет вестись инъеция.

Как показывают опыты, грунтоцементобетон является довольно прочным материалом. Его прочность на сжатие может достигать 3 и даже 9 МПа [4]. Поэтому устройство подэкрановой зоны из грунтоцементобетона при определённых условиях может улучшить напряжённое состояние железобетонного экрана [5]. Это происходит за счёт выравнивания изгибных деформаций экрана. Железобетонный экран и подэкрановая зона из грунтоцементобетона будут работать как единая жёсткая конструкция, т.е. по сути представлять собой двухслойный противофильтрационный экран.

Однако подэкрановая зона из грунтоцементобетона может и сама служить противофильтрационным элементом. Как показывают натурные и лабораторные опыты, грунтоцементобетон имеет малую водопроницаемость [3]. Железобетонный экран на его внешней поверхности нужен в основном для защиты от ледовых нагрузок, а также для снижения фильтрации. Если противофильтрационный элемент из грунтоцементобетона расположить внутри тела плотины, то он не будет подвергаться ледовым нагрузкам. В этом случае железобетонный экран становится излишним.

Для дополнительной защиты грунтоцементобетона от фильтрации можно использовать

экран из полимерной плёнки (геомембраны). В настоящее время геомембраны широко используются в качестве противофильтрационных элементов, в т.ч. для создания накопителей твёрдых отходов на Крайнем Севере. Геомембраны могут использоваться при значительных отрицательных температурах (-40°C и ниже). Геомембраны обладают высокой прочностью на растяжение (свыше 10 МПа). Как показывает опыт эксплуатации геомембранных экранов, срок их службы не ограничивается 20 годами, они могут служить значительно дольше. Но даже в случае выхода геомембраны из работы надёжность противофильтрационной защиты не уменьшится, противофильтрационную функцию будет выполнять грунтоцементобетонный экран. Геомембрана является лишь дополнительной “степенью защиты”.

Для оценки надёжности разработанной конструкции плотины проводились численные исследования её напряжённо-деформированного состояния (НДС). Была рассмотрена плотина для створа Канкунской ГЭС высотой 226,7 м (рис. 1). В ней грунтоцементобетонный экран через наклонный скользящий шов опирается на бетонную призму.

Расчёт производился по вычислительной программе NDS-N, учитывающей упругопластическое деформирование грунтов [7] и влияние последовательности возведения плотины, которая составлена автором.

Расчёты НДС показали, что несмотря на изгиб экрана в процессе восприятия гидростатического давления в большей части экрана напряжения – сжимающие по всем направлениям. Неблагоприятное НДС наблюдается только в нижней части экрана, вблизи контакта экрана с бетонной упорной призмой. Здесь возможно возникновение в грунтоцементобетоне трещин, но они могут быть отремонтированы инъецией.

Вследствие прогиба экрана, происходит раскрытие шва между экраном и бетонной призмой. На верховой грани раскрытие достигает 8 см. Необходимо качественное уплотнение шва.

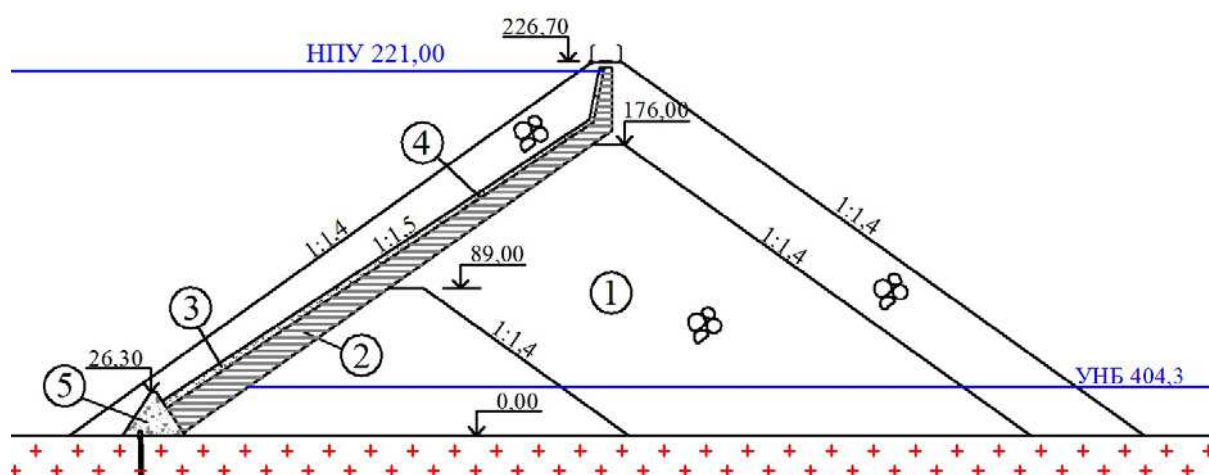


Рис. 1. Конструкция плотины с грунтоцементобетонным экраном.

1 – упорная призма из горной массы, 2 – экран из грунтоцементобетона, 3 – защитный слой из гравийно-песчаного грунта, 4 – экран из полимерной плёнки, 5 – бетонная призма.

Исследование влияния на НДС плотины прочностных свойств контакта полимерной плёнки с грунтом показало, что при коэффициенте трения 0,53 скольжения верховой призмы по экрану не происходит, а при коэффициенте трения 0,36 происходит сползание каменной наброски по поверхности негрунтового экрана. Таким образом, необходимо использовать плёнку повышенной шероховатости или выполаживать откос.

ВЫВОДЫ

Мы получили принципиально новую конструкцию каменной плотины с негрунтовым противофильтрационным элементом, адаптированную к работе в суровых климатических условиях Севера. В ней противофильтрационным элементом служит широкий экран из грунтоцементобетона. Но в отличие от обычных плотин с железобетонным экраном, в ней противофильтрационный элемент находится внутри тела плотины и защищён от воздействия льда и температуры. От фильтрации он может быть защищён геомембраной.

Данная конструкция будет иметь повышенную надёжность, т.к. имеет в своём составе два противофильтрационных элемента. Кро-

ме того, данная конструкция обладает хорошей ремонтпригодностью. Трещины, которые могут возникнуть в грунтоцементобетоне, можно “залечить” путём инъекции.

Проведённые нами численные исследования напряжённо-деформированного состояния разработанной конструкции грунтовой плотины показали, что экран из грунтоцементобетона имеет благоприятное напряжённое состояние, что позволяет с оптимизмом говорить о её надёжности. Однако следует усовершенствовать конструкцию узла сопряжения экрана с основанием и обеспечить повышенное трение на контакте геомембраны с грунтом верховой призмы плотины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **James L. Sherard, J. Barry Cook.** ASCE. “Concrete – Face Rockfill Dams: I Assessment”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Volume 113, N10, October 1987.
2. Грунтоцемент для грунтовых плотин. Бюллетень комитета по большим плотинам. 1986 г. Перевод ВНИИГа, 1987, 55 с.
3. **Ляпичев Ю.П.** Проектирование и строительство современных высоких плотин:

Учеб. Пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2004, - 275 с.: илл.

4. **Монсеф Белаид.** Использование укатанного бетона и грунтоцемента в гидротехническом строительстве Туниса. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук, СПб, 2002.
5. **Саинов М.П.** Совершенствование конструкции высокой каменной плотины с железобетонным экраном. // Вестник МГСУ, 2011, №5.
6. **Саинов М.П.** Сравнение вариантов конструкции высокой каменной плотины в условиях Якутии. // Вестник МГСУ, 2011, выпуск № 5.
7. **Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н.** Проектирование грунтовых плотин. – М.: Изд-во АСВ, 2001. – 384 с.

Саинов Михаил Петрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры гидротехнических сооружений ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел: +7 (499) 183-27-47; факс: +7 (499) 183-57-42;
E-mail: mp_sainov@mail.ru