

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 8, Issue 2 *2012*

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor, Vice-Rector
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
ASV Publishing House
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University
of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Department of Mechanical
Engineering
Massachusetts Institute of
Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakov, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosa
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics
and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Technologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkehoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatiken und
Festigkeitslehre
Techische Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,
Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics
and Mathematics, Moscow State
Univ. of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Bernhard A. Schrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.
Via
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for
Technical Education, New Delhi,
India

Waclaw Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmers University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij} . \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

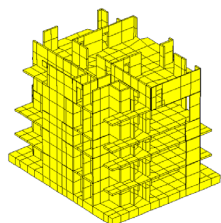


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date.** Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

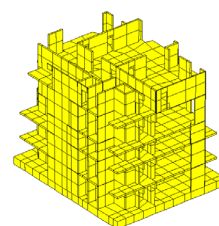


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 8, Issue 2

2012

TABLE OF CONTENTS

Mathematical Modelling of Non-Linear Deformation Process for Frame-Type Building Structures Under Seismic Loads <i>Vladimir G. Dmitriev</i>	<u>13</u>
Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара Часть 1: Введение. Одномерный случай <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<u>30</u>
Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара Часть 2: Двумерный случай <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<u>40</u>
Об операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета тонкой анизотропной пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>47</u>
Численное моделирование в экспертизах причин локального разрушения и прогрессирующего обрушения конструкций большепролетных зданий <i>А.М. Белостоцкий</i>	<u>54</u>
О переходных процессах свободных колебаний системы с тремя степенями свободы при наличии трения <i>А.В. Дукарт, В.Н. Фам, Т.Б. Фам</i>	<u>63</u>
Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости большепролетных деревянных арочных конструкций <i>А.Ю. Зобачева, Г.Г. Кашеварова, И.Н. Фаизов</i>	<u>69</u>
Структура вязкого циркуляционно-продольного течения в цилиндрическом канале <i>А.Л. Зуйков</i>	<u>82</u>

- Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли** **97**
М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов
- Принцип проектирования конструкций на основе сталефибробетона с заданными эксплуатационными характеристиками** **108**
К.В. Талантова, М.Д. Сони́на
- Напряженно-деформированное состояние основания под воздействием полосовой нагрузки с учетом неполного водонасыщения грунта** **118**
З.Г. Тер-Мартirosян, В.В. Сидоров, Х.Х. Нгуен
- Сравнительный анализ опытных и расчетных деформаций грунтового массива, закрепленного струйной цементацией** **126**
И.И. Хусаинов, О.А. Маковецкий, Г.Г. Кашеварова

MATHEMATICAL MODELING OF NON-LINEAR DEFORMATION PROCESS FOR FRAME-TYPE BUILDING STRUCTURES UNDER SEISMIC LOADS

Vladimir G. Dmitriev

Moscow State Opened University, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The study develops adequate mathematical models and efficient numerical methods to investigate the particular features of non-linear deformation of frame-type reinforced concrete structures under different static and dynamic loads including seismic loads. Computing experiment methods are used to explore how the parameters of viscoelastic dampers impact the deformation and cracking processes in the framed five-beam structure loaded by the horizontal component of a seismic wave.

Key words: reinforced concrete structure, seismic loads, mathematical modeling, numerical methods, finite difference, conservative scheme

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ КАРКАСНОГО ТИПА ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В.Г. Дмитриев

Московский государственный открытый университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В работе разрабатываются адекватные математические модели и экономичные численные методы, позволяющие исследовать особенности нелинейного деформирования железобетонных конструкций каркасного типа при различных видах статического и динамического нагружения, включая сейсмические воздействия. Методами вычислительного эксперимента исследовано влияние параметров вязкоупругих амортизаторов на процессы деформирования и трещинообразования каркасной конструкции, состоящей из пяти балочных элементов, при действии горизонтальной компоненты сейсмической волны.

Ключевые слова: железобетонные конструкции, сейсмические воздействия, математическое моделирование, численные методы, конечные разности, консервативные схемы

Building structures in service resist combined dynamic and static loads of different kind and nature, such as: gravity load (the weight of bearing and enclosing structures); weather load (snow, ice, wind, wave, temperature); loads due

to the ground movement (seismic, explosion load), etc [1]. With the help of the computing experiment methods, this study explores the particular features of non-linear deformation of frame-type reinforced concrete structures under

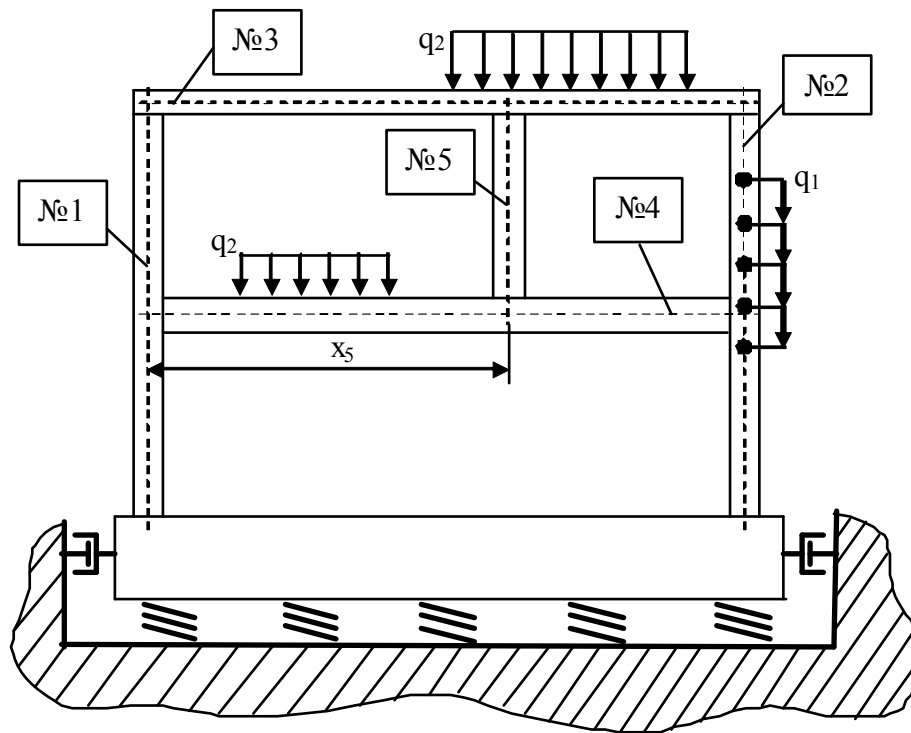


Figure 1.

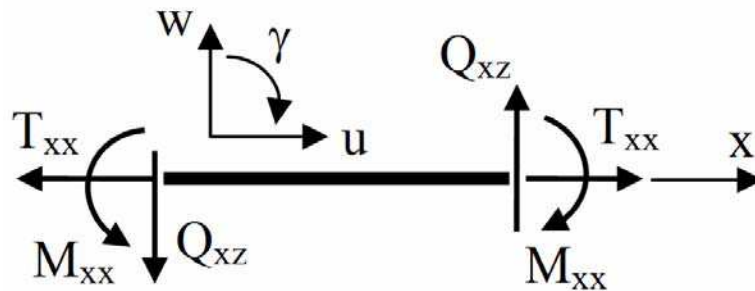


Figure 2.

different static and dynamic loads including seismic loads. The framed structure is considered to be a composite construction as a combination of vertical and horizontal bearing members (columns, partitions, floors etc.) which are properly joined to each other (solid and composite constructions) (see Figure 1). The parameters of strain stress state are expressed through geometrical non-linear relations of Timoshenko theory of plates and beams which gives more accurate description of specific deformation of the reinforced concrete structures with low shear rigidity in case of large displacements. Moreover, Timoshenko hyperbolic

equations describe the distribution of coordinate surface deformation waves and flexural-shear waves.

Geometrical non-linear expressions for the tangential E_{xx} , transversial E_{xz} and flexural K_{xx} deformation components of a coordinate line in the context of the theory of average bending are as follows [2,3]

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_x^2; \quad E_{xz} = \gamma - \theta_x; \quad K_{xx} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad (1)$$

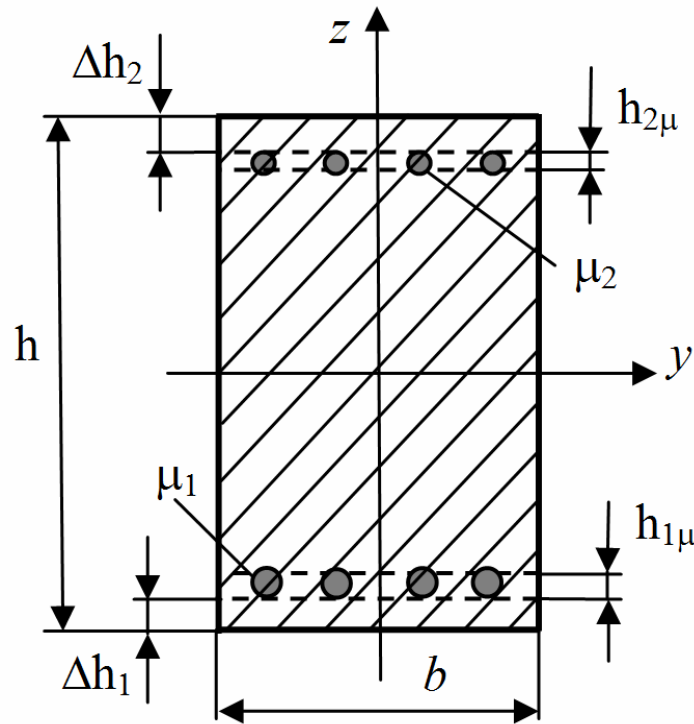


Figure 3.

where

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2)$$

and where u is a tangential displacement, w stands for deflection, θ_x is a pivot angle according to the hypothesis of “rigid” normal; γ is the full pivot angle of the normal (see Fig. 2).

We assume that concrete and reinforcement work in elastic stage. One-side and two-side reinforcement is studied (see Fig. 3).

Reinforcement members are modeled as an orthotropic layer which has equivalent rigidity and which works in tension-compression and transverse shear in reinforcement direction at zero values of Poisson ratios [4]. Layer thickness $h_{1\mu}$ and $h_{2\mu}$ is determined by reinforcement factors as follows

$$h_{1\mu} = \mu_1 \cdot h; \quad h_{2\mu} = \mu_2 \cdot h, \quad (3)$$

where μ_1, μ_2 are reinforcement factors in the layers $z < 0$ and $z > 0$ respectively. Force factors, re-

duced to the coordinate line - tension (compression) force T_{xx} , shear force Q_{xz} and bending moment M_{xx} - are expressed by the deformation components (see Fig.2) as follows

$$\begin{aligned} T_{xx} &= (B_b + B_a)E_{xx} + A_a K_{xx}; \\ M_{xx} &= (D_b + D_a)K_{xx} + A_a E_{xx}; \\ Q_{xz} &= (C_b + C_a)E_{xz}. \end{aligned} \quad (4)$$

Stiffness factors are determined by the physical and mechanical properties of the concrete and reinforcement

$$\begin{aligned} B_b &= E_b \cdot (bh); & C_b &= k^2 G_b \cdot (bh); \\ D_b &= E_b \cdot \left(\frac{bh^3}{12} \right); & A_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a (z_i \cdot h_i); \\ B_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \cdot h_i; & C_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n k^2 G_a \cdot h_i; \\ D_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \left[(z_i^2 \cdot h_i) + \frac{h_i^3}{12} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

where b is a beam width, E_a, G_a are Young modulus and reinforcement shear modulus, E_b, G_b are Young modulus and concrete shear modulus, z_1 and z_2 are the centre coordinates of h_1 and h_2 layers; $k^2=5/6$. Formulas (5) have $n=2$ for two-side reinforcement and $n=1$ for one-side reinforcement. Relations (1) to (5) may be applied to the extended panel structures whose cross sections are subject to conditions of plane-strain deformation ($\varepsilon_{yy}=0$), if $b=1$ is entered into (5) and the expressions B_b and D_b are changed as follows

$$B_b = \frac{E_b h}{1 - \nu_b^2}; \quad D_b = \frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad (6)$$

where ν_b is Young modulus of the concrete. We assume that the structure may suffer the combined load from different static and dynamic forces. Equilibrium equations are derived based on Lagrange variation principle

$$\delta \mathcal{D} = \delta \Pi - \delta A = 0, \quad (7)$$

where Π is the potential energy of deformation, A is the work of external forces [2,3]. When the specific features of transient processes are investigated in structural dynamics, the motion equation is derived from the following form of Hamilton-Ostrogradsky variation equation

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi - \delta A) dt = 0, \quad (8)$$

where K is kinetic energy. Using (7), we get the beam equilibrium equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + q_1 &= 0; & \frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + q_2 &= 0; \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} + q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$Q_{xx} = Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x, \quad (10)$$

and q_1, q_2, q_3 are load components. The load has general and/or local distribution $q=q(x)$, the load components include the components of dead weight, structure and equipment face elements weight, snow load and the load which adjacent members of a composite structure transfer to each other, etc.

Operator form of the motion equation resulting from (8) is given below

$$[L_x(U)]_k + q_k = m_k \ddot{u}_k, \quad (11)$$

where $[L_x(U)]_k$ are the correspondent differential operators for the vector of generalized displacements $U=U(u_1, u_2, u_3)$; $u_1=u$, $u_2=w$, $u_3=\gamma$ are the generalized displacements u_k ($k=1,2,3$). The type of load in dynamic problems is defined by the correspondent function of load $q=q(x,t)$. Inertial parameters of reinforced concrete structures are defined as follows [4]

$$m_k = b \cdot \left[\rho_b h + \sum_{i=1}^n \rho_a h_i \right] \quad (k=1,2); \quad (12)$$

$$m_3 = b \cdot \left[\frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^n \rho_a \cdot \left(\frac{h_i^3}{12} + z_i^2 \cdot h_i \right) \right],$$

where ρ_a is the reinforcement density and ρ_b is the concrete density. In case of (6), formula (12) has $b=1$. The initial conditions are specified for the generalized displacements u_k and their velocities \dot{u}_k

$$u_k|_{t=0} = u_k^0; \quad \left. \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{u}_k^0, \quad (13)$$

where u_k^0, \dot{u}_k^0 are the given initial values of the generalized displacements and their velocities $t=0$.

Motion equation (11) and equilibrium equation (9) are developed for the projections onto coordinate axis of a non-deformed coordinate system, thus, we can easily state a problem for a composite structure. Solid con-

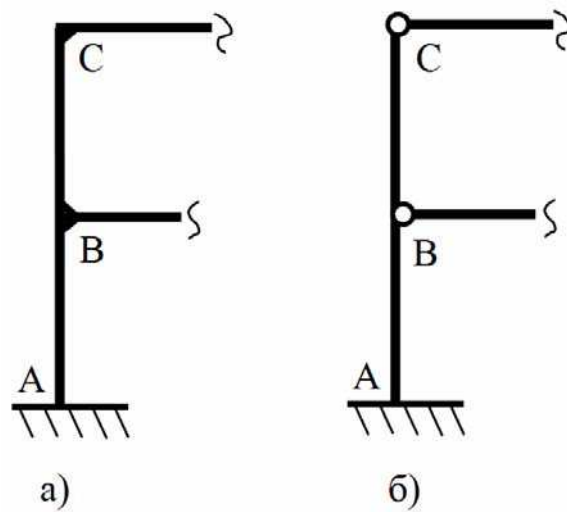


Figure 4.

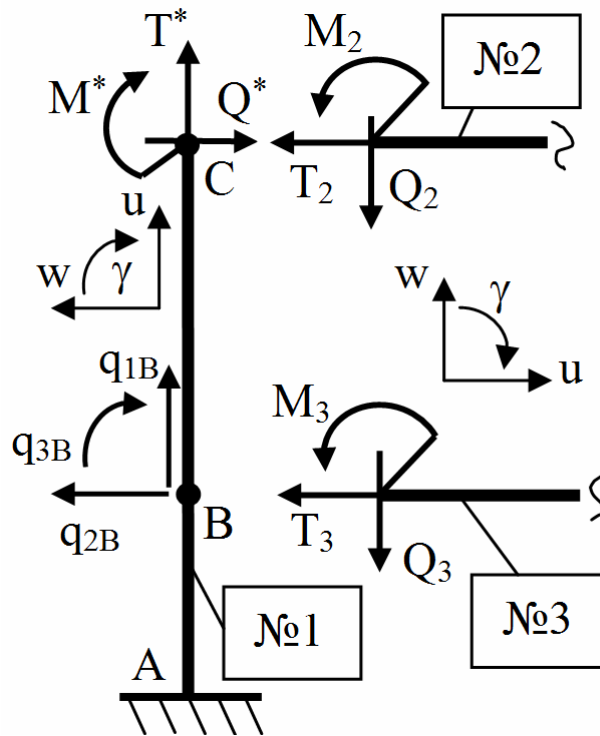


Figure 5.

nection of members in composite structure is modeled as rigid fixing (Fig. 4a). Boundary conditions, such as pin-edge fixing, can be introduced to model the connection in points B and C of composite structures (Fig. 4b). According to the rule of signs for generalized displacements and forces, we have the following kinematic and force conditions of the connec-

tion (conditions of compatibility of works) for members No.1, No.2 and No.3 of a composite structure (see Fig.2 and 5).

point A:

$$u_{1A} = u^*; w_{1A} = w^*; \gamma_{1A} = 0; \quad (14)$$

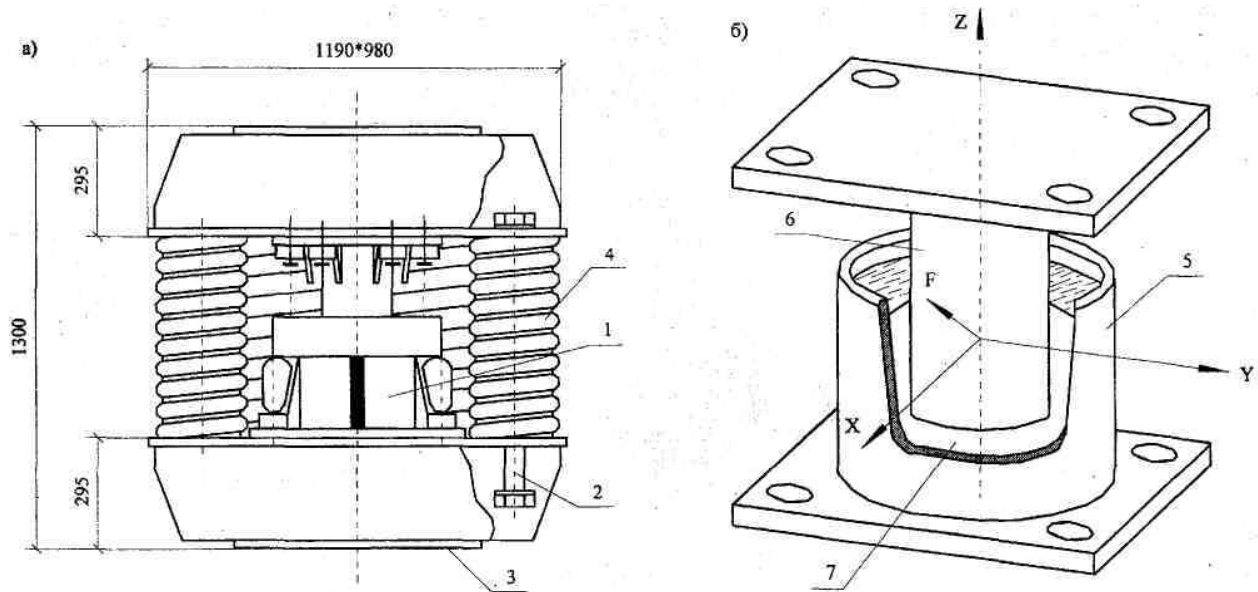


Figure 6. Construction arrangement of spring vibration isolator of GERB (a) type and viscodamper VES (b) (Germany):
 1 - piston viscodamper VES; 2 - pin; 3 - support plate;
 4 - spring; 5 - body; 6 - piston; 7 - viscous fluid

point B:

- solid structure:

$$u_{3B} = -w_{1B}; \quad w_{3B} = u_{1B}; \quad \gamma_{3B} = \gamma_{1B};$$

$$q_{1B} = \frac{Q_3}{dx}; \quad q_{2B} = -\frac{T_3}{dx}; \quad q_{3B} = \frac{M_3}{dx}; \quad (15)$$

- composite structure:

$$u_{3B} = -w_{1B}; \quad w_{3B} = u_{1B}; \quad M_{xx}^{(3)} = 0;$$

$$q_{1B} = \frac{Q_3}{dx}; \quad q_{2B} = -\frac{T_3}{dx}; \quad q_{3B} = 0, \quad (16)$$

point C:

- solid structure:

$$u_{2C} = -w_{1C}; \quad w_{2C} = u_{1C}; \quad \gamma_{2C} = \gamma_{1C};$$

$$T_{xx}^{(1)} = T^*; \quad Q_{xx}^{(1)} = -Q^*; \quad M_{xx}^{(1)} = M^*; \quad (17)$$

- composite structure:

$$u_{2C} = -w_{1C}; \quad w_{2C} = u_{1C}; \quad M_{xx}^{(2)} = 0;$$

$$T_{xx}^{(1)} = T^*; \quad Q_{xx}^{(1)} = -Q^*; \quad M_{xx}^{(1)} = 0, \quad (18)$$

where

$$T_2 = T_{xx}^{(2)}; \quad Q_2 = Q_{xx}^{(2)}; \quad M_2 = M_{xx}^{(2)};$$

$$T_3 = T_{xx}^{(3)}; \quad Q_3 = Q_{xx}^{(3)}; \quad M_3 = M_{xx}^{(3)};$$

$$T^* = Q_2; \quad Q^* = T_2; \quad M^* = M_2, \quad (19)$$

and where asterixes indicate boundary kinematic and force parameters given before or defined in the course of solving the problem.

Different seismic isolation systems are applied now to decrease seismic loads on buildings and structures [5,6]. When a viscoelastic system with correctly chosen viscous and elastic parameters is applied, the dangerous combination of the seismic load spectrum and structure natural frequencies is prevented; most energy of applied action is absorbed. Moreover, dampers of viscous friction add nearly nothing to the total rigidity of the system. Refer to Fig. 6 [5] for the construction arrangement of viscoelastic absorbing systems, which consist of elastic members working in tension-compression and shear (steel wound springs), and dampers of viscous friction.

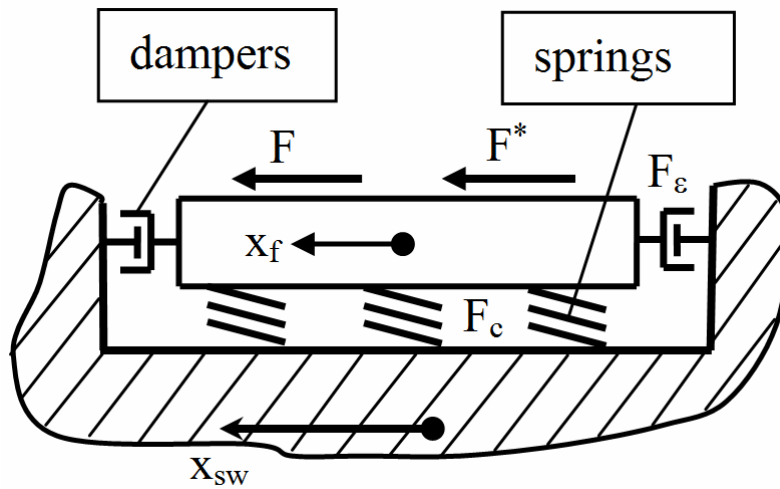


Figure 7.

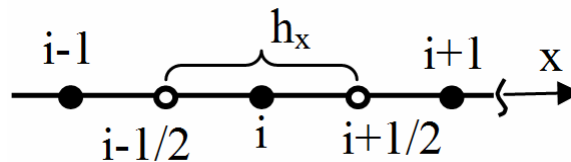


Figure 8.

Mathematical model is created for frame-beam structure on the damped foundation plate in the same way as [4]. System “structure-foundation plate” is considered as a jointly acting composite structure.

Fig. 7 shows a damped foundation plate installed on elastic members combined with viscous friction dampers which work independently in two directions.

Without loss of generality, we only take the case of action of seismic wave horizontal component x_{sw} . We assume that the foundation plate movement is a rigid body displacement x_f only along the horizontal axis, thus the motion equation of the rigid foundation plate can be written as follows (Fig. 7)

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_\epsilon - (F + F^*) = 0, \quad (20)$$

where m_f is the plate mass, F^* is the given load on the plate, F is the reaction of the structure supporting members, F_c and F_ϵ are viscous and

elastic components of the damping system reaction. In general case we have $F^* = F^*(t)$, and in particular case we have: $F^* = \text{const}$. According to the rule of signs (Fig. 2,7)

$$F = \sum_{m=1}^M Q_{xx}^{(m)}; \quad F_c = c_z (x_f - x_{sw});$$

$$F_\epsilon = \epsilon_v \dot{x}_f, \quad (21)$$

where M is the number of supporting members related to the foundation plate, c_z and ϵ_v are integral values of the viscous and elastic components of the damping system, $x_{sw} = x_{sw}(t)$ is the given law of foundation displacement caused by dynamic load, in particular by a seismic wave. Supporting points of the structure meet kinematical boundary conditions (14), which can be written in the following way considering only a horizontal displacement of the foundation plate

$$u_m = 0; \quad w_m = x_f; \quad \gamma_m = 0, \quad (22)$$

where $m=1,2,\dots,M$. When undamped foundation is rigidly connected to the ground soil, we have: $w_m=x_f=x_{sw}$. A similar model “structure on the damped foundation plate” can be created for the vertical component of a seismic wave and for the joint action of vertical and horizontal components [4].

When numerical methods are applied to solve non-linear boundary initial value problem, the finite-difference method is applied for discretization along spatial coordinate x and time coordinate t [7,8]. Each member of the composite structure is covered within the area of continuous variation of argument x ($0 \leq x \leq l$) by the main grid with a pitch $h_x = \text{const}$ and auxiliary grid, the main grid nodes have integer indices and the auxiliary grid nodes have fractional indices ($i \pm 1/2$) (Fig. 8). Grid functions $u_k(i)$, $\dot{u}_k(i)$ and $g_k(i)$ correspond to the functions of generalized displacements $u_k(x)$, velocities $\dot{u}_k(x)$ and loads $g_k(x)$ in the main grid nodes. The grid functions of stress- strain state parameters relate to the auxiliary grid nodes. Differential operators are approximated by the finite differences of the second order accuracy $O(h_x^2)$, using $u_k(i)$ values in the main grid nodes for the piecewise linear interpolation of the function inside the grid cell. The finite-difference equivalents of static equilibrium equations and motion equations are obtained with the help of variation-difference method [3,7,8]. When potential energy of deformation Π_i and external force work A_i are determined on the member $\Delta F_i = c^* \cdot h_x$ (c^* is a weight factor) in the grid area, discrete Lagrangian (7) for the domain of the structure member can be written as the following sum

$$\Theta_\Sigma = \sum_i (\Pi_i - A_i). \quad (23)$$

When numerical integration is performed, weight factors are introduced into (23) to consider the integration area produced by the correspondent part of the member in the grid area [3]. The total sum (23) include those nodes of finite-difference scheme where generalized displacements $u_k(i)$ vary. The finite-difference equiva-

lents of static equilibrium equations (9) derived from Lagrangian’s minimum condition (23)

$$\frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \Theta_\Sigma}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (24)$$

can be written as follows

$$\begin{aligned} & \frac{(b_{22}^* \cdot T_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot T_{xx})_{i-1/2}}{h_x} + \\ & + (c^* \cdot q_1)_i - \frac{T^*}{h_x} \Big|_{x=0} + \frac{T^{**}}{h_x} \Big|_{x=X} = 0; \\ & \frac{(b_{22}^* \cdot Q_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot Q_{xx})_{i-1/2}}{h_x} + \quad (25) \\ & + (c^* \cdot q_2)_i - \frac{Q^*}{h_x} \Big|_{x=0} + \frac{Q^{**}}{h_x} \Big|_{x=X} = 0; \\ & \frac{(b_{22}^* \cdot M_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot M_{xx})_{i-1/2}}{h_x} - \\ & - \frac{(b_{11}^* \cdot Q_{xz})_{i-1/2} + (b_{22}^* \cdot Q_{xz})_{i+1/2}}{2} + \\ & + (c^* \cdot q_3)_i - \frac{M^*}{h_x} \Big|_{x=0} + \frac{M^{**}}{h_x} \Big|_{x=X} = 0, \end{aligned}$$

where T^*, Q^*, M^* and T^{**}, Q^{**}, M^{**} are the given boundary loads for $x=0$ and $x=l$ respectively (Fig. 2), b_{11}^*, b_{22}^* are weight factors. The weight factors are within the range $0 < c^* \leq 1$; $0 \leq b_{11}^* \leq 1$; $0 \leq b_{22}^* \leq 1$ depending on the area of numerical integration [3,7]. Regular nodes of the grid have the weight factors equal to one.

When non-stationary problems are solved by numerical methods, the main grid $t^{(n)} = \Delta t \cdot n$ ($\Delta t = \text{const}$, $n \geq 0$) is introduced in the continuous area $t \geq 0$ and the grid functions of generalized displacements $u_k(i)$ relate to the grid nodes. The grid functions of velocity $\dot{u}_k(i)$ relate to the auxiliary grid nodes $t^{(n \pm 1/2)}$. Differential operators are approximated by the finite differences of the second order approximation $O(\Delta t^2)$. The kinetic energy of each member of the composite structure is written in discrete form as follows

$$K_{\Sigma} = \sum_i \left\{ 0,5 \left[\sum_{k=1}^3 (m_k \dot{u}_k^2)_i \right] \Delta F_i \right\}. \quad (26)$$

If integration in (8) is replaced by the summation over the grid area $t^{(n)}$, the discrete form of \mathbf{I} functional can be presented

$$I_{\Sigma} = \sum_n \left\{ 0,5 [(f_1 K_{\Sigma})^{(n-1/2)} + (f_2 K_{\Sigma})^{(n+1/2)}] - (f^* \Theta_{\Sigma})^{(n)} \right\} \Delta t, \quad (27)$$

where is the discrete Lagrangian (23) which is expressed by the values of grid functions of generalized displacements $[u_k]_i^{(n)}$, physical mechanical properties and loads on the n -th time layer. The finite-difference equivalents of motion equations (11) are derived from the variation-difference equations

$$\frac{\partial I_{\Sigma}}{\partial [u_k]_i^{(n)}} = 0, \quad (28)$$

and can be written as follows

$$\begin{aligned} \{f^* [L_{h_x}(u_k; g_k)]\}_i^{(n)} &= \quad (29) \\ &= \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \end{aligned}$$

where $[L_{h_x}(u_k; g_k)]$ stand for the left parts of finite-difference equivalents of equilibrium equations (25) and f^*, f_1, f_2 are weight factors [3,4]. The variation-difference form of the initial boundary value problem allows the development of conservative finite-difference schemes, where convergence of the numerical solution $u_k(i,)$ to the exact $u_k(x)$ is achieved with the grid refinement [7,8].

When a static problem is described by the grid equations (25) and solved by numerical methods, quasi-dynamic form of stabilization method [3,8-10] is applied. When we go to evolutionary problems, the equilibrium equations (25) are replaced by the form of equation of motion in viscous fluid as follows

$$[L_{h_x}(u_k; g_k)]_i = (a_k c^* m_k \ddot{u}_k)_i + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (30)$$

where $\varepsilon_k(i)$ are the specific viscosity parameters of artificial fluid ($k=1,2,3$), $a_k \geq 1$ are weight factors, which accelerate the convergence of iteration process. Without loss of generality, we only take the case of stationary iteration process [8]. Performed on the grid with pitch $\Delta t = \text{const}$ as in (26) to (29), approximation of equations (30) gives the explicit formulas for the generalized velocities $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$ on the time layer $t^{(n+1/2)}$

$$\begin{aligned} [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} &= \left[\frac{2a_k m_k - \varepsilon_k \Delta t}{2a_k m_k + \varepsilon_k \Delta t} \right] \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \\ &+ \frac{2\Delta t \cdot [L_{h_x}(u_k; g_k)]_i^{(n)}}{c_i^* \cdot [2a_k m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i}, \quad (31) \end{aligned}$$

and grid functions $[u_k]_i^{(n+1)}$ on the time layer $t^{(n+1)}$

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \quad (32)$$

Thus, the difference approximation of non-stationary equations (30) results in the iteration process (31), (32) used to find the solution of the initial static problem (25). Adjusted for the numerical solution of grid equations (25), the stabilization method takes the form of optimal linear iteration process [8] and allows us to convert the solution of initial non-linear static problem to the solution of quasi-dynamic problem (30). This significantly simplifies the development and implementation of computation algorithm in view of geometric and physical non-linearity [3,10].

Iteration process parameters are determined by the convergence acceleration and stability of finite-difference scheme

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= 2a_{\varepsilon, (k)} \sqrt{\frac{m_k^* \mu_{1, (k)} \mu_{2, (k)}}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}, \\ \Delta t_k &= 2a_{t, (k)} \sqrt{\frac{m_k^*}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}, \quad (33) \end{aligned}$$

where $m_k^* = a_k \cdot m_k$; $\mu_{1,(k)}$ and $\mu_{2,(k)}$ are minimal and maximal eigenvalues of finite-difference operators in equations (25); $a_{\varepsilon,(k)}$ and $a_{t,(k)}$ are correction factors close to 1 [4,8]. The time pitch Δt for the total finite-difference scheme is determined by the condition

$$\Delta t = \min_k \Delta t_k. \quad (34)$$

Regarding physical relations (5),(6), the estimation formulas for $\mu_{1,(k)}$ and $\mu_{2,(k)}$ are as follows:
 – minimal eigenvalues

$$\begin{aligned} \mu_{1,(1)} &= 4 \cdot \left(\frac{B_b + B_a}{h_x^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{1,(2)} &= 16 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{h_x^4} \sin^4 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{1,(3)} &= 4 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \end{aligned} \quad (35)$$

– maximal eigenvalues

$$\begin{aligned} \mu_{2,(1)} &= 4 \cdot \left(\frac{B_b + B_a}{h_x^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{2,(2)} &= 16 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{h_x^4} \cos^4 \frac{\pi h_x}{2 l} \right); \\ \mu_{2,(3)} &= 4 \cdot \left(\frac{D_b + D_a}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2 l} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

When approximation of time derivatives in the equations (29) is performed by finite-difference operators of the second order accuracy $O(\Delta t^2)$, it allows us to develop the unified finite-difference scheme in the form (31),(32) for both static and dynamic problems. This is important for dynamic stress calculation of structures because equation (13) requires consideration of initial strain stress state mostly determined by gravity load. To consider energy dissipation, artificial viscosity parameters ε_k can be used and estimated as follows

$$\varepsilon_k = a_{\varepsilon,(k)} \frac{\delta_k}{\pi} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (37)$$

where δ_k is the logarithmic vibration decrement, and $a_{\varepsilon,(k)}$ are correction factors [2,4].

Unlike dynamic problems, stabilization method is applied to get the final result while intermediate solutions have no sense. When density ρ is used in the iteration process of static problem (25), the physical meaning of density is not so strict as in dynamic problem (29); parameters m_k may be taken to facilitate calculation and increase the critical value Δt . Factors $a_k \geq 1$ are used in (30) to filter high-frequency components of error, to increase the critical value Δt for the total finite-difference scheme and to cut down the computing time in significant way. According to condition $\Delta t_k = \Delta t_{\max}$, the values of factors a_k can be estimated

$$a_k = \left(\frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_k} \right)^2, \quad (38)$$

where pitches Δt_k are determined according to (33) to (36). We can interpret the introduction of factors a_k as the introduction of dummy density $\rho_k = a_k \rho$.

When numerical methods are applied to non-stationary problems and correction factors $a_k \geq 1$ and $a_{\varepsilon,(k)} \geq 1$ are used for the solution component at $k=3$, which corresponds to grid function of pivot angle of the normal γ_i ($a_1 = a_2 = 1$), it allows us to avoid numeric instability caused in particular by high-frequency oscillation and quickly accumulated round-off errors due to the limited size of words in standard computers. Such numeric instability appears at computing of solid structures with boundary conditions (15),(17) which form the nodes of local high rigidity. The optimum values of the correction factors can be determined after trial runs at the computer which helps to estimate the low limit required for stability and convergence.

Numerical computing algorithms for static and dynamic problems of a damped foundation plate are developed in the same way as (23) to (36), therefore

$$\begin{aligned} [\dot{x}_f]^{(n+1/2)} &= \frac{2m_f - \varepsilon_v \Delta t}{[2m_f + \varepsilon_v \Delta t]} \cdot [\dot{x}_f]^{(n-1/2)} + \\ &+ \frac{2\Delta t \cdot [F + F^* - F_c]^{(n)}}{2m_f + \varepsilon_v \Delta t}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$[x_f]^{(n+1)} = [x_f]^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{x}_f]^{(n+1/2)}.$$

The developed mathematical models and numeric methods (1) to (39) are combined in the package of FORTRAN-IV programs which helped to investigate how the integral properties of viscoelastic damping system impact the non-linear deformation and cracking of the reinforced concrete framed structure under dynamic load, which was modeled as a horizontal component of seismic wave. The framed 5-member structure was taken with the following geometrical parameters (Fig. 1,3): $l_1=l_2$; $h_1=h_2$; $l_3=l_4=1,2 \cdot l_1$; $l_5=0,5 \cdot l_1$; $h_3=0,5 \cdot h_1$; $h_4=0,63 \cdot h_1$; $h_5=0,38 \cdot h_1$; $x_5=0,63 \cdot l_3$; $b=h_1$; $l_1=12,5 \cdot h_1$; $l_1=5$ m; where l_i and h_i were the width and length of the i -th member respectively ($i=1,2,\dots,5$). The points of junction with column No.1 and column No.2 at the edge of floor No.3 were subject to boundary conditions (18); floor No.4 and baffle No.5 were considered to have a solid connection with adjacent members of the structure. The support points of column No.1 and column No.2 were fixed rigidly under homogeneous boundary conditions (14). The building structure was made of concrete B35 and reinforcement class A-II [5]. Reinforcement factors (3) μ_1 and μ_2 are given in the Table.

Table

No.	1	2	3	4	5
μ_2 [%]	7	7	5	5	5
μ_1 [%]	7	7	7	7	5

The elastic component of the damping system has integral value c_z which depends on the shear

rigidity of elastic members and which is determined by the given ratio between free frequency v_f of the damped foundation and typical (carrier) frequency v_{sw} of seismic wave $a_v=v_{sw}/v_f$ as follows

$$c_z = m_f \left(\frac{2\pi \cdot v_{sw}}{a_v} \right)^2. \quad (40)$$

The optimum viscosity values in the damping system are defined by the practical criteria based on the physical model of a free vibrating single-mass system with viscous resistance. Integral value ε_v of the viscous component is determined by viscosity in case of the maximum aperiodic motion of the damped foundation plate

$$\varepsilon_v = 2 \cdot k_\varepsilon \sqrt{c_z m_f}, \quad (41)$$

where $k_\varepsilon \geq 0$ is a correction factor. When $k_\varepsilon=1$, we have case of top aperiodic motion, which corresponds to the optimum value ε_v for iteration process (31),(32). Hence, the characteristics of viscoelastic damping system can be described by two parameters: a_v and k_ε .

Static load in our particular case was taken as the dead weight of the composite structure. According to [1,4], seismic load was modeled as approximation of the instrumental seismogram by a combination of trigonometric functions on the certain time intervals $\Delta\tau_k$ ($k=1,2,3,\dots,k_{sw}$)

$$x_{sw} = \begin{cases} X_k \sin \pi \frac{t - \tau_{k-1}}{\Delta\tau_k} & \text{for } \tau_{k-1} \leq t \leq \tau_k; \\ 0 & \text{for } t \geq \tau_{sw}, \end{cases} \quad (42)$$

where $t_0=0$, $\tau_{sw}=\max(\tau_k)$, X_k , $\Delta\tau_k=\tau_k-\tau_{k-1}$ were amplitude-frequency responses of approximation functions defined in accordance with the given parameters of instrumental seismogram.

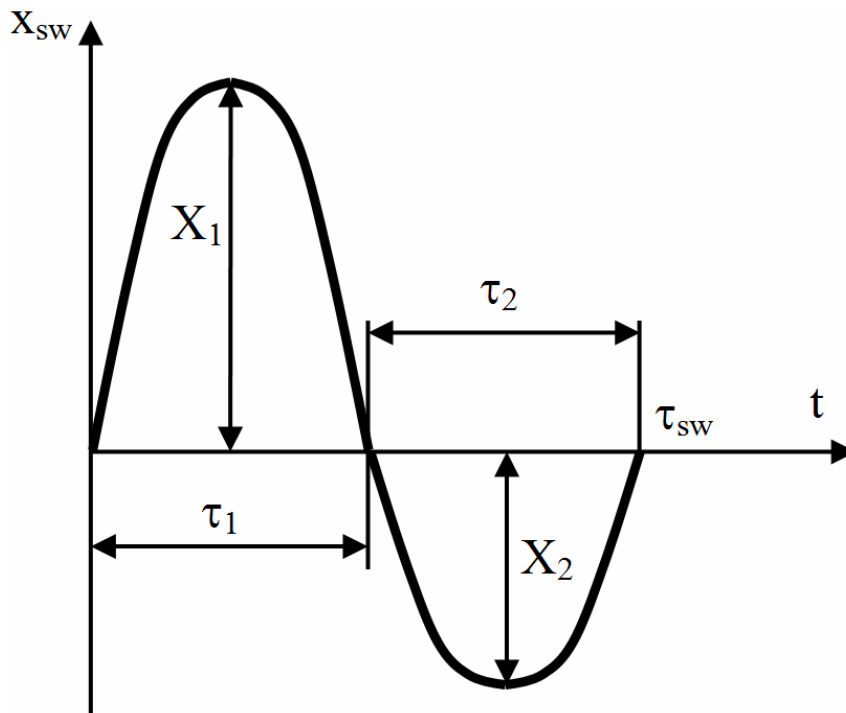


Figure 9.

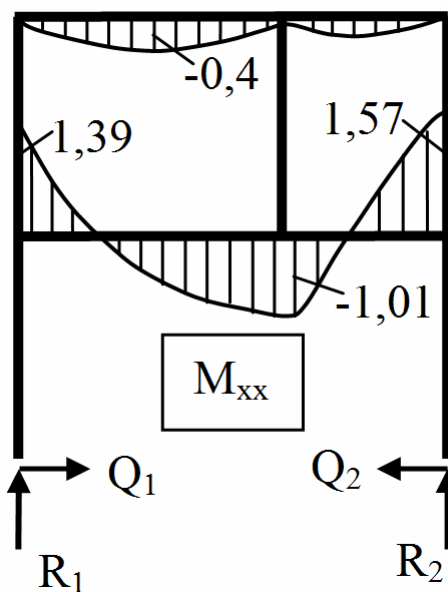


Figure 10.

The approximated seismogram consisted of two sine half-waves ($k_{sw}=2$) with parameters: $X_2/X_1=-0,7$; $\Delta\tau_2/\Delta\tau_1=1$; $a_1/a_2=1,43$, where a_1, a_2 were the maximum accelerations for the first

and second half-waves. The assumed values of parameters $X_1=0,015$ m and $a_1=0,122$ ·g correspond to the seismicity level of 6÷7 magnitude [1,5].

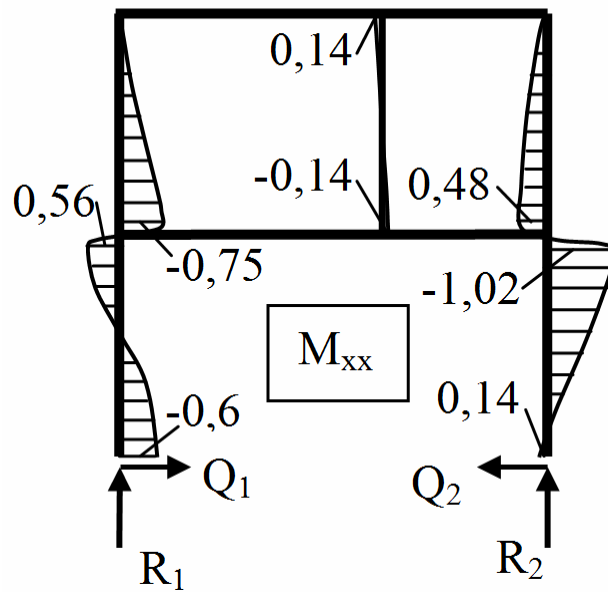


Figure 11.

Transient processes in the framed construction were investigated for three cases: a) foundation plate is rigidly fixed on the ground soil ($x_f=x_{sw}$); b) foundation plate is installed on the elastic damping system ($k_e=0$; $a_v=1,5$); and c) foundation plate is installed on the viscoelastic damping system ($k_e=1$; $a_v=1,5$). Also, it was taken: $v_{sw}=1/(\tau_1+\tau_2)$; $m_f/m_{ks}=3$, where m_{ks} is the mass of the framed structure.

When numerical methods were applied, the number of discretization points were $N_1=N_2=27$; $N_3=N_4=25$; $N_5=15$ for the structure members. At the first stage, stabilization method (30) to (36) was applied to solve a static problem (1) to (9) when a reinforced concrete structure was deformed by the dead weight. The results of the solved static problem were taken as input conditions (13) for a dynamic problem. The investigation results are given in Fig. 10-15. Refer to Fig. 10,11 for distribution of bending moments M_{xx} in the structure members, this distribution was obtained after solution of the static problem.

Moment values M_{xx} were normalized by the maximum moment for a pin-edge fixed beam of length $l=l_3$ under the dead weight load $q=q_3$: $M_{max}=(q \cdot l^2)/8$.

Reaction components in the support points of column No.1 and No.2 were: $R_1=0,484 \cdot P_{ks}$, $Q_1=0,061 \cdot P_{ks}$ and $R_2=0,516 \cdot P_{ks}$, $Q_2=0,061 \cdot P_{ks}$ ($P_{ks}=m_{ks} \cdot g$ was a weight of structure: $P_{ks}=R_1+R_2$). The maximum tension stress $\sigma_b^+=0,77 \cdot R_{bt}$ was observed in the concrete at attachment $x=0$ of floor No. 4, $z=+h/2$, where R_{bt} is the ultimate tensile strength of concrete.

The research of transient process in the members of composite reinforced concrete structure brought the results given in Fig. 12 to 15, where curves 1 correspond to undamped structure, curves 2 correspond to elastic damping system and curves 3 correspond to viscoelastic damping system; $\tau=t/\tau_{sw}$ is dimensionless time. Fig. 12,13 give the displacement x_f and acceleration a_f of the foundation plate; Fig. 14 shows the horizontal displacement of corner point C (Fig. 4,5) at $w_{1C}=-u_{3C}$. Refer to Fig. 15 for behavior of tangential acceleration $a_4=\ddot{u}_4$ in the middle of floor span No.4 depending on the parameters of damping system.

According to the results of the performed computing experiment, the parameters of viscoelastic damping system have sufficient impact on the deformation and cracking process in framed reinforced concrete structures.

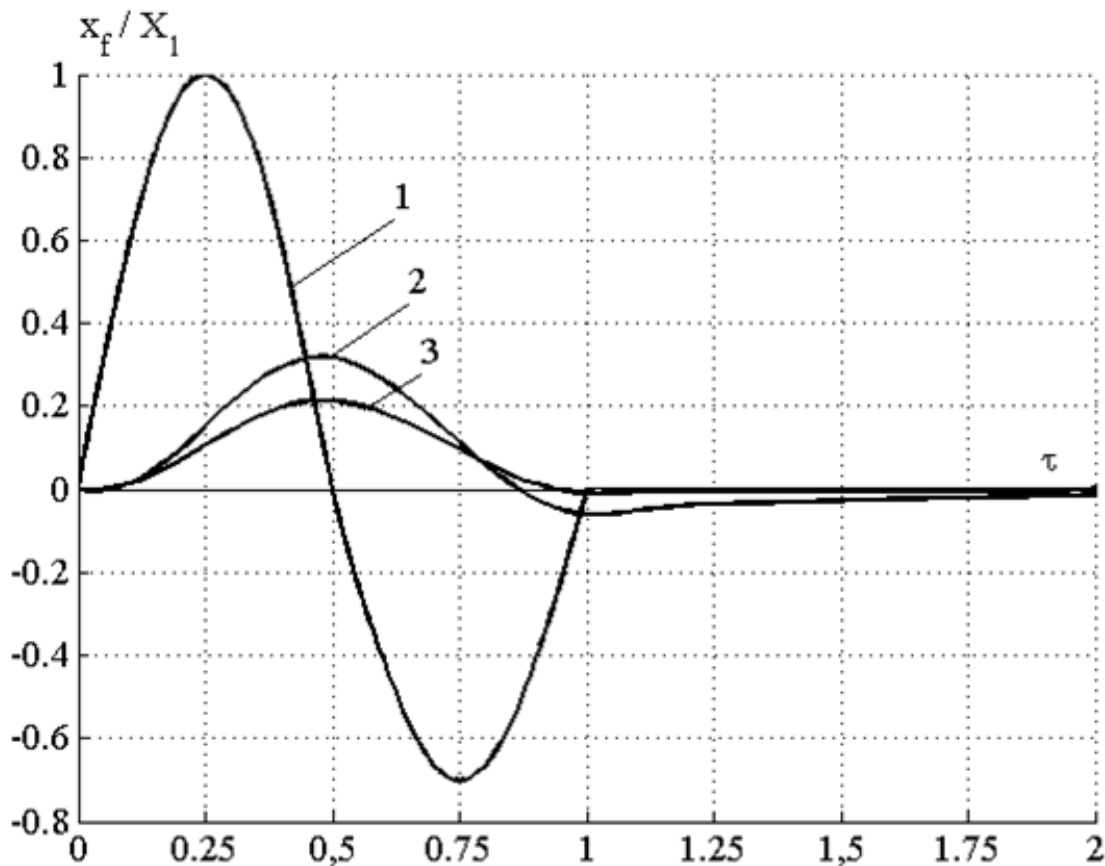


Figure 12.

The first cracks in undamped structure appeared at attachment $x=0$ of baffle No.5 ($\tau=0,0042$), attachment $x=l_4$ of floor No.4 ($\tau=0,0047$) and at the support points $x=0$ of column No.2 ($\tau=0,0058$) and No.1 ($\tau=0,006$). Further cracks appeared and grew intensely at every member of the composite structure, except floor No.3 whose edges $x=0;l_3$ met boundary conditions (18). The maximum tensile stress of concrete was not more than $\sigma_b^+ < 0,9 \cdot R_{br}$ during the total period of loading. In case of elastic damping system, cracks appeared only at floor No.4 around attachment $x=l_4$ ($\tau=0,23$) and $x=0$ ($\tau=0,7$). Viscoelastic damping system brought more than twofold reduction of the maximum displacement and

acceleration in the structure members and prevented cracking.

Stabilization method in quasi-dynamic form (30) to (32) can be easily adjusted and applied to the work of concrete and reinforcement at plasto-elastic stage. It allows us to solve geometrically and physically non-linear boundary-initial value problems of “statics-dynamics-statics” kind, using a finite-difference scheme of the same type, and, thus, estimate the residual load-bearing capacity of structure after seismic load.

Acknowledgement. This work has been made with financial support of Russian Foundation of Fundamental Research (grant RFFR No. 09-07-00161a).

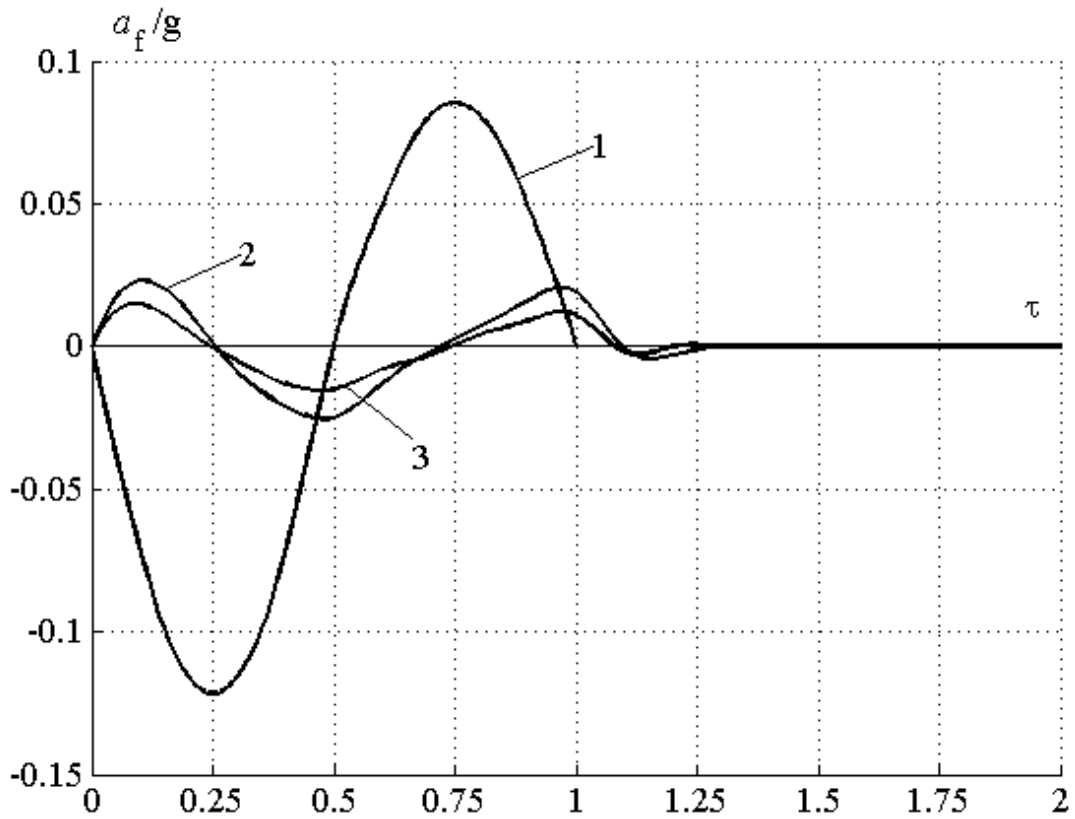


Figure 13.

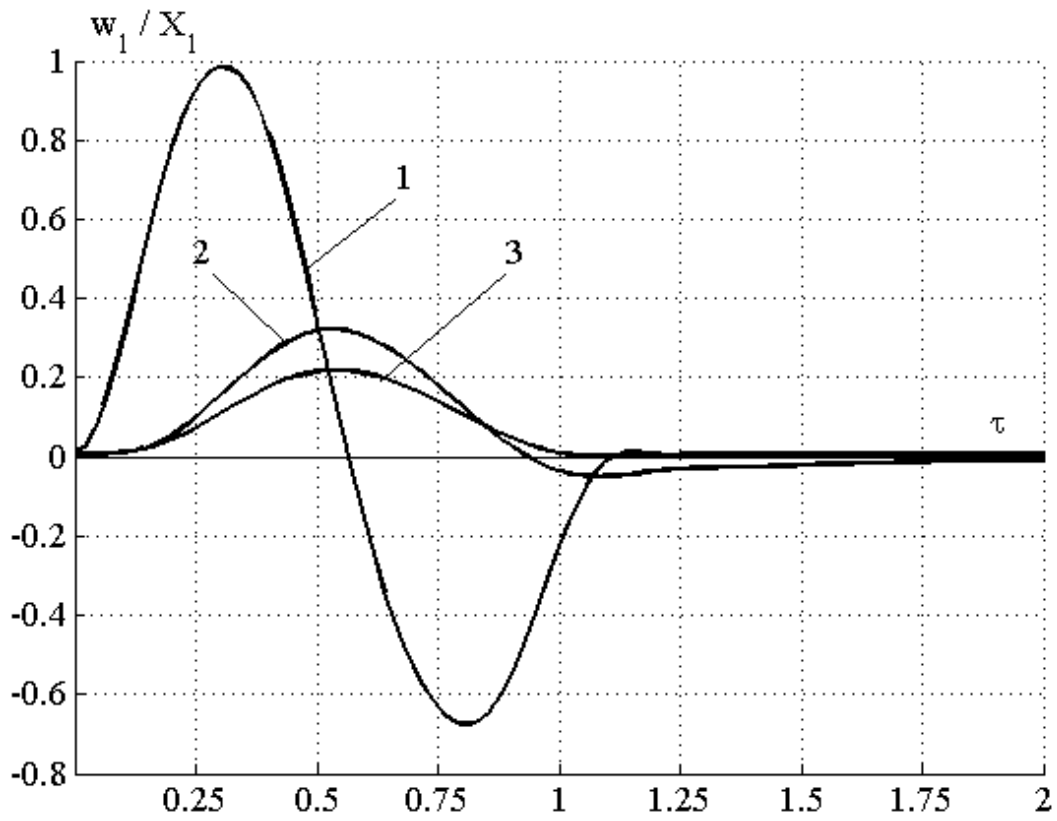


Figure 14.

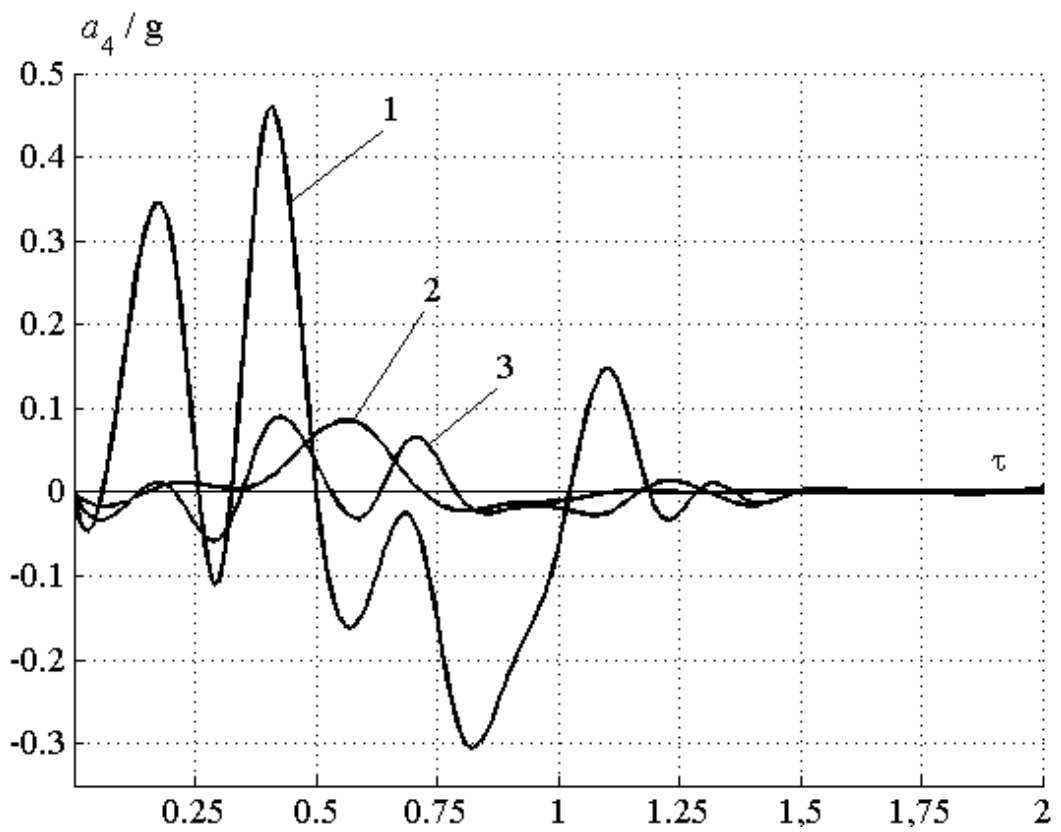


Figure 15.

REFERENCES

1. **Gordeev V.N., Lantuh-Lyaschenko A.I., Pashinskiy V.A., Perelmuter A.V., Pichugin S.F.** Loads and excitations on buildings and structures. Moscow, Association of Civil Engineering Universities, 2006, 482 pages.
2. **Volmir A.S., Kuranov B.A., Turbaivsky A.T.** Statics and dynamics of complicated structures: Applied multilevel approach of investigation. Moscow, Mashinostroenie, 1989, 248 pages.
3. **Dmitriev V.G.** Variation-difference schemas in nonlinear shells mechanics. // Proceedings of IV International Workshop "Technological problems of Strength". Podolsk, MGOU, 1997, pp. 57-67.
4. **Dmitriev V.G., Sudyin A.A.** Deformation of reinforced concrete spherical dome with cutouts on the damped foundation beds. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2009, Volume 5, Issue 1&2, pp. 13-22.
5. **Plevkov V.S., Mal'ganov A.I., Baldin I.V.** Reinforced concrete and masonry structures of aseismic buildings. Tomsk, Tomsk State Civil Engineering University, 2006, 290 pages.
6. **Kharlanov V.L.** Numeric approach to high-viscous dampers in seismic isolation members. // Structural mechanics and design, 2006, Issue 3, pp. 35 - 38.
7. **Samarsky A.A.** Theory of finite-difference scheme. Moscow, Nauka, 1989, 616 pages.
8. **Bachvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.** Numerical Methods. Moscow, Fizmatlit, Laboratory of Basic Knowledges, 2001, 632 pages.
9. **Dmitriev V.G., Preobrazhensky I.N.** Flexible shells with cutouts deformation. // Izvestia AN USSR, Mechanics of Solids, 1988, Issue 1, pp. 177-184.
10. **Frieze P.A., Hobbs R.E., Dowling P.J.** Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates. // Computers & Structures, 1978, Volume 8, Issue 2, pp. 301-310.

Vladimir G. Dmitriev, PhD, Professor, Head of Machinery Department; Moscow State Opened University. 107996, Russia, Moscow, Pavel Korchagin str., 22.

Дмитриев Владимир Георгиевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Детали машин»; Московский государственный открытый университет, 107996, Россия, г. Москва, ул. Павла Корчагина, д. 22.

КОРРЕКТНЫЕ АЛГОРИТМЫ МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 1: ВВЕДЕНИЕ. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматриваются корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Изложение ведется для одномерного случая. Под многоуровневой аппроксимацией понимается разложение функции по локальному вейвлет-базису и рассмотрение соответствующих компонент этой функции на каждом из уровней такого базиса, при этом степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне.

Ключевые слова: корректные алгоритмы, многоуровневая аппроксимация, вейвлет-анализ, дискретный базис Хаара

CORRECT ALGORITHMS OF MULTILEVEL APPROXIMATION WITH THE USE OF DISCRETE HAAR BASIS PART 1: INTRODUCTION. ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to correct algorithms of multilevel approximation with use of discrete Haar basis. One-dimensional problems are considered. Under the multi-level approximation in this case, we understand the expansion of the function with the use of the local wavelet basis and consideration of relevant components of this function at each level of such basis, the degree of localization is determined by the size of the carrier basis function at each level.

Key words: correct algorithms method, multilevel approximation, multiresolution wavelet analysis, discrete Haar basis, one-dimensional problems

ВВЕДЕНИЕ

Под многоуровневой аппроксимацией, рассматриваемой в настоящей статье, авторы понимают разложение функции по локальному вейвлет-базису и рассмотрение соответствующих компонент этой функции на каждом из уровней такого базиса, при этом степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне. Вместе с тем, очевидно, что во многих практических приложениях (в частности,

при решении задач строительной механики [1-3]) не требуется аппроксимация функций во всех точках заданных областей с одинаковым числом уровней. Более того, максимальное количество уровней аппроксимации следует использовать, как правило, лишь в отдельных подобластях (зонах), расположение и размер которых обычно известны заранее. В остальных точках области возможно некоторое сокращение количества уровней аппроксимации без существенной потери точности или же с относительно небольшой

погрешностью. В качестве вейвлет-базиса рассматривается известный базис Хаара [1-12]. В последнее время интерес к этому базису значительно возрос. Он находит применение в различных разделах математики и ее приложениях (вычислительная математика, теория кодирования, теория вероятностей, цифровая обработка сигналов, распознавание образов, строительная механика и другие).

1. ПОНЯТИЕ О БАЗИСЕ ХААРА И РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$, где a и b – соответственно координата начала и конца отрезка. Разделим отрезок $[a, b]$ на $(n-1)$ равных частей, где $n = 2^M$, M – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, очевидно, определяются по формуле (ниже h – шаг деления)

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

где
$$h = (b-a)/(n-1). \quad (1.2)$$

Ненормированные функции Хаара показаны на рис. 1.1 (по оси абсцисс отложены номера узлов точек разбиения отрезка).

Семейство функций Хаара $\psi_j^p(i)$, $p = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N_p$ ($\psi_j^p(i)$ – j -ая функция Хаара уровня p), определенных в точках разбиения отрезка с номерами $i = 1, 2, \dots, n$, задается формулами

$$\psi_j^p(i) = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} 1, & 2^{p+1}(j-1) < i \leq 2^p(2j-1) \\ -1, & 2^p(2j-1) < i \leq 2^{p+1}j \\ 0, & i \leq 2^{p+1}(j-1) \cup i > 2^{p+1}j, \\ & i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p < M; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\psi_1^M(i) = \frac{1}{\alpha_M}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

где N_p – количество функций Хаара на p -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.5)$$

α_p – норма функции Хаара на p -ом уровне, т.е.

$$\forall j = 1, 2, \dots, N_p \quad \|\psi_j^p\| = \alpha_p, \quad \alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (1.6)$$

Можно показать, что указанное семейство функций Хаара образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в точках $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим произвольную функцию f , определенную в точках разбиения отрезка с номерами $i = 1, 2, \dots, n$. Функция $f(i)$ может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \quad (1.7)$$

где v_j^p , $j = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, 2, \dots, M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_j^p = \sum_{i=1}^n f(i) \psi_j^p(i), \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, 2, \dots, M. \quad (1.8)$$

При численной реализации разложения дискретной функции по базису Хаара зачастую удобнее перейти от (1.6) к представлению вида:

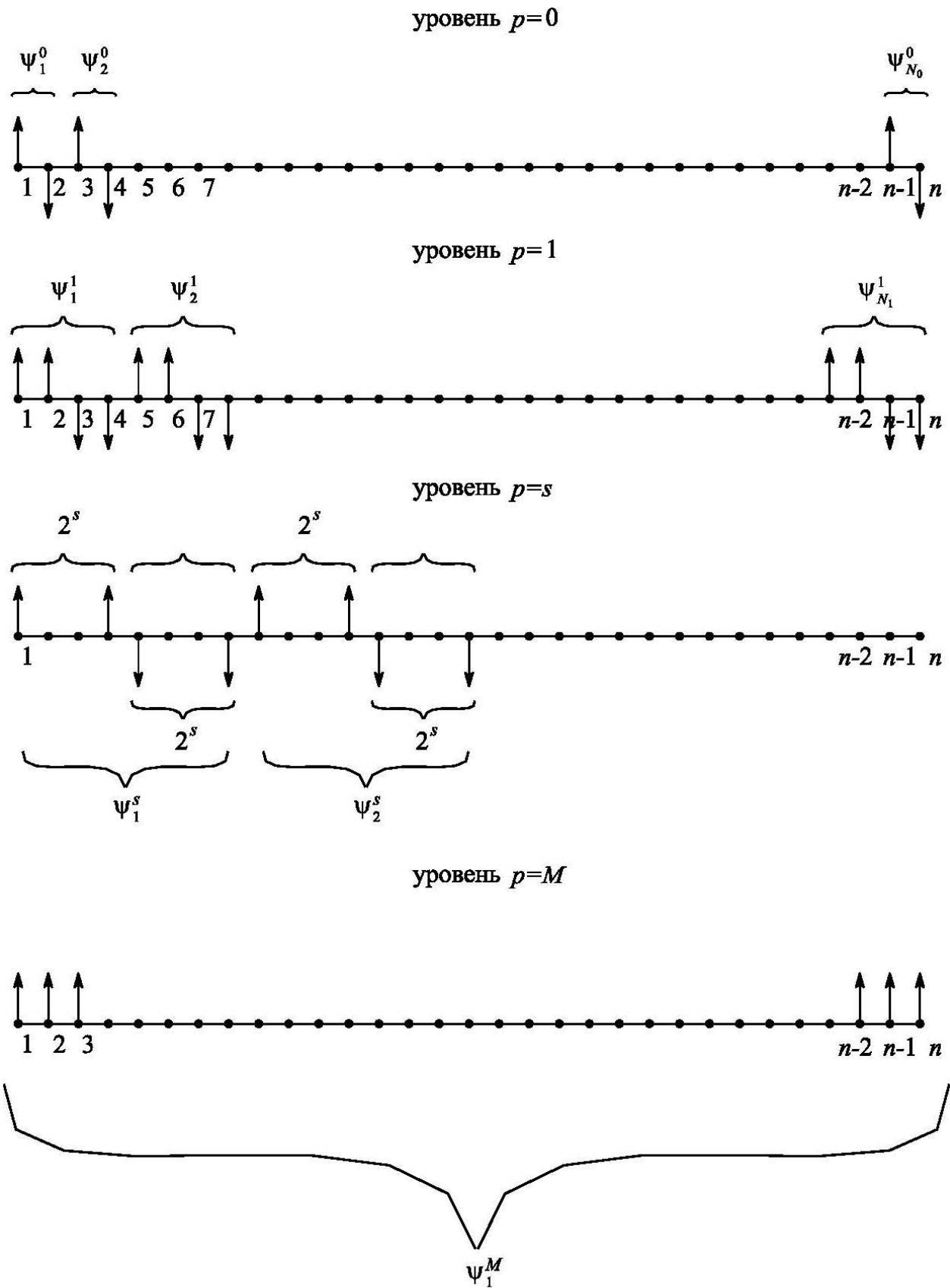


Рисунок 1.1. Дискретные функции Хаара на отрезке

$$f(i) = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(i), \quad (1.8)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ – глобальные индексы; коэффициенты v_j^p и f_k , а также функции $\psi_j^p(i)$ и $\varphi_k(i)$ связаны между собой следующими формулами:

$$f_k = v_j^p, \quad \varphi_k(i) = \psi_j^p(i), \quad (1.10)$$

где
$$k = j + \sum_{q=0}^{p-1} N_q. \quad (1.11)$$

2. О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ РЯДА ХААРА В ТОЧКЕ.

Очевидно, что непосредственная реализация формулы (1.7) или формулы (1.10) является достаточно трудоемкой дисциплиной. Действительно в ортогональном (безизбыточном) представлении (1.7) дискретной функции $f(i)$ участвуют $M+1$ вейвлетов различных уровней.
 В самом деле, в частности, имеем (см., например, рис. 1.1):

$$\begin{aligned} f(1) &= v_1^0 \psi_1^0(1) + v_1^1 \psi_1^1(1) + v_1^2 \psi_1^2(1) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(1) + \dots + v_1^M \psi_1^M(1); \\ f(2) &= v_1^0 \psi_1^0(2) + v_1^1 \psi_1^1(2) + v_1^2 \psi_1^2(2) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(2) + \dots + v_1^M \psi_1^M(2); \\ f(3) &= v_2^0 \psi_2^0(3) + v_1^1 \psi_1^1(3) + v_1^2 \psi_1^2(3) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(3) + \dots + v_1^M \psi_1^M(3); \\ f(4) &= v_2^0 \psi_2^0(4) + v_1^1 \psi_1^1(4) + v_1^2 \psi_1^2(4) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(4) + \dots + v_1^M \psi_1^M(4); \\ f(5) &= v_3^0 \psi_3^0(5) + v_2^1 \psi_2^1(5) + v_1^2 \psi_1^2(5) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(5) + \dots + v_1^M \psi_1^M(5); \\ f(6) &= v_3^0 \psi_3^0(6) + v_2^1 \psi_2^1(6) + v_1^2 \psi_1^2(6) + \dots + \\ &\quad + v_1^p \psi_1^p(6) + \dots + v_1^M \psi_1^M(6) \end{aligned}$$

и т.д.
 Для произвольной точки i будем иметь:

$$f(i) = v_{l_0}^0 \psi_{l_0}^0(i) + v_{l_1}^1 \psi_{l_1}^1(i) + v_{l_2}^2 \psi_{l_2}^2(i) + \dots + \\ + v_{l_p}^p \psi_{l_p}^p(i) + \dots + v_{l_M}^M \psi_{l_M}^M(i),$$

где $l_0 = \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor$; $l_1 = \left\lfloor \frac{i+3}{4} \right\rfloor$; $l_2 = \left\lfloor \frac{i+7}{8} \right\rfloor$

и т.д.

Итак, можем записать следующую окончательную формулу:

$$f(i) = \sum_{p=0}^M v_{l_p}^p \psi_{l_p}^p(i), \quad (2.1)$$

где $l_p = \left\lfloor \frac{2^{p+1} + i - 1}{2^{p+1}} \right\rfloor$, $p = 0, 1, 2, \dots, M$. (2.2)

По аналогии с (1.9) можем переписать (2.1) следующим образом:

$$f(i) = \sum_{p=1}^{M+1} f_{m_p} \varphi_{m_p}(i), \quad (2.3)$$

где $m_p = l_{p-1} + \sum_{q=0}^{p-2} N_q$. (2.4)

3. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА С ОСРЕДНЕНИЕМ

Пусть

$$u_j^0 = f(j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_0 = \sqrt{2}, \quad p = 0. \quad (3.1)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M-1$ производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} v_j^p &= (u_{2j-1}^p - u_{2j}^p) / \alpha_p, \\ u_j^{p+1} &= u_{2j-1}^p + u_{2j}^p, \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \\ \alpha_{p+1} &= \sqrt{2} \alpha_p \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

$p = 0, 1, \dots, M-1$.

При $p = M$ имеем:

$$\alpha_M = \sqrt{n}, \quad v_1^M = u_1^M / \alpha_M, \quad p = M, \quad (3.3)$$

где $u_j^p, j=1, 2, \dots, N_p, p=1, 2, \dots, M$ – рассматриваются в данном контексте как вспомогательные величины.

Заметим, что если значения $u_j^0, j=1, 2, \dots, N$, определенные по формуле (3.1), являются точными, то возникновение ошибок в дальнейшем при реализации формул (3.2)-(3.3) исключено. Вместе с тем, как уже отмечалось выше, по практическим соображениям может потребоваться некоторое уменьшение точности в угоду другим факторам.

Пусть p – индекс, соответствующий рассматриваемому номеру уровня, $p=0, 1, 2, \dots, M-1$; j – индекс, соответствующий номеру базисной функции на рассматриваемом уровне, $j=1, 2, \dots, N_p$. Положим, что требуется произвести осреднение на некотором уровне q .

В соответствии с [6] формулы осреднения имеют вид:

$$v_{2j-1}^p = v_{2j}^p = \beta v_j^{p+1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad p=0, 1, 2, \dots, q, \quad (3.4)$$

где
$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

При использовании сплошной глобальной индексации сообразно (2.3)-(2.4), очевидно, получим:

$$f_{N_{tot}^{p-1}+2j-1} = f_{N_{tot}^{p-1}+2j} = \beta \cdot f_{N_{tot}^p+j}, \quad p=q, q-1, \dots, 0, 1; \quad j=1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad (3.6)$$

где $N_{tot}^{-1} = 0$; $N_{tot}^s = \sum_{q=0}^s N_q, \quad s=1, 2, \dots, M. \quad (3.7)$

4. АЛГОРИТМ МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ БАЗИСА ХААРА

Будем полагать, что в каждой из точек $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ заданы величины следующие величины: χ_i – характеристическая функция операции осреднения, равная единице, если в точке x_i требуется осреднения и нулю – если в точке x_i осреднение не требуется; N_i^{aver} – максимальный номер уровня, на котором выполняется осреднение.

Если $\chi_i = 0$, то осреднение в точке x_i выполнять не требуется, а если $\chi_i = 1$, то осреднение ведется по формуле (3.6), в которой вместо q задается значение N_i^{aver} .

5. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

В качестве первого примера рассмотрим задачу разложения функции

$$f(x) = \exp(-|x|)$$

в ряд по базису Хаара на отрезке $x \in [0, 1]$.

Следует сразу отметить, что имеет место полное соответствие значений исходной функции в точках $x_i, i=1, 2, \dots, n$ со значениями разложения функции в ряд по базису Хаара. На рис. 5.1-5.5 показано сопоставление с соответствующими осредненными величинами.

В качестве второго примера рассмотрим задачу разложения функции

$$f(x) = \exp(-10|x|)$$

в ряд по базису Хаара на отрезке $x \in [0, 1]$.

Здесь также наблюдается полное соответствие значений исходной функции в точках $x_i, i=1, 2, \dots, n$ со значениями разложения функции в ряд по базису Хаара. На рис. 5.6 показано сопоставление с соответствующими осредненными величинами (используется

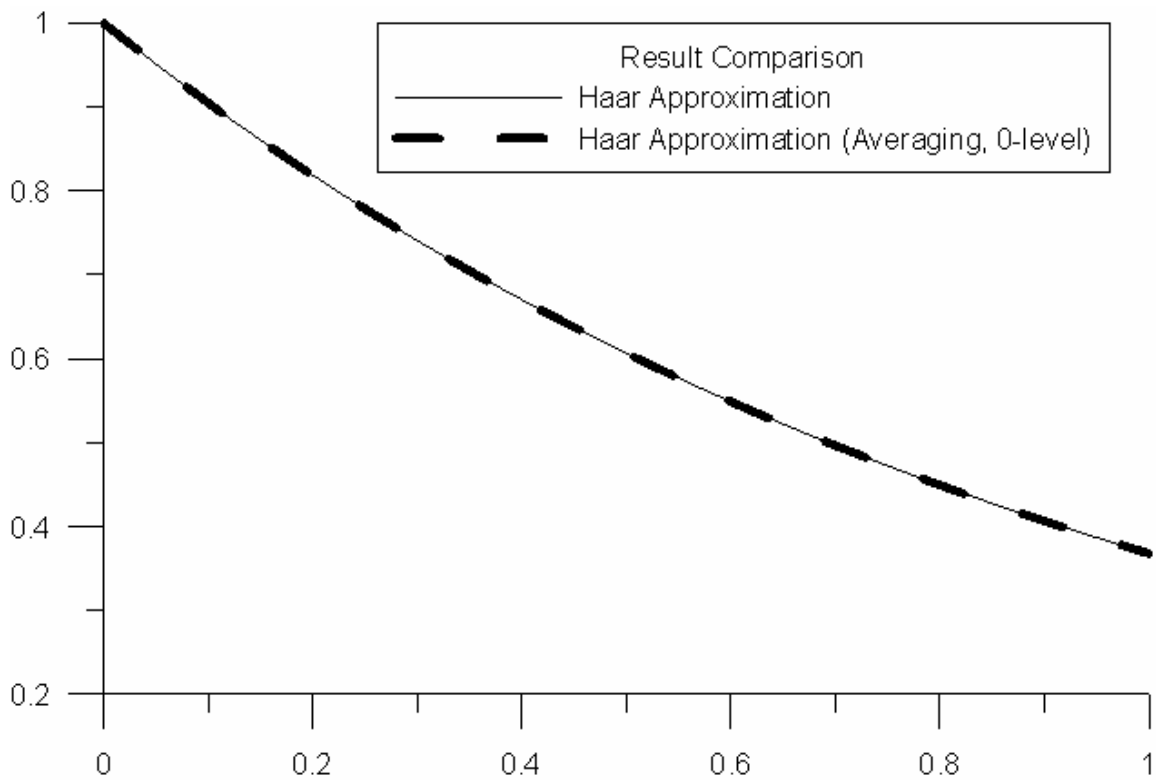


Рисунок 5.1. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара
(без осреднения и с осреднением $N_i^{aver} = 0, i = 1, 2, \dots, n$)

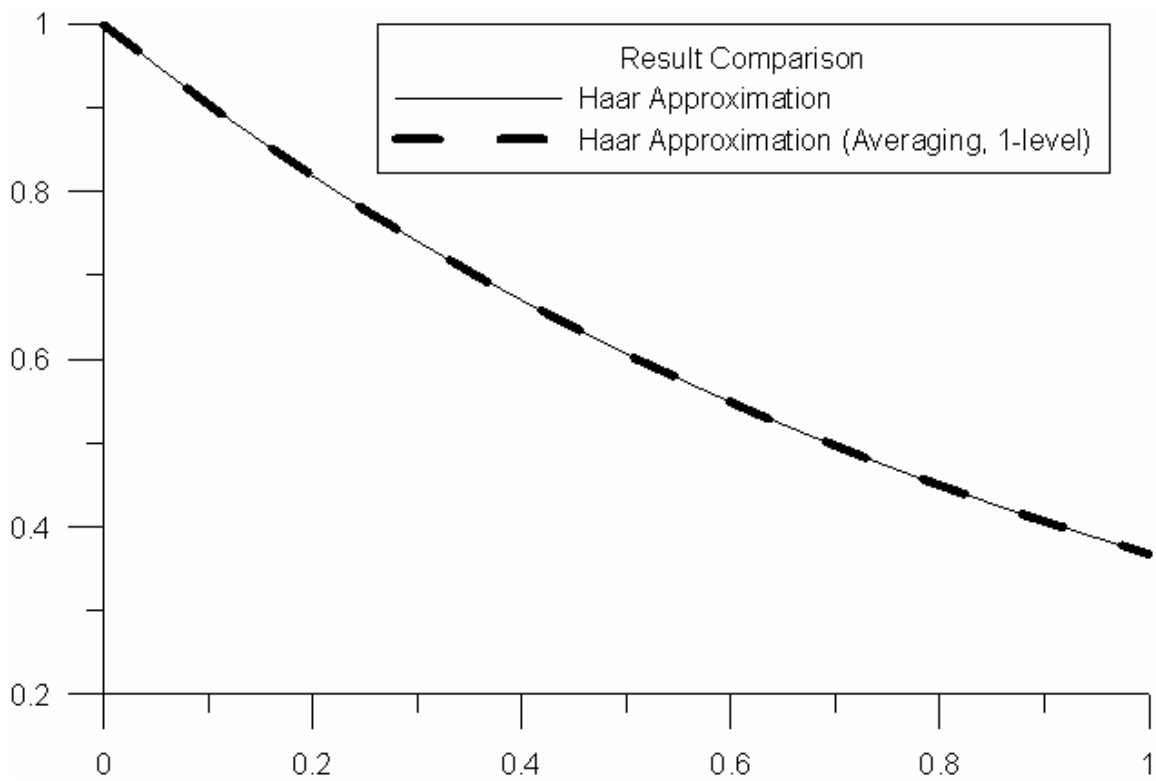


Рисунок 5.2. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара
(без осреднения и с осреднением $N_i^{aver} = 1, i = 1, 2, \dots, n$).

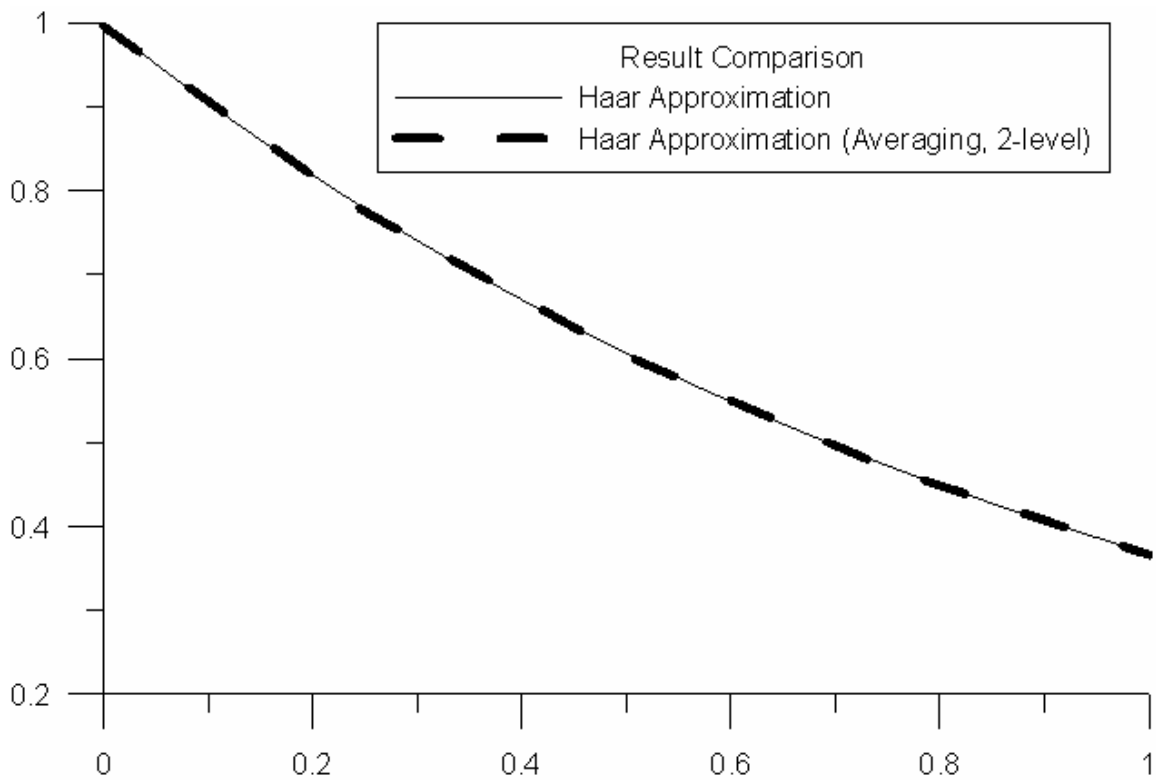


Рисунок 5.3. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара (без осреднения и с осреднением $N_i^{aver} = 2, i = 1, 2, \dots, n$)

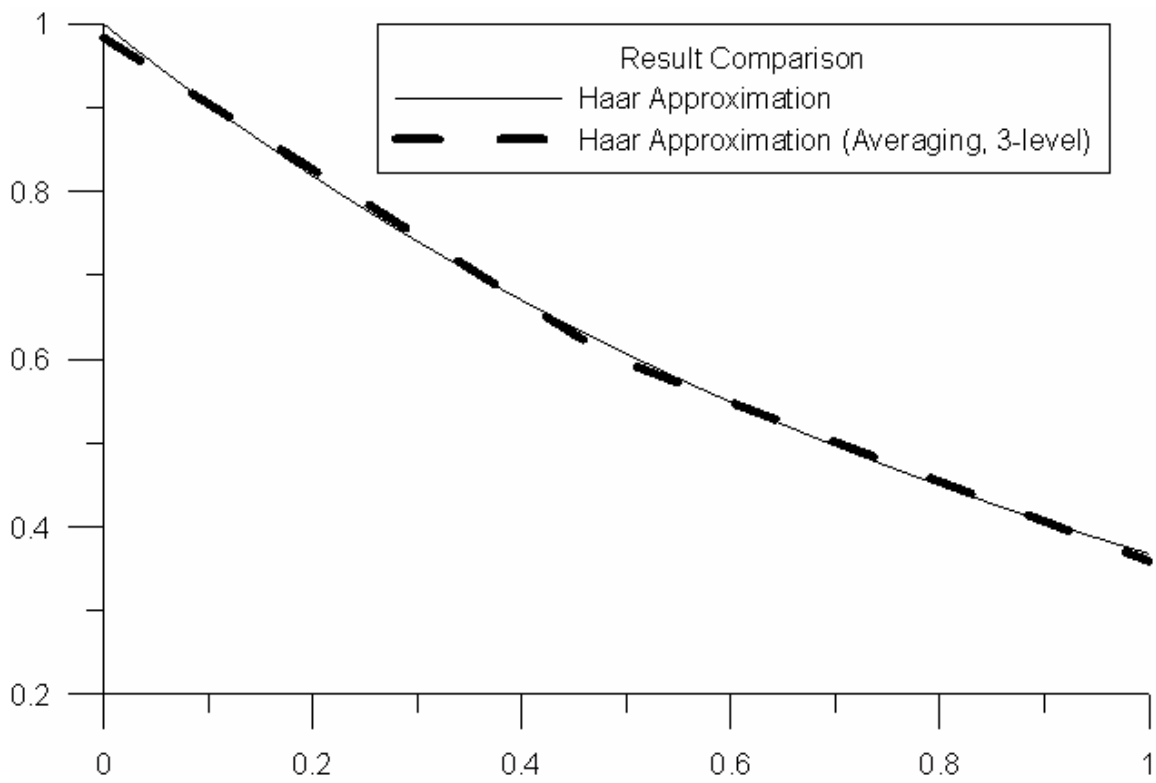


Рисунок 5.4. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара (без осреднения и с осреднением $N_i^{aver} = 3, i = 1, 2, \dots, n$)

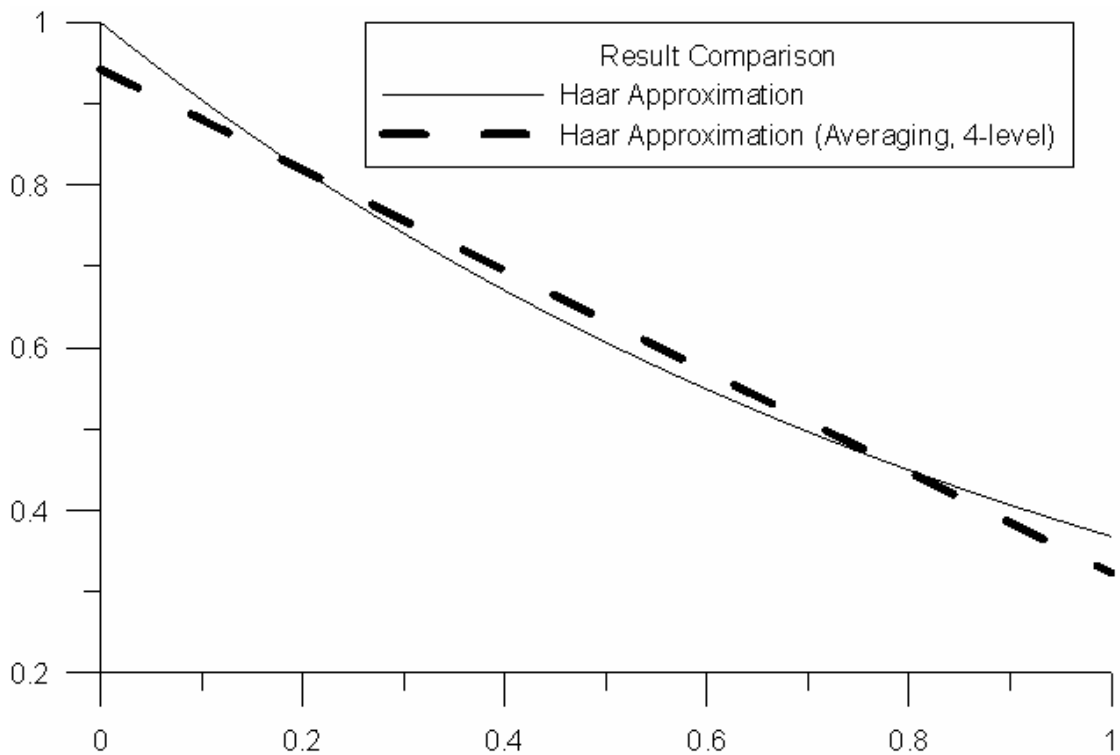


Рисунок 5.5. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара
(без осреднения и с осреднением $N_i^{aver} = 4, i = 1, 2, \dots, n$)

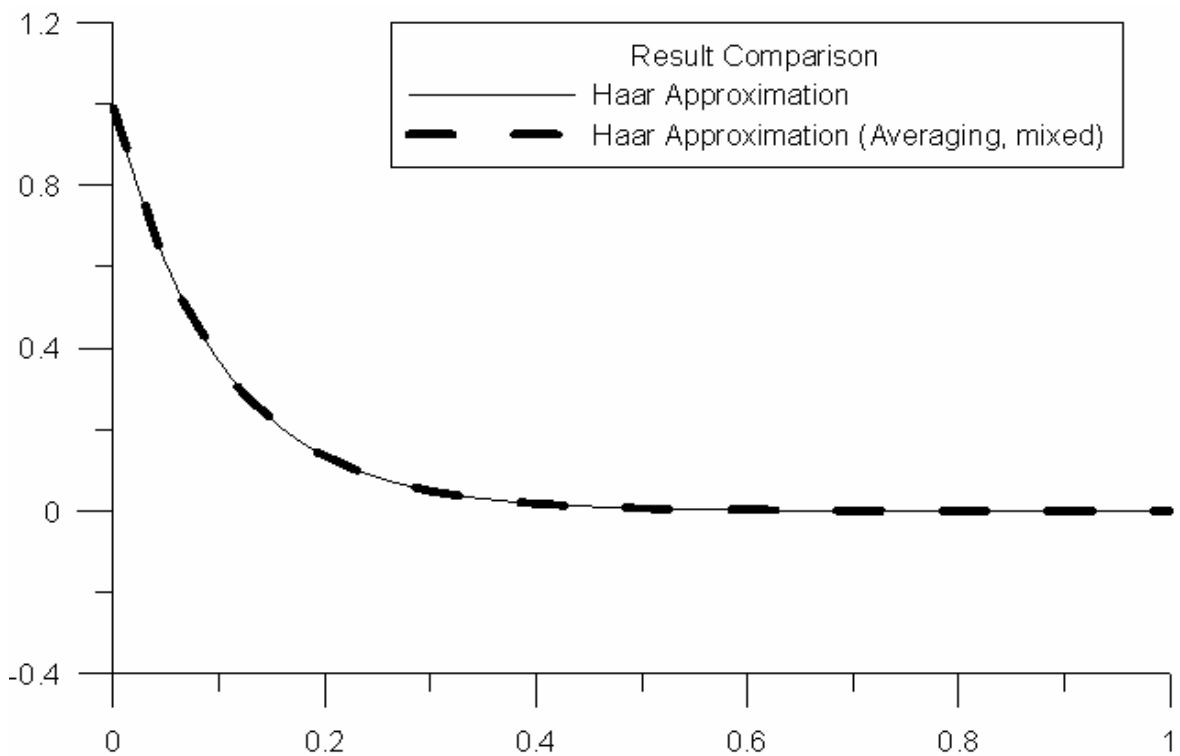


Рисунок 5.6. Сопоставление аппроксимаций рядами Хаара
(без осреднения на участке $x_i \in [0, 0.5]$;

с осреднением на отрезке $x_i \in [0.5, 1]$ – для всех точек задавалось условие $N_i^{aver} = 2$).

смешанная схема аппроксимации – при $x_i \in [0, 0.5]$ осреднения не проводится, а на отрезке $x \in [0.5, 1]$, напротив для всех точек задавалось условие $N_i^{aver} = 2$.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П.А., Мозгалева М.Л. Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 39-46.
2. Акимов П.А., Мозгалева М.Л. Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.
3. Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н. Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформированного состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 3, 2012.
4. Арутюнян Ф.Г. О рядах по системе Хаара. // *ДАН Армянской ССР*, 42(3), 1966, с. 134-140.
5. Галкина С.Ю. О коэффициентах Фурье-Хаара. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Специальность – 01.01.01 Математический анализ. – М: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002, 127 с.
6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
7. Копенков В.Н. Эффективные алгоритмы локального дискретного вейвлет-преобразования с базисом Хаара. // *Компьютерная оптика*, том 32, №1, 2008, с. 78-84.
8. Малоземов В.Н., Певный А.Б., Третьяков А.А. Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигна-

- лов и изображений // Проблемы передачи информации, т. 34, вып. 2, 1998, с. 77-85.
9. **Наварсаян К.А., Степанян А.А.** О рядах по системе Хаара. // Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 24, 2007, с. 53-66.
 10. **Робакидзе М.Г.** О коэффициентах Фурье по системе Хаара. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Специальность – 01.01.01 Математический анализ. – Тбилиси: Тбилисский государственный университет им. Иване Джавахишвили, 1993, 75 с.
 11. **Ульянов П.Л.** О рядах по системе Хаара. // ДАН СССР, т. 149, №3, 1963, с. 532-534.
 12. **Ульянов П.Л.** О рядах по системе Хаара // Математический сборник, т. 63(105), выпуск 1, 1964, с. 356-391.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

КОРРЕКТНЫЕ АЛГОРИТМЫ МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 2: ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматриваются корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Изложение ведется для двумерного случая. Под многоуровневой аппроксимацией понимается разложение функции по локальному вейвлет-базису и рассмотрение соответствующих компонент этой функции на каждом из уровней такого базиса, при этом степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне.

Ключевые слова: корректные алгоритмы, многоуровневая аппроксимация, вейвлет-анализ, дискретный базис Хаара

CORRECT ALGORITHMS OF MULTILEVEL APPROXIMATION WITH THE USE OF DISCRETE HAAR BASIS PART 2: TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to correct algorithms of multilevel approximation with use of discrete Haar basis. Two-dimensional problems are considered. Under the multi-level approximation in this case, we understand the expansion of the function with the use of the local wavelet basis and consideration of relevant components of this function at each level of such basis, the degree of localization is determined by the size of the carrier basis function at each level.

Key words: correct algorithms method, multilevel approximation, multiresolution wavelet analysis, discrete Haar basis, two-dimensional problems

Следует отметить, что данная статья является своеобразным продолжением работы [1] применительно к случаю использования двумерного дискретного базиса Хаара [2-5].

1. ПОНЯТИЕ О БАЗИСЕ ХААРА И РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Рассмотрим двумерную прямоугольную область (рис. 1.1)

$$\Omega = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \quad (1.1)$$

где x_1, x_2 – координаты; l_1, l_2 – размеры области вдоль координатных осей Ox_1, Ox_2 соответственно.

Разделим область (1.1) по горизонтали на $(n-1)$ равных частей и по вертикали на $(n-1)$ равных частей, где $n = 2^M$, M – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)).

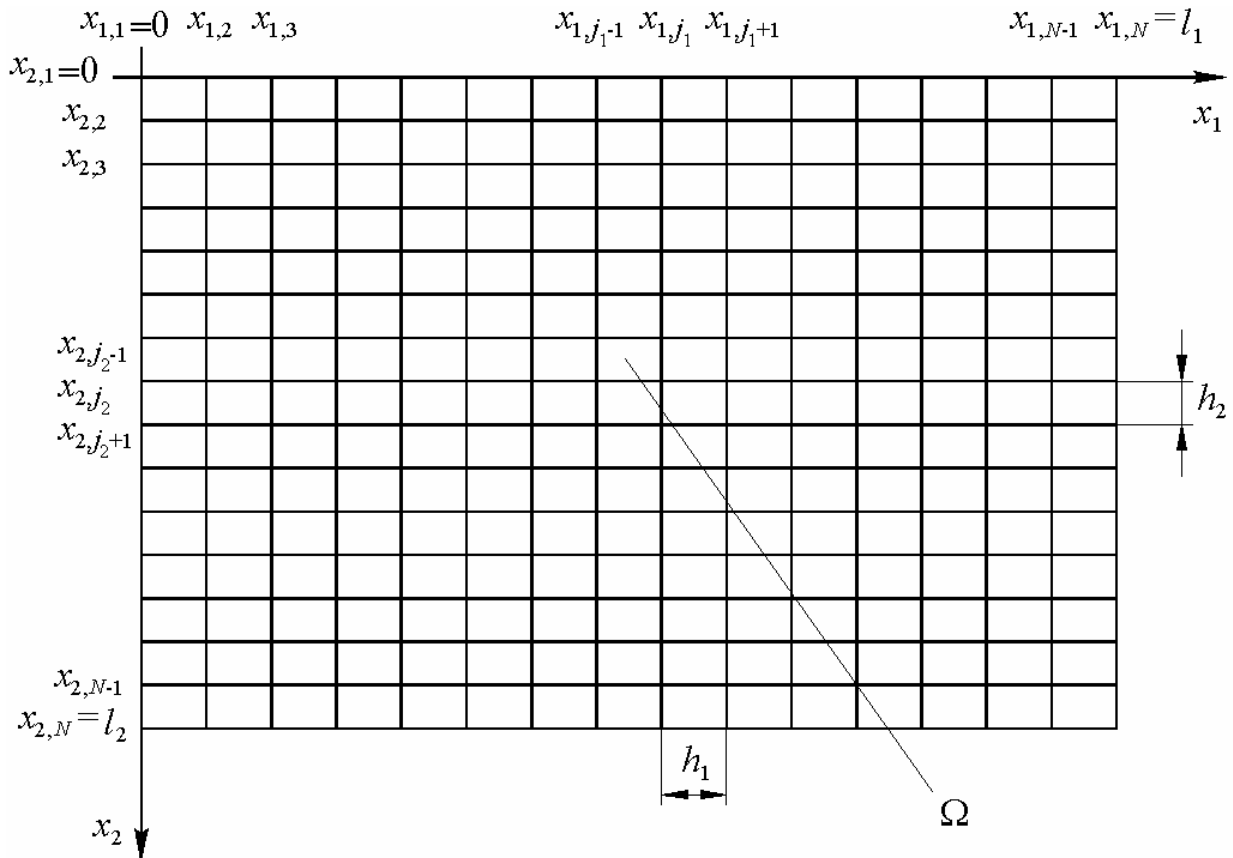


Рисунок 1.1. Исходная двумерная прямоугольная область и ее дискретизация

Координаты точек деления, очевидно, определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= (i-1)h_1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ x_{2,i} &= (i-1)h_2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где h_1 и h_2 – шаги деления по осям Ox_1, Ox_2 соответственно,

$$h_1 = l_1 / (n-1); \quad h_2 = l_2 / (n-1). \quad (1.3)$$

Семейство функций Хаара $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$, $p = 1, 2, \dots, M$, $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$, $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1$ (причем недопустим случай $s_1 = s_2 = 0$), определенных в узлах сетки, задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2) &= \\ &= \alpha_p^{-1} \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, \\ \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q=0}^1 \left(2^{p+1} (j_q - 1 + k_q / 2) < i_q \wedge \right. \\ \left. \wedge i_q \leq 2^{p+1} (j_q - 1 / 2 + k_q / 2) \right) \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases} \\ &i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n; \quad 0 \leq p < M; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\psi_{0,0,1,1}^M(i_1, i_2) = \alpha_M^{-1}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

где $N_p \times N_p$ – количество функций Хаара на p -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} n / 2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.6)$$

α_p – норма функции Хаара на p -ом уровне, т.е.

$$\forall j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad \forall j_2 = 1, 2, \dots, N_p, \\ \|\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p\| = \alpha_p; \\ \alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (1.7)$$

Следует отметить, что значения индексов s_1 и s_2 соответствуют трем базовым функциям:

$$\psi_{1,0,j_1,j_2}^p \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \\ s_1 = 1, \quad s_2 = 0$$

$$\psi_{0,1,j_1,j_2}^p \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} \\ s_1 = 0, \quad s_2 = 1$$

$$\psi_{1,1,j_1,j_2}^p \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ s_1 = 1, \quad s_2 = 1$$

Можно показать, что семейство функций Хаара (1.4)-(1.5) образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в узлах сетки (рис. 1.1).

Рассмотрим произвольную функцию f , определенную в узлах сетки, показанной на рис. 1.1. Функция $f(i_1, i_2)$ может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i_1, i_2) = \\ = \sum_{p=0}^M \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v_{1,0,j_1,j_2}^p \psi_{1,0,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) + \\ + v_{0,1,j_1,j_2}^p \psi_{0,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) + v_{1,1,j_1,j_2}^p \psi_{1,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2)), \quad (1.8)$$

где $v_{1,0,j_1,j_2}^p, v_{0,1,j_1,j_2}^p, v_{1,1,j_1,j_2}^p, j_1 = 1, 2, \dots, N_p, j_2 = 1, 2, \dots, N_p, p = 1, 2, \dots, M$ – коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N f(i_1, i_2) \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2), \\ s_1 = 0, 1, \quad s_2 = 0, 1, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \\ j_2 = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, 2, \dots, M; \quad (1.9)$$

При численной реализации разложения дискретной функции по базису Хаара зачастую удобнее перейти от (1.8) к представлению вида:

$$f(i_1, i_2) = \sum_{k=1}^{n^2} f_k \varphi_k(i_1, i_2), \quad (1.10)$$

где $k_1 = 1, 2, \dots, n^2$ – глобальный индекс; коэффициенты v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p и f_k , а также функции $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$ и $\varphi_k(i_1, i_2)$ связаны между собой следующими формулами:

$$f_k = v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p, \quad \varphi_k(i_1, i_2) = \psi_{1,0,j_1,j_2}^p(i_1, i_2), \quad (1.11)$$

где

$$k = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (j_1 - 1) + \\ + 3 \cdot (j_2 - 1) \cdot N_p + 3 \cdot \sum_{q=0}^{p-1} (N_q)^2. \quad (1.12)$$

2. О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ РЯДА ХААРА В ТОЧКЕ

Очевидно, что непосредственная реализация формулы (1.8) или формулы (1.10) является достаточно трудоемкой дисциплиной. Действительно в ортогональном (безизбыточном) представлении (1.8) дискретной функции $f(i_1, i_2)$ участвуют $3(M+1)$ вейвлетов различных уровней.

В самом деле, в частности, имеем:

$$\begin{aligned}
 f(1, 1) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,1}^p \psi_{1,0,1,1}^p(1, 1) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,1}^p \psi_{0,1,1,1}^p(1, 1) + v_{1,1,1,1}^p \psi_{1,1,1,1}^p(1, 1)); \\
 f(2, 1) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,1}^p \psi_{1,0,1,1}^p(2, 1) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,1}^p \psi_{0,1,1,1}^p(2, 1) + v_{1,1,1,1}^p \psi_{1,1,1,1}^p(2, 1)); \\
 f(3, 1) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,2,1}^p \psi_{1,0,2,1}^p(3, 1) + \\
 &\quad + v_{0,1,2,1}^p \psi_{0,1,2,1}^p(3, 1) + v_{1,1,2,1}^p \psi_{1,1,2,1}^p(3, 1)); \\
 f(4, 1) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,2,1}^p \psi_{1,0,2,1}^p(4, 1) + \\
 &\quad + v_{0,1,2,1}^p \psi_{0,1,2,1}^p(4, 1) + v_{1,1,2,1}^p \psi_{1,1,2,1}^p(4, 1)); \\
 f(5, 1) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,3,1}^p \psi_{1,0,3,1}^p(5, 1) + \\
 &\quad + v_{0,1,3,1}^p \psi_{0,1,3,1}^p(5, 1) + v_{1,1,3,1}^p \psi_{1,1,3,1}^p(5, 1)); \\
 f(1, 2) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,1}^p \psi_{1,0,1,1}^p(1, 2) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,1}^p \psi_{0,1,1,1}^p(1, 2) + v_{1,1,1,1}^p \psi_{1,1,1,1}^p(1, 2)); \\
 f(1, 3) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,2}^p \psi_{1,0,1,2}^p(1, 3) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,2}^p \psi_{0,1,1,2}^p(1, 3) + v_{1,1,1,2}^p \psi_{1,1,1,2}^p(1, 3)); \\
 f(1, 4) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,2}^p \psi_{1,0,1,2}^p(1, 4) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,2}^p \psi_{0,1,1,2}^p(1, 4) + v_{1,1,1,2}^p \psi_{1,1,1,2}^p(1, 4)); \\
 f(1, 5) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,1,3}^p \psi_{1,0,1,3}^p(1, 5) + \\
 &\quad + v_{0,1,1,3}^p \psi_{0,1,1,3}^p(1, 5) + v_{1,1,1,3}^p \psi_{1,1,1,3}^p(1, 5))
 \end{aligned}$$

и т.д.

Для произвольной точки (i_1, i_2) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 f(i_1, i_2) &= \sum_{p=0}^M (v_{1,0,l_1,p,l_2,p}^p \psi_{1,0,l_1,p,l_2,p}^p(i_1, i_2) + \\
 &\quad + (v_{0,1,l_1,p,l_2,p}^p \psi_{0,1,l_1,p,l_2,p}^p(i_1, i_2) + \\
 &\quad + v_{1,1,l_1,p,l_2,p}^p \psi_{1,1,l_1,p,l_2,p}^p(i_1, i_2))), \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } l_{1,0} &= \left\lceil \frac{i_1 + 1}{2} \right\rceil; \quad l_{1,1} = \left\lceil \frac{i_1 + 3}{4} \right\rceil; \\
 &\quad l_{1,2} = \left\lceil \frac{i_1 + 7}{8} \right\rceil; \quad \dots \text{ и т.д.}; \\
 l_{2,0} &= \left\lceil \frac{i_2 + 1}{2} \right\rceil; \quad l_{2,1} = \left\lceil \frac{i_2 + 3}{4} \right\rceil; \\
 &\quad l_{2,2} = \left\lceil \frac{i_2 + 7}{8} \right\rceil; \quad \dots \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

Итак, имеем следующие окончательные формулы для определения параметров $l_{1,p}$ и $l_{2,p}$:

$$l_{1,p} = \left\lceil \frac{2^{p+1} + i_1 - 1}{2^{p+1}} \right\rceil, \quad l_{2,p} = \left\lceil \frac{2^{p+1} + i_2 - 1}{2^{p+1}} \right\rceil, \quad (2.2)$$

$p = 0, 1, 2, \dots, M.$

По аналогии с (1.10) можем переписать (2.1) следующим образом:

$$f(i_1, i_2) = \sum_{p=1}^{3M+1} f_{m_p} \varphi_{m_p}(i_1, i_2), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 m_p &= s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (l_{1,p-1} - 1) + \\
 &\quad + 3 \cdot (l_{2,p-1} - 1) \cdot N_{p-1} + 3 \cdot \sum_{q=0}^{p-2} (N_q)^2 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 m_p &= s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (l_{1,p-1} - 1) + \\
 &\quad + (l_{2,p-1} - 1) \cdot N_{comp,p-1} + N_{comp,tot}^{p-2}, \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } N_{comp,p} = \begin{cases} 3N_p, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (2.6)$$

$$N_{comp,tot}^{-1} = 0;$$

$$N_{comp,tot}^r = 3 \cdot \sum_{q=0}^r (N_q)^2, \quad r = 1, 2, \dots, M - 1;$$

$$N_{comp,tot}^M = n^2; \quad (2.7)$$

3. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА С ОСРЕДНЕНИЕМ

Пусть

$$u_{j_1, j_2}^0 = f(j_1, j_2), \quad j_1 = 1, 2, \dots, n, \quad j_2 = 1, 2, \dots, n; \quad (3.1)$$

$$\alpha_0 = 2. \quad (3.2)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M - 1$, $j_1 = 0, 1, \dots, N_p$, $j_2 = 0, 1, \dots, N_p$, $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1$ (кроме случая $s_1 = s_2 = 0$) производим вычисления по формулам

$$z_1 = (-1)^{s_1}, \quad z_2 = (-1)^{s_2}; \quad (3.3)$$

$$v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \alpha_p^{-1} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + z_1 u_{2j_1, 2j_2-1}^p + z_2 u_{2j_1-1, 2j_2}^p + z_1 z_2 u_{2j_1, 2j_2}^p); \quad (3.4)$$

$$u_{j_1, j_2}^{p+1} = u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1-1, 2j_2}^p + u_{2j_1, 2j_2}^p; \quad (3.5)$$

$$\alpha_{p+1} = 2 \cdot \alpha_p. \quad (3.6)$$

При $p = M$ имеем:

$$\alpha_M = n; \quad (3.7)$$

$$v_{0,0,1,1}^M = \alpha_M^{-1} u_{1,1}^M, \quad (3.8)$$

где u_{j_1, j_2}^p , $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, 2, \dots, M$ – вспомогательные величины.

Заметим, что если значения u_{j_1, j_2}^0 , $j_1 = 1, 2, \dots, N$, $j_2 = 1, 2, \dots, N$, определенные по формуле (3.1), являются точными, то возникновение ошибок в дальнейшем при реализации формул (3.2)-(3.8) исключено. Вместе с тем, по практическим соображениям может потребоваться некоторое уменьшение точности в угоду другим факторам.

Пусть p – индекс, соответствующий номеру уровня, $p = 0, 1, 2, \dots, M$; j_1 и j_2 – индексы, соответствующие номерам базисной функции на рассматриваемом уровне,

$j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$. Положим, что требуется произвести осреднение на некотором уровне q .

В соответствии с [2, 5] формулы осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{1,0,2j_1-1,2j_2-1}^p &= v_{1,0,2j_1,2j_2-1}^p = \\ &= v_{1,0,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,0,2j_1,2j_2}^p = \beta_{1,0} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1}, \\ j_1 &= 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} v_{0,1,2j_1-1,2j_2-1}^p &= v_{0,1,2j_1,2j_2-1}^p = \\ &= v_{0,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{0,1,2j_1,2j_2}^p = \beta_{0,1} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1}, \\ j_1 &= 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} v_{1,1,2j_1-1,2j_2-1}^p &= v_{1,1,2j_1,2j_2-1}^p = \\ &= v_{1,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,1,2j_1,2j_2}^p = \beta_{1,1} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1}, \\ j_1 &= 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{где } \beta_{1,0} = \frac{1}{4}; \quad \beta_{0,1} = \frac{1}{4}; \quad \beta_{1,1} = \frac{1}{8}. \quad (3.12)$$

При использовании сплошной глобальной индексации согласно (2.3)-(2.4), очевидно, получим:

$$\begin{aligned} f_{1+6 \cdot (j_1-1) + 2(j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} &= \\ &= f_{1+3 \cdot (2j_1-1) + 2(j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \\ &= f_{1+6 \cdot (j_1-1) + (2j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \\ &= f_{1+3 \cdot (2j_1-1) + (2j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \quad (3.13) \\ &= \beta_{1,0} f_{1+3 \cdot (j_1-1) + (j_2-1) \cdot N_{comp,p+1} + N_{comp,tot}^p}, \\ p &= q, q-1, \dots, 0, 1; \\ j_1 &= 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2+6 \cdot (j_1-1) + 2(j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} &= \\ &= f_{2+3 \cdot (2j_1-1) + 2(j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \\ &= f_{2+6 \cdot (j_1-1) + (2j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \\ &= f_{2+3 \cdot (2j_1-1) + (2j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} = \quad (3.14) \\ &= \beta_{0,1} f_{s_1+2 \cdot s_2+3 \cdot (j_1-1) + (j_2-1) \cdot N_{comp,p+1} + N_{comp,tot}^p}, \\ p &= q, q-1, \dots, 0, 1; \\ j_1 &= 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{3+6 \cdot (j_1-1)+2(j_2-1) \cdot N_{comp,p}+N_{comp,tot}^{p-1}} = \\
 & = f_{3+3 \cdot (2j_1-1)+2(j_2-1) \cdot N_{comp,p}+N_{comp,tot}^{p-1}} = \\
 & = f_{3+6 \cdot (j_1-1)+(2j_2-1) \cdot N_{comp,p}+N_{comp,tot}^{p-1}} = \\
 & = f_{3+3 \cdot (2j_1-1)+(2j_2-1) \cdot N_{comp,p}+N_{comp,tot}^{p-1}} = \quad (3.15) \\
 & = \beta_{1,1} f_{s_1+2 \cdot s_2+3 \cdot (j_1-1)+(j_2-1) \cdot N_{comp,p+1}+N_{comp,tot}^p}, \\
 & p = q, q-1, \dots, 0, 1; \\
 & j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}.
 \end{aligned}$$

4. АЛГОРИТМ МНОГОУРОВНЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ БАЗИСА ХААРА

Будем полагать, что в каждой из точек (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) ($i_1 = 1, 2, \dots, n$, $i_2 = 1, 2, \dots, n$) заданы величины следующие величины: χ_{i_1,i_2} – характеристическая функция операции осреднения, равная единице, если в точке (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) требуется осреднения и нулю – если в точке (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) осреднение не требуется; N_{i_1,i_2}^{aver} – максимальный номер уровня, на котором выполняется осреднение. Если $\chi_{i_1,i_2} = 0$, то осреднение в точке (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) выполнять не требуется, а если $\chi_{i_1,i_2} = 1$, то осреднение ведется по формулам (3.13)-(3.15), в которой вместо q задается значение N_{i_1,i_2}^{aver} .

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе

многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.

2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Введение. Одномерный случай. // Статья в настоящем журнале.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.

4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформированного состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2012.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

ОБ ОПЕРАТОРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета тонкой анизотропной пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода.

Ключевые слова: операторная постановка, краевая задача, собственные значения, собственные функции, анизотропная пластина, кусочно-постоянные параметры, дискретно-континуальный подход

ABOUT OPERATIONAL FORMULATION OF EIGENVALUE PROBLEM FOR ANISOTROPIC PLATE WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIMENSION WITHIN DISCRETE-CONTINUAL APPROACH

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Operational formulation of eigenvalue problem for anisotropic plate with piecewise-constant physical and geometrical parameters in basic dimension within discrete-continual approach is under consideration in the distinctive paper.

Key words: operational formulation, boundary problem, eigenvalue problem, anisotropic plate, piecewise-constant parameters, discrete-continual approach

В настоящей статье в рамках дискретно-континуального подхода [2-4] рассматриваются операторная постановка проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи расчета анизотропной пластины [1, 5-9] с кусочно-

постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению.

1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть Ω – область, занимаемая конструкцией. Без ограничения общности будем рассматривать пластину с размерами в плане l_1 ($x_1 \in [0, l_1]$) и l_2 ($x_2 \in [0, l_2]$).

Пусть x_2 – переменная, соответствующая основному направлению, т.е. вдоль нее физико-геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно. Заметим, что вдоль переменной x_1 эти параметры пластины могут изменяться произвольным образом.

Введем обозначения: $x_{2,k}^b, k = 1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров пластины); $\Omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие фрагменты, выделенные из области Ω сечениями $x_2 = x_{2,k}^b$ и $x_2 = x_{2,k+1}^b$; h_k – толщина плиты на участке Ω_k ($x_3 \in [0, h_k]$); $\Gamma_k, k = 1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие границы фрагментов $\Omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$; $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2)$ – характеристическая функция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [2-4, 10],

$$\theta_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k;$$

$$\delta'_{\Gamma,k}(x_1, x_2) = \partial\delta_{\Gamma,k} / \partial\bar{n}_k; \quad (1.2)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе Γ_k ; $\omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$ – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты $\Omega_k, k = 1, \dots, n_k - 1$;

\mathcal{L}_k – оператор задачи в расширенной области ω_k относительно перемещений на интервале $x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k = & \partial_1^2 \bar{B}_{k,1,1} \partial_1^2 w_k + \partial_2^2 \bar{B}_{k,1,2} \partial_1^2 w_k + \\ & + \partial_1^2 \bar{B}_{k,2,1} \partial_2^2 w_k + \partial_2^2 \bar{B}_{k,2,2} \partial_2^2 w_k + \\ & + 4\partial_1 \partial_2 \bar{B}_{k,3,3} \partial_1 \partial_2 w_k + 2\partial_1^2 \bar{B}_{k,1,3} \partial_1 \partial_2 w_k + \\ & + 2\partial_2^2 \bar{B}_{k,2,3} \partial_1 \partial_2 w_k + 2\partial_1 \partial_2 \bar{B}_{k,1,3} \partial_1^2 w_k + \\ & + 2\partial_1 \partial_2 \bar{B}_{k,2,3} \partial_2^2 w_k + (\theta_k + \delta_{\Gamma,k}) c_k w_k; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{k,1,1} = \theta_k B_{k,1,1}, \quad \bar{B}_{k,1,3} = \theta_k B_{k,1,3}, \quad \bar{B}_{k,2,3} = \theta_k B_{k,2,3}, \\ \bar{B}_{k,1,2} = \theta_k B_{k,1,2}, \quad \bar{B}_{k,3,3} = \theta_k B_{k,3,3}, \quad \bar{B}_{k,2,2} = \theta_k B_{k,2,2}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$B_{k,1,1}, B_{k,2,2}, B_{k,3,3}, B_{k,1,2} = B_{k,2,1}, B_{k,2,3} = B_{k,3,2}, B_{k,1,3} = B_{k,3,1}$ – постоянные, характеризующие упругие свойства тела на области Ω_k ;

$$\partial_k = \partial / \partial x_k, \quad k = 1, 2; \quad \partial_k^* = -\partial / \partial x_k, \quad k = 1, 2; \quad (1.5)$$

s – искомое собственное значение; w_k – прогиб (собственная функция) в области Ω_k . Приведем ниже сводку определяющих формул для основных статических и кинематических величин:

– внутренние моменты и усилия в Ω_k

$$M_1^{(k)} = B_{k,1,1} \chi_1^{(k)} + B_{k,1,2} \chi_2^{(k)} + B_{k,1,3} \chi_{12}^{(k)}; \quad (1.6)$$

$$M_2^{(k)} = B_{k,1,2} \chi_1^{(k)} + B_{k,2,2} \chi_2^{(k)} + B_{k,2,3} \chi_{12}^{(k)}; \quad (1.7)$$

$$M_{12}^{(k)} = M_{21}^{(k)} = B_{k,1,3} \chi_1^{(k)} + B_{k,2,3} \chi_2^{(k)} + B_{k,3,3} \chi_{12}^{(k)}; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} = & B_{k,1,1} \partial_1 \chi_1^{(k)} + 3B_{k,1,3} \partial_2 \chi_1^{(k)} + \\ & + (B_{k,1,2} + 2B_{k,3,3}) \partial_1 \chi_2^{(k)} + B_{k,2,3} \partial_2 \chi_2^{(k)}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} N_2^{(k)} = & B_{k,1,3} \partial_1 \chi_1^{(k)} + (B_{k,1,2} + 2B_{k,3,3}) \partial_2 \chi_1^{(k)} + \\ & + 3B_{k,2,3} \partial_1 \chi_2^{(k)} + B_{k,2,2} \partial_2 \chi_2^{(k)}; \end{aligned} \quad (1.10)$$

Об операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета тонкой анизотропной пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

– деформации при $x_3 = 1$ в области Ω_k

$$\begin{aligned} \chi_1^{(k)} &= -\partial_1^2 w_k; & \chi_2^{(k)} &= -\partial_2^2 w_k; \\ \chi_{12}^{(k)} &= \chi_{21}^{(k)} = -2\partial_1 \partial_2 w_k. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ОПЕРАТОРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Учитывая кусочно-постоянный характер изменения параметров конструкции по основному направлению (вдоль x_2), справедливо следующее представление:

$$\mathcal{L}_k = -\mathcal{L}_{k,4} \partial_2^4 + \mathcal{L}_{k,3} \partial_2^3 + \mathcal{L}_{k,2} \partial_2^2 + \mathcal{L}_{k,1} \partial_2 + \mathcal{L}_{k,0}, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{L}_{k,4} = -\bar{B}_{k,2,2};$ (2.2)

$$\mathcal{L}_{k,3} = 2\bar{B}_{k,2,3} \partial_1 + 2\partial_1 \bar{B}_{k,2,3}; \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{k,2} = \bar{B}_{k,1,2} \partial_1^2 + \partial_1^2 \bar{B}_{k,2,1} + 4\partial_1 \bar{B}_{k,3,3} \partial_1; \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{k,1} = 2\partial_1^2 \bar{B}_{k,1,3} \partial_1 + 2\partial_1 \bar{B}_{k,1,3} \partial_1^2; \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{k,0} = \partial_1^2 \bar{B}_{k,1,1} \partial_1^2 + \theta_k c_k. \quad (2.6)$$

3. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Итак, операторная постановка задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}_k w_k = \mathcal{F}_k, \quad x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1. \quad (3.1)$$

Рассмотрим произвольное k -е уравнение системы (3.1). Учитывая (2.1), можем переписать его следующим образом:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{k,4} \partial_2^4 w_k + \mathcal{L}_{k,3} \partial_2^3 w_k + \\ + \mathcal{L}_{k,2} \partial_2^2 w_k + \mathcal{L}_{k,1} \partial_2 w_k + \mathcal{L}_{k,0} w_k = s w_k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} y_1^{(k)} &= y_1^{(k)}(x_1, x_2) = w_k(x_1, x_2); \\ y_i^{(k)} &= y_i^{(k)}(x_1, x_2) = \partial_2^{i-1} w_k(x_1, x_2), \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На основании (3.3) переписываем (3.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{k,4} \partial_2 y_4^{(k)} + \mathcal{L}_{k,3} y_4^{(k)} + \mathcal{L}_{k,2} y_3^{(k)} + \\ + \mathcal{L}_{k,1} y_2^{(k)} + (\mathcal{L}_{k,0} - s) y_1^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Объединяя (3.4) с (3.3) и вводя обозначения

$$(y_i^{(k)})'(x_1, x_2) = \partial_2 y_i^{(k)}(x_1, x_2), \quad i = 2, 3, 4, \quad (3.5)$$

получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{k,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1^{(k)})' \\ (y_2^{(k)})' \\ (y_3^{(k)})' \\ (y_4^{(k)})' \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{L}_{k,0} - s & \mathcal{L}_{k,1} & \mathcal{L}_{k,2} & \mathcal{L}_{k,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \\ y_4^{(k)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

или

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (y_1^{(k)})' \\ (y_2^{(k)})' \\ (y_3^{(k)})' \\ (y_4^{(k)})' \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{L}_{k,4}^{-1}(\mathcal{L}_{k,0} - s) & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,1} & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,2} & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \\ y_4^{(k)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В итоге имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка (относительно

переменной x_2) с операторными коэффициентами:

$$\bar{U}'_k = \tilde{\mathcal{L}}_{k,s} \bar{U}_k, \quad (3.8)$$

где

$$\bar{U}_k = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \\ y_4^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \bar{U}'_k = \partial_2 \bar{U}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 y_1^{(k)} \\ \partial_2 y_2^{(k)} \\ \partial_2 y_3^{(k)} \\ \partial_2 y_4^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1^{(k)})' \\ (y_2^{(k)})' \\ (y_3^{(k)})' \\ (y_4^{(k)})' \end{bmatrix}; \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,0} & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,1} & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,2} & \mathcal{L}_{k,4}^{-1} \mathcal{L}_{k,3} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8), разумеется, следует дополнить граничными условиями, задаваемыми в сечениях с координатами $x_{2,k}^b$, $k = 1, \dots, n_k$. Эти граничные условия представимы в виде

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (3.11)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.12)$$

где B_k^-, B_k^+ , $k = 2, \dots, n_k - 1$, B_1^+ и $B_{n_k}^-$ – матрицы коэффициентов граничных условий, 8-го порядка; \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+ , $k = 2, \dots, n_k - 1$, \bar{g}_1^+ и $\bar{g}_{n_k}^-$ – векторы правых частей граничных условий, восьмимерные.

Объединяя (3.8), (3.11) и (3.12) получаем операторную постановку многоточечной краевой задачи с выделением основного направления:

$$\begin{cases} \bar{U}'_k = \tilde{\mathcal{L}}_k \bar{U}_k + \bar{F}_k, \\ x_2 \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \\ k = 2, \dots, n_k - 1 \\ B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (4.13)$$

4. ЗАДАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

Рассмотрим ниже задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению к основному направлению в форме (3.11)-(3.12) в произвольной граничной точке с координатой $x_{2,k}^b$. Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1) $1 < k < n_k$ – промежуточная граничная точка; 2) $k = 1$ – крайняя левая (первая) граничная точка; 3) $k = n_k$ – крайняя правая (последняя) граничная точка.

Шарнирное опирание.

Шарнирное опирание препятствует прогибу пластины, но допускает свободный поворот опертого края в перпендикулярном к нему направлении.

Для случая $1 < k < n_k$ имеем следующие граничные условия:

$$w_{k-1}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0; \quad w_k(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0; \quad (4.1)$$

$$M_2^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0; \quad M_2^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0. \quad (4.2)$$

С учетом формул (3.3) и (1.7) и (1.11) имеем следующие граничные условия:

$$y_1^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0; \quad y_1^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0; \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & B_{k-1,1,2} [\partial_1^2 y_1^{(k-1)}] (x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\ & + B_{k-1,2,2} y_3^{(k-1)} (x_1, x_{2,k}^b - 0) + \\ & + B_{k-1,2,3} [\partial_1 y_2^{(k-1)}] (x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

Об операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета тонкой анизотропной пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

$$B_{k,1,2}[\partial_1^2 y_1^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + B_{k,2,2} y_3^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) + B_{k,2,3}[\partial_1 y_2^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0. \quad (4.5)$$

В силу того, что опертые края пластины остаются прямыми вторые производные от прогиба по направлению, совпадающему с направлением опертого края, равны нулю, т.е. можем переписать (4.4)-(4.5) в виде:

$$B_{k-1,2,3}[\partial_1 y_2^{(k-1)}](x_1, x_{2,k}^b - 0) + B_{k-1,2,2} y_3^{(k-1)}(x_1, x_{2,k}^b - 0) = 0; \quad (4.6)$$

$$B_{k,2,3}[\partial_1 y_2^{(k)}](x_1, x_{2,k}^b + 0) + B_{k,2,2} y_3^{(k)}(x_1, x_{2,k}^b + 0) = 0. \quad (4.7)$$

Таким образом, имеем (см. формулы (4.3), (4.6) и (4.7)):

$$B_k^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{k-1,2,3}\partial_1 & B_{k-1,2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_k^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{k,2,3}\partial_1 & B_{k,2,2} & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{g}_k^- = \bar{g}_k^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Для случая $k=1$ имеем следующие граничные условия:

$$y_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0; \quad (4.9)$$

$$B_{1,2,3}[\partial_1 y_2^{(1)}](x_1, x_{2,1}^b + 0) + B_{1,2,2} y_3^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad (4.10)$$

откуда

$$B_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,2,3}\partial_1 & B_{1,2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

а первые две компоненты в векторах \bar{g}_1^+ и $\bar{g}_{n_k}^-$ нулевые.

Для случая $k = n_k$ имеем следующие граничные условия:

$$y_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0; \quad (4.12)$$

$$B_{n_k-1,2,3}[\partial_1 y_2^{(n_k-1)}](x_1, x_{2,n_k}^b - 0) + B_{n_k-1,2,2} y_3^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad (4.13)$$

откуда

$$B_{n_k}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{n_k-1,2,3}\partial_1 & B_{n_k-1,2,2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

а последние две компоненты в векторах \bar{g}_1^+ и $\bar{g}_{n_k}^-$ нулевые.

Жесткая заделка.

На защемленных краях пластины должны быть равны нулю прогиб и угол наклона касательной к изогнутой срединной поверхности, который в данном случае определяется по формуле

$$\varphi_2^{(k)} \approx \text{tg}(\varphi_2^{(k)}) = \partial_2 w_k = y_2^{(k)}. \quad (4.15)$$

Для случая $k=1$ имеем следующие граничные условия:

$$y_1^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0; \quad (4.16)$$

$$y_2^{(1)}(x_1, x_{2,1}^b + 0) = 0, \quad (4.17)$$

откуда

$$B_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

а первые две компоненты в векторах \bar{g}_1^+ и $\bar{g}_{n_k}^-$ нулевые.

Для случая $k = n_k$ имеем следующие граничные условия:

$$y_1^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0; \quad (4.19)$$

$$y_2^{(n_k-1)}(x_1, x_{2,n_k}^b - 0) = 0, \quad (4.20)$$

откуда

$$B_{n_k}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

а последние две компоненты в векторах \bar{g}_1^+ и $\bar{g}_{n_k}^-$ нулевые.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выпол-

няемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 572 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
5. **Лехницкий С.Г.** Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. **Сидоров В.Н.** Дискретные постановки и алгоритмы решения краевых задач строительной механики в произвольных областях на регулярных сетках. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1992.
7. **Сидоров В.Н.** Разработка метода решения краевых задач на ЭВМ для расчета различных типов строительных конструкций. Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1976. – 171 с.
8. **Сидоров В.Н., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Хегай А.О.** Постановка и численное решение краевых задач изгиба плит из фибробетона. // «Вопросы прикладной

Об операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета тонкой анизотропной пластины с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

математики и вычислительной механики». Сб. трудов №13, М.: МГСУ, 2010, с. 344-350.

E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

9. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
10. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Advisor of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94,

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКСПЕРТИЗАХ ПРИЧИН ЛОКАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ И ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ОБРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ЗДАНИЙ

А.М. Белостоцкий

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена актуальным вопросам численного моделирования в экспертизах причин локального разрушения и прогрессирующего обрушения конструкций большепролетных зданий. Рассматриваются важные практические вопросы использования программно-алгоритмических комплексов СТАДИО и АСТРА-НОВА.

Ключевые слова: численное моделирование, компьютерное моделирование, метод динамического синтеза подконструкций, программно-алгоритмические комплексы, метод конечных элементов

COMPUTATIONAL SIMULATION IN THE EXAMINATION OF CAUSES LOCAL DAMAGE AND PROGRESSIVE COLLAPSE OF LONG-SPAN BUILDINGS

Alexander M. Belostotsky

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Dynamic synthesis of substructures and submodelling methods are realized in actual versions of finite element (FE) program packages STADYO and ASTRA-NOVA. Main algorithmic features and practical problems are presented.

Key words: computational simulation, dynamic synthesis of substructures, submodelling methods, program packages, finite element method

В рамках строительно-технических экспертиз последних лет коллективами «расчетчиков» и «экспериментаторов» выполнен анализ возможных причин прогрессирующего обрушения конструкций покрытия большепролетных зданий спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк» (рис. 3), Басманного рынка (рис. 4) и производственного цеха (рис. 5) и локального разрушения оси оттяжки крытого конькобежного центра «Крылатское» (рис. 6).

1. Рассматриваются важные аспекты численного моделирования поведения систем «грунтовое основание – каркас –

конструкции покрытия» и их критических узлов в различных постановках и с использованием различных программных средств (ПС):

- выработка гипотез и сценариев (механизмов) разрушения;
- постановка задач численного моделирования поведения конструкций при проектных, фактических и «сценарных» нагрузках и воздействиях;
- выбор ПС, в наибольшей степени отвечающих поставленным задачам численного моделирования (ANSYS Mechanical, ANSYS/CFX, MSC

- NASTRAN, ABAQUS, LS-DYNA, СТАДИО, ЛИРА, SCAD, MicroFE, ANSYS/CivilFEM, Robot Millennium/Structure и др.);
- задание и/или моделирование нагрузок и воздействий, формирование реалистичной «истории нагружения» (рис.1,2 – существенное значение в характере напряженно-деформированного состояния и в развитии возможных процессов разрушения имеет не «СНиП’овская», а реальная «история нагружения» в ходе строительства и эксплуатации);
 - построение, верификация и исследование адекватных конечноэлементных моделей поведения пространственных конструкции покрытия при проектных, фактических и «сценарных» нагрузках и воздействиях, отвечающих значимым стадиям строительства, эксплуатации и разрушения;
 - численное исследование трехмерной системы «нелинейное грунтовое основание – каркас – конструкции покрытия» при проектных, фактических и «сценарных» нагрузках и воздействиях;
 - моделирование НДС, прочности и устойчивости моделей наиболее напряженных и/или «нетрадиционно» конструктивно решенных узлов/элементов в трехмерных физически, геометрически, структурно и генетически нелинейных постановках, анализ их возможного разрушения и влияния на работы сооружения в целом;
 - корректировка-калибровка математических моделей по данным «прицельно» инициированных натуральных и лабораторных исследований;
 - составление экспертного заключения, аккумулирующего результаты исследований и дающего обоснованные ответы на поставленные вопросы.
2. Ответы на поставленные вопросы для каждого объекта экспертизы содержат, в частности:
- наиболее вероятные причины и механизмы разрушения/обрушения;
 - уа какой стадии или стадиях (предпроектные изыскания, проектирование, изготовление конструкций, строительство-монтаж, эксплуатация, реконструкция) допущены нарушения-отступления от действующих нормативных требований, повлекшие разрушение-обрушение;
 - «кто виноват?» и «что делать?».
3. Обобщая результаты проведенных экспертиз причин обрушения, можно отметить существенное и не всегда очевидное влияние на поведение большепролетных зданий нетрадиционно решенных конструктивных схем, узлов и элементов, с должной полнотой не обоснованное расчетно/экспериментально на этапе проектирования и проявившееся на последующих этапах «жизненного цикла» («Трансвааль-парк», Басманный рынок, производственный цех). Этот фактор усугубляется при установленных отступлениях от проекта при изготовлении и строительстве (производственный цех), эксплуатации и реконструкции (Басманный рынок). При этом весьма опасными является недооценка реальных жесткостных свойств «несовершенных» узлов опирания/соединения – как их шарнирная идеализация (покрытие-колонны, колонны-фундамент и др. – «Трансвааль-парк» и Басманный рынок),

так и неучет значимой податливости (узлы «пояс-накладки-раскосы» стропильных ферм производственного цеха). Порочной следует признать и практику игнорирования (или чрезмерно упрощенных оценок) влияния податливости грунтового основания и фундаментов на поведение несущих конструкций покрытия.

4. Напротив, всесторонний экспертный расчетно-экспериментальный анализ причин локального разрушения, не приведшего к прогрессирующему обрушению (ККЦ «Крылатское», с привлечением данных мониторинга и оценкой усталостной прочности), явно указывает на грубые заводские дефекты разрушенной детали – оси оттяжки.

Неслучайное «совпадение» – высокий уровень и полнота расчетного обоснования в рамках конструктивного раздела проекта 2003 г. ККЦ «Крылатское», выгодно отличающееся от весьма фрагментарных, по сути, «прикидочных» расчетов ранее упомянутых объектов экспертизы.

5. Выполненные экспертизы продемонстрировали «блеск и нищету» современного этапа развития численных методов расчета зданий/сооружений и их программно-алгоритмических реализаций. Не останавливаясь на очевидных достижениях (понятно, что нет и не будет внятной альтернативы численным методам расчета уникальных зданий и сооружений), выделим некоторые первоочередные задачи, требующие решения:

- моделирование ветровой и снеговой нагрузок на покрытие сложного очертания (численное решение трехмерных задач газодинамики – моделирование ветровых потоков, снегопереноса и снегоотложения);
- учет взаимодействия зданий/сооружений с грунтовым

основанием/массивом на значимых стадиях строительства и эксплуатации с использованием упругопластических и нелинейных реологических моделей грунта;

- совместное рассмотрение эффектов физической, геометрической и других нелинейностей (пластичность металла, ползучесть и трещинообразование железобетона, большие перемещения, потеря устойчивости, закритическое поведение; контактные задачи – отрыв с трением; поэтапность возведения-монтажа,...);
 - устойчивость против прогрессирующего обрушения (упруго-вязко-пластические динамические расчеты с развитой геометрической нелинейностью);
 - разработка прогнозных математических моделей как основы и в составе систем мониторинга технического состояния конструкций, зданий и сооружений в процессе их строительства и эксплуатации.
6. Подтверждены и, по нашим рекомендациям, впоследствии частично внедрены в российскую строительную практику «нехитрые» рецепты обеспечения комплексной техногенной безопасности уникальных зданий и комплексов, среди которых:
- разработка и совершенствование нормативно-методической базы, численных методов расчета, программно-алгоритмического обеспечения и систем мониторинга;
 - разработка процедуры и проведение верификация программных комплексов численного моделирования в системе Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН);

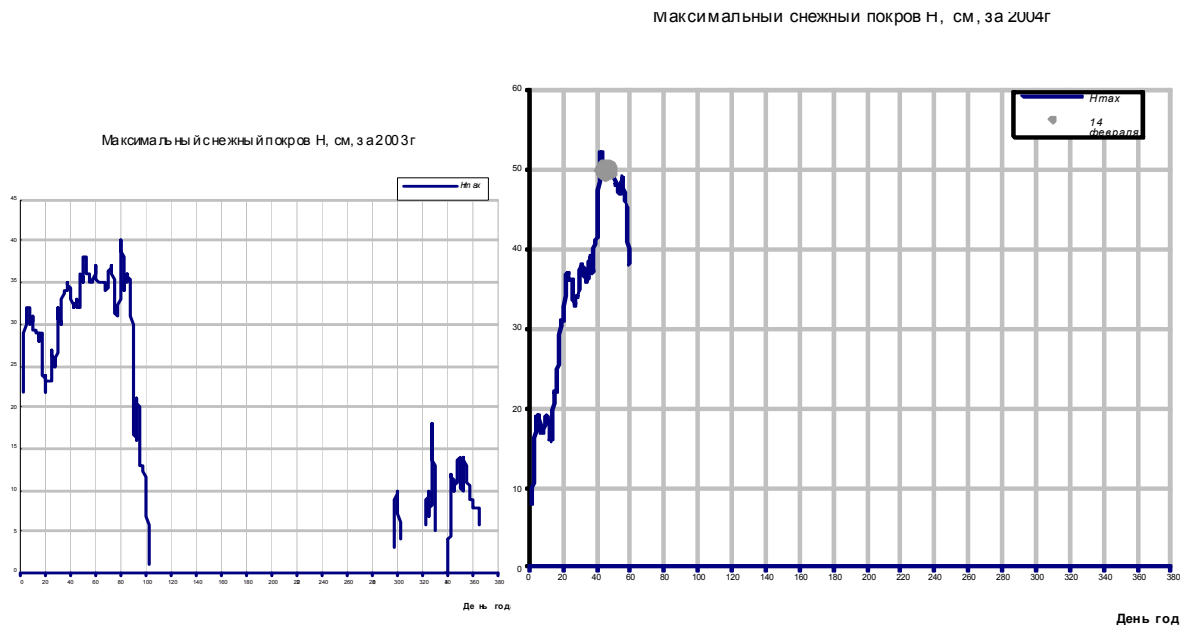


Рисунок 1. Максимальный снежный покров (см) за период эксплуатации СОК «Трансвааль-парк». Данные Росгидромета (2003,2004 гг.)

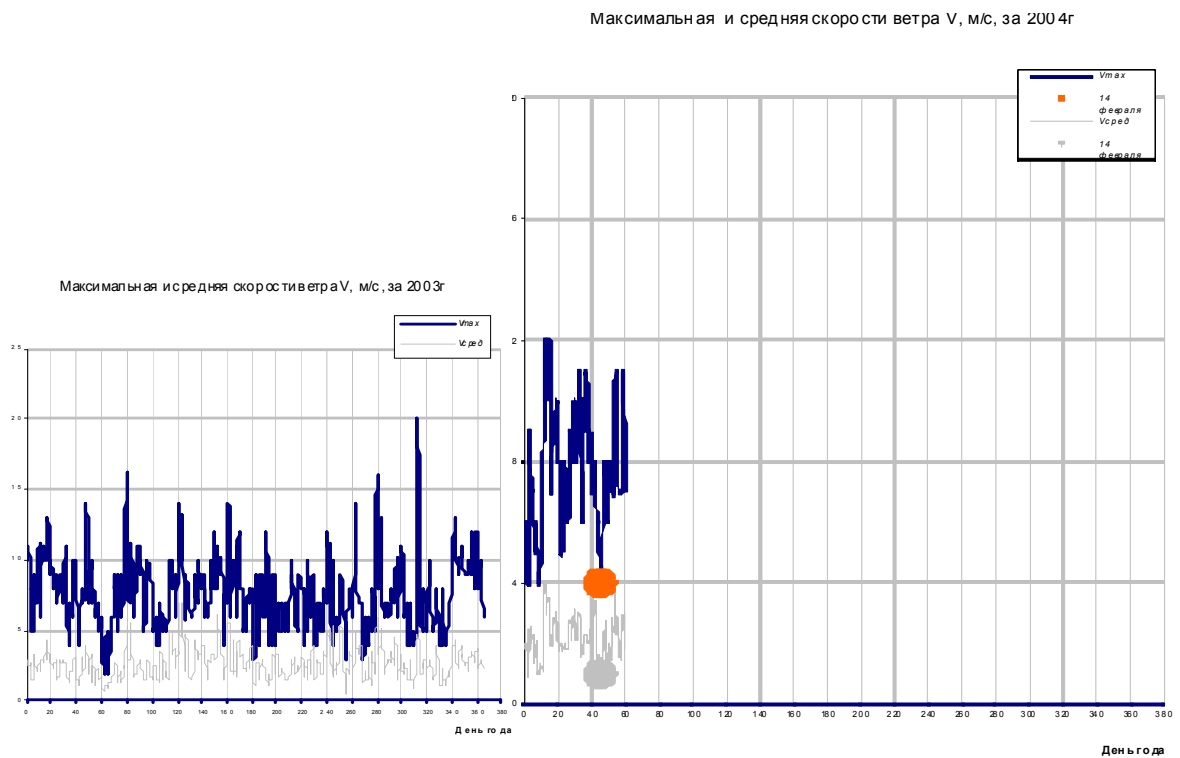
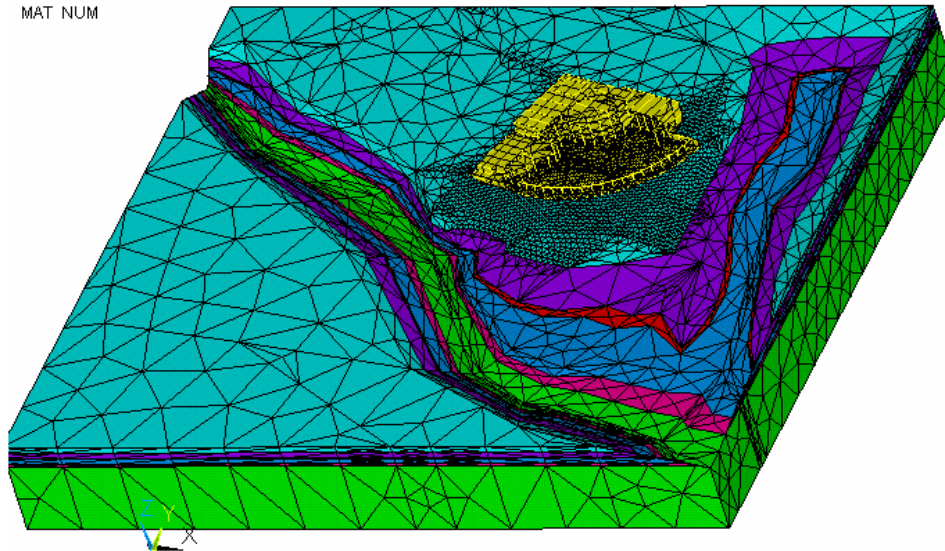
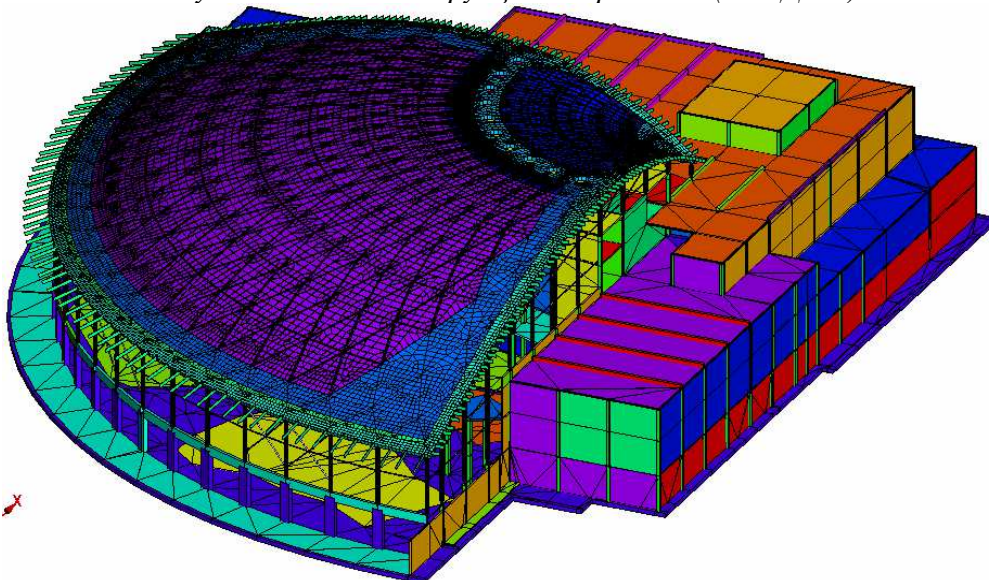


Рисунок 2. Максимальная и средняя скорость ветра (м/с) за период эксплуатации СОК «Трансвааль-парк». Данные Росгидромета (2003,2004 гг.).

«Грунтовое основание – фундамент – конструкции покрытия» (ANSYS)



«Фундамент – конструкции покрытия» (СТАДИО)



Стальная колонна (верхний узел и устойчивость, ANSYS)

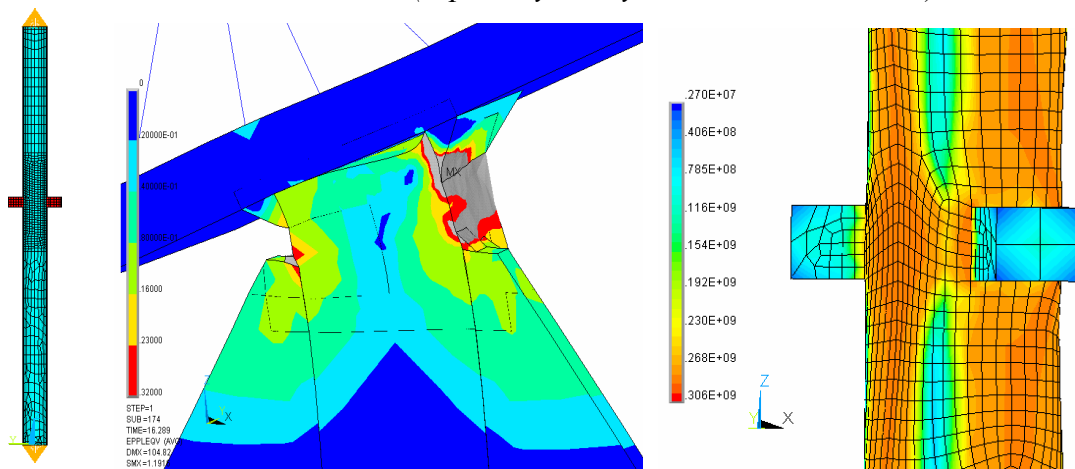
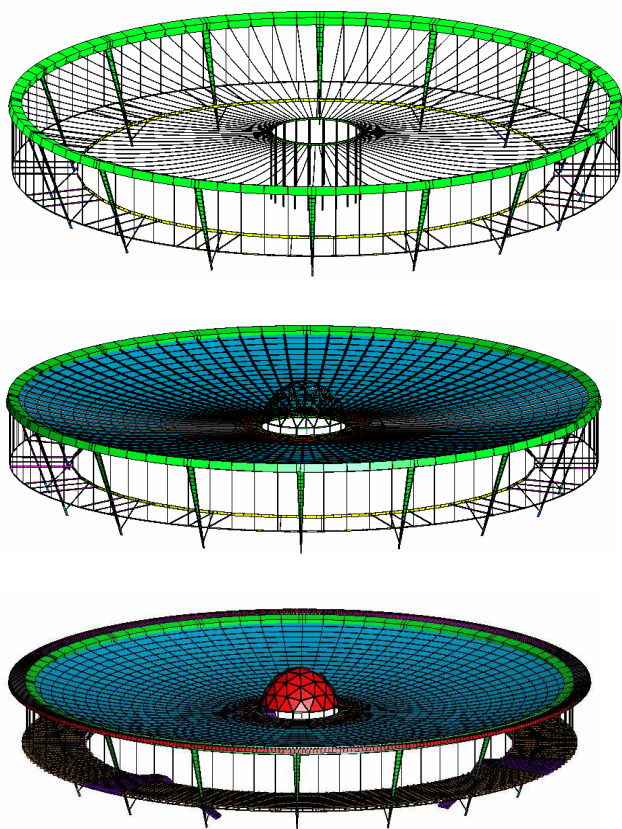


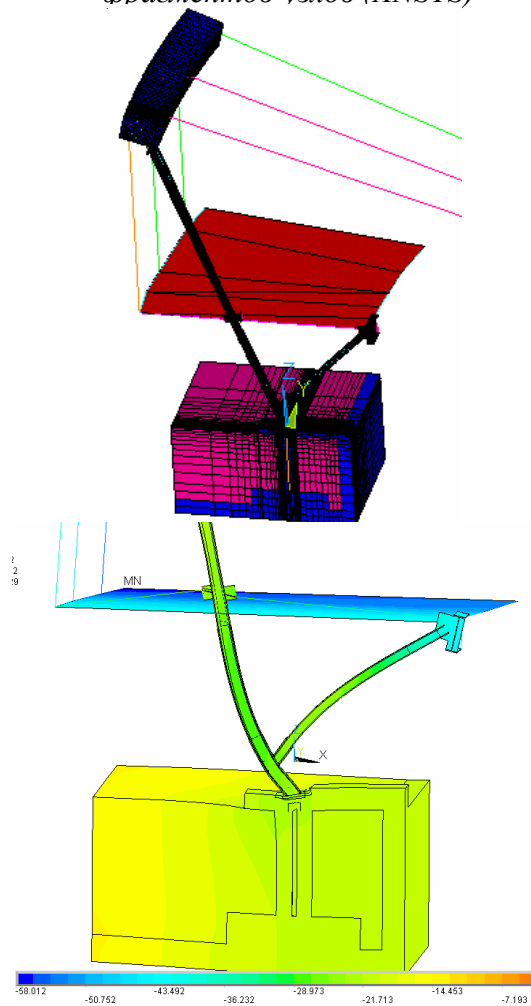
Рисунок 3. Расчетные КЭ-модели и НДС СОК «Трансвааль-парк» и узлов-элементов

Численное моделирование в экспертизах причин локального разрушения и прогрессирующего обрушения конструкций большепролетных зданий

*Этапы возведения и эксплуатации
(СТАДИО, Лира)*



*Трёхмерные модели
фрагментов-узлов (ANSYS)*



Сценарий локального разрушения и прогрессирующего обрушения (СТАДИО)

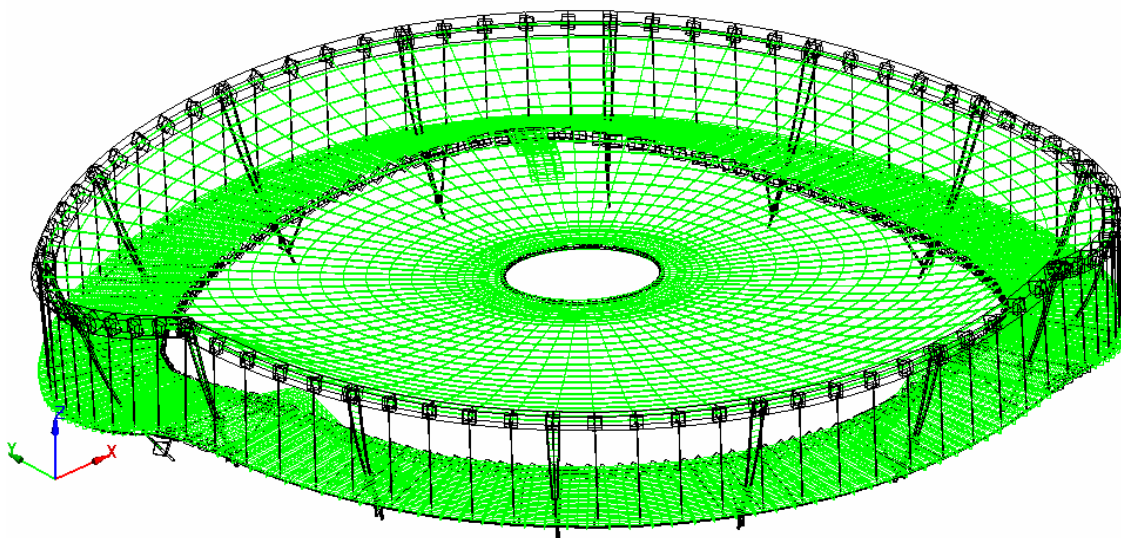
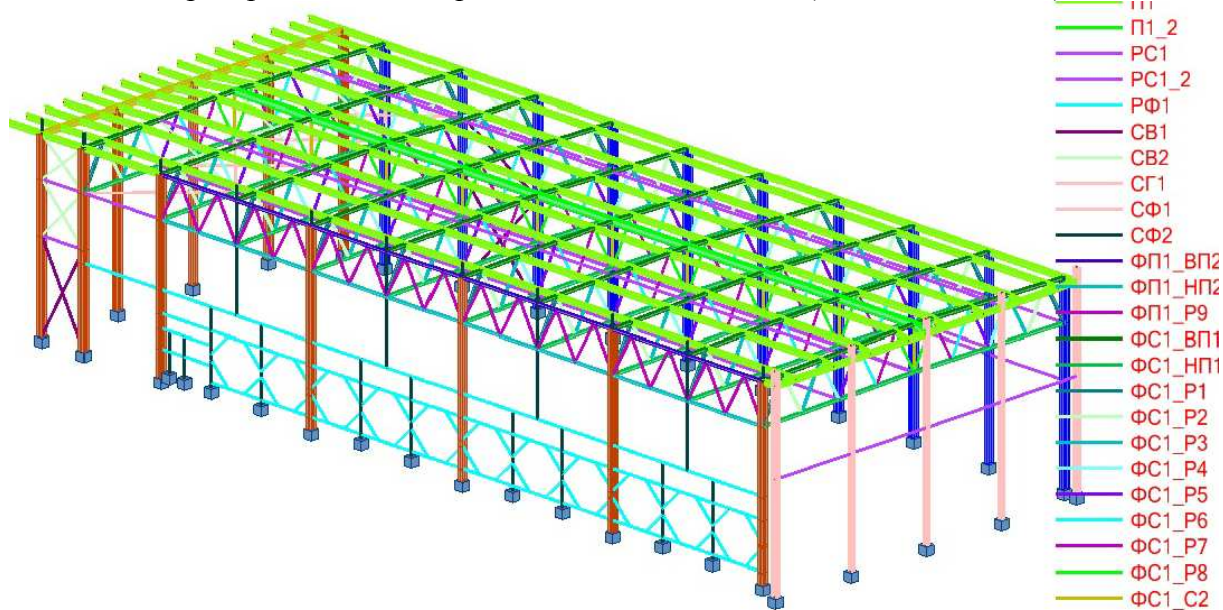


Рисунок 4. Расчетные КЭ-модели и НДС здания Басманного рынка и фрагментов.

Пространственно-стержневая КЭ-модель цеха (Robot Millennium)



Узлы «пояс-накладка-раскосы» фермы в натуре (после обрушения)



Трехмерные нелинейные КЭ-модели узлов фермы (ANSYS)

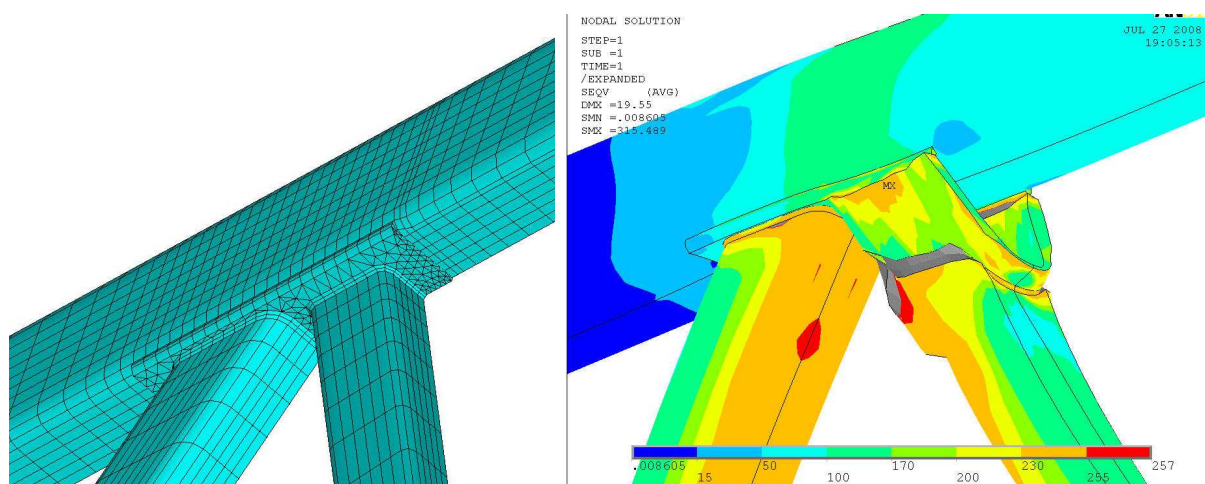
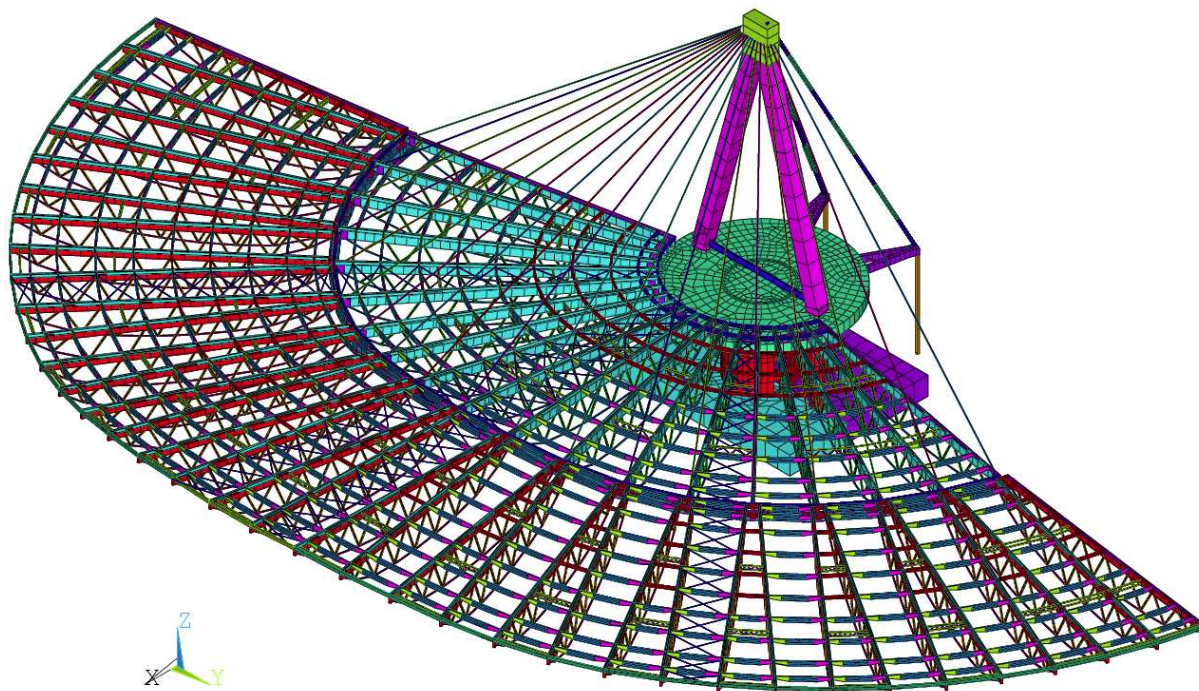


Рисунок 5. Расчетные КЭ-модели и НДС здания цеха и узлов фермы

Пространственная КЭ-модель несущих конструкций покрытия



Интенсивность напряжений в оси оттяжки (ANSYS,СТАДИО)

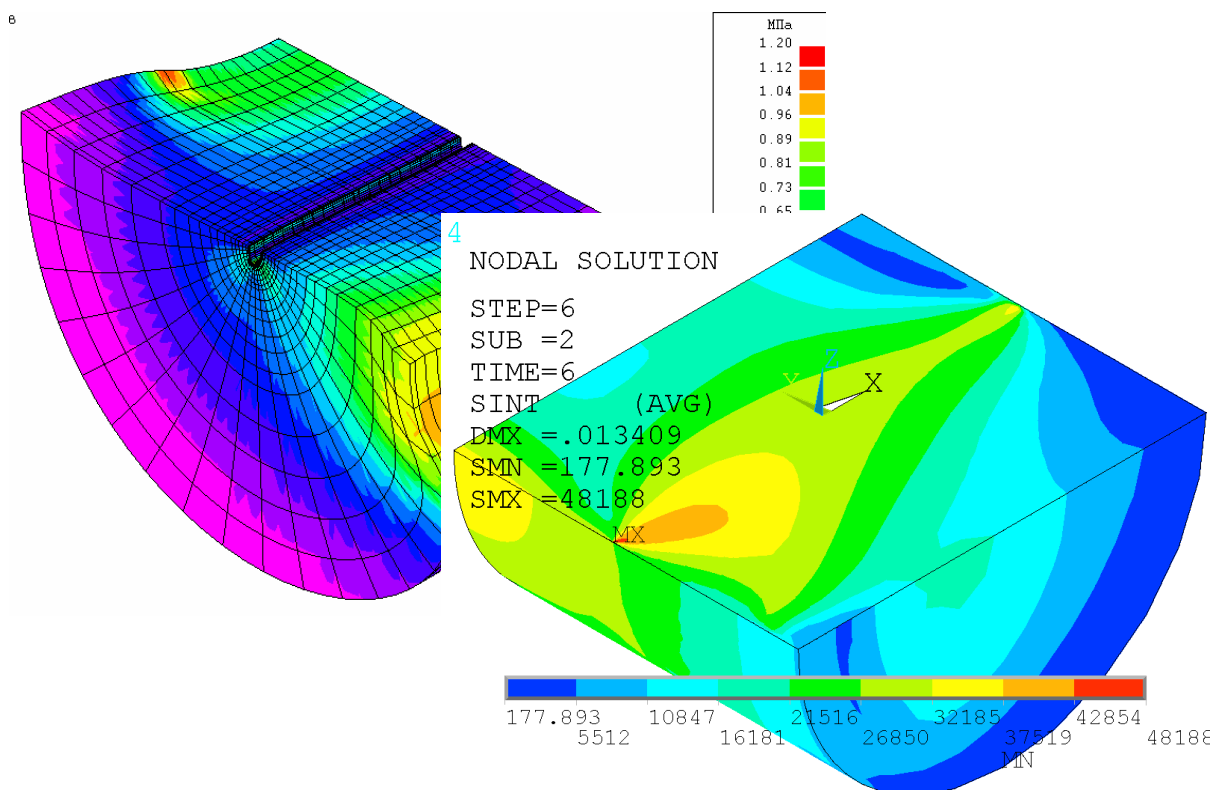


Рисунок 6. Расчетные КЭ-модели и НДС ККЦ «Крылатское» и оси звена оттяжки

- расчетное обоснование по двум независимым моделям и верифицированным программным комплексам;
- подготовка квалифицированных специалистов-расчетчиков, затрудненная общим снижением образовательного уровня, престижности и степени мотивации научно-технической деятельности;
- регламентация деятельности надзорных органов, разумно минимизирующая их административное вмешательство.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Анализ причин обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк». Части 1-5. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», Сб. трудов МГСУ №10. – М: МГСУ, 2008-2010.
2. **Белостоцкий А.М., Дубинский С.И.** Опыт применения ANSYS при анализе причин обрушения конструкций покрытия СОК «Трансвааль-парк». // ANSYS Solution (русская редакция), 2006, с. 4-14.
3. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование как эффективный

инструмент анализа технического состояния и причин обрушения зданий и сооружений (опыт экспертных исследований спортивно-оздоровительного комплекса «Трансвааль-парк»). // Научно-практический журнал «Теория и практика судебной экспертизы», №4(16), 2009, с. 55-78.

Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Director general of StaDyO Research Center, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Executive Manager of Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: amb@stadyo.ru

О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

А.В. Дукарт, В.Н. Фам, Т.Б. Фам

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В статье анализируется поведение линейной трехмассовой диссипативной системы с последовательным соединением звеньев при свободных затухающих колебаниях, вызванных заданными начальными условиями. Для определенности рассеяние энергии в звеньях системы учитывается по гипотезе вязкого трения, причем принимается, что исходная система обладает непропорциональным демпфированием

Ключевые слова: свободные колебания, системы со многими степенями свободы, трение, демпфирование

ON TRANSIENTS VIBRATIONS OF AN AUTONOMOUS SYSTEM WITH THREE DEGREES OF FREEDOM AT PRESENCE OF FRICTION

Adam V. Dukart, Viet Ngoc Pham, Thanh Binh Pham

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The free vibrations of a non-conservative three-mass mechanical system with successive connection of links are examined. For definiteness, dissipation in the links of the system is taken into account on the hypothesis of viscous friction and it is assumed that the initial system has a disproportionate damping. Expressions for the mass coordinates and velocities are found in an explicit form and used then to study the affect of the system parameters on the transient regimes. As an example, for some values of the system parameters, transitional regimes, caused by an action of a single instantaneous impulse on some mass, are considered. The results obtained may be, in particular, used to assign parameters of two-mass cascade-type vibration absorbers.

Key words: free vibrations, non-conservative three-mass mechanical system, friction, damping

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи теории колебаний и динамики сооружений связаны с изучением свободных и вынужденных колебаний механических систем с последовательным соединением масс. Такие задачи возникают, например, в теории виброзащитных систем при исследовании многозвенных гасителей колебаний и амортизирующих креплений и в других расчетных ситуациях [1-4]. В настоящей работе анализируется поведение линейной

трехмассовой диссипативной системы с последовательным соединением звеньев при свободных затухающих колебаниях, вызванных заданными начальными условиями. Для определенности рассеяние энергии в звеньях системы учитывается по гипотезе вязкого трения, причем принимается, что исходная система обладает непропорциональным демпфированием.

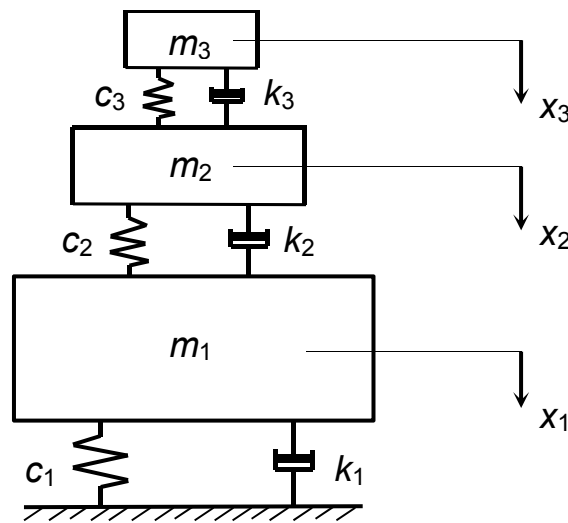


Рисунок 1. Трехмассовая система с последовательным соединением звеньев

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ МАСС СИСТЕМЫ

Расчетная схема системы приведена на рис. 1, где через m_j , c_j , k_j и x_j обозначены соответственно масса, квазиупругий коэффициент, коэффициент вязкого трения и абсолютная координата j -го звена; $j = \overline{1, 3}$.

Свободные затухающие колебания системы представляют собой общее решение однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_2 (x_1 - x_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1) + m_3 \ddot{x}_3 &= 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_3 (x_3 - x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям движения

$$x_j(0) = x_{j,0}; \quad \dot{x}_j(0) = v_{j,0}; \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

где $x_{j,0}$ и $v_{j,0}$ – отклонение и скорость j -ой массы в момент времени $t = 0$.

Следуя [1, 5] запишем общее решение уравнений (1) в виде

$$x_j(t) = \sum_{\nu=1}^3 \left[b_{2\nu-1}^{(j)} A_{2\nu-1} e^{\lambda_{2\nu-1} t} + b_{2\nu}^{(j)} A_{2\nu} e^{\lambda_{2\nu} t} \right]; \quad j = \overline{1, 3}. \quad (3)$$

Здесь $A_{2\nu-1}$, $A_{2\nu}$ – постоянные интегрирования; $b_{2\nu-1}^{(j)}$, $b_{2\nu}^{(j)}$ – коэффициенты распределения амплитуд; $\lambda_{2\nu-1}$, $\lambda_{2\nu}$ – корни характеристического (частотного) уравнения трехмассовой неконсервативной системы цепного типа

$$\begin{aligned} (m_3 \lambda_l^2 + k_3 \lambda_l + c_3) \left[m_2 \lambda_l^2 (k_2 \lambda_l + c_2) + \right. \\ \left. + (m_1 \lambda_l^2 + k_1 \lambda_l + c_1) (m_2 \lambda_l^2 + k_2 \lambda_l + c_2) \right] + \\ \left. + m_3 \lambda_l^2 (k_3 \lambda_l + c_3) \left[m_1 \lambda_l^2 + (k_1 + k_2) \lambda_l + c_1 + c_2 \right] = \right. \\ \left. = 0; \quad l = \overline{1, 6}. \quad (4) \end{aligned}$$

Так как все коэффициенты уравнения (4) являются действительными величинами, то и все характеристические числа λ_l либо действительные, либо попарно комплексно-

сопряженные величины. Учитывая, что колебательному процессу соответствуют комплексно-сопряженные числа λ_l , представим их в виде

$$\lambda_{2\nu-1} = -0,5h_\nu + i\omega_\nu; \quad \lambda_{2\nu} = -0,5h_\nu - i\omega_\nu; \\ \nu = \overline{1, 3}; \quad i = \sqrt{-1}, \quad (5)$$

где $h_\nu > 0$ и $\omega_\nu > 0$ – действительные числа, представляющие собой коэффициенты демпфирования и частоты свободных колебаний рассматриваемой системы. Простым корням (5) уравнения (4) отвечают комплексно-сопряженные величины коэффициентов распределения амплитуд и постоянных

$$b_{2\nu-1,2\nu}^{(j)} = \beta_{2\nu-1}^{(j)} \pm i\beta_{2\nu}^{(j)}; \quad A_{2\nu-1,2\nu} = \alpha_{2\nu-1} \pm i\alpha_{2\nu}. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) функции абсолютных отклонений масс системы можно представить в вещественной форме

$$x_j(t) = 2 \sum_{\nu=1}^3 e^{-0,5h_\nu t} \left[(\beta_{2\nu-1}^{(j)} \alpha_{2\nu-1} - \beta_{2\nu}^{(j)} \alpha_{2\nu}) \cos \omega_\nu t - (\beta_{2\nu}^{(j)} \alpha_{2\nu-1} + \beta_{2\nu-1}^{(j)} \alpha_{2\nu}) \sin \omega_\nu t \right]. \quad (7)$$

Функции скоростей масс системы найдем, дифференцируя (7) по времени

$$\dot{x}_j(t) = 2 \sum_{\nu=1}^3 e^{-0,5h_\nu t} \left[(\beta_{2\nu-1}^{(j)} \alpha_{2\nu-1} + \beta_{2\nu}^{(j)} \alpha_{2\nu}) (0,5h_\nu \sin \omega_\nu t - \omega_\nu \cos \omega_\nu t) - (\beta_{2\nu-1}^{(j)} \alpha_{2\nu-1} - \beta_{2\nu}^{(j)} \alpha_{2\nu}) (0,5h_\nu \cos \omega_\nu t + \omega_\nu \sin \omega_\nu t) \right]. \quad (8)$$

Для отыскания постоянных $\alpha_{2\nu-1}$, $\alpha_{2\nu}$ воспользуемся начальными условиями движения масс. Подставляя (7) и (8) в условия (2), получим относительно постоянных систему алгебраических уравнений

$$\overline{B}\overline{\alpha} = 0,5\overline{W},$$

где \overline{B} – квадратная 6х6 – матрица

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & -\beta_2^{(1)} & \beta_3^{(1)} & -\beta_4^{(1)} & \beta_5^{(1)} & -\beta_6^{(1)} \\ \beta_1^{(2)} & -\beta_2^{(2)} & \beta_3^{(2)} & -\beta_4^{(2)} & \beta_5^{(2)} & -\beta_6^{(2)} \\ \beta_1^{(3)} & -\beta_2^{(3)} & \beta_3^{(3)} & -\beta_4^{(3)} & \beta_5^{(3)} & -\beta_6^{(3)} \\ \overline{\beta}_1^{(1)} & -\overline{\beta}_2^{(1)} & \overline{\beta}_3^{(1)} & -\overline{\beta}_4^{(1)} & \overline{\beta}_5^{(1)} & -\overline{\beta}_6^{(1)} \\ \overline{\beta}_1^{(2)} & -\overline{\beta}_2^{(2)} & \overline{\beta}_3^{(2)} & -\overline{\beta}_4^{(2)} & \overline{\beta}_5^{(2)} & -\overline{\beta}_6^{(2)} \\ \overline{\beta}_1^{(3)} & -\overline{\beta}_2^{(3)} & \overline{\beta}_3^{(3)} & -\overline{\beta}_4^{(3)} & \overline{\beta}_5^{(3)} & -\overline{\beta}_6^{(3)} \end{pmatrix};$$

$$\overline{\beta}_{2\nu-1}^{(j)} = 0,5h_\nu \beta_{2\nu-1}^{(j)} + \omega_\nu \beta_{2\nu}^{(j)};$$

$$\overline{\beta}_{2\nu}^{(j)} = 0,5h_\nu \beta_{2\nu}^{(j)} - \omega_\nu \beta_{2\nu-1}^{(j)};$$

$\overline{\alpha}$ и \overline{W} – матрицы-столбцы, элементами которых являются соответственно постоянные α_l ($l = \overline{1, 6}$) и начальные отклонения и взятые с обратным знаком начальные скорости масс системы (2)

$$\overline{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]^T;$$

$$\overline{W} = [x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, -v_{1,0}, -v_{2,0}, -v_{3,0}]^T;$$

индекс «Т» означает операцию транспонирования матриц.

Действительные $\beta_{2\nu-1}^{(j)}$ и мнимые $\beta_{2\nu}^{(j)}$ части коэффициентов распределения амплитуд свободных колебаний могут быть найдены по стандартной процедуре для систем с конечным числом степеней свободы [1, 5]. В результате получим:

$$\beta_{2\nu-1}^{(1)} = 1; \quad \beta_{2\nu}^{(1)} = 0;$$

$$\begin{aligned}\beta_{2\nu-1}^{(2)} &= (d_{1,\nu}d_{5,\nu} + d_{2,\nu}d_{6,\nu}) / d_\nu; \\ \beta_{2\nu-1}^{(3)} &= (d_{3,\nu}d_{5,\nu} + d_{4,\nu}d_{6,\nu}) / d_\nu; \\ \beta_{2\nu}^{(2)} &= (d_{2,\nu}d_{5,\nu} - d_{1,\nu}d_{6,\nu}) / d_\nu; \\ \beta_{2\nu}^{(3)} &= (d_{4,\nu}d_{5,\nu} - d_{3,\nu}d_{6,\nu}) / d_\nu; \\ d_\nu &= d_{5,\nu}^2 + d_{6,\nu}^2.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}d_{1,\nu} &= m_1 \left[(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2)^2 - h_\nu^2\omega_\nu^2 + h_\nu(h_{01} + h_{03}) \right. \\ & \left. (3\omega_\nu^2 - 0,25h_\nu^2) + (\omega_{01}^2 + \omega_{03}^2 + 4h_{01}h_{03}) \times \right. \\ & \left. \times (0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2) - h_\nu(\omega_{01}^2h_{03} + \omega_{03}^2h_{01}) + \right. \\ & \left. + \omega_{01}^2\omega_{03}^2 \right]; \\ d_{2,\nu} &= m_1 \left[2h_\nu\omega_\nu(\omega_\nu^2 - 0,25h_\nu^2) + 2\omega_\nu(h_{01} + h_{03}) \right. \\ & \left. (0,75h_\nu^2 - \omega_\nu^2) - h_\nu\omega_\nu(\omega_{01}^2 + \omega_{03}^2 + 4h_{01}h_{03}) + \right. \\ & \left. + 2\omega_\nu(\omega_{01}^2h_{03} + \omega_{03}^2h_{01}) \right]; \\ d_{3,\nu} &= m_1 \left[h_{03}h_\nu(3\omega_\nu^2 - 0,25h_\nu^2) + (4h_{01}h_{03} + \omega_{03}^2) \right. \\ & \left. d_{3,\nu} = m_1 \left[h_{03}h_\nu(3\omega_\nu^2 - 0,25h_\nu^2) + (4h_{01}h_{03} + \omega_{03}^2)(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. (0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2) - h_\nu(\omega_{01}^2h_{03} + \omega_{03}^2h_{01}) + \omega_{01}^2\omega_{03}^2 \right]; \right. \\ d_{4,\nu} &= m_1\omega_\nu \left[2h_{03}(0,75h_\nu^2 - \omega_\nu^2) - \right. \\ & \left. - h_\nu(4h_{01}h_{03} + \omega_{03}^2) + 2(\omega_{01}^2h_{03} + \omega_{03}^2h_{01}) \right]; \\ d_{5,\nu} &= m_2 \left[h_\nu^2\omega_\nu^2 - (0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2)^2 \right] - (m_2 + m_3) \\ & \left[h_\nu h_{03}(3\omega_\nu^2 - 0,25h_\nu^2) + \omega_{03}^2(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2) \right]; \\ d_{6,\nu} &= 2m_2h_\nu\omega_\nu(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2) + 2(m_2 + m_3)\omega_\nu \\ & \left[h_{03}(\omega_\nu^2 - 0,75h_\nu^2) + 0,5h_\nu\omega_{03}^2 \right]; \\ \omega_{0j} &= \sqrt{c_j / m_j}; \quad h_{0j} = k_j / (2m_j).\end{aligned}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Приведенные соотношения могут быть использованы для анализа свободных затухающих колебаний системы при заданных начальных условиях. В качестве примера

рассмотрим переходные режимы движения системы при действии однократного мгновенного импульса S_0 , приложенного к массе m_1 . В этом случае матрица-столбец \vec{W} имеет вид

$$\vec{W} = [0, 0, 0, -S_0 / m_1, 0, 0]^T.$$

Для анализа функций отклонений $x_j(t)$ введем безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\mu_j &= m_j / m_1; \quad \delta_{0j} = h_{0j} / \omega_{01}; \quad s_j = \omega_{0j} / \omega_{01}; \\ p_\nu &= \omega_\nu / \omega_{01}; \quad \delta_\nu = h_\nu / \omega_{01}; \quad \tau = \omega_{01}t; \\ y_j(\tau) &= x_j(t) / x_0; \quad x_0 = S_0 / (m_1\omega_{01}).\end{aligned}$$

Ограничимся изучением влияния на характер свободных колебаний системы только демпфирования во втором и третьем звеньях системы. Результаты вычислений в виде графиков переходных режимов движения масс m_2 и m_3 ($j = 1, 3$) для некоторых значений коэффициентов δ_{02} и δ_{03} приведены на рис. 2 и рис. 3 (значения остальных параметров приняты фиксированными: $\mu_2 = 0,01$; $\mu_3 / \mu_2 = 0,025$; $\delta_{01} = 0,025$; $s_2 = s_3 = 1,0$). Для сравнения на рис. 2,а и рис. 3,а пунктирной линией изображен график свободных колебаний массы m_1 как системы с одной степенью свободы с затуханием.

Представленные кривые $y_j(\tau)$ показывают, что при малых значениях величин δ_{02} и δ_{03} движения масс сопровождаются так называемыми затухающими биениями (рис. 2), причем массы m_2 и m_3 быстро и сильно раскачиваются, достигая в течение двух – четырех условных периодов колебаний наибольших отклонений (рис. 2,б,в).

О переходных процессах свободных колебаний системы с тремя степенями свободы при наличии трения

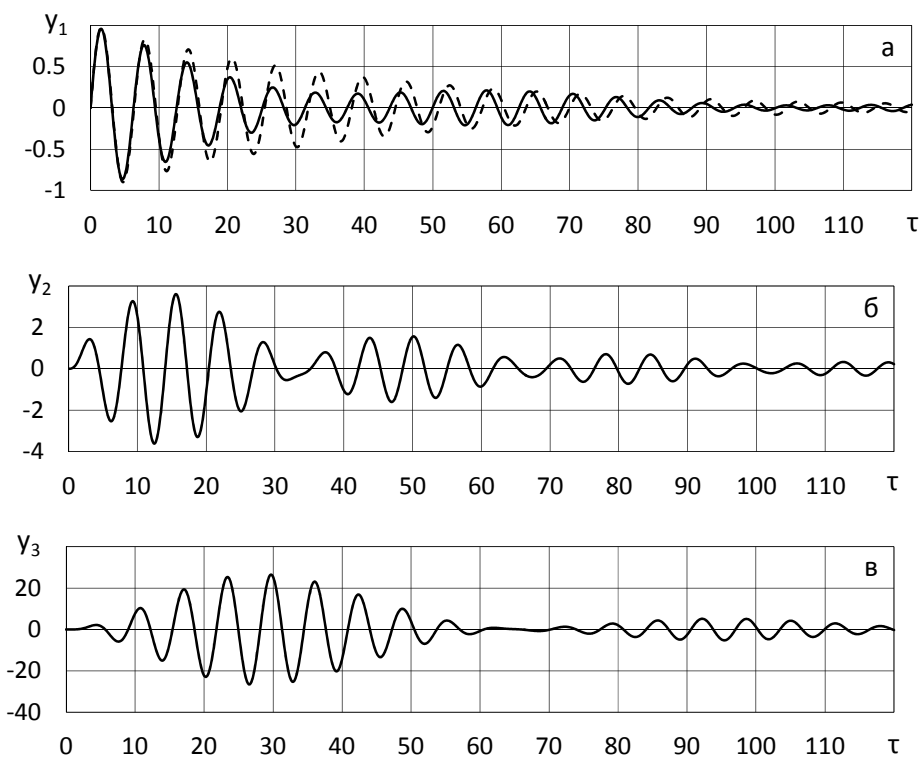


Рисунок 2. Переходные процессы колебаний масс системы при $\delta_{02} = \delta_{03} = 0,025$

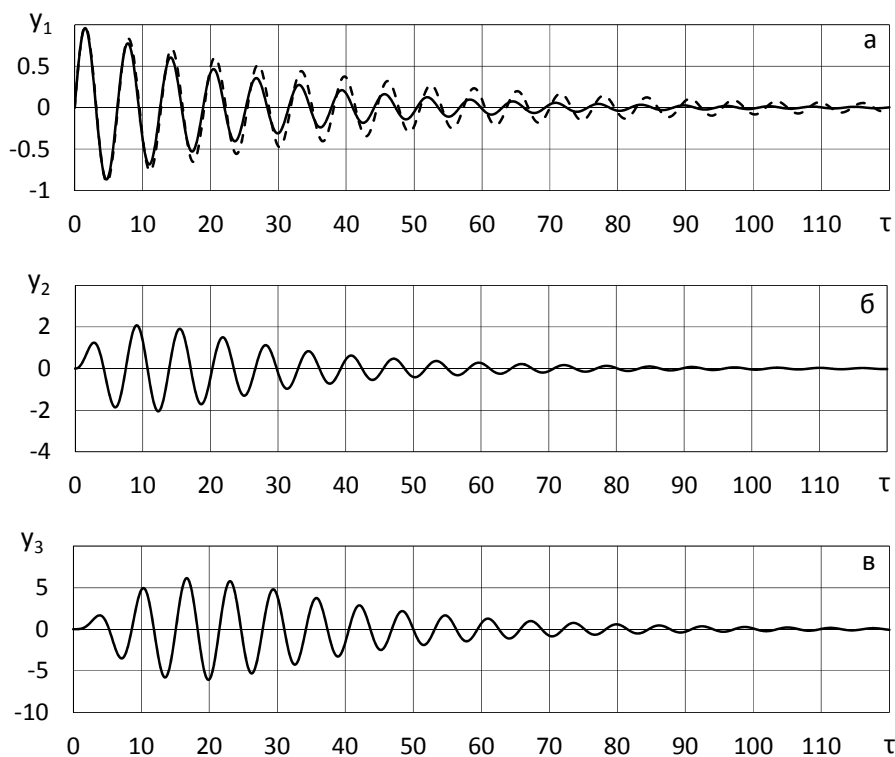


Рисунок 3. Переходные процессы колебаний масс системы при $\delta_{02} = \delta_{03} = 0,15$

С увеличением коэффициентов δ_{02} и δ_{03} огибающие кривых переходных процессов $y_j(\tau)$ сглаживаются и при достижении ими достаточно больших значений затухание свободных колебаний масс происходит плавно, без биений (рис. 3). При этом движения массы m_1 происходят примерно так же, как свободные колебания одномассовой системы при больших значениях коэффициента трения (рис. 3,а), а колебания масс m_2 и m_3 сначала плавно возрастают до наибольших отклонений, а затем убывают, причем сначала практически линейно (рис. 3,б,в). Отметим, что аналогичный характер носят переходные процессы колебаний двухмассовой неконсервативной системы [3, 6].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выявленные свойства свободных колебаний трехмассовой демпфированной системы с последовательным соединением звеньев, вызванные заданными начальными условиями, могут быть использованы, в частности, для решения задачи выбора оптимальных параметров двухмассовых гасителей каскадного типа при необходимости сокращения длительности переходных процессов защищаемой конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дукарт А.В. Задачи теории ударных гасителей колебаний. – М.: АСВ, 2006.
2. Ивович В.А., Онищенко В.Я. Защита от вибрации в машиностроении. – М.: Машиностроение, Москва, 1990.
3. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. Наука, Москва 1988.
4. Чернов Ю.Т. Вибрации строительных конструкций. – М.: АСВ, Москва 2011.

5. Болотин В.В. (ред.) Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. – М.: Машиностроение, Москва 1978.
6. Дукарт А.В., Фам Вьет Нгок, Фам Тхань Бинь. К определению свободных колебаний двухмассовой системы с демпфированием. // Известия вузов. Строительство №5, 2011, с. 98-106.

Дукарт Адам Вилебальдович, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; телефон: +7(495)509-12-28; факс: +7(499) 973-74-71; e-mail: dukart-av@mail.ru

Фам Вьет Нгок, аспирант кафедры строительной механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; телефон: +7(495)287-49-14, доб.3141; факс: +7(499)973-74-71; email: vietngocdhtl_p@yahoo.com

Фам Тхань Бинь, аспирант кафедры строительной механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; телефон: +7(495) 287-49-14, доб. 3141; факс: +7(499)973-74-71; email: chubevidai@yahoo.com

Adam V. Dukart, PhD, Professor, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(495)509-12-28 (1425), fax: +7(499) 973-74-71, e-mail: dukart-av@mail.ru

Viet Ngoc Pham, PhD student, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(495)287-49-14 (3141), fax: +7(499) 973-74-71, e-mail: vietngocdhtl_p@yahoo.com

Thanh Binh Pham, PhD student, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(495)287-49-14 (3141), fax: +7(499) 973-74-71, e-mail: chubevidai@yahoo.com

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ АРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.Ю.Зобачева, Г.Г. Кашеварова, И.Н. Фаизов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье приводятся результаты экспериментального и численного исследования пространственной устойчивости большепролетных деревянных арок, уточняется фактическая работа конструкций под нагрузкой, исследуется влияние различных факторов (типа конечных элементов, свойств материала, подкрепления, жесткости связей) на расчет устойчивости равновесия арки.

Ключевые слова: большепролетная клееная деревянная арка, устойчивость, критическая нагрузка, форма деформирования, эксперимент, численные исследования

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL ANALYSIS OF STABILITY SPAN WOODEN ARCHES

Alexandra U. Zobacheva, Galina G. Kashevarova, Igor N. Faizov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

ABSTRACT: The paper presents experimental results and the numerical study of spatial stability of long-span wooden arches, specifies the actual work of structures under load, we investigate the influence of various factors (such as finite elements, material properties, reinforcement stiffness of bonds) on the calculation of the stability of the arch.

Key words: long-span glued wooden arch, stability, critical load, the shape of the deformation, experiment, the numerical investigations

Арочные конструкции находят широкое применение при строительстве спортивных, общественных и промышленных сооружений, а также в сводчатых и купольных покрытиях, благодаря своей эстетичности и возможности перекрывать значительные пролёты.

Клеёные деревянные арки достаточно полно удовлетворяют требованиям современного индустриального производства конструкций. Простота изготовления, высокая степень заводской готовности, удобство транспортировки и монтажа, возможность придания геометрической оси арки наиболее рационального очертания, архитектурная выразительность и достаточная огнестойкость, наличие обширной сырьевой базы – вот те ос-

новные достоинства, обеспечивающие их широкого применения. Весьма эффективно применять клееные деревянные конструкции в химически агрессивных средах. Срок эксплуатации деревянных конструкций (в том числе и клееных) в условиях солевой агрессии превышает 40-50 лет без дополнительных затрат на защиту от коррозии, в то время как железобетонные и стальные конструкции подвергаются интенсивному разрушению через 10-15 лет и требуют систематического проведения дорогостоящих антикоррозионных мероприятий.

Несмотря на широкое применение КДК в современном строительстве, проблема устойчивости большепролетных арок до сих пор изучена недостаточно полно, что сдерживает

совершенствование нормативной базы разработку практических рекомендаций и по проектированию, и по расчету арочных конструкций. В действующей нормативной литературе [1] отсутствуют рекомендации по обеспечению пространственной жесткости криволинейных стержней имеющих отношение высоты h к ширине b сечения арки $k = h/b > 5$. Высокая деформативность арок, имеющих достаточно большую гибкость как в плоскости, так и из плоскости действия нагрузок при недостаточной жесткости связей приводит к потере устойчивости плоской формы деформирования полуарок со сжатой внутренней кромкой, и к потере пространственной устойчивости сооружения в целом. Для более точного определения несущей способности арок из условий устойчивости необходимо учитывать пространственную работу всего сооружения в целом, включая связевые блоки и дискретные подкрепления кромок распорками. Кроме этого, существующая методика расчета арок на устойчивость не учитывает особенности физико-механических характеристик клееной древесины в конструкции как анизотропного материала.

С целью разработки научно-обоснованных расчетных моделей и методики оценки устойчивости большепролетных деревянных арочных конструкций, адекватно отражающих работу реальных пространственных сооружений, были проведены натурные и численные эксперименты моделей клееных деревянных арок стрельчатого очертания, имеющих сплошное прямоугольное сечение с увеличенным соотношением размеров сечения $k = h/b = 5, 7, 9, 12$. [2].

Общий вид модели арки на испытательном стенде показан на рис.1, а основные геометрические параметры конструкции - на рис. 2. Все модели арок испытывались при шарнирном решении конькового и опорных узлов, что позволило получить наилучшее соответствие фактической и теоретической расчетных схем трехшарнирной стрельчатой арки на действие симметричной (от подвесной

конвейерной галереи) и односторонней (снеговой, ветровой) нагрузок.



Рисунок 1. Общий вид модели арки на испытательном стенде

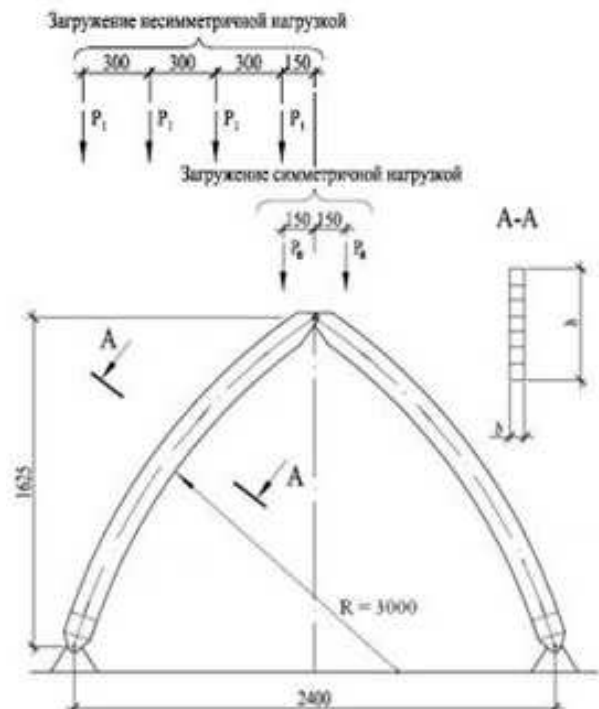


Рисунок 2. Схема модели стрельчатой арки

На практике устойчивость арочного сооружения в продольном направлении обеспечивается системой связей, выполненных из деревянных или стальных стержней. Поэтому все модели испытывались при разных вариантах закрепления арки из плоскости. Такая методика проведения испытаний позволила выявить возможные формы потери устойчивости и установить степень влияния соединительных элементов на устойчивость всей конструкции.

В процессе испытаний производились замеры перемещений в плоскости и из плоскости действия нагрузки. Оценка напряженного состояния производилась по результатам замеров деформаций волокон древесины в различных сечениях. Конструкции арок загружались до потери несущей способности.

В результате проведенных натурных экспериментов получены зависимости между нагрузками и перемещениями в плоскости и из плоскости арок, формы потери устойчивости и значения критических нагрузок, выявлен характер и причины разрушения конструкций. Результаты натурных экспериментов приведены ниже при сравнении с результатами, полученными в численных экспериментах.

По результатам испытаний образцов были определены физико-механические свойства древесины (сосна, ель), которые далее были использованы в расчетах.

Полученные экспериментальные данные послужили основой для верификации результатов дальнейших расчетов методом численного моделирования с применением программного комплекса *ANSYS*.

Известно, что древесина является анизотропным материалом. Однако, учитывая влияние масштабного фактора на свойства древесины, в нашем случае – крупное изделие из клееной древесины, следует принять модель трансверсально-изотропного материала [3].

Кроме этого, древесина обладает реологическими свойствами. Эти свойства выражаются в том, что прочностные и деформационные

характеристики древесины не являются постоянными, а изменяются в зависимости от скорости нагружения, величины и продолжительности действия нагрузки. В процессе натурных экспериментов, которые длились несколько часов, реологические свойства древесины не проявились в полной мере. Поэтому в численных экспериментах материал древесины принят упругим.

Для определения критической нагрузки и форм потери устойчивости применялись два подхода: *линейный*, связанный с вычислением собственных значений с применением блочного метода Ланцоша [4] и *нелинейный* статический расчет.

В классической *линейной постановке* задачи устойчивости, реализованной практически всеми конечно-элементными программными системами, определение критической нагрузки сводится к определению наименьшего положительного собственного числа λ_1 для следующей системы уравнений:

$$([K] - \lambda[S])\{u\} = 0$$

где $[K]$ - матрица жесткости конструкции; $[S]$ - матрица эффективной жесткости; λ - собственное значение (масштабный фактор); $\{u\}$ - собственный вектор, определяющий форму потери устойчивости (выпучивания арки).

Линейный подход не может учесть нелинейности любого рода и несовершенства системы, имеющиеся в реальных конструкциях, приводящих к снижению критических нагрузок, полученных в линейном случае. Но данный подход полезно использовать для изучения общего поведения конструкции перед выполнением нелинейного анализа устойчивости.

Нелинейный анализ устойчивости - это, в сущности, исследование влияния больших перемещений. Для получения решения используется итеративная процедура на основе метода Ньютона-Рафсона.

В методе Ньютона-Рафсона матрица жесткости и/или вектор нагрузок модифицируются

на каждой итерации. Используются соотношения

$$[K]_{i-1} \cdot \{\Delta u\}_i = \{F^A\} - \{F^{NR}\}_{i-1}$$

где: $[K]_{i-1}$ - матрица коэффициентов тангенциальной жесткости для деформированной геометрии на $(i-1)$ итерации; $\{\Delta u\}_i$ - вектор, компонентами которого являются приращения перемещений двух последовательных итераций: $\{\Delta u\}_i = \{u\}_i - \{u\}_{i-1}$; $\{u\}_i$ - вектор перемещений, относящийся к текущей итерации; $\{F^A\}$ - вектор приложенных к системе сил; $\{F^{NR}\}_i$ - вектор нагрузок в методе Ньютона-Рафсона, соответствующих перемещениям для итерации с номером $(i - 1)$.

С точки зрения вычислительного процесса расчет продолжается до тех пор, пока не достигнута сходимость решения. Для управления процессом сходимости на каждом шаге решения используется метод ограничивающих дуг. Проверка сходимости при переходе к следующему шагу производится по невязке усилий $(\{F^A\} - \{F^{NR}\}_{i-1})$.

Для проведения вычислительных экспериментов созданы программы - макросы на языке APDL. В процессе проведения вычислительных экспериментов по устойчивости пространственных арочных конструкций исследовались:

- влияние конечно-элементной дискретизации на результаты расчета;
- влияние на устойчивость пространственной конструкции разных соотношений высоты к ширине сечения ($k=7$ и $k=9$);
- результаты линейного и нелинейного анализа устойчивости арок.
- влияние анизотропии (ортотропии) материала древесины;
- влияние на устойчивость пространственной арочной конструкции жесткости связей в продольном направлении.

Расчетные модели пространственной конструкции арки создавались как балочными, так и оболочечными конечными элементами (КЭ). Но поскольку в балочной модели, при

исследовании пространственной устойчивости нельзя было раскрепить нижнюю сжатую грань арки, а также учитывая, что полученные в результате расчета значения критических нагрузок в балочных моделях существенно отличались от экспериментальных значений (\sim на 35%), дальнейший анализ проводился на моделях, создаваемых оболочечными (SHELL63) КЭ (рис. 3).

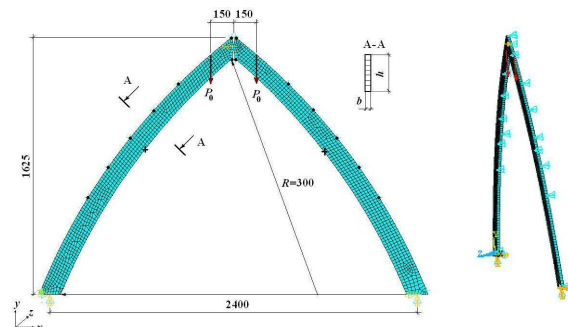


Рисунок 3. Конечно-элементная расчетная модель арки

Специальный конечный элемент SHELL63 способен учитывать геометрическую нелинейность материала, а именно большие прогибы, предполагающие большие углы поворота и малые механические деформации.

Закрепления в коньковом узле моделировались линейными связями, перпендикулярными плоскости действия нагрузки и угловой связью, препятствующей повороту арки вокруг оси x , параллельной пролету. Раскрепления верхних и закрепления нижних граней полуарок имитировалось наложением линейных связей перпендикулярно плоскости действия нагрузки (места на рис.3 отмечены).

На рис. 4 и 5 показаны результаты линейного расчета перемещений и форм деформированной оси в плоскости и характер перемещений нижних граней арок из плоскости при действии симметричной нагрузки для арок с соотношением размеров сечения $k=7$ и $k=9$, которые качественно соответствуют результатам натуральных экспериментов. А на рис. 6 показан характер перемещений арки в плоскости и из плоскости действия симметричной нагрузки.

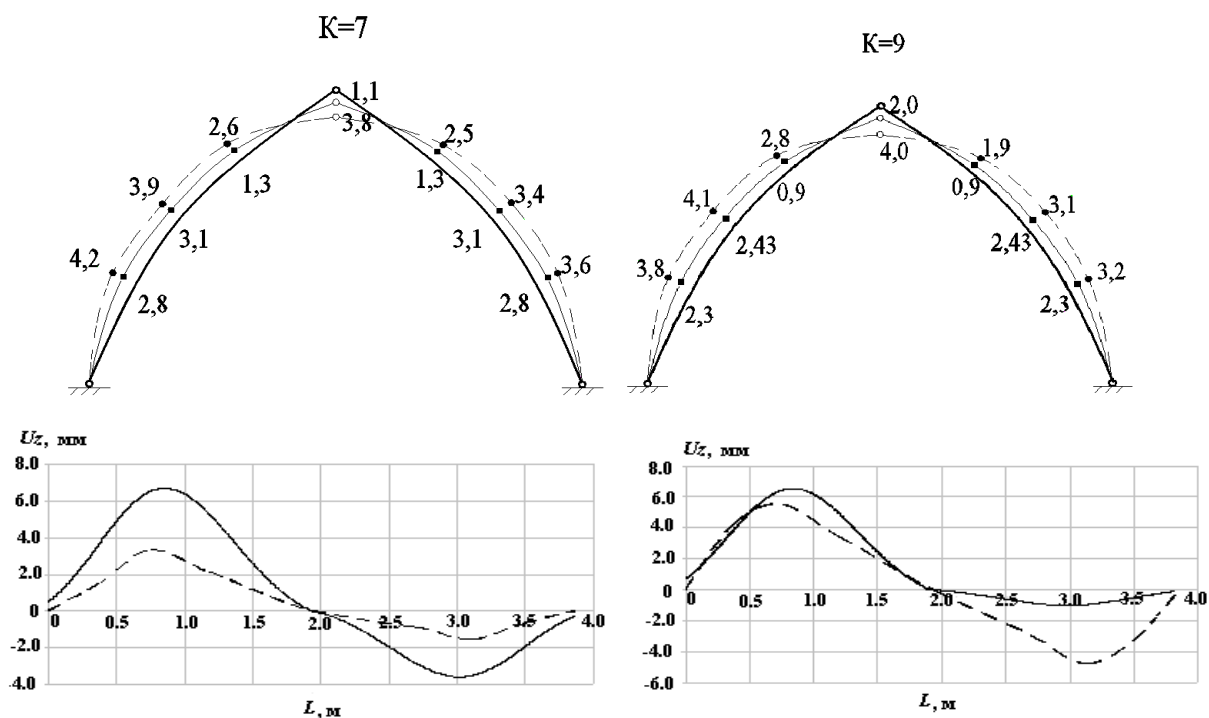


Рисунок 4. Расчетные (—) и экспериментальные (----) формы деформированной оси в плоскости (а) и перемещения нижних граней арок из плоскости (б) действия симметричной нагрузки, в мм

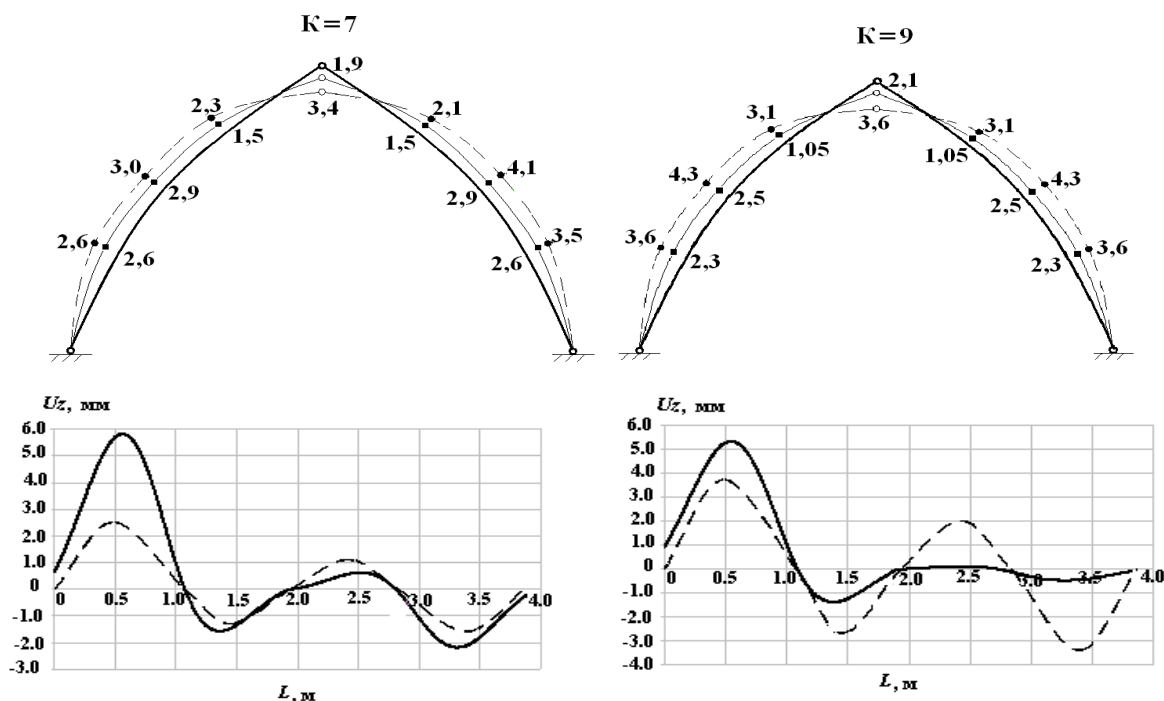


Рисунок 5. Расчетные (—) и экспериментальные (----) формы деформированной оси в плоскости (а) и перемещения нижних граней арок из плоскости (б) действия симметричной нагрузки с закрепленными нижними гранями, в мм

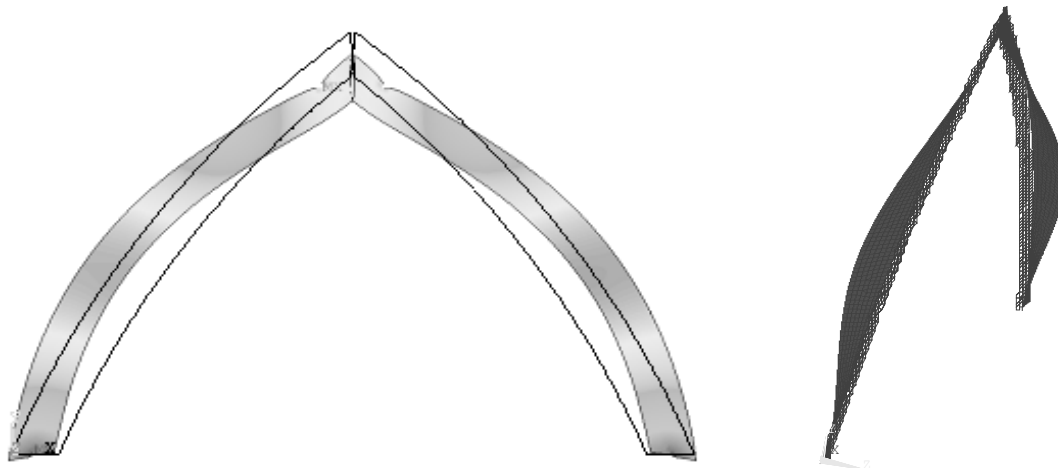


Рисунок 6. Характер перемещений арок в плоскости и из плоскости действия симметричной нагрузки в ANSYS.

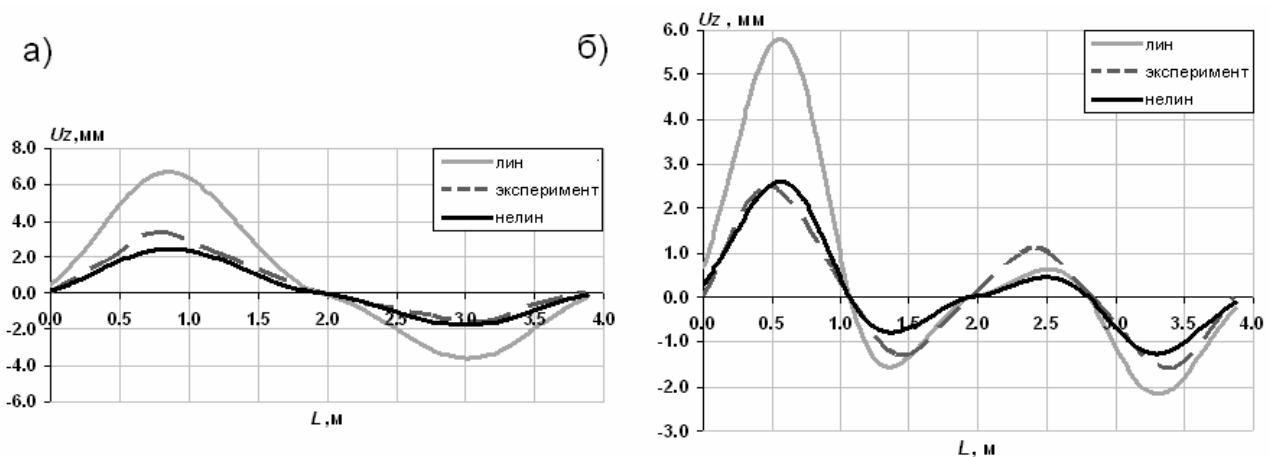


Рисунок 7. Расчетные и экспериментальные значения и перемещений нижних граней арок из плоскости действия симметричной нагрузки: а) с незакрепленными нижними гранями; б) с закрепленными нижними гранями

На рис. 7 приведены сравнительные результаты линейного и нелинейного расчетов перемещений нижних граней арок из плоскости для $k=7$ с незакрепленными и закрепленными нижними гранями с учетом ортотропии свойств древесины.

Результаты испытаний арок на несимметричную нагрузку с полностью раскрепленными из плоскости верхними гранями существенно отличались от предыдущих. Здесь сжатая раскрепленная грань левой полуарки при расчетных нагрузках практически не имела смещений из плоскости, а появление боковых перемещений при больших нагрузках было связано с податливостью элементов

раскрепления. Свободная от нагрузки правая полуарка не могла свободно деформироваться в плоскости наименьшей жесткости, т.к. ее перемещения из плоскости были стеснены связями, наложенными на верхнюю растянутую грань, а имела возможность лишь закручиваться относительно линии раскрепления. Деформирование сжатой грани из плоскости происходило постепенно с медленным приростом перемещений до определенного предела, а затем резко происходил их значительный прирост без дальнейшего увеличения нагрузки.

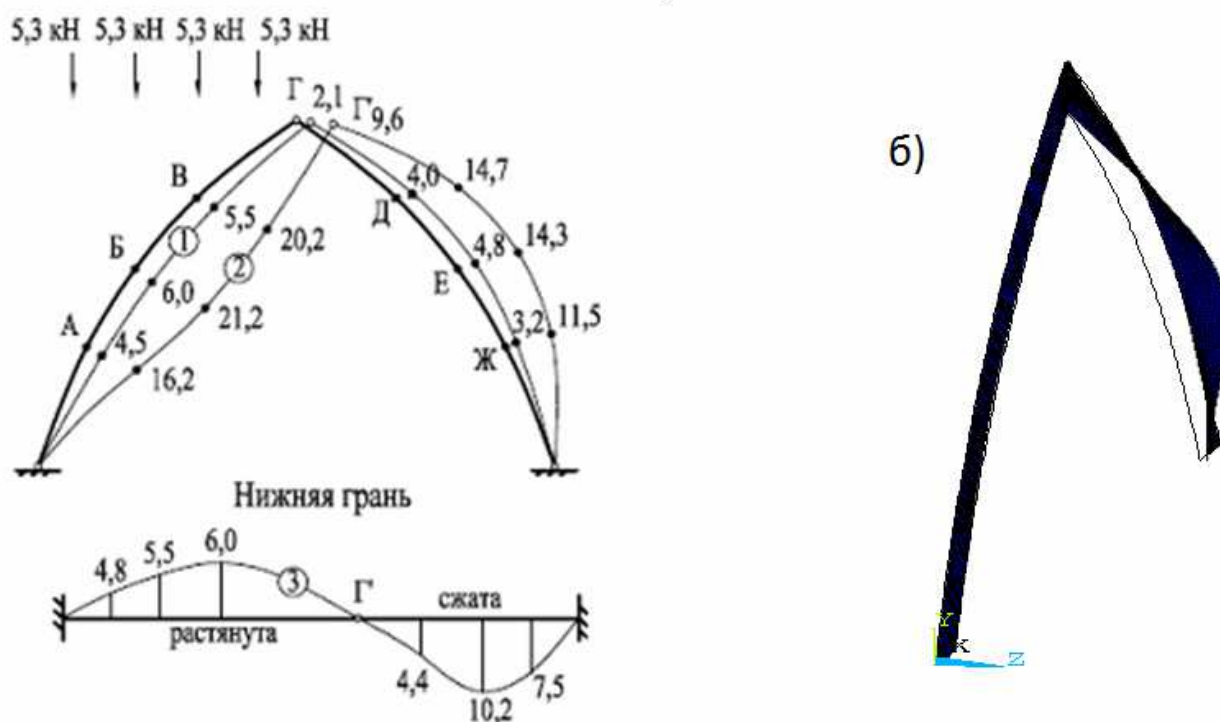


Рисунок 8. Деформированное состояние арки: а) экспериментальное; б) расчетное

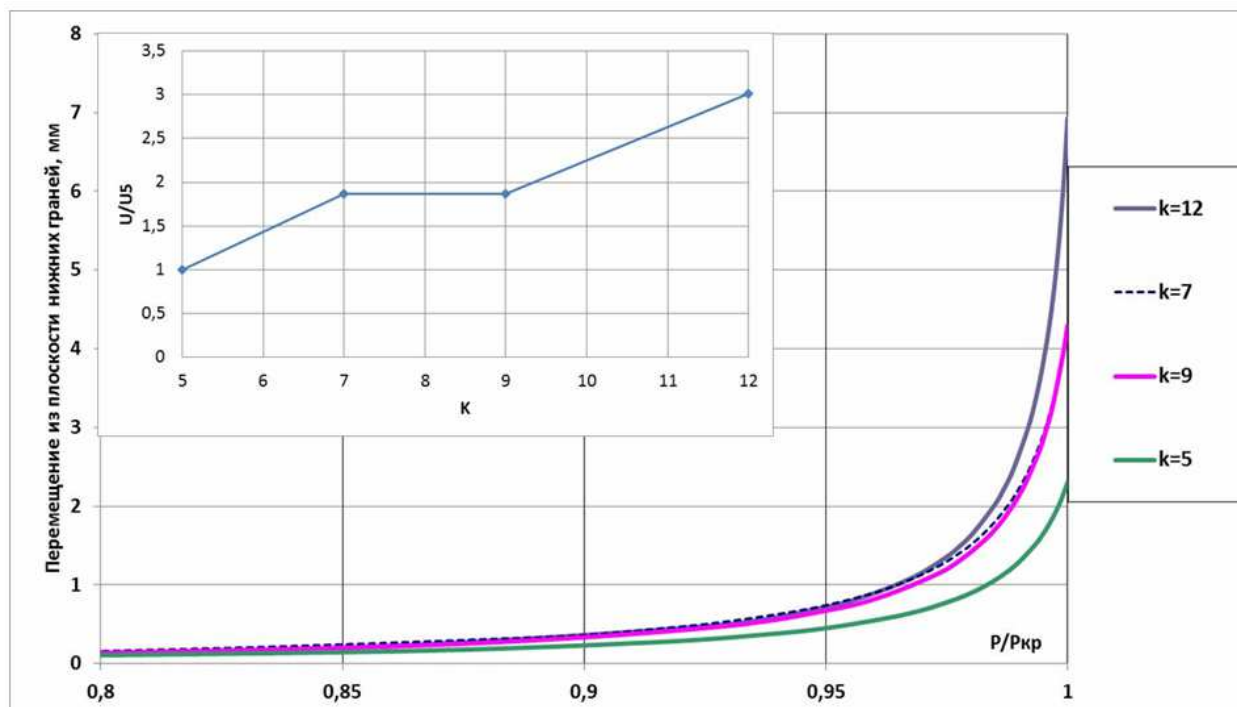


Рисунок 9. Зависимость перемещений нижних граней от приложенной нагрузки

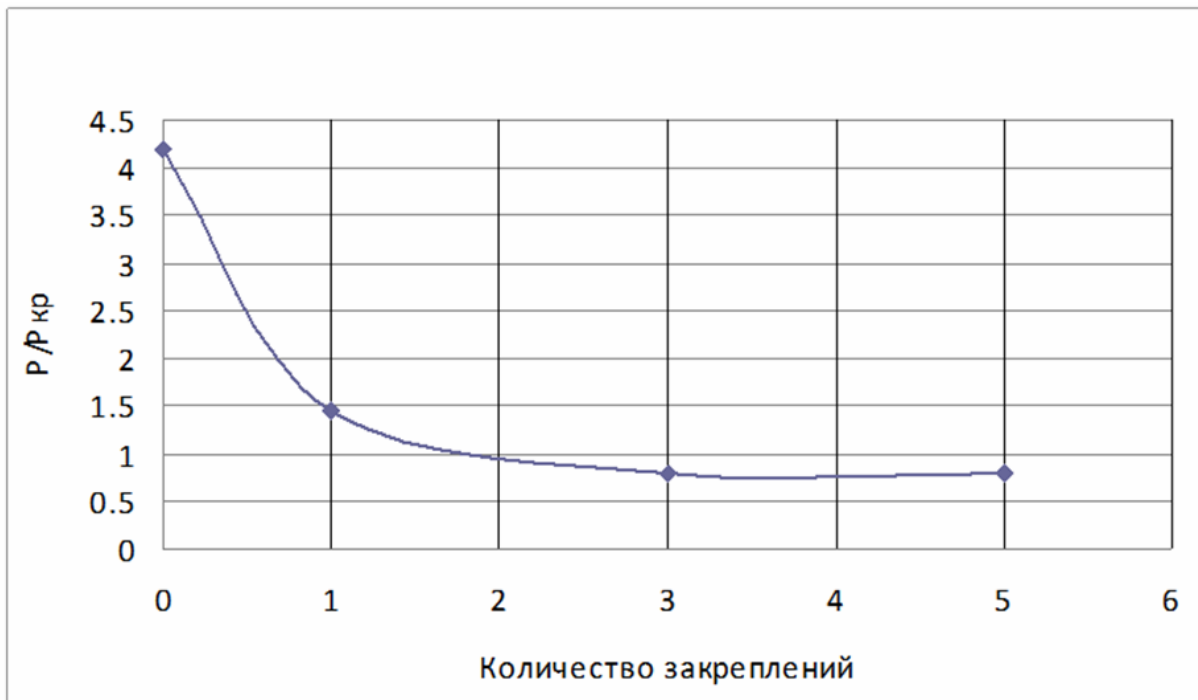


Рисунок 10. Зависимость критической нагрузки от количества закреплений на верхней грани

На рис. 8а показаны суммарные перемещения арки с соотношением $k=7$ в плоскости действия нагрузки: 1 - при расчетной нагрузке $P=5,3$ кН, 2 - при критической нагрузке $P=6,8$ кН; 3 - из плоскости действия нагрузки, полученные экспериментально, а на рис. 8б - форма деформирования, полученная в результате расчета в ПК ANSYS (критическая нагрузка $P_{кр} = 5,7$ кН). Аналогичная картина деформирования получена и для арки с соотношением $k=9$, $P_{кр} = 8,1$ кН.

На рис. 9 показана зависимость перемещений нижней грани арки из плоскости действия нагрузки от приложенной нагрузки при разных соотношениях k . При нагрузках близких к критическим перемещения нижних незакрепленных граней из плоскости резко возрастают. Величина их существенно зависит от параметра k . При достижении критической нагрузки перемещения при $k=12$ отличаются от перемещений при $k=5$ в 3 раза.

С увеличением количества связей на верхней грани (прогонов) значение критической нагрузки растет. Однако, количество связей на верхней грани больше 3 не оказывает суще-

ственного влияния на критическую нагрузку (рис. 10).

В таблице 1 приведены основные результаты линейного и нелинейного расчетов критической нагрузки для моделей арок с соотношениями высоты к ширине сечения $k=7$ и $k=9$, результаты экспериментов и разница численных и экспериментальных значений ($\varepsilon\%$) при симметричной нагрузке. В расчетах учитывался разброс свойств материала.

По результатам экспериментальных исследований, арки без дополнительных связей разрушаются при меньших нагрузках от потери устойчивости. Арки с дополнительными связями разрушаются при больших нагрузках в результате исчерпания несущей способности материала - разрыва волокон. Это подтверждают и вычислительные эксперименты, в которых для арок без дополнительных связей более близкие к экспериментальным критические нагрузки дает линейный расчет, а для арок с дополнительными связями - нелинейный расчет.

Таблица 1. Сравнительные результаты расчетов критической нагрузки для моделей арок

$k = h/b$	$E_{прод} \times 10^4$, МПа	$E_{пер} \times 10^4$, МПа	Эксперимент		Ортотропный материал,							
			Без закреплен. нижн. грани	С закреплен. нижн. грани	Без закреплен. нижн. грани				С закреплен. нижн. грани			
					лин	ε%	н/лин	ε%	лин	ε%	н/лин	ε%
7	1,072	0,38	13,21	14,5	11,5	12,9	9,88	25,2	16,99	17,2	13,63	6,0
	1,276	0,4	13,4	16,08	12,2	8,9	10,88	18,8	18,22	13,3	15,87	1,3
	1,48	0,405	13,3	16,21	12,86	3,3	11,195	15,8	19,42	19,8	15,83	2,3
9	1,072	0,39	14,9	17,9	11,82	20,6	11,307	24,1	18,43	2,97	15,52	13,2
	1,276	0,402	15,58	19,3	13,58	12,8	12,95	16,8	20,42	5,8	19,03	1,4
	1,48	0,401	15,1	18,2	13,32	11,7	12,81	15,1	21,61	18,7	18,256	0,3

На практике устойчивость арочного сооружения в продольном направлении обеспечивается системой связей, выполненных из деревянных или стальных стержней достаточно малой жесткости, по сравнению с жесткостью арки. Связевые элементы крепятся к полуаркам гибкими стальными соединительными деталями. Вся связевая система является достаточно податливой, что приводит к появлению перемещений вдоль оси сооружения при нагрузках, меньших критических. Для оценки влияния жесткости соединительных деталей выполнялись расчеты для двух арок, связанных между собой связями разной жесткости (деревянными и стальными стержнями), на действие симметричной нагрузки. В результате установлено, что перемещения нижних граней арок из плоскости при связях разной жесткости отличаются незначительно, а критическая нагрузка для

конструкции со стальными стержнями получается примерно 30% больше.

Установлена зависимость коэффициента снижения критической нагрузки от материала связей (дерево, металл), расстояния между арками, а также для вариантов жесткого и шарнирного присоединения элементов дополнительных связей к аркам (рис. 11).

Разработанная методика расчета на устойчивость была применена для расчета реального сооружения. За основу для расчета взят склад Соликамского калийного комбината пролетом 45 метров и соотношением высоты к ширине сечения $k=5$ (рис. 12).

Проведен линейный расчет устойчивости сооружения на воздействие собственного веса и снеговой нагрузки.

На рис.13 показана первая форма устойчивости для арок и связевых конструкций.

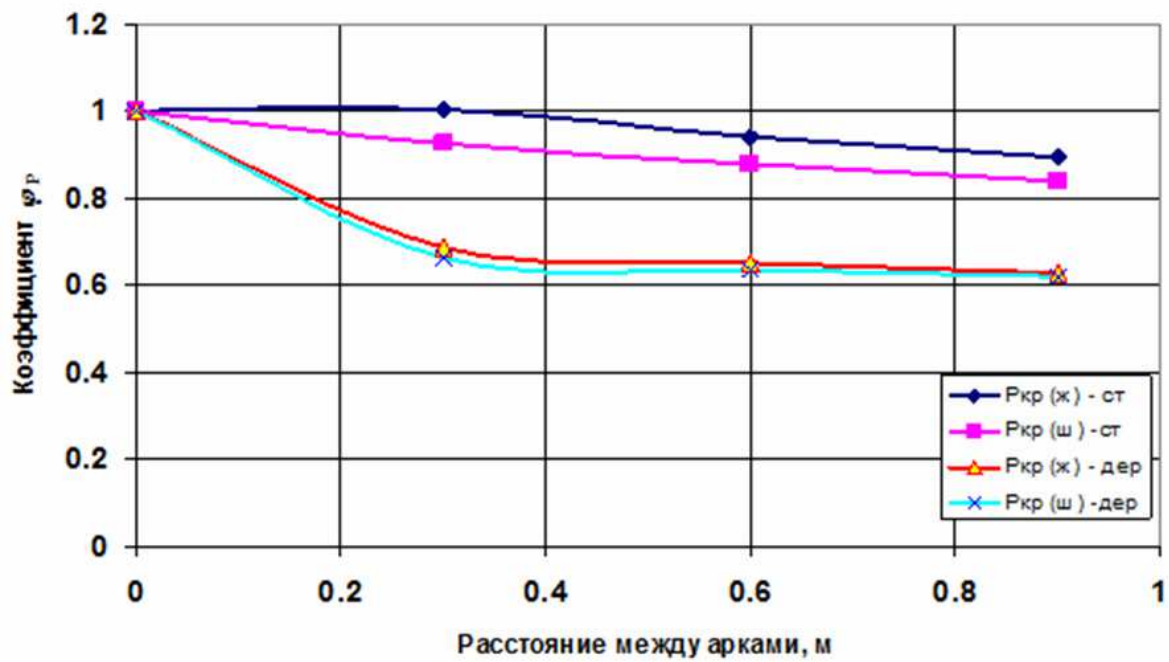


Рисунок 11. Зависимость коэффициента снижения критической нагрузки от материала связей (дерево, металл), расстояния между арками, а также для вариантов жесткого и шарнирного присоединения элементов дополнительных связей к аркам.

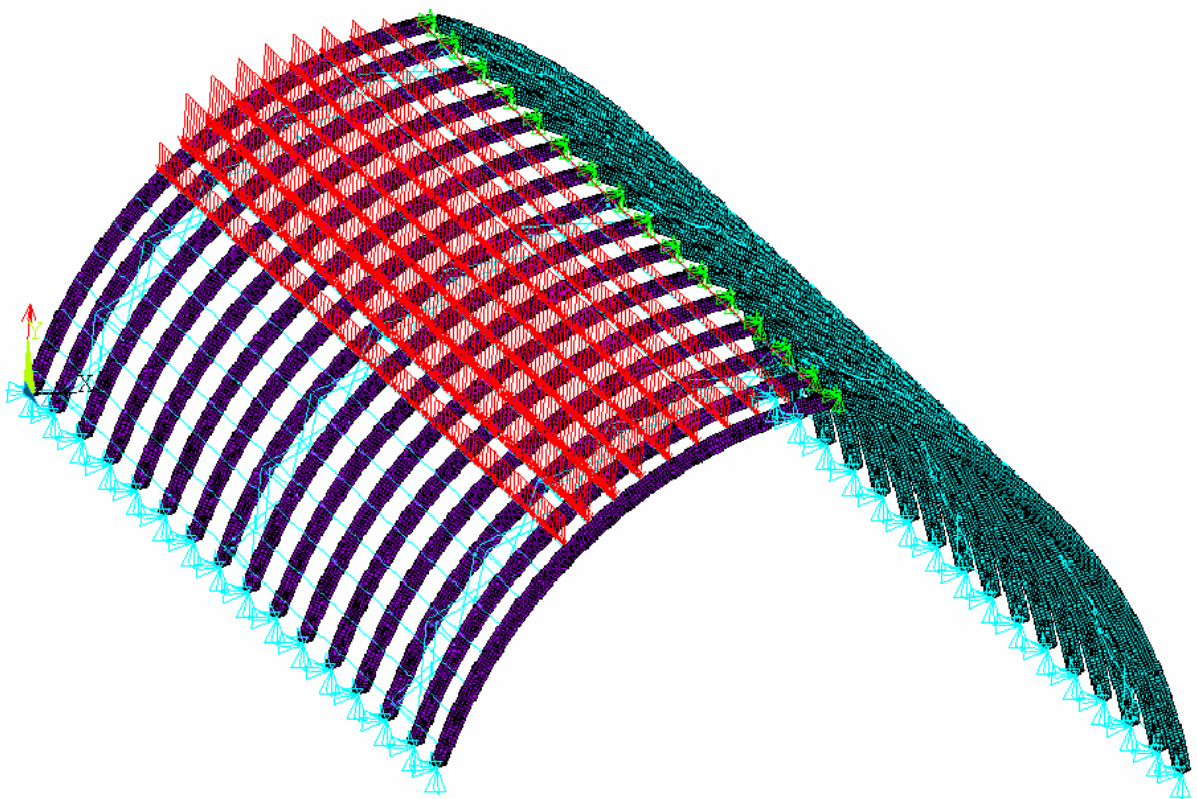


Рисунок 12. Конечно-элементная расчетная модель склада

Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости большепролетных деревянных арочных конструкций

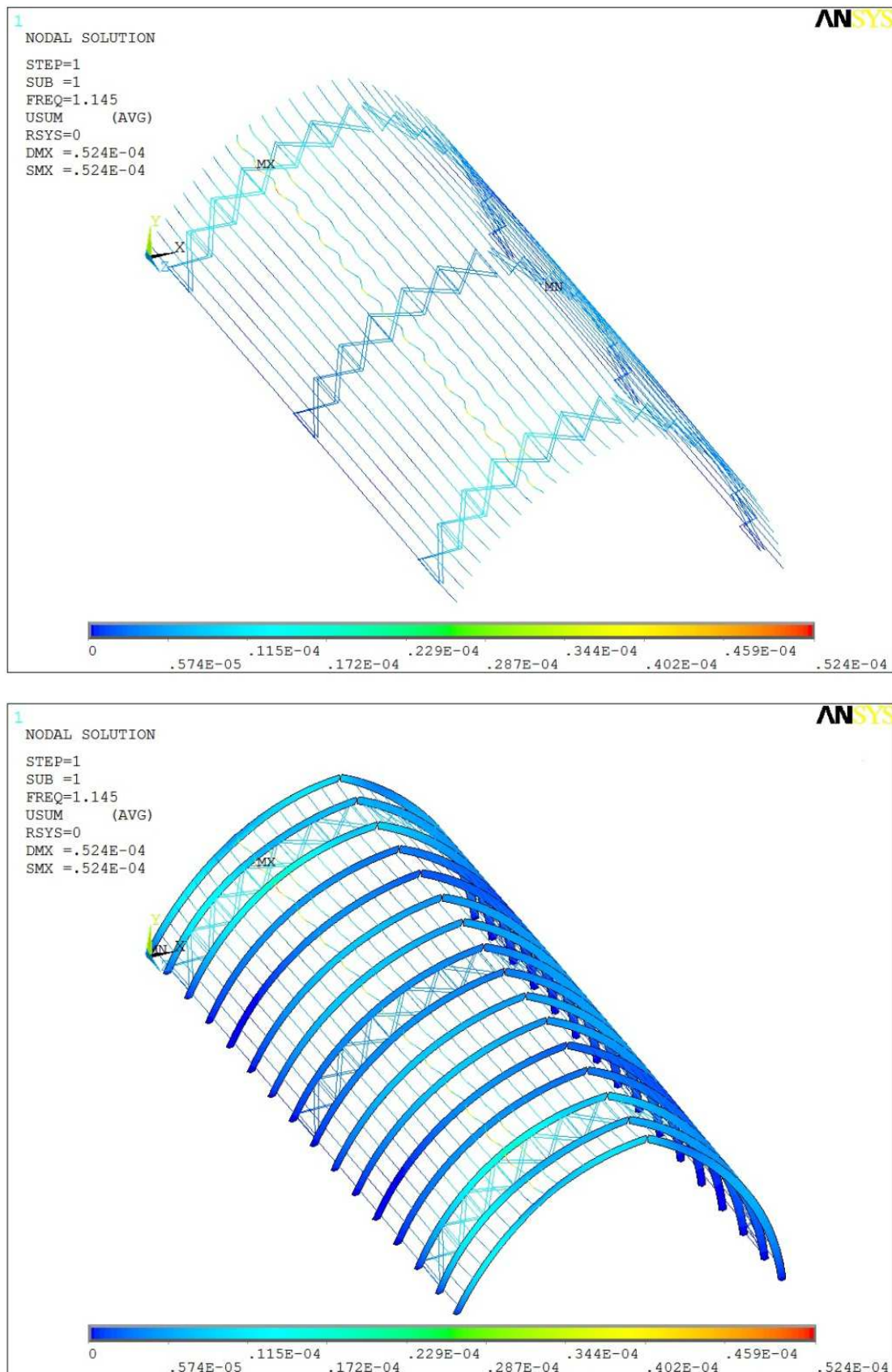


Рисунок 13. Первая форма потери устойчивости для прогонов и связевых блоков и для арок

Устойчивость конструкции в пространстве обеспечена как по расчетам СНиП, так и по нашей методике.

Кроме того, выполнены расчеты для случаев отсутствия связей, подкрепляющих нижние грани, разного количества связевых блоков. Теоретически доказано, что без подкрепления пространственная устойчивость склада не обеспечивается.

Анализ результатов.

Анализируя результаты экспериментальных и численных исследований устойчивости стрельчатых арок, следует отметить следующие основные моменты:

1. Стрельчатые арки при $k = 5$ деформируются в плоскости действия нагрузки и потери устойчивости плоской формы деформирования не происходит, а для конструкций с отношением $h/b > 5$ характерна пространственная форма деформаций с последующей потерей устойчивости плоской формы деформирования сжатой не закрепленной грани полуарки.
2. Существенное влияние на характер деформаций нижних сжатых граней полуарок из плоскости оказывает наличие закреплений этих граней, чем больше отношение h/b , тем выше эффект подкрепления от дополнительных связей. Но введение дополнительных связей, не оказывает существенного влияния на деформации арок в плоскости наибольшей жесткости вплоть до нагрузки, близкой к критической.
3. Арки без дополнительных связей разрушаются при меньших нагрузках от потери устойчивости. Арки с дополнительными связями разрушаются при больших нагрузках в результате исчерпания несущей способности материала - разрыва волокон. Это подтверждают и вычислительные эксперименты, в которых для арок без дополнительных связей более близкие к

экспериментальным критические нагрузки дает линейный расчет, а для арок с дополнительными связями – нелинейный расчет.

4. Расчет на устойчивость конструкций арок с $k > 5$ следует проводить на расчетных моделях, создаваемых оболочечными конечными элементами с учетом ортотропных свойств древесины. При этом наибольшее влияние на величину критической нагрузки оказывает модуль сдвига.
5. Эффективность проведенных исследований определяется тем, что они позволяют дать рекомендации по рациональному использованию древесины в арочных сооружениях, а также прогнозировать поведение конструкций в процессе эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП II-25-80. Деревянные конструкции. Нормы проектирования.
2. **Кашеварова Г.Г., Зобачева А.Ю., Фаизов И.Н.** Экспериментально-теоретические исследования устойчивости и верификация расчетных моделей большепролетных деревянных арок. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федер. ун-та, № 2, 2011, с. 83-90.
3. **Соболев Ю.С.** Древесина как конструкционный материал. – М.: Изд-во «Лесная промышленность», 1979. – 248с.
4. **Басов К.А.** ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640с.

Зобачева Александра Юрьевна, аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительной механики и вычислительных технологий, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109,
e-mail: funny_alex@mail.ru.

Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости большепролетных деревянных арочных конструкций

Кашеварова Галина Геннадьевна, доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительной механики и вычислительных технологий, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ggkash@mail.ru.

Фаизов Игорь Николаевич, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительных конструкций, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ifaizov@mail.ru.

Alexandra U. Zobacheva, PhD student, Department of Mechanics and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: funny_alex@mail.ru.

Galina G. Kashevarova, PhD, Professor, Department of Structure Mechanic and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ggkash@mail.ru.

Igor N. Faizov, Department of Building constructions, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ifaizov@mail.ru.

СТРУКТУРА ВЯЗКОГО ЦИРКУЛЯЦИОННО-ПРОДОЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

А.Л. Зуйков

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается радиально-аксиальное распределение азимутальных и аксиальных скоростей в ламинарном циркуляционно-продольном течении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, на входе в который установлен локальный завихритель потока.

Ключевые слова: неравномерное циркуляционно-продольное течение, уравнения Навье-Стокса, распределение азимутальных и аксиальных скоростей, разложение Фурье-Бесселя

STRUCTURE OF THE VISCOUS CIRCULAR-LONGITUDINAL FLOW IN A CYLINDRICAL CHANNEL

Andrey L. Zuykov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article deals with the radial-axial distribution of the azimuthal and axial velocity in a laminar circular-longitudinal flow of a viscous incompressible fluid in a cylindrical channel at the entrance to which is mounted a local flow swirler.

Key words: nonuniform circular-longitudinal flow, the distribution of the azimuthal and axial velocity, the Navier-Stokes equations, Fourier-Bessel expansion.

ВВЕДЕНИЕ

Установившееся неравномерное циркуляционно-продольное течение в цилиндрическом канале является распространенным видом движения жидкости, имеющим достаточно сложную пространственную структуру. На рис. 1 показано полученное О.Китох [1] экспериментальное распределение скоростей в потоке характерное для таких течений.

На рисунке указаны: V , u и v – соответственно полная, азимутальная и аксиальная местная скорость движения жидкости; R – радиус канала; $r - \theta - z$ – цилиндрическая система координат; α – угол скоса вектора скорости. Это течение имеет место в теплообменниках ядерных и тепловых энергоустановок, форсунках ракетных двигателей, аппаратах химической и микробиологической промышленности, в вихревых гидротехнических во-

досбросах, его наблюдают в аортах сердца. В технологических каналах оно формируется локальными завихрителями потока [2].

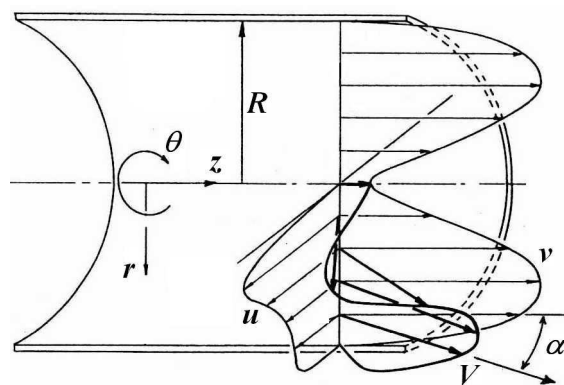


Рисунок 1. Структура циркуляционно-продольного течения в трубе.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В цилиндрической системе координат установившееся ($\partial/\partial t = 0$) симметричное относительно оси канала ($\partial/\partial \theta = 0$) циркуляционно-продольное течение описывается дифференциальными уравнениями Навье-Стокса [2 – 6]

$$\left. \begin{aligned} \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial r} + v \frac{\partial \varpi}{\partial z} - \frac{u^2}{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} - \Pi \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial r^2} + \frac{\partial \varpi}{r \partial r} - \frac{\varpi}{r^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} \right), \\ \varpi \frac{\partial (ru)}{r \partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} &= \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \varpi \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho} - \Pi \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} (1)$$

здесь ρ и ε – плотность и кинематическая вязкость жидкости; ϖ – радиальная составляющая местной скорости; P и Π – давление и потенциал внешних массовых сил.

Допуская, что радиальные скорости много меньше азимутальных и аксиальных ($\varpi \ll u$, $\varpi \ll v$) и нормируя уравнения по средней по расходу Q скорости потока

$$v_0 = \frac{Q}{\pi R^2},$$

радиусу канала R и атмосферному давлению P_0 , систему (1) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{Eu} \cdot P - \frac{\Pi}{\text{Fr}} \right), \\ v \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ v \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\text{Eu} \cdot P - \frac{\Pi}{\text{Fr}} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\}$$

где r, z, u, v, P – нормированные переменные, $r = r/R, z = z/R, u = u/v_0, v = v/v_0, P = P/P_0$; Eu, Fr и Re – числа Эйлера, Фруда и Рейнольдса

$$\text{Eu} = \frac{P_0}{\rho v_0^2}, \quad \text{Fr} = \frac{v_0^2}{gR}, \quad \text{Re} = \frac{v_0 R}{\varepsilon}.$$

Используя озееновское приближение [7], заменим операторы $v \partial/\partial z$ на $v_0 \partial/\partial z$ или в нормированной форме – на $\partial/\partial z$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{Eu} \cdot P - \frac{\Pi}{\text{Fr}} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\text{Eu} \cdot P - \frac{\Pi}{\text{Fr}} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\}$$

Продифференцируем первое уравнение записанной системы по z и сложим с третьим, предварительно продифференцированным по r . В результате получим замкнутую систему двух линейных дифференциальных уравнений параболического типа с двумя неизвестными компонентами скорости (u, v)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} (2)$$

Задача (2) имеет аналитическое решение. Её граничными условиями являются:

- равенство нулю скоростей движения жидкости на стенках канала;
- равенство нулю азимутальных скоростей на оси вращения потока (на оси канала);
- равенство нулю частной производной от аксиальной скорости по радиусу на оси канала, обеспечивающее условие мягкого экстремума;
- вырождение азимутальных скоростей на

бесконечном удалении от формирующего их локального завихрителя при одновременном асимптотическом стремлении аксиальных скоростей к классическому профилю Пуазейля;

- равномерный по радиусу профиль аксиальных скоростей на входе в канал;
- соблюдение интеграла сохранения расхода. Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при } r = 1, \\ u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 & \quad \text{при } r = 0, \\ u = 0, \quad v = 2(1 - r^2) & \quad \text{при } z = \infty, \\ v = 1 & \quad \text{при } z = 0, \\ \int_0^1 v 2r dr = 1 & \quad \text{при } z \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

Решение первого уравнения системы (2) с граничными условиями (3) получено в [6] в виде разложения Фурье-Бесселя

$$u(r, z, \text{Re}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(\frac{-2\lambda_n^2 z}{\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\lambda_n^2}}\right), \quad (4)$$

где $J_0(\lambda_n)$ и $J_1(\lambda_n r)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка [8]; λ_n – корни уравнения $J_1(\lambda_n) = 0$; G_n – постоянная n -го частного решения

$$G_n = \Gamma_0 \left[\frac{1}{J_0(\lambda_n)} - 1 \right] - \Omega_0, \quad (5)$$

Γ_0 и Ω_0 – константы, определяющие радиальный профиль азимутальных скоростей на входе в канал (при $z = 0$), заданный в виде вихря Куэтта [9]

$$u(r, 0) = \Omega_0 r + \frac{\Gamma_0}{r}. \quad (6)$$

Профиль (вихрь) Куэтта позволяет на входе в канал задать закрутку практически любой конфигурации от «свободного» до «вынужденного вихря», включая промежуточные. На рис. 2 приведены распределения по радиусу и длине канала нормированных азимутальных скоростей в симметричном относительно его оси потоке. Расчеты выполнены по (4) при числе Рейнольдса, равном $\text{Re} = 500$; во входном створе канала задан «свободно-вынужденный вихрь» с параметрами $\Gamma_0 = 0,5$ и $\Omega_0 = 1,0$. На профилях указаны кратные радиусу канала расстояния от локального завихрителя до расчетных створов: $z = 5R, 10R, 20R, 40R$ и $80R$. Штрихом показано распределение азимутальных скоростей на входе в канал при $z = 0$.

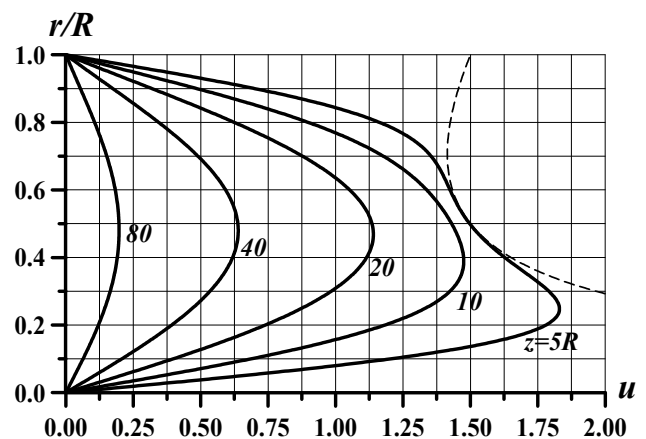


Рисунок 2. Профили азимутальных скоростей в циркуляционно-продольном течении

В целом можно видеть, что по длине канала затухание азимутальных скоростей происходит по экспоненциальному закону.

В [6] отмечается, что если в первом уравнении системы (2) пренебречь второй частной производной по z , полагая

$$\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (7)$$

то его решением будет распределение

$$u(r, z, \text{Re}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right), \quad (8)$$

полученное ранее в [3]. При этом расчетные значения распределений (4) и (8) при числе Рейнольдса, равном 500, отличаются на малые порядки от $-1 \cdot 10^{-4}$ до $8 \cdot 10^{-4}$.

Нетрудно видеть, что к такому результату можно придти, если $\text{Re}^2 \gg 4\lambda_n^2$, при этом (4) обращается в (8). Расчетная практика показала, что значимыми являются только первые 5–8 членов ряда Фурье-Бесселя, при этом корни уравнения $J_1(\lambda_n) = 0$ достигают значения $\lambda_n = 25,9$. В этих условиях разность расчетов по (4) и (8) менее 3% достигается при $\text{Re} \geq 150$. Течения при числах Рейнольдса меньше 150 можно отнести к ползущим, когда скорости движения жидкости малы, а вязкость велика. Поэтому для практических расчетов можно рекомендовать формулу (8) как более простую по отношению к (4).

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АКСИАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

Решение второго уравнения системы (2), описывающего распределение аксиальных скоростей, будем искать в виде суммы

$$v = V + \Delta, \quad (9)$$

где V – аксиальная скорость в незакрученном течении при $u = 0$; Δ – отклонение (дефицит) аксиальной скорости от значения V вследствие закрутки потока ($u \neq 0$).

Согласно (9) разложим второе уравнение системы (2) на два

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r \partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z \partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{\partial \Delta}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

Уравнение (10) описывает **неравномерное напорное движение осевого потока в прямом цилиндрическом канале**. Неравномерность присуща этому течению на некотором участке после входа в канал. Положим в (10)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \phi(r) \cdot \varphi(z), \quad (12)$$

где один из сомножителей зависит от текущего радиуса, а второй – от осевой координаты. Подставляя (12) в (10) и разделяя переменные, находим

$$\frac{1}{\phi} \left(\text{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \frac{\phi}{r^2} \right).$$

Но данное равенство, где левая часть зависит только от z , а правая – только от r , возможно лишь в одном случае, если обе части одновременно не зависят ни от z , ни от r , т.е. равны некой общей константе. Обозначив её η и приравняв ей обе части равенства, разложим его на два линейных дифференциальных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \eta \varphi, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \frac{\phi}{r^2} &= \eta \phi, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где постоянная η может принимать значения: больше, меньше или равное нулю.

При $\eta > 0$ второе уравнение системы (13) обращается в модифицированное уравнение Бесселя [8], не имеющего действительных корней, поэтому, случай $\eta > 0$ не может рассматриваться как решение уравнения (10).

Во втором случае при $\eta = 0$ получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \operatorname{Re} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \frac{\phi}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда с учетом (12) приходим к решению

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \left(C_2 + C_1 \frac{\exp(\operatorname{Re} \cdot z)}{\operatorname{Re}} \right),$$

где константы C_1 и C_4 согласно второму и третьему граничным условиям (3) должны быть равны нулю. Тогда, при $\eta = 0$ имеем

$$\frac{\partial V}{\partial r} = Cr, \quad (14)$$

где $C = C_2 C_3$.

В третьем случае положим $\eta = -\lambda_i^2 < 0$, тогда система (13) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \operatorname{Re} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \lambda_i^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Первое уравнение этой системы имеет следующее частное решение

$$\begin{aligned} \phi_i(z) = C_5 \exp \left[\frac{\operatorname{Re} \cdot z}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\lambda_i^2}{\operatorname{Re}^2}} + 1 \right) \right] + \\ + C_6 \exp \left[-\frac{\operatorname{Re} \cdot z}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\lambda_i^2}{\operatorname{Re}^2}} - 1 \right) \right], \end{aligned}$$

где C_5 необходимо положить равной нулю в соответствии с третьим граничным условием, записанным в (3).

Второе уравнение системы является уравнением Бесселя [8], имеющим частное решение в виде произведения константы на функцию Бесселя первого рода первого порядка

$$\phi_i(r) = A_i J_1(\lambda_i r).$$

В результате согласно (12) получаем

$$\frac{\partial V_i}{\partial r} = A_i J_1(\lambda_i r) \exp \left(\frac{-2\lambda_i^2 z}{\operatorname{Re} + \sqrt{\operatorname{Re}^2 + 4\lambda_i^2}} \right),$$

здесь в постоянную A_i вошла константа C_6 , а числитель и знаменатель экспоненты умножены на $1 + \sqrt{1 + 4\lambda_i^2 / \operatorname{Re}}$.

Используя полную систему частных решений, находим общее решение уравнения (10) при $\eta = -\lambda_i^2 < 0$ в виде ряда Фурье-Бесселя

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_1(\lambda_i r) \exp \left(\frac{-2\lambda_i^2 z}{\operatorname{Re} + \sqrt{\operatorname{Re}^2 + 4\lambda_i^2}} \right). \quad (15)$$

А общее решение задачи (10) найдем как сумму (14) и (15)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = Cr + \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_1(\lambda_i r) \exp \left(\frac{-2\lambda_i^2 z}{\operatorname{Re} + \sqrt{\operatorname{Re}^2 + 4\lambda_i^2}} \right). \quad (16)$$

Интегрируя (16) по радиусу от текущего значения r до 1 и полагая согласно граничным условиям (3) $V = 0$ при $r = 1$ и $V = 2(1 - r^2)$ при $z = \infty$, получим

$$\begin{aligned} V = 2(1 - r^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\lambda_i} [J_0(\lambda_i) - J_0(\lambda_i r)] \times \\ \times \exp \left(\frac{-2\lambda_i^2 z}{\operatorname{Re} + \sqrt{\operatorname{Re}^2 + 4\lambda_i^2}} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Поскольку нормированный интеграл объемного расхода согласно (3) равен единице, то полученное решение (17) при произвольных A_i , λ_i , z и Re должно отвечать условию

$$\int_0^1 [J_0(\lambda_i) - J_0(\lambda_i r)] 2r dr = 0. \quad (18)$$

Взяв интеграл, получаем

$$J_0(\lambda_i) - \frac{2}{\lambda_i} J_1(\lambda_i) = 0.$$

Но сумма в левой части согласно связывающим цилиндрические функции рекуррентным соотношениям равна $-J_2(\lambda_i)$ [8]. Следовательно, в данной задаче λ_i является одним из действительных нулей функции Бесселя первого рода второго порядка ($J_2(\lambda_i) = 0$). Умножим (16) на $r^2 dr$ и проинтегрируем от 0 до r при $z = 0$. При этом положим в нем согласно (17) $C = -4$, и учтем равномерный при $z = 0$ профиль аксиальных скоростей, при котором $V = 1$ и $\partial V / \partial r = 0$. В результате

$$r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\lambda_i} J_2(\lambda_i r).$$

Повторно множа это равенство последовательно на $J_2(\lambda_1 r) r dr$, $J_2(\lambda_2 r) r dr$, ..., $J_2(\lambda_i r) r dr$, ..., $J_2(\lambda_{\infty} r) r dr$, и интегрируя по r от 0 до 1, из условий ортогональности функций Бесселя [8] для произвольного i -го частного решения находим

$$A_i = \frac{2J_3(\lambda_i)}{[J_2'(\lambda_i)]^2},$$

где $J_3(\lambda_i)$ – функция Бесселя первого рода третьего порядка.

Но если выше установлено, что λ_i – один из действительных корней уравнения $J_2(\lambda_i) = 0$, то по рекуррентным соотношениям имеем

$$-J_3(\lambda_i) = J_1(\lambda_i) = J_2'(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{2} J_0(\lambda_i), \quad (19)$$

отсюда

$$A_i = -\frac{4}{\lambda_i J_0(\lambda_i)}.$$

И окончательно в соответствии с (17)

$$V(r, z, \text{Re}) = 2(1 - r^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \times \exp\left(\frac{-2\lambda_i^2 z}{\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\lambda_i^2}} \right). \quad (20)$$

Распределение (20) описывает установившееся неравномерное напорное осевое течение вязкой несжимаемой жидкости в прямом цилиндрическом канале на участке его трансформации от входного створа, где скорости приняты постоянными по сечению, до створа с параболическим профилем скоростей по Пуазейлю. На рис. 3 показана картина такого развития профиля аксиальных скоростей, расчеты выполнены при $\text{Re} = 500$.

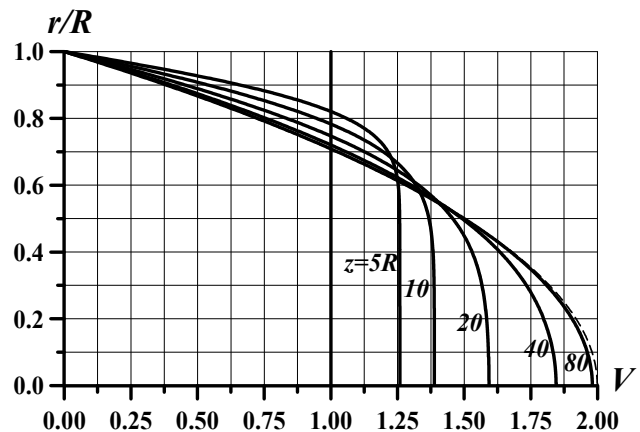


Рисунок 3. Профили аксиальных скоростей в неравномерном осевом потоке

Можно видеть, что по мере продвижения по аксиальной координате тормозящее влияние стенок распространяется все дальше вглубь жидкости, при этом скорости в центральной части канала нарастают до тех пор, пока влияние стенки не распространится на всю жидкость. В примере это происходит к створу, расположенному от входа на расстоянии $z = 80R$, где расчетный профиль фактически соответствует параболическому профилю Пуазейля, показанному штриховой кривой. Решение (20) подтверждает известное рас-

пределение С.М.Тарга [10], полученное иным путем, но уточняет его в экспоненте. Тарг, не учитывая вязкий член $\varepsilon \cdot \partial^2 V / \partial z^2$, получил распределение в виде

$$V(r, z, \text{Re}) = 2(1 - r^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \times \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \quad (21)$$

При $\text{Re}^2 \gg 4\lambda_i^2$ (20) сводится к (21). Если при расчетах значимыми являются 5–8 членов ряда Фурье-Бесселя и корни $J_2(\lambda_i) = 0$ достигают значения $\lambda_i = 27,4$, то при $\text{Re} \geq 150$ распределение (20) можно заменить на распределение (21). Такое решение, используя описанную здесь методику вывода, получено в [2, 4], где в (10) пренебрегается второй частной производной по z , полагая

$$\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \ll \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right). \quad (22)$$

Дефицит аксиальных скоростей в циркуляционно-продольном течении описывается уравнением (11). Выразим в нем азимутальную скорость по (8) и пренебрегая при $\text{Re} \geq 150$ второй частной производной по z , т.е. полагая аналогично (7) и (22)

$$\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) \ll \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right),$$

перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{\text{Re} \cdot r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

где λ_n и λ_k – нули функции Бесселя первого рода первого порядка; G_n и G_k – вычисляемые по (5) постоянные n -го и k -го решений. Решение задачи получим разложением (23) в систему $n \times k$ уравнений, где слагаемые ряда n умножаются на слагаемые ряда k . Рассмотрим произвольное nk -ое уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{8G_n G_k}{\text{Re} \cdot r} \cdot \frac{\lambda_k J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \frac{z}{\text{Re}}\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} \right) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

и положим в нем

$$\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} = \frac{8G_n G_k \lambda_k^2}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \Phi_{nk}(r) \exp\left(-(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \frac{z}{\text{Re}}\right), \quad (25)$$

где $\Phi_{nk}(r)$ – функция переменной r , что сводит (24) к неоднородному уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 \Phi_{nk}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi_{nk}}{r \partial r} + \left(\lambda_n^2 + \lambda_k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi_{nk} = -\frac{J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_k J_0(\lambda_k)}.$$

Определение корней этого уравнения не поддается описанным, например, в [11] формальным процедурам. Поэтому рассмотрим иной метод, в котором положим

$$\Phi_{nk} = \varphi_n \psi_k, \quad (26)$$

где φ_n и ψ_k – функции r , связанные с константами разделения λ_n и λ_k , и разложим неоднородное уравнение Бесселя в систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_k}{r \partial r} + \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \psi_k &= 0, \\ 2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} + \psi_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_n}{r \partial r} + \lambda_n^2 \varphi_n \right) &= \\ &= -\frac{J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_k J_0(\lambda_k)}. \end{aligned} \right\}$$

Решением первого однородного уравнения Бесселя этой системы является

$$\psi_k = B_k J_1(\lambda_k r). \quad (27)$$

Во втором уравнении положим сумму в скобках равной нулю, тогда

$$\varphi_n = A_n J_0(\lambda_n r). \quad (28)$$

В итоге с учетом дифференцирования (27) и (28) во втором уравнении остаётся невязка

$$2A_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) B_k \frac{\partial}{\partial r} [J_1(\lambda_k r)] - \frac{J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_k J_0(\lambda_k)} = \delta_{nk}.$$

Тогда общее решение системы $n \times k$ уравнений будет удовлетворять условиям задачи (23), если найти такие постоянные A_n и B_k , при которых суммарная невязка будет равна нулю, т.е. разделяя ряды должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\partial}{\partial r} [J_1(\lambda_k r)] &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\lambda_n r) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_k J_0(\lambda_k)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Но если λ_k – нули функции Бесселя первого рода первого порядка, то согласно рекуррентным соотношениям $J_0(\lambda_k) = -J_2(\lambda_k)$, при этом стоящая в правой части равенства (29) сумма по k при всех r равна константе

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_k J_0(\lambda_k)} = -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k J_2(\lambda_k)} = -\frac{1}{2}, \quad (30)$$

ибо является табличным рядом, содержащим нули функции Бесселя [12]. Тогда

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n J_1(\lambda_n r) \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\partial}{\partial r} [J_1(\lambda_k r)] = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\lambda_n r)$$

Отсюда следует

$$A_n = -\frac{1}{4\lambda_n} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\partial}{\partial r} [J_1(\lambda_k r)] = 1.$$

Умножим второе равенство на dr и проинтегрируем в пределах от 0 до r , в результате получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\lambda_k r) = r.$$

Вновь воспользовавшись суммой ряда (30), находим

$$B_k = -\frac{2}{\lambda_k J_0(\lambda_k)}.$$

Таким образом, подставляя значения постоянных A_n и B_k в (27) и (28), затем в (26) и далее в (25), находим решение (24) как nk -го частного решения уравнения (23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} &= 4G_n G_k \frac{\lambda_k J_0(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n) J_0(\lambda_k)} \times \\ &\times \exp\left(-(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \frac{z}{\text{Re}}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Другое решение nk -го уравнения (24) можно получить, положив им функцию

$$\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} = \frac{8G_n G_k \lambda_k}{J_0(\lambda_k)} \Phi_{nk}^*(r) \exp\left(-(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \frac{z}{\text{Re}}\right).$$

Это приводит (24) к неоднородному уравнению Бесселя с λ_n и $J_0(\lambda_n)$ в знаменателе

$$\frac{\partial^2 \Phi_{nk}^*}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi_{nk}^*}{r \partial r} + \left(\lambda_n^2 + \lambda_k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi_{nk}^* = - \frac{J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_n J_0(\lambda_n)}$$

Положив в нем

$$\Phi_{nk}^* = \varphi_n^* \psi_k^*,$$

разложим уравнение Бесселя в систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_n^*}{r \partial r} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_n^* &= 0, \\ 2 \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial r} \frac{\partial \psi_k^*}{\partial r} + \varphi_n^* \left(\frac{\partial^2 \psi_k^*}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_k^*}{r \partial r} + \lambda_k^2 \psi_k^* \right) &= \\ &= - \frac{J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r)}{r \lambda_n J_0(\lambda_n)}. \end{aligned} \right\}$$

Повторяя вывод, сделанный выше, находим второе частное решение (24) в виде

$$\frac{\partial \Delta_{nk}}{\partial r} = 4 G_n G_k \frac{J_1(\lambda_n r) J_0(\lambda_k r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n) J_0(\lambda_k)} \times \exp\left(-(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) \frac{z}{\text{Re}}\right). \quad (32)$$

Складывая (31) и (32), получаем удвоенное решение nk -го уравнения (24). Таким образом, решение исходного уравнения (23) представляет собой сумму $n \times k$ частных решений (31) и (32), деленную на два, которая, разделяя ряды, записывается в виде

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \right]. \quad (33)$$

Можно заметить, что третий ряд (33) являет-

ся деленной на два азимутальной скоростью (8). Тогда, четвертый ряд будет деленной на два z -осевой составляющей симметричного по координате θ вихря скорости

$$\frac{\text{rot}_z U}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(ru)}{r \partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right),$$

а второй ряд – деленной на два частной производной этого вихря по r

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\text{rot}_z U)}{\partial r} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right).$$

Положив в (33) $z = 0$, получим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \right]. \quad (34)$$

Но при $z = 0$, т.е. на входе в канал распределение азимутальных скоростей задано нами профилем Куэтта (6), при этом вихрь скорости и его производная будут равны

$$\text{rot}_z U = 2\Omega_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\text{rot}_z U)}{\partial r} = 0,$$

отсюда при $z = 0$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = \frac{u \cdot \text{rot}_z U}{2} = \Omega_0^2 r + \frac{\Omega_0 \Gamma_0}{r}. \quad (35)$$

Поскольку на входе задан равномерный профиль аксиальных скоростей, при котором $\partial \Delta / \partial r = 0$, то полученную невязку (35) следует компенсировать, просуммировав (33) с решением дополняющего (23) однородного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} \right) \right],$$

которое при $z = 0$ сводится к

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} = -\Omega_0^2 r - \frac{\Omega_0 \Gamma_0}{r}, \quad (36)$$

Положим решением этого однородного уравнения функцию

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} = \phi(r) \cdot \varphi(z), \quad (37)$$

и, разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{\text{Re}}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \frac{\phi}{r^2} \right) = \eta,$$

полагая, если левая часть зависит только от z , а правая – только от r , то, следовательно, обе части не зависят ни от z , ни от r , а равны общей константе η . Это позволяет получить систему двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\eta}{\text{Re}} \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \left(\eta + \frac{1}{r^2} \right) \phi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где η принимает два значения: $\eta = 0$ и $\eta < 0$.
Случай $\eta > 0$ исключается, так как вторая строка (38) при этом обращается в модифицированное уравнение Бесселя, не имеющего действительных корней.

При $\eta = 0$ находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} - \frac{\phi}{r^2} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда с учетом (37)

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} = Cr + \frac{C_0}{r}.$$

Данное решение не может удовлетворять условиям поставленной задачи, ибо сохраняет свое значение постоянным и соответствующим (36) не только при $z = 0$, но и при любых произвольных значениях z .

При $\eta < 0$ положим $\eta = -\lambda_i^2$, тогда (38) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\lambda_i^2}{\text{Re}} \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

с решениями

$$\varphi_i(z) = C_1 \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right)$$

и

$$\phi_i(r) = A_i J_1(\lambda_i r).$$

В результате согласно (37) для i -го частного решения получаем

$$\frac{\partial \Delta_{0i}}{\partial r} = A_i J_1(\lambda_i r) \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right),$$

здесь константа C_1 вошла в постоянную A_i .
Используя полную систему частных решений, находим общее решение (38) в виде ряда Фурье-Бесселя

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_1(\lambda_i r) \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \quad (39)$$

Интегрируя (39) по радиусу от r до 1 и полагая согласно граничным условиям (3) $\Delta_0 = 0$ при $r = 1$, находим

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\lambda_i} [J_0(\lambda_i) - J_0(\lambda_i r)] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \quad (40)$$

Поскольку нормированный интеграл объемного расхода по (3) равен единице, а выполнение этого условия обеспечивается распределениями (20) или (21), то

$$\int_0^1 \Delta_0 2r dr = 0.$$

Но данное равенство возможно только в том случае, если

$$\int_0^1 [J_0(\lambda_i) - J_0(\lambda_i r)] 2r dr = 0,$$

что соответствует (18). Следовательно, в распределениях (39) и (40) λ_i является одним из действительных нулей функции Бесселя первого рода второго порядка. Положим в (39) $z = 0$, тогда с учетом (36) должно иметь место равенство

$$-\left(\Omega_0^2 r + \frac{\Omega_0 \Gamma_0}{r}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_1(\lambda_i r).$$

Умножим его на $r^2 dr$ и проинтегрируем от 0 до r . В результате получим

$$-\left(\frac{\Omega_0^2}{4} r^2 + \frac{\Omega_0 \Gamma_0}{2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\lambda_i} J_2(\lambda_i r).$$

Умножая этот результат последовательно на $J_2(\lambda_1 r) r dr$, $J_2(\lambda_2 r) r dr$, ..., $J_2(\lambda_i r) r dr$, ..., $J_2(\lambda_{\infty} r) r dr$, и интегрируя по r от 0 до 1, из условий ортогональности функций Бесселя для произвольного i -го частного решения находим

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega_0^2}{4\lambda_i} J_3(\lambda_i) + \frac{\Omega_0 \Gamma_0}{2\lambda_i} \left\{ J_1(\lambda_i) + \frac{2[J_0(\lambda_i) - 1]}{\lambda_i} \right\} = \\ = \frac{A_i}{2\lambda_i} [J_2'(\lambda_i)]^2. \end{aligned}$$

Так как λ_i – действительный корень уравне-

ния $J_2(\lambda_i) = 0$, воспользуемся равенствами (19). Тогда

$$A_i = \frac{\Omega_0}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \left\{ \Omega_0 + 2\Gamma_0 \left(1 + \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{1}{J_0(\lambda_i)} \right] \right) \right\}.$$

Подставляя значение A_i в (40), получим

$$\begin{aligned} \Delta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_0}{\lambda_i^2} \left\{ \Omega_0 + 2\Gamma_0 \left(1 + \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{1}{J_0(\lambda_i)} \right] \right) \right\} \times \\ \times \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Проинтегрируем теперь (33) по радиусу от текущего значения r до 1, полагая дефицит скорости у стенки при $r = 1$ равным нулю. В результате находим

$$\begin{aligned} \Delta = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Сумма (41) и (42) дает нам дефицит скорости от закрутки потока, который при $z = 0$ и $z = \infty$ равен нулю. Проинтегрируем (42), определяя расход дефицита скорости

$$\begin{aligned} q = \int_0^1 \Delta 2r dr = -2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2}{\lambda_n^2} \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Но этот расход согласно пятому граничному условию (3) должен быть равен нулю. Следовательно, для получения общего решения, удовлетворяющего условиям (3), к сумме решений (41) и (42) следует прибавить решение однородного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Delta_q}{\partial r} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \Delta_q}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Delta_q}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta_q}{\partial r} \right) \right],$$

где Δ_q – дефицит, компенсирующий невязку q по (43).

Исходя из вида (43), искомую функцию будем искать как сумму

$$\frac{\partial \Delta_q}{\partial r} = \frac{\partial \Delta_{q1}}{\partial r} + \frac{\partial \Delta_{q2}}{\partial r}, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{q1}}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r) \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right), \\ \frac{\partial \Delta_{q2}}{\partial r} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\Phi_{kn}(r)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \right]^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{kn}(r) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \end{aligned}$$

Вводя значения функций в записанное однородное уравнение, получаем $2n$ уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi_n}{r \partial r} + \left(2\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi_n &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_{kn}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi_{kn}}{r \partial r} + \left(2\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) \Phi_{kn} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

имеющих решения вида

$$\Phi_n = A_n J_1(\lambda_n \sqrt{2}r) \quad \text{и} \quad \Phi_{kn} = A_{kn} J_1(\lambda_n \sqrt{2}r).$$

Таким образом, сумма (44) записывается рядами Фурье-Бесселя

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_q}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n \sqrt{2}r) \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_1(\lambda_n \sqrt{2}r) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \end{aligned}$$

Интегрируя этот результат по радиусу от те-

кущего значения r до $r = 1$ и положив в последнем случае $\Delta_q = 0$, находим

$$\begin{aligned} \Delta_q &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n \sqrt{2}} \left[J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r) \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{kn}}{\lambda_n \sqrt{2}} \left[J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - \right. \\ &\left. - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r) \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \quad (45) \end{aligned}$$

Интегрируя (45) по сечению канала, далее находим расход компенсационного дефицита скоростей

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Delta_q 2r dr &= - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_2(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n \sqrt{2}} \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_2(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n \sqrt{2}} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right). \end{aligned}$$

где учтено, что согласно рекуррентным соотношениям

$$J_2(\lambda_n \sqrt{2}) = \frac{2J_1(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n \sqrt{2}} - J_0(\lambda_n \sqrt{2}).$$

Приравняем теперь полученную сумму к (43), но с обратным знаком, то есть положим её равной $-q$, чем компенсируем полученную в (43) невязку расхода и этим удовлетворим пятое граничное условие (3). При этом сумму по n в полученном выражении соотнесем с суммой по n в (43)

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_2(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n \sqrt{2}} \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2G_n^2}{\lambda_n^2} \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right), \end{aligned}$$

а произведение рядов по k и n – соотнесем с аналогичным произведением рядов в (43)

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_2(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n \sqrt{2}} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2G_n}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right).$$

Отсюда находим

$$A_n = -\frac{2\sqrt{2}G_n^2}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})},$$

$$A_{kn} = \frac{2\sqrt{2}G_n G_k}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})}.$$

Подставляя найденные значения констант в (45), получим

$$\Delta_q = 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n^2 J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_0(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2 J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{\lambda_n^2 J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \times$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_0(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \right\}. \quad (46)$$

Таким образом, вследствие закрутки потока появляется не только связанный с ней дефицит скоростей ($\Delta + \Delta_0$), но и не равный нулю компенсационный дефицит (Δ_q), который необходимо учитывать, удовлетворяя интеграл сохранения расхода.

В окончательном виде распределение аксиальных скоростей в циркуляционно-продольном течении находим как сумму (21), (41), (42) и (46)

$$v(r, z, \text{Re}) = V + \Delta + \Delta_0 + \Delta_q = 2(1 - r^2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ \Omega_0^2 + 2\Omega_0 \Gamma_0 \left(1 + \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{1}{J_0(\lambda_i)} \right] \right) - 4 \right\} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) - 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2}{\lambda_n^2} \times$$

$$\times \left[\frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{z}{\text{Re}}\right) \left. \right\}. \quad (47)$$

где λ_i – действительные нули функции Бесселя первого рода второго порядка; λ_n и λ_k – действительные нули функции Бесселя первого рода первого порядка; G_n и G_k – вычисляемые по (5) постоянные n -го и k -го частных решений.

Полученное решение (47) удовлетворяет всем поставленным граничным условиям (3), т.е. вязкому прилипанию жидкости на стенках трубы, условию гладкого экстремума на оси трубопровода, асимптотическому выходу на профиль Пуазейля для равномерного движения на значительном удалении от входа, равномерному распределению азимутальных скоростей на входе в канал, а также соответствует интегралу сохранения расхода. Оно распространяется на установившиеся неравномерные циркуляционно-продольные течения жидкости с произвольной закруткой, а в частных случаях сводится к известным распределениям Тарга для установившегося неравномерного продольно-осевого движения жидкости в напорном трубопроводе и Пуазейля при равномерном продольно-осевом течении жидкости в трубе.

Результаты расчетов по формуле (47) приведены на рис. 4. Расчеты выполнены при числе Рейнольдса, равном $\text{Re} = 500$; во входном створе канала задан «свободно-вынужденный вихрь», соответствующий рис. 2.

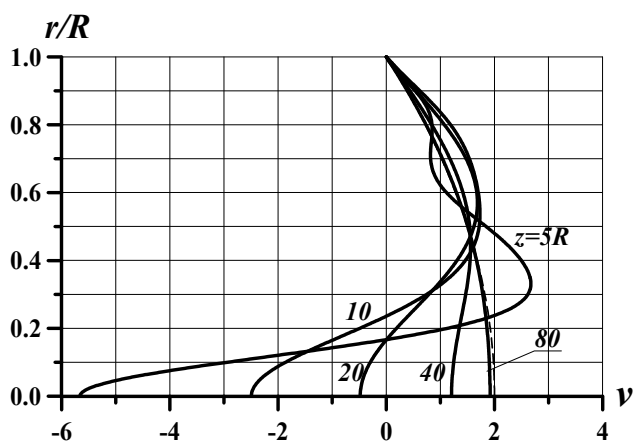


Рисунок 4. Профили аксиальных скоростей в циркуляционно-продольном течении

Из рисунка видно, что в сечениях, близких к началу трубы, в приосевой зоне можно наблюдать сильное возвратное течение со значительными отрицательными скоростями, достигающими на оси трубы для расчетного режима при $z = 5R$ значений до $v = -5,6v_0$ (где v_0 – среднерасходная скорость). Далее по длине трубы обратные токи снижаются и исчезают, преобразуясь в «провал», характерный для течения за плохообтекаемым телом. Для расчетного режима возвратное приосевое течение существует на участке длиной до тридцати радиусов канала. Анализ (47) позволяет сделать вывод, что изменение числа Рейнольдса за счет вязкости жидкости, скорости течения или радиуса канала прямо пропорционально отражается на протяженности участка возвратного течения.

За пределами возвратного приосевого течения скорости в толще потока могут существенно превосходить среднерасходную, равную $v_0 = 1$. Так при $z = 5R$ максимальная скорость достигает значения $v = 2,6v_0$ и лежит на расстоянии $0,33R$ от оси канала в слое, непосредственно примыкающем к области обратных токов. Здесь в ближайших к области возвратного течения слоях жидкости наблюдается скачок скоростей, не успевающий распространиться на удаленные периферийные слои. Расчеты показывают, что баланс масс в начале канала в циркуляционно-продольном течении поддерживается за

счет именно этого явления. В дальнейшем в процесс переформирования профиля аксиальных скоростей вовлекаются все более отдаленные от зоны возвратных токов слои, при этом по мере продвижения потока вдоль оси канала зона максимума скоростей в виде расширяющейся затухающей волны смещается к стенкам трубы. Таким образом, явление можно характеризовать как инициированную возвратным приосевым течением инерционную волну, расходящуюся от оси к стенкам канала. Волна достаточно быстро затухает и, достигнув стенок ниже створа $20R$, более не проявляет себя. Далее по длине трубы смещение зоны максимальных осевых скоростей идет от периферии к центру канала и в пределе, при вырождении циркуляции, аксиальные скорости достигают максимума на его оси. Параболический профиль Пуазейля, показанный штриховой кривой, практически формируется к створу на расстоянии $80R$ от входа.

Отметим, что закрутка приводит к кардинальному отличию профиля аксиальной скорости в закрученном потоке (рис. 4) от профиля в незакрученном течении (рис. 3). Профили аксиальных скоростей в циркуляционно-продольном течении в определяющей степени формируются закруткой потока, следовательно, продольное течение приобретает свойства вторичного, зависящего от азимутальной компоненты скорости.

Анализ окончательных расчетных формул (8) и (47), где радиальное распределение (по r) определяется функциями Бесселя, а продольное (по z) – экспонентой, позволяет утверждать, что справедлив закон прямо пропорционального пересчета характеристик. А именно: при увеличении числа Рейнольдса, например, в два раза (до $Re = 1000$), профиль скоростей полученный для $Re = 500$ в створе $10R$ сместится в створ $20R$, и, наоборот, при снижении числа Рейнольдса полученная расчетная кривая, сохраняя свои значения, прямо пропорционально сместится к входному створу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kitoh O.** Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe // *J. Fluid Mech.*, 1991, 225, pp. 445-479.
2. **Зуйков А.Л.** Гидродинамика циркуляционных течений. – М.: Издательство АСВ, 2010 – 216 с.
3. **Зуйков А.Л.** Профили тангенциальных скоростей в циркуляционном течении в трубе // *Вестник МГСУ*, 2009, №3, с. 195–199.
4. **Зуйков А.Л.** Распределение продольных скоростей в циркуляционном течении в трубе // *Вестник МГСУ*, 2009, №3, с. 200-204.
5. **Зуйков А.Л.** Радиально-продольное распределение азимутальных скоростей в течении за локальным завихрителем // *Вестник МГСУ*, 2011, №2, с. 119-123.
6. **Зуйков А.Л.** Уточненные азимутальные скорости в течении за локальным завихрителем // *Вестник МГСУ*, 2012, №1, с. 51-56.
7. **Batchelor G.K.** Axial flow in trailing line vortices // *J. Fluid Mech.*, 1964, 20, 4, pp. 645-658.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970 – 720 с.
9. **Зуйков А.Л.** Модифицированный вихрь Куэтта // *Вестник МГСУ*, 2010, №4, ч. 2, с. 66-71.
10. **Емцев Б.Т.** Техническая гидромеханика. Изд. 2-е, переработ. и доп. – М., Машиностроение, 1987 – 440 с.
11. **Корнев Б.Г.** Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971 – 288 с.
12. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. – М., Наука, 1983 – 752 с.

равлики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: hydraulics@mgsu.ru

Andrey L. Zuykov, PhD, Professor, Head of the department of hydraulics of the Moscow State University of Civil Engineering, PhD. 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: hydraulics@mgsu.ru.

Зуйков Андрей Львович, доктор технических наук, профессор, Московский государственный строительный университет, заведующий кафедрой гид-

АПРОБАЦИЯ КОРРЕКТНОГО МЕТОДА ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АППАРАТА КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА БАЛКИ БЕРНУЛЛИ

М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматривается апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа (применяется дискретный базис Хаара) на примере расчета балки Бернулли. Представлена исходная постановка задачи, описана методика дискретного (численного) решения задачи, исследованы актуальные вопросы использования процедуры осреднения, изучены практические приложения.

Ключевые слова: корректный метод, локальное решение, краевая задача, расчет конструкций, вейвлет-анализ, дискретный базис Хаара, апробация, верификация

APPROBATION OF CORRECT METHOD OF LOCAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS WITH THE USE OF MULTIREOLUTION WAVELET ANALYSIS TO BEAM ANALYSIS

Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to approbation of correct method of local solution of boundary problems of structural mechanics with the use of multiresolution wavelet analysis (discrete Haar basis) to beam analysis. Initial continual formulation of the problem is presented. Corresponding numerical formulation is given as well. Algorithms of averaging and some practical applications are under consideration.

Key words: correct method, local solution, boundary problem, structural mechanics, multiresolution wavelet analysis, beam analysis, discrete Haar basis, approbation, verification

1. ИСХОДНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана балка на упругом основании со следующими параметрами (см. рис. 1):

$\ell=800$ см – длина; $h=130$ см, $b=100$ см – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E=2650$ кН/см² – модуль упругости; $P=100$ кР – нагрузка, заданная в средней

точке. Кроме того, $k=75 \cdot 10^{-3}$ кН/см³, $\bar{k}=k \cdot b$, $J=bh^3/12$ [5].

Определение прогиба балки сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), & 0 < x < \ell \\ y(0) = y''(0) = 0 \\ y(\ell) = y''(\ell) = 0 \end{cases} \text{— краевые условия,} \quad (1)$$

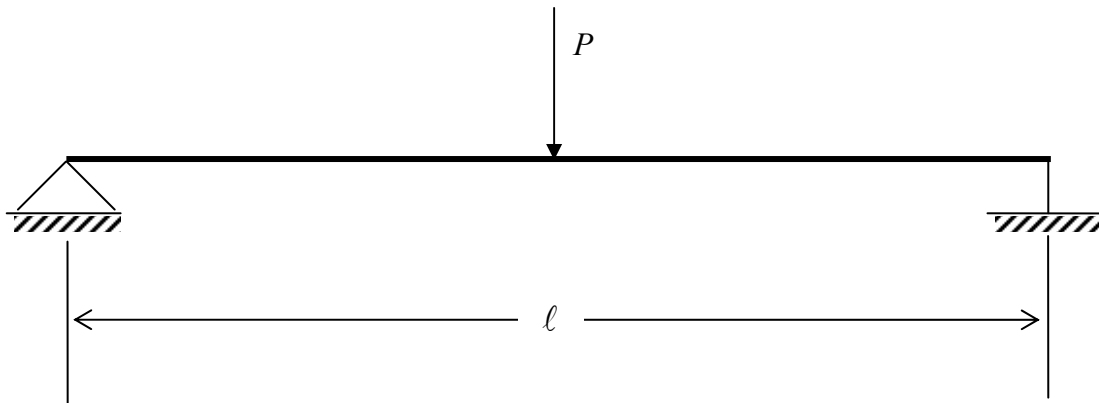


Рисунок 1. Рассматриваемая балка Бернулли

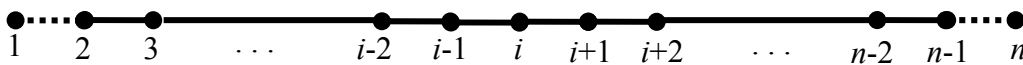


Рисунок 2. Аппроксимация конструкции

где $4\alpha^4 = \frac{\bar{k}}{EJ}$; $F = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{\ell}{2})$.

где $y_i = y(x_i)$,
 $f_i = \begin{cases} 0, & i \leq 2 \\ h_b^4 F(x_i), & 2 < i < n-1, \quad x_i = h_b(i-2) \\ 0, & i \geq n-1 \end{cases}$

2. ДИСКРЕТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Разбиваем отрезок $(0, \ell)$ на равные части с шагом h_b . Для вычисления разностных производных на концах отрезка добавляем по одной законтурной точке с каждой стороны (см. рис. 2). При этом, если n – общее количество точек, то

$$h_b = \frac{\ell}{n-3}.$$

Переходим от решения краевой задачи (1) к решению системы разностных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \underline{i=1}: & \quad y_1 - 2y_2 + y_3 = f_1 \\ \underline{i=2}: & \quad y_2 = f_2 \\ \underline{2 < i < n-1}: & \quad y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i \\ \underline{i=n-1}: & \quad y_{n-1} = f_{n-1} \\ \underline{i=n}: & \quad y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = f_n \end{aligned} \tag{2}$$

В векторно-матричном виде

$$A\bar{y} = \bar{f} \tag{3}$$

Если Q_h – матрица перехода к единичному базису от базиса Хаара, тогда

$$\bar{y} = Q_h \bar{v}, \tag{4}$$

где \bar{v} – разложение неизвестной дискретной функции в базисе Хаара [3, 6]. Вид матрицы Q_h представлен, в частности, в [1]. Система уравнений относительно \bar{v} [1, 2]:

$$A_v \bar{v} = \bar{f}_v, \tag{5}$$

где $A_v = Q_h^T A Q_h$; $\bar{f}_v = Q_h^T \bar{f}$. $\tag{6}$

Решение системы (5) используется для восстановления искомого решения системы (3) по формуле (4).

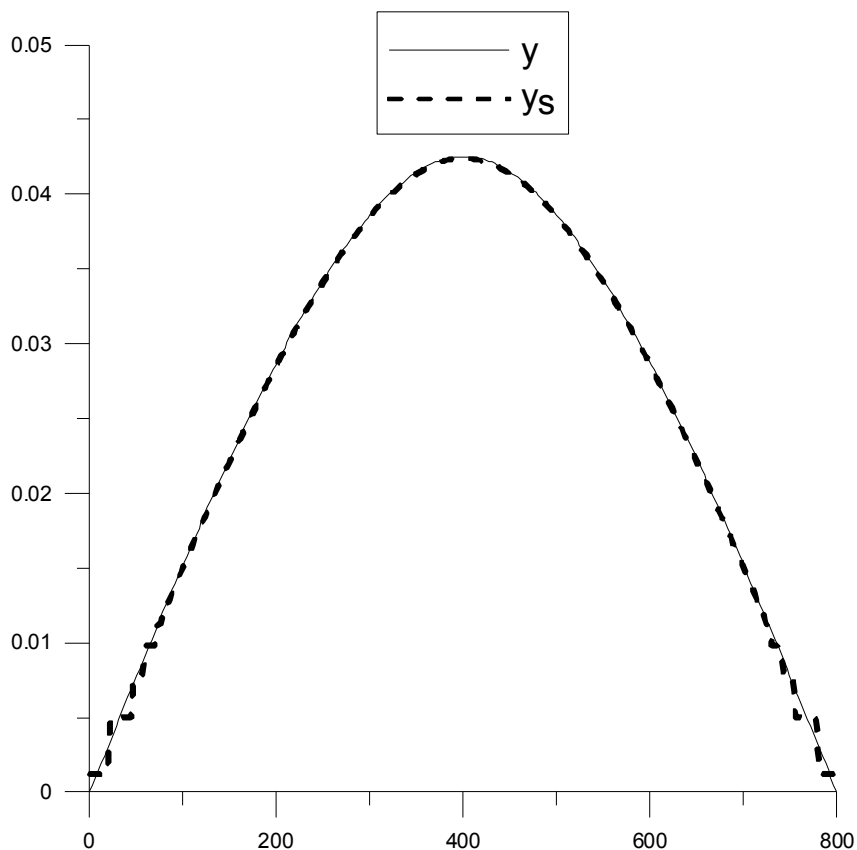


Рисунок 3. Сравнение прогибов

3. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОСРЕДНЕНИЯ

Алгоритм осреднения представлен, в частности, в [1, 4]. Заметим, что если основой для осреднения является величина $v_{i_p}^p$, где p – номер уровня, i_p – соответствующий этому уровню номер величины $v_{i_p}^p$, тогда осредняемые компоненты вектора \bar{v} и диапазоны их номеров можно представить в виде:

$$v_{i_r}^r = \beta^k v_{i_p}^p, \quad 2^k(i_p - 1) + 1 \leq i_r \leq 2^k i_p, \\ r = p-1, \dots, 0, \quad k = p-r \quad (6)$$

Параметр осреднения

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(см., например, работу [1]).

В тестовом примере осреднение проводилось по следующей схеме: $M=8$ – максимальный уровень: $n=2^M$; основа для осреднения:

$$\begin{aligned} & \underline{p=3}: \\ & i_3 = 1, \quad i_3 = n_3 = 2^M / 2^{(p+1)} = 2^4 = 16; \\ & \underline{p=2}: \\ & i_2 = 3, \\ & i_2 = n_2 - 2 = (2^M / 2^{(p+1)}) - 2 = 2^5 - 2 = 30; \\ & \underline{p=1}: \\ & i_1 = 7, \\ & i_1 = n_1 - 6 = (2^M / 2^{(p+1)}) - 6 = 2^6 - 6 = 58. \end{aligned}$$

Далее на графиках (рис. 3-6) приведены сопоставления решений, полученных при точном решении системы (5) и решении с осреднением, где y и y_s – прогибы, φ и φ_s –

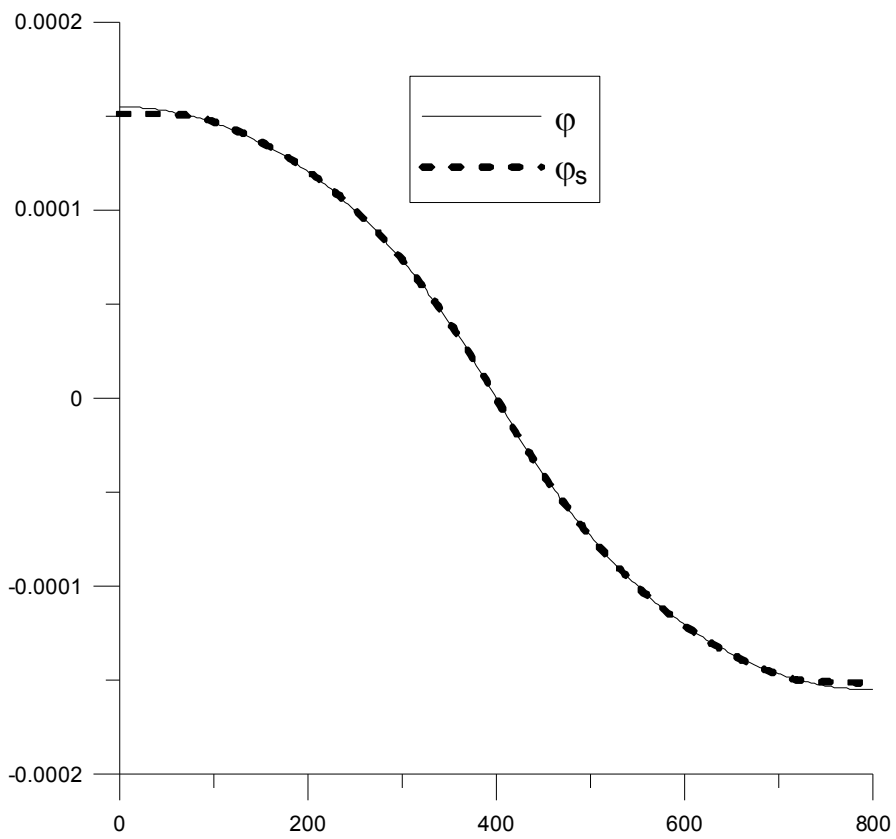


Рисунок 4. Сравнение углов поворота

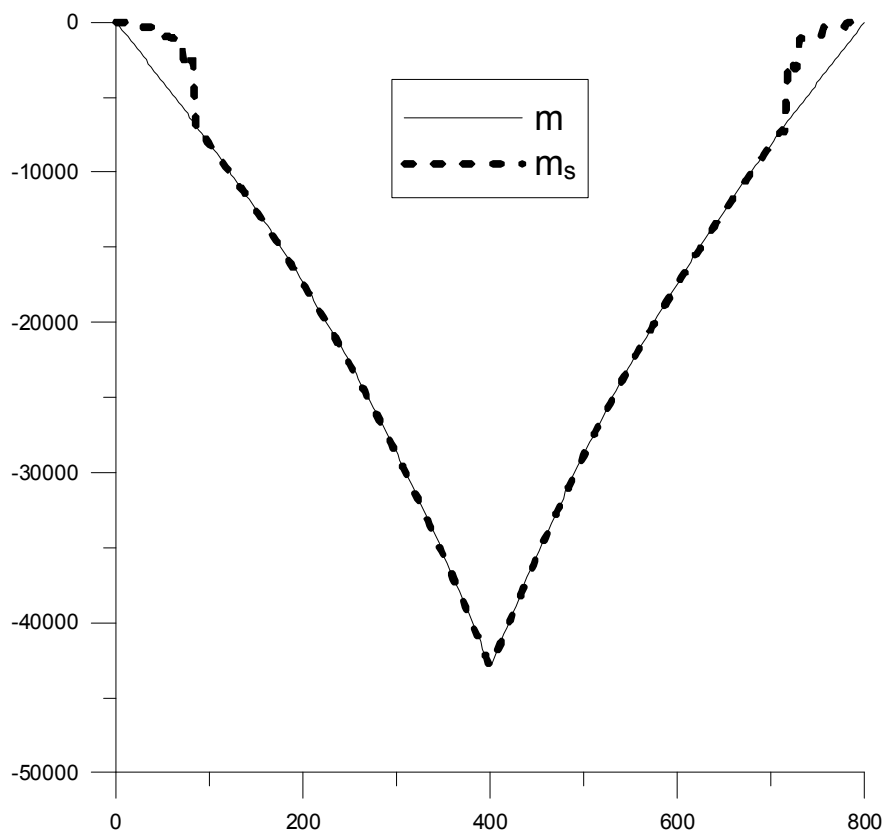


Рисунок 5. Сравнение изгибающих моментов

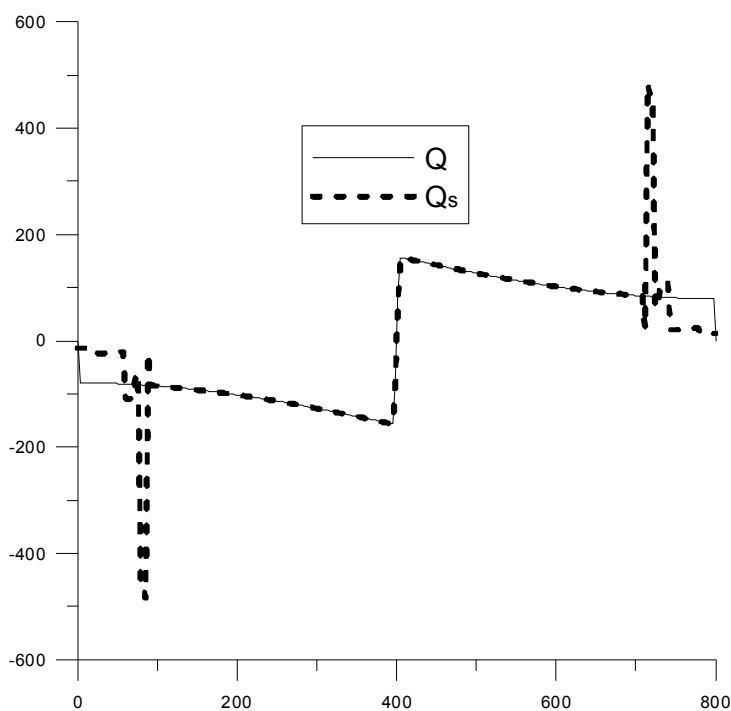


Рисунок 6. Сравнение поперечных сил

углы поворота, m и m_s – моменты, Q и Q_s – поперечные силы. При этом для точного решения системы (5) величины соответствующих дискретных производных вычислялись на исходной мелкой сетке, а для приближенного решения – на сетке, соответствующей осреднению.

Представленные графические сопоставления показывают практически полное совпадение локальных решений. Кроме того, для прогибов и углов поворота решения достаточно близки и в зонах осреднения.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ БЕЗ ОСРЕДНЕНИЯ

Для сравнения проводился расчет, когда компоненты вектора \bar{v} , которые перед этим осреднялись, здесь приравнивались нулю. Результаты решения сопоставлялись с точным решением системы (5) (см. рис. 7-10), при этом, вместо индекса «s», приближенное решение отмечено индексом «0».

Проведенные расчеты и сравнения показывают, что для получения локального решения следует применять осреднение.

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ С ОСРЕДНЕНИЕМ ДЛЯ ДЛИННОЙ БАЛКИ

Заметим (и это видно на рис. 3, 7), что точное решение в зонах осреднения имело бы-строизменяющийся характер. Для получения медленно изменяющегося на концах (в зонах осреднения) решения увеличим длину балки в 5 раз, т.е. $\ell=4000$ см. Ниже приводится графическое сопоставление полученного точного решения с осредненным (обозначения остаются прежними).

Таким образом, если осреднение проводить в зонах, где решение изменяется медленно, точный и осредненный результаты практически совпадают по всей длине балки.

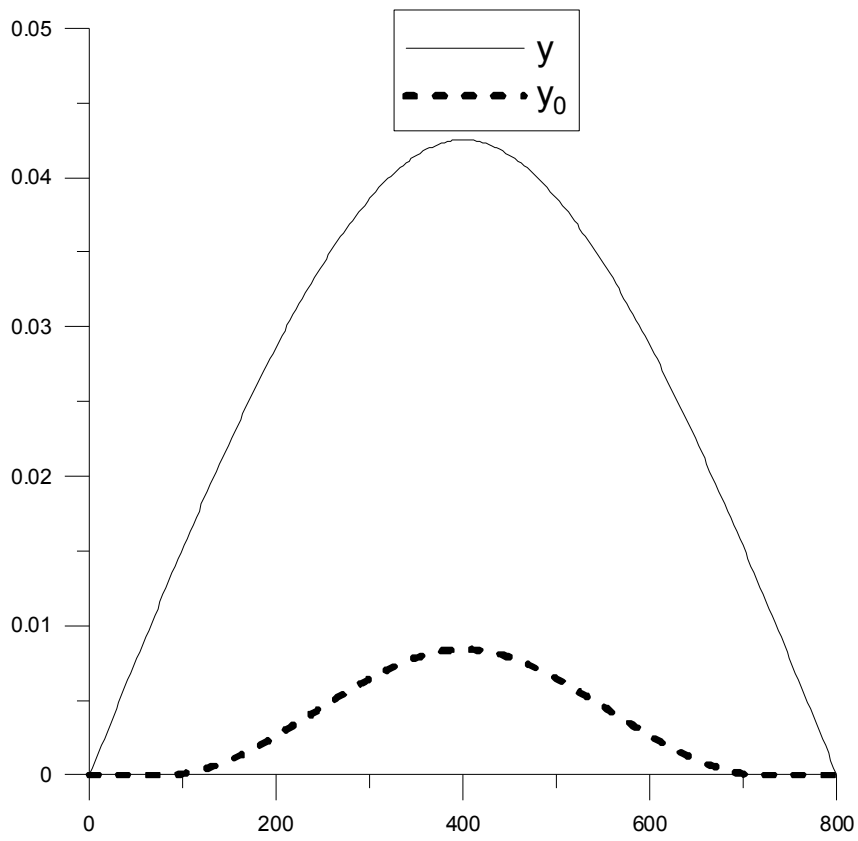


Рисунок 7. Сравнение прогибов

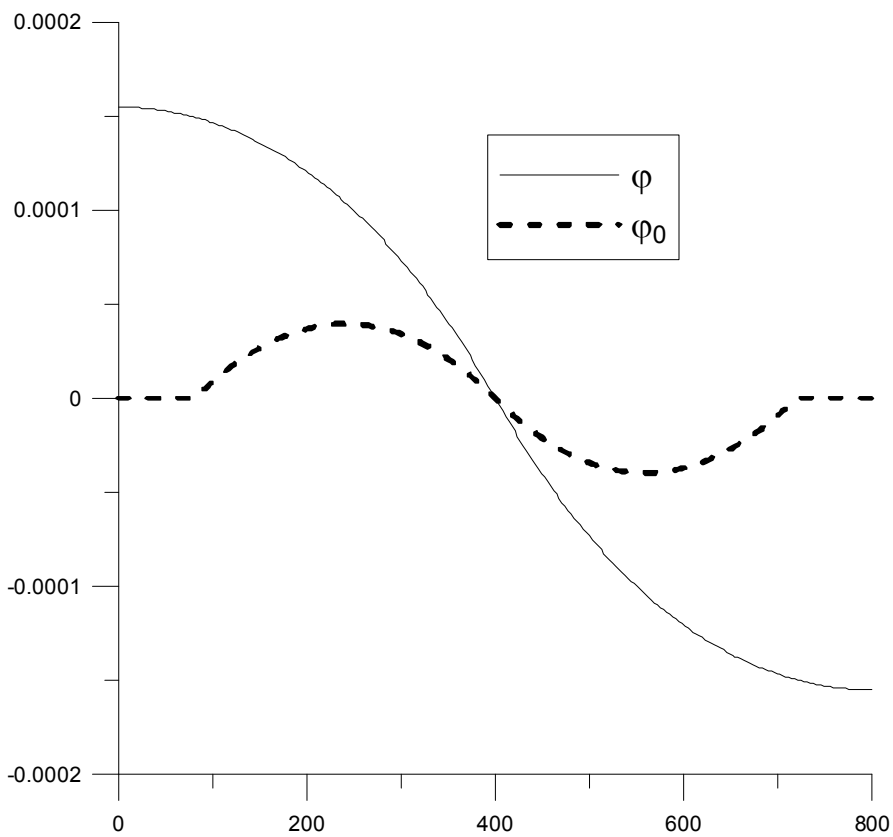


Рисунок 8. Сравнение углов поворота

Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли

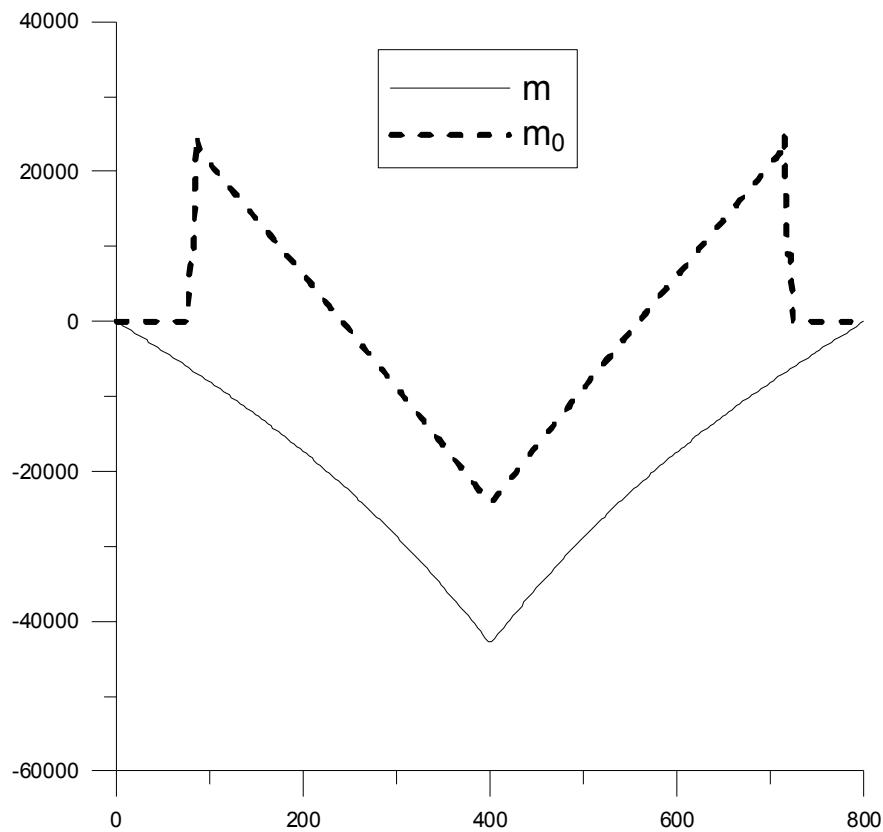


Рисунок 9. Сравнение изгибающих моментов

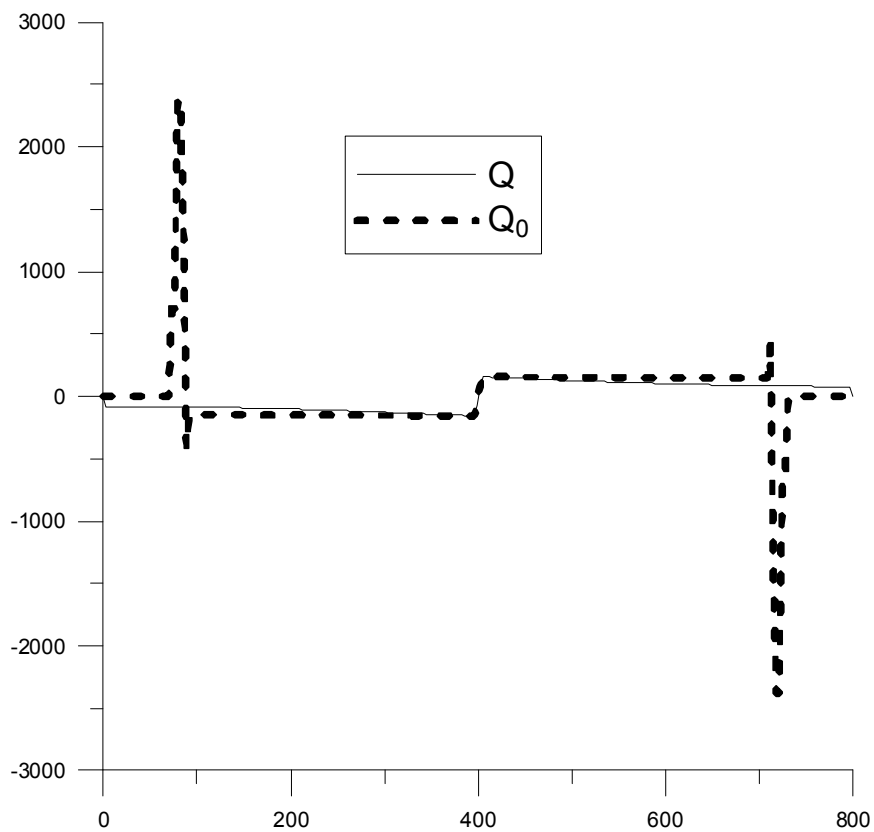


Рисунок 10. Сравнение поперечных сил

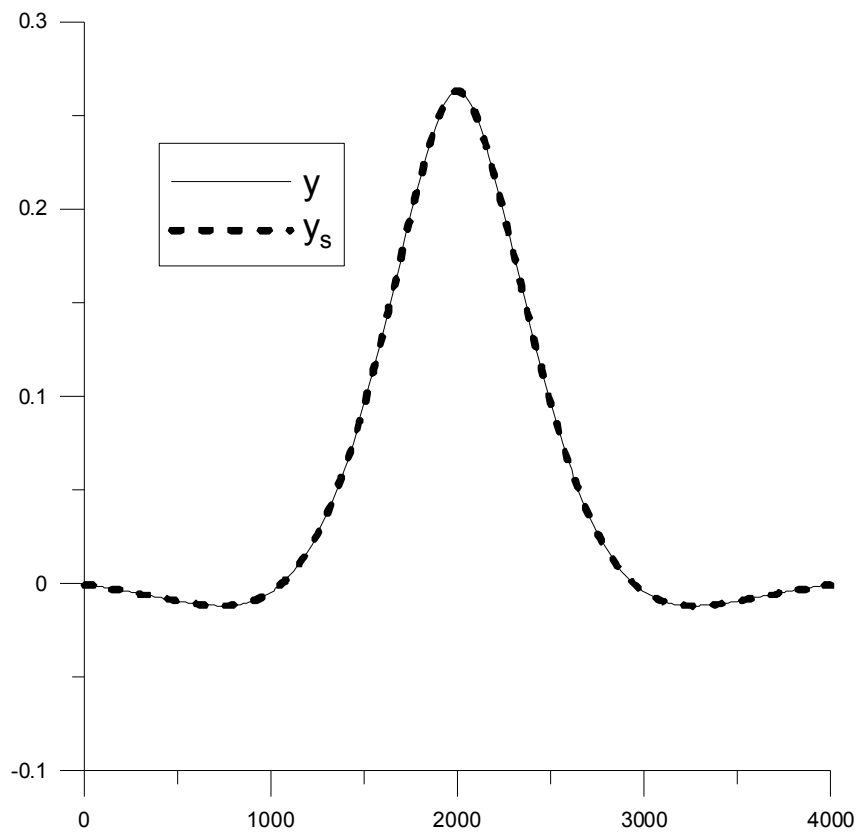


Рисунок 11. Сравнение прогибов

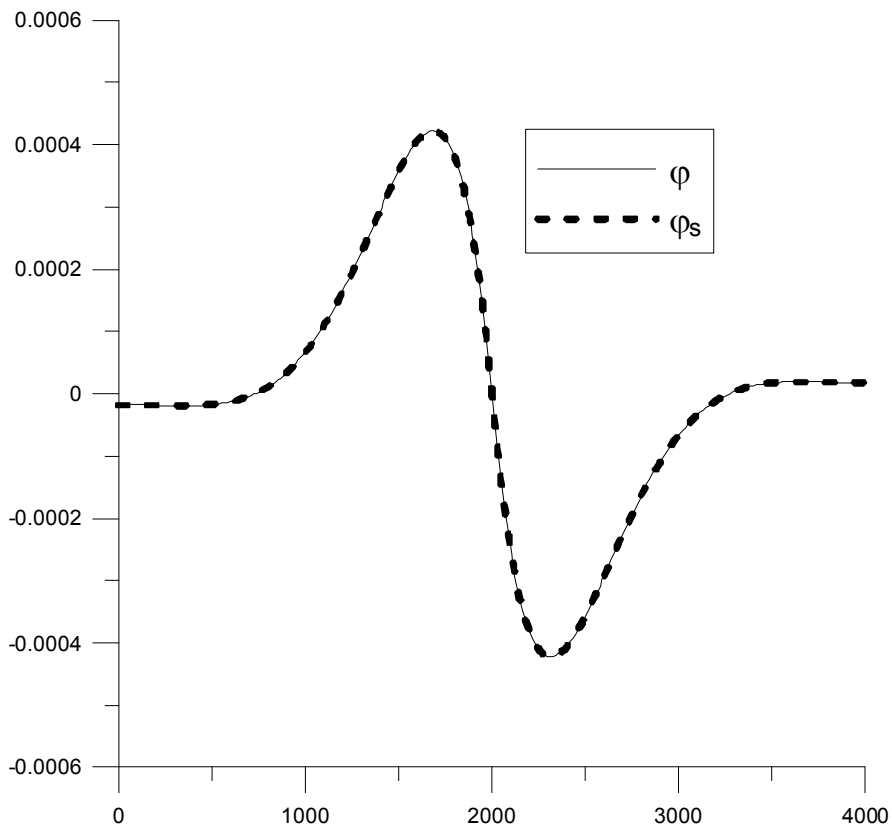


Рисунок 12. Сравнение углов поворота

Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли

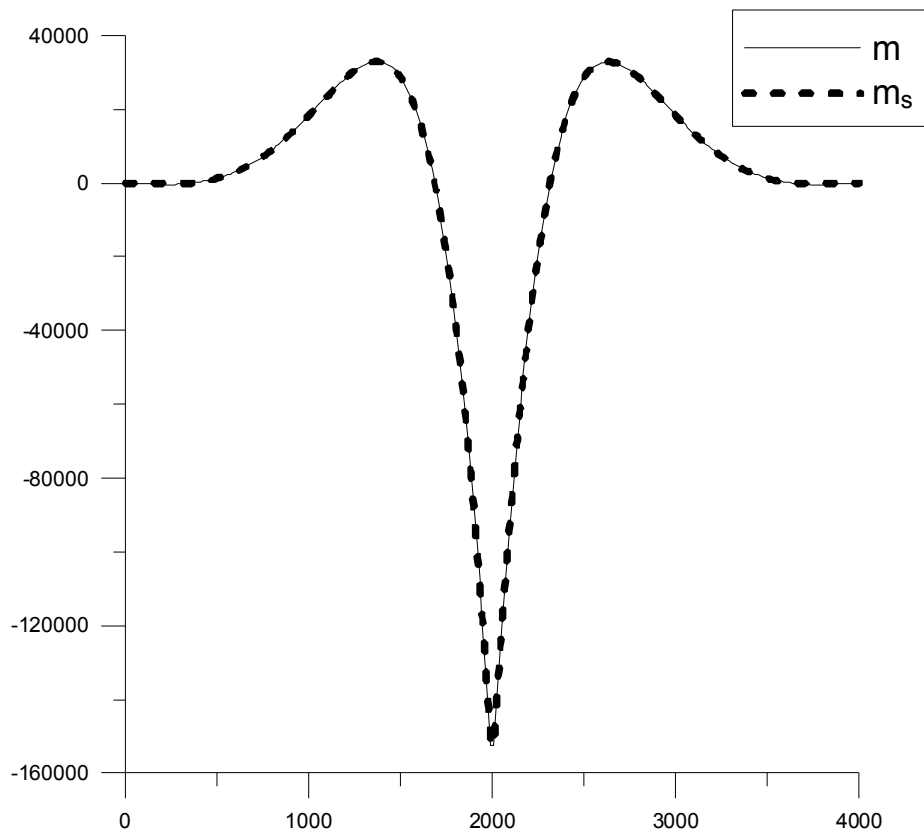


Рисунок 13. Сравнение изгибающих моментов

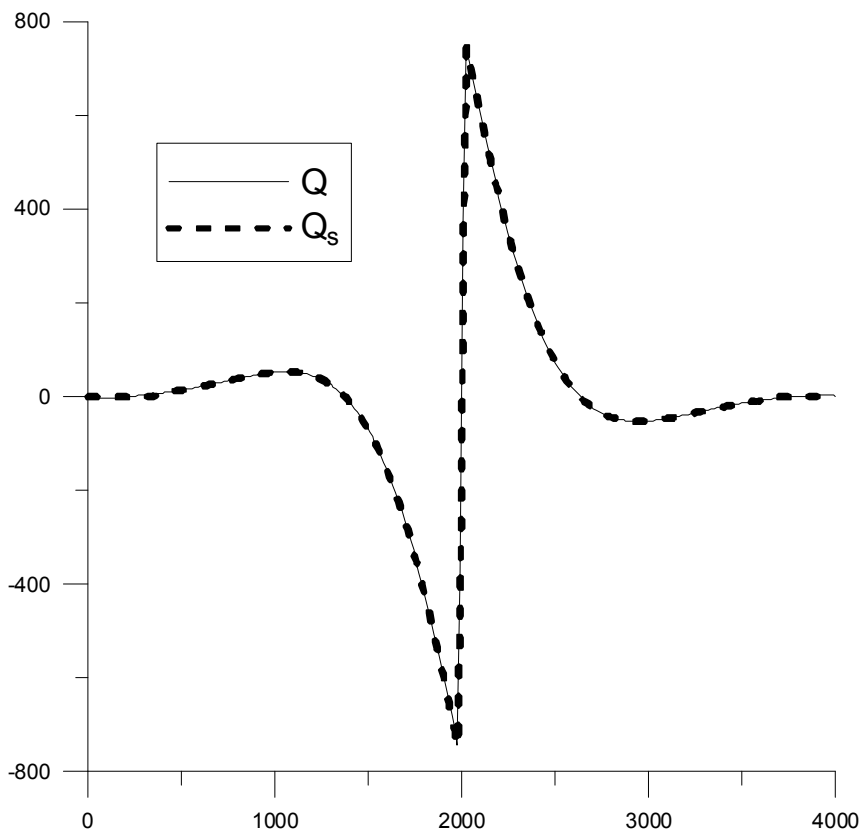


Рисунок 14. Сравнение поперечных сил

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2012 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 39-46.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформированного состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 7, Issue 3, 2012.
4. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
5. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
6. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

ПРИНЦИП ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СТАЛЕФИБРОБЕТОНА С ЗАДАННЫМИ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

К.В. Талантова¹, М.Д. Сони́на²

¹ Алтайский государственный технический университета им. И. И. Ползунова, г. Барнаул, РОССИЯ

² М-АСП «Идея» г. Барнаул, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Разработана концепция создания сталефибробетонных (сталефиброжелезобетонных) конструкций с заданными эксплуатационными характеристиками, базирующаяся на формировании свойств материала в соответствии с результатами статического расчета при их проектировании. При разработке сталефиброжелезобетонной оболочки покрытия реализация предлагаемой концепции обеспечила высокие технико-экономические показатели (ТЭП) оболочки, существенно превышающие ТЭП типовых аналогов

Ключевые слова: сталефибробетон, фибра стальная, зонное фибровое армирование, монодисперсное фибровое армирование, сталефиброжелезобетон, унифицированные элементы, составная оболочка покрытия, программные средства, напряжения сжатия и растяжения

THE PRINCIPLE OF STRUCTURE DESIGN ON THE BASE OF STEEL FIBER CONCRETE WITH PRESET SPECIFIED PERFORMACE PROPERTIES

Klara V. Talantova¹, Marina D. Sonina²

¹ Altai State Technical University after I.I. Polzunov, Barnaul, RUSSIA

² M-PAC «Idea» LTD, Barnaul, RUSSIA

ABSTRACT: The concept of creating steel fiber concrete (SFC) steel fiber reinforced constructions, structures with assigned field-performance data was worked out. It is based on the formation of properties of the material in accordance with the results of static analysis in their design. The implementation of the proposed concept in the designing the steel fiber concrete shell ensured high technical-economic indicators (TEI) of the shell, significantly exceeding the TEI of model analogues.

Key words: fiber, steel fiber, monodisperse fiber reinforcement, zone fiber reinforcement, reinforced steel fiber concrete, composite shell coating, uniform elements, program methods, pressure and stretching tensions

Результаты экспериментально-теоретических исследований [1,2] позволили сформулировать концепцию создания конструкций на основе сталефибробетона (СФБ) с заданными свойствами. При проектировании СФБ конструкций (СФБК) предложен нетрадиционный подход, базирующийся на возможностях фибрового армирования [3,4], современных программных средств и вычислительной техники. Такой подход обеспечивает

возможность регулирования структуры материала в соответствии с напряженно – деформированным состоянием (НДС) СФБК при их проектировании и производстве, и получать требуемый результат при минимальных затратах.

Особенности создания СФБК с заданными характеристиками ниже представлены на примере сборно-монолитной составной оболочки покрытия (крестового свода), при про-

ектировании ектировании которой были учтены высокие требования к выразительности архитектурных решений и эффективности применяемых строительных конструкций [3, 4, 5, 6].

Крестовый свод размерами на плане $18,4 \times 15,4$ м запроектирован из двух пересекающихся под прямым углом сталефиброжелезобетонных (СФЖБ) тонкостенных ребристых оболочек ОП-1, ОП-2 (рисунок 1), которые опираются (по периметру) на монолитные железобетонные бортовые элементы, имеют следующие геометрические характеристики:

ОП-1:

радиус – $R_1 = 15,61$ м,
длина $L_{об1} = 18,40$ м,
длина дуги $L_{дуг1} = 19,678$ м;

ОП-2:

$R_2 = 11,38$ м,
 $L_{об2} = 15,40$ м,
 $L_{дуг2} = 16,914$ м.

Статический расчет составной оболочки выполнен средствами ПК SCAD, реализующий метод конечных элементов.

Для описания расчетной схемы оболочки приняты конечные элементы (КЭ): № 42 – треугольный элемент оболочки, № 44 – четырехугольный элемент оболочки и № 5 – пространственный стержень. Количество конечных элементов: № 42 – 116; № 44 – 760; № 5 – 44. Жесткостные характеристики конечных элементов приняты в соответствии с выбранными материалами, а именно предварительно принятым классом СФБ по прочности на сжатие

$B_f 30$ и соответствующим модулем упругости $27,3 \times 10^3$ МПа. По результатам статического расчёта классы и расчётные сопротивления СФБ были уточнены в соответствии с максимальными величинами напряжений растяжения и сжатия от действующих нагрузок (таблица 1).

Расчетная модель оболочки повторяет реальный облик конструкции покрытия (рисунок 2). Форма сечения элементов – 2 Т с полкой в растянутой зоне, высота продольных рёбер 0,2 м, средняя ширина – 0,045 м, толщина полки 0,02 м (рисунок 3).

Элементы соединены в единую пространственную систему покрытия, воспринимающую действующие нагрузки.

Статический расчет СФЖБ оболочки выполнен на действие восьми вариантов загрузки постоянных и временных нагрузок. В том числе 5 схем загрузки снеговой нагрузкой и 3 варианта загрузки ветровой нагрузкой.

Результаты статического расчета (рисунок 4) позволили в первом варианте разделить оболочку на 28 унифицированных сборных элементов и выделить один монолитный элемент, а затем, после дополнительного анализа картин полей напряжений, было выполнено укрупнение сборных элементов и сокращено их количество до 18 и выделен монолитный элемент ЭОМ – 19. Сборные элементы оболочки (от ЭОС – 1 до ЭОС – 18) имеют ширину 1,0 м и 1,2 м, а также различную длину и геометрию, обуславливаемую формой покрытия (рисунок 5, таблица 2).

При проектировании оболочки принято фибровое монодисперсное и зонное монодисперсное армирование элементов стальной фиброй из малоуглеродистой проволоки общего назначения по ГОСТ 3282.

При этом были приняты следующие параметры фибрового армирования: диаметры фибры $d_{f1} = 0,5$ мм, $d_{f2} = 0,8$ мм, $d_{f3} = 1,2$ мм; $l_f/d_{f1} = 100$ (125). Её нормативное $R_{sfm} = 600$ МПа и расчетное сопротивление учитывалась регулярная стержневая арматура класса А-III, А-IVС и в рёбрах жесткости, в зоне вута элементов, – продольная проволочная арматура класса – Вр - I. Конструктивный расчет унифицированных элементов, был выполнен на действие максимальных напряжений от невыгодного сочетания нагрузок, а также ребристая оболочка покрытия проверена на устойчивость.

Таблица 1. Характеристики сталефибробетона, используемого для элементов составной оболочки покрытия (крестового свода)

Классы по прочности на сжатие / растяжение, B_f/B_{ft} , МПа	Расчетные сопротивления сжатию R_{fb} , МПа	Расчетные сопротивления растяжению R_{fbt} , МПа	Начальный модуль упругости, E_{fb} , МПа
22,5 / 2,6	14,91	1,95	$28,8 \times 10^3$
27,5 / 3,0	18,07	2,20	$32,4 \times 10^3$
35,0 / 3,4	22,02	2,44	$37,2 \times 10^3$
40,0 / 3,8	25,96	2,68	$39,0 \times 10^3$

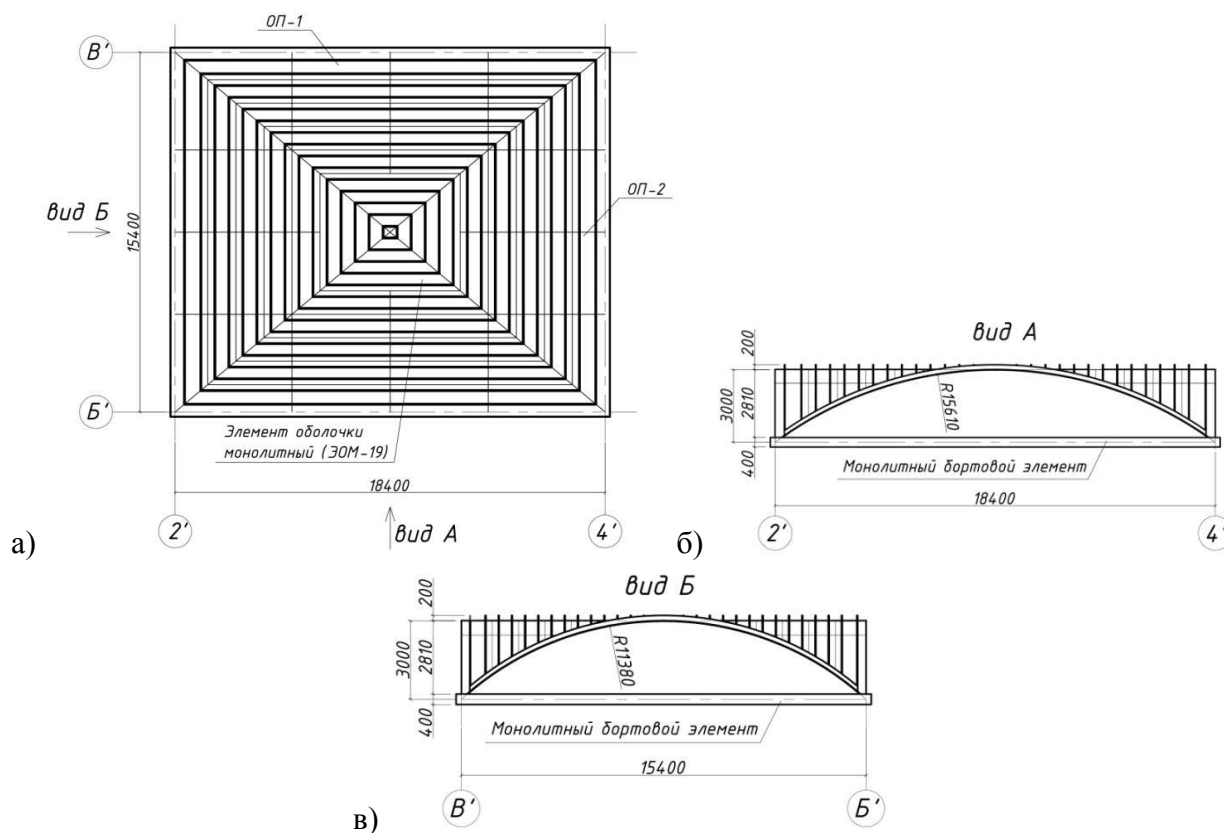


Рисунок 1. Схема составной оболочки покрытия (крестового свода):

а) план; б) вид А – оболочка ОП -1; в) вид Б – оболочка ОП -2

Ниже представлен принцип конструирования некоторых из них.

Сборный элемент – ЭОС-6 испытывает значительные напряжения: на растяжение: $\sigma_y = 5,32$ МПа, $\sigma_x = 1,78$ МПа и на сжатие $\sigma_y = -14,895$ МПа, $\sigma_x = -11,096$ МПа. Для обеспечения полученных в результате статического расчета напряжений объёмный процент фибрового армирования принят $\mu_{fv} = 1,5\%$, диаметр фибры $d_f = 0,5$ мм; её

длина $l_f = 50$ мм, класс СФБ $B_f 35$, что позволяет обеспечить сопротивление на растяжение полки $R_{fbtf} = 1,91$ МПа; ребра - $R_{fbtw} = 2,06$ МПа.

Тогда напряжение растяжения, передаваемое на стержневую арматуру, получается равным $3,40$ МПа, для восприятия которого потребуется стержневая арматура $\varnothing 14A-IVC$, $A_s = 1,539$ см², $R_s = 510$ МПа.

Принцип проектирования конструкций на основе сталефибробетона с заданными эксплуатационными характеристиками

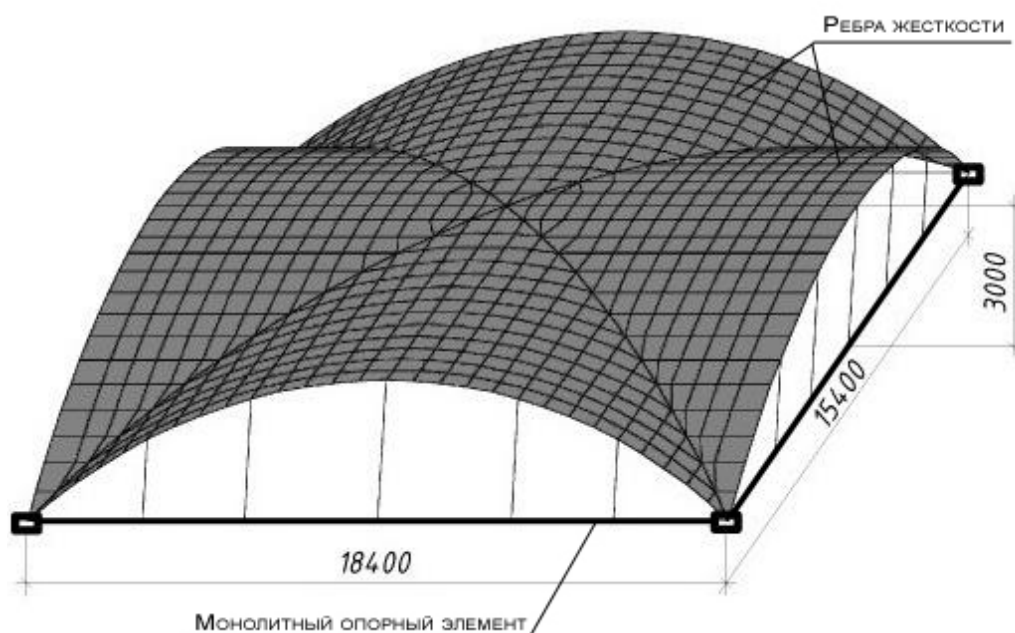


Рисунок 2 – Расчетная модель оболочки покрытия, полученная средствами BK SCAD. Визуализация

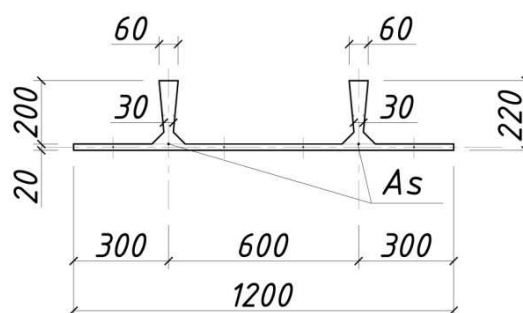


Рисунок 3 – Схема поперечного сечения элементов составной оболочки покрытия

Аналогично сборному элементу ЭОС-6, представленному выше, выполняется конструирование сборных элементов оболочки, показанных на рисунке 5.

В центральной части крестового свода от действующих нагрузок возникают весьма значительные напряжения, равные на растяжение по оси Y от $\sigma_y = 2,99$ МПа до $\sigma_y = 6,68$ МПа; по оси X от $\sigma_x = 6,51$ МПа до $\sigma_x = 9,83$ МПа; напряжения сжатия $\sigma_y = -7,28$ МПа; $\sigma_x = -12,73$ МПа.

Монолитный элемент ЭОМ-19 запроектирован для восприятия указанных напряжений в комбинированном варианте. А именно: фиброармированное сечение с $\mu_{fv} = 1,5\%$, диаметром фибры $d_f = 0,5$ мм; её длиной

$l_f = 50$ мм, которые усилены стержневой $\varnothing 6A-III$ и проволочной $\varnothing 5Bp-I$ арматурой в виде сеток с переменным шагом продольных и поперечных стержней. При этом класс СФБ по прочности принят $B_f 40$ с сопротивлением на растяжение полки $R_{fbtf} = 2,67$ МПа; ребра - $R_{fbtw} = 3,06$ МПа, что обеспечивает восприятие указанных ранее напряжений.

В результате расчета и конструирования элемента ЭОМ – 19 было обеспечено превышение напряжений СФЖБ сечений против напряжений от действующих нагрузок на растяжение вдоль и поперек элемента (таблица 3). Условия прочности на сжатие также соблюдаются.

Принцип проектирования конструкций на основе сталефибробетона с заданными эксплуатационными характеристиками

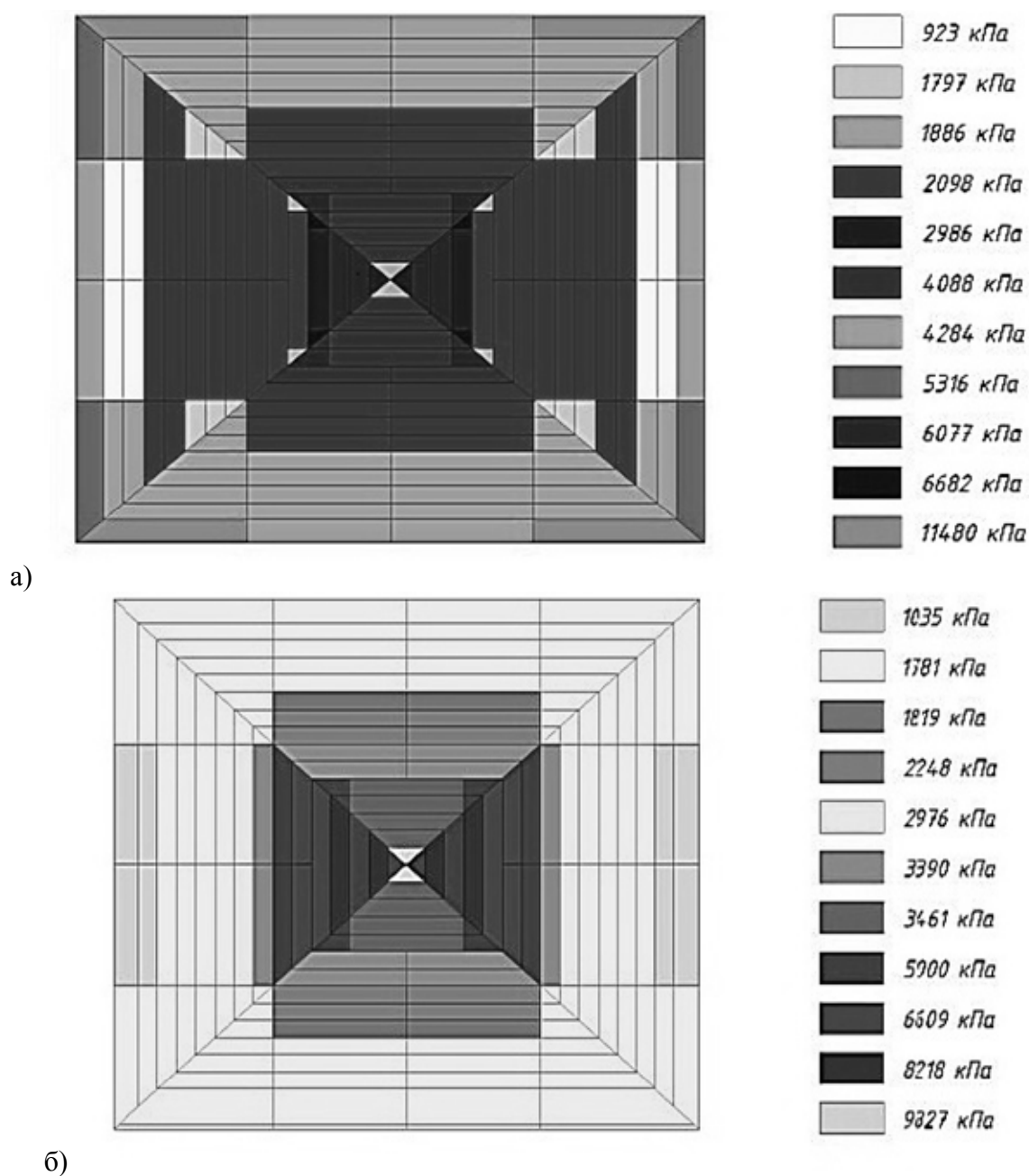


Рисунок 4. Картины полей напряжений растяжения от невыгодного сочетания нагрузок оболочки покрытия: а) по оси «Х», б) по оси «У»

Конструктивный расчёт элементов оболочки был выполнен по первой и второй группам предельных состояний. Расчёты показали, что условия прочности, трещиностойкости, деформативности и общей устойчивости оболочки выполняются. Хотя к конструкции покрытия предъявляются требования 3-й категории трещиностойкости, по расчётам трещины не образуются.

Таким образом, в результате расчёта и конструирования СФЖБ покрытия в виде тонкостенной составной оболочки (крестового свода) разработан вариант, расход бетона для устройства которого, а значит и его вес, значительно ниже показателей типовых конструкций.

Принцип проектирования конструкций на основе сталефибробетона с заданными эксплуатационными характеристиками

Таблица 2 - Унифицированные сборные сталефиброжелезобетонные элементы. Фрагмент

Марка элемента	Схема элемента	Характеристика фибрового армирования	Характеристика регулярного армирования
ЭОС – 1		$\mu_{fv}=0,5\%$ $d_f=0,8\text{мм}$ $l_f=100\text{ мм}$	Вдоль элемента $\varnothing 5 \text{ Вр-I}$
ЭОС – 4		$\mu_{fv}=1,5\%$ $d_f=0,5\text{мм}$ $l_f=50\text{ мм}$	Вдоль элемента $\varnothing 6 \text{ А-III}$ Сетка: рабочая поперечная $\varnothing 5 \text{ Вр-I}$, $S = 200\text{мм}$. продольная конструктивная $\varnothing 3 \text{ Вр-I}$, $S = 350\text{ мм}$
ЭОС – 6		$\mu_{fv}=1,5\%$ $d_f=0,5\text{мм}$ $l_f=50\text{ мм}$	Вдоль элемента $\varnothing 14 \text{ А-IVC}$

Таблица 3. Результаты проектирования элементов сталефиброжелезобетонной оболочки покрытия. Фрагмент

Марка элемента	Направление армирования	Нормальные напряжения от невыгодного сочетания нагрузок		Внутренние нормальные напряжения сечений	
		растяжения, МПа	сжатия, МПа	растяжения, МПа	сжатия, МПа
ЭОС – 4	Вдоль элемента	$\sigma_y = 2,098,$	$\sigma_y = -3,301,$	$\sigma_{sf} + \sigma_s = 2,11$	$\sigma_{sf} = 17,38$
	Поперек элемента	$\sigma_x = 2,976$	$\sigma_x = -3,077$	$\sigma_{sf} + \sigma_s = 3,35$	$\sigma_{sf} = 17,38$
ЭОС – 6	Вдоль элемента	$\sigma_y = 5,32$	$\sigma_y = -14,895$	$\sigma_{sf} + \sigma_s = 5,84$	$\sigma_{sf} = 22,02$
	Поперек элемента	$\sigma_x = 1,78$	$\sigma_x = -11,096$	$\sigma_{sf} = 1,89$	$\sigma_{sf} = 22,02$
ЭОМ – 19	Вдоль элемента	$\sigma_y = 6,08$ $\sigma_y = 6,68$	$\sigma_y = -7,28$ МПа	$\sigma_{sf} + \sum \sigma_s = 6,51$ $\sigma_{sf} + \sum \sigma_s = 7,24$	$\sigma_{sf} = 25,96$
	Поперек элемента	$\sigma_x = 6,61$ $\sigma_x = 9,83$	$\sigma_x = -12,73$ МПа	$\sigma_{sf} + \sum \sigma_s = 11,48$	$\sigma_{sf} = 25,96$

Таблица 4. Сравнение технико-экономических показателей типового железобетонного с разрабатываемым сталефиброжелезобетонным крестовым сводом

Наименование критерия	Сборное железобетонное покрытие	Сборно-монолитное сталефиброжелезобетонное покрытие
Бетон/сталефибробетон, м ³ /%	37,8/ 100	19,42/ 51
Сталь, кг/%, в том числе	4 058/100	1 220/30
Стальная фибра, кг/%	–	681/100
Стержневая арматура, кг/%	4 058/100	596/15
Вес, кг/%	97 790/100	44 666/46
Стоимость, руб./%	983 148/100	617 577/63

Сравнение технико - экономических показателей, разработанного варианта покрытия, с типовым вариантом (железобетонные стропильные фермы и плиты покрытия) показало, что разработанное решение может составить конкуренцию типовым решениям (таблица 4). Низкая материалоемкость конструкции покрытия на основе СФБ позволяет, помимо прочего, значительно снизить транспортные расходы, затраты на монтаж и, как следствие, стоимость объекта в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Талантова К.В., Тушев А.Н. Разработка методов управления свойствами строительного композита – сталефибробетона с помощью компьютерного конструирования. // Ползуновский альманах, 2001, №3, с. 109-112.
2. Талантова К.В. Создание элементов конструкций с заданными свойствами на основе сталефибробетона. // Известия ву-

- зов. Строительство. Новосибирск. 2008, №10, с. 4-9.
3. **Ааруп Д.** CRC – Сферы применения высокоэффективного фибробетона. // Worldwide. Trade journals for the concrete industry. [www.cpi-worldwide.com] CPI – Международное бетонное производство, 2007, №4, с. 108-115.
 4. **Рабинович Ф.Н.** Композиты на основе дисперсно армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 560 с.
 5. **Дыховичный Ю.А., Жуковский Э.З.** Пространственные составные конструкции. – М.: Высш. шк., 1989. – 288 с.
 6. СП 52-117-2008. Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. – М., ФГУП НИЦ «Строительство», 2008. – 150 с.

Талантова Клара Васильевна, кандидат технических наук, профессор, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, кафедра строительных конструкций, 656099, Россия, г. Барнаул, пр. Ленина, 46, e-mail: talant_bar@mail.ru.

Сонина Марина Дмитриевна, инженер-архитектор, ООО М-АСП «Идея», 656023, Россия, г. Барнаул, пр. Космонавтов, дом 59, e-mail: Marinas_7@mail.ru.

Talantova Klara Vasilievna, PhD, Professor, Altai State Technical University after I.I. Polzunov, Building constructions department, Barnaul, 46, Lenina St., Barnaul, 656099, RUSSIA. E-mail: talant_bar@mail.ru.

Sonina Marina Dmitrievna, CEng, M-PAC "Idea" LTD, 656023, Russia, Barnaul, 59, Astronauts St. RUSSIA. E-mail: Marinas_7@mail.ru.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОСНОВАНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОЛОСОВОЙ НАГРУЗКИ С УЧЕТОМ НЕПОЛНОГО ВОДОНАСЫЩЕНИЯ ГРУНТА

З.Г. Тер-Мартirosян, В.В. Сидоров, Х.Х. Нгуен

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В статье приводятся постановка и решение задачи для определения расчетного сопротивления грунтов оснований фундаментов в зависимости от степени их водонасыщения, состоящих из глинистых грунтов с низким коэффициентом фильтрации. Показывается, что в этом случае образование зон предельного равновесия под краями фундамента происходит при значительно меньшей интенсивности нагрузки, чем в случае неводонасыщенного грунта. Приводится сравнительная оценка расчетных сопротивлений для водонасыщенных и неводонасыщенных оснований, определенные в результате решения задачи аналитическим и численным методами. Отмечается, что с ростом степени водонасыщения увеличивается осадка основания при прочих равных условиях (нагрузка, ширина фундамента), а предельная нагрузка, наоборот, уменьшается, причем существенно. Для определения порового давления в водонасыщенном основании от действия нагрузки p по полосе шириной $2a=b$ (плоская задача) используются модули объемных деформаций скелета K_s , поровой газосодержащей воды K_{wg} и пузырьков газа K_g в грунте. Для определения модуля объемной деформации поровой газосодержащей воды используется закон Бойля–Мариотта, а для определения степени водонасыщения – закон растворимости газов в жидкости Генри. На основании анализа результатов аналитического и численного решения поставленной задачи рекомендуется внести дополнение в нормативных документах по определению расчетного сопротивления водонасыщенных оснований фундаментов, сложенных глинистыми грунтами с низким коэффициентом фильтрации ($k_f < 10^{-5}$ м/сут).

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, расчетное сопротивление, грунты оснований фундаментов, степень водонасыщения, аналитические методы, численные методы

STRESS-STRAIN STATE OF INCOMPLETE SATURATED SOIL BASEMENT UNDER THE PLANE LOAD

Zaven G. Ter-Martirosyan, Vitaliy V. Sidorov, Huy H. Nguen

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article presents the formulation and solution of the problem to determine the design resistance of soil bases of foundations, depending on their degree of water saturation, consisting of clay soils with a low permeability. It is shown that in this case, the formation of zones of limiting equilibrium under the edges of the basement occurs at much lower load intensity than in not saturated soils. The comparative evaluation of the calculated resistance for the water-saturated and not saturated grounds defined by the solution of the analytical and numerical methods. It is noted that with increasing degree of water saturation increases basement settlement under otherwise equal conditions (load, the width of the foundation), and the ultimate load, on the other hand, significantly decreases.

Key words: stress-strain state, design resistance, soil bases of foundations, water saturation, analytical methods, numerical methods

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в основу определения расчет-

ного сопротивления грунтов оснований фундаментов лежит решение задачи Пузыревского (рис.1), которое позволяет определить

начальное критическое p^* и расчетное R_p значения распределенной нагрузки по полосе шириной $b=2a$ на поверхности грунтового полупространства. При этом не учитывается влияние избыточного порового давления, которое неизбежно возникает в глинистых водонасыщенных грунтах на начальном этапе нагружения и не рассеивается длительное время из-за низкого коэффициента фильтрации.

В настоящей работе на основе рассмотрения напряженно-деформированного состояния (НДС) грунтового полупространства под воздействием собственного веса и распределенной нагрузки p по полосе шириной $b=2a$ приводится аналитическое решение задачи Пузыревского с учетом избыточного порового давления в зависимости от степени водонасыщения грунтов основания.

Для достоверного определения порового давления необходимо в первую очередь следует определить коэффициент сжимаемости газосодержащей поровой воды K_{wg} и газовых пузырьков K_g , т.е. их жесткости и сравнить их с коэффициентом сжимаемости скелета K_s . От соотношения K_{wg}/K_s и K_g/K_s существенно зависит избыточное поровое давление u_w , так как оно определяется в зависимости от среднего напряжения $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ и коэффициента порового давления $\beta_0 = K_w/(K_w + n \cdot K_s)$, т.е. $u_w = \sigma \cdot \beta_0$.

2. О СЖИМАЕМОСТИ ПОРОВОЙ ВОДЫ

Известно, что в глинистых грунтах всегда содержится воздух в растворенном виде и в виде мельчайших пузырьков в поровой воде. Наличие воздуха в поровой воде обуславливает ее сжимаемость, которая отражается на избыточном поровом давлении, возникающем под воздействием внешней нагрузки (рис.1). С ростом степени водонасыщения растет и модуль объемной сжимаемости га-

зосодержащей поровой воды, и, следовательно, растет и поровое давление.

Ниже приводится решение задачи по определению модуля объемной сжимаемости газосодержащей поровой воды K_w в зависимости от степени водонасыщения S_r и от модуля объемной деформации воды, содержащей растворенный воздух K_{wg} и модуля объемной сжимаемости пузырьков воздуха K_g .

Известно что поровое пространство объемом V заполнено водой с растворенным в ней воздухом V_{wg} и частично нерастворенными пузырьками газа V_g , причем

$$V = V_{wg} + V_g \quad (2.1)$$

Изменение объема пузырьков газа V_g при изменении давления в поровой воде от p_1 до p_2 , можно определить на основе закона Бойля-Мариотта, согласно которому в изотермическом режиме справедливо соотношение $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = const$. Тогда получаем

$$\Delta V_g = V_{g1}(1 - p_1/p_2) \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) после преобразования можно представить в виде:

$$\frac{1}{\Delta p} \cdot \frac{\Delta V_g}{V_g} = \frac{1}{p_1 + \Delta p} \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что

$$K_g = p_1 + \Delta p, \quad (2.4)$$

где
$$p_1 = p_a + \gamma_w \cdot z \quad (2.5)$$

p_a - атмосферное давление, z - глубина от уровня воды, γ_w - удельный вес воды

Изменение объема поровой воды в целом ΔV_w можем определить как сумму изменений V_{wg} и V_g , т.е. получаем:

$$\Delta V_w = \Delta V_{wg} + \Delta V_g \quad (2.6)$$

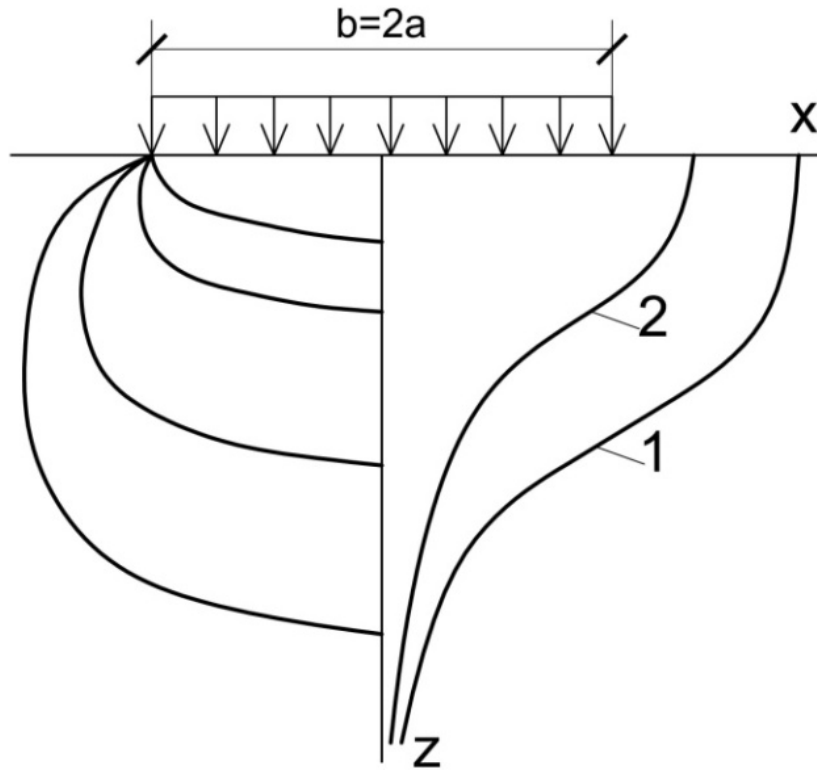


Рисунок 1. Схематическое представление эпюр среднего значения суммы главных напряжений $\sigma = \sigma_v / 3$ (1) и избыточного порового давления (2) справа и изолинии избыточного порового давления (слева) в водонасыщенном основании при действии полосовой нагрузки p на ширину $b=2a$ в момент ее приложения (плоская задача)

где V_{wg} – объем воды, содержащей растворенный воздух.

Разделяя обе части этого уравнения на V_w и учитывая, что $V_g = V_w - V_{wg}$ с учетом (2.2) получаем выражение для относительной объемной сжимаемости поровой воды в целом в виде:

$$\frac{\Delta V_w}{V_w} = \frac{\Delta V_{wg}}{V_w} \cdot \frac{V_{wg}}{V_{wg}} + \frac{V_w - V_{wg}}{V_w} (1 - p_1 / p_2) \quad (2.7)$$

или в виде

$$\varepsilon_w = \varepsilon_{wg} \cdot S_r' + (1 - S_r')(1 - p_1 / p_2) \quad (2.8)$$

где $S_r = V_{wg} / V_w$ (2.9)

– степень водонасыщения грунта.

Из (2.6) с учетом (2.2), следует, что

$$\frac{1}{K_w} = \frac{S_r}{K_{wg}} + \frac{(1 - S_r)}{p_1 + \Delta p}, \quad (2.10)$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$ – приращение давления в поровой воде;

После некоторых преобразований получаем, что модуль объемной сжимаемости газосодержащей поровой воды равен

$$K_w = \frac{K_{wg} \cdot K_g}{K_{wg} \cdot (1 - S_r) + K_g \cdot S_r}, \quad (2.11)$$

где $K_{wg} \cong K_w^0$ – модуль объемной деформации воды с растворенным в ней воздухом

Напряженно-деформированное состояние основания под воздействием полосовой нагрузки с учетом неполного водонасыщения грунта

$(2 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2)$, $K_g = p_1 + \Delta p$ - модуль объемной сжимаемости пузырьков воздуха.

Отсюда следует, что при $S_r \rightarrow 1$ $K_w \rightarrow K_{wg}$, т.е. при полном водонасыщении модуль объемной сжимаемости поровой воды равен модулю объемной сжимаемости воды, содержащей растворенный воздух. Отметим, что изменение степени водонасыщения при изменении давления в поровой воде или в пузырьках воздуха, если пренебречь поверхностным натяжением воды q в пузырьках ($p_g = u_w + 2q/r$), где r - радиус пузырьков в интервале от p_g' до p_g'' определяется известной [1] зависимостью вида:

$$S_r'' = \frac{p_g'' / p_g'}{(1-\alpha)(p_g'' / p_g' - 1) + (1-S_r') / S_r'} \quad (2.12)$$

где α - коэффициент растворимости воздуха в воде по Генри, причем при $t=20^\circ\text{C}$, $\alpha=0.0205$.

Так, например, если $S_r' = 0.9$ при $p_g' = 0.1$ МПа, то при $p_g'' = 0.2$ МПа, $S_r'' = 0.957$, а при $p_g'' = 0.6$ МПа, $S_r'' = 0.997$.

3. О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОРОВОГО ДАВЛЕНИЯ

При всестороннем обжатии грунта интенсивностью среднего тотального напряжения $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ в условиях отсутствия дренажа в нем возникают избыточное давление в поровой воде u_w и напряжение в скелете σ_s , причем

$$\sigma = \sigma_s + u_w \quad (3.1)$$

Соотношение σ_s и u_w зависит от соотношения жесткости скелета K_s и поровой воды K_w , а также от пористости грунта, т.к. объемные

деформации скелета ε_s и поровой воды ε_w связаны с известной зависимостью вида:

$$\varepsilon_s = n \cdot \varepsilon_w \quad (3.2)$$

Если обозначить через K_s , K_w и K - соответственно, модули объемной деформации скелета, поровой воды и грунта в целом и, полагая, что

$$\varepsilon = \sigma / K; \quad \varepsilon_s = \sigma_s / K_s; \quad \varepsilon_w = u_w / K_w, \quad (3.3)$$

где K_w определяется по (2.9) с учетом (3.1) и (3.2) получаем:

$$u_w = \sigma \cdot \beta_0, \quad (3.4)$$

$$\text{где} \quad \beta_0 = \frac{K_w}{K_w + n \cdot K_s} \quad (3.5)$$

- коэффициент порового давления, причем

$$K = K_s + K_w / n, \quad G_s = G \quad (3.6)$$

$$\nu = \frac{K - 2G}{2(K + 2G)}; \quad \nu_s = \frac{K_s - 2G}{2(K_s + G)} \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что при $K_w \rightarrow \infty$, $u_w \rightarrow \sigma$, $\nu \rightarrow 0.5$ и что $\nu > \nu_s$, а также $K > K_s$.

При известном $\sigma(x, y)$, полученном на основе решения задачи о НДС грунтового основания (рис. 1) можем определить и избыточное поровое давление $u_w(x, y)$ на основании (3.4), т.е. в зависимости от степени водонасыщения грунта. Следовательно можно дать количественную оценку НДС грунтового основания, в том числе определить осадку, начальную и критическую нагрузки и расчетное сопротивление грунтов основания.

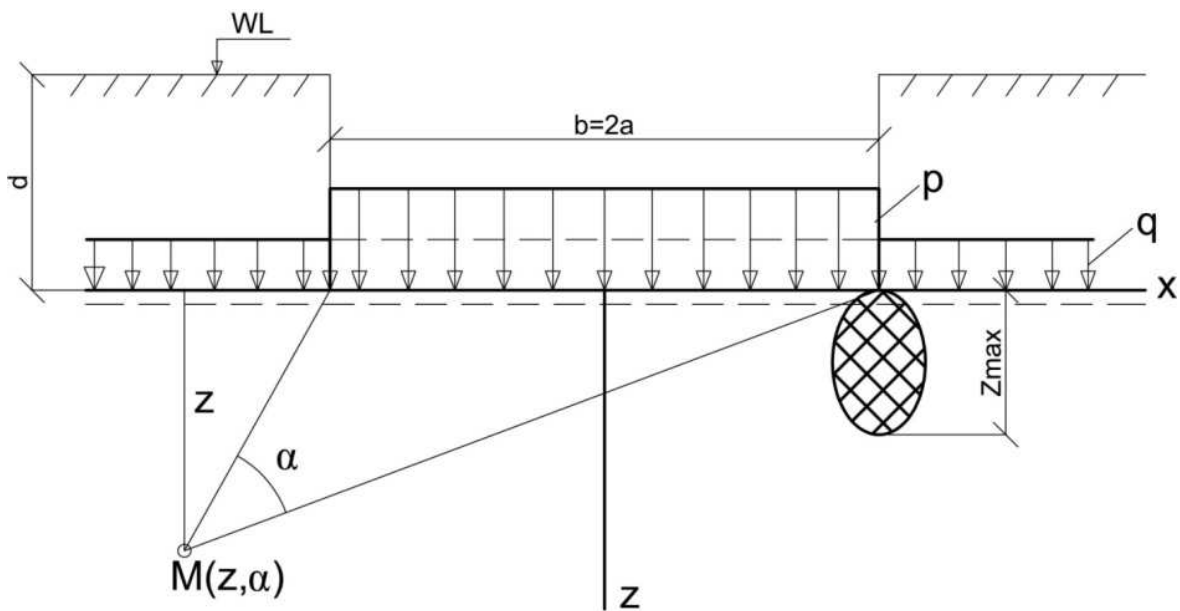


Рисунок 2. Расчетная схема для определения расчетного сопротивления грунта с учетом степени его водонасыщения. В правой части заштрихована область предельного равновесия

4. РАСЧЕТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЯ С УЧЕТОМ ИХ СТЕПЕНИ ВОДОНАСЫЩЕНИЯ

Известно, что под действием распределенной нагрузки интенсивностью p по полосе шириной $b=2a$ в грунтовом основании возникает избыточное НДС, которое описывается на основании решения задачи Фламана (рис. 2). Главные эффективные напряжения $\sigma_1(x, z)$ и $\sigma_3(x, z)$ при этом определяются формулой вида:

$$\sigma_{1,3} = \frac{p-q}{\pi} (\alpha \pm \sin \alpha) - u_w(\alpha), \quad (4.1)$$

где α - угол видимости, определяющий местоположение точки $M(\alpha, z)$; $q = \gamma' \cdot d$ - пригрузка на уровне $z=0$ от веса вышележащей толщи грунта с удельным весом во взвешенном состоянии γ' толщиной d .
Распределение эффективных напряжений в грунтовом основании от действия q в пред-

положении гидростатического распределения можно определить по формуле:

$$\sigma_{zg} = \sigma_{xg} = \gamma' (d + z) \quad (4.2)$$

Суммарные значения главных напряжений σ_v и избыточного порового давления u_w в грунтовом основании можно определить с учетом (4.1) и (3.4) следующим образом:

$$\sigma_v = \frac{2(p-q)}{\pi} \alpha \cdot (1 + \nu), \quad (4.3)$$

где $u_w(\alpha) = \frac{(p-q)}{3\pi} \cdot \beta_0 \cdot (1 + \nu) \cdot \alpha \quad (4.4)$

Эффективные напряжения σ_1 и σ_2 можем определить на основе (4.1), (4.2) и (4.4)

$$\sigma_{1,3} = \frac{p-q}{\pi} \cdot \left[\alpha \pm \sin \alpha - \frac{2\alpha}{3} \cdot \beta_0 (1 + \nu) \right] + \gamma' \cdot (d + z); \quad (4.5)$$

Напряженно-деформированное состояние основания под воздействием полосовой нагрузки с учетом неполного водонасыщения грунта

Условие предельного равновесия в точке $M(\alpha, z)$ можем определить, если напряжения (4.5) подставить в известное уравнение предельного состояния вида:

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}, \quad (4.6)$$

где c и φ - параметры прочности грунта; σ_1 и σ_3 - эффективные напряжения, т.е. $\sigma_1' = \sigma_1 - u_w$, $\sigma_3' = \sigma_3 - u_w$, т.е. получаем

$$z = \frac{p - q}{\pi \cdot \gamma'} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} - B \cdot \alpha \right) - \frac{c}{\gamma'} \cdot \operatorname{ctg} \varphi - d \quad (4.7)$$

где $B = 1 - 2\beta_0(1 + \nu)/3$.

Уравнение (4.7) описывает границу области предельного равновесия в зависимости от α , т.е. $z^* = f(z, \alpha)$. Максимальную глубину этой области z_{\max}^* (рис. 2) можем определить из условия $dz^*/d\alpha = 0$. Тогда получаем, что $\alpha^* = \arccos(B \cdot \sin \varphi)$, или $\cos \alpha^* = B \cdot \sin \varphi$.

Подставив это значение α^* в (4.7) после некоторых преобразований получаем критические значения распределенной нагрузки p^* в зависимости от z_{\max}^* и степени водонасыщения S_r , т.к. $\beta_0 = f(S_r)$ (см.(2.9) и (3.4) в виде:

$$p^* = \frac{\pi(\gamma' \cdot z_{\max}^* + \gamma' \cdot d + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\sin \alpha^* / \sin \varphi - B \cdot \alpha^*} + \gamma' \cdot d. \quad (4.8)$$

Это выражение в частном случае, когда поровое давление мало ($S_r < 0.8$) и $\beta_0 \cong 0, B \approx 1$ совпадает с известным решением задачи Пузыревского в виде:

$$p^* = \frac{\pi(\gamma' \cdot z_{\max} + \gamma' \cdot d + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\operatorname{ctg} \varphi - \pi/2 + \varphi} + \gamma' \cdot d \quad (4.9)$$

Начальная критическая нагрузка, определенная по формулам (4.8) и (4.9) отличаются существенно. Так при одинаковых $\gamma' = 20 \text{ кН/м}^3$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 0.1 \text{ МПа}$, $\varphi = 30^\circ$, $p^* = 5.64 \text{ МПа}$ по (4.8) и $p^* = 10.2 \text{ МПа}$ по (4.9). Очевидно, что при одинаковых значениях приложенной нагрузки p в водонасыщенном основании z_{\max} будет больше, чем в неводонасыщенном. Для снижения этого негативного явления следует под фундаментом устроить песчано-гравелистую дренирующую подушку и снизить темп строительства в начале строительства.

На рис.3 представлены графики зависимости p^* от S_r (при значениях S_r 0, 0.9, 0.99 и 1), рассчитанные по (4.8) и с помощью программного комплекса PLAXIS при заданных значениях γ', φ, c, b и d и при $z_{\max} = b/4$. Видно, что эти зависимости нелинейные и имеют максимальное значение при $\beta_0 = 1$, т.е. при полном водонасыщении.

Отметим, что степень водонасыщения влияет также на зависимость осадки S от нагрузки p . Такую зависимость можно получить, используя известное решение Шлейхера в интерпретации Цытовича Н.А. в виде:

$$S = \omega \cdot p_0 \cdot b \cdot (1 - \nu) / 2G \quad (4.10)$$

где ω - коэффициент, зависящий от формы площади и жесткости фундамента; $p_0 = p - \gamma \cdot d$, где γ и d такие же, как в (4.9); G - модуль сдвига грунта ($G = G_s$); ν - коэффициент Пуассона грунта в целом ($\nu > \nu_s$).

Отсюда следует, что осадки водонасыщенного основания больше, чем в неводонасыщенном, т.к. $\nu > \nu_s$. При $\nu \cong 0.5$, $\nu_s = 0.3$ получаем, что осадка водонасыщенного основания в 1.4 раза больше. Аналогичный результат получается при численном решении задачи с помощью программы PLAXIS (рис. 4).

Особо сильно отличаются предельные значения напряжений p , т.е. вторая критическая нагрузка p^{**} (рис.4).

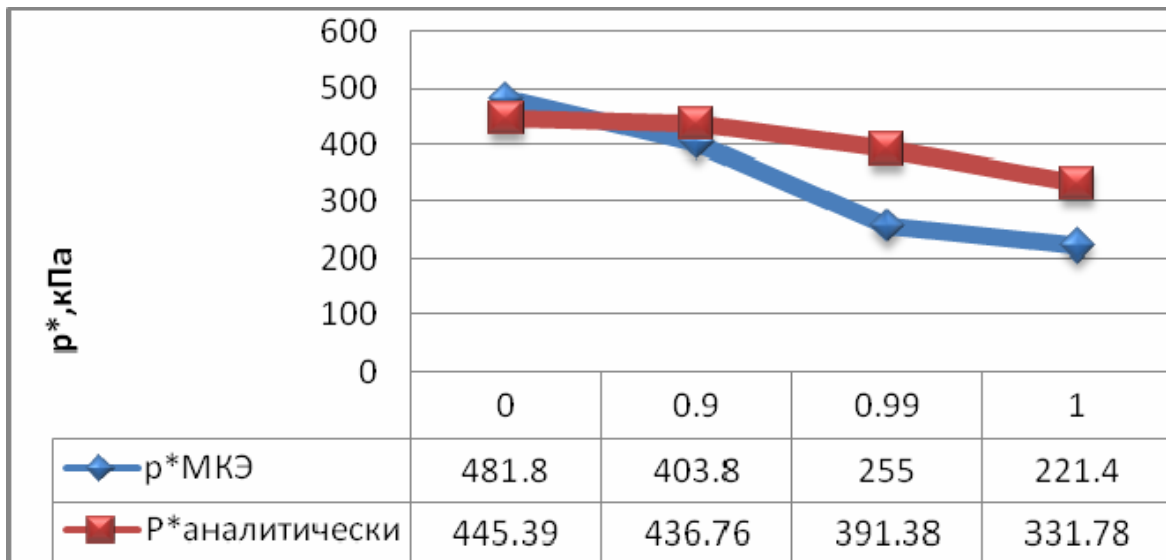


Рисунок 3. Кривые зависимости p^* от S_r , рассчитанные по (4.8) и по программе PLAXIS

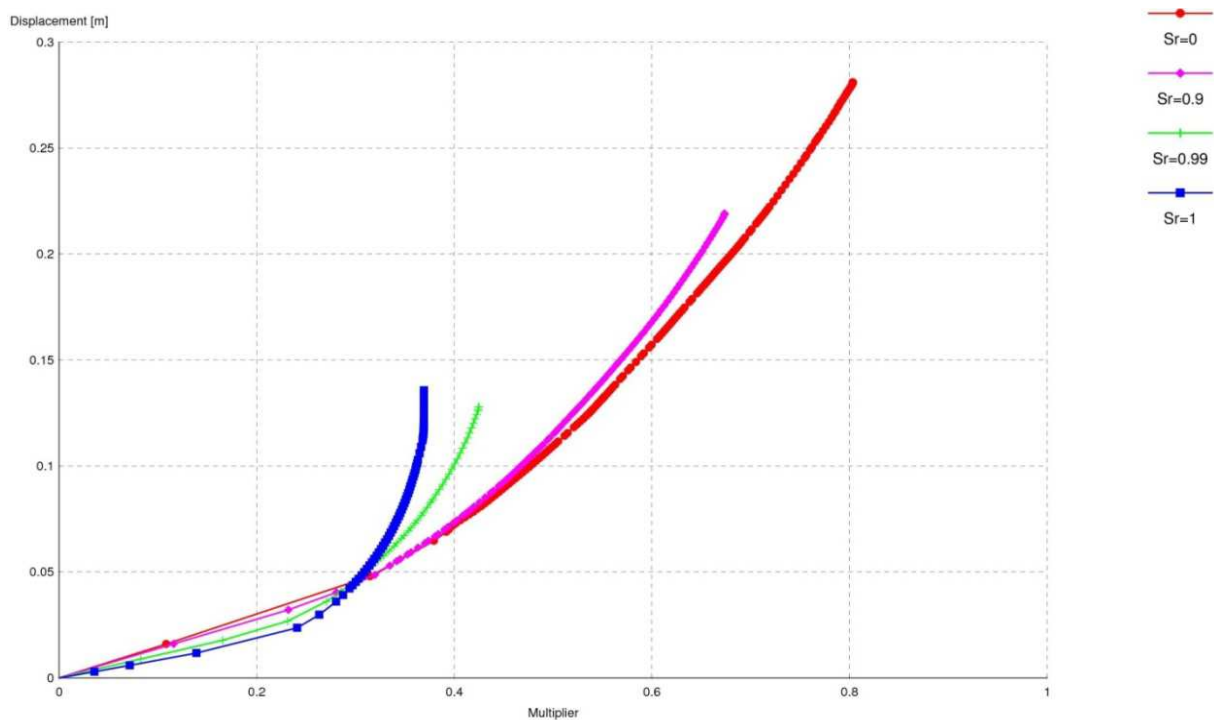


Рисунок 4. Графики зависимости вертикальных перемещений основания при действии полосовой нагрузки p в зависимости от степени водонасыщения S_r

Учитывая, что расчетное сопротивление находится между p^* и p^{**} следует предположить, что оно также меньше в водонасыщенных грунтах.

5. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Анализ результатов расчетов по определению R_p в зависимости от степени водонасыщения S_r грунтов оснований, выполненные на основе решения задачи анали-

Напряженно-деформированное состояние основания под воздействием полосовой нагрузки с учетом неполного водонасыщения грунта

тическим и численным методами показали, что влияние S_r на R_p существенное и последние могут отличаться в несколько раз при $S_r=1$ и $S_r=0.8$.

2. Для снижения этого негативного явления следует под фундаментом устраивать песчано-гравийную дренирующую подушку и регулировать темпы нагружения фундаментов путем контроля степени уплотнения глинистых грунтов в контактной зоне под фундаментом.
3. Сравнение аналитического и численного решения поставленной задачи по определению R_p в зависимости от S_r показало, что они сходятся и, следовательно, предложенное аналитическое решение может быть рекомендовано для использования в инженерной практике.
4. Осадка основания, обусловленная сдвиговыми деформациями скелетаводонасыщенного грунта больше, чем неводонасыщенного грунта, что обусловлено разностью коэффициентов Пуассона $\nu > \nu_s$.

Хуи Хип Нгуен, аспирант кафедры механики грунтов, оснований и фундаментов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7 (495) 287-49-14 (1425), e-mail: huyhiep_1984@yahoo.com.

Zaven G. Ter-Martirosyan, PhD, Professor, Head of Department of Soil Mechanics and Foundations, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7(495) 287-49-14 (1425), e-mail: mgroif@mail.ru

Vitaliy V. Sidorov, CEng, Department of Soil Mechanics and Foundations, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7 (926) 384-31-28, E-mail: vitsid@mail.ru

Huy H. Nguen, PhD student, Department of Soil Mechanics and Foundations, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone: +7 (495) 287-49-14 (1425), e-mail: huyhiep_1984@yahoo.com

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. – М.:Издательство АСВ, 2009, – 550 с.
2. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*, Москва, 2011.
3. Руководство пользователя программного комплекса PLAXISv8.

Тер-Мартirosян Завен Григорьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики грунтов, оснований и фундаментов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел. +7 (495) 287-49-14 (1425), e-mail: mgroif@mail.ru

Сидоров Виталий Валентинович, инженер кафедры механики грунтов, оснований и фундаментов, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7 (926) 384-31-28, e-mail: vitsid@mail.ru.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЫТНЫХ И РАСЧЕТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТОВОГО МАССИВА, ЗАКРЕПЛЕННОГО СТРУЙНОЙ ЦЕМЕНТАЦИЕЙ

И.И. Хусаинов, О.А. Маковецкий, Г.Г. Кашеварова

Пермский Национальный Исследовательский Политехнический Университет, г. Пермь, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Целью данной работы является изучение метода улучшения геотехнического основания закрепленного струйной цементацией, и выбор наиболее простой, приближенной к реальности адекватной математической модели для расчета.

Ключевые слова: «jet grouting», деформация оснований, «геомассив»

COMPARISON OF THEORETICAL AND EXPERIMENTAL RESULTS OF THE DEFORMATIONS OF THE BASE, IN THE FIXING OF THE WEAK LAYER OF SOIL JET CEMENTATION

Ilgiz I. Khusainov, Oleg A. Makovetsky, Galina G. Kashevarova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

ABSTRACT: The purpose of this paper is to study methods to improve geotechnical subgrade - fix jet grouting, and the selection of the most simple, the reality of an adequate mathematical model for the calculation.

Key words: «Jet grouting», the deformations of the base, «geomass».

Одним из способов изменения прочностных и деформационных свойств слабых грунтовых оснований является армирование их грунтоцементными элементами (ГЦЭ). Армированное основание представляет из себя «геомассив», а технология струйной цементации грунтов, заключается в использовании энергии высоконапорной струи цементного раствора для разрушения и одновременного перемешивания грунта с цементным раствором в режиме “mix-in-place” (перемешивание на месте). После твердения раствора образуется новый материал – грунтоцемент, обладающий высокими прочностными и другими деформационными характеристиками [1].

Но армирующие элементы не рассматриваются как свайные элементы, передающие нагрузки боковой поверхностью и острием на окружающие и ниже лежащие слои грун-

та, а геомассив рассматривается как массив природного грунта с улучшенными деформационными и прочностными характеристиками.

Нужно отметить, что в настоящее время данная технология широко применяется на практике без каких-либо теоретических обоснований. Но практически нет методов расчета таких оснований, подтвержденных опытными исследованиями, которые позволяли бы определять параметры армирующих элементов и с достаточной степенью точности прогнозировать свойства получаемого геомассива, что и послужило причиной проведения данных исследований.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ МОНИТОРИНГА ОСАДКИ ФУНДАМЕНТА ЗДАНИЯ НА АРМИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ

Разработана программа мониторинга за осадками фундаментов строящегося в Перми 17-ти этажного жилого дома. По конструктивной схеме здание рамно-связевое с полным железобетонным каркасом по «Унифицированной системе сборно-монолитного безригельного каркаса КУБ 2.5». Отметка 0.000 соответствует абсолютной отметке 146,80м в Балтийской системе высот. Здание сложное в плане, с размерами в осях 18,0x48,0м. Высота этажей и подвала в чистоте – 2,76м. Габаритные размеры плиты в плане - 50,4x22,1м, площадь – 1130м². Фундамент – железобетонная монолитная плита. Толщина плиты – Н = 900мм. Толщина подстилающих слоев (щебень) – 500мм.

В геологическом строении площадки принимают участие аргиллиты с прослоями песчаника, перекрытые четвертичными аллювиальными отложениями (суглинками). С поверхности большая часть площадки покрыта техногенным (насыпным) грунтом.

В связи со сложными инженерно-геологическими условиями площадки, характеризующейся малыми прочностными и деформационными характеристиками подстилающих слоев, использовалось устройство геомассива, выполняемое по методу струйной цементации грунтов «jet grouting». Применение такого варианта устройства основания позволяет достичь развития равномерных осадков и, как следствие, более благоприятной работы всех несущих конструкций здания.

Геомассив в данном случае представляет собой природный грунт, равномерно армированный жесткими элементами из грунтоцементных элементов (ГЦЭ) гарантированным Ø1200мм по сетке 3,0x3,0м. Длина элементов – 6м.

При производстве ГЦЭ на его характеристики влияет множество факторов, таких как, неоднородность грунта, расход цемента, водоцементное соотношение, глубина распо-

ложения элемента, скорость подъема монитора, время подъема монитора, диаметр применяемой форсунки.

Мониторинг за осадками фундаментов данного здания проводился, начиная с наиболее важного этапа строительства (появления нагрузок больше половины проектных). Измерение осадки фундаментной плиты как единого целого относительно поверхности недеформируемого грунта производилось гидронивелиром для каждого момента времени путем измерения смещения точки наблюдения относительно фиксированной внешней точки.

На рис. 1-2 представлены результаты измерений пространственного распределения величин вертикальных осадков фундаментной плиты на моменты наблюдений 14.12.2010 (начало наблюдений), 5.07.2011 (конец наблюдений).

По результатам измерений осадков фундаментной плиты с 14 декабря 2010г. по 5 июля 2011 г. зарегистрированы следующие тенденции поведения фундаментной плиты:

1. Зарегистрированные величины осадков колонн свидетельствуют о том, что в течение всего времени наблюдений происходила осадка фундаментной плиты под действием нагрузок, вызванных увеличением веса строящегося здания. За весь период наблюдений максимальная осадка фундаментной плиты относительно внешней неподвижной точки составила – 3,85см.
2. Процесс осадки сооружения происходит равномерно, наблюдается смещение вниз всех точек фундамента практически на одну величину. Это означает, что имеет место осадка здания как жесткого целого.
3. В последних измерениях зарегистрирован процесс стабилизации осадков фундаментной плиты.

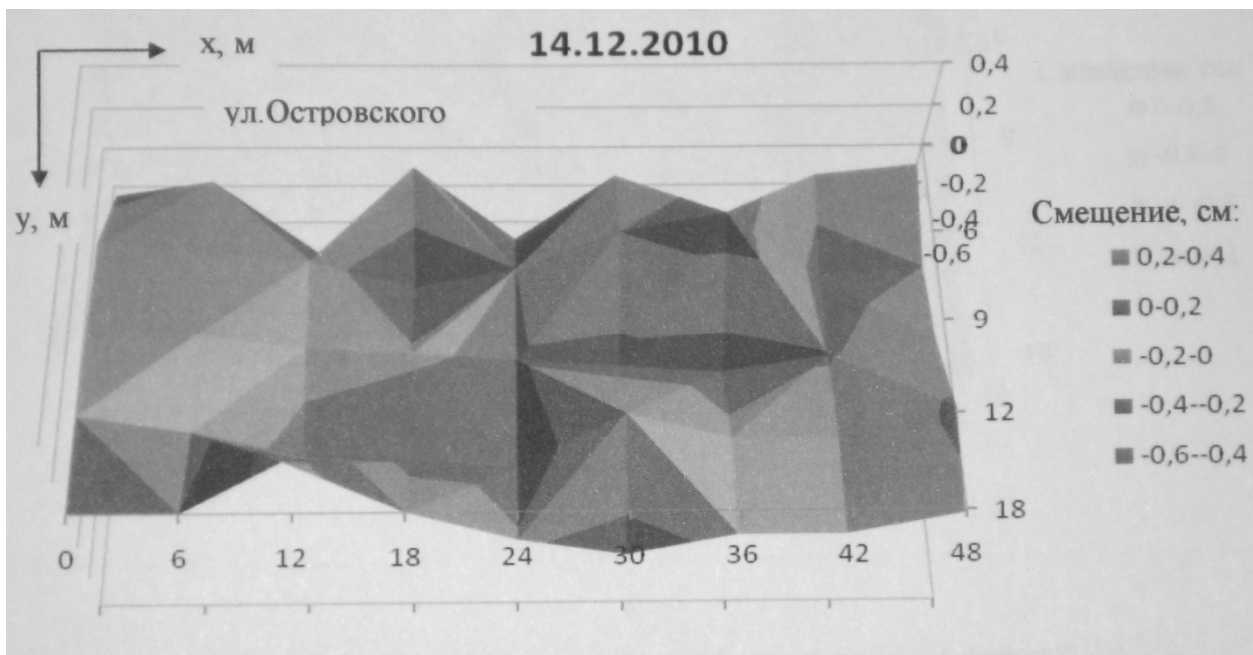


Рисунок 1. Распределение осадок фундаментной плиты на 14.12.2010.

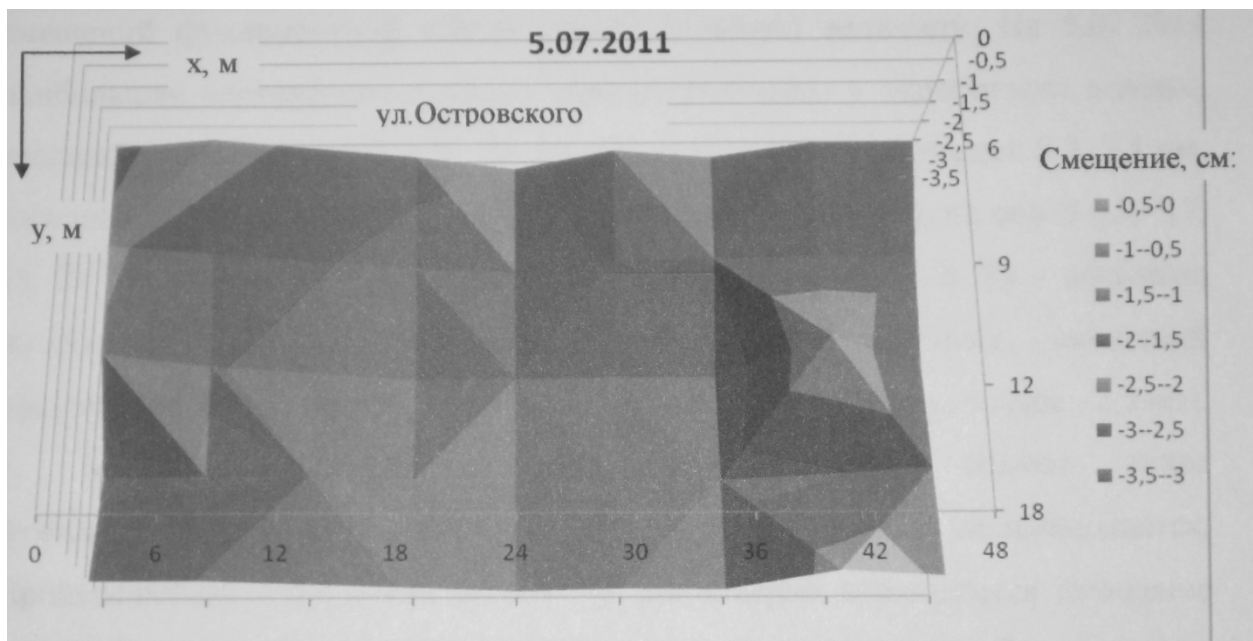


Рисунок 2. Распределение осадок фундаментной плиты на 5.07.2011.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСАДКИ ПЛИТЫ НА АРМИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ

Для теоретического обоснования используемого метода геотехнического улучшения основания необходимо выбрать наиболее приближенную к реальности математическую

модель армированного основания. В настоящее время известно множество предложений по моделированию и совершенствованию модели грунтового основания. Простейшая винклеровская механическая модель основания, наиболее популярная и широко используемая проектировщиками, в принципе, не-

способна адекватно отразить реальную картину взаимодействия между конструкцией и подстилающим ее грунтом, поскольку в ней не учитывается распределительная способность основания. Данный порок устраняет модель основания с двумя коэффициентами постели (модель Пастернака). Поэтому **первой** рассматривалась именно данная модель. Расчеты выполнялись методом конечных элементов в программном комплексе Лира-Windows.

В общем случае усилие взаимодействия R между конструкцией и подстилающим ее упругим основанием связано с перемещением w дневной поверхности упругого основания интегральной зависимостью [2]:

$$w(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) R(\xi, \eta) d\Omega, \quad (1)$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ - ядро упругого основания, представляющее собой функцию влияния, а именно, перемещение точки $P(x, y)$ дневной поверхности упругого основания от единичной силы, приложенной в точке $Q(\xi, \eta)$ по направлению нормали к этой поверхности. В (1) интегрирование ведется по двумерной области Ω , в которой функция R отлична от нуля.

Для модели упругого основания с двумя коэффициентами постели интегральное соотношение (1) может быть обращено, при этом связь между w и R принимает форму простой дифференциальной зависимости

$$R = -C_2 \Delta w + C_1 w, \quad (2)$$

где: C_1 и C_2 – коэффициенты упругого основания на сжатие и сдвиг соответственно,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– оператор Лапласа.

Двухпараметрическая модель дает возможность предсказать изгиб плиты при равно-

мерном нагружении, а также осадки поверхности упругого основания за пределами плана конструкции.

При расчете учитывалась часть основания, расположенная во внешней области с использованием «полубесконечных конечных элементов».

Как показали натурные (экспериментальные) исследования, данная модель упругого пространства переоценивает влияние сцепления и угла внутреннего трения в грунте на распределение реактивных давлений под подошвой фундамента. И тем самым, осадка во многом противоречит фактической работе грунтового основания, и значения осадки получаются намного больше тех, которые фактически имеют место под фундаментами. Как уже отмечалось, на свойства ГЦЭ при производстве влияют множество факторов, таких как, неоднородность грунта, расход цемента, глубина расположения элемента и др.

В данном случае модуль упругости элементов, изменялся в пределах от 200 МПа до 340 МПа, а приведенный модуль деформаций основания, вычисленный по формуле:

$$E_{гр}^{экр} = \left[\frac{E_{гр} (A_{гр} - \sum A_{арм}) + E_{арм} \sum A_{арм}}{A_{гр}} \right], \quad (3)$$

получился соответственно равным 40 МПа и 60 МПа.

Коэффициент Пуассона принят равным 0.2, т.к. полученные грунтоцементные элементы представляют собой, фактически бетонные элементы малой марочной прочности в возрасте 28 суток, с прочностью на одноосное сжатие около 2МПа.

Расчетная величина максимальной осадки фундаментной плиты составила:

- 8.98см, при $E=40$ МПа, что на 133% больше фактической;
- 8.67см, при $E=60$ МПа, что на 125% больше фактической.

Во второй модели, в местах расположения ГЦЭ, грунт заменялся грунтоцементными колоннами гарантированным диаметром 1.2м, с модулем упругости 200 МПа и 340МПа. Задавались также характеристики, присущие грунту, а именно, сцепление $c=66\text{т/м}^2$, угол внутреннего трения $\varphi = 34^\circ$.

Моделирование грунтового пространства под всей поверхностью фундаментной плиты и за ее пределами, выполнялось с использование конечных элементов «КЭ 271-276», реализованных в ПК Лира-Windows. Границы грунтового массива в плане за пределами фундаментной плиты сдвигались на 0,5 ширины и 0,5 длины плиты симметрично в обе стороны, Граница сжимаемой толщи принималась = 20м [3].

Следует отметить, что в данной модели не учитывался тот факт, что за областью образования ГЦЭ происходит некая зона уплотнения природного грунта. Т.е. грунт, представленный суглинком, в этой области перешел из одной консистенции в другую, а значит и лучшими характеристиками.

Расчетная величина максимальной осадки фундаментной плиты составила:

- 5.44см, при $E=200\text{МПа}$, что на 41% больше фактической;
- 5.13см, при $E=340\text{МПа}$, что на 33% больше фактической.

Третья расчетная модель отличалась от второй тем, что под фундаментной плитой располагались не точечные грунтоцементные элементы, а распределённый гомогенный материал - «геомассив» с приведенным модулем деформации (3), который так же моделировался с использованием конечных элементов «КЭ 271-276».

Расчетная величина максимальной осадки фундаментной плиты составила:

- 4.52 см, при $E=40\text{МПа}$, что на 17% больше фактической;
- 4.32 см, при $E=60\text{МПа}$, что на 12% больше фактической.

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ ОПЫТНЫХ И РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ

Результатов теоретических (расчетных) и опытных (полевых) исследований представлены на рис. 3-5.

По результатам проведенного комплекса исследований сделаны следующие выводы:

1. Осадка фундаментной плиты, нагруженной полностью смонтированной коробкой 17-ти этажного здания, происходит достаточно равномерно, в результате нормального взаимодействия системы грунт – фундамент.
2. Результаты расчета, наиболее близкие к экспериментальным, дает модель грунтового основания «геомассив». При этом распределение напряжений под фундаментной плитой происходит более равномерно, по сравнению с применением модели точечных забивных свай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бройд И.И.** Струйная геотехнология: Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2004. – 448 с.
2. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
3. СНиП 2.02.01-83* Основания зданий и сооружений – М ФГУП ЦПП, 2006. – 48с.

Хусаинов Ильгиз Ильдусович, аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительной механики и вычислительных технологий, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ihi888@mail.ru.

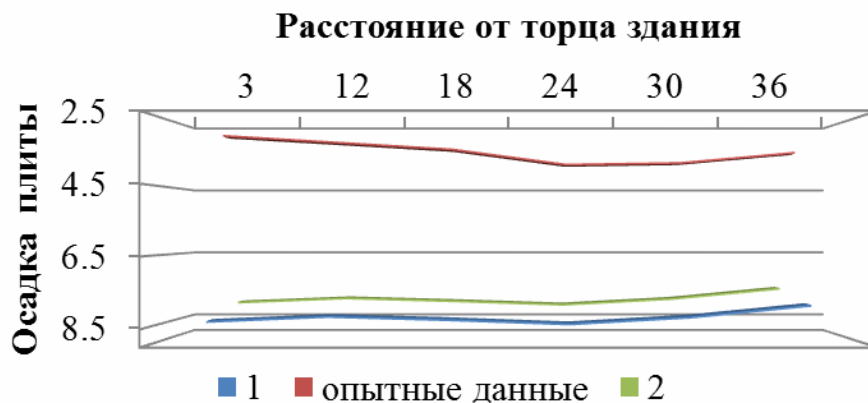


Рисунок 3. График сравнения опытных и расчетных осадок фундаментной плиты с применением модели Пастернака

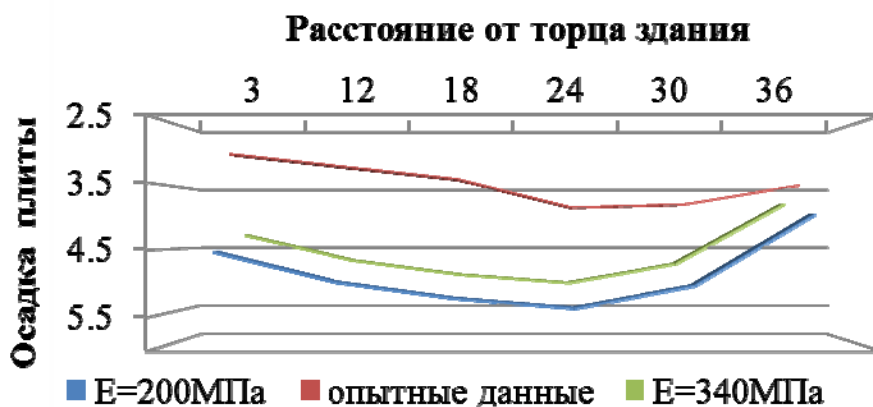


Рисунок 4. График сравнения опытных и расчетных осадок фундаментной плиты с применением модели равномерно распределённых грунтоцементных элементов

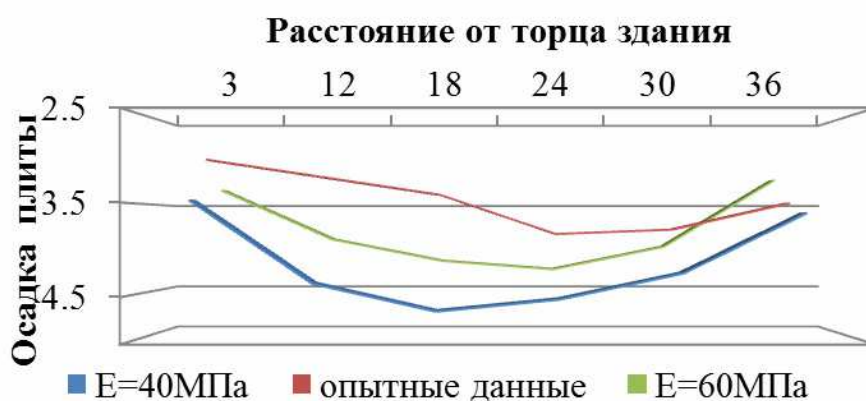


Рисунок 5. График сравнения опытных и расчетных осадок фундаментной плиты с применением модели «геомассива»

Маковецкий Олег Александрович, кандидат технических наук, доцент Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительного производства, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: oleg-mak@inbox.ru.

Кашеварова Галина Геннадьевна, доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра строительной механики и вычислительных технологий, 614010, Россия, г. Пермь, улица Куйбышева, дом 109, e-mail: ggkash@mail.ru.

Ilgiz I. Khusainov, PhD student, Department of Mechanics and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ihi888@mail.ru.

Oleg A. Makovetsky, PhD, Assistant Professor, Department of Building production and geotechnics, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: oleg-mak@inbox.ru.

Galina G. Kashevarova, PhD, Professor, Department of Mechanics and computational technologies, Perm National Research Polytechnic University, 109, str. Kuybysheva, 614010, Perm, Russia, e-mail: ggkash@mail.ru.