

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**  
*Volume 8, Issue 1* *2012*

---

**EXECUTIVE EDITOR**

**Valery I. Telichenko**, Professor, Rector  
Moscow State University of Civil Engineering  
Moscow, Russia  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

**EDITOR-IN-CHIEF**

**Vladimir N. Sidorov**, Professor  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

**TECHNICAL EDITOR**

**Taymuraz B. Kaytukov**, Associate Professor  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**ASSOCIATE EDITORS**

**Pavel A. Akimov**, Professor, Vice-Rector  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

**Alexander M. Belostotsky**, Professor  
Research Center STADYO  
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,  
125040, Moscow, Russia

**Vladimir Belsky**, Ph.D.  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Mikhail Belyi**, Professor  
Abaqus Inc.,  
Pawtucket, RI 02860,  
1080 Main Street, USA

**Vitaly Bulgakov**, Professor  
Parametric Technology Corp.,  
57 Metropolitan Av.,  
Ashland, MA, USA

**Gregory P. Panasenko**, Professor  
Equipe d'Analyse Numerique  
NMR CNRS 5585  
University Gean Mehnet  
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

**Boris E. Pobedria**, Professor  
Department of Mechanics and Mathematics  
Moscow State University  
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Leonid A. Rozin**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Politechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**PUBLICATION COUNCIL**

**William Begell**, President  
Begell Publishing House  
USA

**Nadezhda S. Nikitina**, Director  
ASV Publishing House  
Moscow, Russia

**Valery I. Telichenko**, Rector  
Moscow State University  
of Civil Engineering  
Moscow, Russia

## **ADVISORY EDITORIAL BOARD**

**Nikolaj V. Banichuk**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo  
117526, Russia

**Klaus-Jurgen Bathe**, Professor  
Department of Mechanical  
Engineering  
Massachusetts Institute of  
Technology  
Cambridge, MA 02139, USA

**Zdenek Bittnar**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Czech Technical University  
7, Thakurova, 16629 Prague 6  
Czech Republic

**Alexander S. Bratus**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Evgeny G. D'yakonov**, Professor  
Dept. of Comp. Math. and  
Cybernetics; Moscow State University  
MGU, VMK, Vorobjovy Gory  
119899 Moscow, Russia

**Alexander S. Gorodetsky**  
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.  
2a, Ul. M. Krivonosy  
252180 Kiev, Ukraine

**Vladimir Karpov**, Professor  
St. Petersburg University  
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,  
St. Petersburg, 198005 Russia

**Galina G. Kashevarova**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
and Computer Technology  
Perm State Technical University  
29, Komsomolsky Prospekt,  
Perm, 614990, Russia

**Hartmut Koppler**, Professor  
Bauhaus-Universitat  
31a, Windmuhlen Str.  
99425 Weimar, Germany

**Andrey V. Korgin**, Professor  
Structure Testing Department  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vadim G. Korneev**, Professor  
Dept. of Math. and Mechanics  
St. Petersburg State University  
198904, St. Petersburg, Russia

**Sergey V. Kuznetsov**, Professor  
Institute for Problems in Mech.  
Russian Academy of Sciences  
101, Prosp. Vernadskogo,  
117526, Russia

**Pierre Ladeveze**, Professor  
Lab. de Mecanique et Technologic  
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.  
Paris VI, 61 Av. du President Wilson  
94235 Cachan Cedex, France

**Ralf Lindberg**, Professor  
3, Korkechoulunkatu,  
33101, Tampere, Finland

**Leonid S. Lyakhovich**, Professor  
Tomsk State University  
of Architecture and Building  
2, Solyanaya Pl.,  
634003 Tomsk, Russia

**Herbert Mang**, Professor  
Inst. Fur Haustatitkn und  
Festigkeitslehre  
Techische Universitaet Wien  
13, Karlsplatz,  
A-1040 Wien, Austria

**Vladimir L. Mondrus**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Moscow State Univ. of Civil  
Engineering  
26, Yaroslavskoe Shosse,  
129337 Moscow, Russia

**Vladimir I. Myachenkov**, Professor  
Department of Strength of Materials  
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"  
3a, Vadkovsky Per.,  
104472 Moscow, Russia

**L'Eugenio Onate**, Professor  
E.T.S. Ing. Caminos  
Jorge, Girano Salgado, 31-08034  
Barcelona, Spain

**Vladimir A. Palmov**, Professor  
Physical-Mechanical faculty  
Technical University St. Petersburg  
29, Ul. Polytechnicheskaya,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Stan Pietruszczak**, Professor  
Department of Civil Engineering  
McMaster University  
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

**Chengzhi Qi**, Professor  
Beijing University of Civil  
Engineering and Architecture  
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,  
Beijing

**Ekkerhard Ramm**, Professor  
University of Stuttgart  
Institute for Baustatik  
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,  
Germany

**E. Daya Reddy**, Professor  
University of Cape Town  
Department of Applied Mathematics  
7700 Rondebosch, South Africa

**Sunil Saigal**, Professor  
National Science Foundation  
4201 Wilson Blvd.,  
Arlington, VA 22230, USA

**Vadim N. Savostyanov**, Professor,  
Department of Applied Mechanics  
and Mathematics, Moscow State  
Univ. of Civil Engineering,  
Yaroslavskoe shosse 26, 129337  
Moscow, Russia

**Bernhard A. Scfhrefler**, Professor  
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.  
Via  
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

**Nikolaj N. Shaposhnikov**, Professor  
Department of Comp. Aided Design  
Moscow State Univ. of Railways  
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,  
101475 Moscow, Russia

**D.V. Singh**, Professor  
Vice chairman all India council for  
Technical Education, New Delhi,  
India

**Waclaw Szcześniak**, Professor  
15, Al. Armii Ludowej,  
Politechnika Warszawska  
Warsaw, Poland

**Nils-Eric Wiberg**, Professor  
Department of Structural Mechanics  
Chalmers University of Technology  
S-41296 Goteborg, Sweden

**Zbigniew Wojcicki**, Professor  
Wroclaw University of Technology  
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,  
Wroclaw, Poland

**Peter Wriggers**, Professor  
Technical School of Department  
1, Hochschulstrabe,  
D-6100 Darmstadt, Germany

## **AIMS AND SCOPE**

**The aim of the Journal** is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

**The scope of the Journal** includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING**

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

**The material of the paper should be arranged as follows:** Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

**The title, author's name(s) and affiliation(s)** should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

**The figures** can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper.

The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

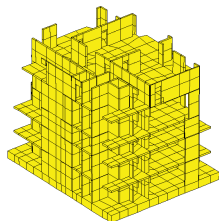


Figure 1

**The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English.** An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

## 2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

**Authors in all countries, at their opinion, should send** three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

## 3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

**to Editor-in-Chief** by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with** author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

## 4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

### ➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov  
Department of Applied Mathematics  
and Computer Science  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail*: sidorov.vladimir@gmail.com

### ➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov  
Research & Educational Center  
of Computational Simulation  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia  
*e-mail*: niccm@mgsu.ru

## REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

*В.Н. Сидоров<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>2</sup>, Т.Б. Кайтуков<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**АННОТАЦИЯ:** Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

**Ключевые слова:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

## GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

*Vladimir N. Sidorov<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>2</sup>, Taymuraz B. Kaytukov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>2</sup>Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

<sup>3</sup>Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

**ABSTRACT:** Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

**Key words:** International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

### 1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

**Материал статьи должен располагаться следующим образом:** Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательно нумеровать.

**Заголовок статьи, сведения об авторах** представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

**Рисунки** (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

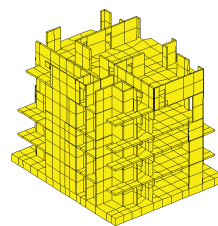


Рисунок 1

**Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке.** При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

## 2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

**Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-**

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

### 3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

### 4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

#### ➤ Главный редактор

профессор, доктор технических наук  
Сидоров Владимир Николаевич  
ГОУ ВПО Московский государственный  
строительный университет,  
кафедра информатики  
и прикладной математики,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*

#### ➤ Технический редактор

доцент, кандидат технических наук  
Кайтуков Таймураз Батразович  
ГОУ ВПО Московский государственный  
строительный университет,  
Научно-образовательный центр  
компьютерного моделирования  
уникальных зданий, сооружений  
и комплексов,  
129337, Россия, г. Москва,  
Ярославское шоссе, дом 26.  
*e-mail: niccm@mgsu.ru*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

<sup>1)</sup> Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.

<sup>2)</sup> Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov2@gmail.com.

<sup>3)</sup> Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

*International Journal for*  
**Computational Civil and Structural Engineering**

*Volume 8, Issue 1*

*2012*

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Simulation of Sloshing Waves in a Storage Tank Under Seismic Excitation Using a Spring-Mass-Dashpot Model</b> <i>Kambiz Kangarlou, Kaveh Kangarlou</i>	<b><u>11</u></b>
<b>Finite Element Investigation of Stress Concentration Factor in the Concrete Wall with Openings</b> <i>Salih Hamad Feirusha (Kakshar)</i>	<b><u>17</u></b>
<b>Selected Variational Methods in Mechanics Boundary Problem</b> <i>Ewa Nowak, Katarzyna Nowak</i>	<b><u>30</u></b>
<b>Investigation of Parallel Computational Capabilities of Modern Freely GPU Solvers</b> <i>Alexander V. Sidorov</i>	<b><u>35</u></b>
<b>Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара Часть 1: Одномерные проблемы</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>39</u></b>
<b>Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара Часть 2: Двумерные проблемы</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>47</u></b>
<b>Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<b><u>57</u></b>

<b>Об операторной постановке проблемы собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода</b> <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<b><u>62</u></b>
<b>Моделирование волновых процессов вблизи эпицентров землетрясений</b> <i>А.В. Катцов, С.В. Кузнецов</i>	<b><u>72</u></b>
<b>Сейсмические волны и сейсмические барьеры</b> <i>С.В. Кузнецов</i>	<b><u>87</u></b>
<b>Кусочно-линейная модель нелинейного объекта</b> <i>Р.Л. Лейбов</i>	<b><u>96</u></b>
<b>Параллельный алгоритм формирования матричных уравнений равновесия строительных конструкций</b> <i>А.В. Сидоров</i>	<b><u>108</u></b>

# SIMULATION OF SLOSHING WAVES IN A STORAGE TANK UNDER SEISMIC EXCITATION USING A SPRING-MASS-DASHPOT MODEL

*Kambiz Kangarlou<sup>1</sup>, Kaveh Kangarlou<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup>Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, IRAN

**ABSTRACT:** The motion of liquids in rigid containers has been the subject of many studies in the past few decades because of its frequent application in several engineering disciplines. The evolution of codes and standards for the seismic design of these structures has relied greatly on observations of tank damages during past earthquakes, yet the time lag between acquiring the information and implementing the findings in practice has remained relatively long. The first approach in the modeling of sloshing liquids involves using a mass-spring model. The focus of this study is computer simulation of sloshing waves in a storage tank under different excitation by program Matlab-Simulink. The results were compared with the Ansys-Cfx finite element program.

**Keywords:** sloshing waves, storage Tank, Seismic Excitation, spring-Mass-dashpot Model, hydrodynamic pressure, Matlab-Simulink, Ansys-Cfx.

## 1. INTRODUCTION

Liquid sloshing is associated with various engineering problems, such as the liquid flow on the decks of ships, the behavior of liquid in containers and the fuel motion in aircraft. The dynamic characteristic of these systems is greatly affected by the dynamics of the liquid free-surface motion and it is very important regarding to the safety of transportation systems, human's life and environmental issues. In the field of civil engineering, the sloshing phenomenon becomes important to seismic design of liquid storage tanks. Large amplitude sloshing flows considered in engineering applications are usually followed by impact of liquid at the side wall and top surface of fluid containers. Liquid storage tanks have suffered substantial damage in past earthquakes, including elastic and inelastic shell wall buckling, roof-to-wall damage due to excessive sloshing and base sliding (Rinne 1967, Cooper 1997, Christovasilis and Whittaker 2007).

Many studies for the sloshing and impact of liquid on marine industries were carried out in the 1970s and early 1980s for the design of LNG carriers and some numerical computations have been reported [1-3]. The liquid wave problem

usually refers to the problem of solving the Euler equations for potential flow with a free surface, under the influence of gravity and surface tension. Because of the complexity of these equations, simplified models have been extensively used as an alternative. In this work, the physical system is described and modeled in the state-space of Simulink, then the time history analysis are presented, followed by the Ansys-Cfx. Finally some simulations' results are presented and final conclusions are drawn.

## 2. PHYSICAL SYSTEM SETUP

The identification and modeling of physical systems is a very important task in engineering, where the type of systems can range from mechanical to biological systems. The mass-spring system used to study the liquid algorithm performance is depicted in Fig. 1; it is just comprised by two mass-spring-dashpot systems in series.

The masses  $m_1$  and  $m_2$  are acted by the forces  $f_1(t)$  and  $f_2(t)$ , respectively, which are composed by a deterministic force  $u_i(t)$ , corrupted with additive colored noise  $n_i(t)$ , with expression:  $f_i(t) = u_i(t) + n_i(t)$ , where the plant colored noises  $n_i(t)$  are generated by a first order continuous

system, with transfer function  $H(s) = G_i/(s + a_i)$ , when excited by stationary white noise  $\xi_i(t)$ , where  $i = 1, 2$ , respectively.

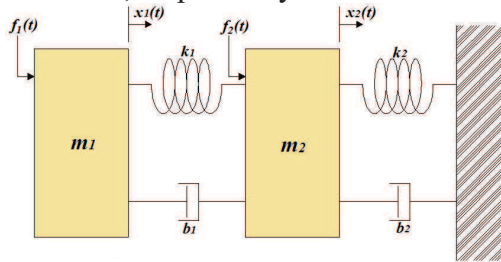


Figure 1: Physical system composed by the series of two mass-spring-dashpot systems.

The system dynamics is described in state-space by the matrix equations:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{o}(t) \quad (1)$$

where  $\mathbf{A}$  is the continuous time state matrix,  $\mathbf{B}$  is the input matrix, and  $\mathbf{L}$  the process noise matrix. These matrices are obtained by applying the Newton second law of motion:

$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) = m\mathbf{a}(t)$  to the system taking into account the relations for a force exerted by a spring:  $\mathbf{F}(t) = -k\mathbf{x}(t)$ , the drag force done by a dashpot:  $\mathbf{F}(t) = -b\mathbf{v}(t)$ , where  $k$  is the spring elastic coefficient and  $b$  is the linear friction coefficient. The position vector is denoted by  $\mathbf{x}(t)$ , so that  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$  represents the mass acceleration and  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$  represents its velocity. The state-variables vector is composed as  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t) \ f_1(t) \ f_2(t)]^T$ , which was augmented to include the forces dynamics, the input vector is  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$ , and the vector of plant white noises  $\xi(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t)]^T$  is characterized by the mean  $E\{\xi(t)\} = [0 \ 0]^T$  and by the diagonal covariance matrix:

$$E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} \Xi_1 \delta(t-\tau) & 0 \\ 0 & \Xi_2 \delta(t-\tau) \end{bmatrix} = \Xi \delta(t-\tau) \quad (2)$$

where  $\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & 0 \\ 0 & \Xi_2 \end{bmatrix}$

since the two plant noises,  $\xi_1(t)$  and  $\xi_2(t)$ , are considered to be independent and stationary.

The state-space matrices are composed by the components relations:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -b_1 & b_1 & 1 & 0 \\ \frac{m_1}{k_1} & \frac{m_1}{k_1+k_2} & \frac{m_1}{b_1} & -\frac{m_1}{b_1+b_2} & 0 & \frac{1}{m_2} \\ m_2 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Coupled with the mechanical system there are two position sensors that take measurements of the masses' positions,  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  at regular intervals of time  $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , are corrupted by additive noise,  $\theta_1(t)$  and  $\theta_2(t)$ , respectively. In matrix form, the measurement equation is written as:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

where  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

where the measurements vector is  $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$ , and  $\mathbf{C}$  is the output matrix. The measurement noise vector  $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t)]^T$  is characterized by the mean  $E\{\theta(t)\} = [0 \ 0]^T$  and by the covariance matrix:

$$E\{\theta(t)\theta^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \cdot \delta_{t\tau} & 0 \\ 0 & \Theta_2 \cdot \delta_{t\tau} \end{bmatrix} = \Theta \cdot \delta_{t\tau} \quad (5)$$

where  $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ 0 & \Theta_2 \end{bmatrix}$

The non-diagonal terms are zero because the noise sources are considered to be independent, and  $\Theta$  is the measurement noise intensity matrix.

### 3. MODELING VISUAL DYNAMICS

We have developed a 3-dimensional liquid simulation technique inspired by program Matlab-Simulink and using mass-spring nodes. In addition to its compelling visual realism,

provides the possibility of incorporating some of the physics of the liquid, For instance, the physics of impulsive pressure and wave height. Fig. 2 presents a sequence of free-surface profiles at:  $t=130/40 s, 180/40 s$ ; submitted to a forced motion  $x(t) = 2\sin(0.3t)$ . The tank length is  $L = 20 m$  and damping 5%. In the right corner are shown natural first ten forms of frequency of a liquid and impulsive pressure upon a tank wall ( $H$  - tank height,  $T$  - a thickness of the tank,  $Force$  - vibrating moving of the tank basis;  $height$  - wave height, iteration No - a time unit  $=1/40 s$ ). Fig. 3 presents free-surface profiles submitted to single pulse excitation. The user can set the tank length, radius, thickness, force motion, coefficient damping and also the parameters for internal forces to control the strength of connectivity of the mass-spring nodes, etc. All parameters can be modulated in real-time, and all simulations run in real-time. The rendering speed is about 80 frames per second at full screen display of  $1024 \times 768$ , on a PC with Intel processor of 2.3 GHz.

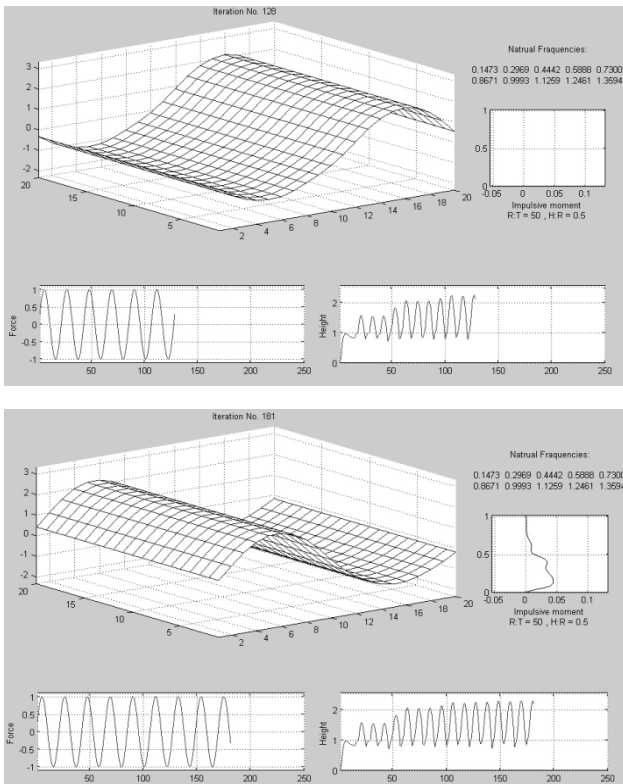


Figure 2: Tank under harmonic excitation at  $t=3.25$  and  $4.5 sec$ .

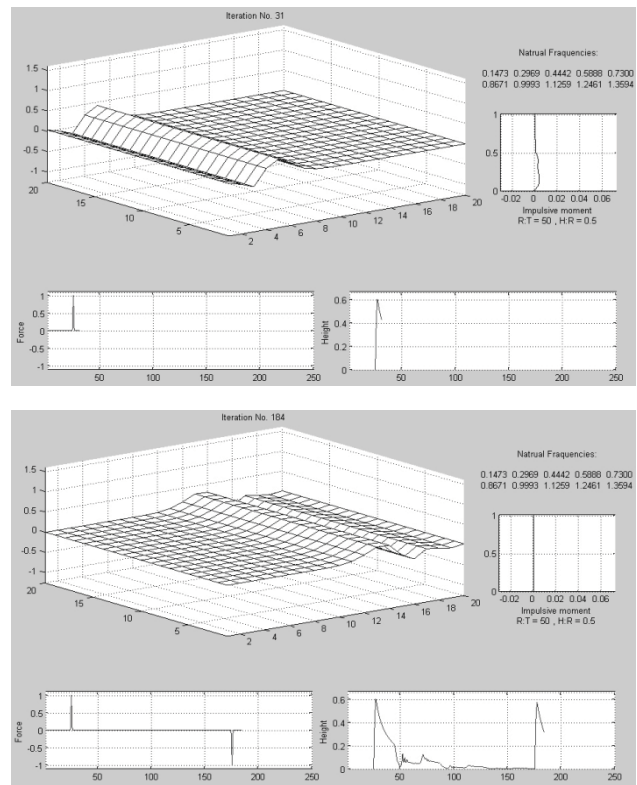


Figure 3: Tank under single pulse excitation at  $t=0.75, 1.5$  and  $4.25 sec$ .

As described above, the failure; modes of liquid containing tanks resulting from strong motion shaking (e.g., earthquakes) are varied and complex. The common item to all cases is that some mode of buckling can be identified following the tank failure.

The kind of damage appearing in an actual situation [4] depends on the configuration of the tank; the liquid content; the foundation anchorage; the impedance functions of the ground; shell modal shapes; and the effects of damping and inertia in the equation of motion of the shell and of the foundation. All of these elements lead to time- and space-dependent equations of vibration that are transformed into a discrete multi degree-of-freedom system by a generalized coordinate approach in order to calculate the generalized mass, stiffness, and damping matrices, as well as the load vector.

The type of analytical model discussed above requires a numerical solution procedure. In order to further demonstrate the accuracy of our model, we have performed a quantitative comparison with numerical results of program

Ansys-Cfx and the available theoretical solutions for flexible tanks of fixed support conditions (Table 1), results of which are summarized in Table 2-4.

Table 1: Expressions for impulsive time period circular tanks with fixed base given in various codes.

Reference	Expression
ACI 350.3	$T_i = \frac{0.62 h \sqrt{\rho_c / E}}{C_w \sqrt{t / R}}$ $C_w$ is a coefficient given as function of $h/R$ in graphical form.
AWWA	Impulsive natural period is not required in the analysis.
API 650	Expression is not required in the analysis.
NZSEE Guidelines	$T_i = \frac{5.61 \pi h \sqrt{\rho / E}}{K_h}$ $K_h$ is function of $h/R$ and $t/R$ to be obtained from given graphs.
Eurocode 8	$T_i = \frac{2R}{C_i} \sqrt{\frac{\rho h}{Et}}$ $C_i = 0.01675 \left(\frac{h}{R}\right)^2 - 0.15 \left(\frac{h}{R}\right) + 0.46$

$\rho_c$  = mass density of wall,  $\rho$  = mass density of fluid,  $E$  = Modulus of elasticity of tank wall,  $t$  = thickness of wall.

#### 4. FINITE ELEMENT MODEL APPROACH

While basically relying on the solution of the Navier-Stokes equations, the applications of computational fluid dynamics vary widely. CFX is a commercial Computational Fluid Dynamics (CFD) program, used to simulate fluid flow in a variety of applications for over 20 years. The steel tank studied has an outside diameter of 18 m and a height of 7.5 m, is filled with water up to a height of 6.9 m, and subjected to north-south component of the 1940 Elcentro earthquake, whose maximum peak ground acceleration is about 0.31g and maximum ground displacement is about 13cm. It is rigidly connected to the ground and designed according to the Api 650 codes with a thickness of 8 mm throughout. A three-dimensional model is constructed for finite element analysis using Ansys. The fluid region is divided into a number

of identical three-dimensional contained fluid elements (FLUID80) with eight nodes having three degrees of freedom at each node. The fluid boundary conditions at the bottom are zero displacement and rotation. The nodes that are connected entirely by the fluid elements are free to move arbitrarily in three-dimensional space, with the exception of those that are restricted to motion in the bottom surface of the fluid. Fig. 5 depicts the free surface of the fluid.

#### 5. COMPARISON BETWEEN RESULTS

The maximum distribution of pressure given by Matlab and Ansys is presented in Fig. 4 and Table 3-4.

Table 2: The comparison of sloshing frequencies.

mode	Wall Thickness (mm)	Natural Period (T = 1 / f sec.)		
		MATLAB	ANSYS	Eurocode 8
1	8	0.144	0.145	0.145
2	8	0.086	0.084	0.088
3	8	0.064	0.061	0.065
1	12	0.121	0.125	0.128
2	12	0.079	0.081	0.080
3	12	0.059	0.059	0.061

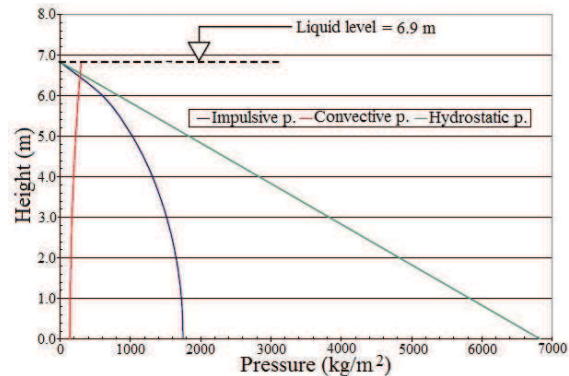
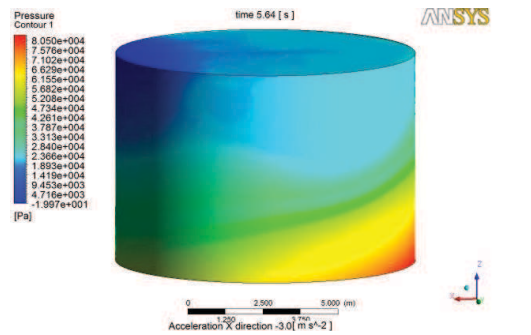


Figure 4: Distribution of pressure ( $kg/m^2$ ) at  $\theta = 0$  given by Ansys-Cfx.

Simulation of Sloshing Waves in a Storage Tank Under Seismic Excitation Using a Spring-Mass-Dashpot Model

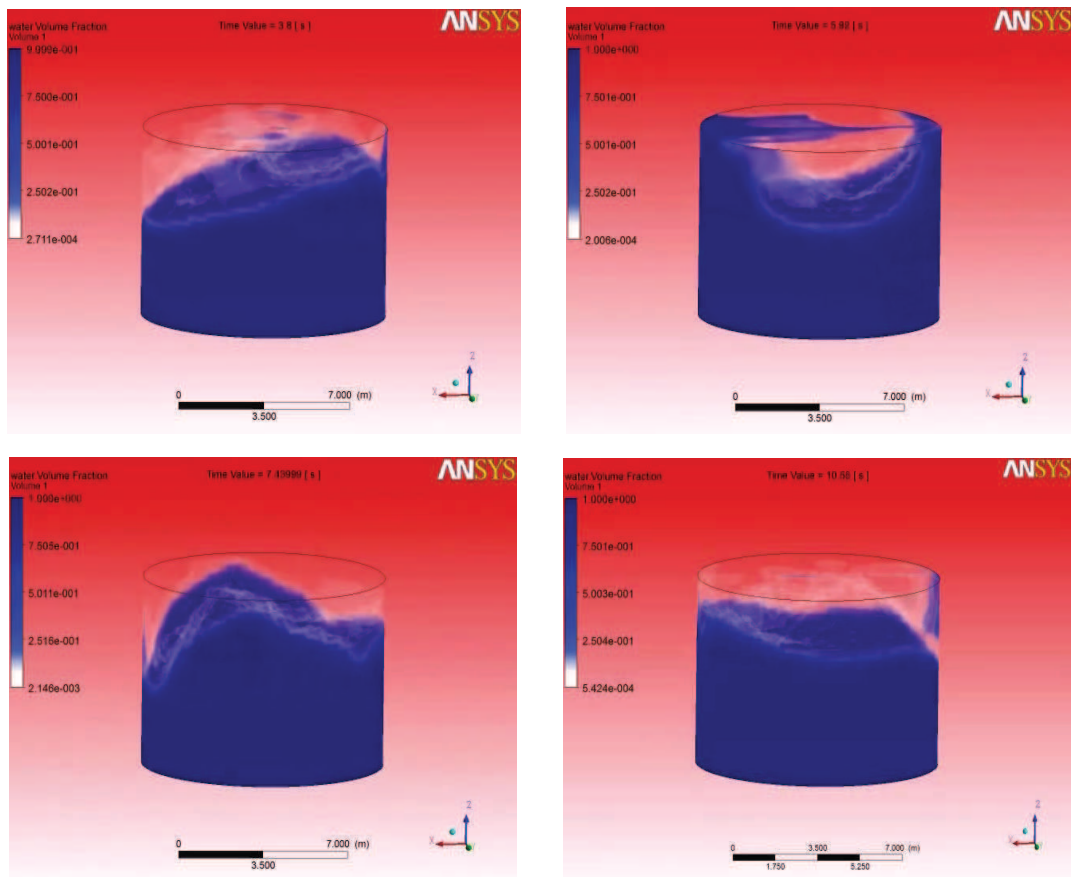


Figure 5: Simulation of sloshing waves in a storage tank under north-south component of the 1940 Elcentro earthquake by Ansys Cfx.

Table 3: Expressions for distribution of impulsive pressure ( $\text{kg/m}^2$ ) given by Matlab.

H (m)	0°	7.5°	15°	22.5°	30°	37.5°	45°	52.5°	60°	67.5°	75°	82.5°	90°
0,000	1750	1735	1691	1617	1516	1388	1238	1065	875	670	453	228	0
0,854	1733	1718	1674	1601	1501	1375	1225	1055	866	663	448	226	0
1,708	1678	1663	1621	1550	1453	1331	1186	1021	839	642	434	219	0
2,562	1582	1569	1528	1462	1370	1255	1119	963	791	605	409	207	0
3,416	1440	1428	1391	1330	1247	1143	1018	877	720	551	373	188	0
4,269	1246	1235	1204	1151	1079	988	881	758	623	477	322	163	0
5,123	982	974	949	908	851	779	695	598	491	376	254	128	0
5,977	617	612	596	570	535	490	436	376	309	236	160	81	0
6,831	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 4: Expressions for distribution of convective pressure ( $\text{kg/m}^2$ ) given by Matlab.

H (m)	0°	7.5°	15°	22.5°	30°	37.5°	45°	52.5°	60°	67.5°	75°	82.5°	90°
0,000	142	141	137	131	123	113	101	87	71	54	37	18	0
0,854	144	143	140	133	125	115	102	88	72	55	37	19	0
1,708	151	150	146	139	131	120	107	92	75	58	39	20	0
2,562	162	161	157	150	140	129	115	99	81	62	42	21	0
3,416	178	177	172	164	154	141	126	108	89	68	46	23	0
4,269	199	198	193	184	173	158	141	121	100	76	52	26	0
5,123	227	225	219	209	196	180	160	138	113	87	59	29	0
5,977	261	259	252	241	226	207	185	159	130	100	68	34	0
6,831	303	301	293	280	262	240	214	185	152	116	78	39	0

## REFERENCES

1. Bridges, T.J. (1982). "A Numerical Simulation of Large Amplitude Sloshing", Proceedings of the 3rd International Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, 269-281.
2. Faltinsen, O.M. (1978). "A Numerical Nonlinear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow", J. of Ship Research, 18(4), 224-241.
3. Mikelis, N.E. (1984). "Sloshing in Partially Filled Liquid Tanks and Its Effect on Ship Motions: Numerical Simulations and Experimental Verification", RINA Spring Meeting, London.
4. Rammerstorfer, F. G. et al., August 1987, "Influence of the Vertical Motion Component on the Plastic Collapse of Earthquake Excited Tanks," Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. K2, Lausanne, Switzerland, pp. 793-798.

---

Kambiz Kangarlou, Postgraduate Student, Department of Structural mechanics of Moscow State University of Civil Engineering. 129337, Russia, Moscow, the Yaroslavl highway, No. 26.

Kave Kangarlou, Assistant prof., Dept. of Electrical Eng., Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

# Finite Element Investigation of Stress Concentration Factor in the Concrete Wall with Openings

*Feirusha S. H. (Kakshar)<sup>1</sup>*

**ABSTRACT:** The objective of this paper is to investigate the stress concentration factor in the concrete wall. In this paper we present the results of a study of stress concentration in the concrete wall, working in condition of plane stress under vertical load, distributed along above edge. In order to achieve this goal, elastic stress state of concrete walls with variety type of openings was modeled by finite element method and analyzed by using COMSOL program.

**Key words:** Stress Concentration Factor, Finite Element Method, Wall with Opening.

## 1. Introduction

In this paper the stress concentration in the vertical loading wall without and with opening is discussed. This research focuses on stress concentration factor (SCF) of vertically loading concrete wall, since this is the stage that a typical wall would be subjected during its service life. In this paper we present the results of a study of the stress concentration in the concrete wall, working in condition of plane stress under vertical load, distributed along above edge.

Improvement of working properties, increasing of resources and reliability of structures are the most important challenge in front of the engineers. To succeed in solving this problem requires the systems approach to optimize all stages of analysis and design of all kinds of the structures. In this work, we touch on only a theoretical calculation of the walls with openings, and improve the accuracy of calculation.

The problem of stress concentration and the regions of stress concentration can be divided into two kinds:

1. The location of load application;
2. Changing of the geometry or physics of the solid body.
  - i. Geometric discontinuities or stress raisers such as holes (openings), notches, and fillets;
  - ii. Surface or internal irregularities (non-homogeneities) such as cracks.

Openings in general are areas of weakness and stress concentration, but needed essentially for lighting and ventilation. There are some norms and architectural recommendations about position of openings in wall. Stress concentration around door and window openings in concrete walls has practical importance because it is commonly the cause cracks or failure. We know that the local failure around any door or window opening in wall can grow into the total failure of the wall. Therefore, the complete study of stress state of the wall, generally, and the concentration of the stress around openings, particularly, appears the main part of the analysis of such structures.

One of the objectives of application of SCF in this study is to achieve better balanced designs of concrete wall. This can lead to economy in expense of materials, cost reduction, and achieving lighter and more efficient configuration of walls and openings. Nowadays, advanced computational programs and technology has made it possible to determinate SCF for any geometric discontinuities or stress raisers such as holes (openings), notches, and fillets.

The purpose of this work is to demonstrate the existence of stress concentration in the vicinity of a geometric discontinuity in a vertically loaded concrete wall, and to obtain an approximate measure of the elastic (theoretical or geometric) stress concentration factor,  $K_t$ . In this case, the discontinuity is simply a square or rectangular through the concrete wall.

Under the stress concentration is meant abruptly local change in stress distribution in a deformed body, caused by different sources and factors: *constructional* (an abruptly change in the shape and dimensions of the cross sections, a discontinuity holes and cutouts, alien inclusions with mechanical properties differentiate from basal material, etc.); *technological* (high difference between mechanical properties of the material in the surface and in the volume of the structure, the presence of cracks); *concentration of external factors* (force, thermal); *cracks occurred during the service*.

On the one hand, the maximum local stress around openings is usually more than the nominal stress, and on the other hand, it correlates to the maximum stress. Failure is predicted by the use SCF,  $K_t$ , which is determined in several manners. For simple geometries and loadings, it may be determined exactly using the theory of elasticity. For more complex problems, the stress concentration factor is determined numerically or experimentally. SCF, generally, is found in graphical form. The SCF around a opening (hole, notch, fillet...) in a homogeneous plate has been investigated in last centuries. [1, 2, 3, 4]

The computational formulation for design of wall with potential stress concentration problems is intended to be used to assist in the design process.

The high stress concentration at the edge of the opening is important in designing of wall. The SCF usually are determined either empirically or numerically using finite element methods.

Stress concentration is described by the following parameters:

*theoretical SCF*, which shows how many times the stress in the concentration zone exceeds nominal value, *gradient of stress variation* in the concentration zone, and etc.

Stress distribution around a hole depends on the stress condition. Kirsch (Kirsch, 1898)

initially studied this problem for a single circular hole under a biaxial stress state. [1]

## 2. SCF's of a 2D problem

One customary way to express the stress is by the net section SCF ( $K_t$ ).  $K_t$  is the ratio of the maximum net section stress ( $\sigma_{max}$ ) to the nominal net section stress ( $\sigma_{nom}$ ). The  $\sigma_{max}$  is due to the stress concentration caused by the geometric features of the net section. For the axially loading members, the  $\sigma_{nom}$  is simply found by dividing the axial load ( $P$ ) by the net section area ( $A_n$ ) where  $A_n$  is the product of net section width ( $w_n$ ) and specimen thickness ( $t$ ). Fig.1

But the solid concrete wall under vertical distributed load (Fig.2) experiences normal stresses  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , and shear stress  $\tau_{xy}$ . The differential equations of equilibrium together with equation for these stresses in a plane elastic body are:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{p}_{v_x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{p}_{v_y} = 0 \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -f(v) \left( \frac{\partial \bar{p}_{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{v_y}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

where  $\bar{p}_{v_x}$ ,  $\bar{p}_{v_y}$  denote the components of the applied body force per unit volume in the x, y directions and  $f(v)$  is a function of Poisson's ratio:

$$f(v) = \begin{cases} 1+v & \text{for plane stress} \\ \frac{1}{1-v} & \text{for plane strain} \end{cases} \quad (4)$$

In the present work it will be determined by the finite element methods (FEM) analysis.

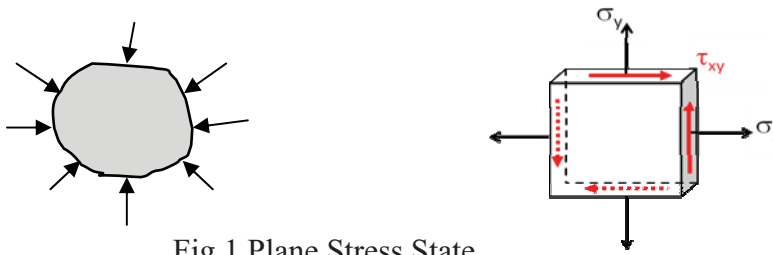


Fig.1 Plane Stress State

SCF is function of:

- i. *the geometry or shape of the structure, but not its size or material;*
- ii. *the type of loading applied to the member; (axial, bending, torsion, or combined)*
- iii. *the shape, size and location of hole and opening; (fillet, radius, ...)*

Stress concentration in isotropic wall with different shape size, and position of cutouts are investigated, and this effect, the concrete wall is considered with square and rectangular, and the normal stress around openings in Y-direction is investigated.

An important feature of the phenomenon of stress concentration is that, while increasing the stress near the cutouts even uniaxial state may come into existence a complicated (2D or 3D) inhomogeneous stress state directly affects on the development of plastic deformation or fractural cracks. Thus, the bearing capacity of the main elements of many structures is usually determined by the stress state and conditions of strength in the concentration regions, because there is first and foremost comes the ultimate state and the destruction.

The study of stress and strain state in the concentration zone is one of the most difficult problems of the theory of elasticity and plasticity.

This is due to:

- The complexity of circuit design elements in concentration zone (the complexity of the geometric model);

- The high intensity of the stresses and strains in the zone of the concentration and, consequently, the necessity to consider the physical and geometric nonlinearity of the elastic problem.
- Need to account of the plasticity and creep (the complexity of the model material). Still, many important aspects of the phenomenon of stress concentration are not comprehensive solution.

For the first time, the solution of the stress distribution around a circular hole for the planar elastic problem was obtained by Kirsch.<sup>[5]</sup>

The stress concentration around holes in thick plate in elastic range was studied by I. I. Vorovich and O. S. Malikina<sup>[6]</sup> & among the classical works we can denote the work of the Neyber G.<sup>[7]</sup>

### 3. Finite element model

The universal availability of general purpose structural analysis computer software has revolutionized the investigation of stress concentration. No longer are there numerous photoelastic stress concentration studies being performed.<sup>[8]</sup> The development of new experimental stress concentration curves has slowed to trickle. Often structural analysis is performed computationally in which the use of SCF is avoided, since a high-stress region is simply part of the computer analysis.

Almost all structural members contain some form of geometrical (a notch, an opening or any abrupt change in cross section) or microstructural discontinuities. The maximum local stress,  $\sigma_{max}$ , normally occurs at these

discontinuities. This maximum local stress is many times greater than the nominal stress,  $\sigma_{nom}$ , of the member. Thus, the discontinuities cause areas of stress concentration within the component, and are often called "stress raisers". In ideally elastic members, the ratio of the maximum stress to the nominal stress is designated, the theoretical stress concentration factor,  $K_t$ .<sup>[9]</sup>

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$$

$K_t$  - theoretical stress-concentration factor.

$\sigma_{nom}$  - nominal normal stress.

Similarly, we can also estimate the highly localized amplification of shear stress in the vicinity of a geometric stress concentration.

$$\tau_{max} = K_{ts} \cdot \tau_{nom}$$

$K_{ts}$  - theoretical stress-concentration factor for shear.

$\tau_{nom}$  - nominal shear stress.

The nominal stress of the above equations is typically derived from the elementary strength of materials equations, using either a net or a gross cross section.

The detailed study of the stress and strain state in stress concentration zones is an important prerequisite for optimal, efficient and reliable designs. Insufficiently rigorous evaluation of the stress state and strength conditions in the stress concentration regions during design may cause a fracture in the highly stressed zones of walls and lead to severe consequences. Highly relevant for the calculation of the walls of modern buildings is the study of stress concentrations in elastic-plastic deformation.

SCF can be derived through experimentation, analysis or computation:

1. Experimental Method. Optical method, such as photoelasticity is widely used for experimentally determining the SC at a point.<sup>[8]</sup> However, several alternative methods have been used: the brittle-coating method, grid method, strain gauge ...
2. Analytical Method – Theory of elasticity.

### 3. Computation Method – Finite element methods.

The optical methods are the most effective for experimental study of stress concentration. And the numerical methods, advisability, which have been seen for a long time, acquire a special significance at this time. On the one hand, this is associated with increased reliability requirements of modern engineering structures, the calculation of which should be based on the latest ideas about the behavior of the material in different loading conditions. It shall be ensured high accuracy of calculation. On the other hand, the emergence of electronic computing machines has led to a reassessment of the effectiveness of approximate methods associated with significant computing operations, which in the past limited their use. Essentially, that the engineering calculations of strength, as a rule, do not require absolute accuracy. Moreover, it usually, make no sense, as much as, baseline data used in the calculation as material properties, acting loads, temperature modes, and etc. are not exact quantities. It's clear that the calculations must be maintained approximation taking into account the degree of accuracy of initial and requirements applicable to the finite precision of calculations of the strength of the structures. All this speaks in favor of the numerical calculation methods.

With this model we can obtain qualitative and quantitative assessment of structural reliability under operational conditions. Simultaneously are solved two main problems:

1. Given an analysis of reliability of the structural under different load conditions and, also during service.
2. Optimization of structures for a given rate of reliability on purpose to obtain the minimum weight, maximum cost effectiveness, etc.

The first mathematical analyses of stress concentrations were published in 1937. Suggested form solutions are available for the

simple stress states and not complex geometries. However, for more complex cases, experimental methods for measuring highly localized stresses (photoelastic tests, precision strain gage tests, membrane analogy for torsion, etc.) and computerized finite element solutions have been used. The results of the studies are available in the form of published graphs.<sup>[2,3]</sup>

It will be observed, that the stress concentration graphs are theoretical factors based on a theoretical homogenous, isotropic, and elastic material.

On this basis, the finite element models performed was aimed to investigate the SCF for wall with different shapes of openings, and to study and define the stress concentration factor for concrete wall with different openings at the middle part of the walls.

This work describes an analytical model, which was developed using the finite element program COMSOL, to investigate the analysis of SCF around openings in the concrete wall. The concrete wall is modeled in the COMSOL Multiphysics modeling

environment with customized user interfaces and functionality optimized for structural analysis.

Previous research on walls' SCF, in general, is extremely limited and focuses on empirical formulas.<sup>[2]</sup> To assess the strength under all conditions is important to determine, if it is possible, a more accurate view of the distribution of stresses and strains in the concentration region for specific states of the material: elastic, plastic and creep strains.

In this study we will examine the theoretical method (FEM) for determination of the true state of stress in the vicinity of stress raisers.

All problems investigated in the present work were modeled using Lagrange solid elements. Material properties: stiffness ( $E$ ) of 25GPa and Poisson's ratio ( $\nu$ ) of 0.33. All presented models are loaded only in the Y-axis direction, with constant the thickness dimension oriented with the model's z-axis (Thickness=10cm). The model's x-axis therefore describes the width dimension, perpendicular to the loading direction. The problems investigated here vary in area and shape of hole. (Fig.2)

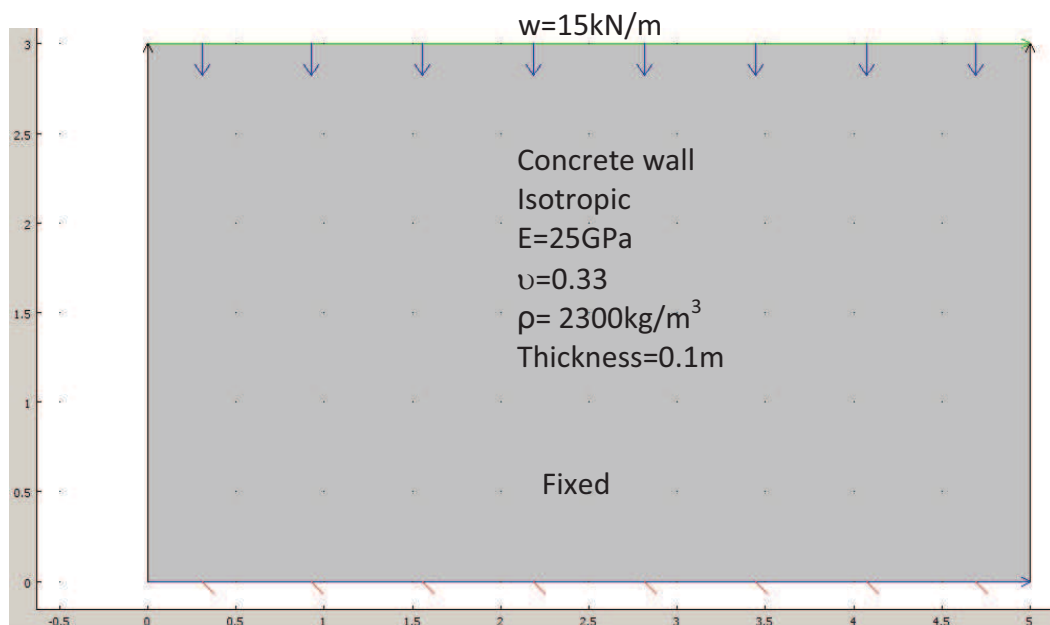


Fig. 2 Vertically Loaded Concrete Wall

#### 4. Some remarks about the stress concentration around openings

If the dimensions of a stress raiser are much smaller than those of the structural member, its influence is usually limited to a localized area or volume for a 3-dimensional case. That is, the global stress distribution of the member except for the localized area is the same as that for the member without the stress raiser. This kind of problem is referred to as localized stress concentration. Usually stress concentration theory deals with the localized stress concentration problems. The simplest way to solve these problems is to separate this localized part from the member, then to determine  $K_t$  by using the formulas and curves (or as presented in this work by using FEM) of a simple case with a similar raiser shape and loading. If a wide stress field is affected, the problem is called nonlocal stress concentration and can be quite complicated. Then a full-fledged stress analysis of the problem may be essential, probably with general purpose structural analysis computer software.<sup>[3]</sup>

In order to limit the size of the openings and identified the shape and position of these openings in concrete wall under vertical load need to be determined the vertical stress around opening. The model is proposed (Table1 and 2) allows determining the location of the critical stress around opening in the concrete wall.

For the wall with openings, the maximum normal stress,  $\sigma_y$ , around holes depends on the size of the opening. For this purpose, the opening size factor is defined by Michael G. Allen and Yahya C. Kurama.<sup>[10]</sup>

The explicated above is issue of the day for the calculation of walls with openings. The tendency to reduce the weight of the buildings leads to the necessity to use high-strength concrete, which, as a rule, has a higher sensitivity to stress concentration.

The most comprehensive source of stress concentration factors for commonly

encountered geometries has been compiled by Peterson (1953, 1974).<sup>[2]</sup> However in these references, the stress concentration factors for only filleted shafts and plates with holes are available and are only approximations based on photo elastic results for two-dimensional strips. The relation between two and three dimensional stress concentration factors is made by assuming an analogy exists between a circumferential fillet and a circumferential groove. This is the limitation of the Peterson Graphs for estimation of the SCF.<sup>[3]</sup>

The numerical techniques are most effective due to advancement of high and large memory computers. These techniques can be applied for any minor change in the problem, which reduces the cost and time required for manufacturing and testing of several prototypes.

#### 5. Results and discussion

However, when the wall contains discontinuity, such as shown openings (Table1 and 2) sudden change in cross section, high localized stresses may also occur near the discontinuity. As shown in table1, for wall with openings, high stress distribution will be at the chord along GH line of the openings where the cross sectional of the member will be at the least.

The figures and graphs in tables 1 show the 3D deformed shape, distribution of normal stress  $\sigma_y$  along Lines EF and GH, SCF  $K_t$  depending to position of the square hole in concrete wall, and also comparison with the solid wall. The described FEM model was verified by comparing the results of stress along Y-axis for 5 types of wall, first from which is the solid concrete wall (without opening) and others are with opening, as shown in table1.

Thus, the comparison between SCF for wall with opening was done. The modeling, position, and dimensions of the openings in the finite element models are shown in table1. The FE analyses of the mentioned above

walls show that the most critical section for  $\sigma_y$  is line GH, in other words, the maximum stress locates near the opening along vertical line.

As we can see from table1 the location of the maximum normal stress for wall without opening is along the base of the wall, but for wall with opening is around opening along vertical line GH. The presented in table1 results show how the opening size affects on the distribution of the normal stress.

As noted above, the shape of the opening significantly, exerts on the kind and value of the normal stress in Y- axis direction (see results in table2). Based on the finite element analysis, the results of the stress state investigation depending to the shape of the cutouts are presented in table2.

As we can see, when the size of the opening increases, the normal stress  $\sigma_y$  around openings increases, consequently the SCF,  $K_t$ , increases.

This research provides an overview for the design of the required reinforcement in the location of maximum stress at all sides of the opening. Design and placement of reinforcement for wall with openings, particularly, described in Design of Rectangular Openings in Precast walls Under Combined Vertical and Lateral Loads.<sup>[10]</sup>

The FEA indicate that the directions of the principal stresses around opening are mostly horizontal.

For symmetrical wall the stress at both right and left regions of opening are similar, but the concentration of stresses above opening differs from stresses below opening with connect to different loading and supporting condition.

The concentration of normal stress acting along section GH is not uniform, easily; we can observe that the stress at corners of the opening reaches its maximum magnitude.

## 6. Conclusion

1. The finite element model is used to conduct a stress investigation of concentration factor in concrete wall.

2. The parameters of studied are the opening size, shape, and position.

3. The variability investigation is studied to identify the stress concentration regions in the wall where maximum normal stresses occur.

4. The results indicate that the maximum stresses are around opening along vertical side of opening.

5. The presence of openings can affect the location and magnitude of the maximum normal stress around openings.

6. Using a computer program COMSOL allows more accurate approach to the problem of stress concentration.

7. This study shows that the size of the openings has a significant effect on  $K_t$ .

8. As can be seen from the presented results, the position of openings also affects on the values of normal stress and  $K_t$ .

9. Given that the main problem against the engineer - is to know the value of stress at any point in structure, and since this work gives a complete picture of the state of stress in each zone of the wall, leads us to a more efficient use of the material, but also helps control the shape of the openings and their position. As a consequence, leads to the economic feasibility of the structural analysis and design.

Table1- Effect of the position of the opening on the distribution of the normal stress and SCF

	wall without opening	wall with opening	$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominal}}$
2D, $\sigma_y$			
3D, $\sigma_y$			
$\sigma_y$ , along EF			4
$\sigma_y$ , along GH			7.6

Table1-Cont'd

	wall without opening	wall with opening	$K_f = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominal}}$
2D, $\sigma_y$			
3D, $\sigma_y$			
$\sigma_y$ , along EF	<p>Normal Stress in Y-direction along line EF</p>	<p>Normal Stress in Y-direction along line EF</p>	4
$\sigma_y$ , along GH	<p>Normal Stress in Y-direction along line GH</p>	<p>Normal stress in Y-direction along line GH</p>	7.2

Table1-Cont'd

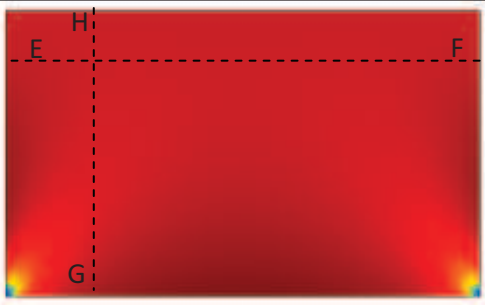
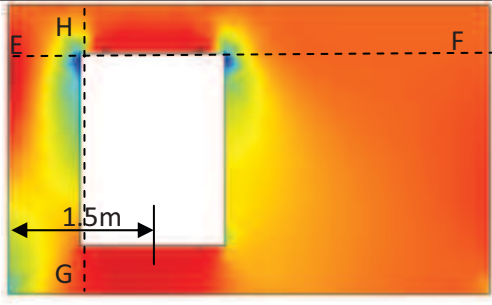
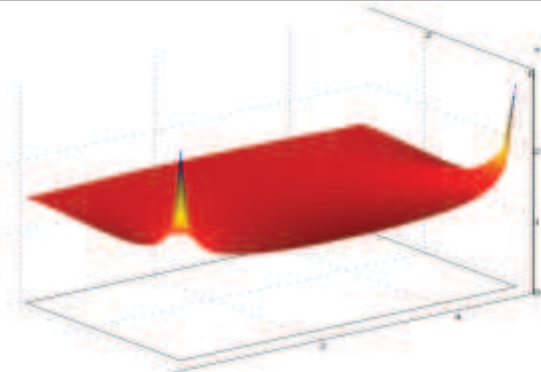
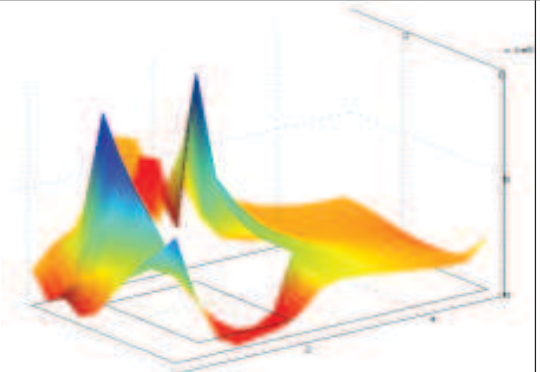
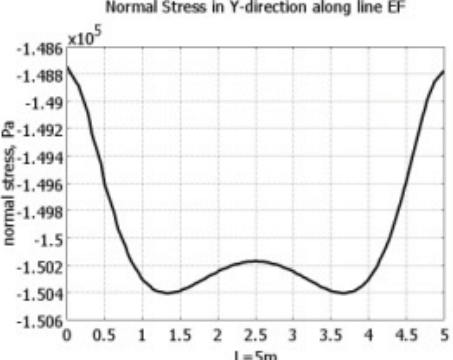
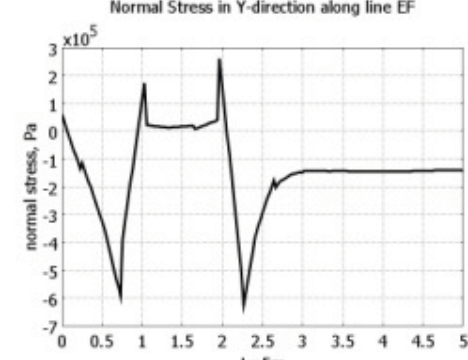
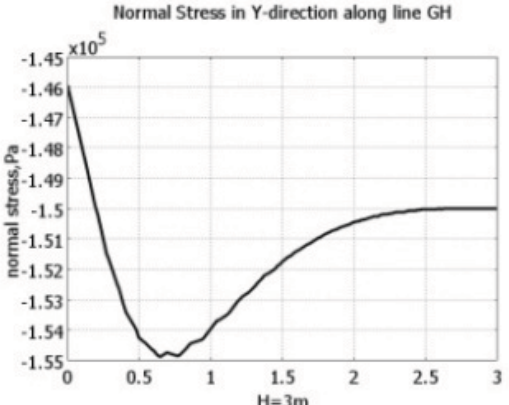
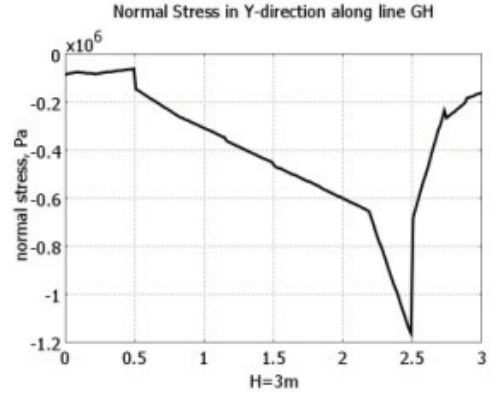
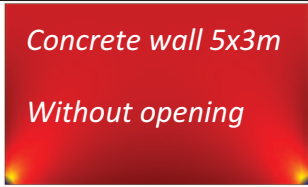

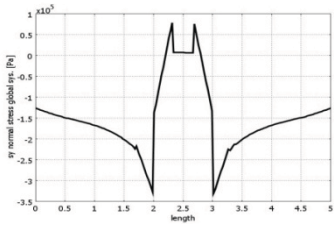
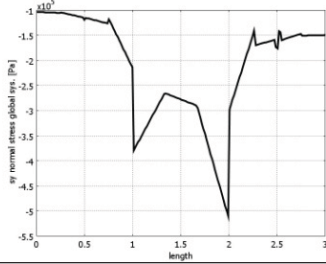

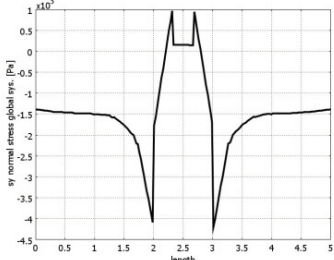
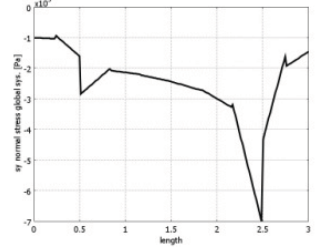
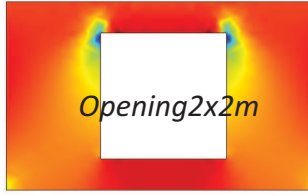
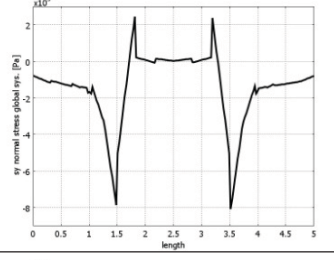
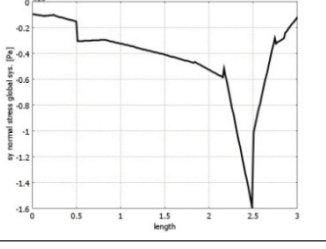
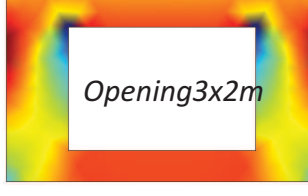
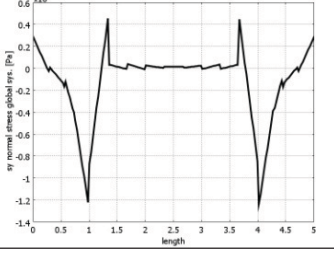
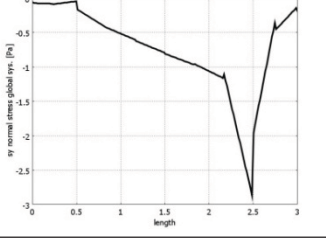
	wall without opening	wall with opening	$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominal}}$
2D, $\sigma_y$			
3D, $\sigma_y$			
$\sigma_y$ , along EF	<p>Normal Stress in Y-direction along line EF</p> 	<p>Normal Stress in Y-direction along line EF</p> 	4.5
$\sigma_y$ , along GH	<p>Normal Stress in Y-direction along line GH</p> 	<p>Normal Stress in Y-direction along line GH</p> 	7.7

Table1-Cont'd

	wall without opening	wall with opening	$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{no\ min\ al}}$
2D, $\sigma_y$			
3D, $\sigma_y$			
$\sigma_y$ , along EF	<p>Normal Stress in Y-direction along line EF</p>	<p>Normal Stress in Y-direction along EF</p>	5
$\sigma_y$ , along GH	<p>Normal stress in Y-direction along line GH</p>	<p>Normal Sstress in Y-direction along line GH</p>	6

Table-2 SCF and distribution of  $\sigma_y$  around opening depending on the hole's size.

No	$\sigma_y$	Stress along horizontal line EF	Stress along horizontal line GH	$K_t$
1		-	-	-
2				1.5
3				1.6
4				2.0
5				2.4

## 10. References

1. Timoshenko SP, Goodier JN, Theory of elasticity. Singapore: McGraw-Hill; 1970.
2. Peterson, R. E. (1974) *Stress Concentration Factors*, John Wiley and Sons (New York).
3. Pilkey, W.D., 1997, *Stress Concentration Factor*, John Wiley and Sons (New York), 2<sup>nd</sup> edition 524p .
4. Savin, G.N., 1961. *Stress Concentration around Holes*. International series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. Pergamon Press, New York.
5. [Kirsch V. Dtsch. Ing. Juli 16, 1898, Bd. 42]
6. [Воровичем И. И., Маликиной О. С. О концентрации напряжений в толстой плите. – В кн. Концентрация напряжений. Киев, Наука – думка, 1973, вып. 3]ю
7. [нейбер Г. Концентрация напряжений. М. Л. ОГИЗ, 1947]ю
8. Ahmad Loqman, Andiyanto Sutandar, Julian Chan, Chen Guang, and Chou Shou. An Experimental Investigation of Stress Concentration Factor. School of Mechanical & Production Engineering Nanyang Technological University, 2000.
9. Hibbeler, R.C. (1997) *Mechanics of Materials*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.
10. Design of Rectangular Openings in Precast walls Under Vertical Loads, Michael G. Allen and Yahya C. Kurama January - February 2002, PCI JOURNAL pp-50-68

---

<sup>1)</sup> Dr. Feirusha Salih Hamad (Kakshar), PhD, Civil Engineering Department, College of engineering, University of Salahaddin – Hawler 44002, Kirkuk St., Erbil-44001, Kurdistan, Iraq.  
Email: [feirushah@gmail.com](mailto:feirushah@gmail.com)

## SELECTED VARIATIONAL METHODS IN MECHANICS BOUNDARY PROBLEM

*Ewa Nowak<sup>1</sup>, Katarzyna Nowak<sup>2</sup>*

1 Assistant in the Department of Mechanics, of Metal Structures and of Computer Science in Kielce and PhD student

2 Assistant in the Department of Mechanics, of Metal Structures and of Computer Science in Kielce and PhD student

**ABSTRACT:** This paper proposes a method of basis variations to create systems of linear algebraic equations for numerical solution of linear and nonlinear boundary problems of mechanics. The objective is to estimate the effectiveness of this method against the classical methods, for example Ritz and Galerkin methods. The considerations are illustrated by examples of the beam deflection analysis, taking into account the changes in stiffness of the cross sections. The algorithm for computing the problem was formulated in the *Mathematica* package. Based on the obtained values of deflections in selected nodes it has been concluded that the basis variations method allows obtaine similar results to the method of Ritz and Galerkin.

**Key words:** Ritz method, Galerkin method, the method of basis variations.

### 1. INTRODUCTION

Throughout history, scientists and philosophers have been trying to find the general law to explain special phenomenon of nature. As a result of years of scientific research and discussion, reflected in the Works by Galileo, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Hamilton and others, it was found that practically all the issues can be presented as achieving a minimum. According to this rule the functionals (integrals) describing exactly a considered problem, take the smallest value. For example, in mechanics equilibrium conditions are such that change in the total potential energy reaches the minimum value, and the motion of mechanical systems, according to Hamilton's principle is determined by the minimum kinetic potential. All these rules have a common are characteristic of and join into one group called "variational principles" [1].

Most of the tasks of structural mechanics are limited to solving differential equations with given boundary conditions. Exact solutions are very cumbersome and frequently impossible, including those due to the difficulties in finding integrals of equations which govern these laws. Variational methods allow obtaine approximate solutions to many problems with the desired accuracy. The idea of these methods is such for a boundary problem, an integral expression is given, which in order to solve that problem

takes its mimimum value. The task is thus to find suitable function, for which the necessary condition for the existence of the extremum is just that boundary problem.

Variational problems can be solved using direct methods whose basic idea is to use generalized coordinates. They allow to obtaine a solution for the infinite-dimensional problem by reducing it to analysis of system with a finite number of freedom degrees [1]. In this paper, the analysis of selected problems of beam structural mechanics employed classical formulations of the known variational methods, such as the Ritz and Galerkin method and the method of basis variations.

### 2. RITZ METHOD

The Ritz method is a variational method based on global formulations issues, which in mechanics include the principle of minimum potential energy or the more general, the principle of virtual work. The classical formulation of the Ritz method [1, 2, 3, 4] for the rod elements is reduced to finding the point of stationarity of the functional:

$$I(v) = \int_a^b F(x, v, v') dx \quad (1)$$

which approximates the function dependent on the adopted set of *base functions*:

$$v(x) \approx v_n(x) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (2)$$

where  $\varphi_0$  is the function which satisfies the heterogeneous boundary conditions.

The proposed approximate solution (2) is a linear combination of basis functions  $\varphi_i$  called as well test or acceptable functions, and of the unknown scalar multipliers (coefficients)  $a_i$ . Acceptable functions  $\varphi_i(x)$  should be linearly independent, continuous, differentiable up to the highest order derivative occurring in the functional and should meet the geometric boundary conditions. After substituting (2) to (1) functional  $I(v)$  is transformed into function  $I(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Stationarity of the functional condition is reset to equating to zero its derivatives in the functions of the Ritz:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \frac{\partial I}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \quad (3)$$

From the solution of the system of equations (3) we obtain coefficients  $a_i$ , which substituted into (2) are the sought for approximation which satisfies the extremum of the functional (1).

The starting point is in the determining the appropriate functional, which we construct using the principle of virtual work. In the issues of mechanics change of potential energy  $E_p(v)$  may be the functional:

$$I(v) = E_p(v) = E_s - L \quad (4)$$

where  $E_s$  is the energy of elastic deformation, and  $L$  is the potential of external load.

### 3. GALERKIN METHOD

The Galerkin method (Bubnov-Galerkin method) [1,5,6,7] is closely related to the assumptions of the Ritz and a broad spectrum of mechanics. It is an orthogonalization method used to solve problems in their local formulations. In the formulation of the problem the functional (1) will be used again as well as its first variation of  $\delta I(v)$ . The necessary condition the existence of an extremum, taking into account the

boundary conditions for function  $v(x)$ , takes the form:

$$\delta I(v) = \int_a^b [L(v)] \delta v dx = 0 \quad (5)$$

The desired function  $v(x)$ , as in the Ritz method, is searched for with a certain approximation:

$$v(x) \approx v_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (6)$$

with the difference that the test functions  $\varphi_i(x)$  should comply with all the boundary conditions that must be understood by the conditions displacement and force boundary conditions. After substituting (6) to (5) the expression  $L(v)$  will be a function of parameters  $a_i$ . In equation (5)  $\delta v(x)$  can be any function in the area of integration, with one restriction that is on the edge it has to take of zero values. Variations  $\delta v(x)$  can be realized giving to the coefficients  $a_i$  other small changes  $\delta a_i$  then the equation (1) takes the form:

$$\int_a^b [L(v)] \delta a_i v_i(x) dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Due to the fact that changes in  $\delta a_i$  are constant and different from zero, correlation (7) leads to a system of linear algebraic equations relative to unknown parameters  $a_i$ , called the Bubnov-Galerkin equations

$$\int_a^b [L(v)] v_i(x) dx = 0 \quad (8)$$

### 4. THE METHOD OF BASIS VARIATIONS

The method of basis variations [7,8] allows creating algebraic equations for the numerical solution of linear and nonlinear boundary problems. A characteristic feature of this method is the algorithmic and the possibility of mathematical formulas for the allocation of the input data. This method uses the characteristic properties of

linear operators  $L$  and bilinear functionals  $B(u, v)$ , namely this is the additivity:

$$\begin{aligned} L(u + v) &= Lu + Lv \\ B(u + w, v) &= B(u, v) + B(w, v) \\ B(u, v + w) &= B(u, v) + B(u, w) \end{aligned} \quad (9)$$

and homogeneity:

$$\begin{aligned} L(\alpha u) &= \alpha Lu \\ B(\alpha u, v) &= B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v) \end{aligned} \quad (10)$$

Using the Riesz theorem [9] bilinear functional  $B$  corresponds to a linear operator  $L$  (that is, there is a clear correspondence between them) and takes the form:

$$B(u, v) = (Lu, v) = (u, L^*v) \quad (11)$$

where  $L^*$  is the operator adjoint to operator  $L$ .

Solving the boundary problems considered to be a convenient record is considered functional in the form of (11), independently of whether the functional has the physical meaning. The looking function which takes part in the differential operator in the transition to the functional is included in the integral expression. During this process, the order of derivative of the unknown function is reducing as well as the number of components correctly normalized boundary conditions. In formulating the problem by a bilinear functional, properly chosen boundary conditions are considered without the need of their additional description. In this final discrete areas the linear operator corresponding to the functional is uniquely determined by the matrix  $A = \{a_{ij}\}$ . In this case, the value of each element of the matrix of the  $i$ -th row and  $j$ -th column can be calculated from the formula:

$$a_{ij} = B(e^{(i)}, e^{(j)}) \quad (12)$$

or by the operator  $L$ :

$$a_{ij} = L(e^{(j)})_i \quad (13)$$

In the method of basis variations, to present the elements of the matrix, which is corresponding to finite functionals and operators in formulas (12) and (13), unit (basic) vectors  $e^{(i)}$  and  $e^{(j)}$  are used. In the case of a single scalar vector, its arbitrary  $k$ -th element is equal to:

$$e_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } k = m \\ 0, & \text{gdy } k \neq m \end{cases} \quad (14)$$

## 5. EXAMPLES AND CONCLUSIONS

The presentation of the effectiveness of the method of basis variations, in comparison to the classical Ritz and Galerkin formulations, shown in the examples of a beam bending and compressed. In the analysis the input data set (load forces,  $P, S$ , distributed load  $p$  perpendicular to the axis of the element) and the initial parameters of the task ( $E, I$ ). For each structure schema the calculation algorithm executed in the package *Mathematica* environment was built. The work shows the results of the deflections for the two ways of beams supporting (fig. 1, fig. 3). In both cases the following were adopted: the length  $l = 1$  [m], the height of the cross section of  $b = 0.1$  [m] and module of elasticity of steel  $E = 210$  [GPa]. For the beam shown in figure 1, an analysis was carried out with variable moment of inertia  $I(x) = (l + x(1-x)) 10^{-6}$  [m<sup>4</sup>] (fig. 2a) or for the constant cross-section IPE100 (fig.2b). The results of this analysis are presented in figure 2.

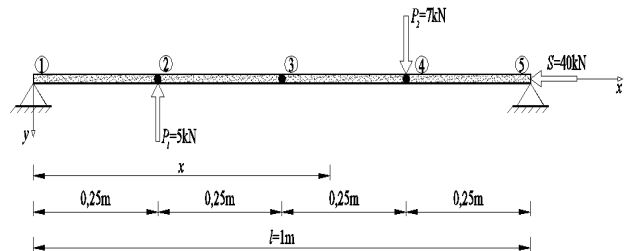


Fig. 1. Scheme of the beam 1

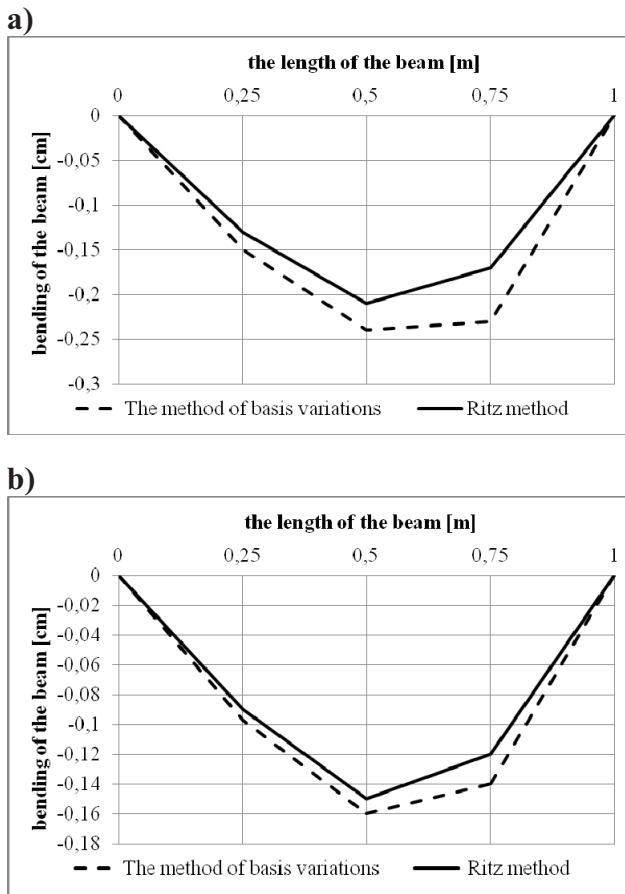


Fig. 2. The graph for a beam deflection 1: a) the variable moment of inertia, b) a constant moment of inertia

For the beam shown in figure 3, an analysis was carried out with regard to the constant cross-section IPE 100. The results obtained using the method of basis variations and the Galerkin approach is illustrated in figure 4.

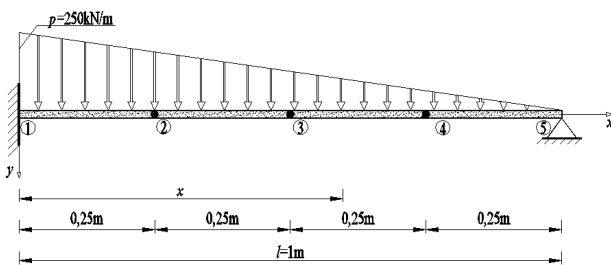


Fig. 3. Scheme of the beam 2

On the basis of the analyzed examples it was demonstrated that the results obtained using the method of Ritz, Galerkin and of basis variations are convergent. Differences in the results pre-

sented in graphs (fig 2, fig 4.) are of the order of 1%-6% (if the deflections are given in millimeters difference becomes insignificant). For more complex structures, in order to increase the accuracy of the method of basis variations, the discretization step should be concentrated, but it does not complicate the issue and does not change the algorithm.

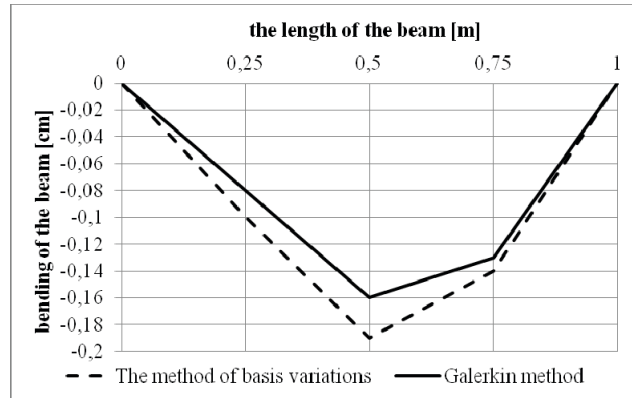


Fig. 4. The graph for a beam deflection 2

Advantages of this method include the possibility of simplifying mathematical calculations and the algorithmic visual way of formulating issues. The functional that describes the problem tasks (and more specifically the integrand expression) or a differential operator equation of the boundary problem can be written in explicit form, with the formal participation of unknown function. Changing the concept of solution of the problem can be efficiently achieved by the possibility of concluding this feature in the initial data. The problem can also be formulated in a single expression with the initial assumptions that contain the boundary conditions. Additional simplification of the calculation is to use the simplest (unit) basis function. In conclusion, the method of basis variations is an universal method limiting to a minimum the risk of error.

## LITERATURE

1. Sobiesiak K.: The variational method in the construction mechanics and theory of elasticity, Technical University of Lublin, Lublin 1982.
2. Glabisz W.: Mathematica in construction, Technical University of Wrocław, Wrocław 2003.
3. Radwańska M.: Computer methods in selected problems of structural mechanics, Technical University of Kraków, Krakow 2004.
4. Rakowski G.: Elasticity-problems and solutions. Analytical and Numerical Methods, Technical University of Kielce, Kielce 2001.
5. Awrejcewicz J., Vadim A.K.: Chaotic dynamics of beams, plates and shells. Numerical methods of Bubnov-Galerkin and finite difference, Publisher Scientific-Technical, Warsaw 2005.
6. Cichoń Cz.: Calculation methods - selected issues, Technical University of Kielce, Kielce 2005
7. Sidorov V.N.: Lectures of the strength of materials and the theory of elasticity, Moscow, 2002.
8. Sidorov V.N., Nowak E.: Application of the method of basis variations for linear and nonlinear problems solving and issues of mechanics of structures, Materials of the Conference from XX Polish-Russian-Slovak Seminar of the scientific, Warsaw-Wrocław 2011.
9. Ахмезер Н.И.: Lectures on the calculus of variations, Moscow, Science, 1965.

---

<sup>1)</sup> Ewa Nowak, Faculty of Engineering and the Environment, Technical University in Kielce  
e-mail: [e.nowak@tu.kielce.pl](mailto:e.nowak@tu.kielce.pl)

<sup>2)</sup> Katarzyna Nowak, Faculty of Engineering and the Environment, Technical University in Kielce  
e-mail: [k.nowak@tu.kielce.pl](mailto:k.nowak@tu.kielce.pl)

# INVESTIGATION OF PARALLEL COMPUTATIONAL CAPABILITIES OF MODERN FREELY GPU SOLVERS

*Alexander V. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** This article reviews the existing shareware solvers that run on the graphical device of computer. The purpose of this review is to explore the possibilities and limitations of these parallel solvers for linear algebraic problems that arise in the Research and Educational Centre of computer modeling at MSUCE and Research & Engineering Center StaDyO. Explored new possibilities of using a GPU in PETSc suit and compared with the results without using of GPU. Research is carried out the CUSP library, which was created specifically for the problems of linear algebra on GPU. Studied new MAGMA project, which is analogous to LAPACK for the GPU.

**Key words:** linear algebraic problems, GPGPU (General-purpose computing on graphics processing units), CUDA, parallel solvers, libraries: PETSc, CUSP, MAGMA.

## INTRODUCTON

Purpose of present investigation is overviewing of current modern freely GPU (Graphics processing unit) based solvers, how fast they can solve tasks that occurred with Russian finite element program package STADYO [1] and what need to do to make easy GPU based solution.

### 1. NVIDIA CUDA

CUDA [2] gives developers access to the virtual instruction set and memory of the parallel computational elements in CUDA GPUs. Using CUDA, the latest Nvidia GPUs become accessible for computation like CPUs. Unlike CPUs however, GPUs have a parallel throughput architecture that emphasizes executing many concurrent threads slowly, rather than executing a single thread very quickly. This approach of solving general purpose problems on GPUs is known as GPGPU [3].

### 2. PETSc

PETSc [4], pronounced PET-see, is a suite of data structures and routines for the scalable (parallel) solution of scientific applications modeled by partial differential equations. It supports MPI [5], shared memory pthreads, and NVIDIA GPUs, as well as hybrid MPI-shared memory

pthread or MPI-GPU parallelism. PETSc provides own Krylov methods, own preconditioners and third party direct solvers.

*Krylov methods:* Richardson, Chebychev, Conjugate Gradients, Generalized Minimal Residual method, Stabilized version of BiConjugate Gradient Squared, a transpose free Quasi Minimal Residual, Conjugate Residuals, Conjugate Gradient Squared, Biconjugate gradient method, Minimum Residual, Flexible Generalized Minimal Residual, Sparse Linear Equations and Least Squares, Sparse Symmetric Equations, GMRES with approximations to the error from previous restart cycles, Generalized Conjugate Residual, Conjugate Gradient without explicitly forming.

*Preconditioners:* Jacobi, Point block Jacobi, Ruccessive over Relaxation, point block SOR, block Jacobi, additive Schwarz, Incomplete factorizations, Incomplete Cholesky factorization, multigrid preconditioning, Balancing Neumann-Neumann.

*Direct solvers:* LU, Cholesky, QR, XXt and XYt.

#### *PETSc on GPU*

PETSc algebraic solvers now run on Nvidia GPU systems. This sometimes provides an alternative high performance low cost solution technique.

PETSc built on NVIDIA CUSP and THRUST [6] template libraries.

- NVIDIA THRUST - C++ templated headers similar to parts of STL

- NVIDIA CUSP - C++ numerical linear algebra templated headers

Sparse Matrices on GPUs:

- Matrices are generated on CPU
- Data copied down on demand (never copied up)

All of the Krylov methods except KSPBCGS run on the GPU. The only preconditioners to run directly on the GPU are Jacobi, SACUSP, SACUSPPOLY, and AINVCUSP.

### PETSc Test

Test model is a model of an air tank from nuclear power plant. Stiffness matrix has 120'708 rows, 120'708 columns and 5'614'198 (11'228'396 for non-symmetric) non-zero elements.

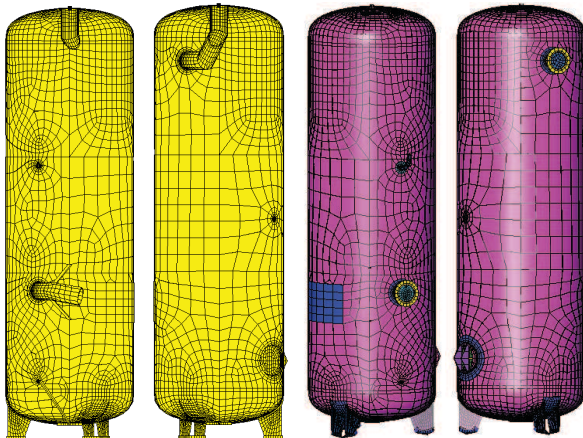


Figure 1. FE model of an air tank from nuclear power plant.

In this test the relative convergence tolerance is  $1e-07$ . Problem consequentially solved on CPU and CPU + GPU, and also with MPI type parallelization with 2 cores on CPU and 2 cores on CPU + GPU. System configuration is Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (**96 CUDA Cores**).

Solver was preconditioned conjugate residuals method [7]. Preconditioners:

- Jacobi (i.e. diagonal scaling preconditioning)

- SOR (successive over relaxation, Gauss-Seidel) preconditioning. Not a true parallel SOR, in parallel this implementation corresponds to block Jacobi with SOR on each block.

Results with Jacobi preconditioner shows that in consequential mode GPU + CPU are about 2 times faster than single CPU. MPI parallelization slows CPU + GPU mode, but speed up CPU mode.

Results with SOR preconditioner shows that this preconditioner without any GPU optimizations solve system much faster than Jacobi preconditioner with GPU parallelization mode, and that there are still a lot of work with GPU optimizations.

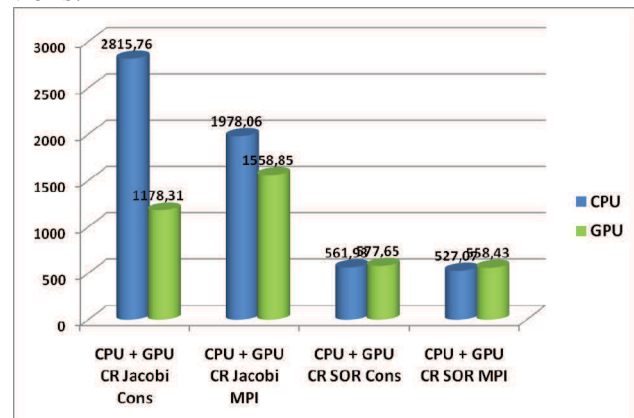


Figure 2. Histogram of test results.

### 3. CUSP

Cusp [8] is a library for sparse linear algebra and graph computations on CUDA. Cusp provides a flexible, high-level interface for manipulating sparse matrices and solving sparse linear systems. Cusp provides support for reading and writing MatrixMarket files.

Cusp provides a variety of iterative methods for solving sparse linear systems. Established Krylov subspace methods are available:

- Conjugate-Gradient (CG)
- Biconjugate Gradient (BiCG)
- Biconjugate Gradient Stabilized (BiCGstab)
- Generalized Minimum Residual (GMRES)
- Multi-mass Conjugate-Gradient (CG-M)

- Multi-mass Biconjugate Gradient stabilized (BiCGstab-M)

Preconditioners are a way to improve the rate of convergence of iterative solvers. The good preconditioner is fast to compute and approximates the inverse of the matrix in some sense. Cusp provides the following preconditioners:

- Algebraic Multigrid (AMG) based on Smoothed Aggregation
- Approximate Inverse (AINV)

- Diagonal

*CUSP Test*

“Tab” model – simple object like “stool”. Size of stiffness matrix is 678 rows, 678 columns and 2331 (4662 for non-symmetric) non-zero elements. Relative tolerance  $10^{-7}$ , maximum iterations 5000. System configuration is Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (**96 CUDA Cores**).

	No Preconditioner	Smoothed Aggregation algebraic multigrid preconditioner	Diagonal preconditioner
Conjugate Gradient method	Successfully converged after 1760 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Biconjugate Gradient method	Successfully converged after 1765 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Biconjugate Gradient Stabilized method	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Generalized Minimum Residual method	Failed to converge after 5000 iterations	nan	nan

This results show that some solvers and all preconditioners that provide CUSP are incompatible with finite-element problems.

**4. MAGMA**

The MAGMA (Matrix Algebra on GPU and Multicore Architectures) [9] project aims to develop a dense linear algebra library similar to LAPACK but for heterogeneous/hybrid architectures, starting with current "Multicore+GPU" systems.

The MAGMA research is based on the idea that, to address the complex challenges of the emerging hybrid environments, optimal software solutions will themselves have to hybridize, combining the strengths of different algorithms within a single framework. Building on this idea, we aim to design linear algebra algorithms and frame-

works for hybrid manycore and GPUs systems that can enable applications to fully exploit the power that each of the hybrid components offers.

MAGMA 1.0 is intended for a single CUDA enabled NVIDIA GPU. It extends version 0.2 by adding support for the Fermi GPUs. Included are routines for the following algorithms:

- LU, QR, and Cholesky factorizations in both real and complex arithmetic
- Hessenberg, bidiagonal, and tridiagonal reductions in both real and complex arithmetic
- Linear solvers based on LU, QR, and Cholesky in both real and complex arithmetic
- Eigen and singular value problem solvers in both real and complex arithmetic
- Generalized Hermitian-definite eigenproblem solvers;

- Mixed-precision iterative refinement solvers based on LU, QR, and Cholesky in both real and complex arithmetic
- MAGMA BLAS in real arithmetic (single and double), including gemm, gemv, symv, and trsm

#### MAGMA Test

DGESV (LAPACK BENCHMARK) solve in double precision respectively  $A * X = B$  where  $A$  is an  $M$ -by- $N$  matrix and  $X$  and  $B$  are  $N$ -by- $N$ RHS matrices.

$$\text{MFLOPS} = \frac{(1 * 10^{-6}) * [(\frac{2}{3}) * N^3 + 2 * N^2]}{(\text{CPU seconds})}$$

GPU Results on system Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (96 CUDA Cores):

N	NRHS	GFlop/s	$\ b - Ax\  / \ A\ $
1024	100	8.86	2.819232e-15
2048	100	13.69	2.918877e-15
3072	100	16.48	3.332595e-15
4032	100	17.37	3.070450e-14
5184	100	18.01	1.191584e-14
6016	100	18.36	1.037878e-14
7040	100	18.61	2.298301e-14
8064	100	18.94	7.340451e-15
9088	100	19.08	2.057905e-15
10112	100	19.20	3.002565e-15

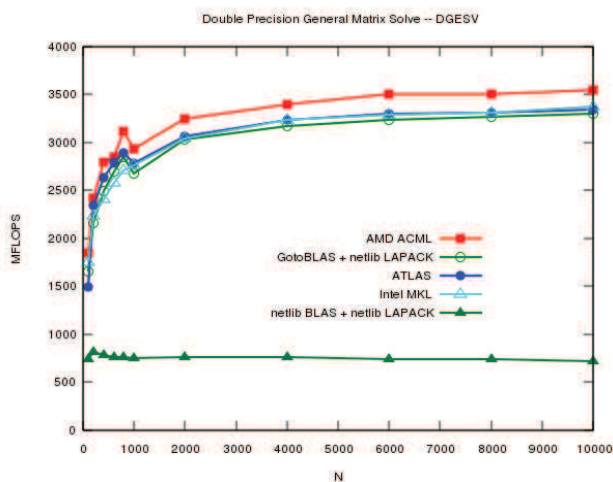


Figure 3. Diagram of DGESV test at single processor on one of the Hoffman2 Cluster compute nodes.

Results for a single processor on one of the Hoffman2 Cluster compute nodes (the code is single-threaded and statically linked) are shown on Figure 3.

This test shows that GPU parallelization is good decision for speeding up linear system solving.

#### REFERENCES

1. Research&Engineering Center StaDyO <http://www.stadyo.ru/>
2. CUDA Zone [http://www.nvidia.ru/object/cuda\\_home\\_new\\_ru.html](http://www.nvidia.ru/object/cuda_home_new_ru.html)
3. GPGPU <http://ru.wikipedia.org/wiki/GPGPU>
4. PETSc: Home Page <http://www.mcs.anl.gov/petsc/>
5. Message Passing Interface [http://ru.wikipedia.org/wiki/Message\\_Passing\\_Interface](http://ru.wikipedia.org/wiki/Message_Passing_Interface)
6. thrust - Code at the speed of light <http://code.google.com/p/thrust/>
7. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, Magnus R. Hestenes and Eduard Stiefel, Journal of Research of the National Bureau of Standards Vol. 49, No. 6, December 1952 Research Paper 2379 pp. 409—436.
8. cusp-library - Generic Parallel Algorithms for Sparse Matrix and Graph Computations <http://code.google.com/p/cusp-library/>
9. MAGMA <http://icl.cs.utk.edu/magma/>
10. Alexander M. Belostotsky, Sergey L. Vasilyev, Alexander V. Sidorov. Solving of large algebraic problems by parallel algorithms. Leading program packages features and own investigation. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 65-65.

Alexander V. Sidorov, Junior research associate of Research and Educational Centre of computer modeling at MSUCE, 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia, +7 (499) 929-50-17;  
E-mail: sidcmc@gmail.com;

# КОРРЕКТНЫЙ АЛГОРИТМ ОСРЕДНЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 1: ОДНОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач строительной механики и математической физики с использованием одномерного дискретного базиса Хаара.

**Ключевые слова:** корректный алгоритм, осреднение, краевая задача, численное решение, вейвлет-анализ, базис Хаара

## CORRECT ALGORITHM OF AVERAGING AS A PART OF NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS WITH THE USE OF HAAR BASIS PART 1: ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Correct algorithm of averaging as a part of numerical solution of boundary problems of structural mechanics and mathematical physics with the use of one-dimensional Haar basis is under consideration in the distinctive paper.

**Key words:** correct algorithm, averaging, boundary problem, numerical solution, wavelet analysis, Haar basis

### ВВЕДЕНИЕ

Вейвлет-анализ [1-14] является мощным, быстро развивающимся в настоящее время аппаратом для раздельного анализа локального и глобального напряженно-деформированного состояния конструкций. Под многоуровневым вейвлет-анализом понимается разложение решения по локальному вейвлет-базису и рассмотрение компонентов этого решения на каждом из уровней такого базиса. Степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне. Многоуровневый вейвлет-анализ позволяет оценить влияние различных с позиций локализации факторов, при этом

оказывается возможным построить не только более качественную расчетную модель, но и внести некоторые конструктивные изменения.

### 1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЯХ ХААРА НА ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим произвольный отрезок  $[a, b]$ . Разделим его на  $(n-1)$  равных частей, где  $n = 2^M$ ,  $M$  – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , очевидно, определяются по формуле (ниже  $h$  – шаг деления)

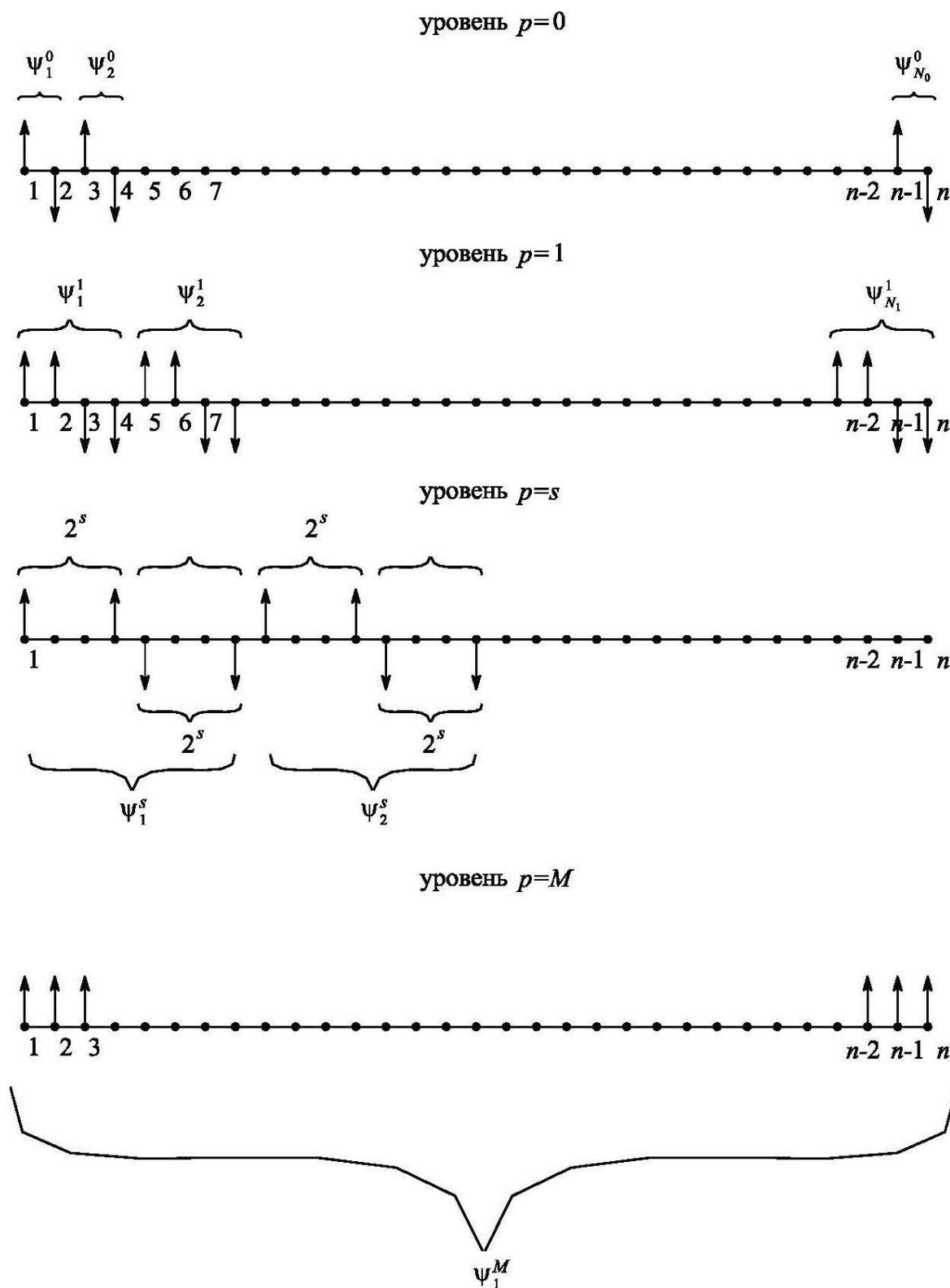


Рис. 1.1. Дискретные функции Хаара на отрезке.

$$x_i = a + (i-1)h, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

где

$$h = (b-a)/(n-1). \quad (1.2)$$

Ненормированные функции Хаара показаны на рис. 1.1 (по оси абсцисс отложены номера узлов точек разбиения отрезка).

Семейство функций Хаара

$$\psi_j^p(i), \quad p=1, 2, \dots, M, \quad j=1, 2, \dots, N_p$$

( $\psi_j^p(i)$  –  $j$ -ая функция Хаара уровня  $p$ ), определенных в точках разбиения отрезка, с учетом нормировки задается формулами

$$\psi_j^p(i) = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} 1, & 2^{p+1}(j-1) \leq i < 2^p(2j-1) \\ -1, & 2^p(2j-1) \leq i < 2^{p+1}j \\ 0, & i < 2^{p+1}(j-1) \cup i \geq 2^{p+1}j, \\ & i=1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p < M, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\psi_1^M(i) = 1/\alpha_M, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

причем (1.4) является дополнением семейства функций (1.3) до базиса;  $N_p$  и  $\alpha_p$  – количество функций и норма ненормированной функции Хаара на  $p$ -ом уровне (определяется при отсутствии в (1.3) деления на  $\alpha_p$ ),

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M; \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M, \end{cases} \quad (1.6)$$

т.е.  $\forall j=1, 2, \dots, N_p \quad \|\psi_j^p\| = \alpha_p$ .

Ненормированные функции Хаара показаны на рис. 1.1 (по оси абсцисс отложены номера узлов точек разбиения отрезка).

Семейство функций Хаара (1.3)-(1.4) образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве соответствующих дискретных функций.

## 2. ПОНЯТИЕ О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА (ПРЯМОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – АНАЛИЗ)

Рассмотрим произвольную функцию  $f$ , определенную в точках разбиения отрезка с

номерах  $i=1, 2, \dots, n$ . Функция  $f(i)$  может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \quad (2.1)$$

где  $v_j^p, j=1, 2, \dots, N_p, p=1, 2, \dots, M$  – коэффициенты разложения функции  $f(i)$  по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_j^p = \sum_{i=1}^n f(i) \psi_j^p(i), \quad j=1, 2, \dots, N_p, \quad p=1, 2, \dots, M. \quad (2.2)$$

## 3. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Описываемый ниже алгоритм прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара, предложенный А.Б. Золотовым [1], позволяет вычислить коэффициенты разложения за  $m \cdot n$  операций, где  $m$  – некоторое целое число, не зависящее от  $n$ .

Пусть

$$u_j^0 = f(j), \quad j=1, 2, \dots, n, \quad \alpha_0 = \sqrt{2}, \quad p=0. \quad (3.1)$$

Для всех  $p=0, 1, \dots, M-1$  производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} v_j^p &= (u_{2j-1}^p - u_{2j}^p) / \alpha_p, \\ u_j^{p+1} &= u_{2j-1}^p + u_{2j}^p, \\ & \quad j=1, 2, \dots, N_p \\ \alpha_{p+1} &= \sqrt{2} \alpha_p \end{aligned} \right\} \quad p=0, 1, \dots, M-1. \quad (3.2)$$

При  $p=M$  имеем:

$$\alpha_M = \sqrt{n}, \quad v_1^M = u_1^M / \alpha_M, \quad p=M, \quad (3.3)$$

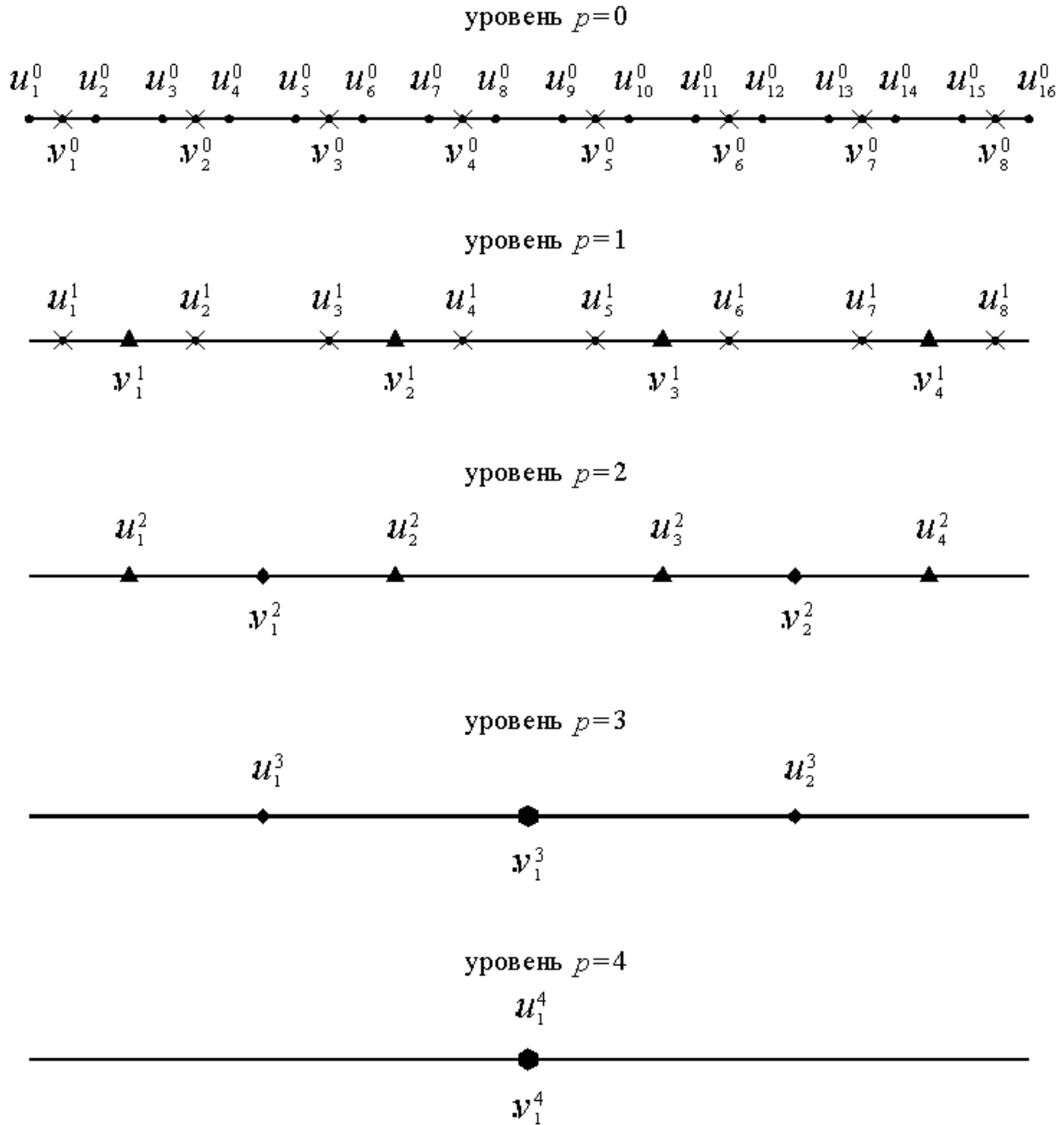


Рис. 3.1. Схема вычисления коэффициентов разложения дискретной функции по базису Хаара для случая  $n = 16$ .

где  $u_j^p, j=1, 2, \dots, N_p, p=1, 2, \dots, M$  – рассматриваются в данном контексте как вспомогательные величины. Рассмотрим в качестве примера применения представленных формул случай  $n = 16$ , т.е.  $M = 4$  (рис. 3.1). Для уровня  $p = 0$  имеем:

$$\alpha_0 = \sqrt{2}; \quad N_0 = n/2 = 8;$$

$$v_j^0 = (u_{2j-1}^0 - u_{2j}^0) / \alpha_0 = -\alpha_0^{-1} h (Du^0)_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

где  $(Du^0)_{2j-1} = (u_{2j}^0 - u_{2j-1}^0) / h$ .

Для уровня  $p = 1$  имеем:

$$\alpha_1 = 2; \quad N_1 = n/4 = 4; \\ u_j^1 = u_{2j-1}^0 + u_{2j}^0 = 2\tilde{u}_{2j-1}^0, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

где  $\tilde{u}_{2j-1}^0 = (u_{2j-1}^0 + u_{2j}^0)/2$ ;  
 $v_j^1 = (u_{2j-1}^1 - u_{2j}^1)/\alpha_1 =$   
 $= -\alpha_1^{-1}(2h)\frac{u_{2j}^1 - u_{2j-1}^1}{2h} =$   
 $= -\alpha_1^{-1}(2h)(Du^1)_{2j-1} =$   
 $= -\alpha_1^{-1}2 \cdot (2h)\frac{\tilde{u}_{2j}^0 - \tilde{u}_{2j-1}^0}{2h} =$   
 $= -\alpha_1^{-1}(4h)(D\tilde{u}^0)_{2j-1}, j = 1, 2, \dots, 4;$   
 $(Du^1)_{2j-1} = (u_{2j}^1 - u_{2j-1}^1)/(2h);$   
 $(D\tilde{u}^0)_{2j-1} = (\tilde{u}_{2j}^0 - \tilde{u}_{2j-1}^0)/(2h).$

Для уровня  $p = 2$  имеем:

$\alpha_2 = 2\sqrt{2}; N_2 = n/8 = 2;$   
 $u_j^2 = u_{2j-1}^1 + u_{2j}^1 = 2\tilde{u}_{2j-1}^1, j = 1, 2, \dots, 4,$   
 где  $\tilde{u}_{2j-1}^1 = (u_{2j-1}^1 + u_{2j}^1)/2;$   
 $v_j^2 = (u_{2j-1}^2 - u_{2j}^2)/\alpha_2 =$   
 $= -\alpha_2^{-1}(4h)\frac{u_{2j}^2 - u_{2j-1}^2}{4h} =$   
 $= -\alpha_2^{-1}(4h)(Du^2)_{2j-1} =$   
 $= -\alpha_2^{-1}2 \cdot (4h)\frac{\tilde{u}_{2j}^1 - \tilde{u}_{2j-1}^1}{4h} =$   
 $= -\alpha_2^{-1}(8h)(D\tilde{u}^1)_{2j-1}, j = 1, 2;$   
 $(Du^2)_{2j-1} = (u_{2j}^2 - u_{2j-1}^2)/(4h);$   
 $(D\tilde{u}^1)_{2j-1} = (\tilde{u}_{2j}^1 - \tilde{u}_{2j-1}^1)/(4h).$

Для уровня  $p = 3$  имеем:

$\alpha_3 = 4; N_3 = n/16 = 1;$   
 $u_j^3 = u_{2j-1}^2 + u_{2j}^2 = 2\tilde{u}_{2j-1}^2, j = 1, 2,$   
 где  $\tilde{u}_{2j-1}^2 = (u_{2j-1}^2 + u_{2j}^2)/2;$   
 $v_1^3 = (u_1^3 - u_2^3)/\alpha_3 =$   
 $= -\alpha_3^{-1}(8h)\frac{u_2^3 - u_1^3}{8h} =$   
 $= -\alpha_3^{-1}(8h)(Du^3)_{2j-1} =$   
 $= -\alpha_3^{-1}2 \cdot (8h)\frac{\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2}{8h} =$   
 $= -\alpha_2^{-1}(16h)(D\tilde{u}^2)_1;$

$(Du^3)_1 = (u_2^3 - u_1^3)/(8h);$   
 $(D\tilde{u}^2)_1 = (\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2)/(8h).$

Для уровня  $p = 4$  имеем:

$\alpha_3 = 4; N_3 = n/16 = 1;$   
 $u_1^4 = u_1^3 + u_2^3 = 2\tilde{u}_1^3,$   
 где  $\tilde{u}_1^3 = (u_1^3 + u_2^3)/2; v_1^4 = u_1^4/\alpha_4.$

#### 4. АЛГОРИТМ ОСРЕДНЕНИЯ

Заметим, что если значения  $u_j^0, j = 1, 2, \dots, N$ , определенные по формуле (3.1), являются точными, то возникновение ошибок в дальнейшем при реализации формул (3.2)-(3.3) исключено. Вместе с тем, по практическим соображениям может потребоваться некоторое уменьшение точности в угоду другим факторам. В частности, можно использовать алгоритм осреднения, рассматриваемый ниже, вначале для случая  $n = 16$ .

При осреднении на уровне  $p = 0$  полагаем:

$(Du^0)_1 \approx (Du^0)_2 \approx (D\tilde{u}^0)_1; v_1^0 = v_2^0;$   
 $(Du^0)_3 \approx (Du^0)_4 \approx (D\tilde{u}^0)_3; v_3^0 = v_4^0;$   
 $(Du^0)_5 \approx (Du^0)_6 \approx (D\tilde{u}^0)_5; v_5^0 = v_6^0;$   
 $(Du^0)_7 \approx (Du^0)_8 \approx (D\tilde{u}^0)_7; v_7^0 = v_8^0.$

Имеем:

$v_1^1 = (u_1^1 - u_2^1)/\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}(4h)(D\tilde{u}^0)_1,$   
 $v_2^1 = (u_3^1 - u_4^1)/\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}(4h)(D\tilde{u}^0)_3;$   
 $v_3^1 = (u_5^1 - u_6^1)/\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}(4h)(D\tilde{u}^0)_5;$   
 $v_4^1 = (u_7^1 - u_8^1)/\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}(4h)(D\tilde{u}^0)_7,$

откуда

$(D\tilde{u}^0)_1 = -\alpha_1 v_1^1/(4h); (D\tilde{u}^0)_3 = -\alpha_1 v_2^1/(4h);$   
 $(D\tilde{u}^0)_5 = -\alpha_1 v_3^1/(4h); (D\tilde{u}^0)_7 = -\alpha_1 v_4^1/(4h).$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 v_1^0 = v_2^0 &= -\alpha_0^{-1}h(Du^0)_1 \approx -\alpha_0^{-1}h[-\alpha_1 v_1^1 / (4h)] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_1^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_1^1; \\
 v_3^0 = v_4^0 &= -\alpha_0^{-1}h(Du^0)_3 \approx -\alpha_0^{-1}h[-\alpha_1 v_2^1 / (4h)] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_2^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_2^1; \\
 v_5^0 = v_6^0 &= -\alpha_0^{-1}h(Du^0)_5 \approx -\alpha_0^{-1}h[-\alpha_1 v_3^1 / (4h)] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_3^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_3^1; \\
 v_7^0 = v_8^0 &= -\alpha_0^{-1}h(Du^0)_7 \approx -\alpha_0^{-1}h[-\alpha_1 v_4^1 / (4h)] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_4^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_4^1.
 \end{aligned}$$

При осреднении на уровне  $p = 1$  полагаем:

$$\begin{aligned}
 (Du^1)_1 \approx (Du^1)_2 \approx (D\tilde{u}^1)_1; \quad v_1^1 = v_2^1; \\
 (Du^1)_3 \approx (Du^1)_4 \approx (D\tilde{u}^1)_3; \quad v_3^1 = v_4^1.
 \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 v_1^2 &= (u_1^2 - u_2^2) / \alpha_2 = -\alpha_2^{-1}(8h)(D\tilde{u}^1)_1; \\
 v_2^2 &= (u_3^2 - u_4^2) / \alpha_2 = -\alpha_2^{-1}(8h)(D\tilde{u}^1)_3,
 \end{aligned}$$

откуда

$$(D\tilde{u}^1)_1 = -\alpha_2 v_1^2 / (8h); \quad (D\tilde{u}^1)_3 = -\alpha_2 v_2^2 / (8h).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 v_1^1 = v_2^1 &= -\alpha_1^{-1}(2h)(Du^1)_1 \approx \\
 &\approx -\alpha_1^{-1}(2h)[- \alpha_2 v_1^2 / (8h)] = \frac{1}{4} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_1^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_1^2; \\
 v_3^1 = v_4^1 &= -\alpha_1^{-1}(2h)(Du^1)_3 \approx \\
 &\approx -\alpha_1^{-1}(2h)[- \alpha_2 v_2^2 / (8h)] = \frac{1}{4} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_2^2.
 \end{aligned}$$

Дальнейшее осреднение на уровне  $p = 0$  ведется по представленным выше формулам. При осреднении на уровне  $p = 2$  полагаем:

$$(Du^2)_1 \approx (Du^2)_2 \approx (D\tilde{u}^2)_1; \quad v_1^2 = v_2^2.$$

Имеем:

$$v_1^3 = (u_1^3 - u_2^3) / \alpha_3 = -\alpha_3^{-1}(16h)(D\tilde{u}^2)_1,$$

откуда  $(D\tilde{u}^2)_1 = -\alpha_3 v_1^3 / (16h).$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 v_1^2 = v_2^2 &= -\alpha_2^{-1}(4h)(Du^2)_1 \approx \\
 &\approx -\alpha_2^{-1}(4h)[- \alpha_3 v_1^3 / (16h)] = \frac{1}{4} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} v_1^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_1^3.
 \end{aligned}$$

Дальнейшее осреднение на уровнях  $p = 0, 1$  ведется по представленным выше формулам. Сформулируем теперь алгоритм осреднения для общего случая произвольного значения  $n$ . Пусть  $p$  – индекс, соответствующий номеру уровня,  $p = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ;  $j$  – индекс, соответствующий номеру базисной функции на рассматриваемом уровне,  $j = 1, 2, \dots, N_p$ .

Положим, что требуется произвести осреднение на некотором уровне  $q$ . Для всех  $p = 1, 2, \dots, q$  будем полагать:

$$\begin{aligned}
 (Du^p)_{2j-1} \approx (Du^p)_{2j} \approx (D\tilde{u}^p)_{2j-1}, \quad v_{2j-1}^p = v_{2j}^p, \\
 j = 1, 2, \dots, N_{p+1}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Имеем:

$$v_j^{p+1} = \frac{2^{p+2} h}{\alpha_{p+1}} (D\tilde{u}^p)_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad (4.2)$$

где  $(D\tilde{u}^p)_{2j-1} = (\tilde{u}_{2j}^p - \tilde{u}_{2j-1}^p) / (2^{p+1} h).$  (4.3)

Таким образом,

$$(D\tilde{u}^p)_{2j-1} = -\frac{\alpha_{p+1}}{2^{p+2} h} v_j^{p+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{p+1}. \quad (4.4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_{2j-1}^p &= v_{2j}^p = -\alpha_p^{-1} 2^p h (Du^p)_{2j-1} \approx \\ &\approx -\alpha_p^{-1} 2^p h [-\alpha_{p+1} v_j^{p+1} / (2^{p+2} h)] = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} v_j^{p+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_j^{p+1}, \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$v_{2j-1}^p = v_{2j}^p = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_j^{p+1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{p+1} \quad (4.5)$$

или иначе

$$v_{2j-1}^p = v_{2j}^p = \beta v_j^{p+1}, \quad j=1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad (4.6)$$

где 
$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасно-

сти ответственных объектов и комплексов мегаполиса».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по базису Хаара. Часть 1: Введение в проблему, одномерный случай. // «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании». Международная научная конференция. Москва, 19-21 октября 2011 года. Сборник трудов. Том 2. - М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011, с. 631-635.
2. **Астафьева Н.М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1998, т. 166, № 11, с. 1145-1170.
3. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
4. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
5. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра – М, 2012. – 158 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
7. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основные конструкции всплесков // Фундаментальная и прикладная математика. 1997, т. 3, № 4, с. 999-1028.
8. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков // Успехи математических наук, 1998, т. 53, №6(324), с. 53-128.
9. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. научных трудов №4. – М.: МГСУ, 2001, с. 248-258.

10. **Смоленцев Н.К.** Введение в теорию вейвлетов. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 292 с.
11. **Смоленцев Н.К.** Вейвлет-анализ в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 448 с.
12. **Фрейзер М.** Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 487 с.
13. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. 412 с.
14. **Штарк Г.-Г.** Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

# КОРРЕКТНЫЙ АЛГОРИТМ ОСРЕДНЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА ЧАСТЬ 2: ДВУМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач строительной механики и математической физики с использованием двумерного дискретного базиса Хаара.

**Ключевые слова:** корректный алгоритм, осреднение, краевая задача, численное решение, вейвлет-анализ, базис Хаара

## CORRECT ALGORITHM OF AVERAGING AS A PART OF NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS WITH THE USE OF HAAR BASIS PART 1: TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Correct algorithm of averaging as a part of numerical solution of boundary problems of structural mechanics and mathematical physics with the use of two-dimensional Haar basis is under consideration in the distinctive paper.

**Key words:** correct algorithm, averaging, boundary problem, numerical solution, wavelet analysis, Haar basis

### ВВЕДЕНИЕ

Вейвлет-анализ [1-14] является мощным, быстро развивающимся в настоящее время аппаратом для раздельного анализа локального и глобального напряженно-деформированного состояния конструкций. Под многоуровневым вейвлет-анализом понимается разложение решения по локальному вейвлет-базису и рассмотрение компонентов этого решения на каждом из уровней такого базиса. Степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне. Многоуровневый вейвлет-анализ позволяет оценить влияние различных с позиций локализации факторов, при этом

оказывается возможным построить не только более качественную расчетную модель, но и внести некоторые конструктивные изменения.

### 1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЯХ ХААРА НА КВАДРАТЕ

Рассмотрим двумерную прямоугольную область (рис. 1.1)

$$\Omega = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \quad (1.1)$$

где  $x_1, x_2$  – координаты;  $l_1, l_2$  – размеры области вдоль координатных осей  $Ox_1, Ox_2$  соответственно.

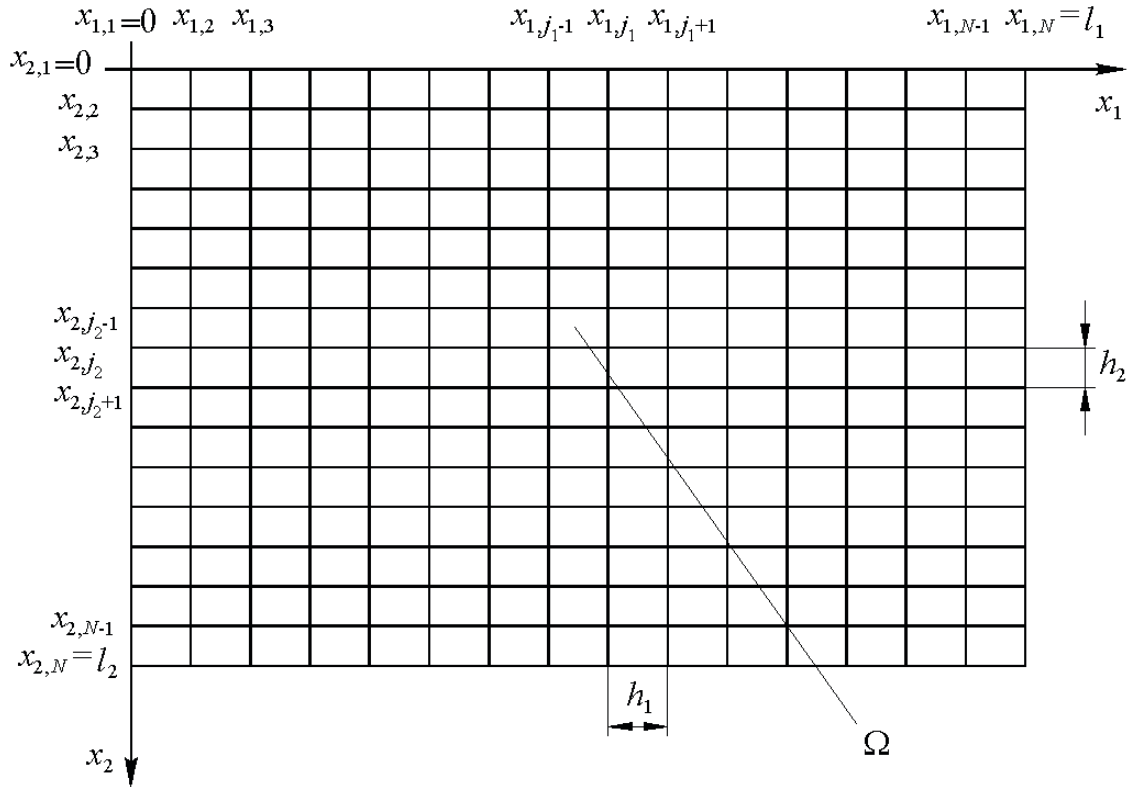


Рис. 1.1. Исходная двумерная прямоугольная область и ее дискретизация

Разделим область (1.1) по горизонтали на  $(N-1)$  равных частей и по вертикали на  $(N-1)$  равных частей, где  $N = 2^M$ ,  $M$  – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления, очевидно, определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= (i-1)h_1, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\ x_{2,i} &= (i-1)h_2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – шаги деления по осям  $Ox_1, Ox_2$  соответственно,

$$h_1 = l_1 / (N-1); \quad h_2 = l_2 / (N-1). \quad (1.3)$$

Примеры ненормированных функций Хаара показаны на рис. 1.2, 1.3.

Семейство функций Хаара  $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$ ,  $p = 1, 2, \dots, M$ ,  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $s_1 = 0, 1$ ,  $s_2 = 0, 1$  (причем не-

допустим случай  $s_1 = s_2 = 0$ ), определенных в узлах сетки, с учетом нормировки задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2) &= \\ &= \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, \\ \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q=0}^{2^q-1} \left( \begin{aligned} &2^{p+1} \left( j_q - 1 + \frac{k_q}{2} \right) \leq i_q \wedge \\ &\wedge i_q < 2^{p+1} \left( j_q - \frac{1}{2} + \frac{k_q}{2} \right) \end{aligned} \right), \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases} \\ & i_1 = 1, 2, \dots, N; \quad i_2 = 1, 2, \dots, N; \quad 0 \leq p < M; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,0,1,1}^M(i_1, i_2) &= \frac{1}{\alpha_M}, \\ & i_1 = 1, 2, \dots, N; \quad i_2 = 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем (1.5) является дополнением семейства функций (1.4) до базиса;  $N_p \times N_p$  – количество функций Хаара на  $p$ -ом уровне,



$$N_p = \begin{cases} N/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.6)$$

$\alpha_p$  – норма функции Хаара на  $p$ -ом уровне (определяется при отсутствии в (1.4) деления на  $\alpha_p$ ), т.е.

$$\forall j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad \forall j_2 = 1, 2, \dots, N_p$$

$$\|\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p\| = \alpha_p;$$

$$\alpha_p = \begin{cases} 2^{p+1}, & 0 \leq p < M \\ 2^M = N, & p = M. \end{cases} \quad (1.7)$$

Следует отметить, что значения индексов  $s_1$  и  $s_2$  соответствуют трем базовым функциям:

$$\psi_{1,0,j_1,j_2}^p$$

1	-1
1	-1

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0$$

$$\psi_{0,1,j_1,j_2}^p$$

1	1
-1	-1

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1$$

$$\psi_{1,1,j_1,j_2}^p$$

1	-1
-1	1

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1$$

На рис. 1.2 и 1.3 приведены примеры функций Хаара (ненормированных), значения в пустых клетках нулевые. Можно показать, что семейство функций Хаара (1.4)-(1.5) образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в узлах сетки (рис. 1.1).

## 2. ПОНЯТИЕ О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА (ПРЯМОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – АНАЛИЗ)

Рассмотрим произвольную функцию  $f$ , определенную в узлах сетки, показанной на рис. 1.1. Функция  $f(i_1, i_2)$  может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i_1, i_2) = v_{0,0,1,1}^M \psi_{0,0,1,1}^M +$$

$$+ \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v_{1,0,j_1,j_2}^p \psi_{1,0,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) +$$

$$+ v_{0,1,j_1,j_2}^p \psi_{0,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) + v_{1,1,j_1,j_2}^p \psi_{1,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2)), \quad (2.1)$$

где  $v_{1,0,j_1,j_2}^p, v_{0,1,j_1,j_2}^p, v_{1,1,j_1,j_2}^p, j_1 = 1, 2, \dots, N_p, j_2 = 1, 2, \dots, N_p, p = 1, 2, \dots, M$  – коэффициенты разложения  $f(i_1, i_2)$  по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N f(i_1, i_2) \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2),$$

$$s_1 = 0, 1, \quad s_2 = 0, 1, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad (2.2)$$

$$j_2 = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, 2, \dots, M.$$

## 3. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ ПО БАЗИСУ ХААРА

Описываемый ниже алгоритм прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара, предложенный А.Б. Золотовым [1], позволяет вычислить коэффициенты разложения за  $m \cdot N^2$  операций, где  $m$  – некоторое целое число, не зависящее от  $N$ .

Пусть

$$u_{j_1, j_2}^0 = f(j_1, j_2), \quad j_1 = 1, 2, \dots, n, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N; \quad (3.1)$$

$$\alpha_0 = 2. \quad (3.2)$$

Для всех  $p = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $s_1 = 0, 1$ ,  $s_2 = 0, 1$  (кроме  $s_1 = s_2 = 0$ ) производим вычисления по формулам

$$z_1 = (-1)^{s_1}, \quad z_2 = (-1)^{s_2}; \quad (3.3)$$

$$v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \alpha_p^{-1} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + z_1 u_{2j_1, 2j_2-1}^p + z_2 u_{2j_1-1, 2j_2}^p + z_1 z_2 u_{2j_1, 2j_2}^p); \quad (3.4)$$

$$u_{j_1, j_2}^{p+1} = u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1-1, 2j_2}^p + u_{2j_1, 2j_2}^p; \quad (3.5)$$

$$\alpha_{p+1} = 2 \cdot \alpha_p. \quad (3.6)$$

При  $p = M$  имеем:

$$\alpha_M = N; \quad (3.7)$$

$$v_{0,0,1,1}^M = \alpha_M^{-1} u_{1,1}^M, \quad (3.8)$$

где  $u_{j_1, j_2}^p$ ,  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ ,

$p = 1, 2, \dots, M$  – рассматриваются в данном контексте как вспомогательные величины.

Рассмотрим в качестве примера применения представленных формул случай  $N = 4$ , т.е.  $M = 2$  (рис. 3.1).

Для уровня  $p = 0$  имеем:

$$\alpha_0 = 2; \quad N_0 = N/2 = 2;$$

$$\begin{aligned} v_{1,0,j_1,j_2}^0 &= \alpha_0^{-1} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1, 2j_2-1}^0 + u_{2j_1-1, 2j_2}^0 - u_{2j_1, 2j_2}^0) = \\ &= \alpha_0^{-1} [-(u_{2j_1, 2j_2}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2}^0) - (u_{2j_1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0)] = \\ &= -\alpha_0^{-1} h [(D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2} + (D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}] = \\ &= -\alpha_0^{-1} h (T_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} = \\ &= -\frac{2h}{\alpha_0} (D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \end{aligned}$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} v_{0,1,j_1,j_2}^0 &= \alpha_0^{-1} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0 + u_{2j_1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2}^0 - u_{2j_1, 2j_2}^0) = \\ &= \alpha_0^{-1} [-(u_{2j_1, 2j_2}^0 - u_{2j_1, 2j_2-1}^0) - (u_{2j_1-1, 2j_2}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0)] = \\ &= -\alpha_0^{-1} h [(D_2^+ u^0)_{2j_1, 2j_2-1} + (D_2^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}] = \\ &= -\alpha_0^{-1} h (T_1^+ D_2^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} = \\ &= -\frac{2h}{\alpha_0} (D_2 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \end{aligned}$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} v_{1,1,j_1,j_2}^0 &= \alpha_0^{-1} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2}^0 + u_{2j_1, 2j_2}^0) = \\ &= \alpha_0^{-1} [(u_{2j_1, 2j_2}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2}^0) - (u_{2j_1, 2j_2-1}^0 - u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0)] = \\ &= \alpha_0^{-1} h [(D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2} - (D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}] = \\ &= \frac{h^2}{\alpha_0} (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} = \\ &= \frac{h^2}{\alpha_0} (D_2 D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \end{aligned}$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} u_{j_1, j_2}^1 &= u_{2j_1-1, 2j_2-1}^0 + u_{2j_1, 2j_2-1}^0 + u_{2j_1-1, 2j_2}^0 + u_{2j_1, 2j_2}^0 = \\ &= (T_1^+ T_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2, \end{aligned}$$

т.е.

$$v_{1,0,j_1,j_2}^0 = -\frac{2h}{\alpha_0} (D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$v_{0,1,j_1,j_2}^0 = -\frac{2h}{\alpha_0} (D_2 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$v_{1,1,j_1,j_2}^0 \approx \frac{h^2}{\alpha_0} (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1}, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$u_{j_1, j_2}^1 = (T_1^+ T_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} = 4\tilde{u}_{2j_1-1, 2j_2-1}^0, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2,$$

где

$$\tilde{u}_{j_1, j_2}^p = (u_{j_1, j_2}^p + u_{j_1+1, j_2}^p + u_{j_1, j_2+1}^p + u_{j_1+1, j_2+1}^p) / 4; \quad (3.9)$$

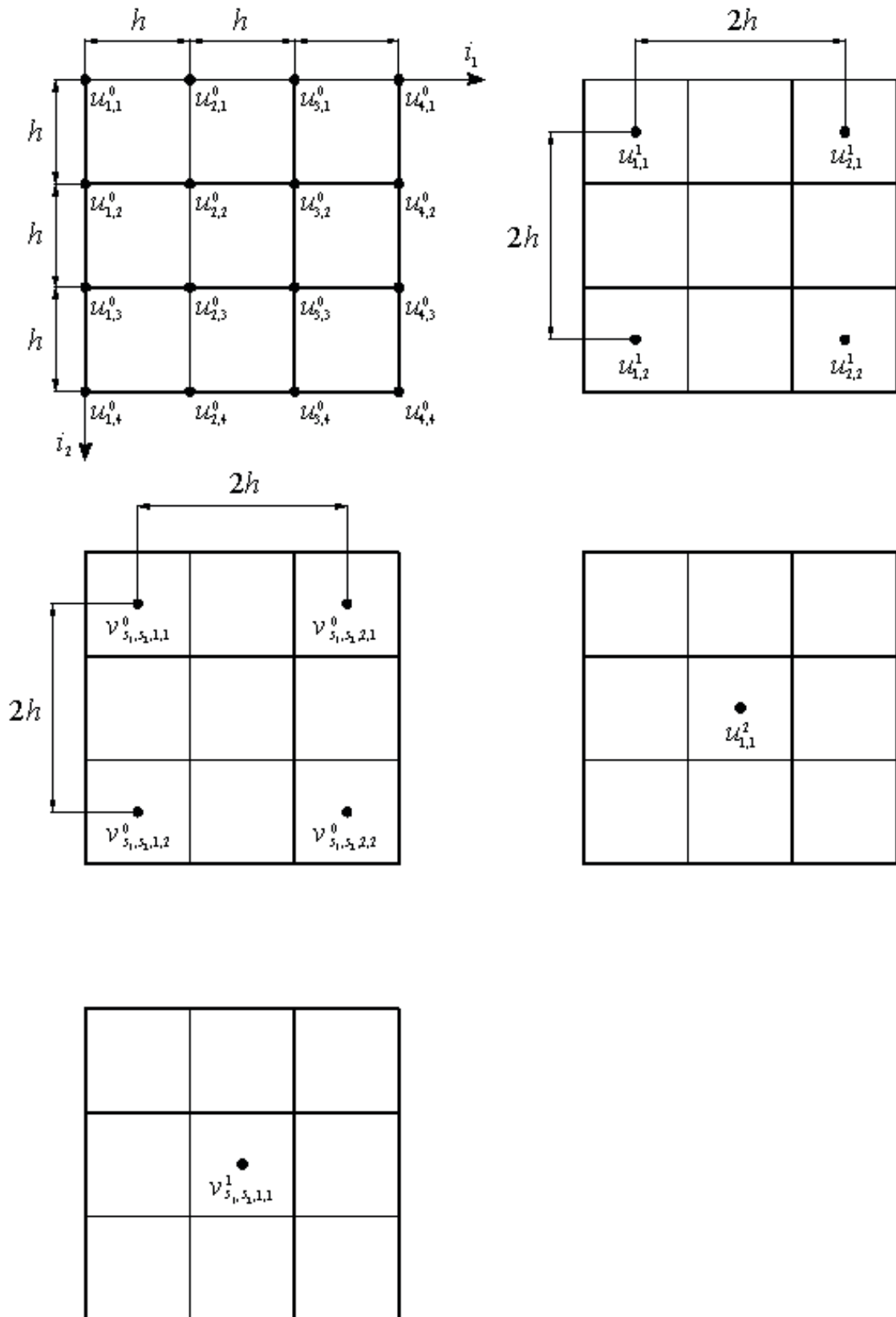


Рис. 3.1. Схема вычисления коэффициентов разложения дискретной функции по базису Хаара для случая  $N = 4$

$$\begin{aligned} (D_1^+ u^p)_{j_1, j_2} &= (u_{j_1+1, j_2}^p - u_{j_1, j_2}^p) / h; \\ (D_2^+ u^p)_{j_1, j_2} &= (u_{j_1, j_2+1}^p - u_{j_1, j_2}^p) / h; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (T_1^+ u^p)_{j_1, j_2} &= u_{j_1+1, j_2}^p + u_{j_1, j_2}^p; \\ (T_2^+ u^p)_{j_1, j_2} &= u_{j_1, j_2+1}^p + u_{j_1, j_2}^p; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$D_1 = \frac{1}{2} T_2^+ D_1^+; \quad D_2 = \frac{1}{2} T_1^+ D_2^+. \quad (3.12)$$

Для уровня  $p = 1$  имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4; \quad N_0 = N/4 = 1; \\ v_{1,0,1,1}^1 &= \alpha_1^{-1} (u_{1,1}^1 - u_{2,1}^1 + u_{1,2}^1 - u_{2,2}^1) = \\ &= \alpha_1^{-1} [-(u_{2,2}^1 - u_{1,2}^1) - (u_{2,1}^1 - u_{1,1}^1)] = \\ &= -2\alpha_1^{-1} h [(D_1^+ u^1)_{1,2} + (D_1^+ u^1)_{1,1}] = \\ &= -2\alpha_1^{-1} h (T_2^+ D_1^+ u^1)_{1,1} = \\ &= -\frac{4h}{\alpha_1} (D_1 u^1)_{1,1} = -\frac{16h}{\alpha_1} (D_1 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ v_{0,1,1,1}^1 &= \alpha_1^{-1} (u_{1,1}^1 + u_{2,1}^1 - u_{1,2}^1 - u_{2,2}^1) = \\ &= \alpha_1^{-1} [-(u_{2,2}^1 - u_{2,1}^1) - (u_{1,2}^1 - u_{1,1}^1)] = \\ &= -2\alpha_1^{-1} h [(D_2^+ u^1)_{2,1} + (D_2^+ u^1)_{1,1}] = \\ &= -2\alpha_1^{-1} h (T_1^+ D_2^+ u^1)_{1,1} = \\ &= -\frac{4h}{\alpha_1} (D_2 u^1)_{1,1} = -\frac{16h}{\alpha_1} (D_2 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ v_{1,1,1,1}^1 &= \alpha_1^{-1} (u_{1,1}^1 - u_{2,1}^1 - u_{1,2}^1 + u_{2,2}^1) = \\ &= \alpha_1^{-1} [(u_{2,2}^1 - u_{1,2}^1) - (u_{2,1}^1 - u_{1,1}^1)] = \\ &= 2\alpha_0^{-1} h [(D_1^+ u^1)_{1,2} - (D_1^+ u^1)_{1,1}] = \\ &= 4\alpha_0^{-1} h^2 (D_2^+ D_1^+ u^1)_{1,1} = \frac{16h^2}{\alpha_1} (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ u_{1,1}^2 &= u_{1,1}^1 + u_{2,1}^1 + u_{1,2}^1 + u_{2,2}^1 = (T_1^+ T_2^+ u^1)_{1,1} = 4\tilde{u}_{1,1}^1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} v_{1,0,1,1}^1 &= -\frac{16h}{\alpha_1} (D_1 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ v_{0,1,1,1}^1 &= -\frac{16h}{\alpha_1} (D_2 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ v_{1,1,1,1}^1 &= \frac{16h^2}{\alpha_1} (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ u_{1,1}^2 &= T_1^+ T_2^+ u_{1,1}^1 = 4\tilde{u}_{1,1}^1. \end{aligned}$$

Для уровня  $p = 2$  имеем:

$$\alpha_2 = 4; \quad N_2 = N/2 = 1; \\ v_{0,0,1,1}^2 = \alpha_2^{-1} u_{1,1}^2.$$

#### 4. АЛГОРИТМ ОСРЕДНЕНИЯ

Заметим, что если значения  $u_{j_1, j_2}^0$ ,  $j_1 = 1, 2, \dots, N$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N$ , определенные по формуле (3.1), являются точными, то возникновение ошибок в дальнейшем при реализации формул (3.3)-(3.8) исключено. Вместе с тем, по практическим соображениям может потребоваться некоторое уменьшение точности в угоду другим факторам. В частности, можно использовать алгоритм осреднения, рассматриваемый ниже, вначале для случая  $N = 4$ .

При осреднении на уровне  $p = 0$  будем полагать (ниже  $s_1 = 0, 1$ ;  $s_2 = 0, 1$  (кроме случая  $s_1 = s_2 = 0$ );  $j_1 = 1, 2$ ;  $j_2 = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} (D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= (D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2} = \\ &= (D_1 u^0)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_1 u^0)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_1 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ (D_2 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= (D_2 u^0)_{2j_1-1, 2j_2} = \\ &= (D_2 u^0)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2 u^0)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_2 \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2} = \\ &= (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1, 2j_2} \approx \\ &\approx (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^0)_{1,1}; \\ v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2-1}^0 &= v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2-1}^0 = \\ &= v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2}^0 = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2}^0. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} (D_1 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= -\frac{\alpha_0}{2h} v_{1,0,j_1,j_2}^0, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2; \\ (D_2 u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= -\frac{\alpha_0}{2h} v_{0,1,j_1,j_2}^0, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2; \\ (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1} &= \frac{\alpha_0}{h^2} v_{1,1,j_1,j_2}^0, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2; \\ (D_1 \tilde{u}^0)_{1,1} &= -\frac{\alpha_1}{16h} v_{1,0,1,1}^1; \end{aligned}$$

$$(D_2 \tilde{u}^0)_{1,1} = -\frac{\alpha_1}{16h} v_{0,1,1,1}^1;$$

$$(D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^0)_{1,1} = \frac{\alpha_1}{16h^2} v_{1,1,1,1}^1.$$

Следовательно,

$$-\frac{\alpha_0}{2h} v_{1,0,j_1,j_2}^0 = -\frac{\alpha_1}{16h} v_{1,0,1,1}^1, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$-\frac{\alpha_0}{2h} v_{0,1,j_1,j_2}^0 = -\frac{\alpha_1}{16h} v_{0,1,1,1}^1, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$\frac{\alpha_0}{h^2} v_{1,1,j_1,j_2}^0 = \frac{\alpha_1}{16h^2} v_{1,1,1,1}^1, \quad j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2,$$

откуда получаем:

$$v_{1,0,j_1,j_2}^0 = \frac{1}{8} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_{1,0,1,1}^1 = \frac{1}{4} v_{1,0,1,1}^1,$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$v_{0,1,j_1,j_2}^0 = \frac{1}{8} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_{0,1,1,1}^1 = \frac{1}{4} v_{0,1,1,1}^1,$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2;$$

$$v_{1,1,j_1,j_2}^0 = \frac{1}{16} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_{1,1,1,1}^1 = \frac{1}{8} v_{1,1,1,1}^1,$$

$$j_1 = 1, 2, \quad j_2 = 1, 2.$$

Сформулируем теперь алгоритм осреднения для общего случая произвольного значения  $N$ . Пусть  $p$  – индекс, соответствующий номеру уровня,  $p = 0, 1, 2, \dots, M$ ;  $j_1$  и  $j_2$  – индексы, соответствующие номерам базисной функции на рассматриваемом уровне,  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ,  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ .

Положим, что требуется произвести осреднение на некотором уровне  $q$ . Тогда для всех  $p = 1, 2, \dots, q$  будем полагать (ниже  $s_1 = 0, 1$ ;  $s_2 = 0, 1$  (кроме случая  $s_1 = s_2 = 0$ );  $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$ ;  $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$ ):

$$(D_1 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1-1, 2j_2} =$$

$$= (D_1 u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1};$$

(4.1)

$$(D_2 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1-1, 2j_2} =$$

$$= (D_2 u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1};$$

(4.2)

$$(D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1, 2j_2} =$$

$$= (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx$$

$$\approx (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1};$$

(4.3)

$$v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2-1}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2-1}^p =$$

$$= v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2}^p.$$

(4.4)

В соответствии с (3.4) можем записать:

$$v_{1,0,j_1,j_2}^p = -\frac{2^{p+1} h}{\alpha_p} (D_1 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

(4.5)

$$v_{0,1,j_1,j_2}^p = -\frac{2^{p+1} h}{\alpha_p} (D_2 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

(4.6)

$$v_{1,1,j_1,j_2}^p = \frac{4^p h^2}{\alpha_p} (D_2^+ D_1^+ u^0)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}.$$

(4.7)

С другой стороны, согласно приведенным выше выкладкам имеем:

$$v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1} = -\frac{2^{p+4} h}{\alpha_{p+1}} (D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

(4.8)

$$v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1} = -\frac{2^{p+4} h}{\alpha_{p+1}} (D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

(4.9)

$$v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1} = \frac{4^{p+2} h^2}{\alpha_{p+1}} (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1},$$

(4.10)

откуда

$$(D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = -\frac{\alpha_{p+1}}{2^{p+4} h} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

(4.8)

$$(D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = -\frac{\alpha_{p+1}}{2^{p+4} h} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1}, \quad (4.9)$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1};$$

$$(D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = \frac{\alpha_{p+1}}{4^{p+2} h^2} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1}, \quad (4.10)$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}.$$

Следовательно,

$$v_{1,0,j_1,j_2}^p = -\frac{2^{p+1} h}{\alpha_p} \left( -\frac{\alpha_{p+1}}{2^{p+4} h} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1} = \frac{1}{4} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1};$$

$$v_{0,1,j_1,j_2}^p = -\frac{2^{p+1} h}{\alpha_p} \left( -\frac{\alpha_{p+1}}{2^{p+4} h} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1} = \frac{1}{4} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1};$$

$$v_{1,1,j_1,j_2}^p = \frac{4^p h^2}{\alpha_p} \left( \frac{\alpha_{p+1}}{4^{p+2} h^2} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1} = \frac{1}{8} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1},$$

откуда окончательно с учетом (4.4)

$$v_{1,0,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{1,0,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{1,0,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,0,2j_1,2j_2}^p = \frac{1}{4} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad (4.11)$$

$$v_{0,1,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{0,1,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{0,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{0,1,2j_1,2j_2}^p = \frac{1}{4} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad (4.12)$$

$$v_{1,1,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{1,1,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{1,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,1,2j_1,2j_2}^p = \frac{1}{8} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}. \quad (4.13)$$

или иначе

$$v_{1,0,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{1,0,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{1,0,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,0,2j_1,2j_2}^p = \beta_{1,0} v_{1,0,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad (4.14)$$

$$v_{0,1,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{0,1,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{0,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{0,1,2j_1,2j_2}^p = \beta_{0,1} v_{0,1,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}; \quad (4.15)$$

$$v_{1,1,2j_1-1,2j_2-1}^p = v_{1,1,2j_1,2j_2-1}^p =$$

$$= v_{1,1,2j_1-1,2j_2}^p = v_{1,1,2j_1,2j_2}^p = \beta_{1,1} v_{1,1,j_1,j_2}^{p+1},$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, N_{p+1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{p+1}. \quad (4.16)$$

$$\text{где} \quad \beta_{1,0} = \frac{1}{4}; \quad \beta_{0,1} = \frac{1}{4}; \quad \beta_{1,1} = \frac{1}{8}. \quad (4.17)$$

## ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.
2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по базису Хаара. Часть 1: Введение в проблему, одномерный случай. // «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании». Международная научная конференция. Москва, 19-21 октября 2011 года. Сборник трудов. Том 2. - М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011, с. 631-635.
2. **Астафьева Н.М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1998, т. 166, № 11, с. 1145-1170.
3. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
4. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
5. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра – М, 2012. – 158 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
7. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основные конструкции всплесков // Фундаментальная и прикладная математика. 1997, т. 3, № 4, с. 999-1028.
8. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков // Успехи математических наук, 1998, т. 53, №6(324), с. 53-128.
9. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. научных трудов №4. – М.: МГСУ, 2001, с. 248-258.
10. **Смоленцев Н.К.** Введение в теорию вейвлетов. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 292 с.
11. **Смоленцев Н.К.** Вейвлет-анализ в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 448 с.
12. **Фрейзер М.** Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 487 с.
13. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. 412 с.
14. **Штарк Г.-Г.** Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

# КОРРЕКТНЫЙ МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АППАРАТА КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами корректного метода локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа.

**Ключевые слова:** локальное решение, краевая задача, строительная механика, математическая физика, кратномасштабный вейвлет-анализ, базис Хаара

## CORRECT METHOD OF LOCAL SOLUTION OF BOUDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS AND MATHEMATICAL PHYSICS WITH THE USE OF MULTIREOLUTION WAVELET ANALYSIS

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Correct method of local solution of boundary problems of structural mechanics and mathematical physics with the use of multiresolution wavelet analysis is under consideration in the distinctive paper.

**Key words:** correct method, local solution, boundary problem, structural mechanics, mathematical physics, multiresolution wavelet analysis, Haar basis

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, построение и исследование математических моделей строительных конструкций является одним из важнейших аспектов расчетного обоснования и проектирования. Принимая во внимание тот факт, что сложность таких моделей может быть весьма и весьма существенной, становится очевидной необходимость применения высокопроизводительной вычислительной (компьютерной) техники для обеспечения должного уровня точности и скорости проводимых расчетов. Тем не менее, мощность ЭВМ, разумеется, не является единственным факто-

ром, влияющим на результат и продолжительность вычислений – развитие и совершенствование численных и численно-аналитических методов играет здесь значительную роль. Так, например, некогда популярные разностные методы обеспечивают универсальность алгоритма и приводят к системам с ленточной матрицей, что, в свою очередь, гарантирует высокую скорость решения задачи на ЭВМ. Вместе с тем, существенным недостатком таких методов является трудоемкость аппроксимации граничных условий для сложных областей. Во многом по этой причине на смену разностным методам пришли вариационно-разностные

подходы и метод конечных элементов (МКЭ). Для обеспечения эффективности МКЭ необходимо, в частности, наличие алгоритмов выбора функции формы конечных элемента, а также построения оптимальной для решения поставленной задачи сетки. Кроме того, возникает потребность в специальных алгоритмах получения локального решения краевых задач, призванных снизить вычислительные затраты, обеспечив тем самым функционирование соответствующих расчетных программных комплексов на персональных ЭВМ относительно небольшой мощности. Эта проблема тем более актуальна, что при решении большого количества задач, как правило, не требуется получить решение во всей исследуемой области – задача состоит лишь в получении информации о какой-либо конкретной локальной зоне, где возможны большие напряжения или разрушения, причем такие зоны практически всегда заранее известны даже для очень сложных областей.

Итак, следует еще раз отметить, что при решении самых разнообразных технических задач практически всегда имеет место необходимость эффективного качественного анализа (в частности и в особенности многоуровневого (раздельный анализ глобального и локального состояний)) напряженно-деформируемого состояния рассматриваемого объекта. Такого рода вопросы всегда актуальны, поскольку многие дефекты и разрушения носят локальный характер, а общая несущая способность, связанная с состоянием предельного равновесия, определяется глобальным поведением конструкции. Многоуровневый анализ напряженно-деформированного состояния конструкции позволяет качественно и количественно оценить степень локальности разного рода явлений. Эффективным и популярным средством проведения такого рода исследований в настоящее время является вейвлет-анализ [1-3, 6, 7, 10, 11]. Под многоуровневым анализом авторы понимают разложение решения по локальному вейвлет-базису и рассмотре-

ние компонент решения на каждом из уровней такого базиса. Степень локальности определяется размером носителя базисной функции на каждом уровне.

## 1. ТРАДИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Первый, наиболее грубый и малоэффективный прием, требующий неоправданно больших вычислительных затрат, заключается в использовании достаточно мелкой сетки, обеспечивающей нахождение решения в интересующих нас областях с достаточной точностью.

Второй метод, подробно описанный в литературе по МКЭ [4, 8], состоит в построении неравномерной сетки, сгущающейся в исследуемых зонах. С алгоритмической точки зрения такой подход наиболее эффективен при использовании треугольных сеток. К сожалению, строгое математическое обоснование закономерности построения таких сеток (в частности, обоснование закономерности изменения (увеличения) шага сетки по мере удаления от интересующей нас области) в подавляющем большинстве публикаций отсутствует.

Третий способ, широко используемый в инженерных расчетах, заключается в вырезании фрагментов, содержащих интересующую область, при этом условия на границе области задаются на основании более грубых расчетов или же на основании каких-либо априорных оценок. Математические оценки такого подхода приводятся в [23-25].

В основе четвертого подхода лежит применение МКЭ, при этом используются элементы с функцией формы в виде полиномов высокого порядка [5, 8], а, кроме того, зачастую привлекается суперэлементная техника [15, 19].

Пятым методом является метод Монте-Карло, не предполагающий специальной дискретизации, который может оказаться исключительно эффективным при локальных

расчетах в многомерных задачах, а также при решении задач большой размерности [18]. К недостаткам данного подхода традиционно относят низкую сходимость.

Отметим, что большинство алгоритмов нахождения локального решения могут быть обоснованы с использованием принципа Сен-Венана теории упругости, в основе которого, по сути, лежит представление решения краевой задачи через фундаментальную функцию соответствующего оператора (заметим, что такой подход предлагается использовать в рамках рассматриваемого в настоящей статье алгоритма). Именно поведение фундаментальной функции, в частности скорость ее убывания, и является основанием для укрупнения сетки. Следует отметить, что для тех операторов, у которых фундаментальная функция не убывает, применение локальных сеток нецелесообразно в силу отсутствия какой-либо эффективности.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу, описываемую уравнением

$$Lu = F, \quad (2.1)$$

где  $L$  – оператор краевой задачи, сформулированный с учетом краевых условий в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [9, 10];  $u$  – искомая функция;  $F$  – заданная правая часть.

Постановке (2.1) соответствует функционал энергии

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (F, u), \quad (2.2)$$

стационарной точкой которого является решение задачи (2.1).

Поясним, что запись типа  $(f, g)$  обозначает скалярное произведение функций  $f$  и  $g$ .

Дискретная постановка задачи имеет вид:

$$Lu = F, \quad (2.3)$$

где  $L$  – разностный аналог исходного континуального оператора из постановки (2.1) (для удобства у сеточного оператора сохранено то же обозначение);  $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$  – искомая сеточная функция;  $f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$  – заданная правая часть;  $n$  – размерность дискретной задачи.

Для формирования матрицы дискретного оператора могут использоваться различные способы, в частности, метод базисных (локальных) вариаций А.Б. Золотова [9, 10], характеризующийся универсальностью и удобством программно-алгоритмической реализации.

## 3. ПЕРЕХОД К БАЗИСУ ХААРА

Рассмотрим теперь переход от единичного базиса к базису Хаара. С этой целью воспользуемся матрицей перехода  $Q$ , состоящей из базисных векторов Хаара, записанных по строкам [1]. Тогда, переходя в дискретном аналоге (2.2) к новому базису, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}(Lu, u) - (F, u) = \\ &= \frac{1}{2}(LQv, Qv) - (F, Qv) = \\ &= \frac{1}{2}(Q^*LQv, v) - (Q^*F, v), \end{aligned}$$

т.е. окончательно

$$\tilde{\Phi}(v) = \frac{1}{2}(Q^*LQv, v) - (Q^*F, v), \quad (3.1)$$

где  $v$  – вектор коэффициентов разложения искомой функции  $u$  по базису Хаара,

$$u = \sum_k v_k \psi_k; \quad (3.2)$$

$\psi_k$  – занумерованные некоторым образом базисные вектора.

Итак, задача может быть переписана относительно новых неизвестных  $v$  в виде

$$\tilde{L}v = \tilde{F}, \quad (3.3)$$

Где 
$$\tilde{L} = Q^* L Q; \quad \tilde{F} = Q^* F. \quad (3.4)$$

#### 4. УМЕНЬШЕНИЕ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ. ОСРЕДНЕНИЕ

Как уже отмечалось выше, для многих практических задач строительной механики и математической физики не требуется получение решения во всей области. Основным интерес представляют, как правило, отдельные зоны, подобласти, расположение и размер которых обычно известны заранее. При отсутствии необходимости в нахождении полного решения возможно сокращение числа неизвестных без существенной потери точности или же с небольшой погрешностью локального решения. В случае решения задачи в базисе Хаара представляется целесообразным исключение из разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) неизвестных, являющихся коэффициентами при базисных функциях, носитель которых достаточно удален от исследуемой зоны. Процесс исключения осуществляется на основе применения процедуры осреднения, описанной в [10].

#### ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строитель-

ных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.

2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев Д.Н.** Численные методы исследования локального напряженно-деформируемого состояния конструкций и вейвлет-анализ.: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.13.18. МГСУ. М.: 2002. – 172 с.
2. **Астафьева Н.М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1998, т. 166, № 11, с. 1145-1170.
3. **Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
4. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
5. **Городецкий А.С., Завороцкий В.И., Лантух-Лященко А.И., Рассказов А.О.** Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
6. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
7. **Захарова Т.В., Шестаков О.В.** Вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Инфра-М, 2012. – 158 с.

8. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МИСИ им. В.В. Куйбышева. М.: 1989. – 284 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А.** Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО "МГСУ", 2011. – 368 с.
12. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основные конструкции всплесков // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1997, т. 3, № 4, с. 999-1028.
13. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков // *Успехи математических наук*, 1998, т. 53, №6(324), с. 53-128.
14. **Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.** Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. научных трудов №4. – М.: МГСУ, 2001, с. 248-258.
15. **Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А.** Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1974. – 341 с.
16. **Смоленцев Н.К.** Введение в теорию вейвлетов. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 292 с.
17. **Смоленцев Н.К.** Вейвлет-анализ в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 448 с.
18. **Соболев И.М.** Численные методы Монте-Карло. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973. – 312 с.
19. **Стренг Г., Фикс Дж.** Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 351 с.
20. **Фрейзер М.** Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 487 с.
21. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. 412 с.
22. **Штарк Г.-Г.** Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
23. **Babuska I., Miller A.** The post processing approach in the finite element method. Part 1: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements. // *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 1984, Vol. 20, pp. 1085-1109.
24. **Babuska I., Miller A.** The post processing approach in the finite element method. Part 2: Calculation of stress intensity factors. // *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 1984, Vol. 20, pp. 1111-1129.
25. **Babuska I., Zienkiewicz O.C., Gago J., de A. Oliveira E.R.** Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations (Wiley Series in Numerical Methods in Engineering). John Wiley & Sons Ltd, 1986, 408 pages.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

# ОБ ОПЕРАТОРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

*П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Настоящая статья посвящена операторной постановке проблемы определения собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода.

**Ключевые слова:** операторная постановка, краевая задача, собственные значения, собственные функции, трехмерная задача, анизотропная теория упругости, кусочно-постоянные параметры, дискретно-континуальный подход

## ABOUT OPERATIONAL FORMULATION OF EIGENVALUE PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC BODY WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIMENSION WITHIN DISCRETE-CONTINUAL APPROACH

*Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** Operational formulation of eigenvalue problem for three-dimensional anisotropic body with piecewise-constant physical and geometrical parameters in basic dimension within discrete-continual approach is under consideration in the distinctive paper.

**Key words:** operational formulation, boundary problem, eigenvalue problem, three-dimensional problem, anisotropic theory of elasticity, piecewise- parameters, discrete-continual approach

### 1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем обозначения:  $\Omega$  – область, занимаемая конструкцией;  $x_3$  – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-

геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно (заметим, что по переменным  $x_1$  и  $x_2$  физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно));  $l_3$  – длина конструкции по основному направлению ( $x_3 \in [0, l_3]$ );

Об операторной постановке проблемы собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

$x_{3,k}^b$ ,  $k=1, \dots, n_k$  – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров конструкции);  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – фрагменты, выделенные из области  $\Omega$  сечениями  $x_3 = x_{3,k}^b$  и  $x_3 = x_{3,k+1}^b$ ;  $\Gamma_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – соответствующие границы указанных фрагментов  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$ ;  $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2, x_3)$  – характеристическая функция области  $\Omega_k$ ;  $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3)$  – дельта-функция границы  $\Gamma_k = \partial\Omega_k$  [2-4, 10],

$$\theta_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (1.2)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2} \ n_{k,3}]^T$  – вектор составляющих нормали к границе  $\Gamma_k$ ;  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$  – расширенные области, окаймляющие соответствующие фрагменты  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, n_k-1$ ;

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

$L_k$  – оператор задачи в расширенной области  $\omega_k$  относительно перемещений на интервале  $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$ ,

$$L_k = B^* \bar{D}_k B + C_k; \quad (1.4)$$

$$\bar{D}_k = \theta_k D_k = \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,1}^{(k)} & \bar{d}_{1,2}^{(k)} & \bar{d}_{1,3}^{(k)} & \bar{d}_{1,4}^{(k)} & \bar{d}_{1,5}^{(k)} & \bar{d}_{1,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{2,1}^{(k)} & \bar{d}_{2,2}^{(k)} & \bar{d}_{2,3}^{(k)} & \bar{d}_{2,4}^{(k)} & \bar{d}_{2,5}^{(k)} & \bar{d}_{2,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{3,1}^{(k)} & \bar{d}_{3,2}^{(k)} & \bar{d}_{3,3}^{(k)} & \bar{d}_{3,4}^{(k)} & \bar{d}_{3,5}^{(k)} & \bar{d}_{3,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{4,1}^{(k)} & \bar{d}_{4,2}^{(k)} & \bar{d}_{4,3}^{(k)} & \bar{d}_{4,4}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} & \bar{d}_{4,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,1}^{(k)} & \bar{d}_{5,2}^{(k)} & \bar{d}_{5,3}^{(k)} & \bar{d}_{5,4}^{(k)} & \bar{d}_{5,5}^{(k)} & \bar{d}_{5,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{6,1}^{(k)} & \bar{d}_{6,2}^{(k)} & \bar{d}_{6,3}^{(k)} & \bar{d}_{6,4}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} & \bar{d}_{6,6}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (1.5)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} d_{1,1}^{(k)} & d_{1,2}^{(k)} & d_{1,3}^{(k)} & d_{1,4}^{(k)} & d_{1,5}^{(k)} & d_{1,6}^{(k)} \\ d_{2,1}^{(k)} & d_{2,2}^{(k)} & d_{2,3}^{(k)} & d_{2,4}^{(k)} & d_{2,5}^{(k)} & d_{2,6}^{(k)} \\ d_{3,1}^{(k)} & d_{3,2}^{(k)} & d_{3,3}^{(k)} & d_{3,4}^{(k)} & d_{3,5}^{(k)} & d_{3,6}^{(k)} \\ d_{4,1}^{(k)} & d_{4,2}^{(k)} & d_{4,3}^{(k)} & d_{4,4}^{(k)} & d_{4,5}^{(k)} & d_{4,6}^{(k)} \\ d_{5,1}^{(k)} & d_{5,2}^{(k)} & d_{5,3}^{(k)} & d_{5,4}^{(k)} & d_{5,5}^{(k)} & d_{5,6}^{(k)} \\ d_{6,1}^{(k)} & d_{6,2}^{(k)} & d_{6,3}^{(k)} & d_{6,4}^{(k)} & d_{6,5}^{(k)} & d_{6,6}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (1.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}; \quad (1.7)$$

$$C_k = (\theta_k + \delta_{\Gamma,k}) \begin{bmatrix} c_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{k,3} \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

$$\bar{d}_{i,j}^{(k)} = \theta_k d_{i,j}^{(k)}, \quad i=1, 2, \dots, 6, \quad j=1, 2, \dots, 6; \quad (1.9)$$

$D_k$  – матрица параметров, характеризующих свойства материала, причем параметры обладают свойством взаимности  $d_{i,j}^{(k)} = d_{j,i}^{(k)}$  (т.е. из 36 параметров независимыми будут 21; в общем случае анизотропии линейные и угловые деформации зависят от всех шести напряжений);  $C_k$  – матрица упругих характеристик опор (при наличии);  $c_{k,i}$  – коэффициент отпора по направлению оси  $Ox_i$ ;

$$\partial_k = \partial / \partial x_k, \quad k=1, 2; \quad \partial_k^* = -\partial / \partial x_k, \quad k=1, 2; \quad (1.10)$$

$S$  – искомое собственное значение;

$$\bar{u}_k = [u_1^{(k)} \ u_2^{(k)} \ u_3^{(k)}]^T, \quad k=1, \dots, n_k-1 \quad (1.11)$$

– искомый собственный вектор в области  $\Omega_k$ ;  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$  – соответствующие компоненты перемещений.

Приведем ниже сводку определяющих формул для основных статических и кинематических величин:

– деформации в области  $\Omega_k$

$$\bar{\varepsilon}_k = B\bar{u}_k, \quad (1.12)$$

где  $\bar{\varepsilon}_k = [\varepsilon_{1,1}^{(k)} \ \varepsilon_{2,2}^{(k)} \ \varepsilon_{3,3}^{(k)} \ \varepsilon_{1,2}^{(k)} \ \varepsilon_{2,3}^{(k)} \ \varepsilon_{1,3}^{(k)}]^T$ ;

$$(1.13)$$

$\varepsilon_{i,j}^{(k)}$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $j=1, 2, 3$  – компоненты тензора деформаций;

– напряжения в области  $\Omega_k$

$$\bar{\sigma}_k = D_k \bar{\varepsilon}_k, \quad (1.14)$$

где  $\bar{\sigma}_k = [\sigma_{1,1}^{(k)} \ \sigma_{2,2}^{(k)} \ \sigma_{3,3}^{(k)} \ \sigma_{1,2}^{(k)} \ \sigma_{2,3}^{(k)} \ \sigma_{1,3}^{(k)}]^T$ ;

$$(1.15)$$

$\sigma_{i,j}^{(k)}$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $j=1, 2, 3$  – компоненты тензора напряжений.

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ОПЕРАТОРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ.

Учитывая кусочно-постоянный характер изменения параметров конструкции по основному направлению (вдоль  $x_3$ ), можем записать:

$$L_k = -L_{k,vv} \partial_3^2 + \tilde{L}_{k,uv} \partial_3 + L_{k,uu} + C_k, \quad (2.1)$$

где  $\tilde{L}_{k,uv} = L_{k,uv} - L_{k,vu}$ ;  $L_{k,vu} = L_{k,uv}^*$ ;

$$L_{k,vu} = L_{k,uv}^*; \quad (2.2)$$

$$L_{k,vv} = - \begin{bmatrix} \bar{d}_{6,6}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} & \bar{d}_{6,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,6}^{(k)} & \bar{d}_{5,5}^{(k)} & \bar{d}_{5,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{3,6}^{(k)} & \bar{d}_{3,5}^{(k)} & \bar{d}_{3,3}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$$L_{k,uv} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,6}^{(k)} & \bar{d}_{1,5}^{(k)} & \bar{d}_{1,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{4,6}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} & \bar{d}_{4,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{6,6}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} & \bar{d}_{6,3}^{(k)} \end{bmatrix} + \partial_2^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{4,6}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} & \bar{d}_{4,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{2,6}^{(k)} & \bar{d}_{2,5}^{(k)} & \bar{d}_{2,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,6}^{(k)} & \bar{d}_{5,5}^{(k)} & \bar{d}_{5,3}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

$$L_{k,vu} = L_{k,uv}^* = \begin{bmatrix} \bar{d}_{6,1}^{(k)} & \bar{d}_{6,4}^{(k)} & \bar{d}_{6,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,1}^{(k)} & \bar{d}_{5,4}^{(k)} & \bar{d}_{5,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{3,1}^{(k)} & \bar{d}_{3,4}^{(k)} & \bar{d}_{3,6}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_1 + \begin{bmatrix} \bar{d}_{6,4}^{(k)} & \bar{d}_{6,2}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,4}^{(k)} & \bar{d}_{5,2}^{(k)} & \bar{d}_{5,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{3,4}^{(k)} & \bar{d}_{3,2}^{(k)} & \bar{d}_{3,5}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_2; \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{k,uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,6}^{(k)} & \bar{d}_{1,5}^{(k)} & \bar{d}_{1,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{4,6}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} & \bar{d}_{4,3}^{(k)} \\ \bar{d}_{6,6}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} & \bar{d}_{6,3}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_1 + \partial_1^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{1,4}^{(k)} & \bar{d}_{1,2}^{(k)} & \bar{d}_{1,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{4,4}^{(k)} & \bar{d}_{4,2}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{6,4}^{(k)} & \bar{d}_{6,2}^{(k)} & \bar{d}_{6,5}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_2 + \partial_2^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{4,1}^{(k)} & \bar{d}_{4,4}^{(k)} & \bar{d}_{4,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{2,1}^{(k)} & \bar{d}_{2,4}^{(k)} & \bar{d}_{2,6}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,1}^{(k)} & \bar{d}_{5,4}^{(k)} & \bar{d}_{5,6}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_1 + \partial_2^* \begin{bmatrix} \bar{d}_{4,4}^{(k)} & \bar{d}_{4,2}^{(k)} & \bar{d}_{4,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{2,4}^{(k)} & \bar{d}_{2,2}^{(k)} & \bar{d}_{2,5}^{(k)} \\ \bar{d}_{5,4}^{(k)} & \bar{d}_{5,2}^{(k)} & \bar{d}_{5,5}^{(k)} \end{bmatrix} \partial_2. \quad (2.6)$$

## 3. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Операторная постановка задачи имеет вид:

$$L_k \bar{u}_k = s \bar{u}_k, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k=1, \dots, n_k - 1. \quad (3.1)$$

Рассмотрим произвольное  $k$ -е уравнение системы (3.1). Учитывая (2.1), можем переписать его следующим образом:

$$-L_{k,vv} \partial_3^2 \bar{u}_k + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \partial_3 \bar{u}_k + (\mathcal{L}_{k,uu} + C_k) \bar{u}_k = s \bar{u}_k. \quad (3.3)$$

Вводя обозначение

$$\bar{v}_k = [v_1^{(k)} \ v_2^{(k)} \ v_3^{(k)}]^T = [\partial_3 u_1^{(k)} \ \partial_3 u_2^{(k)} \ \partial_3 u_3^{(k)}]^T = \partial_3 \bar{u}_k = \bar{u}'_k; \quad (3.3)$$

Об операторной постановке проблемы собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

переходим от (3.2) к уравнению

$$-\mathcal{L}_{k,vv}\bar{v}'_k + \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv}\bar{v}_k + (\mathcal{L}_{k,uu} + C_k)\bar{u}_k = s\bar{u}_k, \quad (3.4)$$

где 
$$\bar{v}'_k = \partial_3 \bar{v}_k. \quad (3.5)$$

Объединяя (3.3)-(3.5), получим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & L_{k,vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_{k,uu} + C_k - sE & \tilde{L}_{k,uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

или

$$\begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_{k,vv}^{-1}(L_{k,uu} + C_k - sE) & L_{k,vv}^{-1}\tilde{L}_{k,uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где  $E$  – тождественный оператор.

Окончательно имеем:

$$\bar{U}'_k = \tilde{L}_{k,s}\bar{U}_k, \quad (3.8)$$

Где 
$$\tilde{L}_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_{k,vv}^{-1}(L_{k,uu} + C_k - sE) & L_{k,vv}^{-1}\tilde{L}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad (3.9)$$

$$\bar{U}_k = \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{U}'_k = \partial_3 \bar{U}_k = \begin{bmatrix} \partial_3 \bar{u}_k \\ \partial_3 \bar{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}'_k \\ \bar{v}'_k \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8), разумеется, следует дополнить граничными условиями, задаваемыми в сечениях с координатами  $x_{3,k}^b$ ,  $k=1, \dots, n_k$ .

Эти граничные условия представимы в виде

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k - 1; \quad (3.11)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3.12)$$

где  $B_k^-, B_k^+$ ,  $k=2, \dots, n_k - 1$ ,  $B_1^+$  и  $B_{n_k}^-$  – матрицы коэффициентов граничных условий, 6-го порядка;  $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$ ,  $k=2, \dots, n_k - 1$ ,  $\bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$

– векторы правых частей граничных условий, шестимерные.

Объединяя (3.8), (3.11) и (3.12) получаем операторную постановку многоточечной краевой задачи с выделением основного направления:

$$\begin{cases} \bar{U}'_k = \tilde{L}_{k,s}\bar{U}_k, & x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \\ & k=1, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{3,k}^b + 0) = \\ & = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \bar{U}_1(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \\ & = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (3.13)$$

#### 4. ЗАДАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

Рассмотрим ниже задание некоторых стандартных типов граничных условий, поперечных по отношению к основному направлению в форме (3.11)-(3.12) в произвольной граничной точке с координатой  $x_{2,k}^b$ . Строго говоря, возможно три основных варианта граничной точки: 1)  $1 < k < n_k$  – промежуточная граничная точка; 2)  $k=1$  – крайняя левая (первая) граничная точка; 3)  $k=n_k$  – крайняя правая (последняя) граничная точка.

*Шарнирное закрепление.*

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$\bar{u}_{k-1}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0; \quad \bar{u}_k(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0, \quad (4.1)$$

или в поэлементном виде

$$u_i^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad (4.2)$$

$$u_i^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad (4.3)$$

откуда

$$\bar{g}_k^- = \bar{g}_k^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_k^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{n_k}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$B_k^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

Для случая  $k=1$  имеем следующие граничные условия:

$$\bar{u}_1(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0, \quad (4.5)$$

или

$$u_i^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.6)$$

откуда

$$B_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

а первые три компоненты в векторах  $\bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  нулевые.

Для случая  $k=n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$\bar{u}_{n_k-1}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0, \quad (4.8)$$

$$\text{т.е. } u_i^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

откуда

а последние три компоненты в векторах  $\bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  нулевые.

*Свободный край.*

Для случая  $k=1$  имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0; \quad \sigma_{23}^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0; \\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = 0. \quad (4.11)$$

Учитывая (1.11)-(1.14) и (3.3), можем записать:

$$\sigma_{3,3}^{(k)} = d_{3,1}^{(k)}[\partial_1 u_1^{(k)}] + d_{3,2}^{(k)}[\partial_2 u_2^{(k)}] + d_{3,3}^{(k)}v_3^{(k)} + \\ + d_{3,4}^{(k)}([\partial_2 u_1^{(k)}] + [\partial_1 u_2^{(k)}]) + \\ + d_{3,5}^{(k)}(v_2^{(k)} + [\partial_2 u_3^{(k)}]) + d_{3,6}^{(1)}(v_1^{(k)} + [\partial_1 u_3^{(k)}]); \quad (4.12)$$

$$\sigma_{2,3}^{(k)} = d_{5,1}^{(k)}[\partial_1 u_1^{(k)}] + d_{5,2}^{(k)}[\partial_2 u_2^{(k)}] + d_{5,3}^{(k)}v_3^{(k)} + \\ + d_{5,4}^{(k)}([\partial_2 u_1^{(k)}] + [\partial_1 u_2^{(k)}]) + \\ + d_{5,5}^{(k)}(v_2^{(k)} + [\partial_2 u_3^{(k)}]) + d_{5,6}^{(1)}(v_1^{(k)} + [\partial_1 u_3^{(k)}]); \quad (4.13)$$

$$\sigma_{1,3}^{(k)} = d_{6,1}^{(k)}[\partial_1 u_1^{(k)}] + d_{6,2}^{(k)}[\partial_2 u_2^{(k)}] + d_{6,3}^{(k)}v_3^{(k)} + \\ + d_{6,4}^{(k)}([\partial_2 u_1^{(k)}] + [\partial_1 u_2^{(k)}]) + \\ + d_{6,5}^{(k)}(v_2^{(k)} + [\partial_2 u_3^{(k)}]) + d_{6,6}^{(1)}(v_1^{(k)} + [\partial_1 u_3^{(k)}]). \quad (4.14)$$

Следовательно, вместо (4.11) получаем:

Об операторной постановке проблемы собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

$$\begin{aligned}
 & d_{3,1}^{(1)}[\partial_1 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{3,2}^{(1)}[\partial_2 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{3,3}^{(1)}v_3^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{3,4}^{(1)}([\partial_2 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \quad (4.15) \\
 & + d_{3,5}^{(1)}(v_2^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \\
 & + d_{3,6}^{(1)}(v_1^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{5,1}^{(1)}[\partial_1 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{5,2}^{(1)}[\partial_2 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{5,3}^{(1)}v_3^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{5,4}^{(1)}([\partial_2 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \quad (4.16) \\
 & + d_{5,5}^{(1)}(v_2^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \\
 & + d_{5,6}^{(1)}(v_1^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{6,1}^{(1)}[\partial_1 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{6,2}^{(1)}[\partial_2 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{6,3}^{(1)}v_3^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + d_{6,4}^{(1)}([\partial_2 u_1^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \quad (4.17) \\
 & + d_{6,5}^{(1)}(v_2^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \\
 & + d_{6,6}^{(1)}(v_1^{(1)}(x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) = 0,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 & B_1^+ = \\
 & = \begin{bmatrix} (B_1^+)_{1,1} & (B_1^+)_{1,2} & (B_1^+)_{1,3} & d_{3,6}^{(1)} & d_{3,5}^{(1)} & d_{3,3}^{(1)} \\ (B_1^+)_{2,1} & (B_1^+)_{2,2} & (B_1^+)_{2,3} & d_{5,6}^{(1)} & d_{5,5}^{(1)} & d_{5,3}^{(1)} \\ (B_1^+)_{3,1} & (B_1^+)_{3,2} & (B_1^+)_{3,3} & d_{6,6}^{(1)} & d_{6,5}^{(1)} & d_{6,3}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

а первые три компоненты в векторах  $\bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  нулевые;

$$(B_1^+)_{1,1} = d_{3,1}^{(1)}\partial_1 + d_{3,4}^{(1)}\partial_2;$$

$$(B_1^+)_{1,2} = d_{3,2}^{(1)}\partial_2 + d_{3,4}^{(1)}\partial_1;$$

$$(B_1^+)_{1,3} = d_{3,5}^{(1)}\partial_2 + d_{3,6}^{(1)}\partial_1;$$

$$(B_1^+)_{2,1} = d_{5,1}^{(1)}\partial_1 + d_{5,4}^{(1)}\partial_2;$$

$$(B_1^+)_{2,2} = d_{5,2}^{(1)}\partial_2 + d_{5,4}^{(1)}\partial_1;$$

$$(B_1^+)_{2,3} = d_{5,5}^{(1)}\partial_2 + d_{5,6}^{(1)}\partial_1;$$

$$(B_1^+)_{3,1} = d_{6,1}^{(1)}\partial_1 + d_{6,4}^{(1)}\partial_2;$$

$$(B_1^+)_{3,2} = d_{6,2}^{(1)}\partial_2 + d_{6,4}^{(1)}\partial_1;$$

$$(B_1^+)_{3,3} = d_{6,5}^{(1)}\partial_2 + d_{6,6}^{(1)}\partial_1.$$

После соответствующей аппроксимации в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов матрица (4.18) становится числовой.

Для случая  $k = n_k$  аналогично имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{33}^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0; \\
 & \sigma_{23}^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0; \\
 & \sigma_{13}^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) = 0 \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

или с учетом (4.12)-(4.14)

$$\begin{aligned}
 & d_{3,1}^{(n_k-1)}[\partial_1 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{3,2}^{(n_k-1)}[\partial_2 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{3,3}^{(n_k-1)}v_3^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{3,4}^{(n_k-1)}([\partial_2 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \quad (4.20) \\
 & + d_{3,5}^{(n_k-1)}(v_2^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) + \\
 & + d_{3,6}^{(n_k-1)}(v_1^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{5,1}^{(n_k-1)} [\partial_1 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{5,2}^{(n_k-1)} [\partial_2 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{5,3}^{(n_k-1)} v_3^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{5,4}^{(n_k-1)} ([\partial_2 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \\
 & + d_{5,5}^{(n_k-1)} (v_2^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) + \\
 & + d_{5,6}^{(n_k-1)} (v_1^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) = 0;
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{6,1}^{(n_k-1)} [\partial_1 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{6,2}^{(n_k-1)} [\partial_2 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{6,3}^{(n_k-1)} v_3^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + d_{6,4}^{(n_k-1)} ([\partial_2 u_1^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,1}^b + 0)) + \\
 & + d_{6,5}^{(n_k-1)} (v_2^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) + \\
 & + d_{6,6}^{(n_k-1)} (v_1^{(n_k-1)}(x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(n_k-1)}](x_1, x_2, x_{3,n_k}^b - 0)) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 & B_{n_k-1}^- = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & = \begin{bmatrix} (B_{n_k-1}^-)_{4,1} & (B_{n_k-1}^-)_{4,2} & (B_{n_k-1}^-)_{4,3} & d_{3,6}^{(n_k-1)} & d_{3,5}^{(n_k-1)} & d_{3,3}^{(n_k-1)} \\ (B_{n_k-1}^-)_{5,1} & (B_{n_k-1}^-)_{5,2} & (B_{n_k-1}^-)_{5,3} & d_{5,6}^{(n_k-1)} & d_{5,5}^{(n_k-1)} & d_{5,3}^{(n_k-1)} \\ (B_{n_k-1}^-)_{6,1} & (B_{n_k-1}^-)_{6,2} & (B_{n_k-1}^-)_{6,3} & d_{6,6}^{(n_k-1)} & d_{6,5}^{(n_k-1)} & d_{6,3}^{(n_k-1)} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

а последние три компоненты в векторах  $\bar{g}_1^+$  и  $\bar{g}_{n_k}^-$  нулевые;

$$\begin{aligned}
 & (B_{n_k-1}^-)_{4,1} = d_{3,1}^{(n_k-1)} \partial_1 + d_{3,4}^{(n_k-1)} \partial_2; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{4,2} = d_{3,2}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{3,4}^{(n_k-1)} \partial_1; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{4,3} = d_{3,5}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{3,6}^{(n_k-1)} \partial_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{n_k-1}^-)_{5,1} = d_{5,1}^{(n_k-1)} \partial_1 + d_{5,4}^{(n_k-1)} \partial_2; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{5,2} = d_{5,2}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{5,4}^{(n_k-1)} \partial_1; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{5,3} = d_{5,5}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{5,6}^{(n_k-1)} \partial_1; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{6,1} = d_{6,1}^{(n_k-1)} \partial_1 + d_{6,4}^{(n_k-1)} \partial_2; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{6,2} = d_{6,2}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{6,4}^{(n_k-1)} \partial_1; \\
 & (B_{n_k-1}^-)_{6,3} = d_{6,5}^{(n_k-1)} \partial_2 + d_{6,6}^{(n_k-1)} \partial_1.
 \end{aligned}$$

После соответствующей аппроксимации в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов матрица (4.23) становится числовой.

#### Идеальный контакт.

Условия идеального контакта, как правило, задаются в поперечных по отношению к основному направлению сечениях, где происходят скачкообразные изменения физико-геометрических параметров конструкции.

Для случая  $1 < k < n_k$  имеем следующие граничные условия:

$$\bar{u}_{k-1}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = \bar{u}_k(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0); \tag{4.24}$$

$$\sigma_{13}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{13}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0); \tag{4.25}$$

$$\sigma_{23}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{23}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0); \tag{4.26}$$

$$\sigma_{33}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{33}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0); \tag{4.27}$$

После преобразований вместо (4.24)-(4.27) можем записать:

$$\begin{aligned}
 & u_i^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) - u_i^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \\
 & i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{3,1}^{(k)} [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{3,2}^{(k)} [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{3,3}^{(k)} v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{3,4}^{(k)} ([\partial_2 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{3,5}^{(k)} (v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{3,6}^{(k)} (v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) - \\
 & - d_{3,1}^{(k-1)} [\partial_1 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + d_{3,2}^{(k-1)} [\partial_2 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{3,3}^{(k-1)} v_3^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{3,4}^{(k-1)} ([\partial_2 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - [\partial_1 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{3,5}^{(k-1)} (v_2^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{3,6}^{(k-1)} (v_1^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) = 0;
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{5,1}^{(k)} [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{5,2}^{(k)} [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{5,3}^{(k)} v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{5,4}^{(k)} ([\partial_2 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{5,5}^{(k)} (v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{5,6}^{(k)} (v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) - \\
 & - d_{5,1}^{(k-1)} [\partial_1 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + d_{5,2}^{(k-1)} [\partial_2 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{5,3}^{(k-1)} v_3^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{5,4}^{(k-1)} ([\partial_2 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - [\partial_1 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{5,5}^{(k-1)} (v_2^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{5,6}^{(k-1)} (v_1^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) = 0;
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{6,1}^{(k)} [\partial_1 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{6,2}^{(k)} [\partial_2 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{6,3}^{(k)} v_3^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + d_{6,4}^{(k)} ([\partial_2 u_1^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_2^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{6,5}^{(k)} (v_2^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) + \\
 & + d_{6,6}^{(k)} (v_1^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0)) - \\
 & - d_{6,1}^{(k-1)} [\partial_1 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + d_{6,2}^{(k-1)} [\partial_2 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{6,3}^{(k-1)} v_3^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - d_{6,4}^{(k-1)} ([\partial_2 u_1^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) - \\
 & - [\partial_1 u_2^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{6,5}^{(k-1)} (v_2^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_2 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) - \\
 & - d_{6,6}^{(k-1)} (v_1^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) + \\
 & + [\partial_1 u_3^{(k-1)}](x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0)) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
 & B_k^- = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B_k^-)_{4,1} & (B_k^-)_{4,2} & (B_k^-)_{4,3} & d_{3,6}^{(k-1)} & d_{3,5}^{(k-1)} & d_{3,3}^{(k-1)} \\ (B_k^-)_{5,1} & (B_k^-)_{5,2} & (B_k^-)_{5,3} & d_{5,6}^{(k-1)} & d_{5,5}^{(k-1)} & d_{5,3}^{(k-1)} \\ (B_k^-)_{6,1} & (B_k^-)_{6,2} & (B_k^-)_{6,3} & d_{6,6}^{(k-1)} & d_{6,5}^{(k-1)} & d_{6,3}^{(k-1)} \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
 & B_k^+ = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B_k^+)_{4,1} & (B_k^+)_{4,2} & (B_k^+)_{4,3} & d_{3,6}^{(k)} & d_{3,5}^{(k)} & d_{3,3}^{(k)} \\ (B_k^+)_{5,1} & (B_k^+)_{5,2} & (B_k^+)_{5,3} & d_{5,6}^{(k)} & d_{5,5}^{(k)} & d_{5,3}^{(k)} \\ (B_k^+)_{6,1} & (B_k^+)_{6,2} & (B_k^+)_{6,3} & d_{6,6}^{(k)} & d_{6,5}^{(k)} & d_{6,3}^{(k)} \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\bar{g}_k^- = \bar{g}_k^+ = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
 (B_k^-)_{4,1} &= d_{3,1}^{(k-1)} \partial_1 + d_{3,4}^{(k-1)} \partial_2; \\
 (B_k^-)_{4,2} &= d_{3,2}^{(k-1)} \partial_2 + d_{3,4}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^-)_{4,3} &= d_{3,5}^{(k-1)} \partial_2 + d_{3,6}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^-)_{5,1} &= d_{5,1}^{(k-1)} \partial_1 + d_{5,4}^{(k-1)} \partial_2; \\
 (B_k^-)_{5,2} &= d_{5,2}^{(k-1)} \partial_2 + d_{5,4}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^-)_{5,3} &= d_{5,5}^{(k-1)} \partial_2 + d_{5,6}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^-)_{6,1} &= d_{6,1}^{(k-1)} \partial_1 + d_{6,4}^{(k-1)} \partial_2; \\
 (B_k^-)_{6,2} &= d_{6,2}^{(k-1)} \partial_2 + d_{6,4}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^-)_{6,3} &= d_{6,5}^{(k-1)} \partial_2 + d_{6,6}^{(k-1)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{4,1} &= d_{3,1}^{(k)} \partial_1 + d_{3,4}^{(k)} \partial_2; \\
 (B_k^+)_{4,2} &= d_{3,2}^{(k)} \partial_2 + d_{3,4}^{(k)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{4,3} &= d_{3,5}^{(k)} \partial_2 + d_{3,6}^{(k)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{5,1} &= d_{5,1}^{(k)} \partial_1 + d_{5,4}^{(k)} \partial_2; \\
 (B_k^+)_{5,2} &= d_{5,2}^{(k)} \partial_2 + d_{5,4}^{(k)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{5,3} &= d_{5,5}^{(k)} \partial_2 + d_{5,6}^{(k)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{6,1} &= d_{6,1}^{(k)} \partial_1 + d_{6,4}^{(k)} \partial_2; \\
 (B_k^+)_{6,2} &= d_{6,2}^{(k)} \partial_2 + d_{6,4}^{(k)} \partial_1; \\
 (B_k^+)_{6,3} &= d_{6,5}^{(k)} \partial_2 + d_{6,6}^{(k)} \partial_1.
 \end{aligned}$$

После соответствующей аппроксимации в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов матрицы (4.32) и (4.33) становятся числовыми.

### ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 2.3.18 Российской академии архитектуры и строительных наук для молодых ученых специалистов «Разработка и верификация коррективных численных и численно-аналитических методов исследования локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций на основе многоуровневого вейвлет-анализа» на 2012 г.

2. Грант 2.3.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2012 гг.
3. Грант Министерства образования и науки Российской Федерации «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 572 с.
2. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
3. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. Сидоров В.Н. Дискретные постановки и алгоритмы решения краевых задач строительной механики в произвольных

Об операторной постановке проблемы собственных значений и собственных функций краевой задачи статического расчета трехмерного анизотропного тела с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

- областях на регулярных сетках. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1992.
7. **Сидоров В.Н.** Разработка метода решения краевых задач на ЭВМ для расчета различных типов строительных конструкций. Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 01.02.03. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: 1976. – 171 с.
  8. **Сидоров В.Н., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б., Хегай А.О.** Постановка и численное решение краевых задач теории упругости для конструкций из фибробетона. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. трудов №13, М.: МГСУ, 2010, с. 333-343.
  9. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
  10. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

---

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики; ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВБЛИЗИ ЭПИЦЕНТРОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

*А.В.Капцов, С.В. Кузнецов*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН

**АННОТАЦИЯ:** С помощью метода конечных элементов исследуются волновые поля, вызванные сосредоточенными сингулярными источниками, расположенными внутри упругого полупространства. Анализ динамических перемещений производится на свободной поверхности полупространства в ближней к эпицентральной зоне.

**Ключевые слова:** Сейсмическая волна, волна Рэлея, эпицентр, землетрясение

## MODELING SEISMIC WAVES NEAR EPICENTRES OF THE EARTHQUAKES

*A. V. Kaptsov, S. V. Kuznetsov*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

**ABSTRACT:** The finite element method is used to simulate the wave fields in the near epicenter zone. Different point singular loads are applied in the interior of an isotropic elastic halfspace and halfplane. The dynamic displacement fields are analyzed on the free boundary of the halfspace.

**Keywords:** Seismic wave, Rayleigh wave, epicentre, earthquake

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже рассматриваются вопросы моделирования очагов тектонических землетрясений, вызванных подвижками тектонических плит и высвобождением упругой энергии при изменении взаимного расположения плит.

Надо отметить, что известны и другие источники землетрясений, например глубинные землетрясения, вызванные процессами в верхних слоях мантии, или землетрясения, сопровождающие деятельность вулканов. В двух последних случаях механизмы возникновения землетрясений отличаются от рассматриваемых в настоящей работе.

1.1. *Теоретические исследования распространения поверхностных волн вдали от эпицентра.*

1.1.1. *Бездисперсионные поверхностные волны.* Статья Рэлея [1] по исследованию распространения гармонических поверхностных волн в изотропном упругом полупространстве, положила начало методам математического моделирования распространения *поверхностных* сейсмических волн в земной коре вдали от источника землетрясения. Несколько основополагающих результатов этой статьи представляют исключительную важность для математического моделирования сейсмических волн вдали от эпицентра: (1) волна Рэлея формируется из двух парциальных волн, поляризованных в сагиттальной плоскости; (2) скорость

распространения волны Рэлея в изотропном полупространстве меньше скорости медленной (поперечной) объемной волны, при этом скорость не зависит от частоты, т.е. отсутствует дисперсия; (3) волна Рэлея экспоненциально затухает по глубине, так что ее энергия локализована в приповерхностном слое; (4) вертикальная компонента Рэлеевской волны приблизительно в полтора раза больше горизонтальной компоненты. В этой же статье высказано предположение о том, что именно поверхностные волны являются основным источником разрушений при землетрясениях.

В [2], фактически методом Рэлея исследовалось распространение гармонических поверхностных волн на сфере. В частности, в этой работе было показано, что один из корней полинома Рэлея определяет скорость новой, более быстрой волны, чем волна Рэлея, названной впоследствии волной Сезавы. В [3] метод Рэлея распространен на интерфейсные волны, возникающие на границе контактирующих полупространств. С введением шестимерного формализма Стро [4] оказалось возможным перейти к исследованию волн Рэлея в анизотропном полупространстве [5 – 9]. В частности, в [5 – 7] было показано, что (1) при любой анизотропии упругой среды существует не более одной поверхностной волны Рэлея; (2) скорость рэлеевской волны может превышать скорость медленной поперечной волны; (3) в некоторых случаях упругой анизотропии истинной рэлеевской волны, экспоненциально затухающей по глубине, может не быть, - вместо нее распространяется «истекающая» волна, одна из парциальных компонент которой не затухает с глубиной. В исключительных случаях анизотропии, связанных с неполупростым вырождением фундаментальной матрицы, появляются волны «не рэлеевского типа» [10].

*1.1.2. Дисперсионные сейсмические волны.* В случае, когда учитывается слоистость, сейсмическая волна становится дисперсионной. Теория дисперсионных

волн, распространяющихся в изотропном упругом слое и поляризованных в сагиттальной плоскости, разработана Лэмбом [11], а для анизотропного слоя с моноклинной симметрией – в [12, 13]. При наличии контакта слоев с упругим полупространством, рассматривают волны, называемые волнами Рэлея – Лэмба [14]. Эти волны имеют дисперсию из-за слоистости среды и, по аналогии с волнами Рэлея, убывают экспоненциально по глубине в полупространстве.

Волны, поляризованные в горизонтальной плоскости и распространяющиеся в системе упругий слой, контактирующий с упругим полупространством, называют волнами Лява [15]. Волны Лява обладают дисперсией, возникающей за счет присутствия слоя конечной толщины. Применительно к изотропному слою и полупространству теория этих волн разработана в монографии [15]. Случай упруго анизотропного слоя и полупространства рассмотрен в [16].

## *1.2. Методы интегральных уравнений, применяемые при моделировании очага тектонического землетрясения.*

*1.2.1. Точечные силовые особенности.* В статьях Лэмба [17, 18] предложен метод моделирования динамических процессов, связанных с распространением возмущений от сосредоточенных силовых особенностей, расположенных на поверхности упругого полупространства или полуплоскости (внешняя задача Лэмба) и внутри полупространства или полуплоскости (внутренняя задача Лэмба). Для решения этих задач Лэмбом использовалось (а) представление уравнений Навье в форме Ламе – Клапейрона; (б) запись решений уравнений динамики в виде потенциалов Ламе – Грина и (в) представление нагрузки в виде потенциалов Гельмгольца. Далее решение уравнений Гельмгольца разыскивалось в виде фундаментальных решений Стокса и осуществлялось сужение этих потенциалов на граничную плоскость. Надо отметить, что полученные интегральные представления оказались

весьма сложными: в замкнутом виде решение удалось получить лишь для гармонической нагрузки. В случае произвольной зависимости от времени замкнутое решение было получено в пространстве изображений, точнее, решение на поверхности было представлено в виде несобственного интеграла от алгебраической функции. В дальнейшем метод Лэмба с модификациями и уточнениями применялся в целом ряде исследований [19 – 25].

Здесь надо отметить, что в работах [17 – 25] для внутренней задачи Лэмба рассматривались силовые особенности в виде либо полосовой нагрузки в случае плоской деформации, либо в виде центра расширения в случае решения пространственной задачи. В первых работах [26, 27] по поиску адекватных моделей очага землетрясения, которые бы согласовывались с имеющимися сейсмическими данными, предложено в качестве источников землетрясений рассматривать либо двойные силы, либо диполи (двойные силы с моментом). В дальнейшем в работах [28 – 31] развивалась концепция диполя, а в [32 – 38] – чистого сдвига, эквивалентного двум взаимно ортогональным двойным силам. При построении решений, основанных на моделях [28 – 38] применялся подход Лэмба, причем, в отличие от оригинальных работ [17, 18] рассматривался случай безграничной среды. В настоящее время метод, развитый в работах [32 – 38], применяется весьма редко, по-видимому, из-за сложности описания плоскости разрыва. В [34] проведено сравнение решений для диполя (система I) и двух двойных сил без момента (система II).

*Замечание 1.2.1.* Надо отметить, что неучет наличия свободной земной поверхности в решениях [28 – 38] позволил адекватно описать распространение возмущений только в непосредственной близости от очагов землетрясений. В наиболее интересной зоне вблизи от земной поверхности решения [28 – 38] должны быть дополнены динамическими

потенциалами (с плотностью на свободной поверхности) для удовлетворения граничных условий на этой поверхности. Этот, более строгий подход, был реализован в [39 – 42], где применялось дифференцирование по пространственным координатам решения внутренней пространственной задачи Лэмба [17, 18], - т.е. фактически в [39 – 42], осуществлялось дифференцирование динамического тензора Грина для полупространства.

Отдельно следует остановиться на временной зависимости нагрузок, применяемой в моделях [28 – 42]. В одной из первых работ по описанию процессов, происходящих в очаге землетрясения [43], было сделано предположение о высвобождении упругой энергии в момент землетрясения и последующем снятии напряжений (теория упругой отдачи). В соответствии с этой концепцией, в качестве временных зависимостей для силовых особенностей выбирались функции, в некотором смысле близкие к  $\delta$ -функции и имеющие простой Фурье-образ.

*1.2.2. Дислокационные модели.* Следующим этапом в исследованиях очага землетрясения явилось моделирование очага в виде дислокации скольжения с постоянным в пределах плоской области, занятой дислокацией, скачком смещений, называемом вектором Бюргерса [44 – 57]. Рассматривались как неподвижные [44 – 46], так и растущие области дислокаций [47 – 57]. В [46] проводилось сравнение дальних полей, созданных неподвижной дислокацией и точечным источником в виде двойной силы без момента. Это сравнение показало, что дальние поля асимптотически неразличимы.

В случае неподвижных дислокаций временная зависимость изменения вектора Бюргерса принималась близкой к  $\delta$ -функции. Дислокационные модели оказались весьма удобными для описания процессов, сопровождающих землетрясения. В частности, с помощью дислокационной модели [51, 52] удалось определить потенциальную энергию дислокационной петли, с помощью которой моделируется

очаг землетрясения. При этом для получения конечных значений энергии в [51, 52] выделялась некоторая трубчатая окрестность дислокационной петли (с постоянным вектором Бюргерса), моделирующая гипотетическую зону пластического разрушения. Надо отметить, что во всех из рассмотренных здесь работ [44 – 62] исследовались дислокации в безграничной среде.

Для анализа высвобождаемой при землетрясении упругой энергии, известны другие подходы, не связанные непосредственно с энергией дислокационной петли, см. [58 – 62]. С помощью этих подходов удалось получить весьма простые соотношения, связывающие энергию землетрясения с магнитудой (объемных) сейсмических волн. Например, в [62] получено выражение, связывающее сейсмический момент с магнитудой волновой энергии.

Учет свободной поверхности вносит значительные трудности в анализ упругих полей, вызванных дислокацией. При учете свободной поверхности во всех из известных подходов рассматривались статические задачи. В [63 – 66] рассматривались статические задачи о дислокациях в полупространстве, а в [67 – 69] – также статические задачи о дислокациях в среде с искривленной свободной поверхностью, моделирующей поверхность Земли. На основании этих исследований установлено, что в случае неглубоких землетрясений и на расстояниях не слишком удаленных от эпицентра, учет кривизны поверхности дает несущественный вклад в поле перемещений, однако возможная слоистость среды оказывает существенно большее влияние [70, 71].

*1.2.3. Модели очага в виде сдвиговой трещины.* Моделирование очага землетрясения в виде сдвиговой трещины позволило избежать появления неинтегрируемых особенностей в выражении запасенной упругой энергии, появляющихся при моделировании очага дислокацией с постоянным вектором

Бюргерса. В подавляющем большинстве работ о трещинах, как источниках возмущений при землетрясениях, рассматривались движущиеся сдвиговые трещины, удовлетворяющие условию самоподобия Броберга [72 – 74], в соответствии с которым плоская трещина растёт (i) с постоянной скоростью и (ii) симметрично относительно некоторого центра роста. В соответствии с концепцией самоподобия, в [75, 76] рассматривалась растущая сдвиговая круговая трещина, а в [77, 78] – эллиптическая самоподобная трещина. Для самоподобных сдвиговых трещин в изотропной среде в [79 – 81] теоретически предсказана возможность скорости роста, превышающая скорость сдвиговой волны в среде, тогда как в соответствии с [75 – 78] теоретическая скорость роста должна лежать в диапазоне

$$c_R \leq c \leq c_S \quad (1.1)$$

где  $c_R$  – скорость волны Рэлея, а  $c_S$  – скорость поперечной волны в среде. Условия нарушения самоподобия и, в частности, условия остановки трещины исследовались в [82 – 85].

Надо отметить, что в работах [72 – 85] рассматривались трещины в безграничной среде. Значительно более сложные случаи трещин, лежащих внутри полупространства, исследовались в рамках статических задач [86 – 91], что вызвано аналитическими трудностями, возникающими при решении интегральных уравнений с динамическим тензором Грина для полупространства.

### 1.3. Другие модели и методы

*1.3.1. Модели множественных очагов.* Необходимость согласования регистрируемых на поверхности Земли перемещений, скоростей и ускорений сейсмических волн, с моделями очага землетрясения, привела к появлению моделей, основанных на концепции множественных источников. Среди многообразия этих моделей необходимо выделить несколько наиболее распространенных.

Стохастические модели EXSIM [92] и SMSIM [93 – 95], основанные на концепции сосредоточенных силовых особенностях, время вступления которых и распределение на разломе – стохастичны. К стохастическим моделям, условно может быть отнесена детерминистически-стохастическая модель DSM-модель [96], а также НИС (гибридная интегральная композитная) модель [97], в которых поля смещений определяются с помощью (динамических) функций Грина для упругой безграничной среды и стохастического распределения источников по разлому, а так же стохастической вариации их интенсивности. В [98] проведено сравнение этих моделей при описании реального землетрясения.

Одна из первых детерминистических моделей множественных очагов, называемая распределенной барьерной моделью (SBM-модель), предложена в [99, 100], см. также [101 - 103]. В соответствии с этой концепцией очаг землетрясения моделируется круговыми растущими трещинами сдвига, расположенными в плоскости разлома. Границы роста трещин определяются круговыми барьерами, отсюда происходит название модели. В соответствии с этой моделью скорость роста трещин удовлетворяет условию (1.1). В этой модели поверхностные волны, возникающие при землетрясениях, не учитываются, а основным источником колебаний на поверхности Земли считаются поперечные волны. Известны другие модели с пространственно распределенными источниками [104 – 106], где так же как и в SBM-модели, размер и интенсивность отдельных источников (subevents) и время их вступления, может варьироваться для согласования с данными экспериментальных наблюдений. Различие между этими моделями определяется структурой отдельных источников: точечные силовые особенности, распределенные дислокации, или сдвиговые трещины.

Надо отметить, что во всех рассмотренных здесь моделях [92 – 106]

при описании движения трещин или дислокаций использовались соответствующие аналитические решения, полученные для безграничной среды.

1.3.2. *Разностные методы.* Ввиду серьезных аналитических трудностей, связанных с решением динамических задач в полупространстве, для моделирования динамических процессов в задачах о трещинах, дислокациях и сосредоточенных силовых особенностях в полупространстве, применяют численные методы. В [107 – 113] на основе метода конечных элементов исследовались статические задачи о трещинах в упругой полуплоскости и полупространстве, причем в [110] учитывалась анизотропия среды.

Так же, как и при применении других методов, в разностных методах задачи нестационарной динамики для трещин, дислокаций и сосредоточенных особенностей в полуплоскости или полупространстве рассматриваются значительно реже. В первых исследованиях волновых процессов при моделировании сейсмических процессов [114 – 116] применялся метод конечных разностей, см. также [117]. В дальнейшем, однако, метод конечных разностей стал вытесняться методом конечных элементов [118 – 121]. Наконец, применяют и гибридные схемы, представляющие собой комбинацию конечноразностного и конечноэлементного методов [122].

Надо отметить, что в работах [114 – 121] при динамическом моделировании разностными методами применяются двухслойные разностные схемы второго порядка точности (схемы Лакса – Вендроффа) [123], обеспечивающие продолжительное неразмывание волнового фронта. Однако, как правило, вслед за фронтом волн в схемах Лакса – Вендроффа обнаруживаются осцилляции.

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. *Основные уравнения.* Рассматривается изотропная гомогенная упругая среда, уравнение движения которой при

инфинитезимальных деформациях записывается в форме уравнений Навье – Клапейрона [124]

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\text{div}\mathbf{u} - \mu\text{rot rot}\mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{u}$  - поле перемещений,  $\mathbf{b}$  - поле массовых сил,  $\lambda, \mu$  - константы Ламе,  $\rho$  - плотность среды.

С учетом выражений для скоростей объемных волн

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

Уравнение движения (2.1) приобретает вид

$$c_P^2\nabla\text{div}\mathbf{u} - c_S^2\text{rot rot}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

Предполагая, что поля смещений и массовых сил гармоничны по времени, и вводя представления Гельмгольца для поля перемещений

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \text{rot}\boldsymbol{\psi} \quad (2.4)$$

и аналогичное представление для поля массовых сил

$$\mathbf{b} = -\nabla\alpha - \text{rot}\boldsymbol{\beta} \quad (2.5)$$

где  $\alpha, \varphi$  - скалярные, а  $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}$  - векторные потенциалы, уравнение движения оказывается возможным записать в виде двух неоднородных уравнений Гельмгольца

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_P^2}\right)\varphi' = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\alpha', \quad (2.6)$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_S^2}\right)\boldsymbol{\psi}' = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\beta}'$$

где штрихи у потенциалов в (2.6) означают освобождение от гармонического множителя  $e^{i\omega t}$ , появляющегося вследствие сделанного предположения о гармоничности по времени полей смещений и массовых сил.

*Замечание 2.1.* В тех случаях, когда рассматриваемые поля негармоничны по времени, уравнения (2.6) остаются справедливыми, если применить к соответствующим полям преобразование Фурье по временной переменной.

2.2. *Начальные и граничные условия.* В качестве начальных условий рассматриваются однородные условия вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0 \quad (2.7)$$

На свободной поверхности  $\Pi_V$  полупространства (или свободном крае полуплоскости) задаются однородные условия второй краевой задачи

$$\mathbf{t}_V \equiv (\lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x}' \in \Pi_V \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{v}$  - вектор единичной внешней нормали к границе  $\Pi_V$ ;  $\mathbf{I}$  - единичная диагональная матрица,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор малых деформаций. С учетом (2.4) выражение для усилий (2.8) можно записать в терминах потенциалов

$$\mathbf{t}_V = \left[ \begin{array}{l} \lambda\Delta\varphi'\mathbf{I} + \\ 2\mu \left( \begin{array}{l} \nabla\nabla\varphi' + \\ \frac{1}{2} \left( \nabla\text{rot}\boldsymbol{\psi}' + (\nabla\text{rot}\boldsymbol{\psi}')^t \right) \end{array} \right) \end{array} \right] \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

$\mathbf{x}' \in \Pi$  Граничные условия (2.8)

необходимо дополнить условием Зоммерфельда для исключения экспоненциально растущих вглубь полупространства решений

$$\lim|\mathbf{u}| = 0, \quad \lim|\partial_{x''}\mathbf{u}| = 0, \quad x'' \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

где  $x'' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ .

2.3. *Основные сингулярные решения*

2.3.1. *Решение для сосредоточенной силовой особенности.* Пусть  $\mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega)$

- гармонический тензор Грина уравнения (2.3) для полупространства (или полуплоскости), удовлетворяющий однородным условиям на свободной поверхности и неоднородному уравнению внутри исследуемой области

$$c_P^2\nabla\text{div}\mathbf{G}' - c_S^2\text{rot rot}\mathbf{G}' + \omega^2\mathbf{G}' = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\rho}\mathbf{I} \quad (2.11)$$

где  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  -  $\delta$ -функция с особенностью в точке  $\mathbf{x}_0$ , лежащей в соответствующей области,  $\mathbf{I}$  - единичная диагональная матрица. При получении (2.11) предполагалось, что поле смещений гармонично по времени.

В случае произвольной по времени сосредоточенной силовой особенности  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_0, t)$ , приложенной во внутренней точке  $\mathbf{x}_0$ , решение с помощью функции Грина  $\mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega)$  может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_0, t - \tau) \right) d\omega d\tau \quad (2.12)$$

2.3.2. *Решение для двойной силы без момента.* Пусть в некоторой внутренней точке полупространства или полуплоскости приложена двойная сила вида

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{n}) - \delta(\mathbf{x}_0)}{h} p(t) \mathbf{n} \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор, определяющий направление сил, составляющих двойную силу. Из (2.12), (2.13) вытекает следующее представление для двойной силы без момента

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} p(t - \tau) \right) d\omega d\tau \quad (2.14)$$

2.3.3. *Решение для двойной силы с моментом.* Пусть в некоторой внутренней точке полупространства или полуплоскости приложена двойная сила с моментом вида

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{m}) - \delta(\mathbf{x}_0)}{h} p(t) \mathbf{n} \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  - единичные взаимно ортогональные векторы. В этом случае поле перемещений в среде представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} p(t - \tau)}{\exp(i\omega\tau)} \right) d\omega d\tau \quad (2.16)$$

2.3.4. *Решение для чистого сдвига (две пары двойных сил с моментом и с результирующим нулевым моментом).* Пусть в некоторой внутренней точке полупространства или полуплоскости приложены две двойных силы без момента вида

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{n}) - \delta(\mathbf{x}_0)}{h} p(t) \mathbf{n} \quad (2.17)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(\mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{m})}{h} p(t) \mathbf{m}$$

где  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  - единичные взаимно ортогональные векторы, определяющие собой чистый сдвиг в плоскости с нормалью  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ . С учетом (2.14) поле перемещений в среде для чистого сдвига приобретает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{p(t - \tau) \exp(i\omega\tau)} \right) d\omega d\tau \quad (2.18)$$

*Замечание 2.2.* Нетрудно видеть, что поле перемещений при чистом сдвиге, определенное по (2.18), совпадает с полем перемещений, определенным с помощью двух двойных сил с моментом (2.16), соответствующим векторам  $\mathbf{Q}_{45} \cdot \mathbf{n}$  и  $\mathbf{Q}_{45} \cdot \mathbf{m}$ , где  $\mathbf{Q}_{45}$  - тензор поворота в плоскости с нормалью  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ .

2.3.5. *Решение для центра расширения (дилатации).* В соответствии с [125, Ch.8] решение для центра расширения эквивалентно трем взаимно ортогональным двойным силам без момента, действующим вдоль векторов  $\mathbf{n}_k, k = 1, 2, 3$ . Выражение (2.14) позволяет получить следующее представление для поля перемещений от центра расширения

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^3 \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \right) p(t - \tau) \exp(i\omega\tau) d\omega d\tau \quad (2.19)$$

2.3.6. *Решение для тензора сейсмического момента* [126]. Пусть во внутренней точке  $\mathbf{X}_0$  упругого полупространства выбраны три ортонормальных вектора  $\mathbf{n}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  и проведены плоскости с соответствующими векторами единичных нормалей. В каждой из этих плоскостей могут действовать пары двойных сил с моментом, определяемых по (2.16). Тогда поле перемещений от компоненты тензора сейсмического момента  $m_{12}$  имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \nabla \mathbf{G}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \omega) \cdot \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 \right) p(t - \tau) \exp(i\omega\tau) d\omega d\tau \quad (2.20)$$

Поле перемещений от диагональных компонент тензора сейсмического момента [126] определяется соответствующими выражениями для двойных сил без момента (2.14), ориентированных вдоль векторов  $\mathbf{n}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Надо отметить, что помимо тензора сейсмического момента [126], существуют другие определения этого тензора, см. [76].

## 2. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

### 3.1. Параметры модели..

Моделирование очага землетрясений выполнялось методом конечных элементов в плоской постановке. Упругая среда представлялась в виде прямоугольной пластины малой толщины  $d = 0.1$ , ширины  $A = 200$  и высоты  $B = 110$ , закрепленной в нижней части. В пластине на глубине  $h = 10$  от верхней поверхности (см. рис. 3.1) вырезалось круговое сквозное отверстие радиуса  $R = 0.5$ . К границе полости в начальный

момент времени прикладывалась ударная нагрузка вида:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{r \in \partial R} = H(t) \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

где  $\partial R$  - окружность радиуса  $R$ ,  $H(t)$  - функция Хевисайда,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  - вектор приложения усилий в точках на границе отверстия.

Решение задачи строилось методом конечных элементов. Расчеты проведены для упругих параметров

$$\frac{E}{\rho} = 1, \quad \nu = 0.25$$

Исследовалась магнитуда перемещений на верхней свободной границе пластины в зависимости от времени для точек отстоящих вблизи от эпицентра на расстоянии не превышающем  $20h$ .

### 3.2. Нагрузка в виде двойной силы без момента (диполь)

Моделирование нагрузки осуществлялось мгновенным приложением давления к двум симметричным относительно центра отверстия дугам окружности, угол раствора которых выбирался равным  $45^\circ$ , так чтобы между их центрами можно было бы провести линию под углом  $\alpha$  к оси  $X$ . На рис.3.1 приведены графики зависимости магнитуды (корня из суммы квадратов перемещений по оси  $X$  и по оси  $Y$ ) от времени  $t$  для вертикальной нагрузки ( $\alpha = \pi/2$ , рис.3.2) горизонтальной нагрузки ( $\alpha = 0$ , рис.3.3) Графики зависимости магнитуд от времени построены в эпицентре и в точках, отстоящих от него на  $0.5h, 1.0h, 1.5h, 2.0h$ . В случае вертикальной нагрузки магнитуда достигает максимального по времени значения в эпицентре, которое обозначим  $M_{\max}$ , а с удалением от эпицентра быстро уменьшается. Так пиковое значение по времени в точке  $x = 2.0h$  в три раза меньше максимального значения. Для нагрузки, направленной под углом  $45^\circ$  величина максимального значения в эпицентре составляет примерно  $0,85M_{\max}$ , причем влево от

эпицентра магнитуа волны спадает быстрее, чем вправо. Вправо от эпицентра в точках  $x = 0.5h, 1.0h$  величины максимумов примерно равны значению в эпицентре и лишь при удалении от него начинают уменьшаться. Для горизонтальной нагрузки максимальная магнитуа составляет  $0,65 M_{\max}$ .

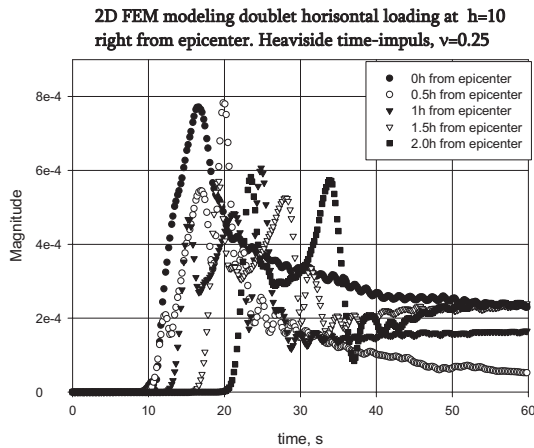


Рис.3.1. Магнитуа перемещений для двойной вертикальной силы без момента справа от эпицентра

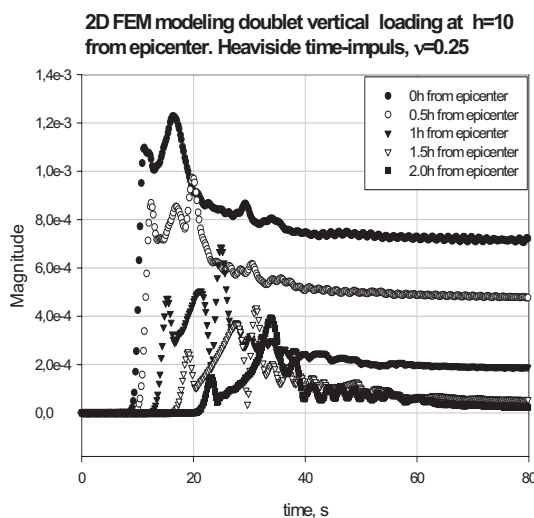


Рис.3.2. Магнитуа перемещений для двойной горизонтальной силы без момента справа от эпицентра.

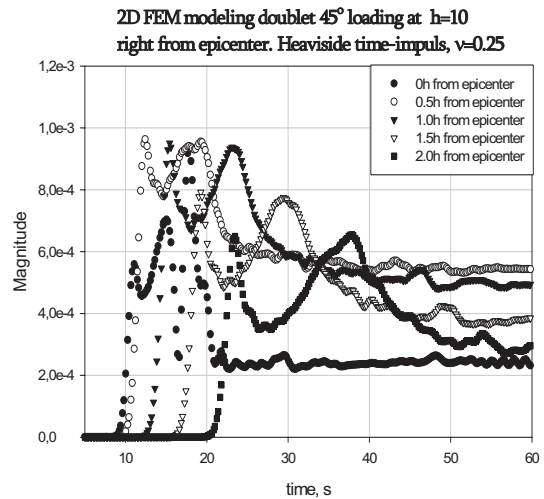


Рис.3.3. Магнитуа перемещений для двойной силы без момента под углом  $45^\circ$  справа от эпицентра

### Заклучение

В работе методом конечных элементов выполнен анализ магнитуд перемещений на поверхности тела вблизи эпицентра от источника возмущений. В качестве источников возмущений рассмотрены двойная сила без момента, двойная сила с моментом и чистый сдвиг, которые прикладывались в начальный момент времени на некоторой глубине под поверхностью полуплоскости. Полуплоскость моделировалась тонкой закрепленной в нижней части пластиной конечных размеров. Показано, что двойная сила без момента вызывает максимальную магнитуа перемещений в эпицентре, если она направлена вертикально. Двойная сила с моментом вызывает максимальную магнитуа перемещений на расстоянии примерно десяти глубин источника от эпицентра. Показано, что влияние чистого сдвига на магнитуа в эпицентре наиболее существенно для сдвига направленного под углом  $45^\circ$ . Существенное снижение магнитуды перемещений наблюдается на расстояниях превышающих 2-3 глубины источника возмущений. Проведено сопоставление установившихся решений динамических задач с их предельными статическими значениями.

*Литература*

1. Strutt J.W. (Lord Rayleigh), On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc., 1885, Vol.17, pp. 4 – 11.
2. Sezawa K. Dispersion of Elastic Waves propagating on the Surface of Stratified Bodies and on Curved Surfaces // Bulletin, Earthquake Research Institute, Tokyo University, 1927, Vol. 3, pp 1-18.
3. Stoneley R.: Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids, // Proc. Roy. Soc. (London), A, 1924, vol. 106, pp. 416-428.
4. Stroh A. N. Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. Vol. 41, pp. 77–103.
5. Barnett D. M., Lothe J., Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. J. Phys. Ser. F, 1974, 4, pp. 671 – 678.
6. Barnett D.M., Lothe J., An image force theorem for dislocations in anisotropic bicrystals. J. Phys. Ser. F, 1974, 4, pp. 1618 – 1635.
7. Lothe J. and Barnett D.M., On the existence of surface wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, J. Appl. Phys., 1976, 47, 428 – 433
8. Chadwick P. and Smith G.D., Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials. Adv. Appl. Mech., 1977, 17, pp. 303 – 376.
9. Ting T. C. T. A modified Lekhnitskii formalism a la Stroh for anisotropic elasticity and classifications of the 6X6 matrix N, Proc. Roy. Soc. London. 1999. A455, 69-89.
10. Kuznetsov S.V. Surface waves of non-Rayleigh type, Quart. Appl. Math. 2003. V.61. No.3. P.575 – 582.
11. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc., 1917, A, vol. 93, pp. 114 – 128.
12. Lu P. Stroh-type formalism for unsymmetric laminated plate // Mech. Res. Commun. 1994, vol. 21, pp. 249–254.
13. Kuznetsov S.V. Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002, vol. 60, pp. 577 – 587.
14. Rogers W.P. Elastic property measurement using Rayleigh-Lamb waves // Research in Nondestructive Evaluation. 1995. Vol. 6, No.4, pp. 185-208. DOI: 10.1007/BF01606381
15. Love A.E.H. Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press, Cambridge 1926, pp. 165-178.
16. Kuznetsov S.V. Love waves in stratified monoclinic media // Quart. Appl. Math., 2004, vol.62, No.4, pp. 749 –766.
17. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser.A, 1904, vol. 203, pp. 1-42.
18. Lamb H. On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids, Philosophical Magazine // 1916, vol.13, pp. 386-399, 539-548.
19. Nakano H. Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // Geophysical Magazine, 1930, vol. 2, pp. 189-348.
20. Nakano H. On Rayleigh waves // Japan Journal of Astronomy and Geophysics, 1925, vol. 2, pp. 233-326.
21. Lapwood E. R. The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1949. Vol. 242, pp. 63–100.
22. Cagniard L. Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939. 255 p.
23. de Hoop A.T. A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sect. Ser. B. 1960. V.8. N.4. P.349–356.
24. Петрашень Г.И. О задаче Лэмба в случае упругого полупространства //

- Докл. АН СССР. 1949. Т.64. С.649-652.
25. Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И. О задаче Лэмба в случае полупространства // Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1950, № 135, Вып. 21. С. 71–118.
  26. Nakano H. Notes on the nature of the forces which give rise to the earthquake motion // *Seismol. Bull. Cent. Met. Obs. Tokyo*. 1923, vol. 1, pp. 92-120.
  27. Matsuzawa T. On the Relative Magnitude of the Preliminary and the Principal Portion of Earthquake Motion // *Jap. Journ. Astro. & Geolhys.* 1926, vol. 4, pp. 1- 33.
  28. Кейлис-Борок В.И. Исследование источников, приближенно эквивалентных очагам землетрясений // *Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР*, 1950, №9(136), с. 20-42.
  29. Byerly Y P. Nature of Faulting as deduced from Seismograms // *In: Crust of the Earth*, 1955, pp. 75-85.
  30. Hodgson J.H. Direction of faulting in Pacific Earthquakes // *Geofisica Pura e Applicata*, 1955, vol. 32, pp. 31-42.
  31. Ritsema A.R. The fault plane technique and the mechanism in the focus of the Hindu Kush Earthquakes // *Indian Journ. Met. & Geophys.* 1955, vol. 6, pp. 41-50.
  32. Honda A.H. and Ito H.: On the reflected waves from deep focus Earthquakes // *Science Rep. Teihoku Univ. Ser. 5. Geophysics.* 1951, vol. 3, pp. 144-155.
  33. Honda A.H. and Masatsuka A. On the mechanisms of the Earthquakes and the stresses producing them in Japan and its vicinity // *Science Rep. Teihoku Univ. Ser. 5. Geophysics.* 1952, vol. 4, pp. 42-60.
  34. Honda A.H. and Masatsuka A., and Emura K. On the mechanisms of the Earthquakes and the stresses producing them in Japan and its vicinity (second paper) // *Science Rep. Teihoku Univ. Ser. 5. Geophysics.* 1956, vol. 8, pp. 186-205.
  35. Steketee J.A. Some geophysical applications of the elasticity theory of dislocations // *Canad. J. Phys.* 1958. Vol. 36, N 9, pp. 1168–1197.
  36. Балакина Л.М., Введенская А.В., Мишарина Л.А., Широкова Е.И. Напряженное состояние в очагах землетрясений и поле упругих напряжений Земли // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1967. № 6. С. 3–15.
  37. Введенская А.В. Исследование напряжений и разрывов в очагах землетрясений при помощи теории дислокаций. М.: Наука, 1969. 134 с.
  38. Введенская А.В. Сейсмодинамика. М.: Наука, 1984. 142 с.
  39. Hirono T. Mathematical theory on shallow Earthquakes // *Geophys. Mag.* 1948, vol. 18, pp. 1-11.
  40. Hirono T. Mathematical theory on shallow Earthquakes // *Geophys. Mag.* 1949, vol. 21, pp. 31-42.
  41. Honda A.H. and Watanabe H. A remark on the amplitude of the initial motion of very shallow Earthquake // *Science Rep. Teihoku Univ. Ser. 5. Geophysics.* 1952, vol. 4, pp. 94-97.
  42. Knopoff L. and Randall M.J. The compensated linear vector dipole: A possible mechanism for deep earthquakes // *Journal of Geophysical Research*, 1970, vol. 75, pp. 4957–4963.
  43. Reid H.F. The California Earthquake of April 18, 1906. Volume II. The Mechanics of the Earthquake // Washington DC: Carnegie Institution of Washington, Publication No. 87, 1910, 192 pp.
  44. Balakina, L. M., Shirokova H. I., and Vvedenskaya A. V. Study of stresses and ruptures in earthquake foci with the help of dislocation theory // *In: Publ. Dominion Obs. Ottawa*, pp. 321-327, 1960.
  45. Maruyama T. On the force equivalents of dynamical elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism // *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, 1963, vol. 41, pp. 467–486.

46. Burridge R and Knopoff L. Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1964, vol. 54: 1875–1878.
47. Ben Menahem A. Radiation of seismic surface waves from finite moving sources // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1961, vol. 51, pp. 401–435.
48. Ben Menahem A. Radiation of seismic body waves from finite moving sources // *Journal of Geophysical Research*, 1962, vol. 67, pp. 345–350.
49. Ben-Menahem A., Singh S.J. *Seismic Waves and Sources*. New York: Springer-Verlag, 1981.
50. Bernard P. and Baumont D. Shear Mach wave characterization for kinematic fault rupture models with constant supershear rupture velocity // *Geophysical Journal International*, 2005, vol. 162, pp. 431–447.
51. Haskell N.A. Total energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1964, vol. 54, pp. 1811–1841.
52. Haskell N.A. Total energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, Part II. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1966, vol. 56, pp. 1811–1841.
53. Madariaga R. Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1976, vol. 66, pp. 639–667.
54. Madariaga R. The dynamic field of Haskell's rectangular dislocation fault model. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1978, vol. 68, pp. 869–887.
55. Madariaga R., Olsen K.B., and Archuleta R.J. Modeling dynamic rupture in a 3D earthquake fault model // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1998, vol. 88, pp. 1182–1197.
56. Savage J.C. The effect of rupture velocity upon seismic first motions // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1965, vol. 55, pp. 263–275.
57. Spudich P. and Hartzell L.N. Use of ray theory to calculate high-frequency radiation from earthquake sources having spatially variable rupture velocity and stress drop // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1984, vol. 74 pp. 2061–2082.
58. Gutenberg B. and Richter C.F. Magnitude and energy of earthquakes // *Ann. Geofis.*, 1956, vol. 9, pp. 1-15.
59. Keylis-Borok V. On estimation of the displacement in an earthquake source and of source dimensions // *Annals of Geophysics*, 2010, Vol. 53, N. 1, pp. 17-20. (*Annali di Geofisica*, 1959, vol. 12, n. 2.)
60. Knopoff L. Energy release in great earthquakes // *Geophysical Journal*, 1958, vol. 1, pp. 44-52.
61. Kanamori H. The energy release in great earthquakes // *J. Geophys. Research*, 1977, vol. 82, No. 20, pp. 2981-2987.
62. Hanks T. and Kanamori, H. A moment magnitude scale // *J. Geophys. Research*, 1979, vol. 84, No. B5, pp. 2348-2350.
63. Singh S. J. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources // *J. Geophys. Res.*, 1970, vol. 75, pp. 3257-3263.
64. Jovanovich D.B., Hussein M.I., and Chinnery M.A. Elastic dislocations in a layered halfspace. I. Basic theory and numerical methods // *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1974, vol. 39, pp. 205-217.
65. Comminou M. and Dundurs J. The angular dislocation in a half space // *J. Elasticity*, 1975, vol. 5, pp. 203-216.
66. Iwasaki T. and Sato R. Strain field in a semi-infinite medium due to an inclined rectangular fault // *J. Phys. Earth*, 1979, vol. 27, pp. 285-314.
67. Ben-Menahem A., Singh S.J., and Solomon F. Static deformation of a spherical earth model by internal dislocations // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1969, vol. 59, pp. 813-853.
68. Ben-Menahem A., Singh S.J., and Solomon F. Deformation of an homogeneous earth model by finite

- dislocations // *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1970, vol. 8, pp. 591-632.
69. Smylie D.E. and Mansinha L. The elasticity theory of dislocations in real earth models and changes in the rotation of the earth // *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1971, vol. 23, pp. 329-354.
  70. Sato R. Crustal deformation due to dislocation in a multi-layered medium // *J. Phys. Earth*, 1971, vol. 19, pp. 31-46.
  71. Sato R. and Matsu'ura M. Strains and tilts on the surface of a semi-infinite medium // *J. Phys. Earth*, 1974, vol. 22, pp. 213-221.
  72. Broberg K.B. The propagation of a brittle crack // *Arkiv Fysik*, 1960, vol. 18(2), pp. 159-92.
  73. Broberg K.B. *Cracks and fracture*. San Diego: Academic Press, 1999.
  74. Freund L.B. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge, New York: Cambridge University Press; 1990.
  75. Kostrov B. Self-similar problems of propagation of shear cracks // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1964, vol. 28, pp. 1077-1087.
  76. Kostrov B. and Das S. *Principles of Earthquake Source Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press. 1988.
  77. Burridge R. and Willis J.R. The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1969, vol. 66, pp. 433-468.
  78. Willis J.R. Self-similar problems in elastodynamics // *Philos Trans Royal Soc. London. Ser A. Math. Phys. Engng. Sci.*, 1973, vol. 274(1240), pp. 435-91.
  79. Rosakis A.J., Samudrala O., and Coker D. Cracks faster than the shear wave speed // *Science*, 1999, vol. 284(5418), pp. 1337-1340.
  80. Rosakis A.J. Intersonic shear cracks and fault ruptures // *Adv. Phys.* 2002, vol. 51(4), pp. 1189-257.
  81. Xia K.W., Rosakis A.J., Kanamori H. *Laboratory earthquakes: The sub-Rayleigh-to-supershear rupture transition* // *Science*, 2004, vol. 303(5665), pp. 1859-1861.
  82. Костров Б.В. *Механика очага тектонического землетрясения*. М.: Наука, 1966.
  83. Костров Б.В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. // *ПММ*. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042-1049.
  84. Kostrov B.V. Unsteady propagation of longitudinal shear cracks // *J. Appl. Math. Mech.* 1966, vol. 30, pp. 1241-1248.
  85. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. // *МТТ*. 1979. № 4. С. 54-73.
  86. Berry D.S. and Sales T.W. An elastic treatment of ground movement due to mining. III. Three dimensional problem, transversely isotropic ground // *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, vol. 10, pp. 73-83.
  87. Savage J.C. and Hastie L.M. Surface deformation associated with dip-slip faulting // *J. Geophys. Res.*, 1966, vol. 71, pp. 4897-4904.
  88. Rybicki K. Static deformation of a laterally inhomogeneous half-space by a two-dimensional strike-slip fault // *J. Phys. Earth*, 1978, vol. 26, pp. 351-366.
  89. Matsu'ura M. and Tanimoto T. Quasi-static deformations due to an inclined, rectangular fault in a viscoelastic half-space // *J. Phys. Earth*, 1980, vol. 28, pp. 103-118.
  90. Davis P.M. Surface deformation associated with a dipping hydrofracture // *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, pp. 5826-5834.
  91. Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1985, vol. 75, No. 4, pp. 1135-1154.
  92. Motazedian D., and Atkinson G.M. Stochastic finite-fault modelling based on a dynamic corner frequency // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2005, vol. 95, pp. 995-1010.

93. Boore D.M. Stochastic simulation of high-frequency ground motion based on seismological models of the radiated spectra // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1983, vol. 73, pp. 1865–1894.
94. Boore D.M. Simulation of ground motion using the stochastic method // *Pure Appl. Geophys.*, 2003, vol. 160, pp. 635–676.
95. Boore D.M. Comparing stochastic point-source and finite-source ground-motion simulations: SMSIM and EXSIM // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 2009, vol. 99, pp. 3202–3216.
96. Pacor F., Cultrera G., Mendez A., and Cocco M. Finite fault modeling of strong ground motions using a hybrid deterministic–stochastic approach // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 2005, vol. 95, pp. 225–240.
97. Gallovič F. and Burjánek J. High-frequency directivity in strong ground motion modeling methods // *Ann. Geophys.*, 2007, vol. 50, pp. 203–211.
98. Ameri G., Emolo A., Pacor F., and Gallovič F. Ground-Motion Simulations for the 1980 M 6.9 Irpinia Earthquake (Southern Italy) and Scenario Events // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2011, vol. 101, No. 3, pp. 1136–1151.
99. Papageorgiou A.S., Aki K. A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. I. Description of the model // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1983, vol. 73(3), pp.693-722.
100. Papageorgiou A.S., Aki K. A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. Part II. Applications of the model // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1983, vol. 73(4), pp.953-978.
101. Halldorsson B., Papageorgiou A.S. Calibration of the Specific Barrier Model to Earthquakes of different tectonic regions // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2005, vol. 95(4), pp.1276-1300.
102. Halldorsson B., Mavroeidis G.P., and Papageorgiou A.S. Near-Fault and Far-Field Strong Ground Motion Simulation for Earthquake Engineering Applications Using the Specific Barrier Model // *Journal of Structural Engineering*, 2011, vol. 137(3), pp.433-444.
103. Soghrat M.R., Khaji N., and Zafarani H.. Simulation of strong ground motion in northern Iran using the specific barrier model // *Geophysical Journal International*, 2012, vol. 188(2), pp.645-679.
104. Beresnev I.A., Atkinson G.M. Subevent structure of large earthquakes: a ground-motion perspective // *Geophysical Research Letters*, 2001, vol. 28(1), pp.53–56.
105. Atkinson G.M., Beresnev I.A. Ground motions at Memphis and St. Louis from M 7.5-8.0 earthquakes in the New Madrid seismic zone // *Bulletin of the Seismological Society of America* 2002, vol. 92, pp. 1015-1024.
106. Anil Bayrak N.A., Beresnev I.A. Fault slip velocities inferred from the spectra of ground motions // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2009, vol. 99, pp. 876-883.
107. Latham S., Abe S., and Mora P. Parallel 3D simulation of a fault gouge using the lattice solid model // *Pure Appl. Geophys*, 2006, vol 163 (9), pp. 1949-1964.
108. Abe S., Latham S., and Mora P. Dynamic rupture in a 3-D particle-based simulation of a rough planar fault // *Pure Appl. Geophys*, 2006, vol 163 (9), pp. 1881-1892.
109. Mora P., Yin C., Donnellan A., and Matsu'ura M. Computational Earthquake Physics Part I: An Introduction // *Pure Appl. Geophys*, 2006, vol 163 (9), pp. 1737-1740.
110. Alonso-Marroquin F., Luding S., Herrmann H.J., and Vardoulakis I. Role of the anisotropy in the elastoplastic response of a polygonal

- packing // *Phys. Rev.*, 2007, E 71, Paper 051304.
111. Asadpoure A., Mohammadi S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, vol. 9, pp. 2150–2172.
  112. B'echet E., Scherzer M., Kuna M. Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, vol. 77, pp. 1535–1565.
  113. Mousavi S.E, Grinspun E., and Sukumar N. Higher-Order Extended Finite Elements with Harmonic Enrichment Functions for Complex Crack Problems // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, vol. 86, N. 4–5, pp. 560–574.
  114. Alterman Z. and Karal F. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1968, vol. 58(1), pp. 367-398.
  115. Alterman Z., Lowenthal D. Seismic waves in a quarter and three-quarter plane // *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 1970, vol. 20, pp. 101-126.
  116. Alford R., Kelly K., and Boore D. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation // *Geophysics*, 1974, 39(6), pp. 834-842.
  117. Moczo P., Robertsson J.O.A., Eisner L. The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation // *Advances in Geophysics*, 2007, vol.48, pp. 421-516.
  118. Cohen G. Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations, Scientific Computation, Springer-Verlag, 2002.
  119. Cohen G. and Fauqueux S. Mixed spectral finite elements for the linear elasticity system in unbounded domains // *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 26(3), pp. 864-884.
  120. Komatitsch D., Michéa D., and Erlebacher G. Porting a high-order finite-element earthquake modeling application to NVIDIA graphics cards using CUDA // *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2009, vol. 69(5), pp. 451-460, doi: 10.1016/j.jpdc.2009.01.006.
  121. Komatitsch D., Erlebacher G., Göddeke D., Michéa D. High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster // *Journal of Computational Physics*, 2010, vol. 229, pp. 7692-7714.
  122. De Martini F., Modaressi H., and Aochi H. Coupling of FDM and FEM in seismic wave propagation // 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Greece, June 25-28, 2007, Paper No. 1743.
  123. Lax P.D. and Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1964, vol. 17(3), pp. 381-398.
  124. Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity, In: *Handbuch der Physik Bd.VIa/II*, Springer, 1972.
  125. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Cambridge Univ/ Press, 1927 (4th edition).
  126. Aki K, Richards P. Quantitative Seismology. 2nd Edition. 2002.

Капцов Александр Викторович, Институт проблем механики РАН, Москва, просп.Вернадского, 101  
e-mail: kaptsov@ipmnet.ru

Кузнецов Сергей Владимирович, Институт проблем механики РАН, Москва, просп.Вернадского, 101  
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Kaptsov Alexander, Institute for Problems in Mechanics, RAS, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow  
Kuznetsov Sergey, Institute for Problems in Mechanics, RAS, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow

# СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И СЕЙСМИЧЕСКИЕ БАРЬЕРЫ

*С.В. Кузнецов*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН

**АННОТАЦИЯ:** Основная концепция сейсмического барьера – защита территории, занятой сооружением или группой сооружений от сейсмических волн. В зависимости от природы сейсмических волн, наиболее вероятных в окрестности защищаемой территории, разрабатываются различные виды барьеров.

Например, вертикальные барьеры, представляющие собой стенку в грунте, могут защищать от объемных и рэлеевских волн. Численный анализ показывает, что наибольший эффект достигается в случаях, когда высота барьера соизмерима с длиной волны.

Еще один тип барьеров представляет собой относительно тонкий поверхностный слой с модифицированными свойствами, препятствующий распространению определенных типов поверхностных волн внутрь защищаемой территории. Для защиты от рэлеевских волн этот барьер должен удовлетворять условию теоремы Чадвика, а для защиты от волн Лява – условию несуществования.

**Ключевые слова:** Сейсмическая волна, сейсмический барьер, волна Рэлея, волна Лява

# SEISMIC WAVES AND SEISMIC BARRIERS

*Sergey V. Kuznetsov*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

**ABSTRACT:** The basic idea of seismic barrier is to protect an area occupied by a building or a group of buildings from seismic waves. Depending on nature of seismic waves that are most probable in a specific region, different kinds of seismic barriers are suggested.

For example, vertical barriers resembling a wall in a soil can protect from Rayleigh and bulk waves. The FEM simulation reveals that to be effective, such a barrier should be (i) composed of layers with contrast physical properties allowing “trapping” of the wave energy inside some of the layers, and (ii) depth of the barrier should be comparable or greater than the considered seismic wave length.

Another type of seismic barrier represents a relatively thin surface layer that prevents some types of surface seismic waves from propagating. The ideas for these barriers are based on one Chadwick’s result concerning non-propagation condition for Rayleigh waves in a clamped half-space, and Love’s theorem that describes condition of non-existence for Love waves. The numerical simulations reveal that the length of the horizontal barriers should be not less than the typical wavelength.

**Keywords:** Seismic wave, seismic barrier, Rayleigh wave, Love wave

## 1 INTRODUCTION

1.1. *Methods of seismic protection.* Generally, current approaches for preventing failure of structures due to seismic activity can be divided into two groups: (i) approaches for creating seismically stable structures and

joints; this group contains different methods ensuring either active or passive protection; and (ii) approaches for creating a kind of seismic barrier preventing seismic waves from transmitting wave energy into a protected region.

While the first group includes a lot of different engineering approaches and solutions, the

Takahashi et al. (2001) and more recent works by Motamed et al. (2008), Kusakabe et al. (2008). The proposed research belongs to the second group.

1.2. *Possible types of wave barriers.* The considered seismic barriers can be of two types: vertical, aimed to reflect, trap, and dissipate most of the seismic wave energy; and horizontal, based on Chadwick and Smith (1977) and Love (1911) theorems, and aimed to prevent certain types of seismic waves from propagation; Fig. 1.



Figure 1. Vertical and horizontal seismic barriers

1.3. *Rough surfaces.* Yet another interesting approach is to create a “rough” surface of the half-space to force the propagating Rayleigh wave scatter by caves and swellings; see Fig.2, where part of a free surface with the sinusoidal roughness is pictured. In this respect, the rough surface apparently transforms the elastic half-space into viscoelastic one. To be effective, periodic imperfections should have magnitude and period comparable to the magnitude and wavelength of propagating Rayleigh wave (Sobczyk 1966, Maradudin & Mills 1976, Maradudin

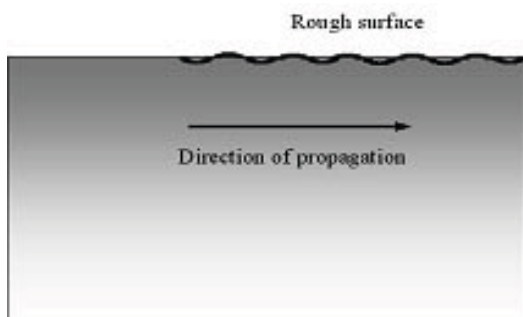


Figure 3. Rough surface acting as seismic barrier against Rayleigh waves

In practice, such a rough surface can be achieved by a series of rather deep trenches oriented transversally to the most probable direction of the wave front. Some of obvious deficiencies of this method are: (i) its inability to persist the surface waves other than Rayleigh waves; (ii) protection from Rayleigh waves travelling only in directions that are almost orthogonal to orientation of the trenches; and, (iii) high sensitivity to the frequency of travelling Rayleigh waves. These shortcomings made an idea of exploiting a rough surface as a kind of protective barrier, unrealizable.

1.4. *Vertical barriers.* For bulk waves the most effective vertical barrier would be an empty trench, or a trench filled in with a lighter material than the ambient soil. For such a barrier most of the wave energy would be reflected, as is shown on Fig.3.

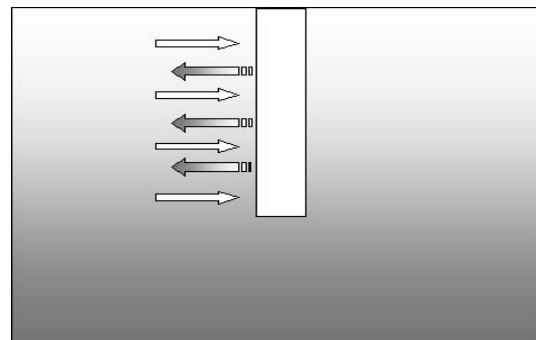


Figure 2. Full reflection of an incident bulk wave from an empty trench

However, propagating Rayleigh or Love wave will simply overflow an empty trench, as Fig.4 shows.

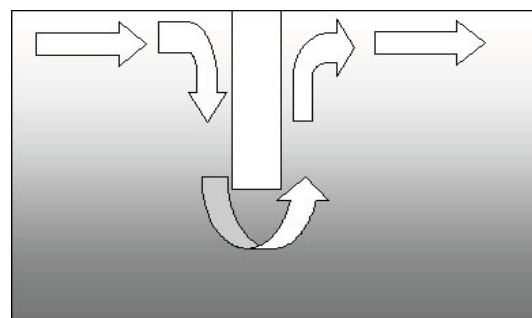


Figure 4. Flow of Rayleigh wave around an empty trench

dangerous types of seismic Rayleigh and Love waves, the vertical barrier should be of a more elaborate type. Possible structures of vertical barriers will be discussed later on.

1.5. *Horizontal barriers.* Horizontal barriers can be constructed by modifying properties of the outer layer preventing the corresponding surface wave from propagation.

In practice, modifying physical properties of the outer layer can be achieved by reinforcing ground with piles or “soil nails”; see papers where reinforcing was studied for increasing bearing load of the soil (Blondeau 1989, De Buhan et al. 1989, Abu-Hejleh et al. 2002, Eiksund 2004, Herle 2006).

If distance between piles is sufficiently smaller than the wave length, then a reinforced region can be considered as macroscopically homogeneous and either transversely isotropic or orthotropic depending on arrangement of piles. Of course, homogenized physical properties of the reinforced medium depend upon material of piles, distance between them, and their arrangements.

For stochastically homogeneous arrangement of piles and the initially isotropic upper soil layer, the reinforced soil layer becomes transversely isotropic with the homogenized (effective) characteristics that can be evaluated by different methods:

## 2 THE MAIN TYPES OF SURFACE ACOUSTIC WAVES

In this section we proceed to analyzes of the main types of seismic surface waves and conditions for their non-existence

2.1. *Rayleigh waves.* These waves discovered by Lord Rayleigh (Strutt 1885) propagate on a plane surface of a halfspace; see, Fig. 5 and exponentially attenuate with depth. These waves transmit the most seismic energy and lead to most severe damage in earthquakes.

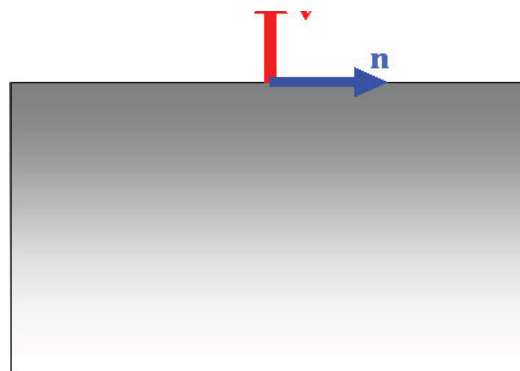


Figure 5. Rayleigh wave in a half-space

One interesting problem associated with Rayleigh waves is a problem of “forbidden” directions of “forbidden” (necessary anisotropic) materials that does not transmit a Rayleigh wave along some directions. Forbidden materials and forbidden directions have been intensively searched both experimentally and numerically (Lim & Farnell 1968, 1969, Farnell 1970) until mid seventies when the theorem of existence for Rayleigh waves was rigorously proved (Barnett & Lothe 1973, 1974a,b, Lothe & Barnett 1976 Chadwick & Smith 1977, Chadwick & Jarvis 1979, Chadwick & Ting 1987). This theorem states that no materials possessing forbidden directions for Rayleigh waves can exist.

Despite proof of the theorem of existence, a small chance for existence of forbidden materials remained. This corresponded to the case of non-semisimple degeneracy of a special matrix associated with the first-order equation of motion; actually, this matrix is the Jacobian for the Hamiltonian formalism used for Rayleigh wave description. However, it was shown (Kuznetsov 2003) that even at the non-semisimple degeneracy a wave resembling the genuine Rayleigh wave can propagate. Thus, for waves propagating on a homogeneous half-space, no forbidden materials or directions can exist.

2.2. *Stoneley waves.* These are waves were introduced by Stoneley (1924), and analyzed by (Sezawa & Kanai 1939,

waves propagate on an interface between two contacting half-spaces, Fig 6.

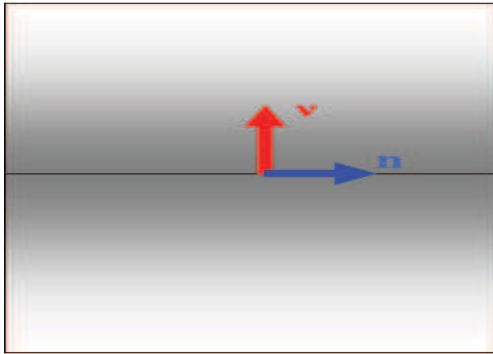


Figure 6. Stoneley wave on the interface between two contacting half-spaces

In contrast to Rayleigh waves, Stoneley waves can propagate only if material constants of the contacting half-spaces satisfy special (very restrictive) conditions of existence. These conditions were studied by Chadwick & Borejko (1994), Sengupta & Nath (2001).

It should be noted that for the arbitrary anisotropy no *closed analytical* relations between material constants of the contacting half-spaces ensuring existence or non-existence of Stoneley waves have been found (2010).

2.3. *Love and SH waves.* Love waves (Love, 1911) are horizontally polarized shear waves that propagate on the interface between an elastic layer contacting with elastic half-space; Fig. 7. At the outer surface of the layer traction-free boundary conditions are generally considered.

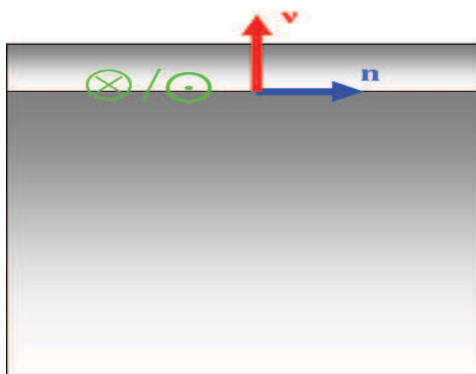


Figure 7. Love wave propagating on the interface

space the conditions of existence derived by Love are:

$$c_{layer}^S < c_{halfspace}^S, \quad (1)$$

where  $c_*^S$  are the corresponding speeds of the transverse bulk waves. At violating condition (4) no Love wave can propagate. For the case of both anisotropic (monoclinic) layer and a half-space the condition of existence is also known (Kuznetsov 2006a).

SH waves resemble Love waves in polarization, but differ in absence of the contacting half-space. At the outer surfaces of the layered plate different boundary conditions can be formulated (Kuznetsov 2006b). In contrast to genuine Love waves, the SH waves exist at any combination of elastic properties of the contacting layers.

Besides Love and SH waves a combination of them can also be considered. This corresponds to a horizontally polarized wave propagating in a layered system consisting of multiple layers contacting with a half-space. Analysis of conditions of propagation for such a system can be done by applying either transfer matrix method (Thomson 1950, Haskell 1953), known also as the Thomson-Haskell method due to its originators; or the global matrix method mainly developed by Knopoff (1964).

At present (2010) no closed analytical conditions of existence for the combined Love and SH waves propagating in anisotropic multilayered systems are known; however, these conditions can be obtained numerically by applying transfer or global matrix methods; see (Kuznetsov 2006a, b; Djeran-Maigre & Kuznetsov 2008).

Different observations show that genuine Love and the combined Love-SH waves along with Rayleigh and Rayleigh-Lamb waves play the most important role in transforming seismic energy in

& Zadro 2007). But, as we have seen, there is a relatively simple (at least from a theoretical point of view) method for stopping Love and the combined Love and SH waves by modifying the outer layer in such a way that conditions of existence (4) are violated.

2.4. *Lamb and Rayleigh-Lamb waves.* Lamb waves (Lamb, 1917) are dispersive waves propagating in a homogeneous plate and (if a plate is isotropic) polarized in the saggital plane, similarly to polarization of the genuine Rayleigh waves. It is known (Lin & Keer 1992, Ting 1996) that Lamb waves can propagate at any anisotropy of the layer and at traction-free, clamped, or mixed boundary conditions imposed on the outer surfaces of the plate. The same result can be extrapolated to a layered plate containing multiple anisotropic homogeneous layers in a contact (Ting 2002). Thus, for Lamb waves no forbidden materials exist.

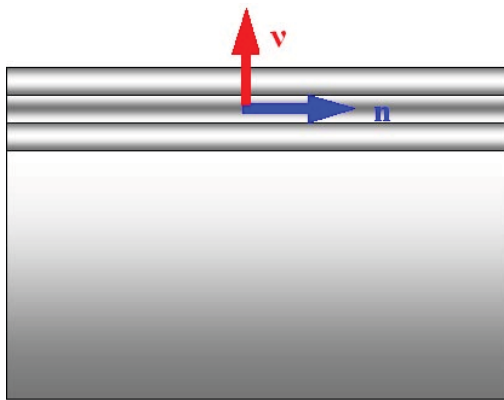


Figure 8. Rayleigh-Lamb waves

More interesting from seismological point of view are Rayleigh-Lamb waves; see Fig.8. These are dispersive waves propagating in a layered plate contacting with a (homogeneous) halfspace. Rayleigh-Lamb waves in isotropic media are polarized in the saggital plane defined by vectors  $\mathbf{v}$  (normal to a median plane) and  $\mathbf{n}$  (direction of propagation), as Lamb and Rayleigh waves. Needless to say that Rayleigh-Lamb waves are much more difficult for theoretical studies than

### 3 SEISMIC BARRIERS

Herein, we present some results on numerical simulation of propagating seismic waves and their interaction with seismic barriers. The presented results were obtained by the explicit FE code implemented on a cluster and a metacluster computers.

3.1. *Vertical barriers.* Theoretical analysis and numerical simulations reveal that to effectively protect from Rayleigh and Rayleigh-Lamb waves a vertical barrier (Fig.1) should satisfy several conditions: (i) the barrier should have a composite layered structure composed of vertical layers with contrast physical properties; (ii) depth of the barrier should be comparable to the wavelength of the most probable seismic wave; (iii) the protected zone should be completely surrounded by a barrier to avoid flowing of the seismic wave inside the protected zone.

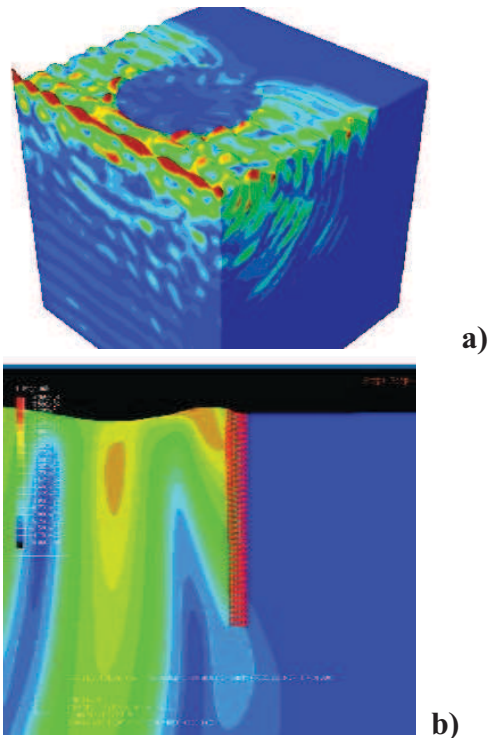


Figure 9. Round-shaped vertical barrier protecting from Rayleigh waves: a) 3D model; b) cross-section.

lated to numerical simulation of a propagating seismic Rayleigh wave interacting with a round-shaped vertical barrier; the latter completely surrounds the protected region. The ratio of the wavelength to depth of the barrier was taken  $\sim 0.8$ . This corresponded to the reference frequency 10Hz and the Rayleigh wavelength 20m (speed of Rayleigh wave was 200 m/sec; speed of the transverse bulk wave was  $\sim 220$  m/sec); diameter of the protected region was 120m. Inside the protected region reduction of the magnitude of displacements was more than ten times comparing to the outside territory.

3.2. *Transverse (horizontal) barriers.* Our analyses revealed that similarly to vertical barriers, the transverse barriers should satisfy several conditions to effectively protect from seismic waves: (i) length (horizontal) of the barrier should be comparable to the wavelength; (ii) material of the barrier should have larger density than the ambient soil for Rayleigh waves; that is in agreement with Chadwick's theorem stating that at the clamped surface of a halfspace, no Rayleigh wave can propagate; (iii) material of the barrier should satisfy the opposite Love's propagating condition (4) for protecting from propagating seismic Love waves.

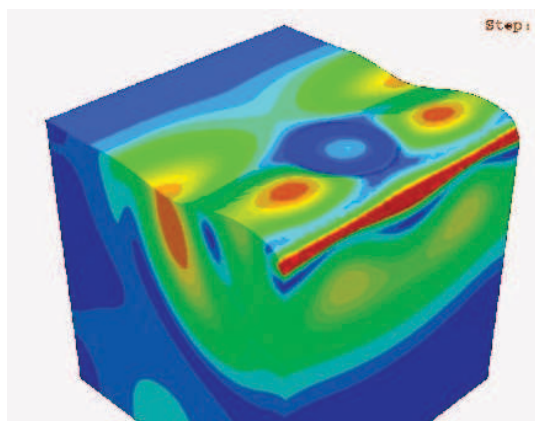


Figure 10. 3D model of transverse round-shaped barrier protecting from a long Rayleigh wave

Figure 10 demonstrates a movie frame related to numerical simulation of a propagating seismic Rayleigh wave having a

round-shaped transverse (horizontal) barrier; the latter completely surrounds the protected region. The ratio of the wavelength to length of the barrier was taken one and a half. Inside the protected region reduction of the magnitude of displacements was about three times comparing to magnitude of displacements at the outside territory.

#### 4 CONCLUDING REMARKS

4.1. *Setting up an optimization problem.* To make search of the optimal geometric and physical properties of the protecting barriers more systematic, solution of the following optimizing problem can be suggested. Mathematically the optimization problem for minimizing magnitudes of deflections can be written as finding minimum of the following target function:

$$\min_{C_1, \rho_1} \left( F(\omega) \equiv \left( \max_{\omega \in \Omega} \max_{-h_1/2 \leq x \leq h_1/2} [s(\omega) m(x, \omega)] \right) \right) \quad (2)$$

where  $C_1, \rho_1$ , and  $h_1, l_1$  are the elasticity tensor, density, depth, and length of the barrier (in the case of isotropic material, Lamé constants can be used instead of the elasticity tensor),  $\omega$  is the angular frequency,  $\Omega$  is a set the interesting frequencies of seismic waves,  $s(\omega)$  is the spectral density,  $x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$  is a coordinate along depth of the layer, and  $m$  is the magnitude of deflections in the protected zone. This problem resembles one that is usually solved at finding optimal parameters of shock absorbers (Den Hartog 1985, Balandin et al. 2000, 2008).

4.2. *A barrier that utilizes the concept of scattering seismic wave energy.* That is another type of seismic barriers. From technological point of view, such a barrier can be even simpler and possibly cheaper to create than vertical or horizontal barriers. To demonstrate this concept, consider a ring shaped pile field as shown

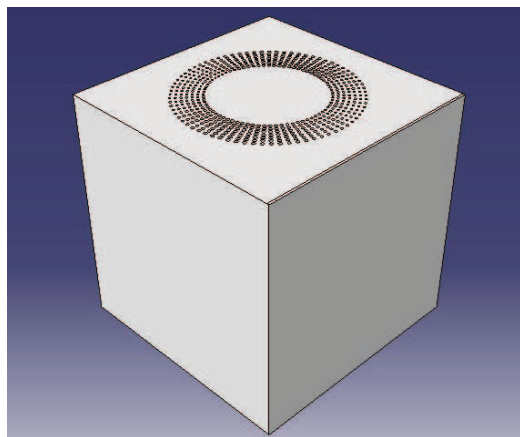


Figure 11. A ring-shaped pile field used to scatter seismic wave energy

While interacting with seismic waves each pile acts as a scatter obstacle. Arrangement, material, and profile of the piles can be obtained by an optimization procedure that is similar to one outlined in the previous subsection.

4.3. *Where seismic barriers can be most efficient?* Our theoretical and numerical studies of different types of seismic barriers revealed that their usage can be most efficient at soft soils especially subjected to liquefaction, when more traditional seismic protection measures can be inadequate; see Fig. 12 demonstrating a building failure due to loss of stability of the liquefied soil.



Figure 12. Failure of buildings caused by soil liquefaction (Niigata, Japan, 1964) by FEMA

Another possible area of application where the seismic barriers can be indispensable, is necessity to protect the foundation that

seismic isolation; see Fig. 13.



Figure 13. Formation of the main crack in the base plate (Fukushima I, 2011)

### Acknowledgements

The author thanks Russian Foundation for Fundamental Research (Grant 11-08-00582) for partial financial support.

### REFERENCES:

- Abu-Hejleh, N., Zornberg, J.G., Wang, T. & Watcharamonthein, J. 2002. Monitored displacements of unique geosynthetic-reinforced bridge abutments. *Geosynthetics International*. 9(1).
- Agnew, D.C. 2002. History of seismology. *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*. 81(A). 3-11.
- Balandin, D.V., Bolotnik, N.N., and Pilkey, W.D. 2000. Optimal protection from impact and shock: Theory and methods. *Appl. Mech. Rev., ASME*. 53(9). 237-264.
- Balandin, D.V., et al. 2008. Concept of a platform based impact isolation system. *Medical Eng. & Physics*. 30(2). 258-267.
- Barnett, D.M. & Lothe, J. 1973. Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's functions, and surface waves in anisotropic elastic solids. *Phys. Norv.* 7. 13 – 19.
- Barnett, D.M. & Lothe, J. 1974. Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. *J. Phys. Ser. F*. 4. 671 – 678.
- Barnett, D.M., Lothe, J. 1974. An image force theorem for dislocations in anisotropic bicrystals. *J. Phys. Ser. F*. 4. 1618 – 1635.

1978. *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publ., Amsterdam.
- Blondeau, F., 1989. Fondations profondes - Cours de mécanique des sols de l'E.N.P.C. *Techniques de l'Ingénieur*, Chapitre C, 248.
- Braitenberg, C. & Zadro, M. 2007. Comparative analysis of the free oscillations generated by the Sumatra-Andaman Islands 2004 and the Chile 1960 Earthquakes, *Bull. Seism. Soc. Amer.* 97(1A). S6-S17.
- Cagniard, L. 1939. *Reflexion et refraction des ondes seismique progressive* (Thesis), Gauthier-Villars & Cie., Paris.
- Cecchi, A., and Rizzi, N.L. 2001. Heterogeneous elastic solids: a mixed homogenization-rigidification technique. *Int. J. Solids Struct.* 38. 29-36.
- Chadwick, P. & Borejko, P. 1994. Existence and uniqueness of Stoneley waves, *Geophys. J. Int.* 118. 279-284.
- Chadwick, P. & Jarvis, D.A. 1979. Surface waves in a prestressed elastic body, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 366. 517 - 536.
- Chadwick, P. & Smith, G.D. 1977. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials. *Adv. Appl. Mech.* 17. 303 - 376.
- Chadwick, P. & Ting, T.C.T. 1987. On the structure and invariance of the Barnett-Lothe tensors, *Quart. Appl. Math.* 45. 419 - 427.
- Chimenti, D.E. 1994. Lamb waves in microstructured plates. *Ultrasonics.* 32. 255-260.
- De Buhan, P., Mangiavacchi, R., Nova, R., Pellegrini, G. & Salençon, J. 1989. Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique.* 39(2). 189-201.
- Den Hartog, J.P. 1985. *Mechanical Vibrations*. N.Y., Dover Publ.
- Detournay E. & Cheng A. H.-D. 1993. *Fundamentals of Poroelasticity*, Vol. II *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice & Projects*. N.Y., Pergamon Press
- Djeran-Maigre, I. & Kuznetsov, S.V. 2008. Solitary SH waves in two layered traction free plates. *Comptes Rendus Acad Sci, Paris, Ser. Mecanique.* 336 102-107.
- Eiksund, G., Hoff, I. & Perkins, S. 2004. Cyclic triaxial tests on reinforced base course material. *Proceedings EuroGeo3, DGGT, Munich, Germany*, Vol. 2, 619-624.
- waves. *Phys. Acoust.* 6. 109 - 166.
- Guo, N. & Cawley, P. 1993. Lamb wave propagation in composite laminates and its relationship with acousto-ultrasonics, *NDT & E Int.*, 26, pp. 75-84.
- Gunderson, S.A., Barnett, D.M., & Lothe, J. 1987. Rayleigh wave existence theory: a supplementary remark, *Wave Motion*, 9, 319 - 321.
- Haskell, N.A. 1953. Dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. America.* V.43. No..1. P.17 - 34.
- Herle, V. 2006. Long-term performance of reinforced soil structures. Proceedings of the 13. Danube-Conference on Geotechnical Engineering, Slovenian Geotechnical Society, Ljubljana, Slovenia, Vol. 2, 251-256.
- Ketchart, K. & Wu, J.T.H. 2001. Performance test for geosynthetic reinforced soil including effects of preloading. *Federal Highway Administration*, McLean, VA, USA, Report No. FHWA-R-01-018.
- Knopoff, L. 1964. A matrix method for elastic wave problems, *Bull. Seismol. Soc. America.* V.54. No.1. P.431 - 438.
- Kusakabe O., Takemura J., Takahashi A., Izawa J., & Shibayama S. 2008. Physical modeling of seismic responses of underground structures, *Proceedings of the 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics, Goa, India*, 1459-1474.
- Kuznetsov, S.V. 2002. Subsonic Lamb waves in anisotropic plates, *Quart. Appl. Math.* 60 577 - 587.
- Kuznetsov, S.V. 2003. Surface waves of non-Rayleigh type, *Quart. Appl. Math.* V.61. No.3. P.575 - 582.
- Kuznetsov, S.V. 2006a. Love waves in monoclinic media (in Russian), *Prikl. Math. Mech.*, vol.70, 141-154.
- Kuznetsov, S.V. 2006b. SH-waves in laminated plates, *Quart. Appl. Math.*, vol.64, 153 - 165.
- Lamb, H. 1917. On waves in an elastic plate, *Proc. Roy. Soc.*, A93, 114 - 128.
- Lim, T.C. & Farnell, G.W. 1968. Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals, *J. Appl. Phys.*, 39, 4319 - 4325.
- Lim, T.C. & Farnell, G.W. 1969. Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals, *J. Acoust. Soc. Amer.* 45 945 - 951

- waves in anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 92, pp. 888-894.
- Liu, G.R., Tani, J., Watanabe, K., & Ohyoshi, T. 1990. Lamb wave propagation in anisotropic laminates, *J. Appl. Mech.*, 57, pp. 923 - 929.
- Lothe, J. & Barnett, D.M. 1976. On the existence of surface wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, *J. Appl. Phys.*, 47, 428 – 433.
- Love, A.E.H. 1911. *Some Problems of Geodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge pp. 165-178.
- Lowe, M.J.S. 1995. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media, *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 42, 525 – 542.
- Maradudin A. and Mills D.L. 1975. Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the Presence of surface roughness. *Phys. Rev.* 11(B) 1392.
- Maradudin A. and Mills D.L. 1976. Attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness. *Appl Phys. Letters*. 28(10) 573-575.
- Maradudin A. and Shen J. 1980. Multiple scattering of waves from random rough surfaces. *Phys. Rev.* 22(B) 4234-4240.
- Michel, J.C., Moulinec, H., & Suquet, P. 1999. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 172, 109–143.
- Moghaddas-Nejad, F. & Small, J.C. 2003. Resilient and permanent characteristics of reinforced granular materials by repeated load triaxial tests. *Geotechnical Testing Journal, ASTM*, Vol. 26, Issue 2.
- Motamed R., Itoh K., Hirose S., Takahashi A., & Kusakabe O. 2008. Evaluation of Wave Barriers on Ground Vibration Reduction through Numerical Modeling in ABAQUS, *Proceedings of SIMULIA Customer Conference 2009, London, UK*, 402-41.
- Sanchez-Palencia, E. 1983. *Homogenization method for the study of composite media*, Asymptotic Analysis II, 192-214.
- Scholte, J.G. 1947. The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.: Geophys. Suppl.*, vol.5, pp. 120-126.
- fiber-reinforced anisotropic elastic media, *Sadhana*, 26, 363 – 370.
- Sezawa, K. 1927. Dispersion of elastic waves propagated on the surface of stratified bodies and on curved surfaces. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo*, 3,1 – 18.
- Sezawa, K. & Kanai, K. 1939. The range of possible existence of Stoneley waves and some related problems, *Bull. Earthquake Research Inst.* (Tokyo), vol.17, pp.1-8.
- Sobczyk K. 1966. Scattering of Reyleigh waves at a random boundary of an elastic body, *Proc. Vibr. Problems*, 7(4), 363-374.
- Stoneley, R. 1924. Elastic waves at the surface of separation of two solids, *Proceedings of the Royal Society (London)* A106, pp. 416-428.
- Strutt J.W. (Lord Rayleigh) 1885. On wave propagating along the plane surface of an elastic solid, *Proc. London Math. Soc.* Vol. 17, 4-11.
- Takahashi A., Takemura J., & Shimodaira T. 2001. Seismic performance of reinforced earth wall with geogrid, *Proceedings of the 15th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Istanbul, Turkey*, 1265-1268.
- Thomson, W.T. 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.* V.21. No.2. P.89 – 93.
- Ting, T.C.T. 1996. *Anisotropic elasticity: theory and Applications*, Oxford University Press.
- Ting, T.C.T. 2002. An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy, *Q. J. Mech. Appl. Math*, 55, 297-311.
- 1) Кузнецов Сергей Владимирович, Институт проблем механики РАН, 119526, Москва, просп.Вернадского, 101  
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru
- 1) Kuznetsov Sergey, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 119526, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow, Russia  
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

## КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

*Р.Л. Лейбов*

Профессор кафедры информатики и прикладной математики МГСУ

**АННОТАЦИЯ:** В статье представлен метод повышения точности кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. Матрицы статических и динамических линейных моделей оцениваются по переходным процессам нелинейной модели. При этом переходные процессы для оценивания матриц динамических линейных моделей с помощью нелинейного программирования пересекают границы областей действия разных линейных моделей. Такой подход позволяет уменьшить ошибки кусочно-линейной модели. Приведены результаты применения предлагаемого метода для построения кусочно-линейной модели авиационного газотурбинного двигателя.

**Ключевые слова:** нелинейный объект, кусочно-линейная модель, переходные процессы, нелинейное программирование

## PIECE-WISE LINEAR MODEL OF NONLINEAR PLANT

*R. Leibov*

Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics,  
Moscow State University of Civil Engineering, Russia

**ABSTRACT:** This paper presents a nonlinear plant piecewise-linear model accuracy improvement method. The matrices of static and dynamic linear models are estimated using nonlinear model time responses. The time responses for dynamic linear model matrix estimation using nonlinear programming cross the bounds between different linear models domains. This approach diminishes the piecewise-linear model errors. The results of proposed piecewise-linear model parameters estimation method application for aircraft turbofan engine are presented.

**Key words:** Nonlinear plant, piecewise-linear model, time responses, nonlinear programming

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Оценивание матричных параметров кусочно-линейной модели такого нелинейного объекта управления, как авиационный газотурбинный двигатель (ГТД), необходимо для разработки алгоритмов оптимального оценивания состояния и оптимального управления с учетом ограничений переменных управления и переменных состояния, а также алгоритмов обнаружения, локализации и парирования отказов датчиков и исполнительных устройств создаваемых цифровых систем автоматического управления (САУ). Для всех этих алгоритмов важнее всего точность используемой кусочно-линейной модели. В публикациях последних лет можно выделить

два подхода к повышению точности моделей объектов управления. Так, например, работы [1], [2], [3] посвящены повышению точности оценивания параметров моделей по неполным и искаженным измерениям, а работы [4], [5], [6], [7], [8], [9] — оцениванию неопределенных или изменяющихся во времени параметров моделей. Однако при разработке цифровых САУ ГТД нелинейная модель объекта управления, как правило, известна, а неопределенность параметров линейных моделей лишь отражает расхождение между ними и исходной нелинейной моделью. При этом расхождение между линейной и нелинейной моделями в небольшой окрестности установившегося режима работы определяется только размерами этой

окрестности. Для кусочно-линейной модели, которая представляет собой набор линейных моделей, описывающих поведение нелинейного объекта управления в окрестностях нескольких установившихся режимов работы, расхождение с нелинейной моделью обусловлено главным образом ее поведением на границах областей действия разных линейных моделей.

Оценивание матриц и собственных значений линейной модели, а также границ неопределенных элементов этих матриц и границ вещественных и мнимых частей их неопределенных собственных значений по переходным процессам нелинейной модели объекта управления были описаны автором в работах [10], [11], [12], [13]. В работе [14] один из этих подходов применен для оценивания неопределенных матричных параметров кусочно-линейной модели. Наконец, в работе [15] сделана попытка уменьшить ошибки кусочно-линейной модели, то есть расхождение между кусочно-линейной моделью и исходной нелинейной моделью. Для этого по переходным процессам нелинейной модели оцениваются собственные значения каждой линейной модели и общие для всех линейных моделей собственные векторы.

Целью данной работы является повышение точности кусочно-линейной модели за счет использования для оценивания матриц динамических линейных моделей переходных процессов нелинейной модели объекта управления, пересекающих границы областей действия разных линейных моделей. Рассмотренный в работе пример, в котором высота и скорость полета летательного аппарата (ЛА) равны нулю, соответствует взлетному режиму работы ГТД и режиму ухода ЛА на второй круг. На этих режимах параметры работы двигателя близки к предельно допустимым значениям, поэтому отказы датчиков и исполнительных устройств цифровых систем наиболее опасны, а значит точность используемой при разработке алгоритмов кусочно-линейной

модели особенно важна. Показано, что расхождение между кусочно-линейной и нелинейной моделями авиационного ГТД удастся существенно уменьшить с помощью предлагаемого в работе подхода.

## 2. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ, ЛИНЕЙНОЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЕЙ

Нелинейная модель объекта управления, такого как авиационный ГТД, в замкнутой САУ имеет вид [16]

$$\dot{\mathbf{x}}^o = \mathbf{f}(\mathbf{x}^o, \mathbf{u}^o, \mathbf{w}^o). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}^o$  — вектор состояния,  $\mathbf{u}^o$  — вектор управления,  $\mathbf{w}^o$  — вектор внешних воздействий, а  $\mathbf{f}$  — нелинейная вещественная векторная функция. Координаты вектора состояния (переменные состояния) это частоты вращения роторов, температуры и давления в различных сечениях проточной части двигателя. Координаты вектора управления (переменные управления) это расход топлива, изменяемые геометрические характеристики проточной части двигателя, в частности, площадь критического сечения реактивного сопла и углы поворота направляющих аппаратов вентилятора и компрессора. Координаты вектора внешних воздействий (переменные внешних воздействий) это угол отклонения рычага управления двигателем (управляющее воздействие), а также высота и скорость полета (переменные внешних условий, входящие в вектор внешних условий вектор  $\mathbf{v}^o$ ). Постоянное управляющее воздействие и внешние условия, входящие в вектор  ${}_s\mathbf{w}^o$ , определяют установившийся режим работы двигателя в замкнутой САУ (рабочую точку), которому соответствуют вектор установившихся значений переменных управления  ${}_s\mathbf{u}^o$  и вектор установившихся значений переменных состояния  ${}_s\mathbf{x}^o$ . Нелинейная модель объекта управления в разомкнутой САУ имеет вид [16]

$$\dot{\mathbf{x}}^o = \mathbf{f}(\mathbf{x}^o, \mathbf{u}^o, \mathbf{v}^o). \quad (2)$$

Постоянные внешние условия  ${}_s\mathbf{v}^o$  и постоянные значения переменных управления  ${}_s\mathbf{u}^o$  определяют установившийся режим работы двигателя в разомкнутой САУ.

Нелинейные термогазодинамические модели используются для исследования установившихся и переходных процессов ГТД в широком диапазоне режимов работы и условий полета и для выбора программ управления, а также для создания линейных и кусочно-линейных моделей.

В небольшой окрестности произвольного  $p_1 \dots p_m$ -ого установившегося режима нелинейный объект управления можно [16] приближенно описать с помощью линейной модели

$${}^{p_1 \dots p_m} \dot{\mathbf{x}} = {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x} + {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}. \quad (3)$$

Здесь  ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}$  —  $n$ -мерный нормированный вектор состояния в отклонениях от установившихся значений, а  ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}$  —  $m$ -мерный нормированный вектор управления в отклонениях от установившихся значений. Эти значения соответствуют выбранному  $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму. Если обозначить  $P_1, \dots, P_m$  — количество выбранных установившихся значений каждой из переменных управления, то  $p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$ .

Нормированные переменные состояния и управления в отклонениях вычисляются по формулам

$${}^{p_1 \dots p_m} x_i = \frac{x_i^n - {}^{p_1 \dots p_m} x_i^n}{\max |{}_s x_i^o| - \max |{}_s x_i^o|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$${}^{p_1 \dots p_m} u_j = \frac{u_j^n - {}^{p_1 \dots p_m} u_j^n}{\max |{}_s u_j^o| - \max |{}_s u_j^o|}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Для установившихся значений отклонений нормированных переменных состояния и управления справедливы соотношения

$${}_s \mathbf{x}^n - {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{x}^n = {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} ({}_s \mathbf{u}^n - {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{u}^n), \quad (6)$$

$$\mathbf{0} = {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} ({}_s \mathbf{x}^n - {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{x}^n) + {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} ({}_s \mathbf{u}^n - {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{u}^n). \quad (7)$$

Отсюда

$${}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{S} = -{}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A}^{-1} {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{B}, \quad (8)$$

$${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} = -{}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{S}, \quad (9)$$

где  ${}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{S}$  матрица статической линейной модели для  $p_1 \dots p_m$ -ого установившегося режима.

Набор линейных моделей для всех выбранных установившихся режимов представляет собой кусочно-линейную модель. Выбранные установившиеся режимы в разомкнутой САУ это, во-первых, режимы, которые совпадают с выбранными установившимися режимами в замкнутой САУ. Во-вторых, это установившиеся режимы, для которых значения переменных управления близки к значениям этих переменных при переходных процессах в замкнутой САУ.

Статическая кусочно-линейная модель объекта управления представляет собой набор векторов нормированных установившихся значений управления и состояния  ${}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{u}^n, {}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{x}^n, p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$ , и набор матриц статических линейных моделей  ${}^{p_1 \dots p_m} {}_s \mathbf{S}, p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$  для выбранных установившихся режимов. Графически ее можно представить в виде  $n$  сеточных многогранных  $(m+1)$ -мерных поверхностей  $dx_i^n/dt=0, i=1, \dots, n$ . Статические кусочно-линейные характеристики объекта представляют собой  $n$  пространственных ломаных линий, которые принадлежат этим поверхностям и соединяют установившиеся значения переменных состояния, которые соответствуют установившимся режимам в замкнутой САУ.

Динамическая кусочно-линейная модель объекта управления включает в себя статическую кусочно-линейную модель и соответствующий набор матриц динамических линейных моделей  ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A}, p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$ .

### 3. СТАТИЧЕСКАЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Описание статической кусочно-линейной модели может иметь вид

$$\begin{aligned} {}_s \mathbf{x}^n - {}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{x}^n &= {}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{S} \left( {}_s \mathbf{u}^n - {}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{u}^n \right), \\ p_j &= 1, \quad {}_s u_j^n \leq {}_s^1 u_j^n, \\ p_j : {}_s^1 u_j^n \geq {}_s u_j^n &> {}_s^{p_j-1} u_j^n, \quad p_j = 2, \dots, P_j, \\ p_j &= P_j, \quad {}_s u_j^n > {}_s^{P_j} u_j^n, \\ & j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$${}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} {}_s^{P_1} u_1^n \\ \dots \\ {}_s^{P_j} u_j^n \\ \dots \\ {}_s^{P_m} u_m^n \end{bmatrix},$$

а установившиеся значения переменных управления в узлах сетки можно определять следующим образом

$$\begin{aligned} {}_s^{P_j} u_j^n &= \\ \min({}_s u_j^n) &+ \frac{[\max({}_s u_j^n) - \min({}_s u_j^n)]}{(P_j - 1)} (p_j - 1), \\ p_j &= 1, \dots, P_j, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Векторы  ${}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{x}^n$  определяются с помощью нелинейной модели объекта управления.

### 4. ДИНАМИЧЕСКАЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Описание динамической кусочно-линейной модели, построенной на основе статической кусочно-линейной модели может иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^n &= {}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{A} \left[ \left( \mathbf{x}^n - {}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{x}^n \right) - {}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{S} \left( \mathbf{u}^n - {}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{u}^n \right) \right], \\ p_j &= 1, \quad u_j^n \leq {}_s^1 u_j^n, \\ p_j : {}_s^1 u_j^n \geq u_j^n &> {}_s^{p_j-1} u_j^n, \quad p_j = 2, \dots, P_j, \\ p_j &= P_j, \quad u_j^n > {}_s^{P_j} u_j^n, \\ & j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (11)$$

### 5. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Для оценивания матричных параметров линейной модели, соответствующей выбранному  $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму, используются переходные процессы нелинейной модели двигателя в разомкнутой системе управления, то есть наборы значений нормированного вектора состояния  ${}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{x}^{HJIn}(t_k)$ ,  $k=0, \dots, {}_{P_1 \dots P_m} N$  и нормированного вектора управления  ${}_{P_1 \dots P_m} \mathbf{u}^{HJIn}(t_k)$ ,  $k=0, \dots, {}_{P_1 \dots P_m} N-1$ , точнее наборы их отклонений от значений, которые соответствуют  $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму.

При оценивании матрицы статической линейной модели переходный процесс для переменных управления состоит из разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из  $m$  переменных. При этом отклонение каждой переменной управления равно разности установившихся значений этой переменной для двух соседних установившихся режимов и соответствует одной из границ области действия данной линейной модели.

В этом случае элементы соответствующих столбцов матрицы статической линейной модели  ${}_{P_1 \dots P_m} {}_s \mathbf{S}$  могут быть определены с помощью деления установившихся значений отклонений переменных состояния на значение соответствующего отличного от нуля отклонения переменной управления

$$\begin{aligned} {}_{P_1 \dots P_m} {}_s S_{ij} &= \\ \frac{{}_{P_1 \dots P_m} x_i^{HJIn} \left[ (2j-1) {}_{P_1 \dots P_m} T \right] - {}_{P_1 \dots P_m} x_i^{sta} x_i^n}{{}_{P_1 \dots P_m} u_j^{HJIn} \left[ (2j-1) {}_{P_1 \dots P_m} T \right] - {}_{P_1 \dots P_m} u_j^n}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь  ${}_{P_1 \dots P_m} T$  — продолжительность каждого прямоугольного импульса и такого же промежутка между импульсами, соответствующая  $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму.

При оценивании матрицы динамической линейной модели переходные процессы для

переменных управления представляют собой  $m$  линейных функций времени, наклоны которых соответствуют переходным процессам в замкнутой САУ. Поскольку переходные процессы должны пересекать границы областей действия разных линейных моделей, эти линейные функции могут соединять установившиеся значения, которые разделяет одна или несколько границ соседних областей.

Если шаг дискретности достаточно мал, то в дискретные моменты времени можно приближенно считать, что

$$\mathbf{x}^{Лн}(t_{k+1}) = \mathbf{x}^{Лн}(t_k) + \Delta t \begin{matrix} P_1 \dots P_m \mathbf{A} \\ \left\{ \left[ \mathbf{x}^{Лн}(t_k) - P_1 \dots P_m \mathbf{x}^n \right] - \right. \\ \left. P_1 \dots P_m \mathbf{S} \left[ \mathbf{u}^{HЛн}(t_k) - P_1 \dots P_m \mathbf{u}^n \right] \right\} \end{matrix} \quad (13)$$

Здесь  $k=0,1,2,\dots$  соответствуют дискретным моментам времени  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , причем  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ , где  $\Delta t$  это шаг дискретности.

Оценивание матрицы динамической линейной модели в окрестности  $P_1 \dots P_m$ -ого установившегося режима может быть сведено к задаче нелинейного программирования [17] вида

$$\begin{matrix} P_1 \dots P_m \mathbf{A} : \min \\ \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{P_1 \dots P_m N} \left[ \mathbf{x}^{Лн}(t_k) - \mathbf{x}^{HЛн}(t_k) \right]^T \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^{P_1 \dots P_m N} \mathbf{x}^{HЛн}(t_k)^T \mathbf{W}(t_k) \mathbf{x}^{HЛн}(t_k)}} \right. \\ \left. \frac{\left[ \mathbf{x}^{Лн}(t_k) - \mathbf{x}^{HЛн}(t_k) \right]}{\left[ \mathbf{x}^{Лн}(t_k) - \mathbf{x}^{HЛн}(t_k) \right]} \right\} \\ \left. \left. \left. \left. \left. \begin{matrix} \mathbf{x}^{Лн}(t_k) = \mathbf{x}^{Лн}(t_{k-1}) + \\ \Delta t \begin{matrix} P_1 \dots P_m \mathbf{A} \\ \left\{ \left[ \mathbf{x}^{Лн}(t_{k-1}) - P_1 \dots P_m \mathbf{x}^n \right] - \\ P_1 \dots P_m \mathbf{S} \left[ \mathbf{u}^{HЛн}(t_{k-1}) - P_1 \dots P_m \mathbf{u}^n \right] \right\} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \right\} \right\} \right\} \end{matrix} \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{W}(t_k)$ ,  $k=1, \dots, P_1 \dots P_m N$  положительно определенные диагональные весовые

матрицы. Начальные значения элементов матрицы  $P_1 \dots P_m \mathbf{A}$  равны значениям элементов матрицы линейной модели для соседней области. Начальные значения координат вектора состояния линейной модели в отклонениях  $\mathbf{x}^{Лн}(t_0) = \mathbf{x}^{HЛн}(t_0)$ .

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для определения матриц статической и динамической кусочно-линейных моделей по переходным процессам нелинейной термогазодинамической модели двухвального двухконтурного турбореактивного авиационного ГТД в разомкнутой системе управления.

В рассматриваемом примере высота и скорость (число Маха) полета ЛА (переменные внешних условий) равны нулю ( $ALT=0, MN=0$ ), значения угла отклонения рычага управления двигателем (управляющего воздействия) соответствуют режимам работы ГТД в замкнутой САУ от максимального ( $\alpha_{руд}=68^\circ$ ) до минимального ( $\alpha_{руд}=15^\circ$ ). Четыре переменные управления ( $m=4$ ) соответствуют расходу топлива в основной камере сгорания  $G_{то}$ , площади критического сечения реактивного сопла  $F_{кр}$ , углу поворота направляющих аппаратов вентилятора  $\varphi_{нав}$  и углу поворота направляющих аппаратов компрессора  $\varphi_{нак}$ . Пять переменных состояния объекта управления ( $n=5$ ) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя  $n_v$ , частоте вращения компрессора двигателя  $n_k$ , давлению торможения за компрессором  $P_k^*$ , давлению торможения за турбиной  $P_t^*$  и температуре торможения за турбиной  $T_t^*$ .

Будем считать, что переменные управления  $u_3^n$  и  $u_4^n$  изменяются (там, где они изменяются) согласованно с переменной управления  $u_1^n$ , то есть примерно одновременно эти переменные оказываются на границах (по каждой из них) соседних

областей действия разных линейных моделей. При этом любую пару соседних рабочих точек (выбранных установившихся режимов работы ГТД в замкнутой САУ) разделяет (по каждой из этих переменных) не более одной границы соседних областей действия разных линейных моделей. Поэтому для всех этих трех переменных ограничимся рассмотрением только  $P_1=9$  (по количеству выбранных рабочих точек) выбранных установившихся значений для переменной  $u_1^n$ . При этом количество рассматриваемых установившихся значений для переменных  $u_3^n$  и  $u_4^n$  будет равно соответственно 5 и 7 (в остальных точках они остаются неизменными).

Будем считать также, что переменная управления  $u_2^n$  изменяется так, что хотя бы одну пару соседних рабочих точек разделяет (по этой переменной) не одна, а несколько границ соседних областей действия разных линейных моделей, и поэтому для нее также количество выбранных установившихся значений  $P_2=9$ .

Таким образом, максимально возможное количество установившихся режимов работы в разомкнутой САУ, которые мы могли бы рассматривать при создании кусочно-линейной модели,  $P_1P_2=81$ . Однако на практике можно ограничиться рассмотрением меньшего числа установившихся режимов.

Рассмотрим 9 установившихся режимов в разомкнутой САУ, которые совпадают с режимами работы в замкнутой САУ (от максимального до минимального) при соответствующих значениях угла отклонения рычага управления двигателем (управляющего воздействия): 98 (9899) максимальный режим при  $\alpha_{руд}=68^\circ$ , 89 (8989) при  $\alpha_{руд}=60^\circ$ , 79 (7979) при  $\alpha_{руд}=50^\circ$ , 69 (6966) при  $\alpha_{руд}=40^\circ$ , 59 (5915) при  $\alpha_{руд}=30^\circ$ , 49 (4914) при  $\alpha_{руд}=25^\circ$ , 39 (3913) при  $\alpha_{руд}=20^\circ$ , 29 (2912) при  $\alpha_{руд}=17^\circ$ , 11 (1111) минимальный режим при  $\alpha_{руд}=15^\circ$ .

Рассмотрим также еще 23 установившихся режима работы ГТД в

разомкнутой САУ: 99 (9999), 19 (1911), 18 (1811), 17 (1711), 16 (1611), 15 (1511), 14 (1411), 13 (1311), 12 (1211), 21 (2112), 31 (3113), 41 (4114), 51 (5115), 52 (5215), 53 (5315), 63 (6366), 64 (6466), 65 (6566), 66 (6666), 67 (6766), 68 (6866), 78 (7879), 88 (8889). Это установившиеся режимы, для которых значения переменных управления близки к значениям этих переменных при различных переходных процессах в замкнутой САУ.

Описание динамической кусочно-линейной модели в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 {}^{P_1P_2} \dot{\mathbf{x}} &= {}^{P_1P_2} \mathbf{A} \left( {}^{P_1P_2} \mathbf{x} - {}^{P_1P_2} \mathbf{S} {}^{P_1P_2} \mathbf{u} \right), \\
 {}^{P_1P_2} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^n - {}^{P_1P_2} \mathbf{x}^n, \\
 {}^{P_1P_2} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^n - {}^{P_1P_2} \mathbf{u}^n, \\
 p_1 &= 1, \quad u_1^n \leq_s^1 u_1^n, \\
 p_1 : {}^{p_1} u_1^n &\geq u_1^n > {}^{p_1-1} u_1^n, \quad p_1 = 2, \dots, 9, \\
 p_1 &= 9, \quad u_1^n >_s^9 u_1^n, \\
 p_2 &= 1, \quad u_2^n \geq_s^1 u_2^n, \\
 p_2 : {}^{p_2} u_2^n &\leq u_2^n < {}^{p_2-1} u_2^n, \quad p_2 = 2, \dots, 9, \\
 p_2 &= 9, \quad u_2^n <_s^9 u_2^n. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Если в какой-то момент переходного процесса переменные управления оказываются за пределами областей действия выбранных линейных моделей, то используется та модель, которая использовалась до этого момента. При этом матрицы динамических линейных моделей для соседних областей там, где это возможно, совпадают.

Переходные процессы для определения матриц статической и динамической кусочно-линейных моделей рассчитываются с помощью нелинейной модели ГТД в разомкнутой системе управления для выбранных установившихся режимов.

Переходные процессы для вычисления элементов матриц статической кусочно-линейной модели представляют собой последовательность разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из переменных управления  $u_1^{НЛн}$ ,  $u_2^{НЛн}$ ,  $u_3^{НЛн}$ ,

$u_4^{НЛн}$  и соответствующие им отклики переменных состояния  $x_1^{НЛн}$ ,  $x_2^{НЛн}$ ,  $x_3^{НЛн}$ ,  $x_4^{НЛн}$ ,  $x_5^{НЛн}$ . Ступенчатая функция (передний фронт каждого из импульсов) соединяет установившиеся значения, соответствующие соседним выбранным установившимся режимам. Если переменная управления в пределах области действия данной линейной модели остается неизменной, то используется установившееся значение ближайшей из соседних областей, где переменная управления изменяется. Длительность прямоугольных импульсов и промежутков между импульсами составляет  $T=3.75$ с, шаг дискретности  $\Delta t=0.025$ с, общее число точек переходных процессов при определении матриц статических линейных моделей равно  $N=1200$ .

Переходные процессы для оценивания матриц динамической кусочно-линейной модели представляют собой линейные функции по каждой из переменных управления  $u_1^{НЛн}$ ,  $u_2^{НЛн}$ ,  $u_3^{НЛн}$ ,  $u_4^{НЛн}$ , которые соединяют их установившиеся значения, соответствующие выбранным установившимся режимам, и соответствующие им отклики переменных состояния  $x_1^{НЛн}$ ,  $x_2^{НЛн}$ ,  $x_3^{НЛн}$ ,  $x_4^{НЛн}$ ,  $x_5^{НЛн}$ . Длительность линейных участков  $T=5$ с, шаг дискретности  $\Delta t=0.025$ с, а общее число точек переходных процессов при оценивании матриц динамических линейных моделей  $N=400$ . Эти переходные процессы близки к переходным процессам в замкнутой САУ. При оценивании считается, что матрицы  ${}^{19}A={}^{29}A={}^{39}A$ ,  ${}^{11}A={}^{21}A={}^{31}A$ ,  ${}^{51}A={}^{52}A={}^{53}A$ ,  ${}^{63}A={}^{64}A={}^{65}A={}^{66}A={}^{67}A={}^{68}A$ . Кроме того, в кусочно-линейной модели  ${}^{99}A={}^{98}A$ ,  ${}^{88}A={}^{89}A$ ,  ${}^{13}A={}^{14}A={}^{15}A={}^{16}A={}^{17}A={}^{18}A={}^{19}A$ ,  ${}^{12}A={}^{11}A$ . Таким образом, по переходным процессам оцениваются 12 матриц  ${}^{98}A$ ,  ${}^{89}A$ ,  ${}^{79}A$ ,  ${}^{69}A$ ,  ${}^{59}A$ ,  ${}^{49}A$ ,  ${}^{39}A$ ,  ${}^{11}A$ ,  ${}^{41}A$ ,  ${}^{53}A$ ,  ${}^{68}A$ ,  ${}^{78}A$ .

Рассмотрим для примера оценивание элементов матрицы  ${}^{39}A$ . Линейные функции для оценивания этой матрицы по переходным процессам пересекают границы

областей действия линейных моделей  ${}^{49}A$ ,  ${}^{39}A$  и  ${}^{29}A$ . Соответственно, при оценивании считается, что матрицы  ${}^{19}A={}^{29}A={}^{39}A$ . Вначале оцениваются элементы  ${}^{39}a_{11}$ ,  ${}^{39}a_{12}$ ,  ${}^{39}a_{21}$ ,  ${}^{39}a_{22}$ . При этом остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а  ${}_xW=diag\{1,1,0,0,0\}$ . Затем оцениваются элементы  ${}^{39}a_{31}$ ,  ${}^{39}a_{32}$ ,  ${}^{39}a_{33}$ ,  ${}^{39}a_{34}$ ,  ${}^{39}a_{41}$ ,  ${}^{39}a_{42}$ ,  ${}^{39}a_{43}$ ,  ${}^{39}a_{44}$ . При этом элементы  ${}^{39}a_{11}$ ,  ${}^{39}a_{12}$ ,  ${}^{39}a_{21}$ ,  ${}^{39}a_{22}$  считаются известными, остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а  ${}_xW=diag\{0,0,1,1,0\}$ . Наконец, оцениваются элементы  ${}^{39}a_{51}$ ,  ${}^{39}a_{52}$ ,  ${}^{39}a_{53}$ ,  ${}^{39}a_{54}$ ,  ${}^{39}a_{55}$ . При этом элементы  ${}^{39}a_{11}$ ,  ${}^{39}a_{12}$ ,  ${}^{39}a_{21}$ ,  ${}^{39}a_{22}$ ,  ${}^{39}a_{31}$ ,  ${}^{39}a_{32}$ ,  ${}^{39}a_{33}$ ,  ${}^{39}a_{34}$ ,  ${}^{39}a_{41}$ ,  ${}^{39}a_{42}$ ,  ${}^{39}a_{43}$ ,  ${}^{39}a_{44}$  считаются известными, остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а  ${}_xW=diag\{0,0,0,0,1\}$ . При оценивании используются ограничения для того, чтобы собственные значения матриц  ${}^{19}A={}^{29}A={}^{39}A$  были вещественными и отрицательными.

На рис.1, 2 представлены результаты сравнения соответствующих переходных процессов нормированной переменной состояния  $x_5^n$  (соответствует  $T_T^*$ ) нелинейной (НЛ) и кусочно-линейной (КЛ) моделей при условии, что  ${}^{39}A={}^{49}A$ , а также после оценивания матрицы  ${}^{39}A$ . Видно, что после оценивания матрицы динамической линейной модели ошибка этой модели уменьшается более чем в два раза. Во многих случаях ее можно уменьшить еще сильнее, но это может привести к увеличению ошибки кусочно-линейной модели. Важно, чтобы ошибки линейных моделей  ${}^{49}A$  и  ${}^{39}A$  в областях их действия были примерно равны. На границе областей действия разных линейных моделей (при  $t=2.075$  с) происходит резкое изменение первой производной, которое по возможности следует ограничивать. При этом нельзя допускать, чтобы знаки первых производных каждой из переменных состояния кусочно-линейной модели не совпадали со знаками первых производных нелинейной модели (особенно на границе областей действия разных линейных

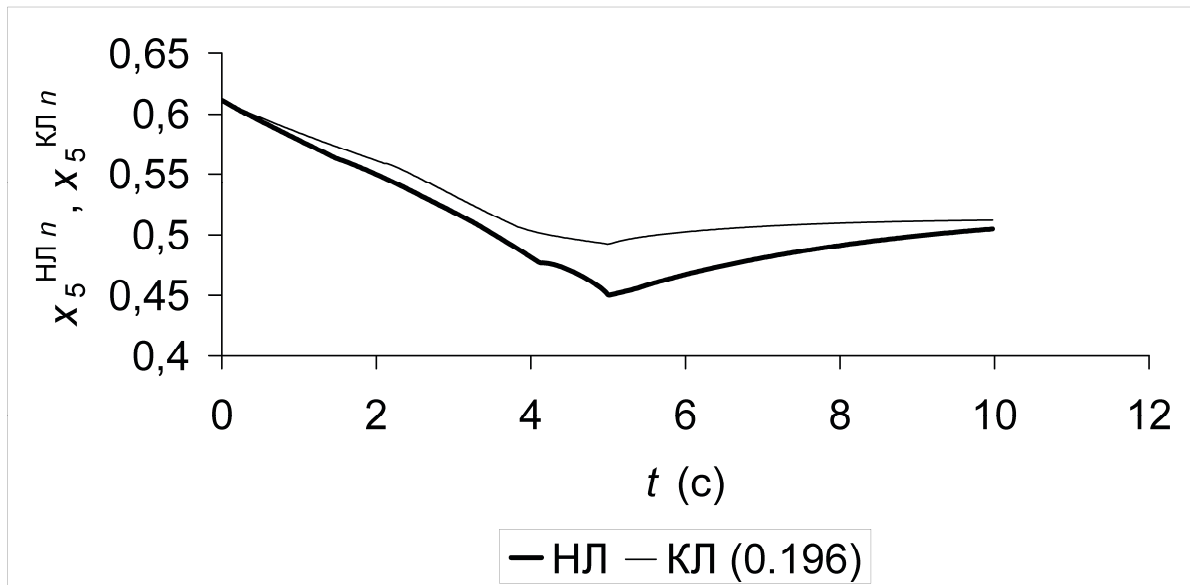


Рисунок 1. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_5^n$  (соответствует  $T_1^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в разомкнутой системе при условии, что  ${}^{39}A = {}^{29}A = {}^{19}A = {}^{49}A$ .

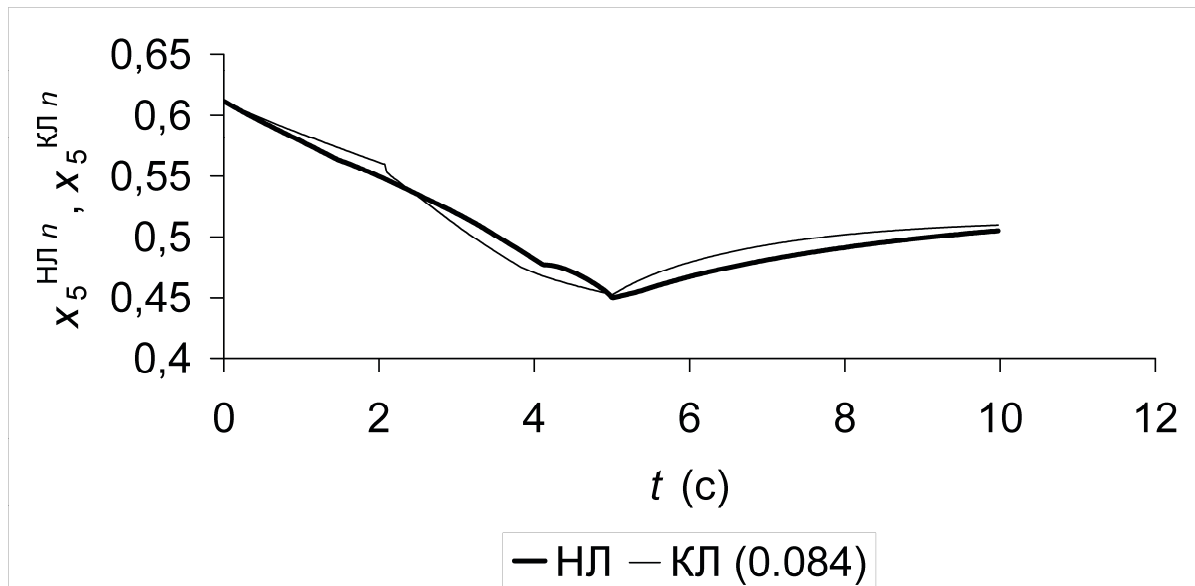


Рисунок 2. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_5^n$  (соответствует  $T_1^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в разомкнутой системе после оценивания  ${}^{39}A = {}^{29}A = {}^{19}A$ .

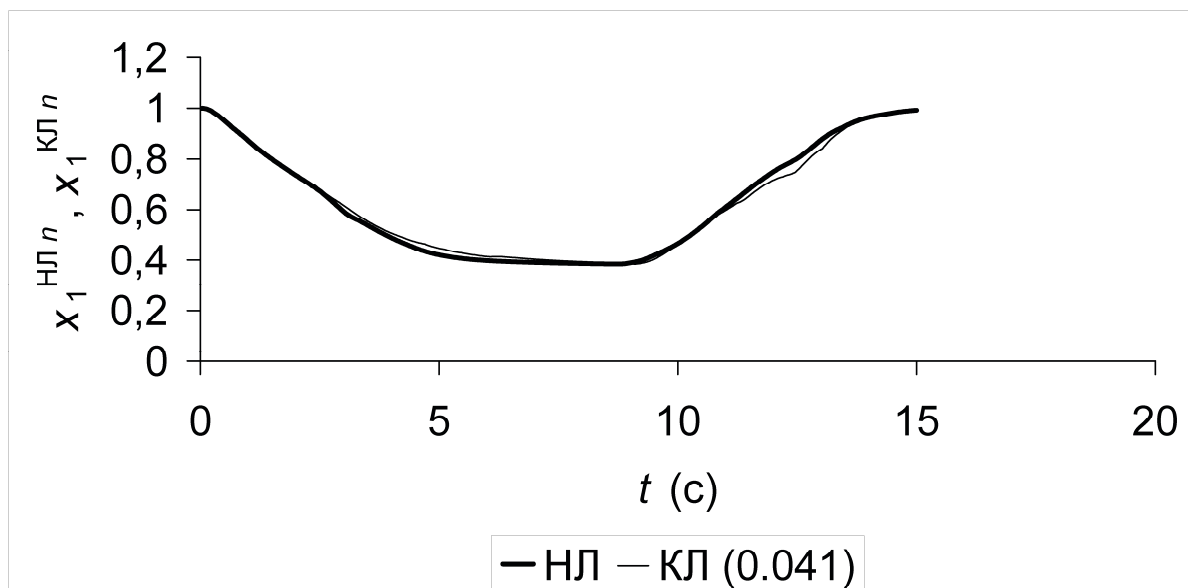


Рисунок 3. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_1^n$  (соответствует  $n_b$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

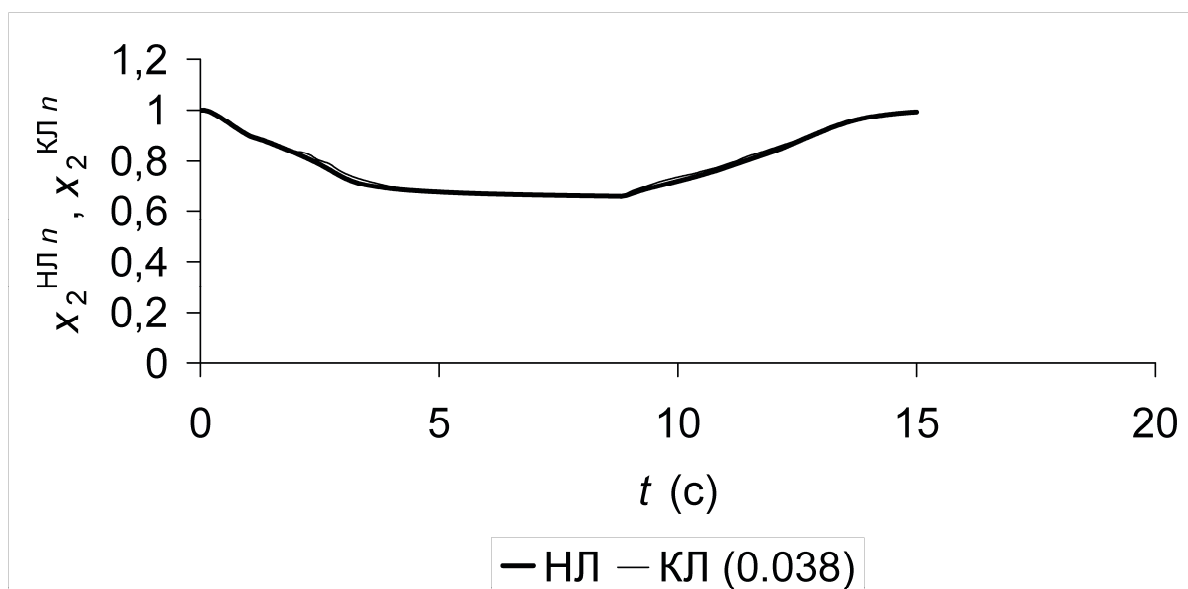


Рисунок 4. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_2^n$  (соответствует  $n_k$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

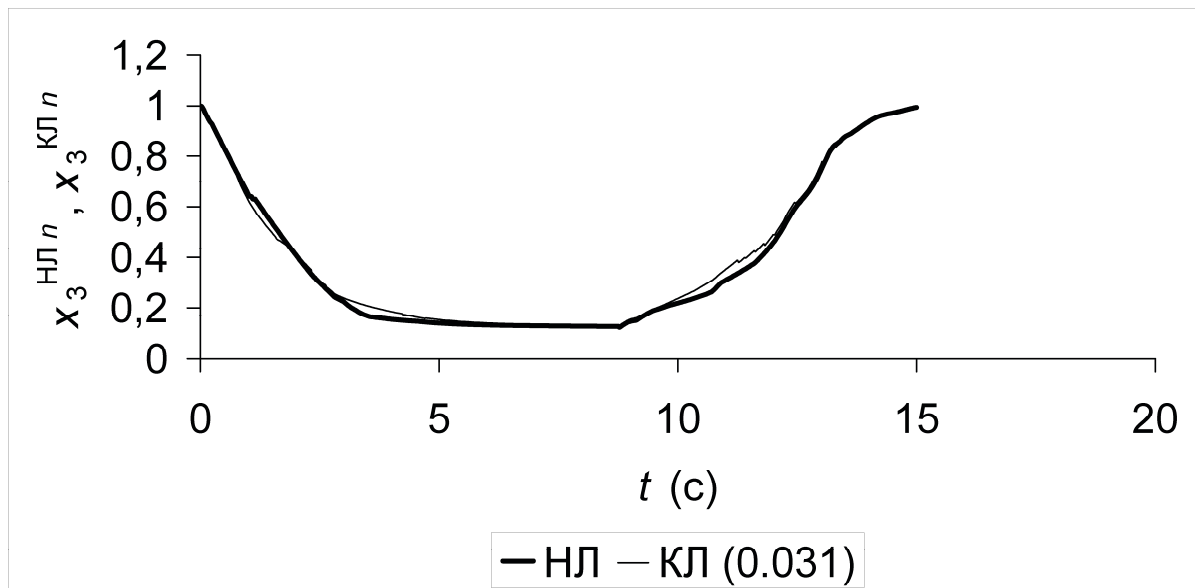


Рисунок 5. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_3^n$  (соответствует  $P_k^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

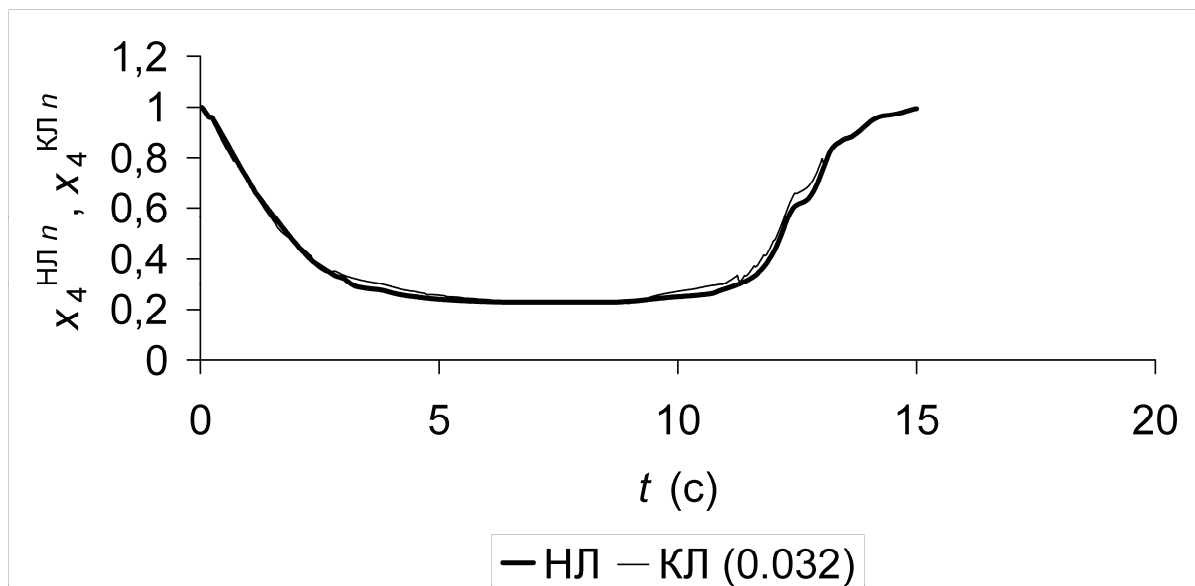


Рисунок 6. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_4^n$  (соответствует  $P_r^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

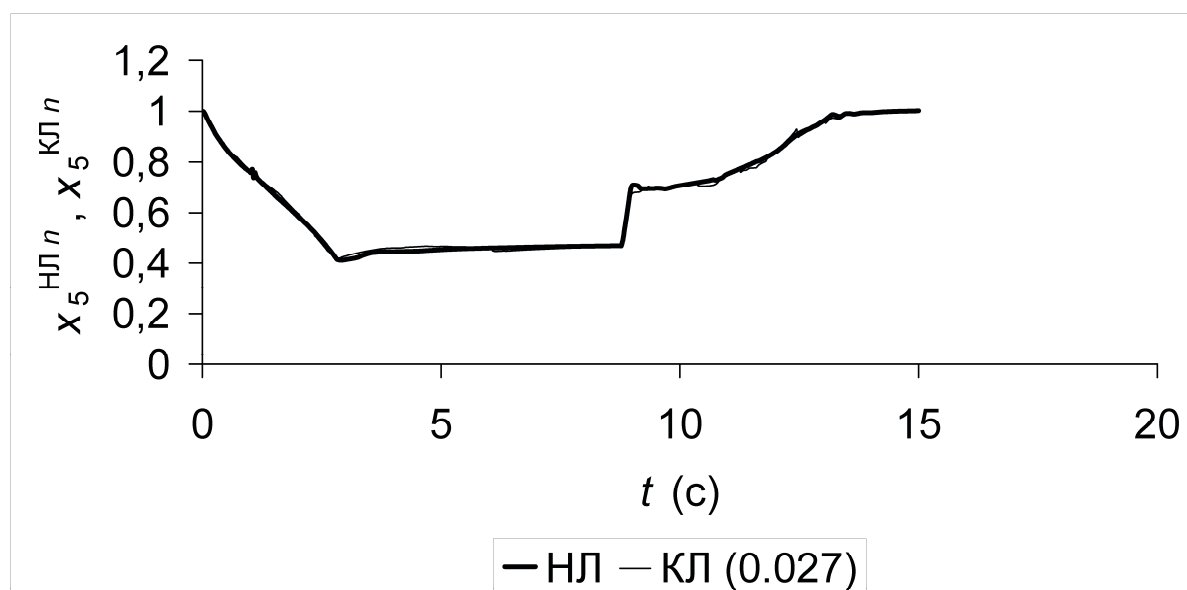


Рисунок 7. Переходные процессы нормированной переменной состояния  $x_5^n$  (соответствует  $T_T^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

моделей). Кроме того, можно использовать дополнительные ограничения для того, чтобы элементы матриц  $^{49}A$  и  $^{39}A$  были по возможности близки.

На рис. 3÷7 представлены результаты проверки полученной кусочно-линейной модели на примере переходных процессов, соответствующих ступенчатому изменению угла отклонения рычага управления двигателем  $\alpha_{руд}$  от значения, соответствующего максимальному режиму работы ( $\alpha_{руд}=68^\circ$ ) до значения, соответствующего минимальному режиму работы ( $\alpha_{руд}=15^\circ$ ) и обратно, то есть на примере сброса и разгона в замкнутой системе управления. При этом число точек переходных процессов нормированных переменных состояния  $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n$  (соответствуют  $n_b, n_k, P_k^*, P_T^*, T_T^*$ ) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели  $N=600$ . Показаны ошибки кусочно-линейной модели, рассчитанные по каждой из переменных состояния в соответствии с (14). Видно, что ошибки кусочно-линейной модели не превышают 3÷4%, то есть они в 2÷3 раза

меньше, чем удалось добиться автору в работе [15].

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод повышения точности кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. В качестве исходных данных для оценивания матриц статических и динамических линейных моделей используются переходные процессы нелинейной модели авиационного ГТД в разомкнутой системе управления. Переходные процессы, используемые для оценивания, пересекают границы областей действия разных линейных моделей, что позволяет уменьшить ошибки кусочно-линейной модели.

Разработанный метод основан на применении вычислительных алгоритмов нелинейного программирования. Это позволяет накладывать ограничения на собственные значения линейных моделей, чтобы обеспечить их устойчивость и исключить кратные собственные значения.

Показано, что можно существенно уменьшить расхождение между кусочно-

линейной и нелинейной моделями за счет уменьшения ошибок кусочно-линейной модели на границах областей действия разных линейных моделей.

Результаты данной работы могут быть применены при разработке САУ ГТД, а также другими нелинейными объектами, которые в широком диапазоне режимов работы приближенно описываются с помощью кусочно-линейных моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов Д.Н., Хрипков А.В. Законы распределения оценок параметров динамических объектов при идентификации методом экспоненциальной модуляции // Проблемы управления. – 2007. – № 4. – С. 14–18.
2. Ломов А.А. Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 3. – С. 39–47.
3. Кунцевич В.М. О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных погрешностях измерений // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 125–133.
4. Панков А.Р., Семенихин К.В. Минимаксная идентификация неопределенно-стохастической линейной модели // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 11. – С. 158–171.
5. Панков А.Р., Семенихин К.В. Методы параметрической идентификации многомерных линейных моделей в условиях априорной неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 5. – С. 76–92.
6. Панков А.Р., Семенихин К.В. О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 66–82.
7. Терентьев В.М., Юрина Д.А. Использование J-адаптивного фильтра для идентификации параметров движения ведущего ДПЛА на основе автономной информации об относительном движении взаимодействующих ДПЛА и ее оценивание // Авиакосмическое приборостроение. – 2008. – № 9. – С. 14–30.
8. Терентьев В.М. J-адаптивный фильтр второго порядка для оценивания вектора состояния и идентификации параметров динамической системы с локальной моделью изменения параметров специального вида // Авиакосмическое приборостроение. – 2009. – № 10. – С. 8–18.
9. Назин С.А., Поляк Б.Т. Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 6. – С. 67–80.
10. Leibov R. Identification of Linear Model Parameters and Uncertainties for an Aircraft Turbofan Engine // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1997. – Vol. 20, N 6. – P. 1274–1275.
11. Leibov R. Aircraft Turbofan Engine Linear Model with Uncertain Eigenvalues // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, N 8. – P. 1367–1369.
12. Лейбов Р.Л. Линейная модель с неопределенными собственными значениями // Проблемы управления. – 2006. – № 3. – С. 19–24.
13. Лейбов Р.Л. Линейная модель с неопределенными элементами матриц // Проблемы управления. – 2006. – № 5. – С. 19–22.
14. Лейбов Р.Л. Кусочно-линейная модель с неопределенными матричными параметрами // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 6. – С. 24–28.
15. Лейбов Р.Л. Кусочно-линейная модель нелинейного объекта с векторным управлением // Авиакосмическое приборостроение. – 2011. – № 2. – С. 31–37.
16. Лейбов Р.Л. Системы с неопределенными собственными значениями. – М.: АСВ, 2006. – 184 с.
17. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Лейбов Роман Львович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,  
e-mail: [r\\_leibov@mtu-net.ru](mailto:r_leibov@mtu-net.ru).

Roman L. Leibov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: [r\\_leibov@mtu-net.ru](mailto:r_leibov@mtu-net.ru).

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*А.В. Сидоров*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

**АННОТАЦИЯ:** Излагается алгоритм численного расчета строительных конструкций, основанный на параллельных вычислениях. Основные современные численные методы расчета строительных конструкций (например, метод конечных элементов, метод конечных объемов, метод граничных элементов, метод конечных разностей) предусматривают формирование систем линейных алгебраических уравнений и их решение. Это системы уравнений, формулирующие условия минимума дискретных математических моделей рассчитываемого объекта, например условие минимума выражения изменения энергии расчетной схемы сооружения, деформируемого внешними воздействиями, или системы линейных уравнений, реализующие принцип сохранения, например условия равновесия расчетной схемы сооружения. Предлагаемый алгоритм предназначен для формирования таких систем уравнений.

**Ключевые слова:** параллельные вычисления, система линейных уравнений, векторный алгоритм, свертка.

## A PARALLEL ALGORITHM FOR THE GENERATION OF MATRIX EQUATIONS OF BUILDING STRUCTURES EQUILIBRIUM

*Alexander V. Sidorov*

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

**ABSTRACT:** The algorithm of numerical analysis of building structures based on parallel computing is presented. The main modern numerical methods for calculation of building structures (such as finite element method, finite volume method, boundary element method, finite difference method) provide systems of linear algebraic equations and their solution. This system of equations are formulating the conditions for a minimum of discrete mathematical models of the object to be calculated, such as a minimum condition for the expression of energy changes of the computational scheme of the structure, deformed by external factors, or this system of linear equations implements the principle of conservation, such as the conditions of equilibrium of computational scheme of the structure. The algorithm is intended for the generation of such systems of equations.

**Key words:** computing, a system of linear equations, vector algorithm, convolution.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АЛГОРИТМА

Интегральное выражение изменения энергии или дифференциальное уравнение равновесия, формулирующие задачу расчета сооружения, можно записать в виде операций свертывания функций [1].

Операция свертывания, например двух функций одного аргумента  $a(x)$  и  $b(x)$  представляется операцией интегрирования:

$$\begin{aligned} a(x) * b(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \chi) \cdot b(\chi) d\chi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\chi) \cdot b(x - \chi) d\chi; \end{aligned} \quad (1)$$

В частности, из определения дельта-функции Дирака  $\delta(x - \chi)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \chi) dx = 1, \text{ где } \delta(x - \chi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq \chi, \\ \infty, & \text{если } x = \chi. \end{cases}$$

следует, что свертка некоторой функции  $a(x)$  с дельта-функцией как известно, является тождественным оператором:

$$\delta(x) * a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \chi) \cdot a(\chi) d\chi = a(x). \quad (2)$$

Производная от функции  $a(x)$  произвольного  $k$  – го порядка тоже может быть представлена сверткой:

$$\begin{aligned} a^k(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \chi) \cdot a^k(\chi) d\chi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^k(x - \chi) \cdot a(\chi) d\chi = \delta^k(x) * a(x) \end{aligned}$$

В свою очередь частная производная от функции  $a(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N)$  по аргументу  $x_s$ , где  $N$  - размерность задачи, представляется в виде операции свертки:

$$\frac{\partial a}{\partial x_s} = \delta'_s * a, \quad \text{или} \quad a'_s = \delta'_s * a,$$

где  $\delta'_s$  - первая производная от дельта-функции по аргументу  $x_s$ .

Частные производные других порядков:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_s^2} \equiv a''_s = \delta''_s * a, \quad \frac{\partial^k a}{\partial x_s^k} \equiv a^k_s = \delta^k_s * a. \quad (3)$$

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Математическое выражение, формулирующее задачу расчета строительных конструкций, а именно дифференциальное уравнение равновесия конструкции или функционал изменения энергии при её деформировании можно записать в терминах алгебры свертки. При этом неизвестную функцию и её производные в дифференциальных уравнениях или подынтегральных выражениях в частных производных, формулирующих задачу, можно представлять операциями их свертки с обобщенной дельта-функцией  $\delta(x)$  или с её частными производными  $\delta^k(x)$  (см. (2), (3)). Например, дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{\partial}{\partial x_p} \left( a_{pq} \cdot \frac{\partial}{\partial x_q} u \right) + \\ &+ \sum_{p=1}^N \left( b_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial x_p} c_p \right) u + c_0 \cdot u = f, \end{aligned}$$

записывается в свертках:

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \delta'_p * a_{pq} \cdot \delta'_q * u + \\ &+ \sum_{p=1}^N (b_p \cdot \delta'_p * + \delta'_p * c_p) u + c_0 \cdot \delta * u = f, \end{aligned}$$

В частности, дифференциальные уравнения в перемещениях  $N$  - мерной задачи теории упругости (уравнения равновесия Ламе)

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u_j = F_i,$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ , а  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $u_j$  – компоненты неизвестной функции перемещений, в свертках имеют вид:

$$\sum_{j=1}^N \delta'_j * \mu \cdot \delta'_j * u_i + (\delta'_i * \lambda \cdot \delta'_j * + \delta'_j * \mu \cdot \delta'_i *) u_j = F_i,$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ .

## 3. ДИСКРЕТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретное представление формулировки задачи расчета конструкции с линейным изменением значения искомой функции от узла к узлу назначенной дискретной сетки (с линейной функцией формы). В таком случае действующие внутри ячеек дискретной сетки (внутри конечных элементов) функции формы (операции восполнения) будут иметь вид:

$$E + \xi_q d_q \quad \text{или в свертках} \quad \delta * + \xi_q \delta'_q * , \quad (5)$$

где  $E$  – тождественный оператор,  $d_q$  – оператор простой разности между узловыми значениями в направлении  $q$ ,  $\xi_q$  – локальная приведенная ордината внутри элемента сетки  $0 \leq \xi_q \leq 1$ ,  $N$  – размерность задачи. На-





### 5. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

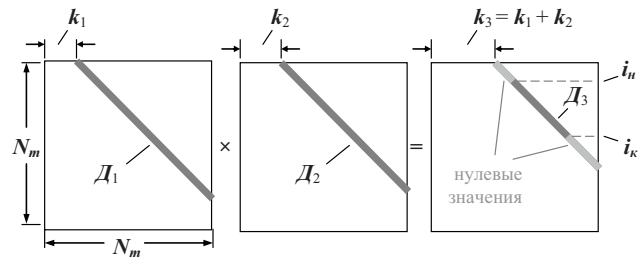
Матрица жесткости конечноэлементной (или, например, конечноразностной) расчетной схемы сооружения – матрицы коэффициентов при неизвестных, разрешающей системы линейных уравнений задачи – имеет характерную ленточную или блочно-ленточную структуру. При ее формировании параллелизация вычислений достигается заменой «построчных» матричных операций «поддиагональными», а именно, либо операциями над диагональю одной матрицы и диагональю другой матрицы, либо операциями над диагональю матрицы и вектором. Так, например, произведение двух матриц основано не на операции скалярного умножения строки одной матрицы на столбец другой, а на поэлементном умножении только ненулевой диагонали одной матрицы на ненулевую диагональ другой. Базовыми здесь оказываются две операции:

- произведение двух блоков матриц с одной ненулевой диагональю каждый;
- произведение блока матрицы с одной ненулевой диагональю на блок вектора.

Переход от этих двух операций, к операциям перемножения произвольных матриц и векторов осуществляется лишь путем суперпозиции. Безусловно большой вычислительный эффект здесь достигается в случаях, если участвующие в вычислениях блоки матриц – теплицевы.

Перемножением двух блоков матриц с одной ненулевой диагональю каждый получается блок матрицы тоже с одной ненулевой диагональю. Произвольный элемент диагонального результата вычисляется по формуле [5]:

$$D_3(i) = D_1(i+t_1) \cdot D_2(i+t_2), i = i_n \div i_k. \quad (9)$$



где

$$t_1 = \begin{cases} \frac{|k_3| - k_3}{2}, & \text{если } k_1 \geq 0, \\ -k_s, & \text{если } k_1 \leq 0, \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} \frac{|k_3| + k_3}{2}, & \text{если } k_2 \leq 0, \\ -k_s, & \text{если } k_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$i_n = \begin{cases} 1+k_s, & \text{если } k_1 < 0 \text{ и } k_2 > 0, \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$i_k = \begin{cases} N+k_s, & \text{если } k_1 > 0 \text{ и } k_2 < 0, \\ N-k_s, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$i_k = \begin{cases} N+k_s, & \text{если } k_1 > 0 \text{ и } k_2 < 0, \\ N-k_s, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$N_m = \prod_{s=1}^N m_s.$$

Если диагонали  $D_1$  или  $D_2$  состоят не из одинаковых чисел, т.е. если перемножаемые блоки не теплицевы, поэлементные произведения их элементов в соответствии с формулой (9) тоже вычисляются параллельно: Элемент блока вектора  $B_2$ , получающийся умножением элемента ненулевой диагонали  $D$  блока матрицы на элемент блока вектора  $B_1$ , вычисляется по формуле:

$$B_2(i) = D(i+t_1) \cdot B_1(i+t_2), \quad i = i_n \div i_k,$$

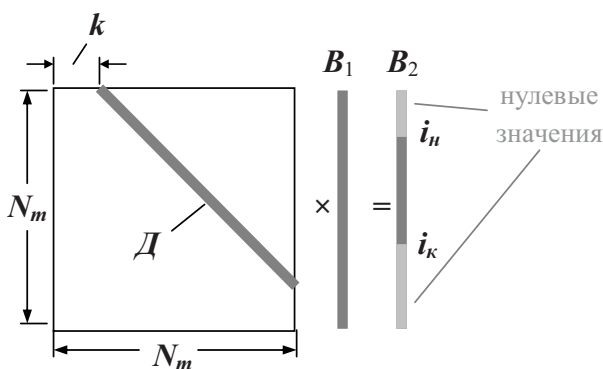
где

$$t_1 = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq 0, \\ 0, & \text{если } k \geq 0, \end{cases}$$

$$t_2 = k,$$

$$i_n = \begin{cases} 1-k, & \text{если } k \leq 0, \\ 1, & \text{если } k \geq 0, \end{cases}$$

$$i_k = \begin{cases} N-k, & \text{если } k \geq 0, \\ N, & \text{если } k \leq 0. \end{cases}$$



Таким образом, алгоритм формирования системы уравнений представляет собой последовательность элементарных операций над векторами (массивами чисел) одинаковой длины  $N_m = \prod_{s=1}^N m_s$ . Дискретный дифференциальный оператор задачи расчета конструкции, записанный в свертках, включает только поэлементные векторные распараллеливаемые операции, реализующие свертывание с простейшими дискретными функциями или перемножение с векторами - сеточными аналогами задаваемых функций. При этом свертки, в том числе свертки с дискретными аналогами дельта-функции и ее производных, соответствуют перемножению с теплицевыми или блочно-теплицевыми матрицами с весьма небольшим количеством ненулевых диагоналей. Используемая «поддиагональная» матричная алгебра, основанная на принципе суперпозиции, позволяет несложно избегать вычислительных действий над нулевыми диагоналями.

Используемая «поддиагональная» матричная алгебра, основанная на принципе суперпозиции, позволяет несложно избегать вычислительных действий над нулевыми диагоналями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Эскин Г.И. Эллиптические уравнения в свертках и их приложения. УМН, 1967 г., т.22, вып.1.
2. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986 г.
3. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987г.
4. Белостоцкий А.М., Васильев С.Л., Сидоров А.В. Параллельные вычисления в решении больших задач. Возможности лидирующих программных комплексов и собственные разработки. Сборник научных трудов МГСУ «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», М., 2010, стр. 99-105.
5. Сидоров В.Н. Векторный алгоритм численного решения краевых задач с использованием алгебры свертки. Вестник МГСУ, №3, 2006, стр. 148-157.
6. Сидоров А.В. Исследование возможностей современных доступных GPU решателей для выполнения параллельных вычислений. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 7, Issue 3, 2011, pp. 144-149.

Сидоров Александр Владимирович, аспирант, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;  
 тел/факс: +7 (499) 929-50-17;  
 E-mail: sidcmc@gmail.com, niccm@mgsu.ru

Alexander V. Sidorov, Junior research associate of Research and Educational Centre of computer modeling at MSUCE, 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia, +7 (499) 929-50-17;  
 E-mail: sidcmc@gmail.com;

