
International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 7, Issue 3 *2011*

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor, Vice-Rector
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Radii P. Fedorenko, Professor
Institute of Applied Mathematics
Russian Academy of Sciences
4, Miusskaya Pl., Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
ASV Publishing House
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University
of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Department of Mechanical
Engineering
Massachusetts Institute of
Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakonov, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosa
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics
and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Elena A. Korol, Professor
Department of Construction
Technology; Moscow State Univ. of
Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Tecnologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkechoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatiken und
Festigkeitslehre
Technische Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,
Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics
and Mathematics, Moscow State
Univ. of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Bernhard A. Schrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.
Via
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for
Technical Education, New Delhi,
India

Waclaw Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmers University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij} . \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

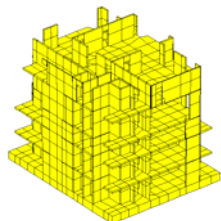


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette with** author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

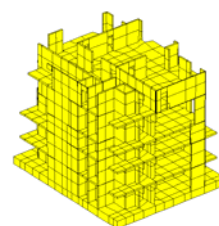


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- ¹⁾ Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*.
- ²⁾ Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: pavel.akimov2@gmail.com*.
- ³⁾ Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail: niccm@mgsu.ru*.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 7, Issue 3

2011

TABLE OF CONTENTS

Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева</i>	<u>11</u>
Операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>20</u>
Сравнительный анализ результатов численного и экспериментального моделирования турбулентного воздушного потока в зоне прямоугольной призмы <i>И.Н. Афанасьева</i>	<u>43</u>
Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом изменения жесткости балки по длине <i>Е.В. Барменкова, В.И. Андреев</i>	<u>50</u>
Исследование устойчивости четырехпанельной фермы в условиях статического и динамического нагружений с учетом упругопластических деформаций <i>М.М. Бегичев</i>	<u>55</u>
Расчетно-экспериментальное моделирование вибрационного состояния несущих конструкций многоэтажных зданий, вызванного движением поездов метрополитена <i>А.М. Белостоцкий, А.А. Аул, А.И. Нагибович</i>	<u>62</u>
Конечноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна <i>А.М. Белостоцкий, А.А. Аул, Р.Е. Унгаров, П.Е. Шевинский</i>	<u>70</u>
Верификация и аттестация программного комплекса «АСТРА-АЭС». Новый уровень прочностных расчетов трубопроводных систем <i>А.М. Белостоцкий, Г.А. Воронова, А.Л. Потапенко, О.Ю. Клепец, А.А. Аул, К.И. Островский</i>	<u>75</u>

Численное моделирование ламинарных и турбулентных течений в плоском канале с проницаемыми стенками <i>В.Н. Варанаев, Ф.М. Котов</i>	<u>82</u>
Верификация программных комплексов расчета и оптимизации конструкций <i>Т.Л. Дмитриева</i>	<u>95</u>
Верификация расчетной технологии «Монтаж» программного комплекса «SCAD» <i>О.В. Кабанцев</i>	<u>103</u>
Технология расчетного прогноза напряженно-деформируемого состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования <i>О.В. Кабанцев, В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.В. Перельмутер</i>	<u>110</u>
Применение вейвлет-преобразований при анализе акселерограмм <i>О.В. Мкртычев, А.А. Решетов</i>	<u>118</u>
Прогнозное математическое моделирование состояния социально значимых объектов города <i>Н.И. Сенин, П.А. Акимов, М.А. Захарченко</i>	<u>127</u>
Исследование возможностей современных доступных GPU решателей для выполнения параллельных вычислений <i>А.В. Сидоров</i>	<u>144</u>

ОПЕРАТОРНАЯ И ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧКИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ОСНОВНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева

ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящем докладе представлены операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете цилиндрической оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода [1].

Ключевые слова: операторные и вариационные формулировки, краевая задача, расчёт оболочек, дискретно-континуальный подход

OPERATIONAL AND VARIATIONAL FORMULATIONS OF BOUNDARY PROBLEM OF ANALYSIS OF SHELL WITH PIECEWISE-CONSTANT PHYSICAL AND GEOMETRICAL PARAMETERS IN BASIC DIRECTION WITHIN DISCRETE-CONTINUAL APPROACH

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Operational and variational formulations of boundary problem of analysis of shell with piecewise-constant physical and geometrical parameters in so-called basic direction within discrete-continual approach are under consideration in the distinctive paper.

Key words: operational and variational formulations, boundary problem, shell analysis, discrete-continual approach

1. Операторная и вариационная постановки задачи о расчете оболочки в рамках метода стандартной (расширенной) области.

Введем обозначения: α_1, α_2 – коэффициенты квадратичной формы срединной поверхности оболочки; $\partial_1 = \partial / \partial \alpha_1$; $\partial_2 = \partial / \partial \alpha_2$; k_1, k_2 – главные кривизны; a_1, a_2 – коэффициенты первой квадратичной формы. В качестве неизвестных функций, помимо перемещений $u_1(\alpha), u_2(\alpha), u_3(\alpha)$ срединной поверхности, примем еще и $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)$ – углы поворота нормали в направлениях α_1 и α_2 . Это позволяет отказаться от гипотезы нулевых деформаций сдвига $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$.

В соответствии с «классикой» [3] получим следующие геометрические уравнения – компоненты деформаций срединной поверхности:

$$\varepsilon_1 = a_1^{-1} \partial_1 u_1 + (a_1 a_2)^{-1} (\partial_2 a_1) u_2 + k_1 u_3; \quad \varepsilon_2 = (a_1 a_2)^{-1} (\partial_1 a_2) u_1 + a_2^{-1} \partial_2 u_2 + k_2 u_3; \quad (1.1)$$

$$\gamma = (a_1 / a_2) \partial_2 (u_1 / a_1) + (a_2 / a_1) \partial_1 (u_2 / a_2); \quad (1.2)$$

$$\chi_1 = a_1^{-1} \partial_1 \varphi_1 + (a_1 a_2)^{-1} (\partial_2 a_1) \varphi_2; \quad \chi_2 = (a_1 a_2)^{-1} (\partial_1 a_2) \varphi_1 + a_2^{-1} \partial_2 \varphi_2; \quad (1.3)$$

$$\chi_{12} = (a_1 / a_2) \partial_2 (\varphi_1 / a_1) + (a_2 / a_1) \partial_1 (\varphi_2 / a_2); \quad (1.4)$$

$$\gamma_{13} = -k_1 u_1 + a_1^{-1} \partial_1 u_3 + \varphi_1; \quad \gamma_{23} = -k_2 u_1 + a_2^{-1} \partial_2 u_3 + \varphi_2. \quad (1.5)$$

Физические зависимости имеют вид:

$$N_1 = K(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad N_2 = K(\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2); \quad N_{12} = hG\gamma; \quad Q_1 = hG\gamma_{13}; \quad Q_2 = hG\gamma_{23}; \quad (1.6)$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu \chi_2); \quad M_2 = D(\nu \chi_1 + \chi_2); \quad M_{12} = D(1 - \nu) \chi_{1,2}; \quad (1.7)$$

где $K = Eh / (1 - \nu^2)$; $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$; h – толщина оболочки; G – модуль сдвига; E – модуль упругости материала оболочки; ν – коэффициент Пуассона материала оболочки; N_1 и N_2 – нормальные усилия; $N_{12} = N_{21}$ – сдвигающие усилия; M_1 и M_2 – изгибающие моменты; $M_{12} = M_{21}$ – крутящие моменты; Q_1 и Q_2 – поперечные силы;

Операторная постановка задачи в рамках метода стандартной (расширенной) области записывается следующим образом [2]:

$$\begin{cases} -\partial_1(\theta a_2 N_1) + \theta(\partial_1 a_2) N_2 - a_1^{-1} \partial_2(\theta a_1^2 N_{12}) - k_1 a_1 a_2 \theta Q_1 = \theta a_1 a_2 q_1 \\ \theta(\partial_2 a_1) N_1 - \partial_2(\theta a_1 N_2) - a_2^{-1} \partial_1(\theta a_2^2 N_{12}) - k_2 a_1 a_2 \theta Q_2 = \theta a_1 a_2 q_2 \\ \theta k_1 a_1 a_2 N_1 + \theta k_2 a_1 a_2 N_2 - \partial_1(\theta a_2 Q_1) - \partial_2(\theta a_1 Q_2) = \theta a_1 a_2 q_3 \\ -\partial_1(\theta a_2 M_1) + \theta(\partial_1 a_2) M_2 - a_1^{-1} \partial_2(\theta a_1^2 M_{12}) + a_1 a_2 \theta Q_1 = 0 \\ \theta(\partial_2 a_1) M_1 - \partial_2(\theta a_1 M_2) - a_2^{-1} \partial_1(\theta a_2^2 M_{12}) + a_1 a_2 \theta Q_2 = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где θ – характеристическая функция области, занимаемой оболочкой; q_1 , q_2 , q_3 – проекции интенсивности нагрузки на направления α_1 , α_2 и z (z – координата по толщине оболочки).

Соответствующая вариационная постановка имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{u}) = 0.5 \iint_{\omega} \theta (N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_{12} \gamma + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + M_{12} \chi_{12} + Q_1 \gamma_{13} + Q_2 \gamma_{23}) a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ - \iint_{\omega} \theta (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3) a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \bar{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2]^T. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Представленные постановки по сравнению с «классическими» описывают более широкий класс задач и имеют производные не выше второго порядка в операторе и первого в функционале, но количество неизвестных увеличивается до пяти.

Рассмотрим частный случай цилиндрической оболочки. Пусть координата $\alpha_1 = x_1$ изменяется вдоль дуги, $\alpha_2 = x_2$ – вдоль образующей, а $z = x_3$ – в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки. Тогда

$$a_1 = a_2 = 1; \quad k_1 = 1/R(x_1); \quad k_2 = 0; \quad \partial_1 = \partial / \partial x_1; \quad \partial_2 = \partial / \partial x_2. \quad (1.10)$$

Операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

С учетом (1.10) соотношения (1.1)-(1.5) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \partial_1 u_1 + R^{-1} u_3; \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2; \quad \gamma = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2; \quad \chi_1 = \partial_1 \varphi_1; \quad \chi_2 = \partial_2 \varphi_2; \\ \chi_{12} = \partial_2 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_2; \quad \gamma_{13} = -R^{-1} u_1 + \partial_1 u_3 + \varphi_1; \quad \gamma_{23} = \partial_2 u_3 + \varphi_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Операторная постановка задачи:

$$\begin{cases} -\partial_1(\theta N_1) - \partial_2(\theta N_{12}) - \theta R^{-1} Q_1 = \theta q_1 \\ -\partial_2(\theta N_2) - \partial_1(\theta N_{12}) = \theta q_2 \\ \theta R^{-1} N_1 - \partial_1(\theta Q_1) - \partial_2(\theta Q_2) = \theta q_3 \\ -\partial_1(\theta M_1) - \partial_2(\theta M_{12}) + \theta Q_1 = 0 \\ -\partial_2(\theta M_2) - \partial_1(\theta M_{12}) + \theta Q_2 = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

Вариационная постановка задачи:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{u}) = 0.5 \cdot \iint_{\omega} \theta (N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_{12} \gamma + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + M_{12} \chi_{12} + Q_1 \gamma_{13} + Q_2 \gamma_{23}) dx_1 dx_2 - \\ - \iint_{\omega} \theta (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. Некоторые предварительные обозначения.

Введем обозначения: Ω – область, занимаемая оболочкой; x_2 – переменная, вдоль которой физико-геометрические параметры конструкции меняются кусочно-постоянно (т.е. отвечающая основному направлению; вдоль x_1 эти параметры могут меняться произвольно); l_2 – длина конструкции по основному направлению ($x_2 \in [0, l_2]$); $x_{2,k}^b$, $k = 1, \dots, n_k$ – координаты сечений, где задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров конструкции); Ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – соответствующие фрагменты, выделенные из Ω сечениями $x_2 = x_{2,k}^b$ и $x_2 = x_{2,k+1}^b$; h_k – толщина оболочки на участке Ω_k ($x_3 \in [0, h_k]$); Γ_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – границы фрагментов Ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$; $\theta_k = \theta_k(x_1, x_2, x_3)$ – характеристическая функция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ [1, 2],

$$\theta_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin \Omega_k; \end{cases} \quad \delta_{\Gamma,k}(x_1, x_2, x_3) = \partial\theta_k / \partial\bar{n}_k; \quad (2.1)$$

$\bar{n}_k = [n_{k,1} \ n_{k,2} \ n_{k,3}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе Γ_k ; ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ – расширенные области, окаймляющие Ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$;

$$\partial_s = \partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2; \quad \partial_s^* = -\partial / \partial x_s, \quad s = 1, 2. \quad (2.2)$$

3. Операторная и вариационная постановки задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами в рамках метода стандартной (расширенной) области.

Рассмотрим операторную постановку задачи в области ω_k . Имеем:

$$\begin{cases} -\partial_1(\theta_k N_1^{(k)}) - \partial_2(\theta_k N_{12}^{(k)}) - \theta_k R^{-1} Q_1^{(k)} = \theta_k q_1^{(k)} \\ -\partial_2(\theta_k N_2^{(k)}) - \partial_1(\theta_k N_{12}^{(k)}) = \theta_k q_2^{(k)} \\ \theta_k R^{-1} N_1^{(k)} - \partial_1(\theta_k Q_1^{(k)}) - \partial_2(\theta_k Q_2^{(k)}) = \theta_k q_3^{(k)} \\ -\partial_1(\theta_k M_1^{(k)}) - \partial_2(\theta_k M_{12}^{(k)}) + \theta_k Q_1^{(k)} = 0 \\ -\partial_2(\theta_k M_2^{(k)}) - \partial_1(\theta_k M_{12}^{(k)}) + \theta_k Q_2^{(k)} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $q_1^{(k)}$, $q_2^{(k)}$, $q_3^{(k)}$ – проекции интенсивности нагрузки на направления x_1 , x_2 и x_3 ; $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$ и $N_{12}^{(k)} = N_{21}^{(k)}$ – нормальные и сдвигающие усилия в фрагменте Ω_k ; $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ и $M_{12}^{(k)} = M_{21}^{(k)}$ – изгибающие и крутящие моменты в фрагменте Ω_k ; $Q_1^{(k)}$ и $Q_2^{(k)}$ – поперечные силы в фрагменте Ω_k ,

$$N_1^{(k)} = K_k(\varepsilon_1^{(k)} + \nu_k \varepsilon_2^{(k)}); \quad N_2^{(k)} = K_k(\nu_k \varepsilon_1^{(k)} + \varepsilon_2^{(k)}); \quad N_{12}^{(k)} = h_k G_k \gamma_k; \quad (3.2)$$

$$M_1^{(k)} = D_k(\chi_1^{(k)} + \nu_k \chi_2^{(k)}); \quad M_2^{(k)} = D_k(\nu_k \chi_1^{(k)} + \chi_2^{(k)}); \quad M_{12}^{(k)} = D_k(1 - \nu_k)\chi_{12}^{(k)}; \quad (3.3)$$

$$Q_1^{(k)} = h_k G_k \gamma_{13}^{(k)}; \quad Q_2^{(k)} = h_k G_k \gamma_{23}^{(k)}, \quad (3.4)$$

где $K_k = E_k h_k / (1 - \nu_k^2)$; $D_k = E_k h_k^3 / [12(1 - \nu_k^2)]$; h_k – толщина фрагмента Ω_k оболочки; G_k – модуль сдвига фрагмента Ω_k оболочки; E_k и ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала фрагмента Ω_k оболочки;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(k)} &= \partial_1 u_1^{(k)} + R^{-1} u_3^{(k)}; \quad \varepsilon_2^{(k)} = \partial_2 u_2^{(k)}; \quad \gamma^{(k)} = \partial_2 u_1^{(k)} + \partial_1 u_2^{(k)}; \quad \chi_1^{(k)} = \partial_1 \varphi_1^{(k)}; \\ \chi_2^{(k)} &= \partial_2 \varphi_2^{(k)}; \quad \chi_{12}^{(k)} = \partial_2 \varphi_1^{(k)} + \partial_1 \varphi_2^{(k)}; \quad \gamma_{13}^{(k)} = -R^{-1} u_1^{(k)} + \partial_1 u_3^{(k)} + \varphi_1^{(k)}; \\ \gamma_{23}^{(k)} &= \partial_2 u_3^{(k)} + \varphi_2^{(k)}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\varepsilon_1^{(k)}$, $\varepsilon_2^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$, $\chi_1^{(k)}$, $\chi_2^{(k)}$, $\chi_{12}^{(k)}$, $\gamma_{13}^{(k)}$, $\gamma_{23}^{(k)}$ – компоненты деформаций срединной поверхности фрагмента Ω_k оболочки; $u_1^{(k)}(x_1, x_2)$, $u_2^{(k)}(x_1, x_2)$, $u_3^{(k)}(x_1, x_2)$ – перемещения срединной поверхности фрагмента Ω_k оболочки; $\varphi_1^{(k)}(x_1, x_2)$, $\varphi_2^{(k)}(x_1, x_2)$ – углы поворота нормали в направлениях x_1 и x_2 .

Постановке (3.1) соответствует вариационная постановка

$$\Phi(\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \iint_{\omega_k} f_k(\bar{u}_k) dx_1 dx_2, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} f_k &= 0.5 \cdot \theta_k [N_1^{(k)} \varepsilon_1^{(k)} + N_2^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} + N_{12}^{(k)} \gamma^{(k)} + M_1^{(k)} \chi_1^{(k)} + M_2^{(k)} \chi_2^{(k)} + M_{12}^{(k)} \chi_{12}^{(k)} + \\ &\quad + Q_1^{(k)} \gamma_{13}^{(k)} + Q_2^{(k)} \gamma_{23}^{(k)}] - \theta_k [q_1^{(k)} u_1^{(k)} + q_2^{(k)} u_2^{(k)} + q_3^{(k)} u_3^{(k)}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{где} \quad \bar{u}_k = [u_1^{(k)} \quad u_2^{(k)} \quad u_3^{(k)} \quad \varphi_1^{(k)} \quad \varphi_2^{(k)}]^T; \quad \bar{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2]^T. \quad (3.8)$$

4. Операторная и вариационная постановки задачи относительно перемещений и углов поворота.

В матричном виде (3.1)-(3.5) переписываются таким образом:

$$\bar{\varepsilon}_k = B \bar{u}_k; \quad \bar{N}_k = C_k \bar{\varepsilon}_k; \quad A \theta_k \bar{N}_k = \bar{F}_k, \quad (4.1)$$

Операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

$$\text{где } \bar{\varepsilon}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(k)} \\ \varepsilon_2^{(k)} \\ \gamma^{(k)} \\ \chi_1^{(k)} \\ \chi_2^{(k)} \\ \chi_{12}^{(k)} \\ \gamma_{13}^{(k)} \\ \gamma_{23}^{(k)} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \\ -R^{-1} & 0 & \partial_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \bar{N}_k = \begin{bmatrix} N_1^{(k)} \\ N_2^{(k)} \\ N_{12}^{(k)} \\ M_1^{(k)} \\ M_2^{(k)} \\ M_{12}^{(k)} \\ Q_1^{(k)} \\ Q_2^{(k)} \end{bmatrix}; \bar{F}_k = \theta_k \begin{bmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \\ q_3^{(k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.2)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} c_1^{(k)} & c_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2^{(k)} & c_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^{(k)} & c_5^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5^{(k)} & c_4^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^{(k)} \end{bmatrix}; A = B^*; \quad (4.3)$$

где B^* – оператор, сопряженный к B ;

$$c_1^{(k)} = K_k; c_2^{(k)} = K_k \nu_k; c_3^{(k)} = h_k G_k; c_4^{(k)} = D_k; c_5^{(k)} = D_k \nu_k; c_6^{(k)} = D_k (1 - \nu_k); \quad (4.4)$$

Подставляя первое уравнение из (4.1) во второе и далее полученное в третье, получаем операторную постановку относительно перемещений и углов поворота:

$$L_k \bar{u}_k = \bar{F}_k, \quad \text{где } L_k = B^* \bar{C}_k B; \quad \bar{C}_k = \theta_k C_k. \quad (4.5)$$

Формулы определения элементов оператора $L_k = \{l_{k,i,j}\}_{i,j=1,\dots,5}$ имеют вид:

$$l_{k,1,5} = l_{k,2,4} = l_{k,2,5} = l_{k,4,2} = l_{k,5,1} = l_{k,5,2} = 0; \quad (4.6)$$

$$l_{k,1,1} = \partial_1^* \bar{c}_1^{(k)} \partial_1 + \partial_2^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_2 + \bar{c}_3^{(k)} R^{-2}; \quad l_{k,1,2} = \partial_1^* \bar{c}_2^{(k)} \partial_2 + \partial_2^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_1; \\ l_{k,1,3} = \partial_1^* \bar{c}_1^{(k)} R^{-1} - \bar{c}_3^{(k)} R^{-1} \partial_1; \quad l_{k,1,4} = -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1}; \quad (4.7)$$

$$l_{k,2,1} = \partial_2^* \bar{c}_2^{(k)} \partial_1 + \partial_1^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_2; \quad l_{k,2,2} = \partial_2^* \bar{c}_1^{(k)} \partial_2 + \partial_1^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_1; \quad l_{k,2,3} = \partial_2^* \bar{c}_2^{(k)} R^{-1}; \quad (4.8)$$

$$l_{k,3,1} = \bar{c}_1^{(k)} R^{-1} \partial_1 - \partial_1^* \bar{c}_3^{(k)} R^{-1}; \quad l_{k,3,2} = \bar{c}_2^{(k)} R^{-1} \partial_2; \\ l_{k,3,3} = \bar{c}_1^{(k)} R^{-2} + \partial_1^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_1 + \partial_2^* \bar{c}_3^{(k)} \partial_2; \quad l_{k,3,4} = \partial_1^* \bar{c}_3^{(k)}; \quad l_{k,3,5} = \partial_2^* \bar{c}_3^{(k)}; \quad (4.9)$$

$$l_{k,4,1} = -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1}; \quad l_{k,4,3} = \bar{c}_3^{(k)} \partial_1; \quad l_{k,4,4} = \partial_1^* \bar{c}_4^{(k)} \partial_1 + \partial_2^* \bar{c}_6^{(k)} \partial_2 + \bar{c}_3^{(k)}; \\ l_{k,4,5} = \partial_1^* \bar{c}_5^{(k)} \partial_2 + \partial_2^* \bar{c}_6^{(k)} \partial_1; \quad (4.10)$$

$$l_{k,5,3} = \bar{c}_3^{(k)} \partial_2; \quad l_{k,5,4} = \partial_2^* \bar{c}_5^{(k)} \partial_1 + \partial_1^* \bar{c}_6^{(k)} \partial_2; \quad l_{k,5,5} = \partial_2^* \bar{c}_4^{(k)} \partial_2 + \partial_1^* \bar{c}_6^{(k)} \partial_1 + \bar{c}_3^{(k)}, \quad (4.11)$$

где
$$\bar{c}_i^{(k)} = \theta_k c_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4.12)$$

Перепишав (3.7) в матричном виде (см. формулы (4.1)-(4.3)), получим вариационную постановку относительно перемещений и углов поворота:

$$f_k(\bar{u}_k) = 0.5 \cdot (\theta_k \bar{N}_k, \bar{\varepsilon}_k) - (\bar{F}_k, \bar{u}_k) = 0.5 \cdot (B^* \bar{C}_k B \bar{u}_k, \bar{u}_k) - (\bar{F}_k, \bar{u}_k). \quad (4.13)$$

Операторы B и B^* , очевидно, можно представить в виде:

$$B = \partial_2 B_1 + B_0; \quad B^* = \partial_2^* B_1^* + B_0^*, \quad (4.14)$$

где $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_0 = \partial_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.15)$

B_1^* и B_0^* – операторы, сопряженные к B_1 и B_0 соответственно.

С учетом разложений (4.14) вместо (4.13) будем иметь

$$\begin{aligned} L_k = B^* \bar{D}_k B &= (\partial_2^* B_1^* + B_0^*) \bar{D}_k (\partial_2 B_1 + B_0) = \\ &= \partial_2^* B_1^* \bar{D}_k B_1 \partial_2 + \partial_2^* B_1^* \bar{D}_k B_0 + B_0^* \bar{D}_k B_1 \partial_2 + B_0^* \bar{D}_k B_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

5. Представление определяющего оператора краевой задачи с выделением основного направления.

Учитывая кусочно-постоянный характер изменения параметров конструкции по основному направлению (вдоль x_2), можем записать:

$$L_k = -L_{k,vv} \partial_2^2 + \tilde{L}_{k,uv} \partial_2 + L_{k,uu}, \quad (5.1)$$

где
$$\tilde{L}_{k,uv} = L_{k,uv} - L_{k,vu}; \quad L_{k,vu} = L_{k,uv}^*; \quad \tilde{L}_{k,uv}^* = -\tilde{L}_{k,uv}; \quad (5.2)$$

$$L_{k,vv} = B_1^* \bar{C}_k B_1 = - \begin{bmatrix} \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_6^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_4^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (5.3)$$

Операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

$$L_{k,uv} = B_0^* \bar{C}_k B_1 = \partial_1^* \begin{bmatrix} 0 & \bar{c}_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_5^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_6^{(k)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_2^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.4)$$

$$L_{k,vu} = B_1^* \bar{C}_k B_0 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_6^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_5^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \partial_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_2^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.5)$$

$$L_{k,uu} = B_0^* \bar{C}_k B_0 = \begin{bmatrix} \bar{c}_1^{(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_4^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_6^{(k)} \end{bmatrix} \partial_1 + \partial_1^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{c}_1^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_1^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_1 + \begin{bmatrix} \bar{c}_3^{(k)} R^{-2} & 0 & 0 & -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_1^{(k)} R^{-2} & 0 & 0 \\ -\bar{c}_3^{(k)} R^{-1} & 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_3^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

6. Операторная постановка задачи с выделением основного направления.

С учетом (5.1) k -е уравнение операторной постановки (4.5) принимает вид

$$-L_{k,vv} \partial_2^2 \bar{u}_k + \tilde{L}_{k,uv} \partial_2 \bar{u}_k + L_{k,uu} \bar{u}_k = \bar{F}_k. \quad (6.1)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= [v_1^{(k)} \quad v_2^{(k)} \quad v_3^{(k)} \quad \mathcal{G}_1^{(k)} \quad \mathcal{G}_2^{(k)}]^T = \\ &= [\partial_2 u_1^{(k)} \quad \partial_2 u_2^{(k)} \quad \partial_2 u_3^{(k)} \quad \partial_2 \varphi_1^{(k)} \quad \partial_2 \varphi_2^{(k)}]^T = \partial_2 \bar{u}_k = \bar{u}'_k. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Принимая во внимание (6.1) и (6.2), после преобразований получим:

$$\bar{U}'_k = \tilde{L}_k \bar{U}_k + \bar{F}_k, \quad k = 2, \dots, n_k - 1, \quad (6.3)$$

$$\text{где } \tilde{L}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_{k,vv}^{-1} L_{k,uu} & L_{k,vv}^{-1} \tilde{L}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ L_{k,vv}^{-1} \bar{F}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{U}_k = [(\bar{u}_k)^T \quad (\bar{v}_k)^T]^T; \quad (6.4)$$

$$\bar{U}'_k = \partial_2 \bar{U}_k = [\partial_2(\bar{u}_k)^T \quad \partial_2(\bar{v}_k)^T]^T = [(\bar{u}'_k)^T \quad (\bar{v}'_k)^T]^T; \quad \bar{v}'_k = \partial_2 \bar{v}_k; \quad (6.5)$$

E – тождественный оператор.

Уравнения (6.3) следует дополнить граничными условиями вида

$$B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (6.6)$$

$$B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (6.7)$$

где $B_k^-, B_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, B_1^+$ и $B_{n_k}^-$ – матрицы коэффициентов граничных условий, 10-го порядка; $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_1^+$ и $\bar{g}_{n_k}^-$ – векторы правых частей граничных условий, десятимерные.

Объединяя (6.3), (6.6) и (6.7) получаем операторную постановку многоточечной краевой задачи с выделением основного направления:

$$\begin{cases} \bar{U}'_k = \tilde{L}_k \bar{U}_k + \tilde{F}_k, \quad x \in (x_{2,k}^b, x_{2,k+1}^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{U}_{k-1}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_k(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ B_1^+ \bar{U}_1(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_{n_k-1}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (6.8)$$

7. Вариационная постановка задачи с выделением основного направления.

На основании (5.1)-(5.6) переписываем (3.6), (4.13) в виде

$$\Phi(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \iint_{\omega_k} f_k(\bar{u}_k, \bar{v}_k) dx_1 dx_2, \quad (7.1)$$

где $\bar{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T = [\partial_2 u_1 \quad \partial_2 u_2 \quad \partial_2 u_3 \quad \partial_2 \varphi_1 \quad \partial_2 \varphi_2]^T = \partial_2 \bar{u}; \quad (7.2)$

$$f_k = 0.5 \cdot [(L_{k,vv} \bar{v}_k, \bar{v}_k) + (L_{k,vu} \bar{u}_k, \bar{v}_k) + (L_{k,uv} \bar{v}_k, \bar{u}_k) + (L_{k,uu} \bar{u}_k, \bar{u}_k)] - (\bar{F}_k, \bar{u}_k). \quad (7.3)$$

Решением поставленной задачи является точка (функция) условного экстремума этого функционала с условием (6.2) при соблюдении (6.7)-(6.8).

Следует отметить, что постановка (7.1)-(7.3) также представима в виде

$$\Phi(\bar{U}) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \iint_{\omega_k} f_k(\bar{U}_k) dx_1 dx_2, \quad (7.4)$$

где $\bar{U} = [\bar{u}^T \quad \bar{v}^T]^T; \quad \Pi_k(\bar{U}_k) = 0.5 \cdot (\tilde{L}_k \bar{U}_k, \bar{U}_k) - (\tilde{F}_k, \bar{U}_k); \quad (7.5)$

$$\tilde{L}_k = \begin{bmatrix} L_{k,uu} & L_{k,uv} \\ L_{k,vu} & L_{k,vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{k,uu} & L_{k,uv} \\ L_{k,uv}^* & L_{k,vv} \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}_k = \begin{bmatrix} \bar{F}_k \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Замечания. Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.

2. Грант 2.3.9 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.

Операторная и вариационная постановки краевой задачи о расчете оболочки с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода

3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).

4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных зданий и сооружений сложной архитектурной формы», выполняемая в рамках Тематического плана ГОУ ВПО МГСУ (проект 5.1.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010. – 336 с.
- [2] *Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.* Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
- [3] *Колкунов Н.В.* Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.

Сведения об авторах.

Акимов Павел Алексеевич, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», профессор кафедры информатики и прикладной математики, доктор технических наук, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, 183-57-42; e-mail: pavel.akimov@gmail.com, pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», профессор кафедры информатики и прикладной математики, кандидат технических наук, доцент; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, 183-33-01; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МНОГОУРОВНЕВЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящем докладе представлены математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформированного состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа.

Ключевые слова: многоуровневые численные методы, вейвлет-анализ, расчет конструкций.

FOUNDAMENTALS OF WAVELET-BASED MULTILEVEL NUMERICAL METHODS OF LOCAL STRUCTURAL ANALYSIS

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Fundamentals of wavelet-based multilevel numerical methods of local structural analysis are under consideration in the distinctive paper.

Key words: multilevel numerical methods, wavelet-based methods, structural analysis.

Введение. Как известно, при решении задач расчета строительных конструкций, зданий и сооружений всегда возникает необходимость эффективного качественного и количественного анализа (в частности, многоуровневого) напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемого объекта. Многоуровневый анализ НДС позволяет численно оценить такие вопросы как принцип Сен-Венана и дать характеристику степени локальности разного рода явлений, что особенно актуально в связи с тем, что многие дефекты и разрушения носят локальный характер, а общая несущая способность, связанная с состоянием предельного равновесия, определяется глобальным поведением конструкции [1, 2, 3]. Мощным, бурно развивающимся в настоящее время средством раздельного анализа локального и глобального состояний является вейвлет-анализ, который во многих областях приходит на смену анализу Фурье [4, 5, 12, 13]. Для анализа высокочастотных составляющих решения здесь, разумеется, используется более сильная локализация (в целях повышения точности), а для низкочастотных – более слабая (для получения полной информации).

Дискретные преобразования Хаара являются одним из наиболее эффективных средств вейвлет-анализа. Связанные с базисом Хаара вычисления, необходимые для решения практических задач строительной механики и математической физики, характеризуются простыми и эко-

Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа номичными алгоритмами. В настоящей статье представлены и апробированы алгоритмы прямого и обратного одномерных и двумерных вейвлет-преобразований по базису Хаара.

1. Быстрые алгоритмы одномерных вейвлет-преобразований по базису Хаара

1.1. Понятие о дискретных функциях Хаара на отрезке.

Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$, где a и b – соответственно координата начала и конца отрезка. Разделим отрезок $[a, b]$ на $(n - 1)$ равных частей, где $n = 2^M$, M – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)). Координаты точек деления x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, очевидно, определяются по формуле (ниже h – шаг деления)

$$x_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.1)$$

где

$$h = (b - a)/(n - 1). \quad (1.1.2)$$

Ненормированные функции Хаара показаны на рис. 1.1.1 (по оси абсцисс отложены номера узлов точек разбиения отрезка).

Семейство функций Хаара $\psi_j^p(i)$, $p = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N_p$ ($\psi_j^p(i)$ – j -ая функция Хаара уровня p), определенных в точках разбиения отрезка с номерами $i = 1, 2, \dots, n$, задается следующими формулами

$$\psi_j^p(i) = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} 1, & 2^{p+1}(j-1) < i \leq 2^p(2j-1) \\ -1, & 2^p(2j-1) < i \leq 2^{p+1}j \\ 0, & i \leq 2^{p+1}(j-1) \cup i > 2^{p+1}j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq p < M; \quad (1.1.3)$$

$$\psi_1^M(i) = \frac{1}{\alpha_M}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.4)$$

где N_p – количество функций Хаара на p -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (1.1.5)$$

α_p – норма функции Хаара на p -ом уровне, т.е.

$$\forall j = 1, 2, \dots, N_p \quad \|\psi_j^p\| = \alpha_p, \quad \alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Можно показать, что указанное семейство функций Хаара образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в точках $i = 1, 2, \dots, n$.

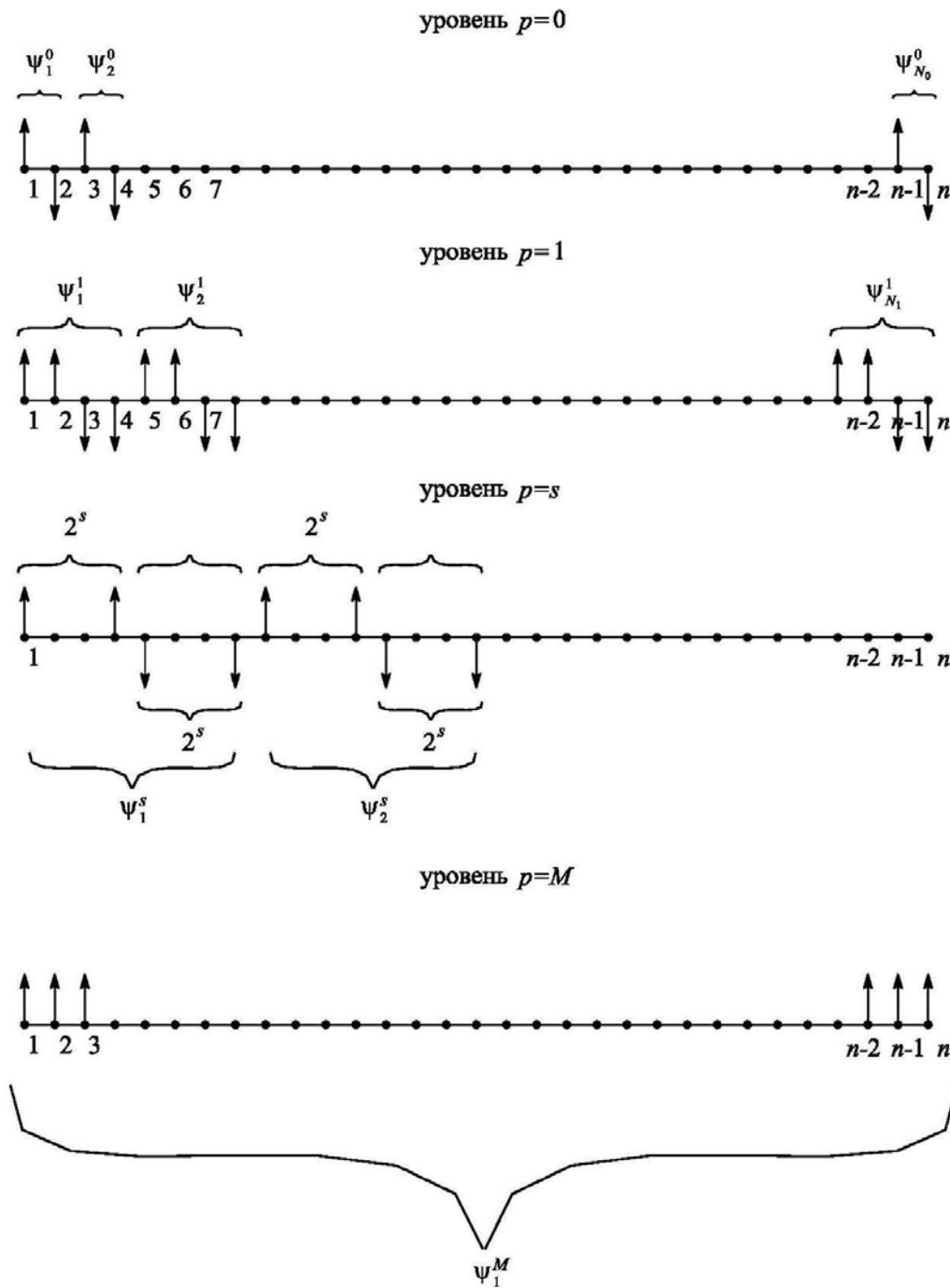


Рис. 1.1.1. Дискретные функции Хаара на отрезке.

1.2. Понятие о разложении функции по базису Хаара (прямое вейвлет-преобразование – анализ).

Рассмотрим произвольную функцию f , определенную в точках разбиения отрезка с номерами $i = 1, 2, \dots, n$. Функция $f(i)$ может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \tag{1.2.1}$$

где v_j^p , $j=1, 2, \dots, N_p$, $p=1, 2, \dots, M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_j^p = (\bar{f}, \bar{\psi}_j^p) = \sum_{i=1}^n f(i) \psi_j^p(i), \quad j=1, 2, \dots, N_p, \quad p=1, 2, \dots, M, \quad (1.2.2)$$

а запись типа (\bar{y}, \bar{z}) обозначает соответствующую операцию скалярного произведения функций \bar{y} и \bar{z} ; \bar{f} и $\bar{\psi}_j^p$ – n -мерные векторы,

$$\bar{f} = [f(1) \quad f(2) \quad \dots \quad f(n)]^T; \quad (1.2.3)$$

$$\bar{\psi}_j^p = [\psi_j^p(1) \quad \psi_j^p(2) \quad \dots \quad \psi_j^p(n)]^T. \quad (1.2.4)$$

В матрично-векторном виде формулу (1.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\bar{v} = DQ^0 \bar{f}, \quad (1.2.5)$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица с нормами соответствующих базисных функций на диагонали; \bar{v} – вектор, составленный из искомых коэффициентов разложения функции $f(i)$ по базису Хаара.

Определяющие формулы для всех входящих в (1.2.5) матриц и векторов, в частности, для случая $n=16$ приведены ниже.

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.2.6)$$

$$\bar{v} = [v_1^0 \ v_2^0 \ v_3^0 \ v_4^0 \ v_5^0 \ v_6^0 \ v_7^0 \ v_8^0 \ v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1 \ v_4^1 \ v_1^2 \ v_2^2 \ v_1^3 \ v_1^4]^T; \quad (1.2.7)$$

$$D = \text{diag}\{\alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}. \quad (1.2.8)$$

Для общего случая произвольного n , очевидно, несложно записать аналогичные формулы.

1.3. Об одном представлении разложения функции по базису Хаара.

При численной реализации разложения дискретной функции по базису Хаара зачастую удобнее перейти от (1.2.1) к представлению вида:

$$f(i) = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(i), \quad (1.3.1)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ – глобальные индексы; коэффициенты v_j^p и f_k , а также функции $\psi_j^p(i)$ и $\varphi_k(i)$ связаны между собой следующими формулами:

$$f_k = v_j^p, \quad \varphi_k(i) = \psi_j^p(i), \quad \text{где } k = j + \sum_{q=0}^{p-1} N_q. \quad (1.3.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$N_{tot}^{-1} = 0; \quad N_{tot}^s = \sum_{q=0}^s N_q, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (1.3.3)$$

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов p и j по глобальному индексу k :

1. Задаемся значением $s = M$.
2. Вычисляем значение N_{tot}^s .
3. Вычисляем значение χ_s по формуле

$$\chi_s = \left[\frac{k-1}{N_{tot}^s} \right], \quad (1.3.4)$$

где запись типа $[a]$ обозначает целую часть числа a .

4. Если $\chi_s = 1$, то индексы p и j определяются по формулам

$$p = s + 1; \quad j = k - N_{tot}^s. \quad (1.3.5)$$

Если $s > 0$ и $\chi_s = 0$, то уменьшаем значение s на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если $s = 0$ и $\chi_s = 0$, то следует положить

$$p = 0; \quad j = k. \quad (1.3.6)$$

1.4. Алгоритм вычисления коэффициентов разложения дискретной функции по базису Хаара (прямого вейвлет-преобразование – анализ).

Очевидно, что непосредственное использование матричных операций (1.2.5) для вычисления вектора коэффициентов разложения не является эффективным с точки зрения ко-

личества операций (порядка n^2). А.Б. Золотовым [6-9] был предложен алгоритм прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара, позволяющий вычислить коэффициенты разложения за $m \cdot n$ операций, где m – некоторое целое число, не зависящее от n . Рассмотрим ниже этот алгоритм.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} u_j^0 &= f(j), \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha_0 &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\}, \quad p = 0; \quad (1.4.1)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M - 1$ производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} v_j^p &= \frac{1}{\alpha_p} (u_{2j-1}^p - u_{2j}^p) \\ u_j^{p+1} &= u_{2j-1}^p + u_{2j}^p \\ \alpha_{p+1} &= \sqrt{2} \alpha_p \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad \left. \right\}, \quad p = 0, 1, \dots, M - 1; \quad (1.4.2)$$

При $p = M$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_M &= \sqrt{n} \\ v_1^M &= \frac{1}{\alpha_M} u_1^M \end{aligned} \right\}, \quad p = M, \quad (1.4.3)$$

где u_j^p , $j = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, 2, \dots, M$ – вспомогательные величины.

Введем следующие обозначения:

$$T_{tot}^{-1} = 0; \quad T_{tot}^s = 2 \cdot N_{tot}^s, \quad s = 1, 2, \dots, M - 1; \quad T_{tot}^M = T_{tot}^{M-1} + 1. \quad (1.4.4)$$

С учетом представления в форме (1.3.1) можем скорректировать алгоритм (1.4.1)-(1.4.3).

Пусть

$$\left. \begin{aligned} g_j &= f(j), \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \alpha_0 &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\}, \quad p = 0; \quad (1.4.5)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M - 1$ производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} f_{N_{tot}^{p-1}+j} &= \frac{1}{\alpha_p} (g_{T_{tot}^{p-1}+2j-1} - g_{T_{tot}^{p-1}+2j}) \\ g_{T_{tot}^p+j} &= g_{T_{tot}^{p-1}+2j-1} + g_{T_{tot}^{p-1}+2j} \\ \alpha_{p+1} &= \sqrt{2} \alpha_p \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad \left. \right\}, \quad p = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (1.4.6)$$

При $p = M$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_M &= \sqrt{n} \\ f_n &= \frac{1}{\alpha_M} g_{T_{tot}} \end{aligned} \right\}, \quad p = M, \quad (1.4.7)$$

где $g_k, k = 1, 2, \dots, T_{tot}$ – вспомогательные величины;

$$T_{tot} = 2 \cdot n - 1. \quad (1.4.8)$$

Рассмотрим ниже простейший пример разложения функции

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 1$$

в ряд по базису Хаара на отрезке $x \in [0, 3]$.

Как видно из рис. 1.4.1, имеет место полное соответствие значений исходной функции в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ со значениями разложения функции в ряд по базису Хаара (для построения этого разложения использовался алгоритм А.Б. Золотова прямого вейвлет-преобразования при значении $M = 6$).

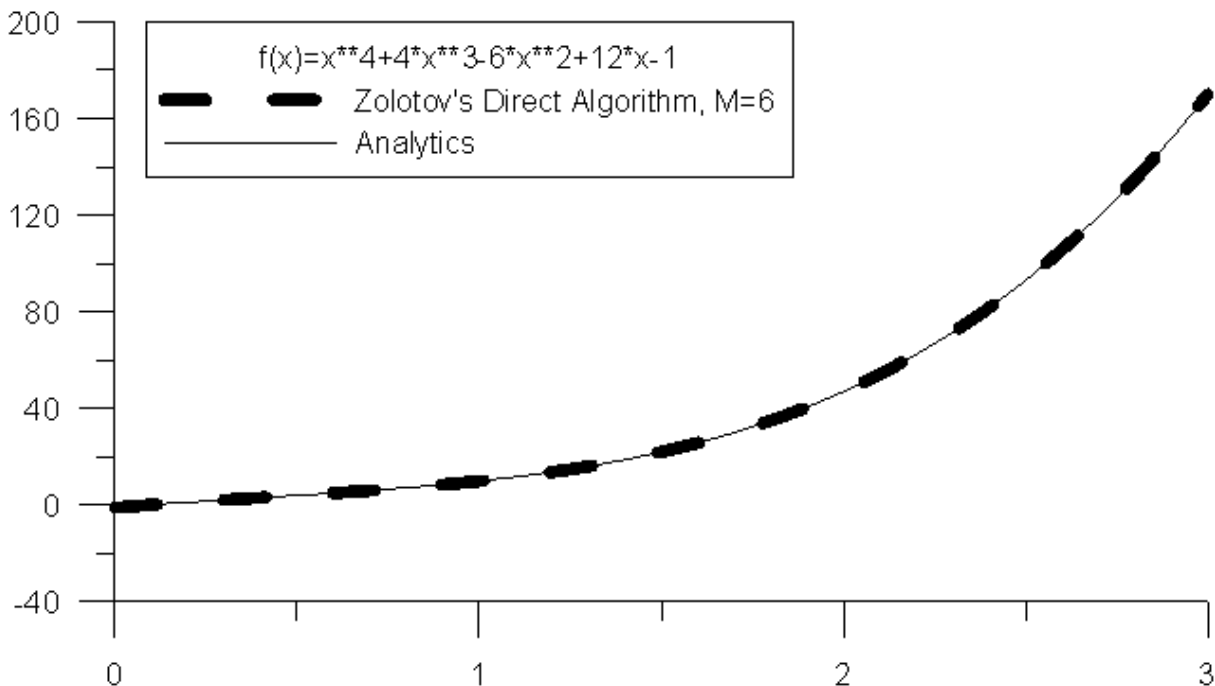


Рис. 1.4.1. Сопоставление функции $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ и ее разложения в ряд Хаара на отрезке $x \in [0, 3]$.

1.5. Понятие о восстановлении функции по коэффициентам ее разложения по базису Хаара (обратное вейвлет-преобразование – синтез).

Любая функция может быть восстановлена по коэффициентам ее разложения в ряд по базису Хаара. Очевидно, что, руководствуясь формулой (1.2.5) можем записать:

$$\bar{f} = (DQ^0)^{-1} \bar{v}.$$

В силу того, что матрица DQ^0 является ортогональной, то обратная к ней $(DQ^0)^{-1}$ совпадает с транспонированной $(DQ^0)^T$, т.е.

$$(DQ^0)^{-1} = (DQ^0)^T = (Q^0)^T D^T = (Q^0)^T D,$$

откуда

$$\bar{f} = (Q^0)^T D \bar{v}. \quad (1.5.1)$$

Структура матрицы $(Q^0)^T$ приведена ниже.

$$(Q^0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.5.2)$$

1.6. Алгоритм вычисления значений дискретной функции, имеющей разложение по базису Хаара (обратное вейвлет-преобразование – синтез).

Разумеется, описанный выше метод восстановления функции с использованием матричных операций не является быстрым. Опишем ниже алгоритм синтеза, предложенный А.Б. Золотовым [6-9] и подобный представленному ранее алгоритму получения коэффициентов прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара.

В соответствии с (1.1.7) имеем:

$$\alpha_M = \sqrt{n}; \quad \alpha_{M-1} = \sqrt{n}. \quad (1.6.1)$$

Пусть

$$u_1^M = \frac{1}{\alpha_M} v_1^M. \quad (1.6.2)$$

Для всех $p = M - 1, M - 2, \dots, 0$ производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} j &= \left[\frac{i+1}{2} \right] \\ z &= (-1)^{i+1} \\ u_j^p &= \frac{z}{\alpha_p} v_j^p + u_j^{p+1} \\ \alpha_{p-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_p \\ f(i) &= u_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, \dots, N_p \\ &p = M - 1, M - 2, \dots, 0, 1 \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

где $u_j^p, j = 1, 2, \dots, N_p, p = 1, 2, \dots, M$ – вспомогательные величины.

С учетом представления в форме (1.3.1) можем скорректировать алгоритм (1.6.1)-(1.6.3).

Имеем:

$$\alpha_M = \sqrt{n}; \quad \alpha_{M-1} = \sqrt{n}; \quad g_{T_{tot}} = \frac{1}{\alpha_M} f_n. \quad (1.6.4)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M - 1$ производим вычисления по формулам

$$\left. \begin{aligned} j &= \left[\frac{i+1}{2} \right] \\ z &= (-1)^{i+1} \\ g_{T_{tot}^{p-1}+j} &= \frac{z}{\alpha_p} f_{N_{tot}^{p-1}+j} + g_{T_{tot}^p+j} \\ \alpha_{p-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_p \\ f(i) &= g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, \dots, 2 \cdot N_p \\ &p = M - 1, M - 2, \dots, 0, 1, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

где $g_k, k = 1, 2, \dots, N_{tot}$ – вспомогательные величины.

В качестве примера рассмотрим задачу восстановления функции

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 1,$$

разложенной в ряд по базису Хаара на отрезке $x \in [0, 3]$.

Как видно из рис. 1.6.1, имеет место полное соответствие между значениями исходной функции в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, значениями разложения функции в ряд по базису Хаара (для построения этого разложения использовался алгоритм А.Б. Золотова прямого вейвлет-преобразования при значении $M = 6$) и восстановленными значениями исходной

Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа функции (для восстановления функции использовался алгоритм А.Б. Золотова обратного вейвлет-преобразования при значении $M = 6$).

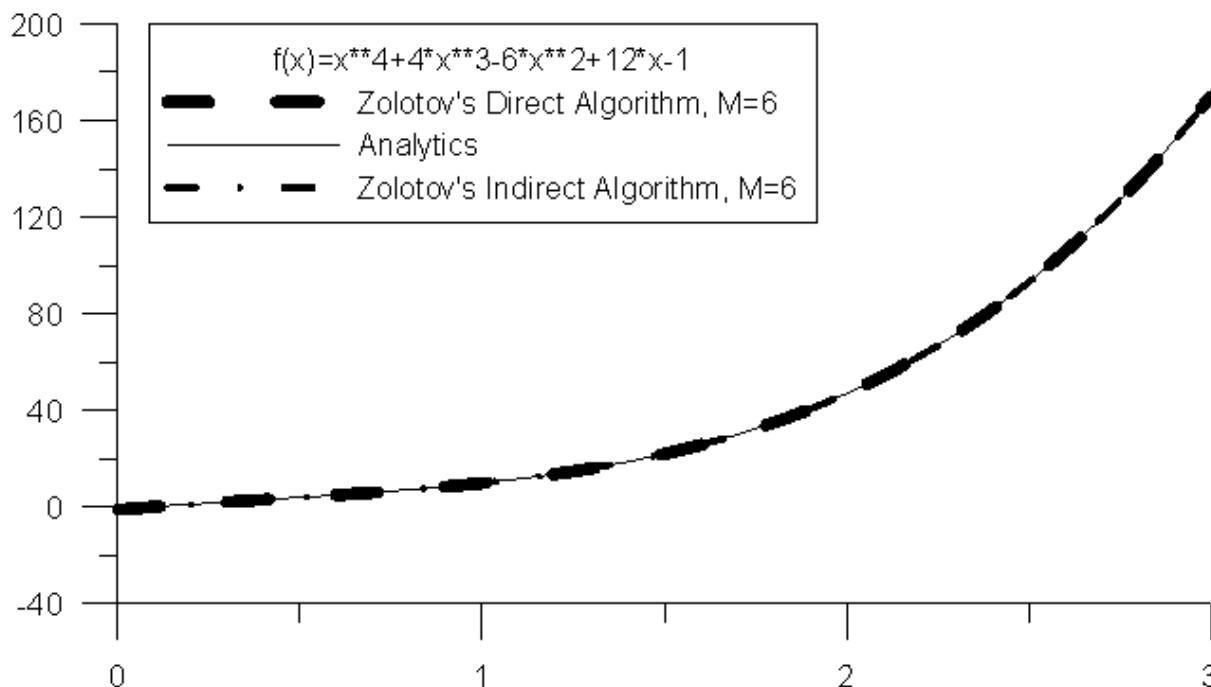


Рис. 1.6.1. Сопоставление функции $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 1$, ее разложения в ряд Хаара на отрезке $x \in [0, 3]$ и восстановленных значений функции на отрезке.

2. Быстрые алгоритмы двумерных вейвлет-преобразований по базису Хаара

2.1. Понятие о дискретных функциях Хаара на квадрате.

Рассмотрим двумерную прямоугольную область (рис. 2.1.1)

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2 \}, \quad (2.1.1)$$

где x_1, x_2 – координаты; l_1, l_2 – размеры области вдоль координатных осей Ox_1, Ox_2 соответственно.

Разделим область (2.1.1) по горизонтали на $(n - 1)$ равных частей и по вертикали на $(n - 1)$ равных частей, где $n = 2^M$, M – некоторое целое число (максимальный уровень функций Хаара (количество уровней)).

Координаты точек деления, очевидно, определяются по формулам

$$x_{1,i} = (i_1 - 1)h_1, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad x_{2,i} = (i_2 - 1)h_2, \quad i_2 = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.2)$$

где h_1 и h_2 – шаги деления по осям Ox_1, Ox_2 соответственно,

$$h_1 = l_1 / (n - 1); \quad h_2 = l_2 / (n - 1). \quad (2.1.3)$$

Примеры ненормированных функций Хаара показаны на рис. 2.1.2, 2.1.3.

Семейство функций Хаара $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$, $p = 1, 2, \dots, M$, $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$, $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1$ (причем недопустим случай $s_1 = s_2 = 0$), определенных в узлах сетки, задается следующими формулами:

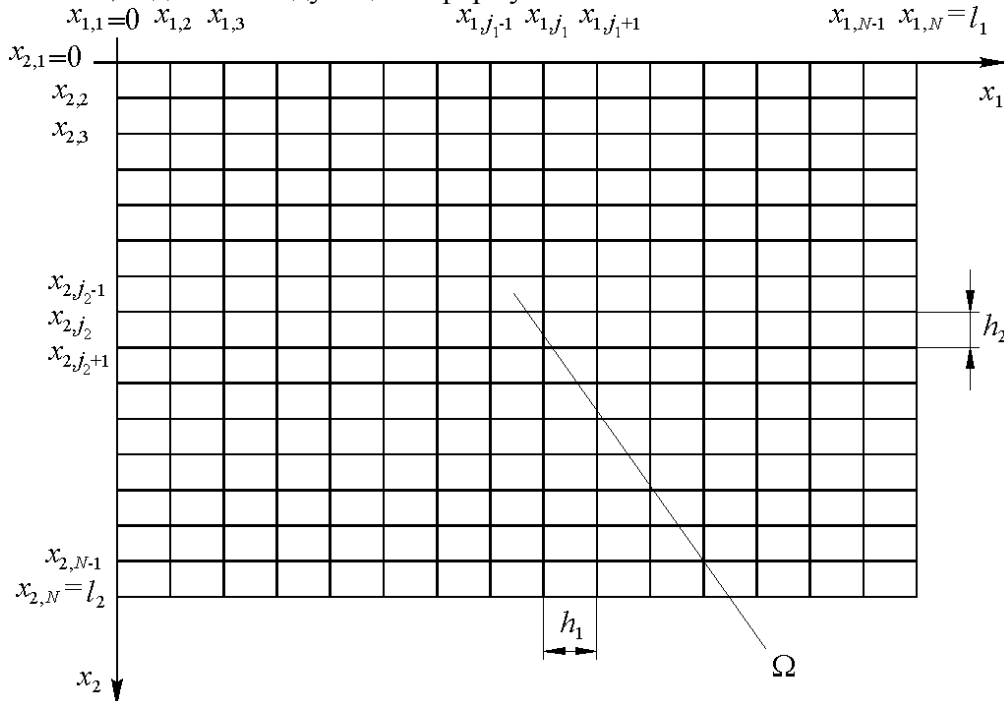


Рис. 2.1.1. Исходная двумерная прямоугольная область и ее дискретизация.

$$\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2) = \frac{1}{\alpha_p} \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, & \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q=0}^1 \left(\begin{aligned} & 2^{p+1} \left(j_q - 1 + \frac{k_q}{2} \right) < i_q \wedge \\ & \wedge i_q \leq 2^{p+1} \left(j_q - \frac{1}{2} + \frac{k_q}{2} \right) \end{aligned} \right), \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n; \quad 0 \leq p < M;$$

$$\psi_{0,0,1,1}^M(i_1, i_2) = \frac{1}{\alpha_M}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.5)$$

где $N_p \times N_p$ – количество функций Хаара на p -ом уровне,

$$N_p = \begin{cases} n / 2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (2.1.6)$$

α_p – норма функции Хаара на p -ом уровне, т.е.

$$\forall j_1 = 1, 2, \dots, N_p, \quad \forall j_2 = 1, 2, \dots, N_p \quad \|\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p\| = \alpha_p,$$

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Следует отметить, что значения индексов s_1 и s_2 соответствуют трем базовым функциям:

$\psi_{1,0,j_1,j_2}^P$	
1	-1
1	-1
$s_1 = 1, s_2 = 0$	

$\psi_{0,1,j_1,j_2}^P$	
1	1
-1	-1
$s_1 = 0, s_2 = 1$	

$\psi_{1,1,j_1,j_2}^P$	
1	-1
-1	1
$s_1 = 1, s_2 = 1$	

На рис. 2.1.2 и 2.1.3 приведены примеры функций Хаара (ненормированных), значения в пустых клетках нулевые.

Можно показать, что семейство функций Хаара (2.1.4)-(2.1.5) образует полную ортонормированную систему и является базисом в пространстве дискретных функций, определенных в узлах сетки (рис. 2.1.1).

2.2. Понятие о разложении функции по базису Хаара (прямое вейвлет-преобразование – анализ).

Рассмотрим произвольную функцию f , определенную в узлах сетки, показанной на рис. 2.1.1. Функция $f(i_1, i_2)$ может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i_1, i_2) = \sum_{p=0}^M \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v_{1,0,j_1,j_2}^P \psi_{1,0,j_1,j_2}^P(i_1, i_2) + v_{0,1,j_1,j_2}^P \psi_{0,1,j_1,j_2}^P(i_1, i_2) + v_{1,1,j_1,j_2}^P \psi_{1,1,j_1,j_2}^P(i_1, i_2)), \quad (2.2.1)$$

где $v_{1,0,j_1,j_2}^P, v_{0,1,j_1,j_2}^P, v_{1,1,j_1,j_2}^P, j_1 = 1, 2, \dots, N_p, j_2 = 1, 2, \dots, N_p, p = 1, 2, \dots, M$ – коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по базису Хаара, определяемые по формуле

$$v_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P = (\bar{f}, \bar{\psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N f(i_1, i_2) \bar{\psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(i_1, i_2), \quad (2.2.2)$$

$$s_1 = 0, 1, s_2 = 0, 1, j_1 = 1, 2, \dots, N_p, j_2 = 1, 2, \dots, N_p, p = 1, 2, \dots, M;$$

а запись типа (y, z) обозначает соответствующую операцию скалярного произведения функций y и z ; \bar{f} и $\bar{\psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P$ – n^2 -мерные векторы,

$$\bar{f} = [f(1,1) \dots f(1,n) f(2,1) \dots f(2,n) \dots f(n,1) \dots f(n,n)]^T; \quad (2.2.3)$$

$$\bar{\psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P = [\psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(1,1) \dots \psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(1,n) \psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(2,1) \dots \psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(2,n) \dots \psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(n,1) \dots \psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^P(n,n)]^T. \quad (2.2.4)$$

В матрично-векторном виде формулу (2.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\bar{v} = DQ^0 \bar{f}, \quad (2.2.5)$$

Здесь Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица с нормами соответствующих базисных функций на диа-

гонали; \bar{v} – вектор, составленных из искомым коэффициентов коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по базису Хаара.

Определяющие формулы для всех входящих в (2.5) матриц и векторов, в частности, для случая $n = 4$ приведены ниже. Для общего случая произвольного n , очевидно, несложно записать аналогичные формулы.

Имеем:

$$\bar{v} = [v_{1,0,1,1}^0 \quad v_{0,1,1,1}^0 \quad v_{1,1,1,1}^0 \quad v_{1,0,2,1}^0 \quad v_{0,1,2,1}^0 \quad v_{1,1,2,1}^0 \quad v_{1,0,1,2}^0 \quad v_{0,1,1,2}^0 \quad v_{1,1,1,2}^0 \quad v_{1,0,2,2}^0 \quad v_{0,1,2,2}^0 \quad v_{1,1,2,2}^0 \quad v_{1,0,1,1}^1 \quad v_{0,1,1,1}^1 \quad v_{1,1,1,1}^1 \quad v_{0,0,1,1}^2]^T; \quad (2.2.6)$$

$$D = \text{diag}\{ \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2 \}; \quad (2.2.7)$$

$\Psi_{1,0,4,3}^0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		$N-1$	N
1												
2												
3												
4												
5												
6								1	-1			
7								1	-1			
8												
$N-1$												
N												

Рис. 2.1.2. Ненормированная функция Хаара $\Psi_{1,0,4,3}^0$.

$$\Psi_{1,1,j_1,j_2}^1$$

	1	2					$2^{p+1}j_1$	$N-1$		N
1										
2										
							2			
							1	1	-1	-1
							1	1	-1	-1
							-1	-1	1	1
							-1	-1	1	1
$2^{p+1}j_2$										
$N-1$										
N										

Рис. 2.1.3. Ненормированная функция Хаара $\psi_{1,1,j_1,j_2}^1$.

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

(2.2.8)

2.3. Об одном представлении разложения функции по базису Хаара.

При численной реализации разложения дискретной функции по базису Хаара зачастую удобнее перейти от (2.2.1) к представлению вида:

$$f(i_1, i_2) = \sum_{k=1}^{n^2} f_k \varphi_k(i_1, i_2), \quad (2.3.1)$$

где $k_1 = 1, 2, \dots, N_{tot}$ и $k_2 = 1, 2, \dots, n^2$ – глобальные индексы; коэффициенты v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p и f_{k_1, k_2} , а также функции $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2)$ и $\varphi_{k_1, k_2}(i_1, i_2)$ связаны между собой следующими формулами:

$$f_{k_1, k_2} = v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p, \quad \varphi_{k_1, k_2}(i_1, i_2) = \psi_{1, 0, j_1, j_2}^p(i_1, i_2), \quad (2.3.2)$$

где
$$k = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (j_1 - 1) + 3 \cdot (j_2 - 1) \cdot N_p + 3 \cdot \sum_{q=0}^{p-1} (N_q)^2; \quad (2.3.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$N_{tot}^{-1} = 0; \quad N_{tot}^r = \sum_{q=0}^r (N_q)^2, \quad r = 1, 2, \dots, M; \quad (2.3.4)$$

$$N_{comp, p} = \begin{cases} 3N_p, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$N_{comp, tot}^{-1} = 0; \quad N_{comp, tot}^r = 3 \cdot \sum_{q=0}^r (N_q)^2, \quad r = 1, 2, \dots, M - 1; \quad N_{comp, tot}^M = n; \quad (2.3.6)$$

Тогда формула (2.3.3) может быть переписана следующим образом:

$$k = s_1 + 2 \cdot s_2 + 3 \cdot (j_1 - 1) + (j_2 - 1) \cdot N_{comp, p} + N_{comp, tot}^{p-1}. \quad (2.3.7)$$

Можно предложить следующим алгоритм определения индексов p, j_1, j_2, s_1, s_2 по глобальному индексу k :

1. Задаем значением $r = M$.
2. Вычисляем значение $N_{comp, tot}^r$.
3. Вычисляем значение χ_r по формуле

$$\chi_r = \left[\frac{k - 1}{N_{comp, tot}^r} \right], \quad (2.3.8)$$

где запись типа $[a]$ обозначает целую часть числа a .

4. Если $\chi_r = 1$, то индекс p определяется по формуле

$$p = 1 + r. \quad (2.3.9)$$

Если $p < M$, то индексы j_1, j_2, s_1, s_2 определяются по формулам

$$j_2 = 1 + \left[\frac{k - N_{comp, tot}^{p-1} - 1}{N_{comp, p}} \right]; \quad j_1 = 1 + \left[\frac{k - N_{comp, tot}^{p-1} - N_{comp, p} \cdot (j_2 - 1) - 1}{3} \right];$$

$$s_2 = \left[\frac{k - N_{comp,tot}^{p-1} - N_{comp,p} \cdot (j_2 - 1) - 3 \cdot (j_1 - 1) - 1}{2} \right];$$

$$s_1 = k - 2 \cdot s_2 - 3 \cdot (j_1 - 1) - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - N_{comp,tot}^{p-1}. \quad (2.3.10)$$

Если $p = M$, то индексы j_1, j_2, s_1, s_2 определяются по формулам

$$j_1 = 1; \quad j_2 = 1; \quad s_1 = 0; \quad s_2 = 0. \quad (2.3.11)$$

Если $r > 0$ и $\chi_r = 0$, то уменьшаем значение s на единицу и переходим к пункту 2 алгоритма.

Если $r = 0$ и $\chi_r = 0$, то следует положить

$$p = 0, \quad j_2 = 1 + \left[\frac{k - 1}{N_{comp,p}} \right], \quad j_1 = 1 + \left[\frac{k - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - 1}{3} \right],$$

$$s_2 = \left[\frac{k - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p} - 3 \cdot (j_1 - 1) - 1}{3} \right];$$

$$s_1 = k - 2 \cdot s_2 - 3 \cdot (j_1 - 1) - (j_2 - 1) \cdot N_{comp,p}. \quad (2.3.12)$$

2.4. Алгоритм вычисления коэффициентов разложения дискретной функции по базису Хаара (прямого вейвлет-преобразование – анализ).

Очевидно, что непосредственное использование матричных операций (2.2.5) для вычисления вектора коэффициентов разложения не является эффективным с точки зрения количества операций (порядка n^4). А.Б. Золотовым [5-8] был предложен алгоритм прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара, позволяющий вычислить коэффициенты разложения за $m \cdot n^2$ операций, где m – некоторое целое число, не зависящее от n . Рассмотрим ниже этот алгоритм.

Пусть

$$u_{j_1, j_2}^0 = f(j_1, j_2), \quad j_1 = 1, 2, \dots, n, \quad j_2 = 1, 2, \dots, n; \quad (2.4.1)$$

$$\alpha_0 = 2. \quad (2.4.2)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M - 1$, $j_1 = 0, 1, \dots, N_p$, $j_2 = 0, 1, \dots, N_p$, $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1$ (за исключением случая $s_1 = s_2 = 0$) производим вычисления по формулам

$$z_1 = (-1)^{s_1}, \quad z_2 = (-1)^{s_2}; \quad (2.4.3)$$

$$v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \frac{1}{\alpha_p} (u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + z_1 u_{2j_1, 2j_2-1}^p + z_2 u_{2j_1-1, 2j_2}^p + z_1 z_2 u_{2j_1, 2j_2}^p); \quad (2.4.4)$$

$$u_{j_1, j_2}^{p+1} = u_{2j_1-1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1, 2j_2-1}^p + u_{2j_1-1, 2j_2}^p + u_{2j_1, 2j_2}^p; \quad (2.4.5)$$

$$\alpha_{p+1} = 2 \cdot \alpha_p. \quad (2.4.6)$$

При $p = M$ имеем:

$$\alpha_M = n; \quad (2.4.7)$$

$$v_{0,0,1,1}^M = \frac{1}{\alpha_M} u_{1,1}^M. \quad (2.4.8)$$

где u_{j_1, j_2}^p , $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, 2, \dots, M$ – вспомогательные величины.

Введем следующие обозначения:

$$T_{tot}^{-1} = 0; \quad T_{tot}^r = 4 \cdot N_{tot}^r, \quad r = 0, 1, \dots, M-1; \quad T_{tot}^M = T_{tot}^{M-1} + 1. \quad (2.4.9)$$

С учетом представления в форме (2.3.1) можем скорректировать алгоритм (2.4.1)-(2.4.8).

Пусть

$$g_{j_1+2 \cdot (j_2-1) \cdot N_0} = f(j_1, j_2), \quad j_1 = 1, 2, \dots, n, \quad j_2 = 1, 2, \dots, n; \quad (2.4.10)$$

$$\alpha_0 = 2. \quad (2.4.11)$$

Для всех $p = 0, 1, \dots, M-1$, $j_1 = 0, 1, \dots, N_p$, $j_2 = 0, 1, \dots, N_p$, $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1$ (за исключением случая $s_1 = s_2 = 0$) производим вычисления по формулам

$$z_1 = (-1)^{s_1}, \quad z_2 = (-1)^{s_2}; \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} f_{s_1+2 \cdot s_2+3 \cdot (j_1-1)+(j_2-1) \cdot N_{comp,p}+N_{comp,tot}^{p-1}} &= \\ &= \frac{1}{\alpha_p} (g_{2j_1-1+2 \cdot (2j_2-2) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + z_1 g_{2j_1+2 \cdot (2j_2-2) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + \\ &+ z_2 g_{2j_1-1+2 \cdot (2j_2-1) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + z_1 z_2 g_{2j_1+2 \cdot (2j_2-1) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}}); \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$g_{j_1+2 \cdot (j_2-1) \cdot N_{p+1}+T_{tot}^p} = g_{2j_1-1+2 \cdot (2j_2-2) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + g_{2j_1+2 \cdot (2j_2-2) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + \quad (2.4.14)$$

$$+ g_{2j_1-1+2 \cdot (2j_2-1) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}} + g_{2j_1+2 \cdot (2j_2-1) \cdot N_p+T_{tot}^{p-1}}; \quad (2.4.15)$$

При $p = M$ имеем:

$$\alpha_M = n; \quad (2.4.16)$$

$$f_{n^2} = \frac{1}{\alpha_M} g_{T_{tot}}, \quad (2.4.17)$$

где g_k , $k = 1, 2, \dots, T_{tot}$ – вспомогательные величины;

$$T_{tot} = \frac{1}{3} \cdot (2^{2 \cdot (M+1)} - 1). \quad (2.4.18)$$

Рассмотрим ниже простейший пример разложения функции

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \exp(-x_1^2 - x_2^2)$$

в ряд по базису Хаара на области

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \}.$$

Имеет место полное соответствие значений исходной функции в узлах сетки (рис. 2.1.1) со значениями разложения функции в ряд по базису Хаара (для построения этого разложения использовался алгоритм А.Б. Золотова прямого вейвлет-преобразования при значении $M = 6$, рис. 2.4.1).

2.5. Понятие о восстановлении функции по коэффициентам ее разложения по базису Хаара (обратное вейвлет-преобразование – синтез).

Любая функция может быть восстановлена по коэффициентам ее разложения в ряд по базису Хаара. Очевидно, что, руководствуясь формулой (2.2.3) можем записать:

$$\bar{f} = (DQ^0)^{-1} \bar{v}.$$

В силу того, что матрица DQ^0 является ортогональной, то обратная к ней $(DQ^0)^{-1}$ совпадает с транспонированной $(DQ^0)^T$, т.е.

$$(DQ^0)^{-1} = (DQ^0)^T = (Q^0)^T D^T = (Q^0)^T D,$$

откуда

$$\bar{f} = (Q^0)^T D \bar{v}. \quad (2.5.1)$$

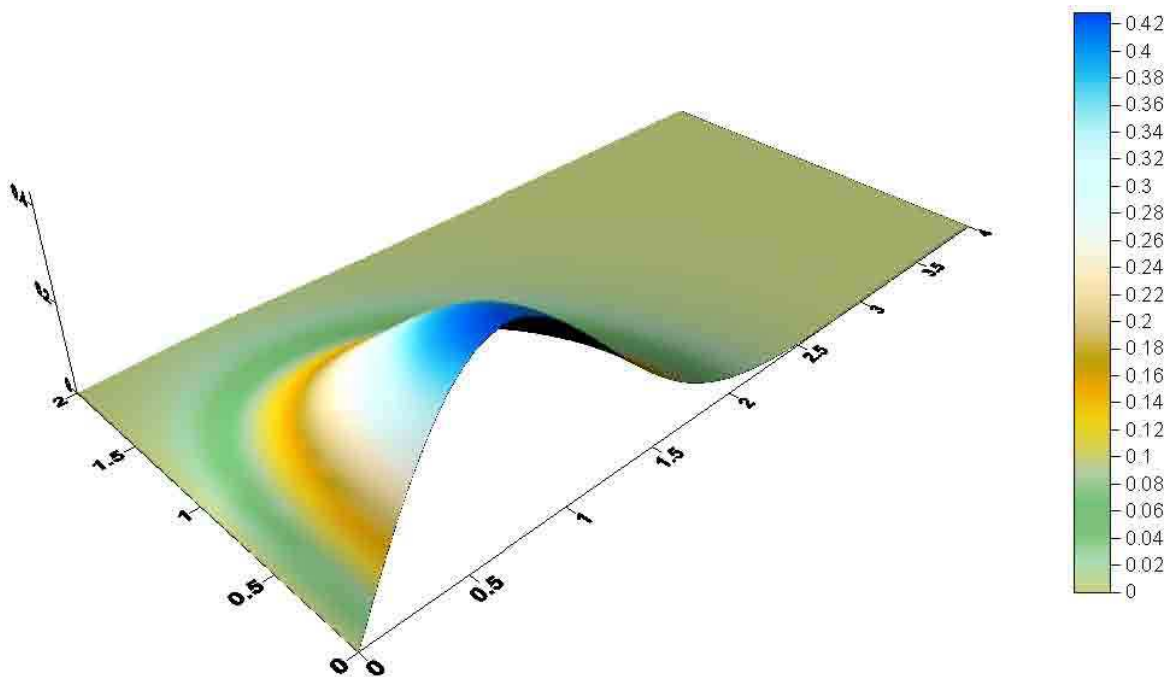


Рис. 4.1. Сопоставление функции $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \exp(-x_1^2 - x_2^2)$ и ее разложения в ряд Хаара в области $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 2\}$.

Структура матрицы $(Q^0)^T$ приведена ниже.

$$\begin{aligned}
 (Q^0)^T = & \\
 = & \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1
 \end{bmatrix};
 \end{aligned}
 \tag{2.5.2}$$

2.6. Алгоритм вычисления значений дискретной функции, имеющей разложение по базису Хаара (обратное вейвлет-преобразование – синтез).

Разумеется, описанный выше метод восстановления функции с использованием матричных операций не является быстрым. Опишем ниже алгоритм синтеза, предложенный А.Б. Золотовым [5-8] и подобный представленному ранее алгоритму получения коэффициентов прямого вейвлет-преобразования по базису Хаара.

В соответствии с (2.1.7) имеем:

$$\alpha_M = n; \quad \alpha_{M-1} = n.
 \tag{2.6.1}$$

Пусть

$$u_{1,1}^M = \frac{1}{\alpha_M} v_{0,0,1,1}^M.
 \tag{2.6.2}$$

Для всех $p = M - 1, M - 2, \dots, 0$; $i_1 = 0, 1, \dots, N_p$; $i_2 = 0, 1, \dots, N_p$ производим вычисления по формулам

$$j_1 = \left\lceil \frac{i_1 + 1}{2} \right\rceil; \quad j_2 = \left\lceil \frac{i_2 + 1}{2} \right\rceil;
 \tag{2.6.3}$$

$$z_1 = (-1)^{i_1 + 1}, \quad z_2 = (-1)^{i_2 + 1};
 \tag{2.6.4}$$

$$u_{i_1, i_2}^p = \frac{1}{\alpha_p} (z_1 v_{1,0, j_1, j_2}^p + z_2 v_{0,1, j_1, j_2}^p + z_1 z_2 v_{1,1, j_1, j_2}^p) + u_{j_1, j_2}^{p+1};
 \tag{2.6.5}$$

$$\alpha_{p-1} = \frac{1}{2} \alpha_p. \quad (2.6.6)$$

В итоге имеем:

$$f(i_1, i_2) = u_{i_1, i_2}^0, \quad i_1 = 0, 1, \dots, n, \quad i_2 = 0, 1, \dots, n. \quad (2.6.6)$$

С учетом представления в форме (2.3.1) можем скорректировать алгоритм (2.6.1)-(2.6.6).

Имеем:

$$\alpha_M = n; \quad \alpha_{M-1} = n; \quad g_{T_{tot}} = \frac{1}{\alpha_M} f_{n^2}. \quad (2.6.7)$$

Для всех $p = M - 1, M - 2, \dots, 0; \quad i_1 = 0, 1, \dots, 2 \cdot N_p; \quad i_2 = 0, 1, \dots, 2 \cdot N_p$ производим вычисления по формулам

$$j_1 = \left[\frac{i_1 + 1}{2} \right]; \quad j_2 = \left[\frac{i_2 + 1}{2} \right]; \quad (2.6.8)$$

$$z_1 = (-1)^{i_1+1}, \quad z_2 = (-1)^{i_2+1}; \quad (2.6.9)$$

$$\begin{aligned} g_{i_1+2 \cdot (i_2-1) \cdot N_p + T_{tot}^{p-1}} &= \frac{1}{\alpha_p} (z_1 f_{1+3 \cdot (j_1-1) + (j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} + \\ &+ z_2 f_{2+3 \cdot (j_1-1) + (j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}} + \\ &+ z_1 z_2 f_{3+3 \cdot (j_1-1) + (j_2-1) \cdot N_{comp,p} + N_{comp,tot}^{p-1}}) + \\ &+ g_{j_1+2 \cdot (j_2-1) \cdot N_{p+1} + T_{tot}^p}; \\ \alpha_{p-1} &= \frac{1}{2} \alpha_p. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\alpha_{p-1} = \frac{1}{2} \alpha_p. \quad (2.6.11)$$

В итоге имеем:

$$f(i_1, i_2) = g_{i_1+(i_2-1) \cdot n}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n, \quad i_2 = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6.12)$$

Здесь $g_k, \quad k = 1, 2, \dots, T_{tot}$ – вспомогательные величины.

В качестве примера рассмотрим задачу восстановления функции

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \exp(-x_1^2 - x_2^2),$$

разложенной в ряд по базису Хаара на области

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \}.$$

Как видно из рис. 2.6.1, имеет место полное соответствие между значениями исходной функции в точках $x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$, значениями разложения функции в ряд по базису Хаара (для построения этого разложения использовался алгоритм А.Б. Золотова прямого вейвлет-преобразования при значении $M = 6$) и восстановленными значениями исходной функции (для восстановления функции использовался алгоритм А.Б. Золотова обратного вейвлет-преобразования при значении $M = 6$).

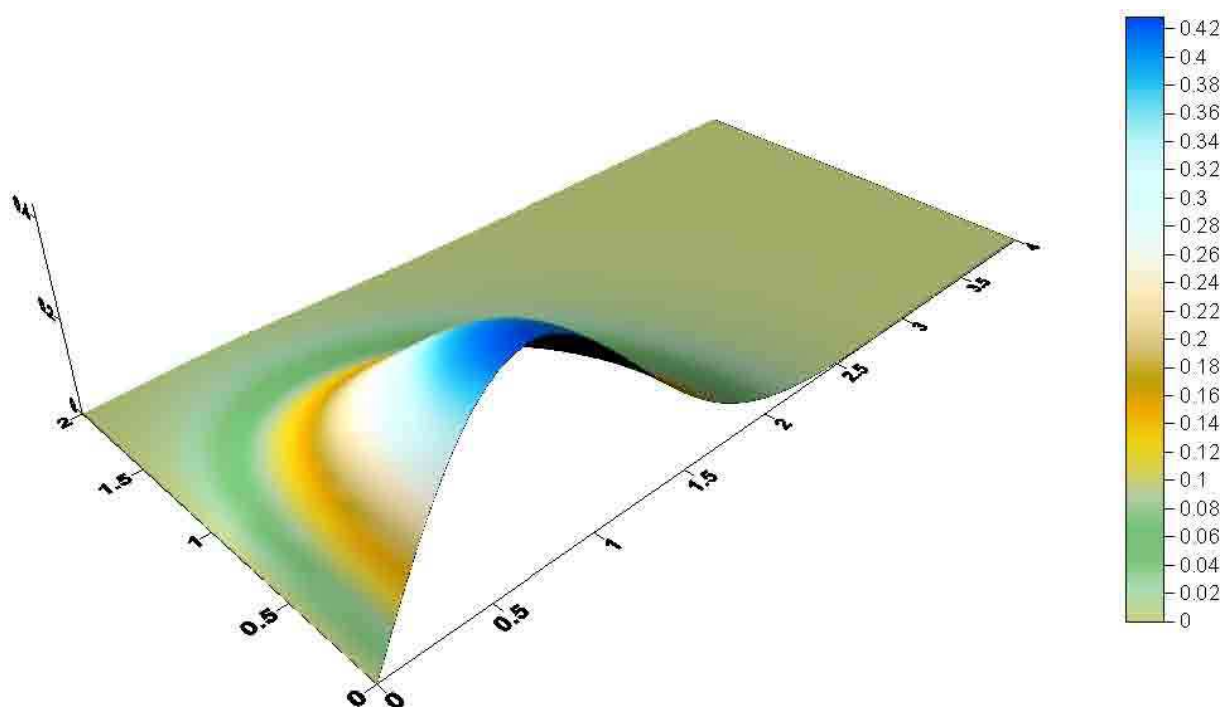


Рис. 2.6.1. Сопоставление функции $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \exp(-x_1^2 - x_2^2)$, ее разложения в ряд Хаара в области $\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 2 \}$ и восстановленных значений функции на отрезке.

Заключение.

Представленные алгоритмы анализа и синтеза предназначены для эффективного решения краевых задач, в частности для многоуровневого (в том числе и локального) анализа работы конструкций [10].

Замечания.

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.
2. Грант 2.3.9 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.
3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).
4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных

Математические основы многоуровневых численных методов определения локального напряженно-деформируемого состояния строительных конструкций с использованием кратномасштабного вейвлет-анализа зданий и сооружений сложной архитектурной формы», выполняемая в рамках Тематического плана ГОУ ВПО МГСУ (проект 5.1.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Алексеев Д.Н.* Численные методы исследования локального напряженно-деформируемого состояния конструкций и вейвлет-анализ. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.18. – М.: МГСУ, 2002. – 24 с.
- [2] *Алексеев Д.Н.* Численные методы локального исследования напряженно-деформируемого состояния конструкций и вейвлет-анализ. Дис. канд. техн. наук: 05.13.18. – М.: МГСУ, 2001. – 152 с.
- [3] *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. // УФН, 1996, т. 166, №11, с. 1145-1170.
- [4] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
- [5] *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: АСВ, 2006. – 208 с.
- [6] *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Численные реализации дискретно-континуального метода граничных элементов с использованием вейвлет-анализа. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. тр. №7. – М.: МГСУ, 2004, с. 145-156.
- [7] *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
- [8] *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: АСВ, 2009. – 336 с.
- [9] *Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л., Ширинский В.И.* Двумерное вейвлет-преобразование по базису Хаара. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. тр. №4. – М.: МГСУ, 2001, с. 109-114.
- [10] *Золотов А.Б., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.* Об одном подходе к получению локального решения краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. тр. №7. – М.: МГСУ, 2002, с. 98-100.
- [11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с.
- [12] *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основы теории всплесков. // УМН, 1998, т. 53, вып. 6(324), с. 54-128.
- [13] *Островский А.Ю., Золотов А.Б., Алексеев Д.Н., Мозгалева М.Л.* Элементы кратномасштабного вейвлет-анализа (КМА). // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. научн. тр. №4. – М.: МГСУ, 2001, с. 248-258.
- [14] *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

Сведения об авторах.

Акимов Павел Алексеевич, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», профессор кафедры информатики и прикладной математики, доктор технических наук, член-корреспондент Российской

ской академии архитектуры и строительных наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, 183-57-42; e-mail: pavel.akimov@gmail.com, pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», профессор кафедры информатики и прикладной математики, кандидат технических наук, доцент; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, 183-33-01; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, советник Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, 183-33-01; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В ЗОНЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

И.Н. Афанасьева

ФГБОУ ВПО "Московский государственный строительный университет", г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена исследованиям аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в поперечном сечении 1:4, характерным для объектов строительства. По численной методике в программном комплексе ANSYS CFX выполнены расчеты в стационарной и нестационарной постановках для двух вариантов моделей турбулентности – $k-\varepsilon$ и SST . Проведен анализ результатов численного моделирования и сопоставление их с экспериментальными данными, полученными в аэродинамической трубе Рурского университета Бохума (Германия).

Ключевые слова: Прямоугольная призма, ветровая аэродинамика, модели турбулентности, численное моделирование, АДТ

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF TURBULENT FLOW AROUND RECTANGULAR CYLINDER

Irina N. Afanasyeva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Present paper is devoted to study of the aerodynamics of the rectangular cylinder with an aspect ratio of 1:4 in the cross section, typical for the structures of civil engineering. There were performed several types of the computational simulation for different types of turbulence models – $RANS k-\varepsilon$ and $RANS SST$ by using numerical methods in software ANSYS CFX. The task was solved for steady and unsteady cases. Results of numerical simulation of aerodynamics problem were analyzed and compared with the datas obtained in a wind tunnel of Ruhr University Bochum (Germany).

Key words: Rectangular cylinder, aerodynamics, turbulence models, numerical simulation, wind tunnel (WT)

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования ветровой аэродинамики прямоугольных призм с различным соотношением сторон, проведенные в аэродинамических трубах (АДТ) и представленные в работах Окаджимы [5] и Норберга [4], привлекли к себе внимание научного сообщества. С одной стороны, поведение потоков при низких числах Рейнольдса ($Re \leq 10^4$) было хорошо исследовано, с другой – особый практический интерес вызвали потоки с числами Рейнольдса $Re \geq 10^4$. Было установлено влияние соотношения характерных размеров призмы на

поведение потока. В Милане в июне 2008 года на международной конференции, посвященной вопросам строительной ветровой аэродинамики, был объявлен "бэнчмарк" (BARC benchmark) – исследование аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в поперечном сечении 1:5 [2]. Такое соотношение сторон было выбрано не только с целью фундаментальных исследований, но и получения исчерпывающей информации, основанной на полученных результатах исследований аэродинамики широкого спектра плохобтекаемых тел, представляющих интерес в гражданском строительстве

(например, таких как, большепролетные мосты, высотные здания и т. д.). Автором данной статьи были изучены публикации по объявленной задаче, внушительный объем которых был представлен и на последней Международной конференции (13th International Conference on Wind Engineering) в Амстердаме (Нидерланды) в июле 2011 года, и проведен ряд численных экспериментов, результаты которых были опубликованы ранее [8].

Опираясь на изученный опыт, совместно с коллегами из Рурского университета Бохума (Германия) была поставлена и частично решена задача – исследование аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в поперечном сечении 1:4. Задача решалась методами математического и численного моделирования. Выбранное соотношение сторон соответствует модели реального моста, для которой был проведен эксперимент в АДТ Рурского университета Бохума. Результаты этого эксперимента-"продувки" были предоставлены для верификации численной модели, а также сопоставления и анализа результатов.

В качестве основного расчетного инструмента выбран лицензионный специализированный ПК ANSYS CFX, установленный в НОЦ КМ МГСУ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования выбран прямоугольный параллелепипед с соотношением сторон в поперечном сечении $B/D=4$ ($B=0.241$ м, $D=0.0605$ м). На первом этапе – верификации численной модели и выбора наиболее адекватной и эффективной модели турбулентности и других численных и физических параметров –, которому посвящена настоящая статья, поставленная задача решалась в двумерной постановке. В качестве эталона были приняты результаты эксперимента, проведенного в АДТ Рурского университета Бохума. Для замера ветровых давлений экспериментальная модель была оборудована 40 датчиками, расположенными по периметру по-

перечного центрального сечения параллелепипеда, в соответствии с рис. 1.

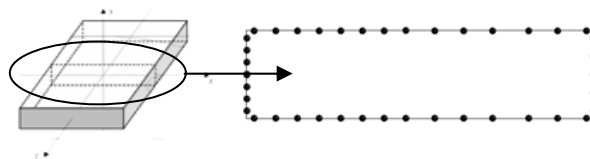


Рис. 1. Расположение датчиков для замера ветровых давлений на поверхности объекта

Расчетным направлением ветра был выбран угол атаки ветра $\alpha = 0^\circ$.

3. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Основные уравнения

Для проведения гидродинамического расчета, а именно, нахождения полей скоростей и давлений ветра (u_x, u_y, u_z, p), необходимо решить систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка – уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнений неразрывности (сплошности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \quad (2)$$

где ρ – плотность среды ($\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости или газа); x, y, z – координаты жидкой частицы; u_x, u_y, u_z – проекции скорости жидкой частицы соответственно; X, Y, Z – проекции массовых сил; p – давление; t – время; ν – кинематическая вязкость. Для интегрирования уравнений (1), (2) требуется задать начальные (если движение не является стационарным) и граничные условия,

одними из которых для вязкой жидкости являются условия "прилипания", т.е. равенство нулю скорости жидкости на стенке. В общем случае (движение сжимаемой и нагреваемой жидкости) в уравнениях Навье-Стокса учитывается ещё переменность ρ и зависимость μ (динамической вязкости) от температуры, что изменяет вид уравнений. При этом дополнительно используются уравнение баланса энергии и уравнение состояния (Клапейрона).

Модели турбулентности

Для каждого вида течения существует критическое число Рейнольдса, Re_{cr} , которое, как принято считать, определяет переход от ламинарного течения к турбулентному. При $Re < Re_{cr}$ течение происходит в ламинарном режиме, при $Re > Re_{cr}$ возможно возникновение турбулентности. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от конкретного вида течения (течение в круглой трубе, обтекание шара и т. п.). В рассматриваемой задаче число Рейнольдса принимается равным $Re = 2 \cdot 10^4$, т.е. течение происходит в турбулентном режиме. Отметим, что для описания реальных течений приемлемую точность численного решения уравнений Навье-Стокса можно получить только при такой расчётной сетке, ячейки которой меньше самого мелкого вихря. Это требует очень больших затрат расчётного времени даже на современных компьютерах и кластерах. Модели турбулентности же упрощают расчёт реальных потоков.

В настоящий момент создано большое количество разнообразных моделей для расчёта турбулентных течений. Они отличаются друг от друга сложностью решения и точностью описания течения.

Основная идея моделей сводится к предположению о существовании средней скорости потока и среднего отклонения от него: $u_i(t) = \bar{u}_i + u'_i(t)$. После упрощения уравнений Навье-Стокса новая система уравнений носит название "осредненных по Рейнольдсу

уравнений Навье-Стокса" (Reynolds averaged Navier-Stoks, RANS):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_i u_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0,$$

где \bar{p} – средние давления, индексы $i=1,2,3$ и $j=1,2,3$ соответствуют координатам x, y, z . Сдвиговые (рейнольдсовы) напряжения $\overline{\rho u'_i u'_j}$ являются дополнительными шестью неизвестными к параметрам осредненного движения (\bar{u}_i, \bar{p}) и аппроксимируются, как правило, по гипотезе Буссинеска:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (4)$$

где μ_T – дополнительная вязкость, вызванная пульсациями; k – осредненная энергия турбулентных пульсаций (TKE).

Новая система уравнений превращается в незамкнутую. Способом, позволяющим замкнуть систему, является привлечение полуэмпирических соотношений (моделей турбулентности), связывающих дополнительные члены (напряжения Рейнольдса) с осредненными по времени компонентами скорости.

Поставленная перед нами задача решалась при помощи численного моделирования процесса обтекания объекта с использованием следующих моделей турбулентности: k - ϵ и SST.

До недавнего времени наибольшей популярностью среди RANS моделей турбулентности пользовались двухпараметрические модели, основанные на рассмотрении кинетической энергии турбулентных пульсаций k . В качестве второго уравнения используют либо уравнение переноса скорости диссипации энергии ϵ или удельной скорости диссипации энергии ω ; модели принято называть " k - ϵ " и " k - ω ", соответственно.

Основываясь на том, что модели турбулентности типа " k - ϵ " с высокой степенью достоверности описывают сдвиговые течения на

удалении от стенки, а модели типа " $k-\omega$ " предпочтительны при моделировании пристеночных течений, Ф. Менгер в 1993 году предложил "гибридную" модель SST (shear stress transport, перенос сдвиговых напряжений). Модель эффективно сочетает устойчивость и точность стандартной $k-\omega$ модели в пристеночных областях и эффективность $k-\epsilon$ модели на удалении от стенок с плавным переходом между ними (вводом стыковочной функции).

Пространственно-временная дискретизация

Важным аспектом решения уравнений Навье-Стокса является схема дискретизации. Наиболее эффективным в настоящее время признан "метод конечных объемов" (МКО), не требующий столь детального моделирования пограничного слоя, как метод конечных элементов (МКЭ), и более удобный при описании сложных расчетных областей реальных застроек, чем метод конечных разностей. Для процедуры дискретизации используются стандартные процедуры разбиения на конечные элементы (тетраэдры, пирамиды или шестигранники), но после загрузки сетка интерпретируется иным образом. Ячейки взаимно стыкуются своими гранями. Структура, образованная ячейками, называется расчетной сеткой.

Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочно-непрерывные функции, которые описывают изменение зависимой переменной (например, одной из составляющих скорости) между сеточными узлами. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения. Результирующая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решается с помощью метода Algebraic Coupled Multigrid (AMG). Вычислительные затраты этого метода линейно зависят от числа узловых точек.

Современные подходы (схемы адвекции второго порядка, применение пристеночных функций и увеличение числа точек интегри-

рования в ячейке) значительно снижают требования к расчетной сетке и ресурсам ЭВМ [7].

Для оценки сходимости решения к точному может быть применена экстраполяция Ричардсона [3].

4. ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ, ФИЗИЧЕСКОЙ И КО-МОДЕЛЕЙ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Геометрическая модель

В качестве обтекаемого тела был выбран параллелепипед. Соотношение сторон в поперечном прямоугольном сечении (в плоскости XY) $B/D=4$ (ширина/толщина). По оси Z выбирался размер $L = D_z = 0.01$ м. Скругления по углам обтекаемого объекта не вводились, т.е. $R=0$. Размеры прямоугольной расчетной области по оси X выбирались из условия, что поток вдали от обтекаемого тела считается установившимся, а именно, $D_x = 5$ м, $A_x = 1$ м. Размеры по оси Y соответствуют реальным размерам АДТ Рурского университета Бохума, а именно, $D_y = 1.6$ м, $D_{y_{top}} = 0.88$ м, $D_{y_{bot}} = 0.72$ м.

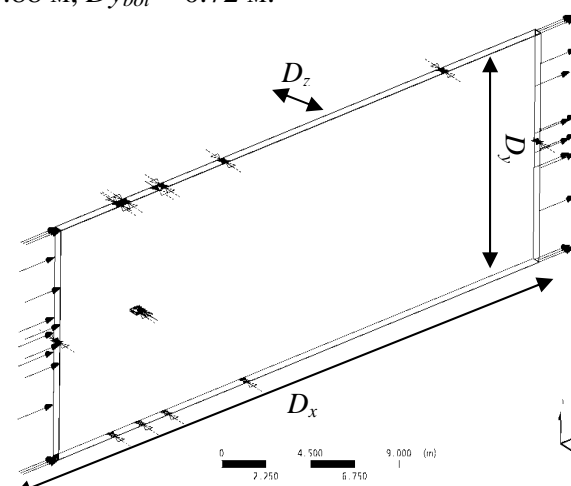


Рис. 2. Геометрическая модель и расчетная область с обозначением размеров

Начало прямоугольной декартовой системы координат расположено в центре обтекаемого параллелепипеда. Ось X направлена по потоку, ось Y – перпендикулярно потоку вверх, ось Z – из плоскости XY .

Физическая модель

Области расчета был присвоен неподвижный (Domain Motion = Stationary) домен Air, параметры которого были заданы: тип среды – идеальный воздух (Fluid: Air Ideal Gas) при температуре 285K и давлении 1 атм. Применялись два вида моделей турбулентности: $k-\epsilon$ и SST. Пристеночные функции турбулентности задавались, соответственно: Scalable и Automatic. Коэффициент динамической вязкости равен $1.83 \cdot 10^{-5}$ [кг/м⁻¹ с⁻¹].

Конечно-объемная (КО) модель

Расчетная сетка генерировалась в специализированном ПК ANSYS ICEM. Для проведения численного эксперимента создана расчетная структурированная сетка 100 000 ячеек (объемных элементов). Вблизи обтекаемого объекта сетка сгущена (см. рис. 3). Безразмерная величина первого элемента-объема в пограничном слое, включающем 10 КО, составляет $\delta_l/B=8.4 \cdot 10^{-4}$. Соотношение размеров соседних элементов вблизи обтекаемого тела 1.02, на достаточно удаленном расстоянии – 1.22.

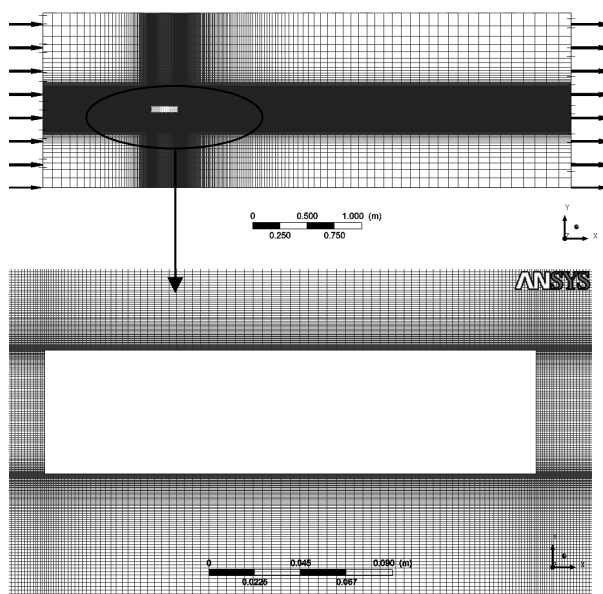


Рис. 3. КО-модель

Граничные и начальные условия

Для границ расчетной области назначены следующие условия.

На "входе" (INLET) скорость потока была задана в декартовой системе координат: $u = 4.9065$ м/с, $v = 0$ м/с, $w = 0$ м/с.

В соответствие с экспериментом масштаб турбулентности принят равным 0.03 м, интенсивность турбулентности 3%.

На "выходе" (OUTLET) потоку указываются нулевые дополнительные давления. На боковых границах области (BACK, FRONT) предполагаются условия симметрии. Верхней (TOP) и нижней (BOT) поверхности расчетной области задается условие типа Wall (стенка), исключающее проникновение вещества через поверхность (Wall Influence On Flow = Free Slip). Поверхностям тела (BODY) было также задано условие типа Wall (Wall Influence On Flow = No Slip). Шероховатости на "стенках" заданы не были.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Выполнены расчеты в стационарной и нестационарной постановках для двух вариантов моделей турбулентности – $k-\epsilon$ и SST. Стартовыми для нестационарных расчетов послужили предварительно полученные результаты стационарных расчетов с использованием соответствующих моделей турбулентности. Физическое время счета для нестационарных расчетов – 2 с (поток проходит 2 расчетные области). Шаг по времени выбран $\Delta t = 10^{-5}$ с. Расчеты проводились на вычислительном кластере НОЦ КМ МГСУ. Для каждой задачи использовался один вычислительный узел кластера с 8 ядрами.

В таблицах 1 и 2 представлены результаты стационарных и нестационарных расчетов, соответственно, в сопоставлении с экспериментальными данными. За контролируемые параметры приняты аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления $CD=F_x/q/B$, подъемной силы $CL=F_y/q/B$ и момента $CM=M/q/B^2$, где F_x , F_y – составляющие ветровых нагрузок (по потоку и в поперечном направлении, соответственно),

$q = \frac{1}{2} \rho \cdot Vh^2$ – динамическое давление ветра,
 Vh – скорость потока на характерной высоте.

Таблица 1

Средние значения аэродинамических коэффициентов CD , CL и CM . Результаты стационарных расчетов и эксперимента в АДТ

	RANS SST	RANS $k-\varepsilon$	АДТ
CD	0.2645	0.2637	0.2318
CL	-0.0050	0.0023	0.0670
CM	-0.0081	-0.0078	-0.0007

Таблица 2

Средние значения аэродинамических коэффициентов. CD , CL и CM . Результаты нестационарных расчетов и эксперимента в АДТ

	URANS SST	URANS $k-\varepsilon$	АДТ
CD	0.2638	0.3133	0.2318
CL	-0.0078	0.0079	0.0670
CM	-0.0080	-0.0090	-0.0007

Анализируя результаты, приведенные в таблицах 1 и 2, можно сделать вывод, что для расчетов в нестационарной постановке модель SST дает более близкие к экспериментальным значения коэффициента лобового сопротивления. Расхождение с экспериментом для SST – 14%, для $k-\varepsilon$ – 35%. Аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента как для численного эксперимента, так и проведенного в АДТ близки к нулю. Для оценки интегральных характеристик в подобных задачах с целью экономии времени можно ограничиться проведением расчетов в стационарной постановке, т.к. погрешность вычисления аэродинамических коэффициентов не превышает таковую для нестационарных расчетов.

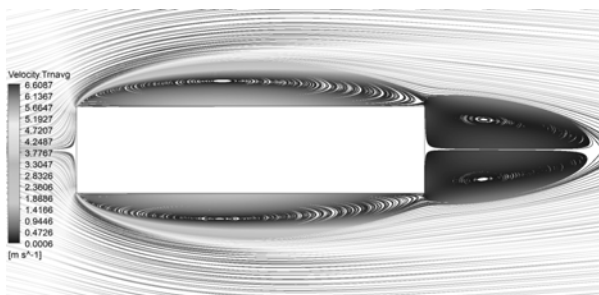


Рис. 4. Линии тока осредненного поля скоростей потока. Нестационарный расчет. Модель турбулентности URANS SST

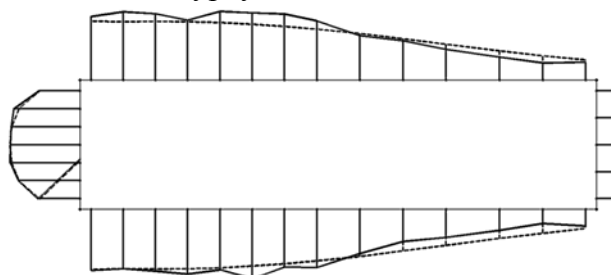


Рис. 5. Эпюра осредненных по времени значений Cp . Нестационарный расчет. Пунктирная линия – URANS SST, сплошная линия – эксперимент в АДТ



Рис. 6. Линии тока средних скоростей потока. Нестационарный расчет. Модель турбулентности URANS $k-\varepsilon$

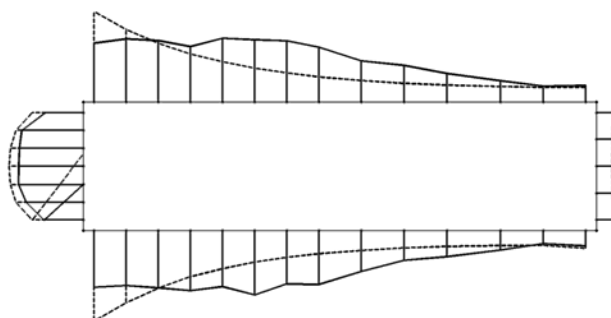


Рис. 7. Эпюра осредненных по времени значений Cp . Нестационарный расчет. Пунктирная линия - URANS $k-\varepsilon$, сплошная линия – эксперимент в АДТ

На рисунках 4 и 6 представлены картины обтекания исследуемого объекта турбулентным ветровым потоком, полученные из нестационарных расчетов с применением различных моделей турбулентности: SST и $k-\varepsilon$, соответственно. По рисункам 5 и 7 с изображением эпюр осредненных по времени значений аэродинамического давления $Cp = p/q$ в сопос-

тавлении с экспериментальными данными можно сделать вывод, что модель *SST* дает более реалистичную картину распределения давления на поверхности тела. Соответственно, можно предположить, что поле скоростей потока она предсказывает тоже лучше, но окончательный вывод об этом нельзя сделать не имея картины обтекания, визуализированной тем или иным способом в АДТ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты численного моделирования аэродинамики прямоугольной призмы с соотношением сторон в сечении 1:4 в двумерной постановке. Эта тестовая задача весьма значима для понимания особенностей аэродинамики широкого спектра плохообтекаемых тел, характерных для объектов гражданского строительства (таких, как большепролетные мосты, высотные здания и т. д.).

Из сравнения численных результатов с экспериментальными данными, полученными в АДТ Рурского университета Бохума, для моделирования турбулентного воздушного потока вблизи изолированных сооружений прямоугольного профиля наиболее адекватной была определена модель турбулентности *SST*.

Запланированы и реализуются следующие этапы уточненного решения представленной задачи:

- исследование влияния подробности и структуры сетки на численные результаты;
- решение задачи в трехмерной постановке для исследования значимости трехмерных эффектов;
- разработка методики проведения аэродинамического расчета строительных сооружений с применением как численных, так и экспериментальных методов как взаимодополняющих друг друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ANSYS CFX 11.0. User's Guide. // Canonsburg, 2009.

2. Bruno L., Fransos D., Coste N., Bosco A., 3D flow around a rectangular cylinder: a computational study. BBA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics and Applications, Milano, 2008.
3. Franke, J., Hirsch, C., Jensen, A.G., Krüs, H.W., Schatzmann, M., Westbury, P.S., Miles, S.D., Wisse, J.A., Wright, N.G. Recommendations on the use of CFD in wind engineering. Proceedings of the International Conference on Urban Wind Engineering and Building Aerodynamics // in: van Beeck JPAJ (Ed.), COST Action C14, Impact of Wind and Storm on City Life Built Environment, von Karman Institute, Sint-Genesius-Rode, Belgium, 2004.
4. Norberg C., Flow around rectangular cylinders: pressure forces and wake frequencies. Journal of Fluid Mechanics, 1993.
5. Okajima A., Strouhal numbers of rectangular cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 1982.
6. Shimada K., Ishihara T., Application of a modified k-ε model to the prediction of aerodynamic characteristic of rectangular cross – section cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 2002.
7. Дубинский С. И., Численное моделирование ветровых воздействий на высотные здания и комплексы. Дисс. на соискание ученой степени к.т.н. М., МГСУ, 2010.
8. Афанасьева И.Н., Дубинский С.И., Белостоцкий А.М., Численное моделирование турбулентного воздушного потока в зоне изолированных сооружений прямоугольного профиля. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. тр. №13/ Под ред. Сидорова В.Н. и Савостьянова В.Н./ МГСУ – Москва, 2010. –372 с.

Афанасьева Ирина Николаевна, инженер-программист ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), аспирантка кафедры Информатики и прикладной математики, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: rena1986@mail.com.

Irina N. Afanasyeva, engineer-programmer of Research Center StaDyO, postgraduate of Department of Applied Mathematics and Information Technology, junior researcher of Center of computing modeling, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavscoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: rena1986@mail.com.

ИЗГИБ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ БАЛКИ ПО ДЛИНЕ

Е.В.Барменкова, В.И.Андреев

ФГБОУ ВПО "Московский государственный строительный университет", г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена методу расчета двухслойной балки на упругом основании, являющейся моделью системы «конструкция – фундамент – основание», позволяющему учесть конструктивные особенности и размеры конструкции.

Ключевые слова: изгиб, двухслойная балка, фундамент, упругое основание, прогибы, напряжения, жесткость, метод начальных параметров

THE BENDING OF THE TWO-LAYER BEAM ON THE ELASTIC BASIS TAKING INTO ACCOUNT CHANGE OF RIGIDITY OF THE BEAM ON LENGTH

E.V.Barmenkova, V.I.Andreev

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to analysis of two-layer beam on elastic basis in terms of coupled design model «structure – foundation – basis» with some specific parameters of the structure.

Keywords: bending, two-layer beam, foundation, elastic basis, deflections, stresses, hardness, method of initial parameters

В работах [1,2] разработан метод моделирования системы «здание – фундамент – основание» с помощью двухслойной балки на упругом основании. Нижний слой балки (h_1, E_1) моделирует фундамент, а верхний (h_2, E_2) – конструкцию. Характерной особенностью модели является отказ от традиционной схемы расчета фундамента под действием нагрузки, приложенной к его верхней поверхности (рис. 1,а). Все уравнения и формулы для вычисления напряжений получены с учетом массовых сил (γ_1, γ_2), действующих как в фундаменте, так и в конструкции (рис.1,б).

В работе [1] показано, что задача сводится к уравнению

$$[EI]_{\text{пр}} \frac{d^4 v}{dx^4} + C_1 v = q^*, \quad (1)$$

где v – прогиб балки; $[EI]_{\text{пр}}$ – приведенная жесткость сечения; $q^* = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$; C – жесткость основания. Подчеркнем, что уравнение (1) по форме совпадает с уравнением изгиба однослойной балки, а существенным отличием в рассматриваемой задаче является входящая в уравнение (1) приведенная жесткость балки. Казалось бы, что подобное уравнение можно получить, непосредственно рассматривая схему, показанную на рис. 1,в. Однако при этом формулы для напряжений будут иными, нежели выведенные из расчетной схемы 1,б.

В настоящей статье приводится расчет двухслойной балки переменной по длине жесткости. Характеристики верхнего слоя (h_2, E_2, γ_2) в общем случае являются переменными по длине балки величинами. Решение задачи получено с помощью метода начальных параметров [3]. Пролет балки делится на ряд участков (рис. 2), для каждой точки разбиения записывается выражение

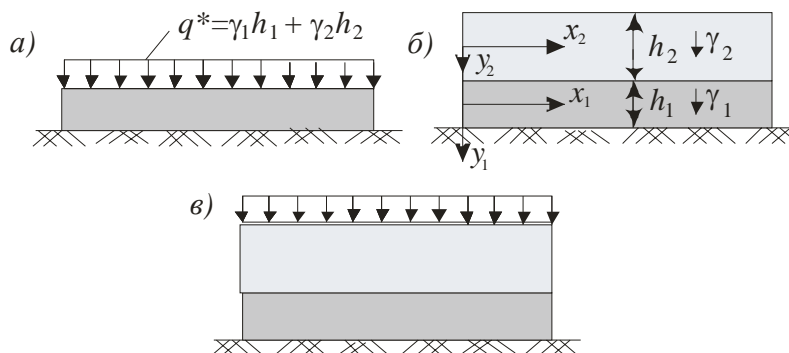


Рис. 1. Расчетные схемы изгиба балки на упругом основании

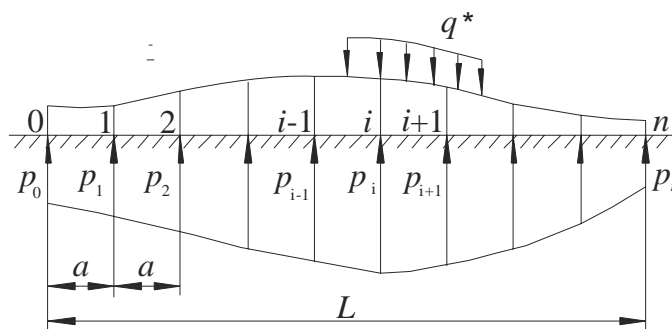


Рис. 2. Балка переменной жесткости на упругом основании

прогибов, которое приравнивается к соответствующим осадкам поверхности основания. При этом изменение жесткости по длине каждого участка предполагается постоянным, т.е. рассматривается балка кусочно-постоянной жесткости.

Пусть балка имеет n участков равной длины a , занумерованных от 0 до n . Точки разбиения имеют абсциссы $x_i = ia (i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Для каждого сечения с учетом гипотезы Винклера можно записать равенство

$$v_i = \delta_i = \frac{p_i}{C}, \tag{2}$$

где v_i – прогиб балки в точке i , δ_i – осадка поверхности основания.

Здесь v_i необходимо выразить в функциях неизвестных реактивных давлений $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ и известной внешней нагрузки.

Рассмотрим балку, имеющую свободные концы. Учитывая, что на концах балки M и Q отсутствуют, прогиб любого сечения i можно представить в виде

$$v_i = v_0 + v_i(\theta_0) + v_i(p) + v_i(q). \tag{3}$$

При выводе формул прогибов от реактивных давлений основания $v(p)$ в общем случае криволинейная эпюра реакций заменяется кусочно-линейной с переломами в точках $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Поскольку на отдельных участках балки эпюра реакций имеет вид трапеции, то, поделив каждую такую трапецию на два треугольника, можно составить выражения для прогибов сечений $1, 2, 3, \dots, n$.

Составляя уравнения (2) последовательно для каждого сечения и учитывая формулу (3), будем иметь ряд уравнений, которые совместно с двумя уравнениями равновесия ($\sum Y=0$, $\sum M=0$) решают поставленную задачу.

Сумма проекций всех сил на вертикальную ось

$$(p_0 + 2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_{n-1} + p_n) \frac{a}{2} + \sum Y_b = 0, \quad (4)$$

где Y_b – сумма проекций всех внешних сил на вертикальную ось.

Сумма моментов всех сил относительно точки n

$$[(3n-1)p_0 + 6(n-1)p_1 + 6(n-2)p_2 + \dots + 6p_{n-1} + p_n] \frac{a^2}{6} + \sum M_{nb} = 0, \quad (5)$$

где M_{nb} – сумма моментов всех внешних сил относительно точки n , расположенной на правом конце балки.

Совместное решение уравнений (2) – (5) дает возможность определить все неизвестные значения реакций основания и начальных параметров.

В случае скачкообразного изменения приведенной изгибной жесткости балки следует находить значение приведенных изгибных жесткостей ближайших занумерованных сечений.

При расположении скачка между занумерованными сечениями (рис. 3,а) имеем формулы

$$\begin{aligned} [EI]_{i,нр} &= \frac{2a[EI]_{i-1}[EI]_{i+1}}{d[EI]_{i-1} + (a+c)[EI]_{i+1}}; \\ [EI]_{i+1,нр} &= \frac{2a[EI]_i[EI]_{i+2}}{c[EI]_{i+2} + (a+d)[EI]_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если скачок совпадает с границей двух участков (рис. 3,б), то

$$i,нр = \frac{2[EI]_{i-1}[EI]_{i+1}}{[EI]_{i-1} + [EI]_{i+1}}. \quad (7)$$

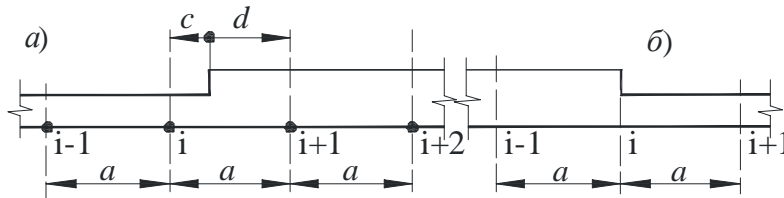


Рис. 3. Примеры расположения мест изменения жесткости балки, а) между занумерованными сечениями; б) в занумерованном сечении

После определения реакций основания $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ вычисляются значения поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила в сечении i подсчитывается по формуле:

$$Q_i = \frac{a}{2} \left[p_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} p_j + p_i \right] + Q_{ib}, \quad (8)$$

где Q_{ib} – поперечная сила в сечении i от внешней нагрузки.

Выражение для определения изгибающего момента в сечении i :

$$M_i = \frac{a^2}{6} \left[(3i-1)p_0 + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)p_j + p_i \right] + M_{ib}. \quad (9)$$

где M_{ib} – изгибающий момент в сечении i от внешней нагрузки.

Пример расчета. Рассмотрим изгиб двухслойной балки с переменным по длине поперечным сечением, свободно лежащей на упругом Винклеровском основании, со следующими характеристиками: $L = 40$ м, $b = 1$ м, $C = 50000$ кН/м³; $h_1 = 1$ м, $E_1 = 10^7$ кПа, $\gamma_1 = 25$ кН/м³; при

Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом изменения жесткости балки по длине

$x \in (0,10)$ и при $x \in (30,40)$ $h_2 = 0$, $E_2 = 0$, $\gamma_2 = 0$; при $x \in (10,30)$ $h_2 = 8$ м, $E_2 = 10^6$ кПа, $\gamma_2 = 2,5$ кН/м³.

Разобьем длину балки на 4 участка равной длины $a = 10$ м. Вследствие симметрии неизвестными будут только три значения погонных интенсивностей реакций в точках 0, 1 и 2 ($p_0 = p_4$, $p_1 = p_3$). Составляя уравнения (2) для сечений 1, 2 и учитывая формулы (2) и (3), будем иметь 2 уравнения, которые совместно с уравнением равновесия (4) позволяют определить значения неизвестных p_0 , p_1 , p_2 .

Значения изгибающих моментов и поперечных сил для i сечения находятся по формулам (8) и (9).

Прогибы балки определяются по формуле:

$$v_i = \frac{P_i}{C}, \quad (10)$$

Напряжения σ_x , τ_{xy} и σ_y определяются по формулам [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xi} &= \frac{E_i M_z y}{[EI]_x}; & \tau_{xy}^{(i)} &= -\frac{E_i}{2[EI]_x} Q_y (y^2 - y_i^2); \\ \sigma_{y1} &= \frac{E_1}{2} r \left(y_n^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2y_n^3}{3} \right) - \gamma_1 (y - y_n) - p; \\ \sigma_{y2} &= \frac{E_2}{2} r \left(y_6^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2y_6^3}{3} \right) - \gamma_2 (y - y_6), \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь y_6 и y_n соответственно расстояния от центра тяжести до верхних и нижних волокон балки. Эпюры напряжений приведены на рисунке 4 (эпюра σ_x построена в центре балки, эпюры σ_y и τ_{xy} построены для сечения $x = 10$ м).

На рис. 4 приведена эпюра прогибов в рассматриваемой балке (кривая 1) и эпюра в однослойной балке (фундаменте), нагруженной в средней зоне нагрузкой, соответствующей весу верхнего слоя.

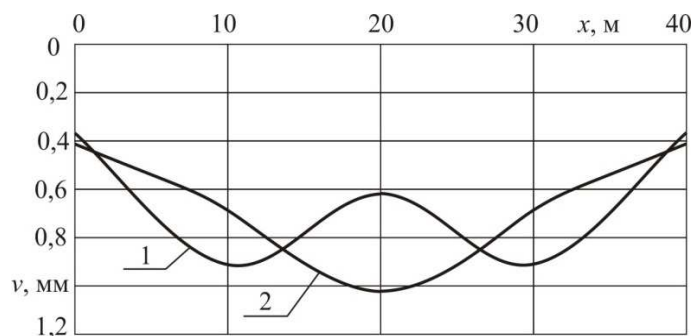


Рис. 4. Эпюры прогибов в двухслойной (1) и однослойной (2) балках

Эпюры напряжений приведены на рисунке 5 (эпюра σ_x построена в центре балки, эпюры σ_y и τ_{xy} построены для сечения $x = 10$ м).

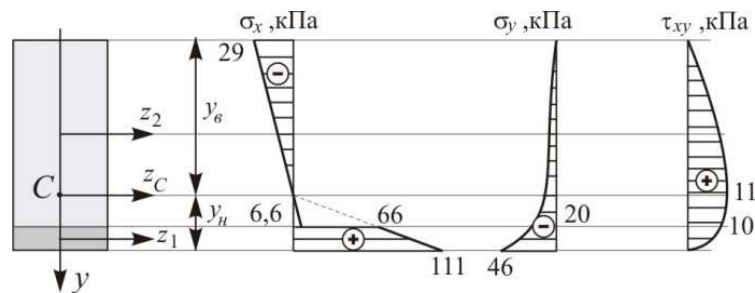


Рис. 5. Эпюры напряжений в двухслойной балке.

Таким образом, для расчета двухслойной балки переменной по длине жесткости на упругом основании с учетом массовых сил можно использовать методику, описанную выше, а напряжения можно определить, используя полученные значения внутренних усилий, согласно формулам (11).

Литература

1. Андреев В.И., Барменкова Е.В. Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом массовых сил. XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering». Proceedings. Архангельск 01.07 – 05.07.2009. Warszawa. 2009 – pp. 51-56;
2. Andreev V.I., Barmenkova E.V. A two-layer slab bending on an elastic basis with consideration of dead weight. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering // Volume 6, Issue 1,2 ; 2010p.33-38
3. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: «Будівельник», 1967. – 184 с.

Literature

- 1.Andreev V.I., Barmenkova E.V.Bendingtwo-layerbeam on elastic foundationconsideringthe mass forces.XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering».Proceedings.Archangel01.07 - 05.07.2009.Warszawa,2009- pp.51-56
- 2.Andreev V.I., Barmenkova E.V.Atwo-layer slab bending on an elastic basis with consideration of dead weight.International Journal for Computational Civil and Structural Engineering // Volume6, Issue 1,2; 2010pp.33-38
- 3.KlepikovS.N.The calculation ofstructures on elastic foundation.- Kiev: "Budivelnik" ,1967.–184p.

129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, МГСУ
 +7(985)183-57-42. e-mail: asv@mgsu.ru
 Рецензент: проф., д.т.н. А.М. Белостоцкий

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧЕТЫРЕХПАНЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ В УСЛОВИЯХ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

¹*М.М. Бегичев*

¹Аспирант, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

АННОТАЦИЯ: В работе исследована возможность применения динамического расчета для анализа сценариев потери устойчивости плоской четырехпанельной фермы на основе линейно упругой, нелинейно-упругой и упругопластической моделей материала ее стоек. Рассмотрено влияние коэффициента конструкционного демпфирования на результат исследования.

Ключевые слова: устойчивость фермы, статическое нагружение, динамическое нагружение, линейно-упругий материал, нелинейно-упругий материал, упругопластический материал.

INVESTIGATION OF STABILITY OF THE GIRDER UNDER STATIC AND DYNAMIC LOADING IN VIEW OF PLASTIC DE- FORMATION.

¹*Begichev M.*

¹Graduate student, Moscow State University of Railway Engineering

ABSTRACT: In this work we investigated the possibility of using dynamic loading for analysis of loss of stability of a plane girder based on linear elastic, nonlinear elastic and elasto-plastic material models. Also we examined the influence of structural damping factor on the outcome of the study.

Key words: stability of girder, static loading, dynamic loading, linear elastic material, nonlinear elastic material, elasto-plastic material

.При проектировании многих решетчатых металлоконструкций, работающих преимущественно на осевую нагрузку (например крановые башни), возникают проблемы общей и местной устойчивости [1]. В настоящей работе в геометрически нелинейной постановке рассмотрены задачи общей устойчивости симметричной плоской четырехпанельной фермы, сжатой двумя вертикальными силами (*рис. 1 а*).

Исследованы возможные сценарии потери устойчивости фермы в зависимости от модели материала ее элементов. Диагонали считались линейно упругими, а материал стоек принимался:

- 1) линейно-упругим;
- 2) нелинейно-упругим;

3) упругопластическим.

Соответствующие диаграммы деформирования материалов показаны на *рис. 1 б, в, г*. Решение задач устойчивости выполнено с использованием комплекса NASTRAN в условиях статического и динамического нагружения фермы. Ферма моделировалась одномерными стержневыми элементами, работающими только на растяжение и сжатие. Для построения диаграмм равновесных состояний использован метод Ньютона – Рафсона. При динамическом нагружении силы возрастали от нуля до максимальных значений по линейному закону пропорционально одному параметру. Исследовано влияние полного времени нагружения на величину критической нагрузки. Для провоцирования

потери устойчивости, помимо сил P , в тех же узлах дополнительно прикладывались небольшие горизонтальные усилия εP ($\varepsilon=0,001$).

Согласно теореме В.И. Возлинского [2] потеря устойчивости фермы произойдет в

точке устойчивой симметричной бифуркации, т.е. «в малом», так как докритическое равновесие фермы единственное и неполное. Чувствительность к несовершенствам при такой бифуркации весьма умеренная.

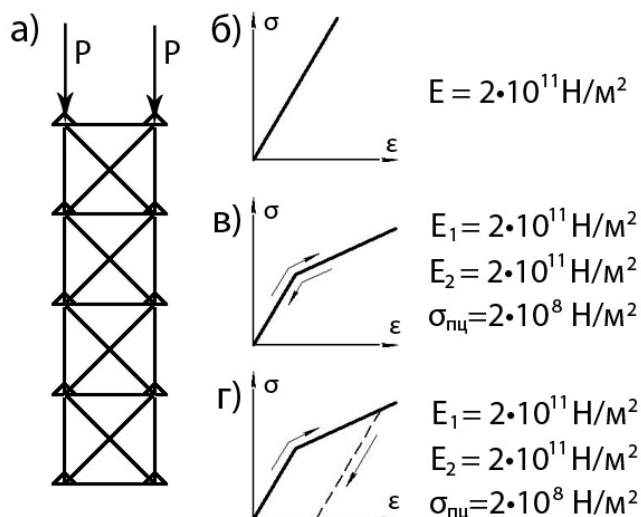


Рисунок 1.

Расчетная схема и использованные диаграммы деформирования материала

- а) расчетная схема фермы; б) линейно упругая; в) билинейная;
- г) билинейная с учетом разгрузки

МАТЕРИАЛ СТОЕК ФЕРМЫ – ЛИНЕЙНО УПРУГИЙ.

Сначала нагрузка в узлах фермы прикладывалась статически. При использовании линейно упругой модели материала (модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны $E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,3$) потеря устойчивости исходного равновесия фермы – двухступенчатая [3]. В этом случае при нагрузке $P_{кр1}$ симметрично нагруженная ферма потеряла устойчивость «в малом» и перешла в новое несимметричное и ограничено устойчивое закритическое равновесие (рис. 2, участок диаграммы равновесий 2-3).

В таком состоянии ферма еще «держит» возрастающую нагрузку вплоть до достижения второй критической силы ($P_{кр2} = P_{кр}^*$), при которой полное несимметричное равновесие теряет устойчивость в предельной точке и хлопком переходит в далекое и сильно

деформированное финальное равновесие (рис. 2 точка 4), характеризующееся выворачиванием трех верхних панелей фермы. В этих панелях стойки оказались растянутыми.

Далее устойчивость этой же фермы исследована при динамическом приложении нагрузки. Существенное влияние на величину критической силы оказало время приложения полной нагрузки ($t_{нагруж}$). Проведены сравнительные расчеты при $t_{нагруж} = 2, 5, 20, 60$ сек. Установлено, что чем меньше время полного нагружения (выше скорость возрастания нагрузки), тем выше критическая бифуркационная нагрузка (рис. 3) и тем больше расхождение со значением $P_{кр1}$, полученным при статическом нагружении. Так при $t_{нагруж} = 2, 5, 20, 60$ сек указанные расхождения составили соответственно $\Delta P_{кр1} \approx 6\%, 3\%, 2,5\%, 0,5\%$ в большую сторону. На рис. 3 показано поведение фермы в условиях динамического нагружения при различном вре-

Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом изменения жесткости балки по длине

мени достижения полной нагрузки. Видно, что при быстром нагружении $t_{нагруж}=2$ сек время затухания колебательного процесса

около далекого устойчивого равновесия значительно больше, чем при нагружении в течение 20 сек.

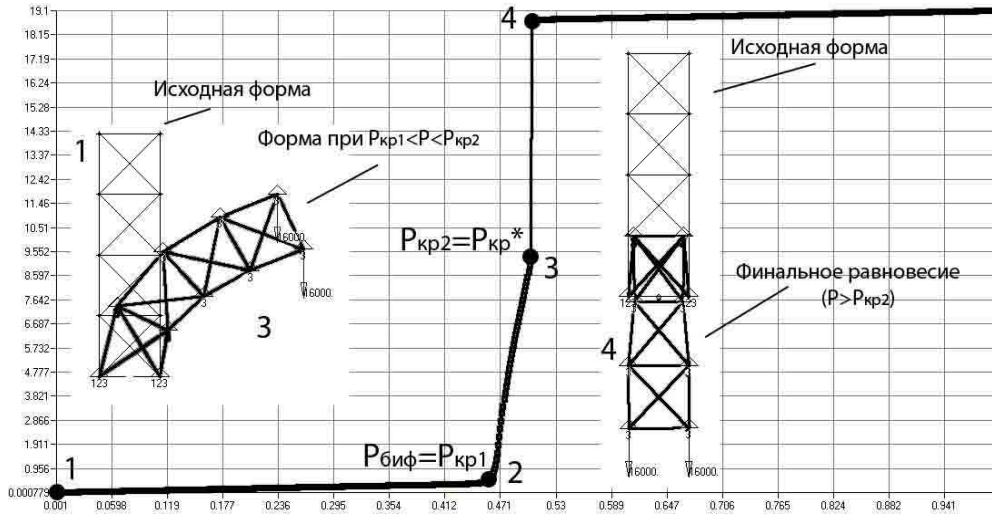


Рисунок 2.

К исследованию устойчивости четырехпанельной фермы при использовании линейно упругой модели материала статическим нагружением.

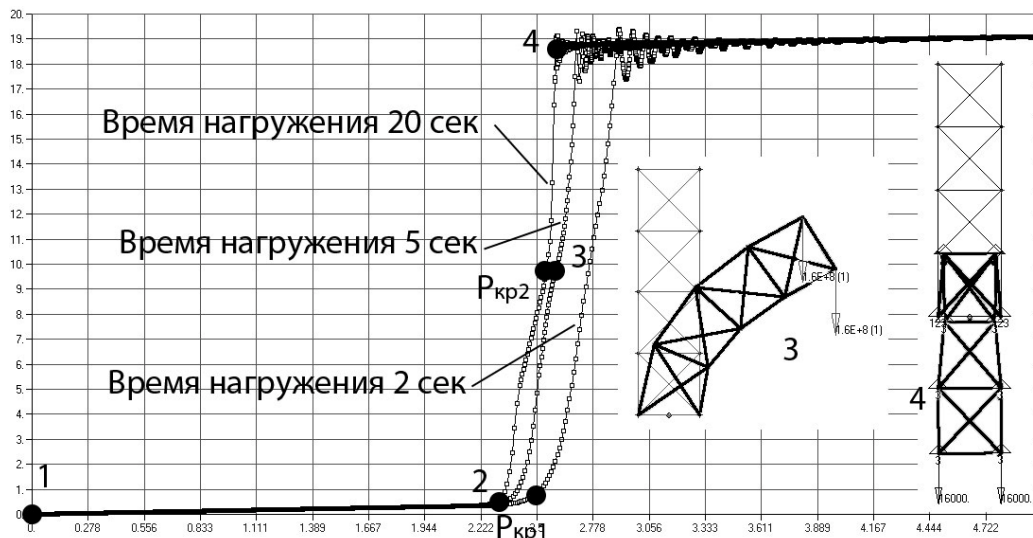


Рисунок 3.

К исследованию устойчивости четырехпанельной фермы при использовании линейно упругой модели материала динамическим нагружением.

МАТЕРИАЛ СТОЕК ФЕРМЫ – НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ.

В следующем варианте расчета для стоек была принята билинейная (рис. 1 в) диаграмма деформирования упругого материала. Зависимость $\sigma(\varepsilon)$ представлена ломаной линией, состоящей из двух участков, с модулями упругости соответственно равными

$E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $E_2 = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$. Значение предела пропорциональности принималось равным $\sigma_{nc} = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

При статическом приложении нагрузки на первом этапе нагружения (рис. 4, участок диаграммы равновесий 1-2) ферма сохраняла симметричную форму равновесия, при напряжениях как меньших, так и больших σ_{nc}

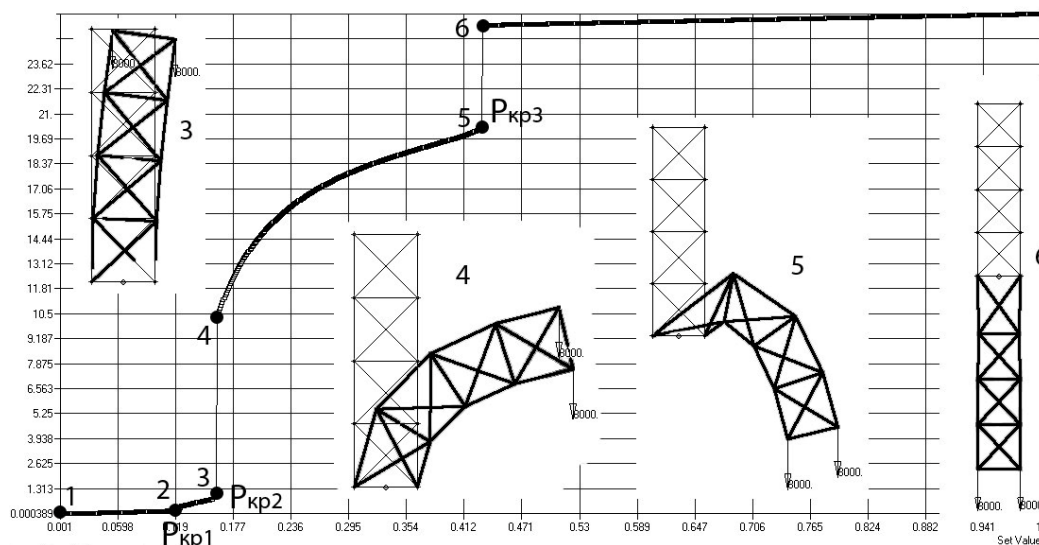


Рисунок 4.

К исследованию устойчивости четырехпанельной фермы с нелинейно-упругим материалом стоек при статическом нагружении.

По достижении критической бифуркационной нагрузки $P_{кр1} = P_{биф}$ ферма потеряла устойчивость «в малом» в точке симметричной устойчивой бифуркации и перешла в новое ограниченно устойчивое за критическое равновесие (рис. 4 участок диаграммы равновесий 2-3). При этом наблюдалась постепенная разгрузка левой нижней стойки (в конце указанного участка она даже оказалась растянутой). В правой нижней стойке сжимающие усилия резко возросли. При достижении второй критической нагрузки $P_{кр2}$ (рис. 4 точка 3) ферма хлопком перешла в новое равновесие (рис. 4 точка 4). Все правые стойки - сжаты, а левые - растянуты. Деформации фермы - плавные. Наконец, при достижении третьей критической силы $P_{кр3}$ (в точке 5 на рис. 4) ферма «хлопком» переходит в «перевернутое» равновесие (точка

б), которое будет для рассмотренной фермы финальным, так как согласно принципу Торричелли приложенная к ферме нагрузка в этом случае занимает наинизшее возможное положение.

При динамическом нагружении фермы ($t_{нагруж} = 5$ сек) выяснилось, что весьма затруднительно определить точное значение нагрузки начала отклонения фермы от симметричного равновесия. Так на графике (рис. 5) точка 2 соответствует нагрузке $P = 1115$ Н. Статическое нагружение дало $P_{кр1} = 952$ Н ($\Delta P_{кр1} \approx 17\%$). Расчет с временем приложения нагрузки, увеличенным до $t_{нагруж} = 20$ сек, дает значительно более близкий к статическому нагружению результат $P_{кр1} \approx 970$ Н ($\Delta P_{кр1} \approx 2\%$). На рис. 5 толстыми линиями показан график перемещений левого верхнего узла фермы, полученный с помощью ди-

Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом изменения жесткости балки по длине

динамического анализа при величине конструкционного демпфирования $G = 0,01$; а тонкими линиями – для меньшей величины конструкционного демпфирования ($G=0,001$). По вышеуказанным графикам отчетливо видно, что при низкой величине

демпфирования ($G = 0,001$) конструкция достаточно продолжительное время совершает значительные по амплитуде затухающие колебания вокруг устойчивых положений равновесия.

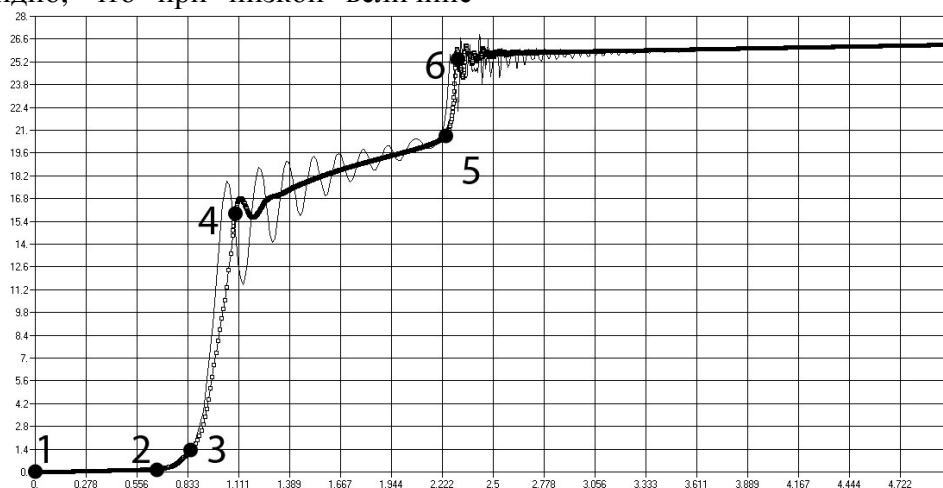


Рисунок 5.

К исследованию устойчивости нелинейно-упругой четырехпанельной фермы динамическим нагружением.

МАТЕРИАЛ СТОЕК ФЕРМЫ – УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ.

Упругопластический материал аналогично предыдущей модели соответствовал билинейной зависимости $\sigma(\varepsilon)$. Модули упругости для первого и второго участков соответственно принимались равными $E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $E_2 = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, а предел пропорциональности $\sigma_{\text{нц}} = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (рис. 1 г). Однако отличительной особенностью упругопластического материала от нелинейно-упругого является наличие в элементах нагруженной системы после разгрузки остаточных деформаций. При этом разгрузка и последующее нагружение происходят по линейному закону. Сначала рассмотрим результаты, полученные при статическом нагружении фермы. Как и в предыдущем случае (нелинейно-упругий материал), при использовании модели упругопластического материала, потеря устойчивости фермы произошла за пределами $\sigma_{\text{нц}}$. При наименьшей критической нагрузке

(рис. 6, $P_{\text{кр}1}$) сжатая ферма теряет устойчивость «в малом» и переходит в новое ограниченно устойчивое несимметричное равновесие (рис. 6, точка 3) Правая стойка догружается за счет разгрузки левой. Это несимметричное равновесие устойчиво вплоть до второй критической нагрузки ($P_{\text{кр}2}$), при которой ферма хлопком из предельной точки переходит в далекое сильно деформированное равновесие (рис. 6 точка 4). Дальнейшее закритическое поведение фермы практически повторяет поведение фермы с нелинейно упругими стойками (рис. 6).

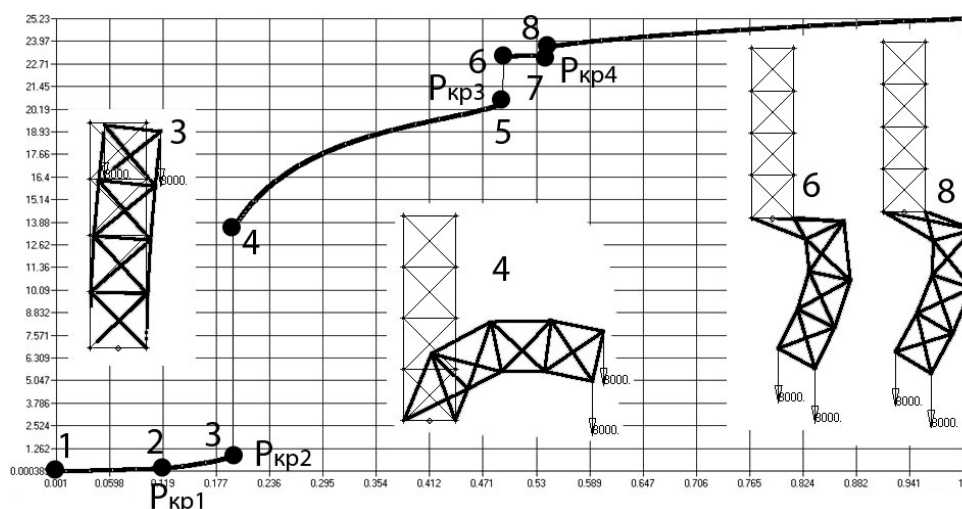


Рисунок 6.

К исследованию устойчивости четырехпанельной фермы с учетом пластических деформаций

Динамическое нагружение ($t_{нагруж} = 5$ сек) фермы (рис. 7) дало несколько завышенные (по сравнению со статикой) значения критических сил, причем расхождение оказалось больше, нежели при использовании линейно упругого материала. Так разница в первой критической силе между результатами статического и динамического расчетов составила $\Delta P_{кр1} \approx 13\%$. Причиной этого является слишком быстрое нагружение. Однако увеличение времени нагружения до $t_{нагруж} = 20$

сек уменьшило расхождение между критическими силами до $\Delta P_{кр1} \approx 1,2\%$. На рис. 7 показаны графики перемещения левого верхнего узла фермы при изменении величины конструкционного демпфирования. График, изображенный толстой линией соответствует результату, полученному при величине демпфирования $G = 0,01$, а тонкой линией - $G = 0,001$.

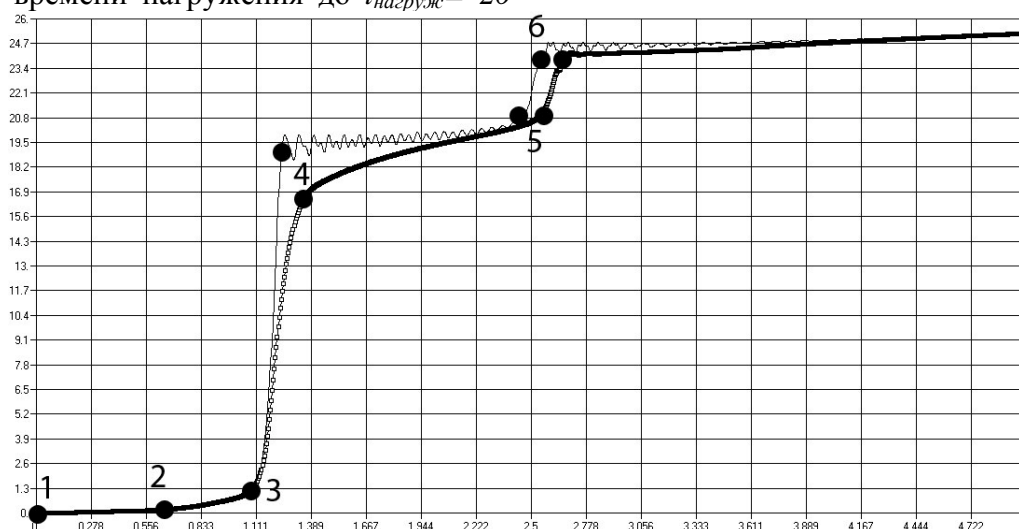


Рисунок 7.

К исследованию устойчивости упругопластической четырехпанельной фермы с упругопластическим материалом стоек при динамическом нагружении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование нелинейно упругой модели материала для анализа устойчивости фермы за счет значительного уменьшения жесткости конструкции при сжатии (по сравнению с линейно упругим материалом) значительно уменьшает критическую нагрузку $P_{кр1}$. Так если при использовании линейно упругого материала $P_{кр1} = 7200 \text{ Н}$, то для нелинейно упругого и упругопластического материалов вышеуказанная нагрузка составила 952 Н и 984 Н соответственно. Наличие разгрузки у модели упругопластического материала обуславливает более высокие нагрузки потери устойчивости фермы, наблюдаемые при использовании данной модели материала, по отношению к результатам полученным для фермы со стойками из нелинейно упругого материала. Нагрузки «хлопка» из предельной точки составили $P_{кр2} = 1280 \text{ Н}$ и 1568 Н для нелинейно-упругого и упругопластического материалов соответственно.

При динамическом нагружении величины критических нагрузок возрастают для всех используемых моделей материала. Поэтому для вычисления статических нагрузок при помощи динамического нагружения требуется брать достаточно маленькую скорость возрастания нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гос. изд. тех. тер. лит, 1955. 567с.
2. Возлинский В.И. О численной оценке области асимптотической устойчивости. Вопросы устойчивости точек ветвления равновесия. // Сборник теории устойчивости и ее применение. Новосибирск: Наука. СО АН СССР 1977. С94-100
3. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Исследование устойчивости упругих рам с учетом начальных несовершенств. // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2009», Москва, 06 – 09 апреля 2009 г., М.: РУДН, 2009, Т. II. С. 273 – 279.

¹⁾ Бегичев Максим Михайлович, Московский государственный университет путей сообщения, кафедра «Теоретическая механика», 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
e-mail: maxbegichev@yandex.ru

¹⁾ Maxim M. Begichev, Department of Theoretical Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering, 9, Obraztsova st., 127994, Moscow, RUSSIA,
e-mail: maxbegichev@yandex.ru

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ, ВЫЗВАННОГО ДВИЖЕНИЕМ ПОЕЗДОВ МЕТРОПОЛИТЕНА

А.М. Белостоцкий^{1,2}, А.А. Аул², А.И. Нагибович²

¹ ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО "Научно-исследовательский центр СтаДиО", г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье представлены результаты методических разработок и расчетно-экспериментальных исследований вибрационного состояния несущих конструкций строящихся и возведенных корпусов многоэтажных зданий, вызванного движением поездов метрополитена.

Ключевые слова: многоэтажные здания, транспортные вибрации, конечноэлементное моделирование, программный комплекс ANSYS, вибрационное состояние.

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL SIMULATION VIBRATIONAL STATE OF BEARING STRUCTURES TALL BUILDINGS, CAUSED BY THE MOVEMENT SUBWAY TRAINS

Alexander M. Belostotsky^{1,2}, Andrey A. Aul², Alexander I. Nagibovich²

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article presents the results of methodology investigations and computational-experimental studies of vibrational states of bearing structures high-rise buildings, caused by movement of subway trains.

Key words: high-rise buildings, traffic vibration, finite element modeling, software package ANSYS, vibrational state.

1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемый корпус жилого комплекса в зоне влияния "транспортных" вибраций (Москва, пр-т Вернадского около метро "Университет") – строящееся здание переменной этажности (11-19 надземных этажей + технический этаж), состоит из 12-и секций. В подземной части с 7 по 12 секцию предусмотрена автостоянка (2 этажа + технический этаж). В подземной части с 1 по 6 секцию предусмотрен технический этаж. Секции разделены между собой деформационными швами.

Несущая конструкция секции здания предусматривается в виде безригельного пространственного каркаса, вклю-

чающего соединение фундаментов, колонн, стен, а также ядер лестничных клеток, жёстко связанных с перекрытиями. По замыслу проектировщиков пространственная совместная работа конструкций здания на расчётные сочетания вертикальных и горизонтальных нагрузок обеспечивает достаточно равномерные осадку основания, нормативные прогибы плит перекрытий и допустимые раскрытия трещин.

Все основные несущие конструкции запроектированы из монолитного железобетона класса В25, В30 (колонны), с арматурой класса А500СП, А1 и жёстко соединены между собой в узлах сопряжения.

При разработке и реализации предлагаемой расчетно-экспериментальной методики учтены:

Конечноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна

- проектное расположение свай секций строящегося корпуса;
- сводная геолого-литологическая колонка и физико-механические характеристики грунтов представлены, инженерно-геологические разрезы площадки строительства.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ВИБРОИЗМЕРЕНИЙ

В соответствии с разработанной программой проведены 3 разнесенные по времени серии виброизмерений на фундаментных конструкциях двух секций строящегося корпуса в следующей хронологической последовательности:

- для 6-и точек на сваях угловой секции (выбраны 3 представительные точки);
- для 3-х точек фундаментной плиты ростверка угловой секции и 3-х точек на сваях рядовой секции;
- "повторные" – для 3-х точек ростверка угловой секции.

Получены и проанализированы для упомянутых точек:

- временные реализации виброускорений – "акселерограммы" – по 3-м направлениям (вдоль и поперек линии метро, вертикальные) для характерных интервалов до 800 сек;
- узкополосные спектры Фурье акселерограмм в диапазоне частот (0 - 100) Гц;
- "критериальные" среднеоктавные спектры акселерограмм (в дБ).

Виброизмерения выполнены также в 6-и точках "рядовой" секции полностью возведенного корпуса (по 2 точки в опорной и пролетной зонах перекрытий 1-го, 9-го и последнего этажей). Измерения позволили выявить вибрации от движения поездов метрополитена на весьма слабом уровне, мало отличающемся от постоянных вибраций от движения автотранспорта. Важный качественный вывод, который можно частично экстраполировать и на несущие конструкции исследуемого воз-

водимого корпуса: не зафиксировано значимого усиления вибраций на несущих конструкциях верхних этажей возведенного корпуса.

3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВИБРАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ, ВЫЗВАННОГО ДВИЖЕНИЕМ МЕТРОПОЕЗДОВ

Ввиду неустановившегося характера колебаний, ожидаемо плотного спектра собственных частот в вибрационно значимом диапазоне (0-70 Гц) – до 2000-3000 значений – и с учетом точности исходной информации (вибровоздействия, свойства материалов-сред, конструктивное исполнение) наиболее эффективным и "в разумный запас" представляется следующий набор гипотез и схем численного решения:

1) предварительный анализ собственных частот и форм колебаний КЭ-моделей "динамическое основание - конструкции секции" в энергетически значимом диапазоне (0-70 Гц) эффективным блочным методом Ланцоша с оценкой плотности частот и характера форм колебаний;

2) платформенная схема трехкомпонентного кинематического возбуждения фундаментной плиты (ростверка) секции, задаваемого трехкомпонентной "акселерограммой" для временных интервалов (представительно – 20 сек) с выявленными максимальными виброускорениями от движения поездов метрополитена;

3) прямое интегрирование по времени КЭ-уравнений движения секции по неявной безусловно устойчивой схеме Ньюмарка с шагом по времени, позволяющем "точно" реализовать все формы с частотами до 70 Гц, и Релевским демпфированием с коэффициентами пропорциональности, обеспечивающими уровень 0,05 от критического (для несущих железобетонных конструкций), получение временных реа-

лизаций виброускорений – ответных акселерограмм;

4) "нормативный" октавный спектральный анализ ответных акселерограмм на характерных высотных отметках секций 6 (1-й, 9-й и последний этажи) для показательных опорных (стены, колонны) и пролетных зон перекрытий, выбранных на основе предварительного анализа деформированного состояния.

Расчетное определение собственных частот и форм колебаний, статического и динамического (вибрационного) НДС несущих конструкций секций выполняются по верифицированному лицензионному программному комплексу ANSYS, реализующему развитые схемы методов конечных элементов и суперэлементов для расчетов пространственных комбинированных систем большой вычислительной размерности.

Для вычисления октавных спектров виброускорений был разработан и верифицирован на модельных задачах скрипт в программном пакете MATLAB на одноименном языке программирования. В данном скрипте используется встроенная функция $fft(X, n)$, реализующая дискретное быстрое преобразование Фурье. В функции X – массив данных, n – размерность массива.

4. ПОСТРОЕНИЕ И ВЕРИФИКАЦИЯ КЭ-МОДЕЛЕЙ СЕКЦИЙ ВОЗВОДИМОГО КОРПУСА

На основании проектных данных построены пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели двух секций корпуса в верифицированном программном комплексе ANSYS:

1) *КЭ-модели рядовой секции 5* (рис.1);

– в массе учитывается только вес (нормативный) несущих конструкций (суммарный вес здания – 105250кН).

– в массе учитывается вес (нормативный) несущих конструкций и нормативные нагрузки: полезная на перекрытия и покрытие, вес наружных стен, длительно дейст-

вующая составляющую снеговой нагрузки (суммарная – 155780кН).

2) *КЭ-модели угловой секции* (рис.1).

– учитывается только масса несущих конструкций (суммарный вес здания – 136200кН).

– учитывается вес несущих конструкций и нормативные нагрузки: полезную нагрузку на перекрытия и покрытие, вес наружных стен, а также длительно действующую составляющую снеговой нагрузки (суммарный вес здания – 207770кН).

Расчетные схемы секций корпуса №4 представляют собой пространственные оболочечно-стержневые модели, в которые включены фундаментная плита, плиты перекрытий и покрытия, стены, сваи, колонны, балки и "нагрузочные" балки. Элементы несущих ж/б конструкций моделируются пространственными стержневыми КЭ типа *BEAM188* (колонны, балки) и оболочечными КЭ типа *SHELL63* (фундаментная плита и фундаментный ростверк, плиты перекрытий и покрытия, стены). Сваи моделируются элементами типа *COMBIN14* (пружинный КЭ), имеющими жёсткость в направлении глобальной оси Z .

Все узлы модели приняты жесткими и имеют 6 степеней свободы (3 – перемещение, 3 – углы поворота).

Вычислительная размерность построенных ANSYS-моделей приведена в таблице

КЭ-модель	Количество узлов	Количество элементов
Секция 5	61301	79273
Секция 6	72370	92231

Граничные условия: сваи закреплены вдоль оси Z , пружины по фундаментной плите закреплены вдоль осей X и Y .

Разработанные расчетные модели адекватно отражают геометрико-жесткостные и инерционные свойства и нагрузочные характеристики строительных конструкций секций 5 и 6 корпуса №4. Об этом, в частности, свидетельствуют и вычислительные размерности построенных ANSYS-моделей.

Конечноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна

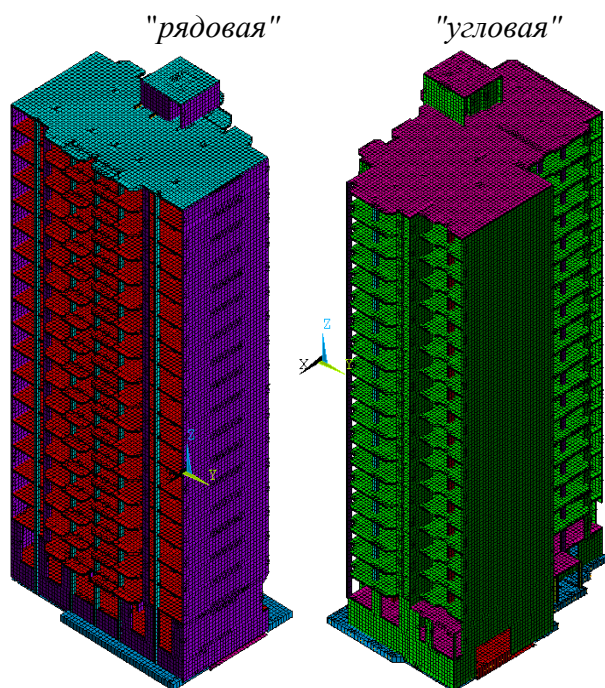


Рис. 1. КЭ-модели секций возводимого корпуса. Изометрия

В качестве исходных вибрационных воздействий для всех КЭ-моделей принимались измеренные трехкомпонентные акселерограммы с максимальными уровнями ускорений (рис.2).

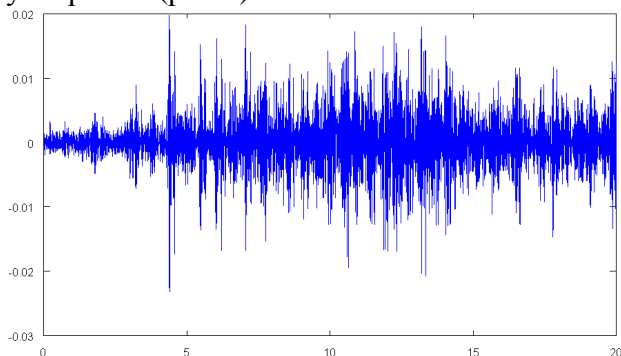


Рис 2. Точка 2 на сваях угловой секции. Исходная акселерограмма a_x (m/s^2).

Соответствие геометрико-жесткостных, инерционных и нагрузочных параметров расчетных моделей проектным данным проверяется:

– визуализацией характерных фрагментов и всей модели в различных ракурсах;

– выдачей объемов, масс и нагрузок характерных фрагментов расчетной модели, их сопоставлением с проектными данными и данными по "материнским" ЛИРА-моделям;

– анализом результатов статического и динамического расчета, в частности, для предельных случаев, имеющих прозрачный физический смысл.

Определение собственных частот и форм колебаний механических систем – едва ли не самые информативные верификационные задачи, интегрирующие многие факторы и параметры расчетной модели и, в то же время, позволяющие выявить их различие.

Проанализированы вычисленные собственные частоты в вибрационно значимом диапазоне частот (до 60 Гц) для вариантов учета массы только от несущих конструкций и от всей постоянной нагрузки. В соответствии с теоретическими представлениями и ранними результатами для объектов-аналогов выявлен весьма плотный спектр (от 1400 до 2130 собственных частот в указанном диапазоне) с низшими "общесистемными" формами, и, на более высоких частотах, множественными кратными локально-парциальными формами колебаний перекрытий, стен и колонн.

Полученные результаты, показавшие ожидаемо характерный спектр собственных частот и форм для конструкций схожего типа, позволяют говорить о соответствии построенных КЭ-моделей проектному варианту здания.

Отметим также, что в "критериальный" (для пульсационной составляющей ветровой нагрузки) диапазон до 0,95 Гц попадает 2 собственные формы модели – свидетельство "гибкости" системы несущих конструкций секций.

Таблица 1
КЭ-модель "рядовой" секции.
Расчетные собственные частоты колебаний

	Масса от собственного веса несущих конструкций	Масса от собственного веса несущих конструкций и полезных нагрузок
№	Частота, Гц	Частота, Гц
1	<i>0,584</i>	<i>0,489</i>
2	<i>0,888</i>	<i>0,745</i>
3	<i>1,269</i>	<i>1,016</i>
4	<i>2,183</i>	<i>1,829</i>
5	<i>4,288</i>	<i>3,580</i>
6	<i>4,496</i>	<i>3,764</i>
7	<i>5,589</i>	<i>4,437</i>
8	<i>6,384</i>	<i>4,669</i>
9	<i>6,991</i>	<i>5,214</i>
10	<i>7,124</i>	<i>5,764</i>
...		
521	<i>36,988</i>	<i>30,238</i>
522	<i>37,023</i>	<i>30,278</i>
523	<i>37,046</i>	<i>30,296</i>
524	<i>37,066</i>	<i>30,343</i>
525	<i>37,100</i>	<i>30,361</i>
...		
1036	<i>59,509</i>	<i>45,752</i>
1037	<i>59,548</i>	<i>45,762</i>
1038	<i>59,587</i>	<i>45,772</i>
1039	<i>59,678</i>	<i>45,795</i>
1040	<i>59,704</i>	<i>45,807</i>
1041	<i>59,791</i>	<i>45,824</i>
1042	<i>59,809</i>	<i>45,873</i>
1043	<i>59,857</i>	<i>45,908</i>
1044	<i>59,916</i>	<i>45,925</i>
1045	<i>59,975</i>	<i>45,940</i>
...		
1443	...	<i>59,760</i>
1444	...	<i>59,826</i>
1445	...	<i>59,845</i>
1446	...	<i>59,888</i>
1447	...	<i>59,922</i>
1448	...	<i>59,926</i>

Таблица 2
КЭ-модель "угловой" секции
Расчетные собственные частоты колебаний

	Масса от собственного веса несущих конструкций	Масса от собственного веса несущих конструкций и полезных нагрузок
№	Частота, Гц	Частота, Гц
1	<i>0,585</i>	<i>0,451</i>
2	<i>0,771</i>	<i>0,608</i>
3	<i>1,284</i>	<i>1,010</i>
4	<i>2,224</i>	<i>1,708</i>
5	<i>3,306</i>	<i>2,613</i>
6	<i>4,621</i>	<i>3,541</i>
7	<i>5,651</i>	<i>4,432</i>
8	<i>5,735</i>	<i>4,436</i>
9	<i>6,875</i>	<i>4,966</i>
10	<i>7,075</i>	<i>5,075</i>
...		
694	<i>39,140</i>	<i>26,505</i>
695	<i>39,232</i>	<i>26,534</i>
696	<i>39,269</i>	<i>26,548</i>
697	<i>39,293</i>	<i>26,557</i>
698	<i>39,321</i>	<i>26,574</i>
...		
1383	<i>59,717</i>	<i>43,634</i>
1384	<i>59,736</i>	<i>43,686</i>
1385	<i>59,786</i>	<i>43,709</i>
1386	<i>59,788</i>	<i>43,717</i>
1387	<i>59,828</i>	<i>43,729</i>
1388	<i>59,879</i>	<i>43,784</i>
1389	<i>59,890</i>	<i>43,829</i>
1390	<i>59,914</i>	<i>43,856</i>
1391	<i>59,955</i>	<i>43,887</i>
1392	<i>59,980</i>	<i>43,893</i>
...		
2121	...	<i>59,883</i>
2122	...	<i>59,890</i>
2123	...	<i>59,892</i>
2124	...	<i>59,933</i>
2125	...	<i>59,962</i>
2126	...	<i>59,983</i>

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВИБРОДИНАМИКИ СЕКЦИЙ КОРПУСА

Для 4-х верифицированных КЭ-моделей (по 2 – на каждую секцию) прямым интегрированием уравнений динамики неявным методом Ньюмарка (шаг интегрирования – 0,0012 сек.) получены и проанализированы для показательных опорных и пролетных зон перекрытий 1-го, 9-го и последнего этажей:

– временные реализации виброускорений – ответные акселерограммы – по 3-м направлениям (вдоль и поперек линии метро, вертикальные) для значимых интервалов с максимальными колебаниями от движения поездов метрополитена (до 20 сек, рис.3);

– узкополосные спектры Фурье ответных акселерограмм в диапазоне частот (0 - 100) Гц;

– "критериальные" среднеоктавные спектры ответных акселерограмм (в дБ, табл.3).

Исходные вибрационных воздействий в виде измеренных трехкомпонентных акселерограмм отобраны для точек с максимальными октавными спектрами.

Также варьировались коэффициенты модели Рейля α и β для обеспечения желаемого 5%-го от критического демпфирования не только на границах частотного диапазона 2 Гц - 70 Гц (при этом демпфирование во внутренней области существенно меньше, например, менее 2% при 5-20 Гц), но и внутри диапазона.

Вычисленные 20-секундные реализации виброускорений для пролетных и опорных зон перекрытий 1-го, 9-го и последнего этажей рассмотренных секций корпуса ЖК – ответные акселерограммы – представлены на рис.3.

В динамической реакции несущих конструкций четко прослеживается усиление, прежде всего, вертикальных вибраций в пролетных зонах как от исходных вертикальных, так и от горизонтальных вибраций (как перекрытие "высокого" первого

этажа на среднеоктавных частотах 31,5 и 63 Гц, так и перекрытий верхних типовых этажей на низких среднеоктавных частотах 8 и 16 Гц). При значительном снижении уровня исходных измеренных горизонтальных вибраций (на ростверке по сравнению со сваями) существенно снижаются и максимальные ответные вертикальные вибрации пролетных зон перекрытий.

Физическая картина проявляется при варьировании уровнем демпфирования – при повышении до 5%-го уровня в диапазоне 10-30 Гц происходит существенное снижение максимальных ответных виброускорений.

Варьирование массой КЭ-модели (от несущих конструкций и от всей постоянной нагрузки) не приводит к качественно или значимо количественному изменению максимальных уровней ответных виброускорений, предсказуемо изменяя спектральный (частотный) состав.

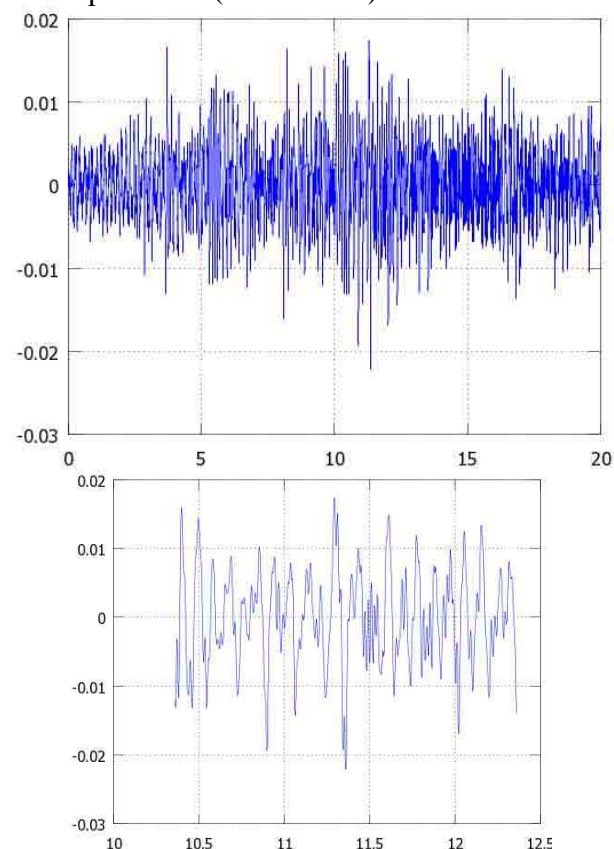


Рис.3. Точка в пролете, 17-й этаж. Ответная акселерограмма a_z (m/c^2).

В октавных спектрах четко проявляется уже отмеченное усиление, прежде всего, вертикальных вибраций в пролетных зонах как от исходных вертикальных, так и от горизонтальных вибраций (последние – особенно перекрытие "высокого" первого этажа). При значительном снижении уровня исходных измеренных горизонтальных вибраций (на ростверке по сравнению со сваями) существенно снижаются и максимальные ответные вертикальные вибрации пролетных зон перекрытий.

Таблица 3

Центральная частота, Гц	Значение октавного спектра, дБ
2.00	36.46
4.00	52.95
8.00	70.73
16.00	67.91
31.50	63.03
63.50	61.65
125.00	34.78

6. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Выполненные разработки и расчетно-экспериментальные исследования вибрационного состояния несущих конструкций многоэтажных секций корпусов ЖК, вызванного движением поездов метрополитена, позволяют сформулировать следующие выводы и рекомендации.

1) По разработанной программе и методике проведены и обработаны результаты виброизмерений фундаментных конструкций строящегося корпуса и несущих конструкций секции ранее возведенного корпуса. Установлено, что октавные спектры измеренных виброускорений на фундаментных конструкциях секций строящегося корпуса *не превышают предельно допустимых значений* по СН-2.2.4/2.1.566-96 [3], обладая существенным "запасом" (более 17 дБ). Еще ожидаемо большим запасом обладают изме-

ренные виброускорения на несущих конструкциях (стенах-колоннах и в пролете перекрытий 1-го, 9-го и последнего этажей) возведенного корпуса. Измерения не показали значимого усиления вибраций на несущих конструкциях верхних этажей возведенного корпуса.

2) Выполнены многопараметрические расчетные исследования вибрационных ускорений несущих конструкций двух секций строящегося корпуса при воздействиях на фундамент, заданных по результатам виброизмерений в виде трехкомпонентных акселерограмм. Для 4-х верифицированных динамических КЭ-моделей получены и проанализированы для показательных опорных и пролетных зон перекрытий 1-го, 9-го и последнего этажей:

- временные реализации виброускорений – ответные акселерограммы – по 3-м направлениям (вдоль и поперек линии метро, вертикальные) для значимых интервалов с максимальными колебаниями от движения поездов метрополитена (до 20 сек);
- "критериальные" среднеоктавные спектры ответных акселерограмм (в дБ).

Максимальные расчетные уровни транспортной вибрации на несущих конструкциях двух секций строящегося корпуса ЖК *меньше предельно допустимых значений* по СН-2.2.4/2.1.566-96:

- при исходных вибрационных воздействиях, соответствующих измеренным на сваях секции – на 7,3 дБ при среднеоктавных частотах 31,5 Гц;

- при вибрационных воздействиях, измеренных на ростверке, горизонтальные и вертикальные компоненты на перекрытии последнего этажа приближаются снизу к предельно допустимому уровню на более низких частотах для среднеоктавной частоты 8,0 Гц (меньше на 4,27 дБ).

3) По результатам выполненных расчетно-экспериментальных исследований уровень вибрации всех несущих конструкций секций возводимого корпуса ЖК (без устройств виброизоляции) от движения по-

ездов метрополитена *не превышает нормативно допустимые значения* при условии соблюдения в "натуре" всех проектных параметров и решений. Этот вывод обоснован при вибрациях в зоне площадки строительства корпуса, соответствующих измеренным – при существенном изменении локальной "вибрационной обстановки" (кардинальная реконструкция линий, изменения трафика и нагруженности составов метро, вмешательство в актуальную гидрогеологию) он должен быть подвергнут ревизии.

4) Реализованную в данной работе расчетно-экспериментальную (точнее – натурно-расчетную) методику следует рекомендовать для анализа вибрационного состояния широко класса объектов строительстве в зоне значимой транспортной вибрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП 32-02-2003. Метрополитены, М., Госстрой России, 2004
 2. СП 23-105-2004. ОЦЕНКА ВИБРАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ, СТРОИТЕЛЬСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ ОБЪЕКТОВ МЕТРОПОЛИТЕНА., М., Госстрой России, 2004
 3. СН 2.2.4/2.1.8.566-96. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ВИБРАЦИЯ, ВИБРАЦИЯ В ПОМЕЩЕНИЯХ ЖИЛЫХ И ОБЩЕСТВЕННЫХ ЗДАНИЙ. Минздрав России, 1997
 4. Строительные нормы и правила. Нагрузки и воздействия. СНиП 2.01.07–85*, М., Госстрой России, ГУП ЦПП, 2003 г. (редакция 29.05.2003 г.)
 5. Строительные нормы и правила. Бетонные и железобетонные конструкции. СНиП 52-01–2003., М., Госстрой России, 2003 г.
 6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975 г., 539 с.
 7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 1982 г., 446 с.
 8. Дашевский М.А. Защита зданий от вибраций, возбуждаемых движением поездов метрополитена // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. — 1991. — с. 456
 9. Дашевский М.А., Ковальчук О.А. Особенности динамической реакции здания повышенной этажности на вибрации, возбуждаемые движением поездов метрополитена. Промышленное и гражданское строительство, №4/2004
 10. Белостоцкий А.М. Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем "сооружение–основание". Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, 1990 г., с. 175–180.
 11. Белостоцкий А.М., Белый М.В. Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000 г., с.65-69.
 12. Белостоцкий А.М. Прогнозное математическое моделирование состояния и техногенной безопасности ответственности объектов и комплексов мегаполиса. Вестник МГСУ, 3/2006 г., с. 20–61.
 13. ANSYS 12. Theoretical Manual, 2010 г.
-
- ^{1,2)} Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ СтаДиО), директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет (ФБГОУ ВПО МГСУ), Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru
- ²⁾ Аул Андрей Андреевич, ведущий инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, аспирант Московского энергетического института (МЭИ (ТУ)), тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,
- ²⁾ Нагибович Александр Игоревич, старший инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, , тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ГРУНТОМ МОРСКОГО ДНА

А.М. Белостоцкий^{1,2}, А.А. Аул², Р.Е. Унгаров², П.Е. Шевинский³

¹ ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО "Научно-исследовательский центр СтаДиО", г. Москва, РОССИЯ

³ ООО "Питер Газ", г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассмотрены особенности конечноэлементного моделирования и представлены результаты расчетных исследований напряженно-деформированного состояния и прочности трубопроводов подводного сбора газа Киринского газоконденсатного месторождения (шельф о. Сахалин), выполненных в верифицированном программном комплексе ANSYS с учетом контактного взаимодействия трубопроводов и грунта основания.

Ключевые слова: подводные трубопроводы, конечноэлементное моделирование, программный комплекс ANSYS, напряженно-деформированное состояние, контактное взаимодействие с донным грунтом

FE STRAIN-STRESS SIMULATION OF UNDERWATER PIPELINES WITH CONTACT INTERACTION OF THE PIPELINE AND THE SEABED

*Alexander M. Belostotsky^{1,2}, Andrey A. Aul², Roman E. Ungarov²,
Pavel E. Shevinsky³*

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

³ "Piter Gas", Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The features of the finite element modeling and results of computational simulation of the stress-strain state and strength of the underwater pipeline (Sakhalin Island), executed a verified software package ANSYS, taking into account contact interaction of pipelines and the foundation soil are considered.

Key words: submarine pipelines, finite element modeling, software package ANSYS, the stress-strain state, the contact interaction with the seabed

1. Описание системы, постановка задачи

Разрабатываемое Киринское газоконденсатное месторождение (ГКМ) расположено на шельфе 28 км восточнее о. Сахалин (Охотское море). Проектируемые подводные трубопроводы 9-и соединительных секций имеют горизонтальные участки на глубине $H = 90$ м, покоящиеся на грунте.

Равномерная осадка замененного грунта составляет до 0,2 м, размыв зоны естественного грунта – до 0,5 м.

В горизонтальных направлениях трубопровод может скользить по грунту. Коэффициент кулоновского трения (вдоль и поперек трубы), по данным изысканий, принят равным 0,7.

Концевые сечения соединительных трубопроводов жёстко заземлены, заданное температурное смещение сечения примыкания к магистральному трубопроводу составляет от 0 до 560 мм.

Характеристики материала труб секций 1-9 приведены в таблице 1.2.

Таблица 1

Характеристики материала трубы

Материал	Сталь
Модуль упругости E, МПа	$2,07 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона ν	0,3
Плотность ρ , т/м ³	7,85
Коэффициент линейного температурного расширения, 1/град	$1,16 \cdot 10^{-5}$
Предел текучести, МПа	450
Предел прочности, МПа	535

Учитываются следующие значимые нагружающие факторы для режима эксплуатации:

- собственный вес трубы;
- вес "продукта", определяется через плотность продукта ($0,331 \text{ т/м}^3$);
- выталкивающая архимедова сила задается как линейная равномерно распределенная вертикальная нагрузка (плотность морской воды $\rho_w = 1,025 \text{ т/м}^3$);
- скоростной напор придонного течения 2 м/с – горизонтальная линейная распределенная нагрузка $\rho_w \cdot V^2 \cdot D/2$ (направление север-юг);
- гидростатическая нагрузка (внешнее давление) $0,88 \text{ МПа}$;
- внутреннее давление 24 МПа ;
- изменение (перепад) температуры – индивидуально для каждой секции;
- смещение концевой сечению по оси трубы – от 0 м до $0,6 \text{ м}$;
- равномерная осадка замененного грунта моделируется заданными смещениями вверх обеих концевых опор
- размыв естественного грунта для секции, моделируется смещением вверх ближней концевой опоры.

Ставятся и решаются следующие задачи:

- разработка и верификация в программном комплексе пространственных конечноэлементных моделей 9-и систем "подводный трубопровод - донное основание" с учетом контактного взаимодействия;
- определение параметров квазистатического напряженно-деформированного состояния (перемещения, нагрузки на пат-

рубки, усилия и напряжения) от действия расчетного сочетания нагрузок режима эксплуатации;

- нормативная оценка несущей способности по критериям прочности, общей потери устойчивости (выпучивания) и местной потери устойчивости.

2. Конечноэлементные модели систем "трубопровод-основание"

Пространственные трассы 9-и расчетных трубопроводов построены по выданным проектным координатам.

Предварительно для одной из секций выполнены сопоставительные верификационные расчеты по альтернативным моделям в специализированном "трубопроводном" программном комплексе (ПК) АСТРА-НОВА [3] и универсальных ПК ABAQUS [6] и ANSYS [7], показавшие практическую идентичность критериальных параметров НДС, прежде всего, картины нелинейного контактного взаимодействия с частичным отрывом и трением.

В ANSYS использованы следующие конечные элементы из библиотеки программного комплекса:

- *pipe16* для прямых участков трубопровода,
- *pipe18* для криволинейных (с учетом повышенной оболочечной податливости),
- *conta178* для контакта с трением "труба-основание".

Характерная длина КЭ *pipe16* и *pipe18* в зоне контакта с грунтом – около диаметра трубы, в бесконтактной зоне – 4 диаметра трубы.

Две из 9-и разработанных КЭ-моделей показаны на рис. 1, 2.

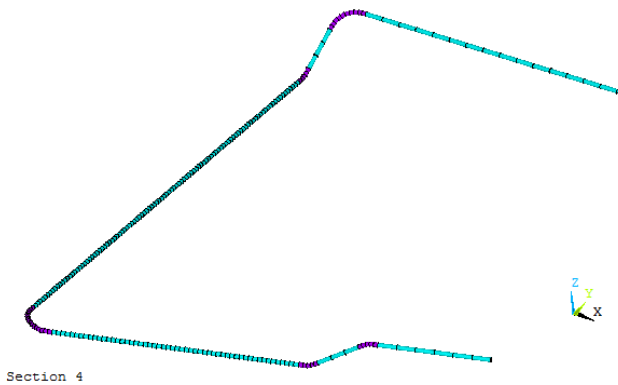


Рис. 1. Секция 4. ANSYS-модель. Прямые участки – $\varnothing 219,1 \times 14,3$, отводы – $\varnothing 219,1 \times 16$.

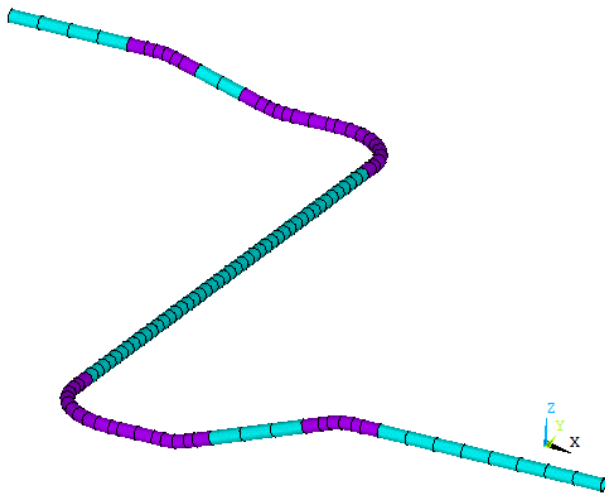


Рис. 2. Секция 9. ANSYS-модель. Прямые участки – $\varnothing 508 \times 22,2$, отводы – $\varnothing 512 \times 24,7$

3. Результаты расчетов НДС и прочности подводных трубопроводов

В результате расчетов по ПК ANSYS получены и проанализированы основные расчетные параметры НДС трубопроводов секций 1-9 для режима эксплуатации – перемещения, значимые усилия и эквивалентные напряжения (по Мизесу) в сечениях и реакции двух концевых "опор".

Расчеты выполнены для двух характерных вариантов-моделей:

1) *модели 1* – без учета осадки замененного грунта;

2) *модели 2* – с учетом осадки замененного грунта 0,2 м и возможного размыва естественного грунта до 0,5 м.

В целом характер расчетного НДС соответствует априорным физическим представлениям.

Так, для *моделей 1* доминирующим фактором НДС являются разность внутреннего и внешнего давления, заданное горизонтальное смещение концевой опоры, а контакт с трением (без отрыва) обеспечен в большей части зоны взаимодействия "труба-грунт". Максимальные эквивалентные напряжения (по Мизесу) не превышают допустимых величин (табл. 2). Наибольшей величины напряжения достигают для секции 9 – 222.6 МПа.

Для *модели 2* определяющими нагружающими факторами являются разность внутреннего и внешнего давления, заданное горизонтальное смещение концевой опоры и осадка замененного грунта. Контакт с трением обеспечен на меньшей части возможной зоны взаимодействия "труба-грунт" – сказывается влияние осадки грунта (рис.3-6). Максимальные эквивалентные напряжения не превышают допустимых величин (табл. 2). Наибольшей величины напряжения достигают для секции 9 – 243.5 МПа.

Таблица 2

Максимальные расчетные эквивалентные напряжения (по Мизесу), МПа

Секция	Модель 1	Модель 2
1	127,0	176,6
2	127,0	177,2
3	134,1	156,2
4	127,0	161,0
5	169,5	175,0* / 208,4**
6	143,6	172,0
7	165,6	174,5
8	186,5	189,6
9	222,6	243,5

Примечание для секции 5:

* – равномерная осадка грунта 0,2 м, ** – размыв естественного грунта 0,5 м

Конечноэлементное моделирование напряженно-деформированного состояния подводных трубопроводов с учетом контактного взаимодействия с грунтом морского дна

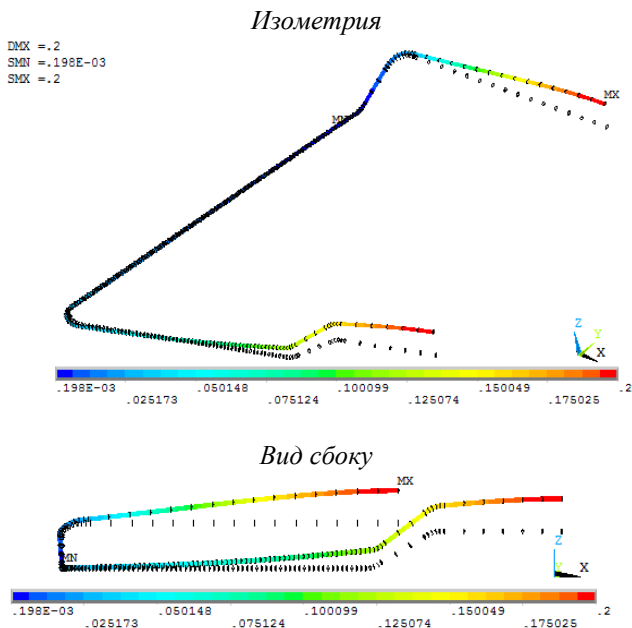


Рис. 3. Секция 4. Модель 2. Расчетные перемещения, м (масштабный коэффициент = 4)

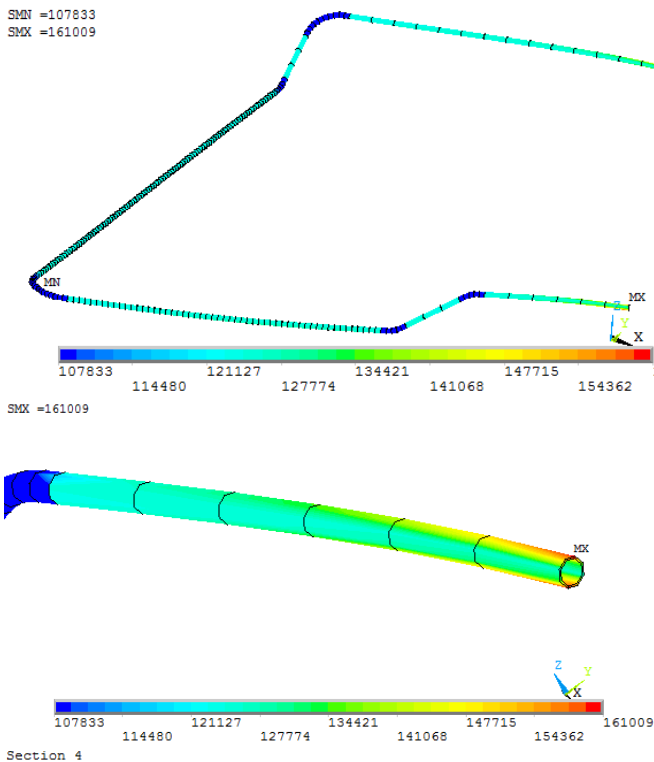


Рис. 4. Секция 4. Модель 2. Расчетные эквивалентные напряжения (Мизеса), кПа. Максимальное напряжение 161,0 МПа

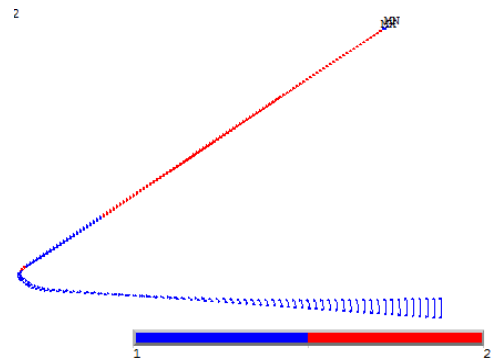


Рис. 5. Секция 4. Модель 2. Статус контактных элементов :1 – открыт (отрыв), 2 – закрыт со скольжением (сдвиг).

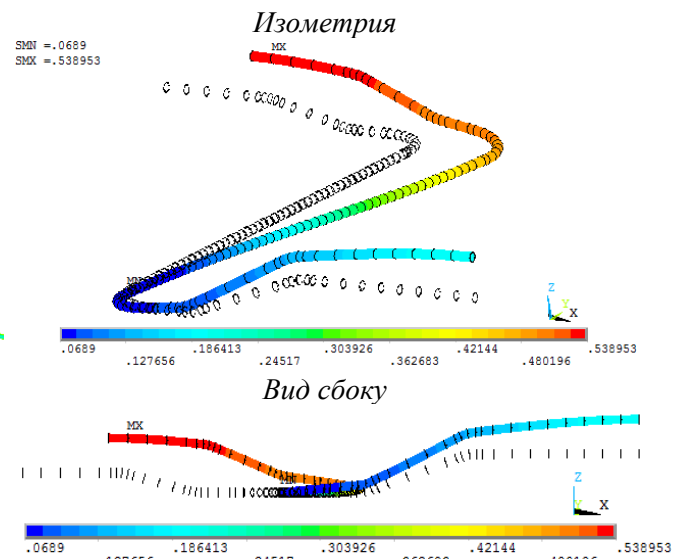


Рис. 6. Секция 9. Модель 2. Расчетные перемещения, м (масштабный коэффициент = 10)

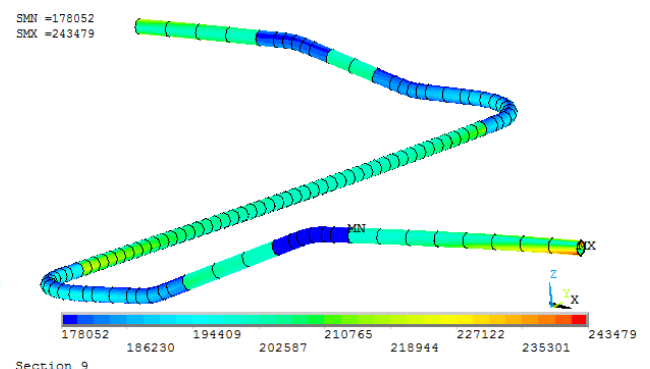


Рис. 7. Секция 9. Модель 2. Расчетные эквивалентные напряжения (Мизеса), кПа, Максимальное напряжение 243,48 МПа

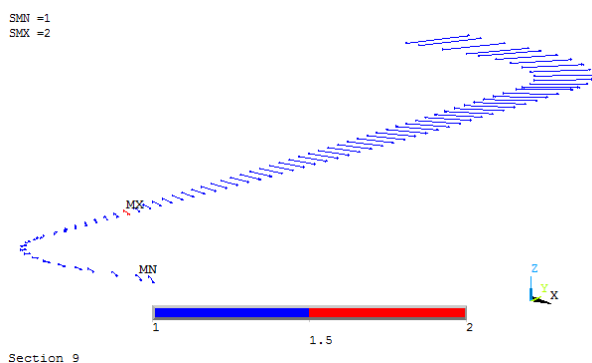


Рис. 8. Секция 9. Модель 2.

Статус контактных элементов: 1 – открыт (отрыв), 2 – закрыт со скольжением (сдвиг),

4. Выводы и рекомендации

Результаты выполненных разработок и расчетных исследований НДС и прочности системы "подводные трубопроводы - грунт" с учетом контактных взаимодействий подсистем позволяют сформулировать следующие выводы и рекомендации, выходящие за рамки рассмотренного объекта:

– разработанные пространственные стержневые модели с элементами конструктивной нелинейности – контактного взаимодействия, реализованные в специализированном (АСТРА-НОВА) и универсальных (ABAQUS, ANSYS) программных комплексах, позволяют адекватно воспроизвести особенности НДС подводных трубопроводных систем;

– результирующее НДС подводных трубопроводов весьма чувствительно к вариации некоторых исходных параметров модели, в особенности, к осадкам и размыву донного грунта;

– в связи с этим, актуальным представляется разработка методики и расчетное исследование размыва грунта на основе численного моделирования задач придонной гидродинамики системы "трубопровод-грунт" и литодинамики донных отложений.

Список литературы

14. Белостоцкий А.М. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и нормативная оценка прочности трубопроводных систем: достижения, проблемы и перспективы. "Машиностроение и инженерное образование", 2006 г., № 9, с. 111-119.

15. Белостоцкий А.М., Дубинский С.И. Некоторые аспекты верификации программных средств численного моделирования конструкций и сооружений. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering Volume 4, Issue 2. 2008. – с. 30

16. "Семейство" программных комплексов АСТРА-НОВА'2011. Автоматизированное проектирование и расчеты трубопроводных систем на статическую и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с российскими нормативными требованиями. Общее описание. М., ЗАО НИЦ СтаДиО, 2003-2011 гг.

17. Комплекс программ АСТРА-АЭС. Верификационный отчет (4 тома). М., ЗАО НИЦ СтаДиО, 2009–2011 гг.

18. Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS Mechanical (4 тома), М., ЗАО НИЦ СтаДиО, МГСУ, 2009 (в системе РААСН).

19. ANSYS Theory 12.1. User's Guide. // Canonsburg, 2009

20. Верификационный отчет по программному комплексу ABAQUS (4 тома), М., МГСУ, 2011 (в системе РААСН).

¹⁾ Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ СтаДиО), директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет (ФБГОУ ВПО МГСУ), Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

²⁾ Аул Андрей Андреевич, ведущий инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, аспирант Московского энергетического института (МЭИ (ТУ)), тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

²⁾ Унгаров Роман Евгеньевич, инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, аспирант Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

³⁾ Шевинский Павел Евгеньевич, ведущий инженер ООО "Питер Газ" тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

ВЕРИФИКАЦИЯ И АТТЕСТАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА АСТРА-АЭС. НОВЫЙ УРОВЕНЬ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

*А.М. Белостоцкий^{1,2}, Г.А. Воронова¹, А.Л. Потапенко¹,
О.Ю. Клепец¹, А.А. Аул¹, К.И. Островский¹*

¹ЗАО "Научно-исследовательский центр СтаДиО", г. Москва, РОССИЯ

²ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье представлены основные результаты верификации-экспертизы-аттестации специализированного программного комплекса АСТРА-АЭС (прочностные расчеты трубопроводных систем АЭУ), проведенной в системе Ростехнадзора в 2009-2011 гг.

Ключевые слова: трубопроводные систему АЭУ, расчеты на прочность, Нормы ПНАЭ Г-7-002-86, суперэлементные модели, метод динамического синтеза, расчет МКЭ деталей трубопроводов

VERIFICATION AND CERTIFICATION OF PROGRAM PACKAGE ASTRA-NPP. A NEW LEVEL OF STRENGTH CALCULATIONS OF PIPELINE SYSTEMS

*Alexander M. Belostotsky^{1,2}, Galina A. Voronova¹, Alexey L. Potapenko¹,
Olga Y. Klepec¹, Andrey A. Aul¹, Konstantin I. Ostrovsky¹*

¹StaDyO Research & Engineering Center, Moscow, RUSSIA

²Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article presents the main results of the verification and certification examination of specialized software package ASTRA-NPP (strength calculations of NPP pipeline systems), held in the "Roctechnadzor" during 2009-2011.

Key words: NPP pipeline systems, strength calculations, Russian Codes PNAE G-7-002-86, models, the dynamic method of substructure synthesis, the FE calculation pipeline components

В 2009-2011 гг. в системе Ростехнадзора (преемник Госатомнадзора) проходила многоэтапная процедура "повторной" верификации-экспертизы-аттестации специализированного программного комплекса АСТРА-АЭС (версия АСТРА-АЭС'2009), предназначенного для прочностных расчетов низко- и высокотемпературных трубопроводных систем в соответствии с требованиями "Норм расчета на прочность оборудования и трубопроводов АЭУ. ПНАЭ Г-7-002-86" [1].

ЗАО НИЦ СтаДиО разработал верификационный отчет (4 тома) [4], включающий

теоретический том с матрицами верификации, 2 тома с решенными представительными многопараметрическими тестовыми примерами (более 40), в том числе, отражающими «старые» и такие вновь аттестуемые возможности:

- формирование и учет матричных суперэлементов (жесткости, масс, нагрузок, Крейга-Бемптона) для корректного решения задач статического и динамического синтеза подсистем;

- уточненный расчет распределения температур (задач теплопроводности), НДС

и прочности деталей трубопроводов по пространственно-оболочечным и трехмерным схемам МКЭ (тройники сварные и штампованные, с накладками и плакировкой, отводы гнутые и секторные, переходы и линзовые/сильфонные компенсаторы);

- учет трения в опорах высокотемпературных трубопроводов;
- учет «потерянной массы» при сейсмических линейно-спектральных расчетах.

При рассмотрении верификационных материалов пять экспертов (специалисты, назначенные 3-мя "отраслевыми" секциями Совета по аттестации ПС) дали предложения по корректировке-дополнению отчета и проекта паспорта, а после их учета разработчиком – положительные заключения. Совет принял решение об аттестации ПК на очередные 10 лет и утвердил аттестационный паспорт.

Ниже приведены значимые выдержки из утвержденного аттестационного паспорта программного комплекса АСТРА-АЭС [5] (№292 от 14.04.2011, рег. №614 от 16.09.2009), а в таблице 1 – основные отличия (развитие) актуальной версии '2009 от версии 6.1, аттестованной в 1995 г.

1. Назначение и область применения ПС

Программный комплекс (ПК) АСТРА-АЭС предназначен для расчета параметров статического, сейсмического, вибрационного и динамического напряженно-деформированного состояния (перемещений, нагрузок на опоры и оборудование, усилий и напряжений) и динамических характеристик (собственных частот и форм колебаний), оценки статической, циклической, сейсмической и вибрационной прочности пространственных разветвленных и протяженных трубопроводных систем (ТС) в соответствии с требованиями Норм ПНАЭ Г-7-002-86.

Выполняется также уточненный расчет в трехмерной (объемной) постановке стационарных температурных полей и напряженно-деформированного состояния, статической, циклической и сейсмической проч-

ности элементов-деталей трубопроводов при действии полной системы квазистатических нагрузок: тройников ортогональных радиальных (сварных, штампованных и штампованных, с накладками и плакирующим слоем); отводов (гибов, колен) гнутых, крутоизогнутых, штампованных и секторных с учетом эллиптичности, разностенности и прилегающих прямых труб, косых стыков; конических переходов концентрических; линзовых и сильфонных компенсаторов.

Тип объекта использования атомной энергии – ТС АЭУ в области действия Норм ПНАЭ Г-7-002-86 (раздел 1.1).

Моделируемые режимы – все режимы, предусмотренные проектом АЭУ (нормальная эксплуатация, нарушение нормальной эксплуатации, аварии, внешние динамические, включая сейсмические, воздействия).

Ограничения на геометрию, величины нагрузок и реакцию системы: ТС рассматриваются как стержневые (с учетом оболочечных эффектов в гibaх и тройниках) и линейно-упругие, нелинейность «представлена» односторонними опорами и опорами трения (только в статических расчетах). Не учитываются следующие факторы: особенности сварных швов в трубопроводах (изменения геометрии под разделку, разный материал, остаточные напряжения), допущенные в эксплуатацию трещины в трубопроводах, влияние теплоносителя на циклическую прочность.

Количественные ограничения на параметры расчетной модели ТС для версии АСТРА-АЭС'2009:

1) для всей модели: узлов стыковки участков-суперэлементов (неразветвленных) – 0 - 4 000, суперэлементов (неразветвленных участков) – 1 - 4 000, динамических степеней свободы – 1 - 60 000, вычисляемых/учитываемых собственных частот и форм колебаний – 1 - 4 000.

2) для каждого суперэлемента (неразветвленного участка): элементов (отрезков) прямо- и криволинейных труб и переходов – 1 - 400, пружинных подвесок, опорных конструкций, “жестких элементов” (вставок),

произвольно ориентированных в пространстве сосредоточенных нагрузок – 0 – 400.

Уточненный расчет температурного и напряженно-деформированного состояния деталей трубопроводов ведется в предположении: стационарности температурного поля в линейной постановке при изотропных коэффициентах теплопроводности и без учета внутреннего тепловыделения; малости перемещений и упругости деформационных напряжений. Для тонкостенных отводогибов нелинейный фактор влияния давления на жесткость системы не учитывается.

Число узлов – до 100 000, конечных элементов (криволинейных оболочечных суперпараметрического семейства или объемных изопараметрических) – до 50 000.

Допустимые значения параметров.

Упругая область деформирования (физическая линейность), малые деформационные перемещения (геометрическая линейность), нелинейная работа опорно-подвесной системы (трение скольжения/качения и отрывы) при статических и температурных воздействиях, линейная (с возможным наследованием "статического" статуса опор) – при сейсмических, вибрационных и динамических воздействиях.

Погрешность, обеспечиваемая в области допустимых значений параметров.

Практическая точность расчетов определяется точностью задания физико-механических характеристик материалов и нагрузок-воздействий и точностью самой модели. Погрешность расчетов, выполненных в обоснование безопасности ОИАЭ с использованием ПК АСТРА-АЭС 2009, должна быть исследована и доказана в материалах, обосновывающих безопасность конкретного ОИАЭ.

Максимальные погрешности расчетов по результатам тестирования имеют следующие значения:

- статические перемещения, усилия и напряжения – 5%,
- собственные частоты и формы колебаний – 2%,

- сейсмические расчёты по линейно-спектральной теории – 10%,
- параметры динамического расчета (перемещения, нагрузки и напряжения) – 15%.

2. Сведения о методиках расчета

ТС рассматриваются как пространственно-стержневые (с учетом оболочечных эффектов в гibaх-коленах и тройниках) и линейно-упругие (с жесткостными и инерционными характеристиками, соответствующими заданному распределению давления и температуры, и с возможным учетом в статических расчетах эффектов трения Кулона и отрыва в опорах). ТС может содержать замкнутые контуры, свободные, шарнирно опертые и защемленные концы, промежуточные опоры (мертвые, пружинные, скользящие и катковые, включая односторонние опоры и жесткие тяги), линзовые и сильфонные компенсаторы, стержневые элементы произвольного сечения и другие элементы (включая оборудование и нестандартные опорные конструкции), характерные для трубопроводов АЭС.

Реализован единый алгоритм расчета ТС (определение перемещений, нагрузок на опоры и усилий в сечениях) как пространственных статически неопределимых стержневых систем, сочетающий суперэлементный подход метода перемещений, методы начальных параметров и прогонки (для каждого суперэлемента) и спектральную методику решения динамических задач. Для каждого этапа статических расчетов и для динамических расчетов задачи решаются в линейно-упругом приближении для заданного распределения внутреннего давления и температур. По аналитическим зависимостям учитывается повышенная оболочечная податливость криволинейных труб (эффекты Кармана) и ортогональных тройниковых соединений, по заданным коэффициентам жесткости – податливость врезок "труба-оборудование". Эффекты ползучести и релаксации для высокотемпературных трубо-

проводов учитываются эквивалентными (скорректированными) температурами и смещениями опор для рабочего и холодного состояний по методике РТМ 24.038.08–72.

Трение Кулона в опорах скольжения и качения в статике моделируется системой эквивалентных фиктивных горизонтальных связей, жесткостные характеристики которых определяются в итерационном процессе. Также итерационно определяется для каждого этапа статического расчета статус односторонней опоры (труба лежит на опоре или не контактирует) и жесткой тяги (подвески).

Осевые, угловые, сдвиговые и комбинированные линзовые и сильфонные компенсаторы схематизируются стержневыми элементами с эквивалентными характеристиками сечения на растяжение-сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. Арматура (задвижки, вентили, клапаны) моделируется жесткими вставками с эквивалентными нагрузочными и инерционными характеристиками.

Решение результирующей алгебраической системы уравнений равновесия суперэлементной модели (определение вектора перемещений в узлах) проводится для статических задач и при определении матриц податливости по схеме квадратного корня (Холецкого) с учетом положительной определенности, симметричности, блочности и разреженности матрицы жесткости. Значимые собственные частоты и соответствующие им формы колебаний (в требуемом частотном диапазоне и/или заданное число) динамической модели системы, учитываемые в расчетах на сейсмические, вибрационные и динамические воздействия, определяются из решения частной проблемы собственных значений блочным методом Ланцоша.

Расчет ТС на сейсмические воздействия, заданные трехкомпонентными спектрами ответов, проводится по линейно-спектральному методу; расчет на сейсмодействие, заданные ответными акселерограммами, выполняется интегрированием уравнений движения спектральным методом

с разложением по собственным формам колебаний (по схеме Дюамеля).

При расчете на вибропрочность используется спектральный анализ параметров вынужденных установившихся детерминированных колебаний системы. Силовое нагружение задается в полигармоническом виде.

В расчете на неустановившиеся динамические процессы реализована спектральная методика расчета неустановившихся вынужденных колебаний для оценки прочности при нестационарных (переходных) режимах. Силовые воздействия задаются в виде временных зависимостей давления и/или сосредоточенных сил.

Результатами расчетов являются перемещения (линейные и угловые), силовые факторы, приведенные и допускаемые напряжения во всех расчетных сечениях участков (включая гибы и колена) и в тройниковых узлах, вычисленные по методикам Приложения 5 Норм ПНАЭ Г-7-002-86, оценки статической, циклической (для однопакетного нагружения), сейсмической и вибрационной прочности, нагрузки на оборудование (концевые опоры) и узлы участков, а также на опорные конструкции, пружинные подвески и жесткие тяги в рабочем и холодном состояниях, режиме гидроиспытаний; типы и характеристики выбранных пружинных подвесок.

Метод подконструкций реализован также для построения редуцированных матриц влияния системы или учета этих матриц при суперэлементной сборке. Реализован алгоритм метода динамического синтеза подконструкций в форме подхода Крейга-Бемптона (с фиксированными границами) для формирования и учета матричных суперэлементов. Используется в расчетах на статическую и циклическую прочность и определении собственных частот и форм колебаний.

Определение стационарного температурного состояния деталей ТС выполняется по объемным схемам метода конечных эле-

ментов (МКЭ) в линейной постановке без учета внутреннего тепловыделения, уточненный расчет напряженно-деформированного состояния – по пространственно-оболочечным и объемным схемам МКЭ в перемещениях в предположении малости перемещений-деформаций и упругой работы, оценка статической, циклической (для однопакетного нагружения) и сейсмической прочности по группам категорий напряжений на срединной, внутренней и наружной поверхностях деталей – согласно положениям Норм ПНАЭ Г-7-002-86.

Стратификация теплоносителя моделируется эквивалентным распределенным моментом. Реактивные силы и/или струи при разрывах трубопроводов учитываются динамическими нагрузками (без учета их следящего характера) в рамках линейно-упругого приближения.

3. Перечень организаций, эксплуатирующих ПС (коммерческие версии):

ЗАО НИЦ СтаДиО, ОАО "Атомэнергопроект", ОАО "ОКБ "Гидропресс", ПКФ "Росэнергоатом", ОАО ЗИОМАР, ЗАО РОСЭП, ЗАО "Сельэнергопроект", "СвердНИИХимМаш", ГОУ ВПО МГСУ, ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), "Киевэнергопроект", "Харьковэнергопроект", "Укратомэнергопроект", НПО "Вектор" (Украина), НТЦ ЯРБ Госатомнадзора Украины, Игналинская АЭС (Литва), ДФ "Енергопроект" (Болгария).

Список литературы

21. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. ПНАЭ Г-7-002-86. М., Энергоатомиздат, 1989 г.
22. Белостоцкий А.М. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и нормативная оценка прочности трубопроводных систем: достижения, проблемы и перспективы. "Машиностроение и инженерное образование", 2006 г., № 9, с. 111-119.
23. "Семейство" программных комплексов АСТРА-НОВА'2011. Автоматизированное проектирование и расчеты трубопроводных систем на статическую

и циклическую прочность, на сейсмические воздействия, вибропрочность и неустановившиеся динамические процессы в соответствии с российскими нормативными требованиями. Общее описание. М., ЗАО НИЦ СтаДиО, 2003-2011 гг.

24. Комплекс программ АСТРА-АЭС. Верификационный отчет (4 тома). М., ЗАО НИЦ СтаДиО, 2009-2011 гг..

25. Аттестационный паспорт ПК АСТРА-АЭС (версия АСТРА-АЭС'2009) Ростехнадзора №292 от 14.04.2011, рег. №614 от 16.09.2009.

^{1,2)} Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ СтаДиО), директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов ФБГОУ ВПО МГСУ, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgso.ru

¹⁾ Воронова Галина Аркадиевна, главный специалист ЗАО НИЦ СтаДиО, тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

¹⁾ Потапенко Алексей Леогидович, главный специалист ЗАО НИЦ СтаДиО, тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

¹⁾ Клепец Ольга Юрьевна, ведущий инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

¹⁾ Аул Андрей Андреевич, ведущий инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, аспирант Московского энергетического института (МЭИ (ТУ)), тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

¹⁾ Островский Константин Игоревич, старший инженер ЗАО НИЦ СтаДиО, аспирант Московского энергетического института (МЭИ (ТУ)), тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761; e-mail: stadyo@stadyo.ru,

Таблица 1

**Основные различия версии АСТРА-АЭС 6.1, аттестованной в 1995 г.,
и актуальной версии АСТРА-АЭС'2009**

Возможности/характеристики	АСТРА-АЭС 6.1	АСТРА-АЭС'2009
Тип ЭВМ, основные языки программ		
Тип ЭВМ (не ниже), основные языки программ	ПЭВМ, MS FORTRAN VAX, VAX-FORTRAN EC, FORTRAN-77	<i>ПЭВМ IBM-совмест., Intel Visual Fortran 11 Visual C++</i>
Состав программных модулей АСТРА-АЭС		
	АСТРА-ГРАФ, АСТРА-СТАЦ, АСТРА-СЕЙСМ, АСТРА-ВИБР, АСТРА-ДИН	ПРЕ-АСТРА, ПОСТ-АСТРА, АСТРА-СТАЦ, АСТРА-ФОРМ, АСТРА-СЕЙСМ, АСТРА-ВИБР, АСТРА-ДИН, АСТРА-СТАДИО
Количественные ограничения		
Число узлов стыковки суперэлементов	1 – 100	0 – 4 000
Число суперэлементов (неразветвленных участков)	1 – 200	1 – 4 000
Число элементов в суперэлементе	2 – 40	1 – 400
Число динамических степеней свободы	3 – 1 500	3 – 60 000
Число собственных частот и форм	1 – 100	1 – 4 000
Число шагов интегрирования по времени	1 – 600	1 – 60 000
Нумерация суперэлементных узлов	сплошная	<i>произвольная</i>
Элементы модели		
Замкнутые суперэлементы	–	+
Гонкостенные тройники с учетом податливости (методика РТМ 38.001-94, ASME)	–	+
Врезки “труба–оборудование” с учетом податливости	–	+
Переходы, линзовые компенсаторы, фланцы, днища (крышки), арматура с приводом	–	+
Пружинные опоры сортамента ОСТ 24.125.109–01, LISEGA, постоянного усилия	–	+
Жесткие подвески	–	+
Односторонние опоры	–	+
Опоры и пружины с заданными собственными перемещениями	–	+
Жесткие элементы	–	+
Моментные компоненты нагрузок	–	+
Распределенный момент от неравномерного нагрева по высоте трубы	–	+
Массовые моменты инерции	–	+

Возможности/характеристики	АСТРА-АЭС 6.1	АСТРА-АЭС'2009
Опоры, нагрузки и массы в узлах СЭ-модели	–	+
Матричные суперэлементы для статических и динамических задач (Крейга-Бемптона, формирование и учет)	–	+
Алгоритмы и программная реализация		
Итерационный – учет возможного отрыва от односторонних идеальных опор и опор трения	–	+
Итераций подпространства – решение частной проблемы собственных значений	+	–
Учет “потерянной” массы по высшим формам колебаний при сейсмическом расчете	–	+
“Инженерный” учет трения в опорах в динамических расчетах	–	+
Уточненный расчет температурного поля, статического и сейсмического НДС на основе пространственно-оболочечных и трехмерных схем МКЭ, оценка статической, циклической и сейсмической прочности деталей трубопроводов: тройников, гибов-отводов, переходов и линзовых/сильфонных компенсаторов (АСТРА-СТАДИО)	–	+
Результаты расчетов		
Допустимость перемещений (отсутствие касаний и пересечений труб)	–	+
Перемещения в местной системе координат	–	+
Допустимость нагрузок на опоры	–	+
Герметичность фланцевых соединений (методика РТМ 38.001–94)	–	+
Напряжения в линзовых/сильфонных компенсаторах (методика РТМ 38.001–94)	–	+
Анимация собственных форм колебаний и динамической реакции	–	+
Сейсмические ускорения	–	+
Визуализация динамических перемещений и напряжений	–	+
Распределение температур, компонент и приведенных напряжений в деталях трубопроводов: тройниках, гibaх-отводах, переходах и линзовых/сильфонных компенсаторах (АСТРА-СТАДИО)	–	+

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В.Н.Варапаев, Ф.М.Котов

ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Приведены результаты численного моделирования течений в каналах с пористыми стенками для ламинарного и турбулентного режимов. Целью является исследование этих течений с помощью комплекса ANSYS CFX.

Ключевые слова: численное: моделирование, ламинарные и турбулентные течения, канал с пористыми стенками, комплекс ANSYS CFX

NUMERICAL MODELING OF LAMINAR AND TURBULENT FLOWS IN CHANNEL WITH POROUS WALLS

V.N.Varapaev, F.M. Kotov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Results of numerical modeling flows in channel with porous walls for laminar and turbulent regime are presented. The purpose of the present is investigation this flows using system ANSYS CFX.

Key words: numerical modeling, laminar and turbulent flows, channel with porous wall ,system ANSYS CFX.

1. Введение

Существует интересный класс задач аэродинамики, важный для технических приложений, в котором рассматриваются течения при наличии подачи или отсоса жидкости (или газа) через граничную поверхность. Подача вещества может, например, осуществляться при испарении, химических реакциях на поверхности или в результате протекания жидкости или газа через пористые стенки. Примерами технических приложений таких задач являются: движение жидкости в артезианской скважине; течение в трубе с пористыми стенками, используемой в газо-диффузионном каскаде установки для разделения изотопов; течение при горении газовой горючей смеси в пористой горелке, когда смесь подается через ее стенки; движение газа в канале горящего заряда твердого ракетного топлива. Экспериментальное и теорети-

ческое изучение течений в каналах с пористыми стенками при наличии вдува через них и их гидродинамической устойчивости проводилось в работах [1-7, 9-13].

различных используемых моделей турбулентности на правильность описания характерных особенностей задачи.

Таковыми особенностями являются:

-наличие начального участка канала, в котором течение остается ламинарным при любых числах Рейнольдса (в случае, когда начальное сечение является непроницаемой стенкой или если в нем реализовано условие симметрии);

-для ламинарного режима в начальном участке существует точное аналитическое решение уравнений Навье-Стокса, зависящее от обеих независимых переменных, которое описывает непараллельное, зависящее от x течение;

-удается теоретически проанализировать устойчивость этого течения в линейном приближении с учетом непараллельности основного потока;

-при переходе к турбулентному режиму профиль скорости существенно не изменяется (в отличие от каналов с непроницаемыми стенками);

-точки максимума интенсивности турбулентности отодвигаются от стенок ближе к оси канала;

-при дальнейшем движении вниз по течению существует второй переход, сопровождающийся наполнением профиля скорости;

-при наличии турбулентного потока в начальном сечении при достаточно большом вдуве через стенки канала наблюдается ламинаризация течения в начальном участке в окрестности проницаемых стенок канала.

В силу рассматриваемых свойств задача является удобной тестовой задачей для верификации моделей турбулентности в смысле их пригодности для моделирования течений с переходом от ламинарного режима к турбулентному для течений рассматриваемого типа. Для численного моделирования используется комплекс ANSYS CFX, в котором реализовано большое количество моделей турбулентности.

Проведенные расчеты позволили получить и проанализировать осредненные профили скоростей, профили пульсационной энергии турбулентности в различных сечениях канала, линии тока, величину турбулентной вязкости и скорости диссипации энергии в различных сечениях канала, напряжения Рейнольдса в различных точках течения.

Сравнение с имеющимися экспериментальными данными, теоретическими и расчетными работами других авторов позволило проанализировать, какие из моделей турбулентности достаточно адекватно описывают рассматриваемые течения. В частности, получено, что для правильного

получения перехода от ламинарного режима к турбулентному в наибольшей степени подходят модели в напряжениях Рейнольдса при стационарных расчетах и модель SST при проведении нестационарных расчетов.

Рассмотрено влияние разнообразных физических и вычислительных параметров на характеристики рассматриваемых течений: числа Рейнольдса на входе в канал, числа Рейнольдса, посчитанного по скорости вдува на боковых стенках канала, числа Рейнольдса, определенного по скорости на оси в данном сечении канала, интенсивности турбулентности на входе в канал, общей длины канала.

Рассмотрено три типа задач:

1. Турбулентный режим течения в канале, в начальном сечении канала (торец канала) условия симметрии.
2. Турбулентный режим течения в канале, торец – непроницаемая стенка.
3. Турбулентный режим течения в канале, вдув через торец турбулентного потока.

В данной работе приводятся результаты решения задачи первого типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале с параллельными проницаемыми стенками, через которые подается воздух с постоянной скоростью V_0^* перпендикулярно стенке.. Возьмем систему координат, направив ось x по средней линии канала, а ось y - по начальному торцевому сечению канала (рис. 1). Если за характерные скорость и длину взять величину V_0^* и полуширину канала h , то можно ввести число Рейнольдса, построенное по скорости вдува, $R_0 = \frac{\alpha V_0^*}{\nu}$, где ν - кинематический коэффициент вязкости.

Граничное условие на проницаемых стенках для компоненты скорости V приведено на рис.1, две другие компоненты задаются в виде

$$U = W = 0$$

при $y = \pm h$

Вертикальная компонента скорости V_0^* одинакова по всей длине боковых стенок, имеет заданное значение и направлена

внутрь канала. На проницаемых боковых стенках канала заданы необходимые турбулентные характеристики так, как показано на рисунке 1. Эти характеристики: интенсивность турбулентности l_0 и масштаб вихря l_w для потока, подаваемого через проницаемые стенки.

Турбулентный режим течения, на дне условие симметрии

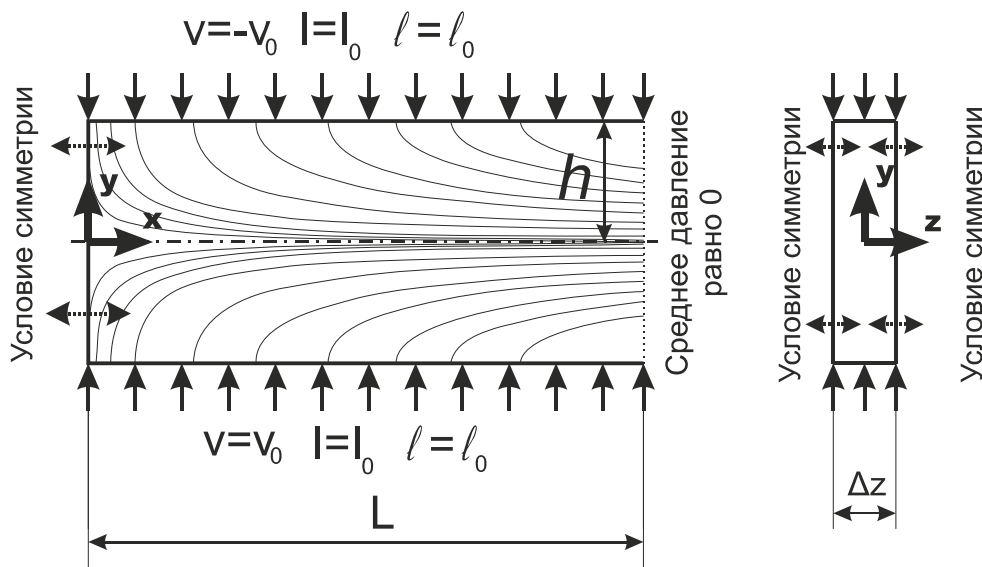


Рис. 1 Расчетная область, граничные условия и линии тока для рассматриваемого течения.

В начальном сечении канала использовались три типа граничных условий: условие симметрии, непроницаемый торец канала и задание профиля скорости в начальном сечении. Здесь приведены результаты для задачи первого типа. На границах расчетной области, параллельных плоскости xOy , также задано условие симметрии. Это связано с тем, что комплекс ANSYS CFX позволяет решать только трехмерные задачи. Поэтому, решая задачу в области, являющейся параллелепипедом, и используя условия симметрии по оси z , мы моделируем решение плоской задачи. В выходном сечении канала поставлено условие «выход» с опцией среднее давление равно нулю.

3. Автомодельное решение

В [1] было показано, что при выполнении условий симметрии в начальном сечении канала, что соответствует симметричному растеканию воздуха относительно этого сечения, для рассматриваемой задачи существует автомодельное решение уравнений Навье-Стокса, которое имеет вид

$$\Psi = xF_1(y) \tag{1}$$

где $F_1(y)$ определяется из решения уравнения

$$\frac{1}{R_0} F_1^{(4)} - F_1' F_1'' + F_1 F_1''' = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$F_1'(1) = 0, \quad F_1(1) = 1, \quad F_1(0) = F_1''(0) = 0 \quad (3)$$

В этих условиях использована симметрия течения относительно оси x . В формуле (1) Ψ - функция тока для соответствующего двухмерного течения. Штрих обозначает дифференцирование по y .

Из (1) следует, что продольная компонента скорости, отнесенная к скорости вдува, линейно растет по длине канала, а поперечная компонента не зависит от x :

$$u = \frac{u^*}{V_0^*} = xF_1'(y), \quad V = \frac{V^*}{V_0^*} = -F_1(y), \quad (4)$$

Отметим, что если за характерную скорость принять не V_0^* , а скорость на оси канала в данном сечении:

$$u_m(x) \equiv u(x, 0) = xF'(0)$$

то профили продольной компоненты скорости будут подобны во всех сечениях канала:

$$U(y) = \frac{u^*(x, y)}{u_m(0)} = \frac{F'(y)}{F'(0)} \quad (5)$$

Профиль скорости $U = U(y, R_0)$ зависит от R_0 так, что для $R_0 = 0$ он переходит в параболический (течение Пуазейля), а при $R_0 \rightarrow \infty$ стремится к профилю

$$U(y) = \cos \frac{\pi}{2} y, \quad (6)$$

который получается из вихревого решения уравнения для идеальной жидкости. Интересно отметить, что предельное при $R_0 \rightarrow \infty$ решение (6) удовлетворяет уравнениям движения идеальной жидкости, и в то же время удовлетворяет всем граничным условиям для вязкой жидкости, что обеспечивает регулярный предельный переход при $R_0 \rightarrow \infty$. Рассмотренное тече-

ние, помимо практических приложений, представляет большой интерес для теории гидродинамической устойчивости, как пример точного решения уравнений Навье-Стокса, описывающего непараллельное, зависящее от x течение. Устойчивость его была рассмотрена в [2], [4]. Решение краевой задачи (2), (3) при произвольном значении величины R_0 может быть получено численным методом [3].

Рассмотренное автомодельное решение (4), (5) получено для симметричного растекания жидкости относительно начального сечения канала. В технических приложениях и в экспериментальных установках часто начальным сечением является непроницаемая стенка (дно канала) и в окрестности этого сечения автомодельное решение неприменимо. Однако экспериментальные данные [8-11] и численные расчеты [3] показывают, что на достаточном расстоянии от входа реализуются профили скорости, характерные для автомодельного решения. В то же время изучение устойчивости этих течений приводит к выводу о том, что на переход от ламинарного режима течения к турбулентному сильно влияют условия течения около дна канала. В связи с этим в [3] было рассмотрен характер течения в начальном участке плоского канала как для случая непроницаемого дна, так и случая подачи или отсоса воздуха через дно. Было показано, что в окрестности дна канала образуются вихревые застойные зоны и профили скоростей с точками перегиба. Однако, далее вниз по течению на некотором расстоянии от дна реализуется автомодельный профиль (5).

Характер течения около непроницаемого дна канала, длина вихревой зоны l_1 и длина переходного участка l_2 при ламинарном режиме течения и при различных значениях числа Рейнольдса R_0 приведены на рисунке 2

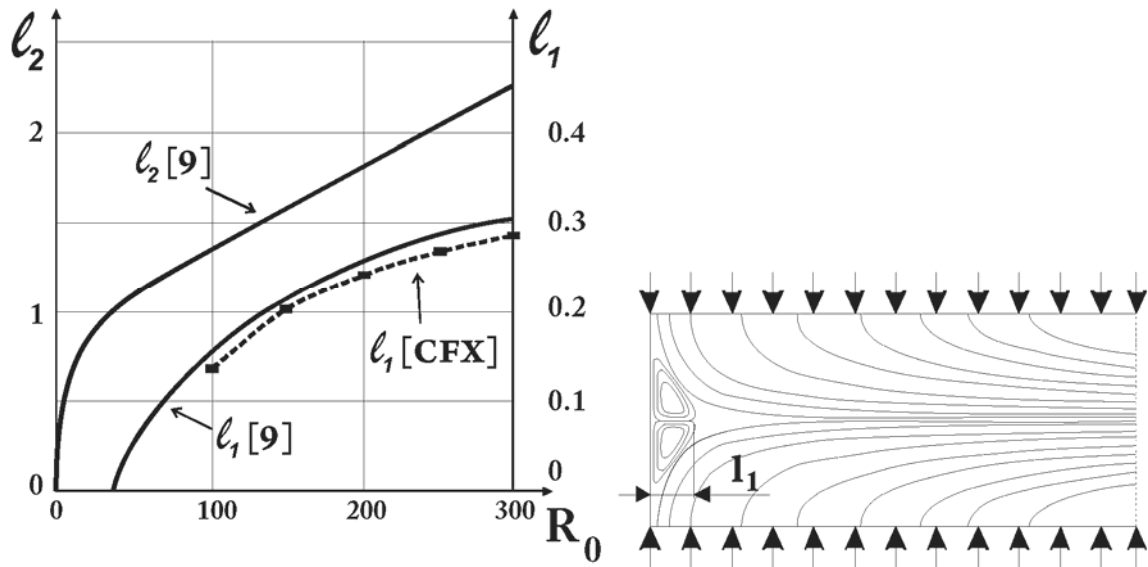


Рис. 2. Длина вихревой застойной зоны l_1 и длина переходного участка l_2 для течения в начальном участке канала с непроницаемым дном.

Длина вихревой зоны, вычисленная при помощи CFX хорошо согласуется с результатами, приведенными в литературе. Величина l_2 показывает расстояние от дна канала, после которого вниз по течению реализуется автомодельный профиль (5).

4. Анализ результатов расчета для турбулентного течения.

Расчеты проводились с целью проверки особенностей рассматриваемых течений, которые были приведены во введении.

Первая из этих особенностей - наличие начального участка канала, в котором течение остается ламинарным при любых числах Рейнольдса. Переход от ламинарного режима течения на начальном участке к турбулентному легко отслеживается по графикам изменения интенсивности

турбулентности (или турбулентной вязкости) вниз по течению в канале. Переход может быть получен и с помощью зависимости напряжений Рейнольдса по длине канала.

В качестве примера на рисунке 3 приведены изменение интенсивности турбулентности по длине канала для различных значений величины Y , показывающих расстояние от оси канала: $Y = 0$ (ось канала); $Y = 0,5$; $Y = 0,8$; $Y = 0,95$ для типичных значений числа Рейнольдса и трех различных моделей турбулентности. Значение $Y = 1$ соответствует проницаемой стенке канала. Здесь приведены зависимости для всей длины канала. Для удобства обработки результатов соответствующие функции выдавались и только в начальном участке $0 \leq X \leq 10$.

Интенсивность турбулентности как функция x

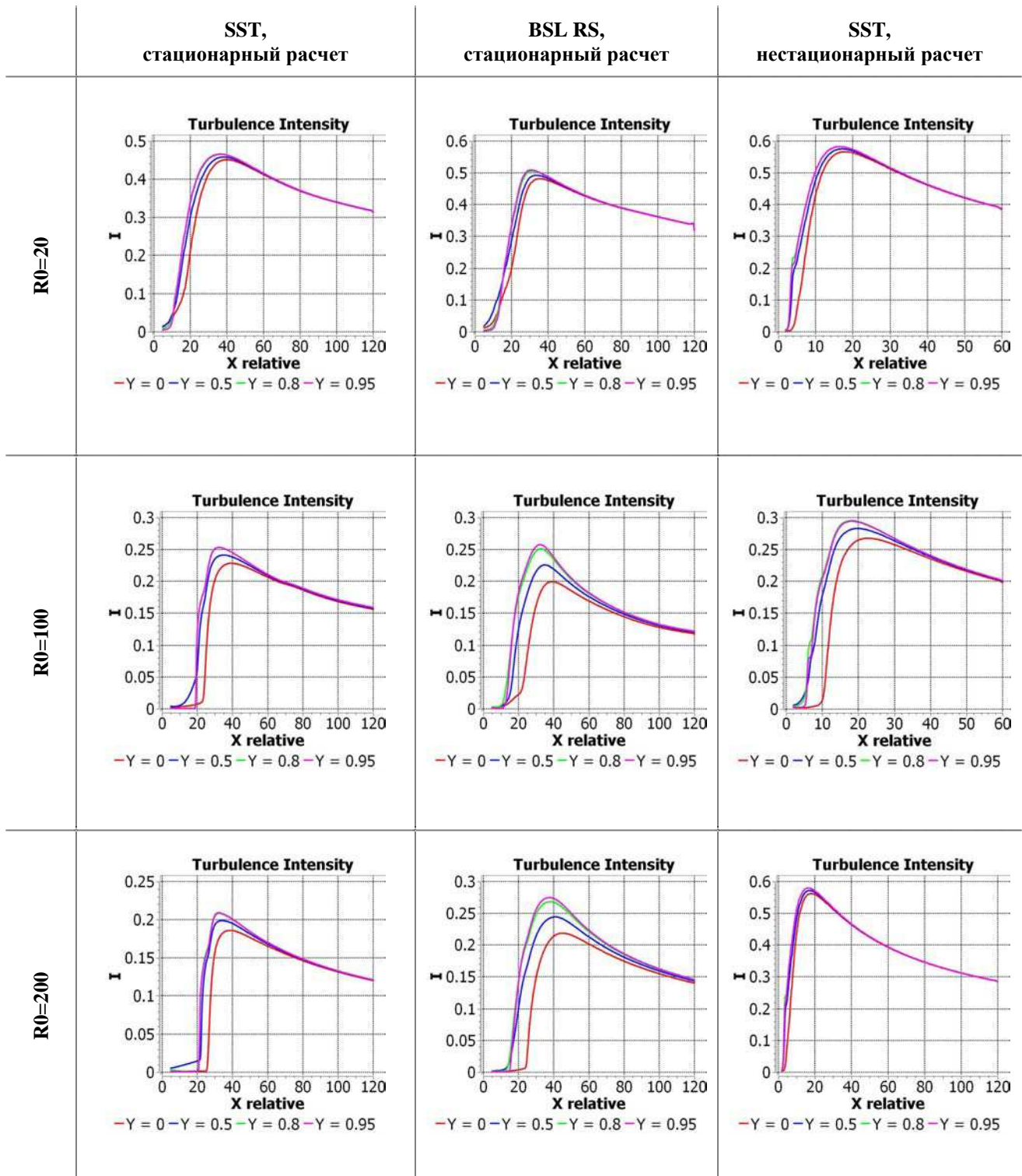


Рис. 3. Изменение интенсивности турбулентности по длине канала для различных значений величины Y , показывающих расстояние от оси канала: $Y = 0$ (ось канала); $Y = 0,5$; $Y = 0,8$; $Y = 0,95$ для типичных значений числа Рейнольдса и трех различных моделей турбулентности.

Видно, что интенсивность турбулентности мала в начальном участке ($0 \leq X \leq 10$) и далее начинает расти. Результаты расчетов показывают, что для всех моделей турбулентности получен переход к турбулентному режиму: интенсивность турбулентности и турбулентная вязкость имеют весьма малые значения в начальном участке канала, а затем начинают расти. При дальнейшем увеличении x интенсивность турбулентности достигает максимума и начинает уменьшаться по длине канала (рис. 3). Такое поведение интенсивности турбулентности и следовало ожидать согласно экспериментам [9-12]). Для того чтобы вычислительный процесс сходиллся и не возникало значительных искажений, необходимо, чтобы конец расчетной области был удален хотя бы на 10-15 характерных размеров от сечения, в котором интенсивность турбулентности достигала своего максимума. Ламинарный участок в начале канала существует при всех рассмотренных значениях R_0 . Такое поведение наблюдалось в экспериментах [9-12] для плоского и кольцевого канала и в трубах и предсказано теоретически в [2], [4] при исследовании гидродинамической устойчивости этих течений в линейном приближении с учетом непараллельности основного потока на основании обобщенного уравнения Орра-Зоммерфельда.

В таблице 1 показано, как меняется координата перехода к турбулентному режиму в зависимости от модели турбулентности и числа R_0 . Согласно результатам, полученным в [2], [4] с использованием линейной теории устойчивости, течение в канале с проницаемыми стенками при данных граничных условиях теряет устойчивость при меньших значениях x , чем получено в результате расчета. Очевидно, что точка перехода к турбулентности располагается ниже по потоку, чем точка потери устойчивости. Отметим, что модели SST и BSL во всех случаях выдали почти одинаковые результа-

ты, что можно объяснить тем, что они основаны на похожих идеях.

Таблица 1

Зависимость области перехода к турбулентному режиму от числа Рейнольдса вдува для использованных моделей турбулентности.

R_0 модель	20	100	200
стационарные			
SST	6-10	15-18	21
BSL	6-10	15-20	21
K, ω	6-10	16-20	21
BSL RS	4-8	12	15
SSG RS	4-8	10-12	13-14
нестационарные			
SST	4	8	6
K, ω	6-8	15-21	29-31
K, ε	18-20	25-38	25-38

Относительно результатов, приведенных в таблице 1, необходимо сделать следующие замечания.

Во-первых, сечение канала, в котором происходит переход к турбулентному режиму, нельзя определить точно, так как рост интенсивности турбулентности при различных расстояниях от стенки в данном сечении происходит по-разному. Согласно линейной теории гидродинамической устойчивости рост возмущений начинается в критической точке, то-есть, при таком значении Y_* , для которого $U(Y_*) = c_r$, где c_r - фазовая скорость распространения возмущений [2]. Далее вниз по течению происходит сложное нелинейное взаимодействие возмущений с разными волновыми числами, в результате чего происходит турбулизация потока. Результаты расчетов для рассматриваемого течения показывают, что значительный рост возмущений может происходить только в некоторой окрестности Y_* , и на протяжении нескольких калибров только эта пульсационная

энергия растет, в то время как при других Y возмущения убывают. Лишь на некотором расстоянии вниз по потоку, равном нескольким значениям величины X/h интенсивность турбулентности начинает расти почти во всем сечении $X/h = const$.

Во-вторых, сравнение с результатами линейной теории устойчивости рассматриваемого течения, которое приведено в [2], показывает, что результаты нестационарной модели SST для числа $R_0=20$ являются недостоверными. Действительно, для этого числа Рейнольдса вдува критическое число Рейнольдса R_* , построенное по скорости на оси канала, равно $R_* = 660$. В то же время текущее число Рейнольдса в сечении $X=4$, где согласно результатам начинается турбулентный режим, равно $R=150$, что существенно ниже критического числа Рейнольдса по линейной теории. Единственная причина, по которой приведенное рассуждение может быть недостаточно обоснованным, заключается в том, что при малых числах R_0 гипотеза локальной автомодельности возмущений, использованная в [2] для исследования устойчивости непараллельных течений, является недостаточно обоснованной.

Для других чисел $R_0=100$ и $R_0=200$ текущие числа Рейнольдса в сечениях канала, где начинается турбулентный режим, оказываются больше критических чисел Рейнольдса по линейной теории. Для подтверждения этого приведем критические числа Рейнольдса R_* и точки потери устойчивости X_* для этих чисел Рейнольдса, полученные по линейной теории в [2]: для $R_0=100$ $R_* = 1000$,

$X_* \approx 6,7$, а для $R_0=200$ $R_* = 1730$, $X_* \approx 5,76$. Соответствующие координаты перехода к турбулентности для нестационарной модели SST примерно равны 8 и 6, а соответствующие локальные числа Рейнольдса на оси, полученные из численного

решения по CFX равны 1300 и 1800. Отсюда следует, что нестационарная модель SST достаточно хорошо описывает переход турбулентности для больших чисел R_0 . Анализ других аэродинамических величин и сравнение их с экспериментальными и численными данными других авторов подтверждает этот вывод.

Аналогичный анализ показывает, что модели для напряжений Рейнольдса тоже достаточно хорошо описывают переход и турбулентное течение для рассматриваемых течений. Остальные модели можно использовать для описания рассматриваемых турбулентных течений, но они, по-видимому, хуже описывают переход от ламинарного режима к турбулентному.

Результаты расчетов показывают, что в начальном участке канала реализуется автомодельный профиль (5) как в ламинарном участке, так и на первоначальном турбулентном участке. Этим это течение отличается от течения в канале с непроницаемыми стенками, где при переходе к турбулентному режиму происходит наполнение профиля скорости. Наполнение профиля скорости происходит не сразу после перехода, как это бывает в течениях без вдува через стенки, а через некоторое значительное расстояние вниз по потоку. Можно сказать, что в этой задаче происходит 2 перехода: во время первого начинает расти турбулентная вязкость и интенсивность турбулентности, а при втором происходит наполнение профиля скорости.

Этот факт иллюстрирует рис. 4, на котором показано изменение нормированных профилей скорости

$$U(y) = \frac{u^*(x, y)}{u_m(0)}$$

в различных сечениях канала $x/h=5$; 10; 20; 30. Нормировка осуществляется делением размерной скорости на значение скорости на оси канала. График соответствует значению $R_0=200$ и получен по нестационарной модели SST.

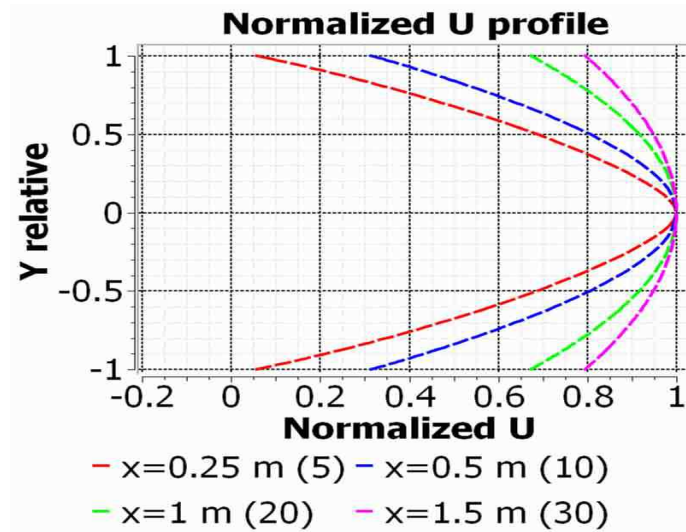


Рис. 4 Профили осредненной скорости, отнесенной к скорости на оси, для различных сечений канала $x/h=5; 10; 20; 30$ для $R_0=200$.

График интенсивности турбулентности имеет два максимума, которые отодвинуты ближе к оси канала, по сравнению с течениями без вдува. Однако с удалением от торцевого сечения канала точки максимума сдвигаются ближе к стенке. Поведение профиля интенсивности турбулентности приведено на рис. 5. Эти профили соответствуют значению $R_0=200$ и различным безразмерным значениям x . Они получены с помощью нестационарной модели SST.

Отметим, что интенсивность турбулентности в начальном участке и достаточно далеко вниз по течению не равна нулю на оси канала.

Зависимость компонент напряжений Рейнольдса от продольной координаты x для различных чисел R_0 , полученная по модели BSL Reynolds Stress, приведена на рис. 6. Более подробное изображение компонент напряжений Рейнольдса для случая $R_0 = 200$ приведено на рис.7.

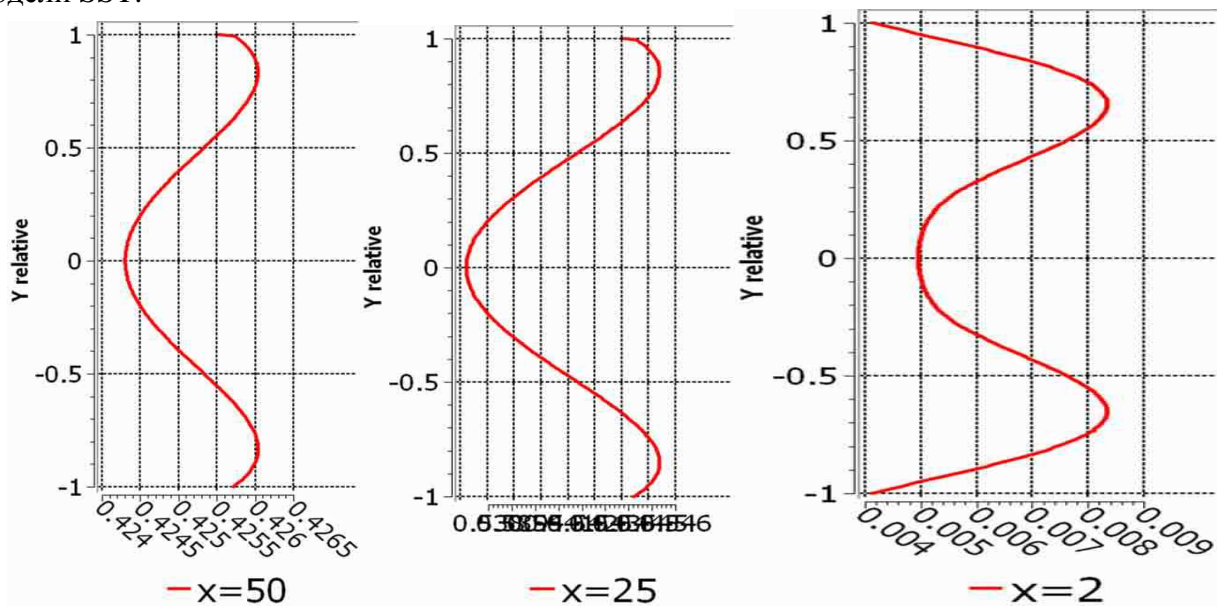


Рис 5. Поведение профиля интенсивности турбулентности в различных сечениях канала.

Качественное и частично количественное сравнение полученных напряжений Рейнольдса для рассматриваемого плоского случая с численными и экспериментальными данными для кольцевого канала и трубы в работах [8]-[11] показывает их достаточно хорошее согласие. Это касается прежде всего относительной величины членов UU, VV, WW, UV , являющихся компонентами напряжений Рейнольдса. Здесь использованы простые обозначения для компонент напряжений Рейнольдса $-\rho \langle v'_k v'_i \rangle$, которые были записаны в безразмерном виде. При приведении к безразмерному виду за характерную скорость принята скорость на оси канала в том сечении, где вычисляются напряжения Рейнольдса.

5. Некоторые методические замечания.

Были проделаны методические расчеты с целью выявления того, как некоторые физические параметры и вычислительные параметры влияют на получаемые результаты. Было установлено,

Рассматривались различные законы изменения интенсивности турбулентности на проницаемых стенках. На основе анализа результатов был сделан вывод о слабой зависимости характеристик течения от такого закона.

Величина интенсивности турбулентности и масштаба вихря потока, подаваемого через стенки, оказывало сравнительно небольшое влияние на турбулентные характеристики потока.

Проверялось влияние на результаты длины расчетной области. В случаях, когда конец расчетной области не был удален хотя бы на 10-15 характерных размеров (за который в данной работе принята полуширина канала h) от максимума интенсивности турбулентности (см, например, рис. 3) возникали проблемы со сходимостью, а в случае, когда решение все же сходилось, на графиках появлялись пилообразные дефекты.

Из-за отсутствия возможности решать в CFX задачи в чисто двумерной постановке, пришлось выбрать расчетную область в виде параллелепипеда. В связи с чем возник вопрос о влиянии количества слоев элементов вдоль оси z на результаты счета. Была проведена серия вычислительных экспериментов с различным количеством слоев вдоль z и с различной толщиной каждого слоя. Был сделан вывод о незначительном влиянии количества слоев по z на результаты при выборе толщины одного слоя порядка наименьшего размера элемента по x, y (при существенно большей или меньшей толщине слоя решение начало меняться в зависимости от количества слоев).

Сетка строилась при помощи макроса, принимающего на вход параметр, задающий качество сетки («уровень» сетки) и количество слоев по z . Увеличению уровня на единицу соответствует уменьшение наибольшего и наименьшего шага в каждом направлении в 1.5 раза. Сетки одного и того же «уровня» с разной длиной расчетной области отличаются только количеством элементов в направлении x , в то время как размер первого и последнего элементов у них совпадают.

Параметры используемых сеток приведены в таблице 2, а вид сетки на рис. 8.

Выяснилось также, что на сходимость и качество результатов оказывает большое влияние размер самого правого слоя элементов вблизи выхода из канала. Уже при его относительном увеличении в 2-3 раза на графиках скорости и интенсивности турбулентности в зависимости от x появляются пилообразные искажения на правом конце, которые распространяются на значительное расстояние вглубь расчетной области. Это лишний раз подтверждает необходимость использования и реализации в вычислительных комплексах «мягких» граничных условий [3].

Интенсивность напряжений Рейнольдса

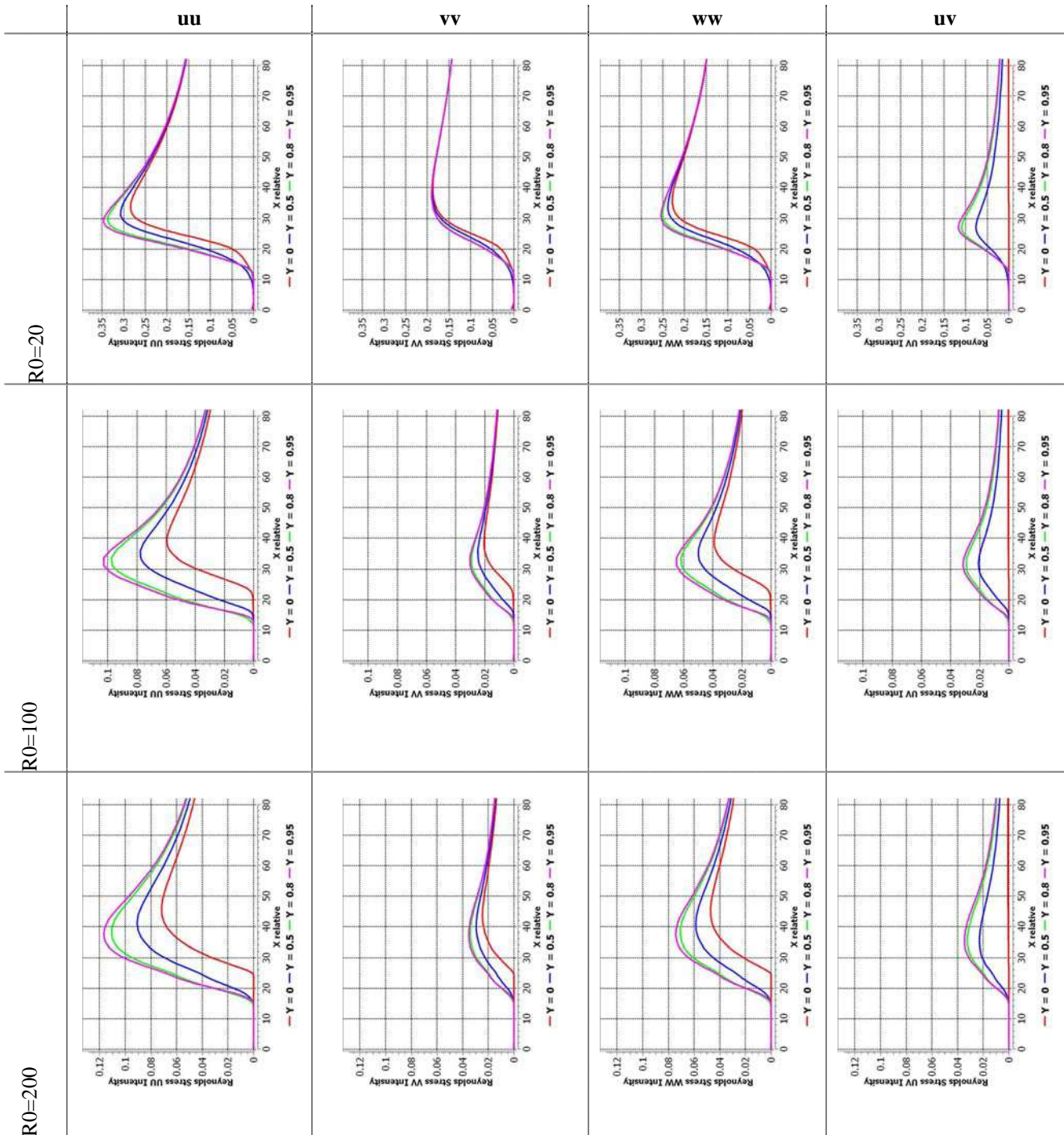


Рис.6 Зависимость безразмерных компонент напряжений Рейнольдса от продольной координаты x для различных чисел R_0 , полученная по модели BSL Reynolds Stress

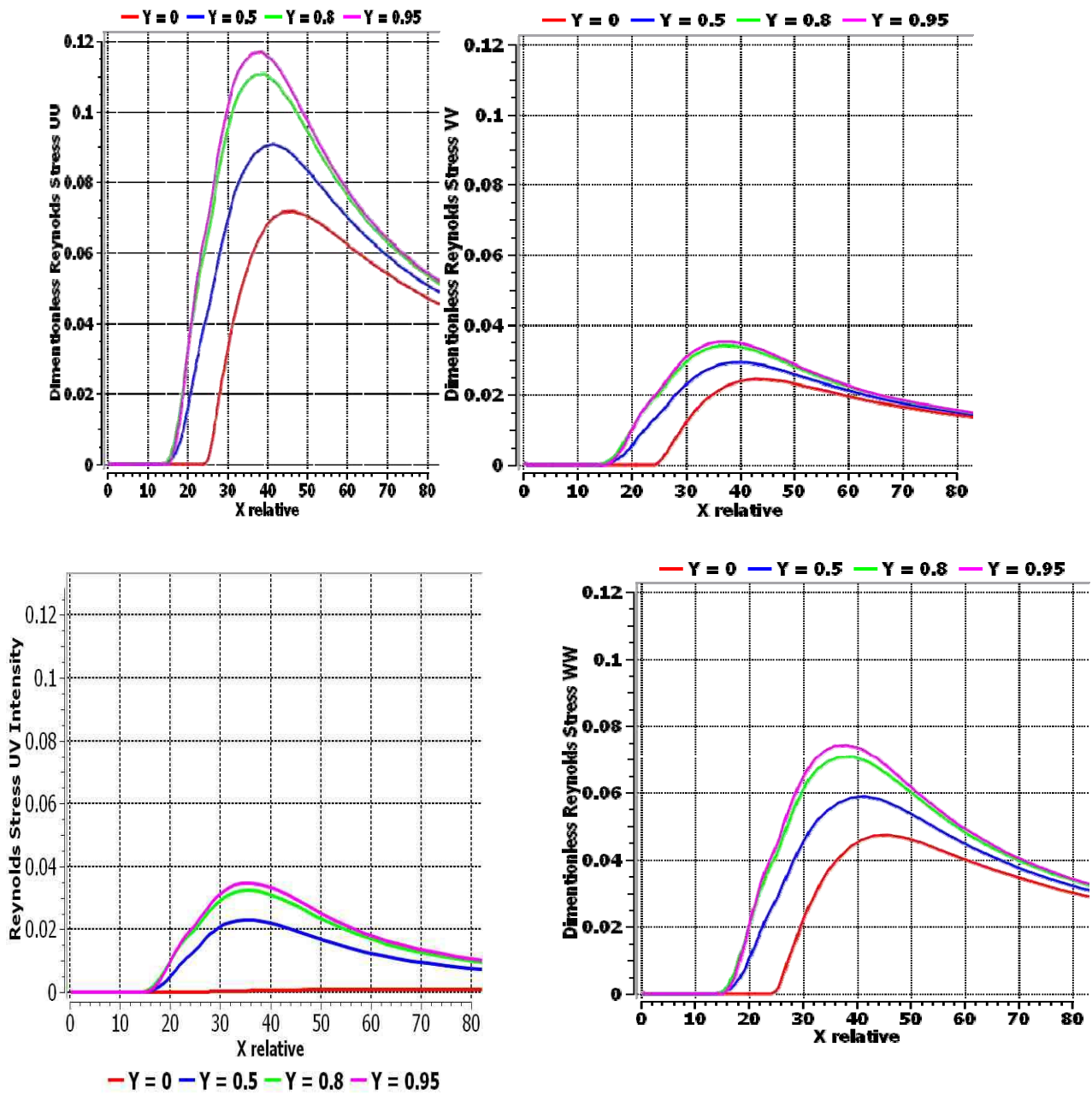


Рис. 7. Более подробное изображение безразмерных компонент напряжений Рейнольдса для случая $R_0 = 200$

Таблица 2

Уровень сетки	Δx_{\min}	Δx_{\max}	Δy_{\min}	Δy_{\max}	Количество узлов/элементов при длине расчетной области	
					40	120
Уровень 3	0.013	0.448	0.004	0.04	46250	123000
Уровень 4	0.009	0.299	0.003	0.027	104706	278586
Уровень 5	0.006	0.199	0.002	0.018	232668	621010

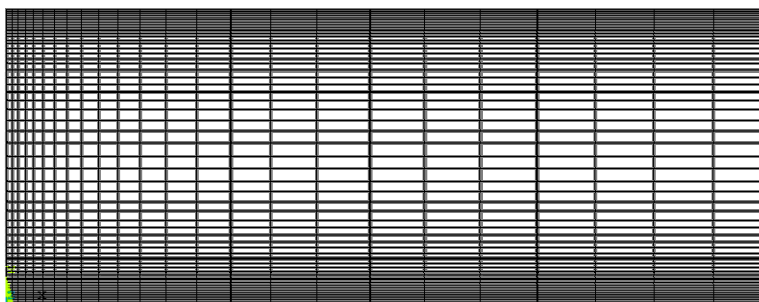


Рис.8. Сетка в начальном участке области (для наглядности количество элементов сильно уменьшено)

Измельчение сетки слабо влияет на поле скоростей, но иногда существенно сказывается на турбулентных характеристиках. Это показали сравнительные расчеты на сетках уровня 3 и 5. Основные расчеты были проведены на сетке уровня 5.

При проведении расчетов в CFX была использована надстройка над комплексом ANSYS-CFX для проведения серий однотипных расчетов и анализа результатов. Надстройка разработана одним из соавторов работы, Ф.М.Котовым [7].

Литература

1. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls.-J.Appl. Phys.,1953.-vol.24.-No.9.-p.1232 - 1235
2. Варапаев В.Н., Ягодкин В.И. Об устойчивости течения в канале с пористыми стенками.-Изв.АН СССР,МЖГ,1969.-N5.-с.91-95.
3. Варапаев В.Н. Течение вязкой жидкости в начальном участке плоского канала с пористыми стенками.-Изв.АН СССР,МЖГ, 1969.-N4.-с.178-181.
4. Варапаев В.Н., Ягодкин В.И. Численное исследование некоторых течений вязкой жидкости и их гидродинамической устойчивости с учетом непараллельности основного потока.-В кн."Труды секции по численным методам газовой динамики II Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем (Новосибирск 1969). Издание ВЦ АН СССР. М.,1971.
5. Варапаев В.Н., Курильская Н.А., Свириденков А.А., Ягодкин В.И. Об устойчивости неавтономных течений в каналах с пористыми стенками. -В кн. Математическое программирование и расчет строительных конструкций. Сборник трудов N102 МИСИ.-М.,1973.

6. Варапаев В.Н., Свириденков А.А., Ягодкин В.И. Численное и экспериментальное исследование течений в каналах с пористыми стенками и их гидродинамической устойчивости. М.:Изд.-во СГА, 2008. 120 с.
7. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и теплообмен на пористых поверхностях.-М.:Наука,1984.-273с.
8. Котов Ф.М. Надстройка над комплексом ANSYS CFX для проведения серии однотипных расчетов и анализа результатов. Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сб. тр. №13, -М.: МГСУ, 2010. -372с.,с. 279
9. Олсон Р.М., Эккерт Е.Р. Экспериментальное исследование турбулентного течения в пористой круглой трубе с равномерным вдувом газа через стенку.- Прикладная механика,1966.-т.33.-N1.- с.7-20.
10. Свириденков А.А., Ягодкин В.И. О течениях в начальных участках каналов с пористыми стенками.-Изв.АН СССР,МЖГ,1976.-N5.- с.43-48.
11. Эккерт Е.Р.Г., Роди В. Переход от турбулентного режима течения к ламинарному в трубе со вдувом.- Прикл. механика,1968.-т.35.-N4.-с.216-217.
12. Ягодкин В.И. Применение каналов с пористыми стенками для исследования внутриканального горения твердых ракетных топлив./Труды XVIII Международного астронавтического конгресса, 1967.-vol.3.
13. Sourabh Apte and Vigor Yang, Unsteady Flow Evolution in Porous Chamber with Surface Mass Injection, Part 1: Free Oscillation, AIAA JOURNAL Vol. 39, No. 8, August 2001, p.1577-1585
14. Joseph Majdalani and Gary A. Flandro. The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection, *Proc. R. Soc. Lond. A* (2002), p. 1622-1651

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел/факс: 8-499-183-59-94,
E-mail автора: vnvarapaev@mail.ru

ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

Т.Л. Дмитриева

Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск, Россия

АННОТАЦИЯ: Приведено решение тестовых задач оптимизации конструкций по оригинальной методике в сопоставлении с результатами, полученными по универсальному программному комплексу ANSYS. Рассмотрена задача оптимизации консольной балки при варьировании ее толщины, а также оптимизация плоской рамы при варьировании параметров сечений. В качестве критерия оптимальности принят минимум объема.

Ключевые слова: оптимальное проектирование конструкций, нелинейное программирование, метод конечных элементов, комплексы программ

VERIFICATION OF PROGRAMM COMPLEXES FOR CALCULATION AND OPTIMIZATION OF STRUCTURES

T.L. Dmitrieva

Irkutsk state technical university, Irkutsk, Russia

ABSTRACT: Decision of the test problems to optimization structures is brought in comparison with ANSYS solution. The considered problem to optimization of the cantilever beam at variation of her thickness, as well as optimization of the flat frame at variation of the sections parameters. As optimum criterion is accepted minimum of the volume.

Key words: optimum structural design, nonlinear programming, the final element analysis, program complex.

В настоящее время технологии автоматизированного проектирования инженерных систем широко используются во многих технических областях. Однако алгоритмы оптимизации в силу своей сложности до сих пор не находят массового применения в практике реального проектирования. С этих позиций разработка численных методов оптимизации, а также высоко робастных алгоритмов и программ на их основе является одним из актуальных научно-прикладных направлений.

В [1, 2] дается описание алгоритма автоматизированного проектирования конструкций, геометрические параметры сечений которых, а также координаты узлов могут варьироваться. Оптимальный проект соответствует минимуму веса (объема) конструкции при наличии ограничений по прочности, жесткости и устойчивости. Проблема оптимизации поставлена в форме задачи нелинейного математического программирования (НМП):

$$\text{найти } \min f(x), \quad X \in E^{nx} \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$\{X^L\} \leq \{X\} \leq \{X^U\}. \quad (3)$$

$f(x)$ – минимизируемая (целевая) функция;
 $\{X\}$ – вектор варьируемых параметров на интервале $\{X^L\} - \{X^U\}$;

$g_j(x)$ – функции ограничений.

Условно-экстремальная задача (1-3) приводится к задаче на безусловный экстремум при помощи двух модифицированных функций Лагранжа (МФЛ):

$$F_p = F_L + 0,5 \{g\}^T [\delta] [K] \{g\}, \quad (4)$$

$$F_M = F_L (1 - \tau) - 0,5 \tau \left\{ \frac{\partial F_L}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F_L}{\partial x} \right\}, \quad (5)$$

где $F_L = f(x) + \{Y\}^T [\delta] \{g\}$ – функция Лагранжа.

В выражении (4) $[K]$ – диагональная матрица штрафных коэффициентов. Элементы матрицы $[\delta]$ определяются из условия:

$$\begin{aligned} &\text{если } g_j + \Delta Z_j > 0, \delta_{jj} = 1, \\ &\text{иначе } \delta_{jj} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ΔZ_j – величина сдвига j -го ограничения в допустимую область. В (5) τ – параметр, регулирующий сходимость алгоритма. $\{Y\}$ – вектор двойственных переменных (множителей Лагранжа) размерностью m .

Итерационный алгоритм решения задачи (1-3) заключается в следующем. На итерации t при определенных $\{X^t\}, \{Y^t\}$ решается задача на безусловный экстремум при наличии параметрических ограничений (3). В результате вычисляется вектор $\{X^{t+1}\}$:

$$\begin{aligned} &\{X^{t+1}\} \in \text{Arg min } F_p(X^t, Y^t); \\ &\{X^L\} \leq \{X\} \leq \{X^U\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения этой задачи используется широкий набор прямых и градиентных методов различных классов [3]. На первой итерации, когда отсутствует хорошее начальное приближение, используется *метод случайного поиска*. Далее возможны различные варианты. *Метод деформируемого многогранника* обладает высокой надежностью и позволяет получать оптимальные решения для функций произвольного вида, но при этом требует большого числа обращений к целевой и ограничительным функциям. В методе *наискорейшего спуска* поиск ведется вдоль градиента минимизируемой функции. Скорость сходимости этого метода на порядок выше, но он применим для гладких дифференцируемых функций. На последних итерациях для получения результатов высокой точности, возможно переключение на *метод Ньютона*. Однако метод работает только в том случае, если функция F_p выпукла и дифференцируема.

Второй шаг итерационного процесса заключается в определении двойственных переменных $\{Y^{t+1}\}$. Предусмотрено 3 схемы их вычисления.

В **1-й схеме** вектор двойственных переменных определяется из сравнения условий стационарности функции F_p и функции Лагранжа F_L :

$$y_j^{t+1} = \max(0, y_j^t + k_{jj}^t g(x^{t+1})) \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Задача (7) при этом решается с использованием прямых поисковых методов, либо градиентного метода 1-го порядка.

В **схеме 2** приращение двойственных переменных вычисляется путем максимизации F_p методом Ньютона:

$$\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial X} \right]^T \left[\frac{\partial^2 F_p}{\partial X^2} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial X} \right] \{ \Delta \bar{Y}^{t+1} \} = \{ \bar{g} \}, \quad (9)$$

где $\{ \Delta \bar{Y}^{t+1} \} = \{ \bar{Y}^{t+1} \} - \{ \bar{Y}^t \}$.

Задача (9) решается в редуцированном пространстве потенциально-активных ограничений $\{ \bar{g} \}$. Этот способ удачно сочетается с методом Ньютона при решении задачи (7).

В **3-й схеме** вектор $\{ \bar{Y}^{t+1} \}$ определяется непосредственно через прямые переменные путем максимизации второй МФЛ F_M по Y .

$$\{ \bar{Y}^{t+1} \} \in \text{Arg max } F_M(X^t, \bar{Y}). \quad (10)$$

Этот способ не требует выполнения условий стационарности функции F_p по переменным x . Он оказался эффективен в задачах, где строятся аппроксимации функций цели и ограничений и при этом (особенно на первых итерациях) не всегда существует допустимое оптимальное решение, т.к. задача часто становится несовместной.

Реализация этих 3-х схем делает алгоритм НМП надежным и устойчивым, так как предполагает эвристический механизм переключения методов условной и безусловной минимизации посредством анализа данных, полученных на конкретном этапе поискового алгоритма.

На основе алгоритма разработан пакет прикладных программ [1], с использованием которого решены тестовые и практические задачи оптимизации конструкций.

Сделаем сопоставление результатов решения тестовых задач оптимизации, полученных в

других программных комплексах (ПК), с решениями, где использован ПК [1].

Ведущим программным продуктом, содержащим модули оптимизации, является многоцелевой универсальный ПК ANSYS, широко используемый в мировом проектировании. В сопроводительной документации к ANSYS Mechanical приведены верификационные тесты, где решены задачи оптимизации конструкций. Достоверность результатов этих решений была подтверждена в верификационном отчете по ПК ANSYS Mechanical, выполненном в Научно-исследовательском центре СтаДиО и ГОУ ВПО МГСУ [4]. Приведем сравнительный анализ решения этих задач с использованием программы ANSYS Mechanical и ПК [1].

Пример 1. Оптимизация формы консольной балки (VM 155. Shape Optimization of a Cantilever Beam). Исследование этой задачи приведено в статье [5].

Варьировались значения полутолщин x_i в узловых сечениях $i=1, \dots, 4$ (рис. 1,б).

Постановка задачи: Дана консольная балка переменной толщины в координатных осях \bar{x}, \bar{y} (рис. 1,а), на свободном конце нагруженная изгибающим моментом M . Требуется подобрать значения толщин в сечениях 1-4 ($t_1 - t_4$) из условия минимума объема балки. Приняты ограничения на максимальные напряжения ($\sigma_{max} \leq 30000 \text{ psi}$) и на максимальное перемещение ($\Delta_{max} \leq 0,5 \text{ in}$). Толщина консоли в месте приложения нагрузки фиксирована ($t_5=0,3 \text{ in}$). Шаг сечений $a=L/4$.

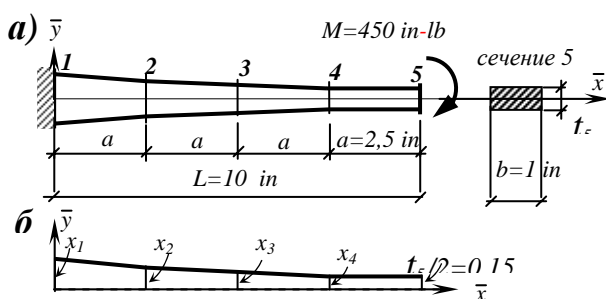


Рис. 1. Оптимизируемая консольная балка

Физические характеристики: модуль упругости $E = 10^7 \text{ psi}$; коэффициент Пуассона 0,3. В ПК ANSYS конструкция рассчитывалась как пластина, работающая в условиях плоского напряженного состояния. Конечно-элементная схема моделировалась плоскими четырехузловыми элементами (PLANE 42). С помощью ПК [1] задача была решена в нескольких вариантах.

Вариант 1. Расчетная схема принята в виде стержня переменного сечения. Так как размеры сечения на порядок меньше длины консоли, то решение, полученное при этом, в дальнейшем рассматривается как точное.

Параметры сечений варьировались на интервале: $0,15 \text{ in} \leq x_i \leq 0,5 \text{ in}$.

Начальный проект содержал следующие параметры (in):

$$x_1^0 = 0,4; \quad x_2^0 = 0,3; \quad x_3^0 = 0,2; \quad x_4^0 = 0,18.$$

Целевая функция представляла объем балки ($f^0 = 4,775 \text{ in}^3$):

$$f(x) = 2,5 \cdot (x_1 + \frac{t_5}{2} + 2 \cdot \sum_{i=2}^4 x_i). \quad (11)$$

Значение вертикального перемещения в сечении 5 (Δ_5) (как максимально возможного) вычислялось при помощи интеграла Мора:

$$\Delta_5 = \frac{M}{E} \cdot \sum_{i=1}^4 \int_{l_i}^{l_{i+1}} \frac{\bar{M}(\bar{x}) \cdot 12}{(2 t(\bar{x})_i)^3} d\bar{x}, \quad \text{где } l_i = (i-1) \cdot a,$$

$$l_5 = L, \quad x_5 = t_5, \quad \bar{M}(\bar{x}) = 10 - \bar{x},$$

$$t(\bar{x})_i = x_i - \frac{x_i - x_{i+1}}{a} \cdot (\bar{x} - l_i), \quad i = 1, \dots, 4.$$

В силу того, что нижний предел для всех x_i принят $0,15 \text{ in}$, ограничение на напряжение $\sigma_{max} \leq 30000 \text{ psi}$ выполняется автоматически, поэтому к расчету принято только **ограничение на перемещение:**

$$g(x) = \frac{\Delta_5}{0,5} - 1 \leq 0. \quad (12)$$

Результаты решения задачи оптимизации:

Оптимальные значения полутолщин в узловых сечениях (in)

x_1	x_2	x_3	x_4	$t_5/2$
0,2176	0,2019	0,1849	0,15	0,15

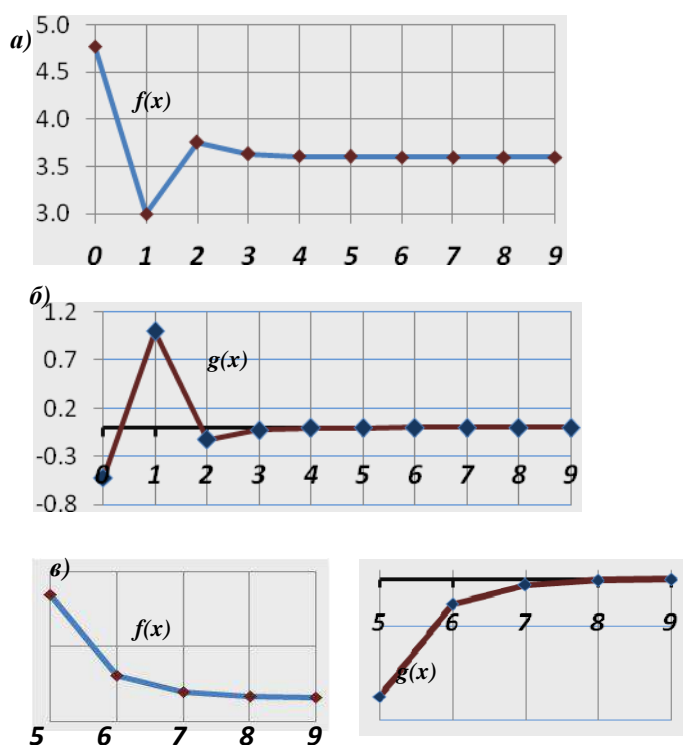


Рис. 2. Изменения функции цели и ограничений : а,б) на итерациях 1-9; в) на итерациях 5-9

На первых 6-ти итерациях алгоритма оптимизации была использована *схема 1*, где задача безусловной минимизации была решена методом *деформируемого многогранника*, с последующим переключением на *схему 2 (метод Ньютона)*.

Невязка в ограничении на 9-й итерации составила $g = 7,344 \cdot 10^{-7}$, что соответствовало перемещению $\Delta_5 = 0,50000037 \text{ in}$.

Из графика на рис. 2,а видно, что значение целевой функций близко к оптимальному уже на 3-й итерации поискового алгоритма.

Вариант 2. Расчетная схема принята в виде консольной пластины ломаного очертания, работающей в условиях плоского напряженного состояния. К расчету взята верхняя часть пластины (рис. 3).

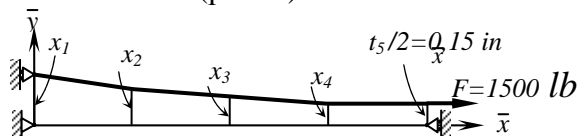


Рис. 3. Схема пластины (верхняя половина) с граничными условиями

В качестве нагрузки принята сосредоточенная сила $F = M / t_5 = 450/0,3 = 1500 \text{ lb}$. Для обеспечения кососимметрии в перемещениях справа введена дополнительная горизонтальная связь.

Варьировались те же значения *полутолщин*, что и в варианте 1 ($x_i, i = 1, \dots, 4$) на том же интервале изменения. *Целевая и ограничительные функции* представлены выражениями (11), (12).

Перемещение Δ_{\max} определялось решением задачи КЭ анализа в перемещениях. Для оценки точности задачи анализа был выполнен расчет пластины со значениями *полутолщин* $x_i = 0,15 \text{ in}$. Максимальное перемещение в этом случае для стержневой расчетной схемы равно 1 in . В таблице 1 приведены значения максимального перемещения узлов пластины Δ_{\max} на различных треугольных КЭ сетках.

Таблица 1

Шаг сетки	$\Delta_{\max} \text{ (in)}$
2×128	0,825702
2×192	0,856895
3×256	0,938994
3×320	0,976125
6×320	0,993128

При решении задачи оптимизации в этом варианте была принята расчетная схема с КЭ сеткой 2×192, где ошибка в решении задачи анализа составила 14,3%.

В качестве начального принят проект пластины постоянной толщины ($x_i^0 = 0,15 \text{ in}$).

Результаты решения были следующие.

Оптимальные значения *полутолщин* в узловых сечениях (in)

x_1	x_2	x_3	x_4	$t_5/2$
0,20091	0,186336	0,16082	0,150002	0,15

Погрешность в объеме пластины составила 6,581 %, невязка в ограничении $g = 9,01 \cdot 10^{-7}$

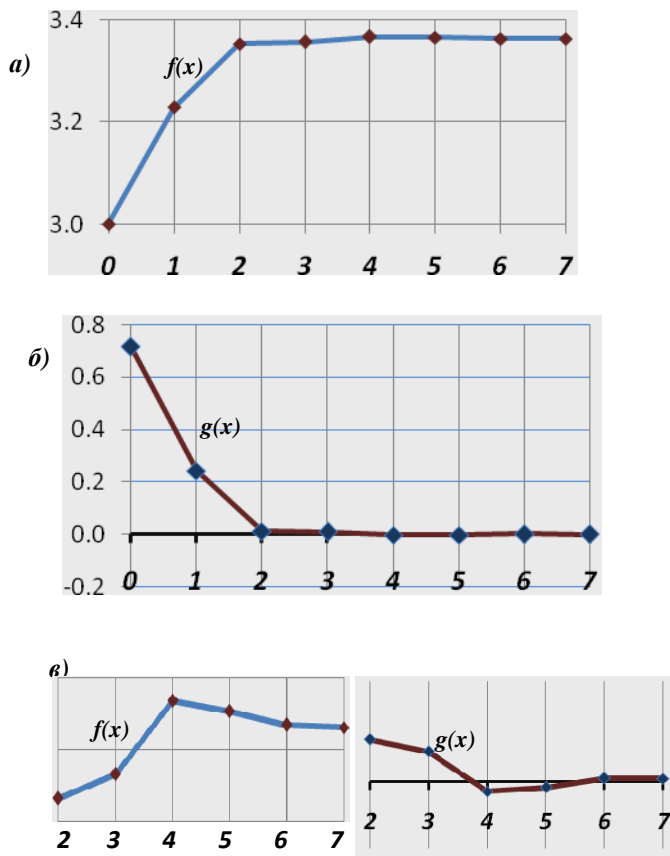


Рис. 4. Изменения функции цели и ограничений : а,б) на итерациях 1-7; в) на итерациях 2-7

На рис. 5 дано очертание пластины для вариантов 1 и 2. Заниженное значение толщин в варианте 2 связано с погрешностью в КЭ расчете пластины.

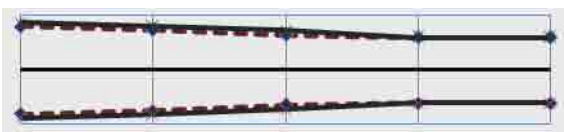


Рис. 5. Оптимальное очертание пластины — вариант 1

Вариант 3. Для того, чтобы исключить погрешности в решении задачи анализа, была принята следующая постановка задачи. При оптимальных значениях переменных $\{X\}$ (вариант 1) был выполнен КЭ расчет пластины с треугольной сеткой 2×128 . Полученное при этом максимальное пере-

ние $\Delta_{\max} = 0,3764 \text{ in}$ принято как возможно допустимое.

Задача решалась с 2-х начальных проектов: А) $x_i^0 (0,15 \text{ in})$; Б) $x^0 (0,4; 0,3; 0,2; 0,18 \text{ in})$.

В такой постановке значения оптимальных параметров, а также целевой функции до 2-го знака совпали с вариантом 1.

Оптимальные значения полутолщин (in)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$t_5/2$
А)	0,21909	0,20448	0,18168	0,15	0,15
Б)	0,21894	0,20431	0,18165	0,15	0,15

Погрешность в объеме составила 0,088 % (А) и 0,0605% (Б). Невязка в ограничениях: $g = -5,268 \cdot 10^{-4}$ (А) и $g = 5,27 \cdot 10^{-4}$ (Б).

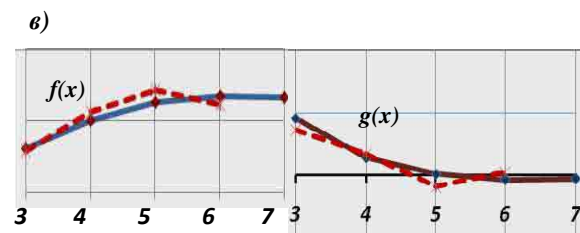
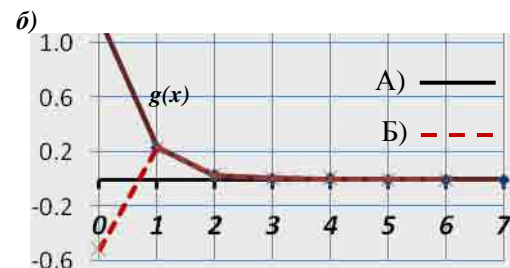
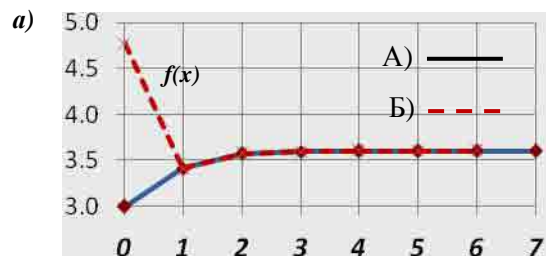


Рис. 6. Изменения функции цели и ограничений : а,б) на итерациях 1-7; в) на итерациях 3-7

В вариантах 2 и 3 алгоритм оптимизации строился по *схеме 1*, где задача безусловной минимизации была решена методом *деформируемого многогранника*.

Использование густой КЭ сетки в вариантах 2 и 3 привело к достаточно громоздким вычислениям в задаче КЭ анализа, решение которой занимало основное время счета. С этой точки зрения существенным показателем эффективности алгоритма является число обращений к функции ограничений, вычисление которой включает КЭ расчет. В вариантах 2,3 число таких обращений составляло от 320 до 425. Существенного сокращения объема вычислений можно добиться, если ослабить требования к точности в невязках ограничений, например, до 1%. Тогда оптимальное решение будет получено уже на 2-3 итерации.

Вариант 4. Для сокращения вычислений, связанных с решением задачи КЭ анализа, был выполнен еще один вариант примера. На внешних итерациях в окрестности текущей точки $\{X^*\}$ строились линейные аппроксимации функции ограничений (12)

$$g^{apr}(x) = \left\{ \frac{g(x)}{\partial x} \right\}_{x=x^*}^T \{x - X^*\} + g(x^*). \quad (13)$$

Построение приближенной задачи (13) на каждой итерации требовало ng обращений к прямому вычислению ограничений, где $ng=2 \cdot nx + 1$. Таким образом, общее число решений задачи анализа было сокращено.

На внутренних итерациях алгоритма решалась задача условной минимизации, с использованием линейризованной функции $g^{apr}(x)$. Для ее решения применялась схема 3: поиск прямых переменных x выполнялся методом деформируемого многогранника, а

двойственные переменные вычислялись максимизацией функции F_M (5). Как уже отмечалось, такой подход не требовал точности в решении задачи (7), поэтому предельное число внутренних итераций было ограничено до 5-ти.

Исходные данные взяты по варианту 3 (А): $[\Delta_{max}] = 0,3764 \text{ in}$, $x^0 = 0,15 \text{ in}$.

Приведем результаты решения задачи:

Оптимальные значения полутолщин (in)

x_1	x_2	x_3	x_4	$t_5/2$
0,22698	0,21393	0,16906	0,15017	0,15

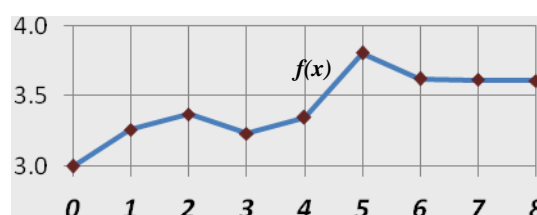


Рис. 7. Изменения целевой функции на итерациях (вариант 4)

Оптимальное решение было получено на 8-й итерации внешнего уровня аппроксимаций. Общее число прямых вычислений функции ограничений сократилось до 73 (8 итераций, на каждой из которых $ng=9$, плюс 1 вычисление в полученном оптимальном решении). Невязка в ограничении для оптимального проекта составила $g=0,00316$, при заданной погрешности 10^{-2} .

Приведем сопоставление результатов, полученных в 4-х рассмотренных вариантах примера с результатами, приведенными в [4].

Таблица 2. Сопоставление результатов расчета

		Объем (in^3)	ε (%)	Максимальное перемещение (in)	ε (%)	Число итераций
Источник [5]		3,600		0,500		
ANSYS (Метод аппроксимации подзадачи)		3,616	0,434	0,499	0,156	12
ANSYS (Метод первого порядка)		3,609	0,261	0,501	0,131	17
Программа [1]	в. 1	3,60332	0,092	0,50000037	$7,3 \cdot 10^{-5}$	9
	в. 2	3,36306	6,581	0,4995495	0,0901	7
	в. 3 (Б)	3,60218	0,0605	0,3766 при [0,3764]	0,053	6
	в. 4	3,60826	0,229	0,3776 при [0,3764]	0,319	8

Результаты, полученные в вариантах 1-4, продемонстрировали эффективность алгоритма оптимизации [1-3] как с точки зрения скорости сходимости, так и в точности вычислений.

Пример 2. Оптимизация рамы (VM157. Optimization of a Frame Structure). Задача исследована в статье [6]. С учетом симметрии конструкции к расчету принята половина рамы. В ПК ANSYS КЭ модель включала линейные элементы с 3-мя степенями свободы в узлах (2-D Elastic Beam Elements [BEAM3](#)). Такие же конечные элементы были использованы при решении задачи анализа [1].

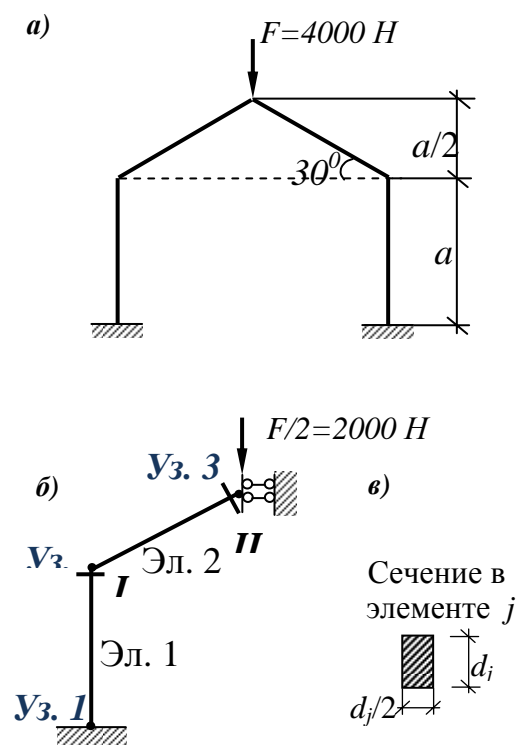


Рис. 8. а) оптимизируемая рама; б) расчетная схема; в) сечение элементов

Характеристики системы: $E = 10^{10}$ Па; $[\sigma] = 9,900 \times 10^6$ Па; $a = 2,5$ м.

В качестве *варьируемых параметров* приняты высоты d_j в элементах 1, 2 ($n_x=2$). Начальные значения *варьируемых параметров*: $x_0(d_0) = 0,1$ м.

Диапазон варьирования:

$$x_{min}=0,05 \text{ м}; \quad x_{max}=0,5 \text{ м}.$$

Целевая функция представляла объем ра-

$$\text{мы: } f(x) = 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \frac{x_j^2}{2} \cdot 2,5 \right)$$

Назначены *ограничения* по прочности в крайних сечениях каждого элемента (всего 4 ограничения):

$$g_i = \frac{M_j^k}{W_j \cdot [\sigma]} - 1 \leq 0, \quad W_j = \frac{x_j^3}{12},$$

$$i = 1, \dots, 4; \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

Приведем результаты решения задачи.

Таблица 3. Изменения функций на итерациях

№	$f(x) \times 10^2 \text{ (м}^3\text{)}$	g^{max}
0	5,0000000	0,987045
1	5,9319702	0,481039
2	7,5288460	0,028821
3	7,6382240	0,000945
4	7,6410714	0,000014
5	7,6411272	-0,000002

Потенциально-активными были ограничения на напряжения в сечениях **I** и **II**:

$$g_2 = -0,23 \cdot 10^{-5} \text{ и } g_4 = -0,27 \cdot 10^{-5}.$$

Расчетные значения моментов при этом были следующие (Н м):

$$\text{Эл. 1} \quad M_1^I = 1055,7; \quad M_2^I = -1350,9.$$

$$\text{Эл. 2} \quad M_2^2 = -1350,9; \quad M_3^2 = 1776,0.$$

При решении задачи на 1-х трёх итерациях была использована *схема 1*, где задача безусловной минимизации была решена методом *деформируемого многогранника* с переключением на последних итерациях на *схему 2 (метод Ньютона)*

Сравнение результатов решения задачи приведено в таблице 4, где в последней графе указано число итераций (N_i).

Таблица 4. Сопоставление результатов

	d_1 (м)	d_2 (м)	Объем (м ³)	N_i
Источник [6]	0,118	0,129	0,0764	
ANSYS	0,1196	0,1288	0,0772	9
Программа [1]	0,1179	0,1291	0,07641	5

Расчет в ПК ANSYS дал погрешность в объеме 1,320%. В расчете, где использовалась программа [1], с учетом округления до значащих цифр, которые приведены в источнике, погрешность отсутствует.

Рассмотренные примеры показали высокую робастность алгоритма оптимизации, заложенного в ПК [1]. При решении задачи безусловной минимизации (7) была отмечена высокая устойчивость метода деформируемого многогранника. Метод Ньютона показал устойчивую работу на последних итерациях только для двух случаев: в примере 1 (вариант 1) и в примере 2, что позволило получить высокую точность в невязках ограничений.

В целом была продемонстрирована быстрая сходимость к проектам близким к оптимальным уже на 2-3 итерации. Последующие итерации доводили результат до требуемой степени точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дмитриева Т.Л.** Программный комплекс «OPTIDEST» и его использование в задачах расчета и оптимизации стальных конструкций. Вестник МГСУ, №1, т.1, 2011, с. 100-105
2. **Дмитриева Т.Л.** Параметрическая оптимизация в проектировании конструкций, подверженных статическому и динамическому воздействию: монография. Иркутск: ИрГТУ, 2010, 176 с.
3. **Безделев В.В., Дмитриева Т.Л.** Использование многометодной стратегии оптимизации в проектировании строительных конструкций. Известия вузов. Строительство, № 2, 2010, с. 90-95
4. Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS Mechanical. Том 2. ЗАО НИЦ СтаДиО, ГОУ ВПО МГСУ, 2009

5. **Prasad B., Haftka R. T.** Optimal Structural Design with Plate Finite Elements, ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 105, No. 11, November 1979, pp. 2367-2382
6. **Topping B. H. V., Robinson D. J.** Selecting Non-Linear Optimization Techniques for Structural Design, Intl J. for Computer Aided Engineering and Software: Engineering Computations, 1984. Vol. 1 No. 3.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ф.И.О.	<i>Дмитриева Татьяна Львовна</i>
Ученая степень, ученое звание:	<i>к.т.н., доцент</i>
Организация:	<i>Иркутский государственный технический университет (ИрГТУ)</i>
Должность:	<i>Доцент кафедры сопротивления материалов и строительной механики</i>
Адрес организации:	<i>664074, Иркутск, ул. Лермонтова, 83</i>
Телефоны:	<i>(8-395-2) 42-42-69 (дом) 8 914 913 67 25 (моб.)</i>
Факс:	<i>(8-395-2) 40-51-45</i>
E-mail:	dmital@istu.edu dmitrievat@list.ru

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Name:	<i>Dmitrieva Tatiyana Livovna</i>
Organization:	<i>Irkutsk state technical university, Irkutsk, Russia</i>
Degree:	<i>Candidate of the technical sciences</i>
Address to organizations:	<i>664074, Irkutsk,, Lermontova str, 83</i>
Phones:	<i>(8-395-2) 42 42 69 (home) 8 914 913 67 25 (mob)</i>
Fax:	<i>(8-395-2) 40-51-45</i>
E-mail:	dmital@istu.edu dmitrievat@list.ru

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ ТЕХНОЛОГИИ «МОНТАЖ» ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «SCAD»

О. В. Кабанцев¹

¹ Московский государственный строительный университет, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций

АННОТАЦИЯ: В статье изложены результаты работ по верификации расчетной технологии «Монтаж» программного комплекса «SCAD».

Ключевые слова: расчетно-экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния конструкций, верификация методики и программной реализации.

VERIFICATION OF CALCULATION TECHNOLOGY "MOUNTING» FROM SOFTWARE COMPLEX "SCAD»

Oleg V. Kabantsev¹

¹ Moscow Civil Engineering University, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций

ABSTRACT: The article describes the the results of the verification of calculation technology "Mounting" from software "SCAD".

Key words: experiment-calculated study of stress-strain condition of constructions, verification.

Расчетное обоснование проектных решений в абсолютном большинстве проектов выполняется с применением программных комплексов (ПК), позволяющих выполнить прогноз напряженно-деформированного состояния конструкций при различных воздействиях, получить значения динамических характеристик сооружения, выполнить (в пост-процессоре) подбор сечений стальных конструкций или армирование железобетонных элементов.

В основе современных ПК, выполняющих статические расчеты конструкций, лежит метод конечных элементов, который является одним из видов численных методов вычислительной математики. Известно, что численные методы не дают точного решения задачи – результатом их работы является некоторое приближенное решение. При этом следует учитывать, что в различных ПК реализация того или иного численного метода имеет свою технологию, что определяет возможное различие в результатах расчетов. Выполнение

статических расчетов одной расчетной модели различными ПК может привести (и как правило приводит) к различным результатам.

Для оценки качества решения, получаемого тем или иным ПК, как правило используют сравнение результатов решения задач, получаемых на тестируемом ПК и на ПК, имеющем проверенную практикой историю. Указанная процедура сравнения результатов решений, выполняемая на специально подготовленных тестовых примерах, именуется верификацией. Чем менее результаты работы тестируемого ПК отличаются от результатов расчета ПК, принятого в качестве базового, тем более адекватной можно считать реализацию примененных в тестируемом ПК методов вычислительной математики.

В настоящей статье рассматриваются результаты работы по верификации расчетной технологии «Монтаж», разработанной и функционирующей в рамках ПК «SCAD». В

общем виде смысл расчетной технологии «Монтаж» заключается в следующем:

Все расчеты, связанные с возведением (монтажом) системы конструкций, как правило, выполняются в предположении справедливости обычных допущений линейной строительной механики для каждой стадии монтажа. При этом в традиционной расчетной технологии предполагается, что модель несущих конструкций создается сразу в полном объеме, и лишь затем к ней начинают прикладывать внешние нагрузки. Однако, в целом, за счет изменения расчетной схемы при переходе от одной стадии к другой, задача является нелинейной. Указанное изменение расчетной схемы возникает, в частности, при изменении (деформировании) части расчетной модели, соответствующей n -этапу монтажа, под действием нагрузок, связанных с существованием этой группы конструкций (например – нагрузки от собственного веса), относительно координат узлов модели, сформированных без учета нагрузок, т.е. относительно этапа n и последующих этапов возведения конструкций. При этом (как правило) конструкции каждого этапа возведения здания должны быть установлены в проектное положение без учета деформаций, возникших в конструкциях на более ранних этапах возведения.

В основу технологии расчета, учитывающей указанные выше обстоятельства, положен принцип поэтапного отслеживания изменения напряженно-деформированного состояния (НДС). При этом четко различается суммарное НДС системы, возникающее на каждом этапе монтажа с учетом всех предшествующих этапов, и приращение НДС, вызванное дополнительными воздействиями на систему, относящимися исключительно к рассматриваемому этапу монтажа.

Решение задач расчета с учетом геометрической (в данном случае – «генетической») нелинейности, реализованное в форме специальной расчетной технологии с условным на-

именованием «Монтаж» в ПК SCAD версии 11.3 [2] и выше, позволяет решить указанные проблемы, связанные с изменениями геометрии системы в процессе возведения здания. В рамках режима «Монтаж» можно назначить сколь угодно много этапов возведения здания, при этом на каждом из последующих этапов новые узлы расчетной схемы устанавливаются в заданное (проектное!) положение, сохраняя деформированное состояние схемы предыдущих этапов. Таким образом, новая технология расчетов более адекватно отражает процесс формирования НДС несущих конструкций здания.

Для оценки адекватности разработанных в рамках технологии «Монтаж» ПК SCAD вычислительных процедур выполнена верификация расчетной технологии на основе сравнения результатов решения тестовых задач ПК «ANSYS», в котором реализован принцип поэтапного включения элементов в расчетную модель с соответствующим этапу деформированием под действующей на этом этапе нагрузки. В терминах ПК «ANSYS» описанная процедура определяется как «рождение-жизнь» или «смерть» элемента (близкий по смыслу перевод).

Тестовая задача.

Тип задачи – статический расчет напряженно-деформированного состояния с учетом геометрической («генетической» - этапность возведения) нелинейности.

Расчетная модель – 11-ти этажный прямоугольный в плане фрагмент здания - пространственная схема, состоящая из колонн, стен, пилонов, плит перекрытий на жестком основании (закрепление узлов по всем линейным и угловым степеням свободы). Модель загружена равномерной распределенной нагрузкой ($1,5 \text{ т/м}^2$) по всем плитам перекрытия.

Физические характеристики - материал элементов расчетной модели бетон класса по

прочности на сжатие В25; модуль упругости $E = 3 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$.

Геометрические характеристики:

Высота этажа – 3 м,

Шаг колонн – 7 м по X и 6 м по Y,

Сечение колонн – квадрат со стороной 50 см

Толщина перекрытий – 20 см

Толщина стен и пилонов – 40 см, ширина пилонов – 100 см.

Граничные условия: защемление колонн, пилонов и стен (жёсткая заделка) по плоскости $z = 0 \text{ м}$

Нагрузки:

1) Вертикальное давление на перекрытия $q_1 = 1,5 \text{ т/м}^2$ – прикладывается ко вновь возводимым фрагментам-этажам;

2) Вертикальное давление на перекрытия $q_2 = 1 \text{ т/м}^2$ – прикладывается после возведения всего здания.

Описание КЭ расчетной модели:

ПК «ANSYS»

Плиты, стены и пилоны моделируются пространственно-оболочечными конечными элементами типа SHELL63, колонны – балочными КЭ типа BEAM44.

SHELL63 – четырехузловой элемент, имеет возможности учета мембранного растяжения-сжатия и изгиба (гипотезы Кирхгофа-Лява). Элемент имеет шесть степеней свободы в каждом узле: перемещения в направлении X, Y и Z узловой системы координат повороты вокруг осей X, Y и Z узловой системы координат. Элемент имеет возможность работы с изменением жесткости при приложении нагрузок и большими перемещениями.

BEAM44 – пространственный линейный элемент балки (Эйлера-Бернулли), имеющий 3 узла: 2 «содержательных» узла

располагаются на оси элемента (по краям), третий является узлом ориентации и может быть общим для нескольких элементов. В качестве дополнительной возможности имеется учёт влияния крутильных (сдвиговых) деформаций.

Размерность полной модели составляет: 5608 узлов и 5456 конечных элементов.

ПК «SCAD»

Плиты, стены и пилоны моделируются пространственно-оболочечными конечными элементами типа КЭ44, колонны – стержневыми элементами общего вида КЭ5.

Стержень общего вида (КЭ5) имеет шесть степеней свободы в каждом узле: перемещения в направлении X, Y и Z декартовой системы координат и повороты вокруг осей X, Y и Z декартовой системы координат. КЭ5 работает по пространственной схеме и воспринимает продольную силу N, изгибающие моменты M_y и M_z , поперечные силы Q_z и Q_y , а также крутящий момент M_k . Описание их напряженного состояния связано с местной системой координат, у которой ось X1 ориентирована вдоль стержня, а оси Y1 и Z1 — вдоль главных осей инерции поперечного сечения.

Пространственно-оболочечный конечный элемент КЭ44 имеет четыре узловые точки, не является совместным и моделирует поле нормальных перемещений внутри элемента полиномом 3 степени, а поле тангенциальных перемещений неполным полиномом 2 степени. КЭ44 располагается в пространстве произвольным образом. Для этих элементов, в соответствии с идеологией метода конечных элементов, истинная форма перемещений внутри элемента приближенно представлена упрощенными зависимостями. Описание их напряженного состояния связано с местной системой координат, у которой оси X1 и Y1 расположены в плоскости элемента и ось X1 направлена от первого узла ко второму, а ось Z1 ортогональна поверхности элемента.

Требуется выполнить сравнительный статический расчет вертикальных перемещений U_z каркаса и осевых усилий N в колоннах по высоте здания для двух «контрастных» вариантов моделирования:

1) линейно-упругий без учета последовательности (стадийности) возведения – традиционная расчетная технология;

2) генетически нелинейное (учет 12-и стадий возведения-нагружения) – расчетная технология «Монтаж».

Методика расчёта

Проводится статический расчет с учётом геометрической нелинейности (больших перемещений) и запоминанием геометрического положения конструкции во время монтажа каждой части (этажа) здания. Разложение матрицы жёсткости на каждом шаге выполняется с помощью метода SPARSE.

Для моделирования процесса возведения здания необходимо определить группы КЭ, соответствующих монтируемым фрагментам каркаса здания (определение так называемых стадий монтажа).

Моделирование процесса возведения здания состоит из следующих стадий-этапов:

ПК «SCAD»

Стадия 1. Включение в состав действующих на этапе №1 набора элементов в уровне 1-го этажа с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 1 этажа и последующим расчётом НДС;

Стадия 2. Включение в состав действующих на этапе №2 набора элементов в уровне 1-2го этажей с приложением нагрузки q_1 на перекрытия, входящие во 2-й этап, и последующим расчётом НДС;

Стадия 11. Включение в состав действующих на этапе №11 набора элементов в

уровне 1-11-го этажей с приложением нагрузки q_1 перекрытия, входящие в 11-й этап, и последующим расчётом НДС;

Стадия 12. Приложение нагрузки q_2 на все перекрытия здания с последующим расчётом НДС.

ПК «ANSYS»:

Стадия 1. Обнуление жёсткости всех КЭ (процедура «смерть элементов»), кроме 1-го этажа, и закрепление всех узлов, не принадлежащих элементам 1-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 1 этажа и последующим расчётом НДС;

Стадия 2. Возврат прежней жёсткости КЭ (процедура «рождение элементов») 2-го этажа и удаление закреплений узлов, принадлежащих элементам 2-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 2 этажа и последующим расчётом НДС;

Стадия 11. Возврат прежней жёсткости КЭ (процедура «рождение элементов») 11-го этажа и удаление закреплений узлов, принадлежащих элементам 11-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 11 этажа (покрытие) и последующим расчётом НДС;

Стадия 12. Приложение нагрузки q_2 на все перекрытия здания с последующим расчётом НДС.

Закрепление узлов, не принадлежащих «оживлённым» элементам, производится для «фиксации» элементов конструкции здания на проектных отметках с целью учёта реального процесса возведения здания (выведение перекрытий на проектные отметки).

Результаты расчёта

Критериальными результатами расчёта являются максимальные вертикальные пере-

мещения U_z здания и продольные усилия N в колоннах нижнего и верхних этажей. Ниже в таблице 1 приведено сравнение результатов

расчётов без учета (модельное «одномоментное» возведение) и с учётом рассмотренных 12-и стадий монтажа.

Таблица 1

Сопоставление результатов расчёта

	«Одномоментная» схема возведения	Учёт 12-и стадий возведения		δ (%)
		ANSYS	SCAD	
Перемещение U_z , мм	-25,3	-24,8	-24,2	2,5
Продольное усилия в колоннах (1 этаж) N , т	-687,6	-870,6	-866,7	0,5
Продольное усилия в колоннах (10 этаж) N , т	199,4	-3,2	-3,0	6,6

В таблице 2 приведены схемы расчетных моделей ПК «ANSYS» и ПК «SCAD» для различных стадий расчета.

По результатам расчетов вновь подтверждено, что при традиционной расчетной методике, основанной на единомоментном возникновении расчетной модели и ее полном нагружении возникает существенное искажение напряженно-деформированного со-

стояния элементов модели. Наиболее разительное качественное отличие результатов зафиксировано в колоннах (и пилонах) верхних этажей: их физически обоснованному сжатию при учете стадийности возведения противостоит «паразитическое» растяжение, которое генерируется при единомоментном возникновении расчетной модели, что приводит к неучету генетической и геометрической нелинейности.

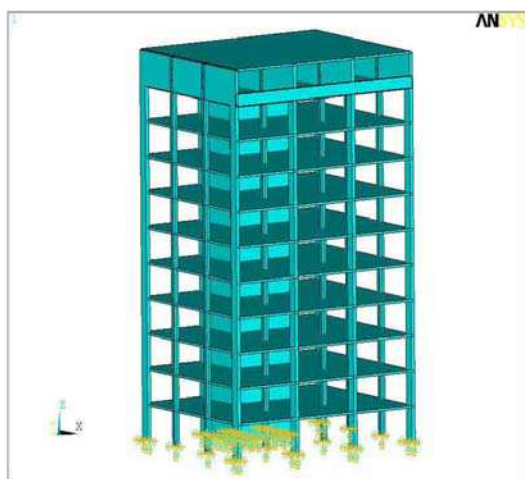


Рис. 1. Общий вид тестовой расчетной модели (ПК «ANSYS»).

Сравнение результатов расчетов, выполненных с учетом генетической и геометрической нелинейности - технология «Монтаж» (ПК «SCAD») и технология «рождение-жизнь» или «смерть» элемента ПК «ANSYS» показывает вполне удовлетвори-



Рис. 2. Общий вид тестовой расчетной модели (ПК «SCAD»).

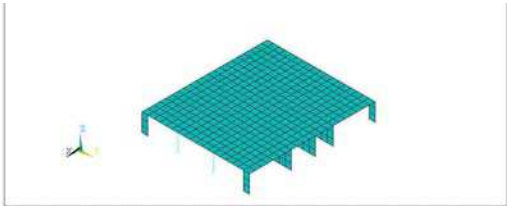
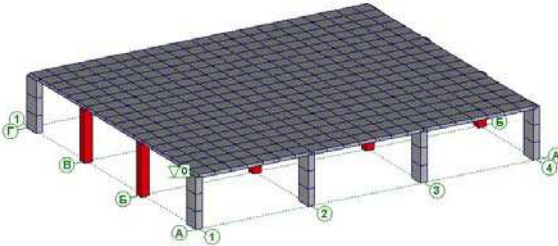
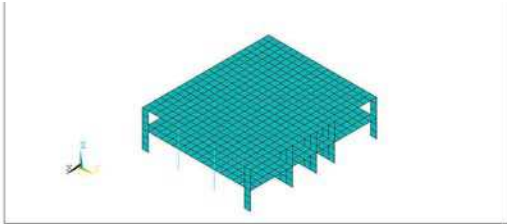
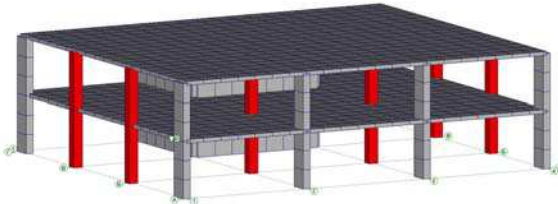
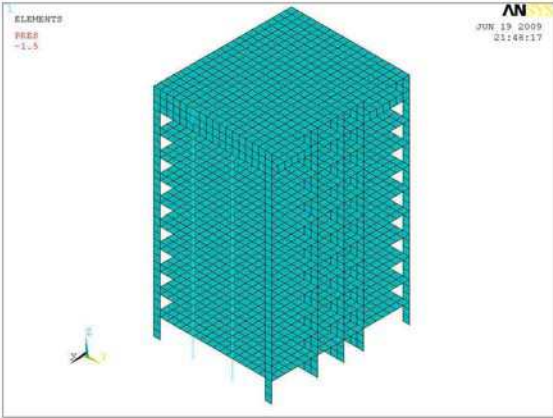
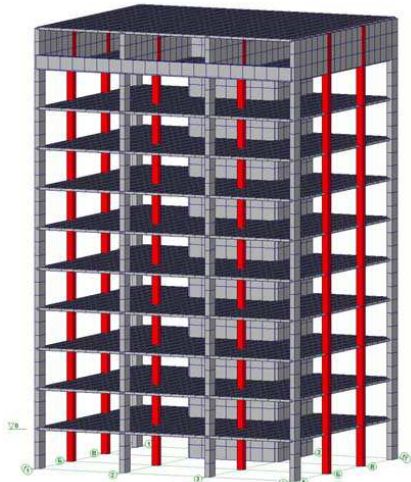
тельную сходимость результатов расчетов: расхождение по критерию максимальных вертикальных перемещений – 2,5%; расхождение по критерию продольных усилий в колоннах составляет от 0,5% (колонны 1-го этажа) и до 6,6% (колонны 10-го этажа).

Следует отметить, что в колоннах 10-го этажа абсолютные величины усилий весьма близки и оценку расхождения в результатах имеет смысл рассматривать в рамках разности отношений усилия к несущей способности элемента. Такой подход в большей сте-

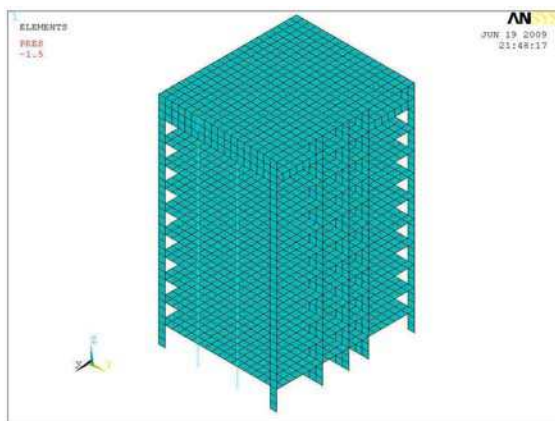
пени отражает инженерную практику оценки точности результатов расчетов. В этом случае величина расхождения составит менее десятой доли процента.

Таблица 2

Схемы расчетных моделей ПК «ANSYS» и ПК «SCAD» для различных стадий расчета

№ стадии	ПК «ANSYS»	ПК «SCAD»
1		
2		
11		

12



Добавлены нагрузки q2.



Добавлены нагрузки q2.

Вывод по результатам верификации: расчетная технология «Монтаж» (ПК «SCAD») адекватно реализует методы вычислительной математики при учете генетической и геометрической нелинейности при учете стадийности формирования, нагружения и деформирования расчетной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа— М.: ДМК Пресс, 2007, 600 с. (Серия «Проектирование»)
2. Перельмутер А.В., Криксунов Э.З., Карпиловский В.С., Маляренко А.А. Интегрированная система для расчета и проектирования несущих конструкций зданий и сооружений SCAD Office: Новая версия, новые возможности // Промышленное и гражданское строительство, 2009, №2, С. 51-52

ТЕХНОЛОГИЯ РАСЧЕТНОГО ПРОГНОЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ИСТОРИИ ВОЗВЕДЕНИЯ, НАГРУЖЕНИЯ И ДЕФОРМИРОВАНИЯ

О.В. Кабанцев¹, В.С. Карпиловский², Э.З. Криксунов², А.В. Перельмутер²

¹ Московский государственный строительный университет, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций

² Группа компаний SCAD Soft, Россия

АННОТАЦИЯ: В статье изложены результаты расчетно-экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния и динамических характеристик зданий при различных технологиях расчета. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета.

Ключевые слова: расчетно-экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния конструкций, динамические характеристики зданий.

THE TECHNOLOGY OF THE DESIGN FORECAST OF STRESSEDLY-DEFORMED STATE OF CONSTRUCTIONS WITH REGARD TO THE HISTORY OF CONSTRUCTION, LOADING AND DEFORMATION

*Oleg V. Kabantsev¹, Viktor S. Karpilovsky²,
Eduard Z. Kriksunov E.Z², Anatoliy V. Perelmuter²*

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA,

² Group company SCAD Soft, Russia

ABSTRACT: The results of the experiment-calculated study of stressedly-deformed state and of the dynamic characteristics of constructions for the different design processes are presented. The comparative analysis of the design results has been made.

Key words: experiment-calculated study of stressedly-deformed state of constructions, dynamic characteristics of constructions

Процесс создания сложной системы в общем случае является многоэтапным и определяется заданной последовательностью выполняемых операций по ее сборке. При этом в определенном порядке выполняются работы по установке и удалению элементов системы и балластных грузов, регулированию длин некоторых элементов, изменению состояния связей и т.п. Каждая из таких операций определяет некоторый этап монтажа, который характеризуется определенной расчетной схемой, отличной от расчетной схемы полностью готовой конструкции.

Большинство из действий, выполняемых в процессе монтажа, приводит к изменению расчетной схемы и/или напряженного и деформированного состояния системы, а суммарным следствием является некоторое накопленное напряженно-деформированное состояние (НДС), которое по сути эквивалентно состоянию преднапряжения.

Результаты расчетов, учитывающих последовательность создания конструкции, могут значительно отличаться от привычных, когда система предполагается созданной сразу в полном объеме, и лишь затем к ней начинают прикладывать внешние нагрузки.

Далее это положение будет проиллюстрировано на примерах расчета многоэтажных каркасных зданий.

Существующие традиционные методы и технологии расчетов несущих конструкций зданий сложились в условиях проектирования зданий простых архитектурных форм, малых (по современным меркам) высот и, как правило, — из сборных (в основном - железобетонных) конструкций. Указанные условия вполне позволяли обходиться самыми простыми (зачастую – стержневыми) расчетными схемами, обобщенными моделями нагружений и известным принципом суперпозиции нагрузок.

Сложившаяся массовая практика расчета абсолютного большинства зданий заключается в формировании общей расчетной модели сооружения, назначении общих условий закрепления модели, нагружении этой модели нагрузками, образующими независимые нагружения, и расчет НДС, используя принцип суперпозиции нагружений.

Однако, такого рода модели обладают характеристиками, назначенными на самой первой стадии формирования модели, общими (более того – одинаковыми!) как для всех нагружений, так и для всех стадий возведения здания. Так, все элементы, входящие в модель, имеют исходные длины, определенные узлами, координаты которых заданы на начальном этапе. Например, длины колонн расчетной модели многоэтажного здания соответствуют длинам колонн, определенным проектом: при равной высоте этажей длина колонны 1-го этажа равна длине колонны последнего этажа. Это было бы верным, если бы речь шла о сборке здания из заранее изготовленных конструктивных элементов, и их реальное деформирование под действием собственного веса в процессе возведения не учитывалось, что привело бы к искажению проектной геометрии объекта. Так неравномерное обжатие колонн,

например, приводило бы к искажению плоскости перекрытия.

Указанная традиционная технология расчета не соответствует реальной практике возведения здания. В реальных условиях свободные узлы конструкции (на каком бы уровне здания эта конструкция не находилась) устанавливается строго в проектное положение, а геометрия элементов, соединяющих их с уже смонтированной частью здания, корректируется. Так, монолитное железобетонное перекрытие заливается с фиксированной (строго по проекту!) отметкой поверхности, при этом не имеет значения, какое это перекрытие – 1-го или 41 этажа. Фактически при возведении здания происходит компенсация деформаций нижних ярусов конструкций путем изменения проектной длины вертикальных несущих конструкций верхних ярусов.

Для железобетонных зданий, в которых нагрузки от собственного веса могут составлять до 60÷65% величины основного сочетания нагрузок и до 80÷85% суммы длительно действующих нагрузок, приведенное выше несоответствие расчетной модели реальному состоянию конструкций не может быть признано приемлемым. Очевидно, что для обеспечения большей достоверности результатов следует применять иные расчетные технологии и методики.

В основу технологии расчета, учитывающей это обстоятельство, положен принцип поэтапного отслеживания изменения напряженно-деформированного состояния (НДС). При этом четко различается суммарное НДС системы, возникающее на каждом этапе монтажа с учетом всех предшествующих этапов, и приращение НДС, вызванное дополнительными воздействиями на систему, относящимися исключительно к рассматриваемому этапу монтажа.

Все расчеты, связанные с монтажом системы, как правило, выполняются в предположении справедливости обычных допущений

линейной строительной механики для каждой стадии монтажа. Однако, в целом, за счет изменения расчетной схемы при переходе от одной стадии к другой, задача является нелинейной. Такая нелинейность, обусловленная историей создания системы, была названа *генетической* [1].

Для каждого этапа монтажа можно записать линейные разрешающие уравнения задачи:

$$K_r \Delta u_r = \Delta q_r, \quad (1)$$

где K_r — матрица жесткости системы на r -м этапе, а Δu_r и Δq_r — векторы дополнительных перемещений и дополнительных приведенных узловых нагрузок, относящихся к этому этапу. Зная Δu_r , можно определить приращения усилий Δs_r и получить накопленные по всем r этапам значения перемещений u_r и усилий s_r

$$u_r = u_{r-1} + \Delta u_r, \quad s_r = s_{r-1} + \Delta s_r \quad (2)$$

Соотношения (2) уместно называть *законами наследования монтажных состояний конструкции*. Одновременное выполнение линейных соотношений (1) и законов наследования (2) как раз и порождает генетическую нелинейность задачи.

Решение задач расчета с учетом генетической нелинейности, реализованное в форме специальной расчетной технологии с условным наименованием «Монтаж» в отдельных расчетных комплексах, например SCAD версии 11.3 [2], позволяет решить указанные выше проблемы, связанные с изменениями геометрии системы в процессе возведения здания. В рамках режима «Монтаж» можно назначить сколь угодно много этапов возведения здания, при этом на каждом из последующих этапов новые узлы расчетной схемы устанавливаются в заданное (проектное!) положение, сохраняя деформированное состояние схемы предыдущих этапов. Таким

образом, новая технология расчетов более адекватно отражает процесс формирования НДС несущих конструкций здания.

В качестве иллюстрации приводятся результаты решения по традиционной расчетной технологии и по технологии «Монтаж» тестовой расчетной модели (см. рис. 1), перекрытия которой загружены равномерно распределенной нагрузкой $1,5 \text{ т/м}^2$.



Рис. 1. Общий вид тестовой расчетной модели №1.

Анализ результатов расчетов тестовой модели показывает, что традиционная расчетная технология вносит существенные искажения в схему деформирования конструкции: полная модель конструкции с фиксированными длинами элементов нагружается одномоментно, что приводит к появлению «подвешиваемых» к более жестким конструкциям верхних ярусов элементов колонн с меньшей жесткостью и формированием в последних усилий растяжения. Расчетная технология «Монтаж» позволяет учитывать накопление деформаций на каждом этапе возведения конструкции, устанавливая конструктивные элементы следующего этапа в проектное положение, что позволяет получить вполне достоверные результаты расчета (см. таблицу 1).

Таблица 1

Технология расчетного прогноза напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования

	Результаты решения тестовой модели. Усилия в колонне по оси «2» от нагрузок собственного веса (+ растяжение; - сжатие), т				
	Наименование конструктивного элемента				
	Колонна 1 этажа	Колонна 3 этажа	Колонна 5 этажа	Колонна 8 этажа	Колонна 10 этажа
Традиционная расчетная технология	-410	-289	-172	+1	+80
Технология «Монтаж»	-592	-474	-363	-197	-83

Применение расчетной технологии «Монтаж» в расчетах реальных зданий показывает, что результаты расчетов лучше соответствуют инженерному прогнозу. Например, при расчете 40-этажного жилого дома с 3-х ярусной подземной автопарковкой (вид расчетных моделей приведен на рис. 2, 3) установлено, что при традиционной расчетной технологии в колоннах жилой части

усилия от нагрузок собственного веса существенно меньше ожидаемых, а в колоннах верхнего яруса наблюдаются весьма значительные усилия растяжения. Расчетная технология «Монтаж» позволяет получить результаты, соответствующие инженерному прогнозу (см. табл. 2).



Рис. 2. Общий вид расчетной модели 40-этажного жилого дома.

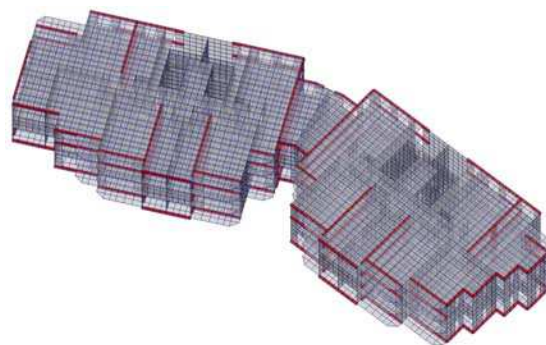


Рис. 3. Общий вид расчетной модели типовых и среднего технического (16-го) этажей 40-этажного жилого дома.

Табл. 2

	Усилия в колонне 40-этажного жилого дома от нагрузок собственного веса (+ растяжение; - сжатие), т				
	Наименование конструктивного элемента				
	Колонна -3 этажа	Колонна 1 этажа	Колонна 15 этажа	Колонна 17 этажа	Колонна 39 этажа
Традиционная расчетная технология	-260	-210	-87	-187	+80
Технология «Монтаж»	-300	-244	-167	-276	-20

Не меньший интерес представляют собой результаты расчета вертикальных и горизонтальных деформаций тестовых моделей (рис. 4), перекрытия которой загружены равномерно распределенной нагрузкой $1,5 \text{ т/м}^2$, включающих фундаментные конструкции на деформируемом основании с соответствующими коэффициентами постели.

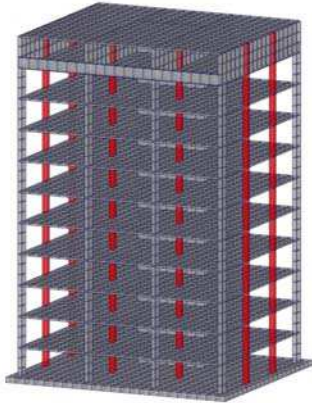


Рис. 4. Общий вид тестовой расчетной модели №2 и №2-1 (Монтаж).

Анализ изополей вертикальных деформаций тестовой модели №2 (традиционная технология) показывает (рис. 5), что максимальные деформации сосредоточены в верхних ярусах модели.

Вертикальные деформации тестовой модели №2-1 (технология «Монтаж») демонстрируют иную картину деформирования (рис. б). Здесь максимальные деформации локализованы в нижней зоне наиболее жесткой части модели, что вполне соответствует инженерному прогнозу – в процессе возведения здания перекрытия выполняются на проектных отметках, компенсируя деформации не только несущих конструкций здания, но и основания.

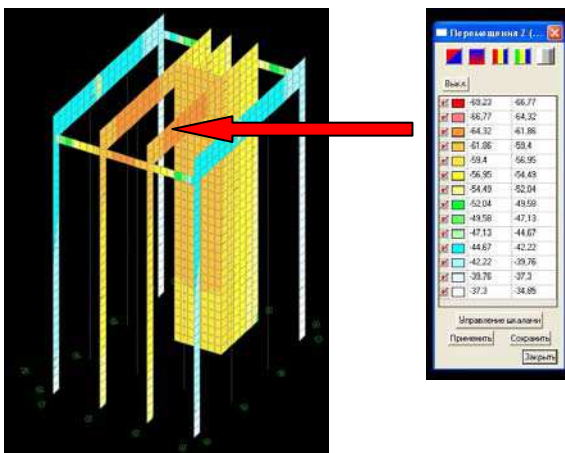


Рис. 5. Изополя вертикальных деформаций расчетной модели №2 (традиционная методика) - $Z_{\text{max}} = 69,23 \text{ мм}$.

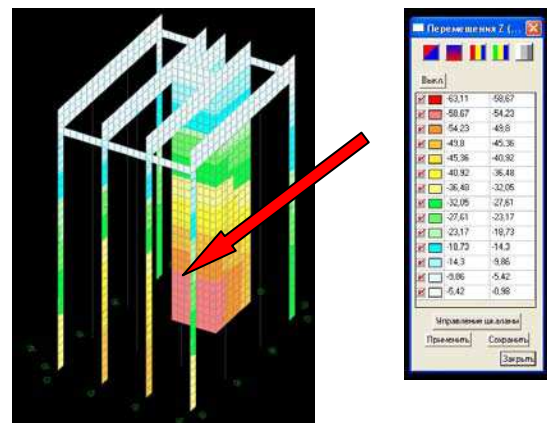


Рис. 6. Изополя вертикальных деформаций расчетной модели №2-1 (методика Монтаж) – $Z_{\text{max}} = 61,13 \text{ мм}$.

Анализ изополей горизонтальных деформаций (по Y) тестовых моделей №2 (рис. 7) и №2-1 (рис. 8) также показывает существенно отличающиеся схемы деформирования – максимальные деформации (по Y) локализованы в разных зонах моделей: при традиционной технологии – в уровне верхних конструкций, по технологии «Монтаж» – в

средней зоне наиболее жесткой части модели. Указанная схема деформирования также вполне соответствует приведенным выше обоснованиям.

Расчет моделей реальных зданий демонстрирует аналогичную картину горизонтальных деформаций (рис. 9, 10).

Технология расчетного прогноза напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом истории возведения, нагружения и деформирования

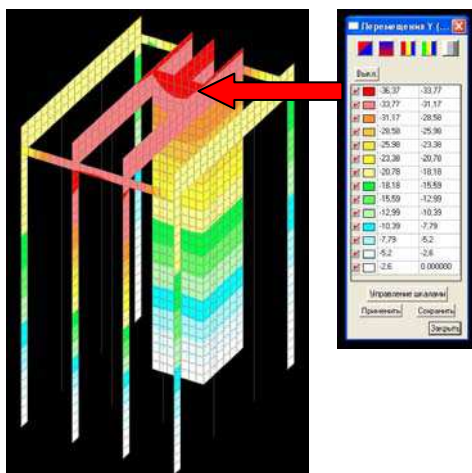


Рис. 7. Изополя горизонтальных (по Y) деформаций расчетной модели №2 (традиционная методика). $Y_{max}=36,37$ мм.

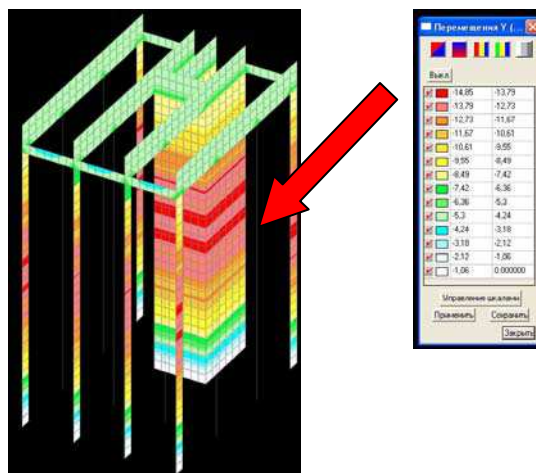


Рис. 8. Изополя горизонтальных (по Y) деформаций расчетной модели №2-1 (методика «Монтаж»). $Y_{max}=14,85$ мм.

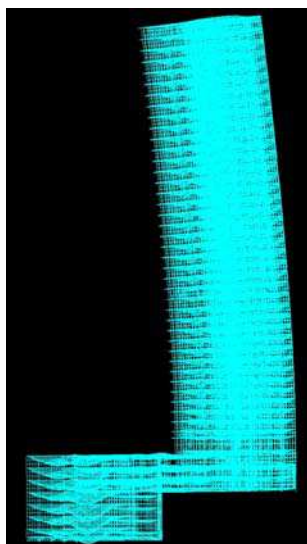


Рис. 9. Схема горизонтальных (по Y) деформаций расчетной модели 40-этажного жилого дома (традиционная методика).

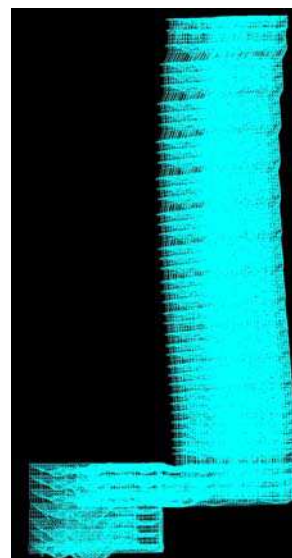


Рис. 10. Схема горизонтальных (по Y) деформаций расчетной модели 40-этажного жилого дома (методика «Монтаж»).

Учет истории нагружения несущих конструкций здания временными кратковременными нагрузками показывает, что традиционная технология расчета также не отражает реальные условия формирования НДС. Для указанного случая имеются, по крайней мере, два аспекта, требующие учета в методике расчетного обоснования.

Во-первых, временные кратковременные нагрузки реально будут воздействовать на конструктивные элементы здания с «непроектными» размерами – обоснование см. выше.

Во-вторых, к моменту формирования основных видов временных кратковременных нагрузок, т.е. в ситуации, соответствующей эксплуатационной фазе истории существования здания, длительно действующие нагруз-

ки (их основную долю для железобетонных зданий составляют нагрузки от собственного веса) уже существуют и генерируют деформированное состояние грунтового основания и, соответственно, фундамента, а также несущих конструкций нижних ярусов здания. При этом деформации основания соответствуют модулю деформации грунта, учитывающего большую длительность нагружения грунтового массива.

Временные кратковременные нагрузки (в силу природы своего воздействия) генерируют реакцию грунтового основания, определяемую модулем упругости(!) грунта, который соответствует малой длительности нагружения грунтового массива.

Таким образом, временные кратковременные нагрузки должны иметь иные деформационные характеристики основания (коэффициенты постели), существенно отличающиеся от деформационных характеристик, определенных для длительно действующих нагрузок. Разнятся между собой коэффициенты постели в указанных случаях (как правило) на порядок.

Учет различных деформационных характеристик основания для нагрузок различной длительности практически невозможен в рамках традиционных расчетных технологий. Расчетная технология, положенная в основу режима «Монтаж», позволяет изменять деформационные свойства основания на любом из этапов, что позволяет произвести расчет несущих конструкций на длительно действующие нагрузки в рамках n этапов, а на этапе $n+1$ выполнить расчет на кратковременные нагрузки, изменив при этом коэффициент постели. Очевидно, что указанная технология формирования расчетной модели более достоверно отражает реальную картину работы здания под нагрузкой (воздействием), чем традиционные методы.

В качестве иллюстрации приводятся результаты решения тестовой расчетной модели №3 (рис. 11), нагруженной ветровым воздействием с учетом пульсационной составляющей и постоянной нагрузкой на перекрытия (равномерно распределенная $1,5 \text{ т/м}^2$) по традиционной расчетной технологии и по технологии «Монтаж».

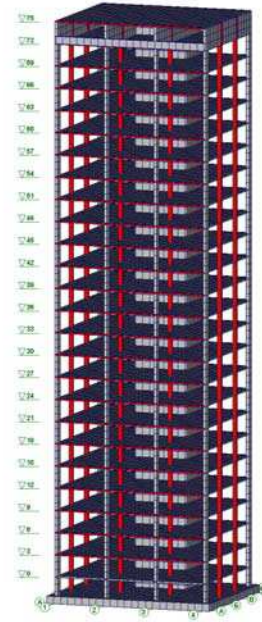


Рис. 11. Общий вид тестовой расчетной модели №3.

Модель по традиционной методике имеет деформационные характеристики основания (коэффициенты постели) $C1 = 80 \text{ т/м}^3$; 125 т/м^3 ; 160 т/м^3 – общие для всех нагружений. Модель по технологии «Монтаж» имеет деформационные характеристики основания $C1 = 80 \text{ т/м}^3$; 125 т/м^3 ; 160 т/м^3 – для длительно действующих нагрузок и $C1 = 800 \text{ т/м}^3$; 1250 т/м^3 ; 1600 т/м^3 – для динамических воздействий. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Табл. 3

Вид расчетной модели	Вид параметра НДС		
	Период 1-го тона (сек)	Макс. ускорения (м/сек ²)	Горизонтальные деформации по 1-му тону (мм)
Традиционная расчетная технология	11,54	0,0359	121,33
Технология «Монтаж»	5,65	0,0329	26,90

Представляется обоснованным использовать приведенные в настоящей статье методы формирования расчетных моделей и расчетные методики при расчетах зданий (в том числе на динамические воздействия), что позволит повысить качество прогноза напряженно-деформированного состояния конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа— М.: ДМК Пресс, 2007, 600 с. (Серия «Проектирование»)
2. Перельмутер А.В., Криксунов Э.З., Карпиловский В.С., Маляренко А.А. Интегрированная система для расчета и проектирования несущих конструкций зданий и сооружений SCAD Office: Новая версия, новые возможности // Промышленное и гражданское строительство, 2009, №2, С. 51-52.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ АКСЕЛЕРОГРАММ

О.В. Мкртычев, А.А. Решетов

ФГБОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: Для корректного использования акселерограмм в расчетах конструкций на землетрясения необходимо обладать информацией об их различных характеристиках. Одним из подходов позволяющих определять эти характеристики является вейвлет-анализ. Данная статья посвящена вопросу применения вейвлет-анализа с применением различных базисных функций при исследовании акселерограмм. В статье рассмотрены основы теории вейвлет-анализа, выполнен Фурье-анализ и вейвлет-анализ конкретной акселерограммы.

Ключевые слова: акселерограмма, землетрясение, вейвлет-преобразование, базисная функция, преобразование Фурье, спектрограмма,

USE OF WAVELET TRANSFORM IN ANALYSIS OF ACCELEROGRAMS

Oleg V. Mkrtychev, Andrey A. Reshetov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ABSTRACT: For correct use of accelerograms in the calculations of structures for earthquake must have information about their different characteristics. One approach is possible to determine these characteristics are wavelet analysis. This article focuses on the application of wavelet analysis using different basis functions in the study of accelerograms. The article covers the basics of the theory of wavelet analysis, carried out Fourier analysis and wavelet analysis of a specific accelerograms.

Key words: accelerogram, earthquake, wavelet transform, basis function, Fourier transform, spectrogram.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Пусть мы имеем некоторую действительную (комплексную) функцию $x(t) \in L_1$. При этом $t \in R$.

Преобразованием Фурье функции $x(t)$ называется интегральное преобразование, описываемое следующей формулой:

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Функцию $X(\omega)$ иногда называют спектральной функцией.

По спектральной функции $X(\omega)$ мы можем восстановить исходную функцию $x(t)$, при-

меня формулу обратного преобразования Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Следует отметить, что в общем случае $X(\omega)$ может и не принадлежать пространству L_1 , и тогда определить обратное преобразование Фурье прямо нельзя. Однако в этом случае, мы можем использовать главное значение сингулярного интеграла (подробнее об этом можно узнать, например, в [2]).

Данное преобразование Фурье называется непрерывным преобразованием Фурье (НПФ). Если же мы имеем дело с дискретной функцией (цифровым сигналом), то вместо

НПФ необходимо применять дискретное преобразование Фурье (ДПФ). ДПФ вычисляется по формулам:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{kn}; \quad (3)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-kn}; \quad (4)$$

где $X(k)$ – цифровая спектральная функция, $x(n)$ – цифровой сигнал, $n, k \in [0; N-1]$,

N – длина сигнала, $W_N^{kn} = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right)$.

На практике – в компьютерных вычислениях – используют так называемое быстрое преобразование Фурье (БПФ). Алгоритмы реализации БПФ представлены в многочисленной литературе, например, в [4].

Необходимо отметить, что при применении ДПФ, цифровой сигнал конечной длины N интерпретируется как периодический сигнал с периодом N .

Преобразование Фурье (НПФ, ДПФ) связано с таким типом представления данных, который не предполагает одновременной локализации сигнала во временной и частотной областях. Находя спектральную функцию, мы получаем информацию о частотном составе сигнала, однако мы практически не можем сказать, в какой момент времени преобладает та или иная частота. Для преодоления этой проблемы можно применять так называемое оконное преобразование Фурье (ОПФ). Сущность его состоит в том, что преобразование Фурье применяется не сразу ко всему сигналу, а к участку сигнала, длина которого определяется шириной окна. Это окно скользит по сигналу, и в пределах его, делается преобразование Фурье. Формула оконного преобразования Фурье имеет следующий вид:

$$GX(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi_h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad (5)$$

где $\psi_h(t)$ – весовая (оконная) функция, h – ширина окна. Причем $\psi_h(t)$ удовлетворяет следующему равенству:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(t) dt = 1. \quad (6)$$

Весовая функция, кроме всего прочего, необходима для того, чтобы устранить эффект вызываемый неравенством (в общем случае) значений сигнала в начале и в конце окна.

В качестве весовой функции можно использовать, например, функцию Стеклова:

$$\Pi_h(x) = \begin{cases} 1/h, & x \in (-h/2; h/2); \\ 0 & x \notin (-h/2; h/2). \end{cases} \quad (7)$$

Однако, в качестве функции окна, чаще используются функции, которые имеют «гауссовый» вид:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (8)$$

Денис Габор (Нобелевский лауреат по физике, 1991) показал, что весовая функция, имеющая вид (8), в некотором смысле является оптимальной. Обратим внимание на то, что ОПФ позволяет одновременно представлять сигнал в частотной и временной областях не с абсолютной точностью, а с некоторой, определяемой фундаментальным ограничением (принцип неопределенности, см [3]).

Одним из недостатков ОПФ является то, что весовое окно имеет фиксированную ширину, что не позволяет осуществлять анализ сигнала с точки зрения адаптивности. Хорошо бы иметь такое преобразование, которое бы осуществляло анализ сигнала при разных масштабах анализирующего окна. К такому преобразованию и относится вейвлет-преобразование (ВП).

Вейвлетом можно назвать семейство функций, которые образуются посредством масштабирования и сдвигов некоторой одной функции, называемой «материнской» или «материнским вейвлетом». Эти функции обладают хорошей локализацией в частотной и временной областях. Кроме того, их средние значения равны нулю.

Пусть $\psi(t)$ есть материнский вейвлет, тогда функции образующие базис разложения будут определяться формулой:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad (9)$$

где a – масштабный параметр, b – параметр сдвига. Множитель $|a|^{-1/2}$ позволяет сохранять независимость норм функций от масштабного параметра a .

Вейвлет-преобразование вычисляется следующим образом:

$$W_\psi(a,b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (10)$$

Знак «*» означает комплексную сопряженность.

Если для функции $\psi(t)$ справедлива следующая формула:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty; \quad (11)$$

где $\Psi(\omega)$ – преобразование Фурье функции $\psi(t)$, то можно определить обратное вейвлет-преобразование:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(a,b) \psi_{ab}(t) \frac{1}{|a|^2} da db. \quad (12)$$

Как видно, вейвлет-спектр $W_\psi(a,b)$ есть функция двух переменных: масштабного параметра a и параметра сдвига b .

Если параметры a и b меняются непрерывно, то множество функций $\psi_{ab}(t)$ избыточно. Поэтому для экономности можно произвести дискретизацию параметров a и b следующим образом: $a_r = \sigma^r$, $b_{r,k} = ka_r\beta$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Можно принять, что $\sigma = 2$, а $\beta = 1$, тогда $a_r = 2^r$, $b_{r,k} = k2^r$. Таким образом, сдвиг зависит от масштаба, и «перекрытия» вейвлетов не происходит. С учетом такой дискретизации имеем:

$$\psi_{rk}(t) = \frac{1}{2^{r/2}} \psi\left(\frac{t-k \cdot 2^r}{2^r}\right); \quad (13)$$

$$d_{rk} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{rk}^*(t) dt; \quad (14)$$

$$x(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{rk} \psi_{rk}(t). \quad (15)$$

Здесь $\psi_{rk}(t)$ – функции порождаемые материнским вейвлетом, d_{rk} – вейвлетные коэффициенты, $x(t)$ - анализируемая функция.

Несмотря на то, что параметры a и b дискретизированы, такое ВП, строго говоря, дискретным не является, т.к. не является дискретной анализируемая функция $x(t)$. В случае цифрового сигнала, применяют дискретное вейвлет-преобразование (ДВП). В ДВП вычисление вейвлетных коэффициентов можно производить при помощи итерационной процедуры, называемой быстрым вейвлет-преобразованием (БВП). Вывести алгоритм БВП можно при помощи теории кратномасштабного анализа (КМА) и теории фильтров. Вывод этого алгоритма можно посмотреть, например, в [1] или [3]. Мы же ограничимся лишь некоторыми тезисами.

Пусть анализируемая функция $x(t) \in L_2$. Обозначим через V_{r_0} такое функциональное подпространство пространства L_2 , в котором функции, принадлежащие ему, аппроксимируют L_2 на уровне r_0 . Можно построить иерархически вложенные подпространства V_{r_0} , объединение которых в пределе даёт пространство L_2 :

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \subset L_2; \quad (16)$$

Назовем функцию $A_{r_0}(t) \in V_{r_0}$ аппроксимирующей составляющей функции $x(t)$. И представим $x(t)$ в виде суммы аппроксимирующей и детализирующих составляющих:

$$x(t) = A_{r_0} + \sum_{r=-\infty}^{r_0} D_r(t); \quad (17)$$

где $D_r(t)$ – детализирующая составляющая. При этом $D_r(t) \in W_r$. Где подпространство W_r есть ортогональное дополнение подпространств V_r и V_{r-1} , т.е.:

$$V_{r-1} = V_r \oplus W_r. \quad (18)$$

Пусть нам дан дискретный сигнал x_k , проинтерпретируем его как последовательность коэффициентов a_{0k} входящих в следующее равенство:

$$x(t) = A_0(t) = \sum_k a_{0k} \varphi_{0k}(t); \quad (19)$$

где $x(t) = A_0(t) \in V_0$, $\varphi_{0k}(t) \in V_0$, $t \in Z$. Коэффициенты a_{0k} удовлетворяют равенству:

$$a_{0k} = \langle x(t), \varphi_{0k}(t) \rangle = \int x(t) \varphi_{0k}(t) dt; \quad (20)$$

Формула (20) представляет собой скалярное произведение функций $x(t)$ и $\varphi_{0k}(t)$.

В соответствии с теорией КМА, функция $x(t)$ представима в виде:

$$x(t) = A_1(t) + D_1(t); \quad (21)$$

$$\text{или} \\ x(t) = \sum_k a_{1k} \varphi_{1k}(t) + \sum_k d_{1k} \psi_{1k}(t); \quad (22)$$

где $\varphi_{1k}(t) \in V_1$, $\psi_{1k}(t) \in W_1$. Таким образом, мы получили две последовательности a_{1k} и d_{1k} . Далее функция $A_1(t)$ представляется в виде совокупности функций $A_2(t) \in V_2$, $D_2(t) \in W_2$, и этот итерационный процесс продолжается. Совокупность коэффициентов получившихся в ходе этого разложения образует множество вейвлетных коэффициентов.

Отметим, что для функций $\varphi_{rk}(t)$ и $\psi_{rk}(t)$ справедлива формула (13). Согласно теории КМА, для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ справедливы следующие формулы:

$$\varphi(t) = 2 \sum_l h_l \varphi(2t-l); \quad (23)$$

$$\psi(t) = 2 \sum_l g_l \varphi(2t-l); \quad (24)$$

Где h_l и g_l – некоторые коэффициенты, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$h_l = \langle \varphi(t), \varphi(2t-l) \rangle; \quad (25)$$

$$g_l = (-1)^l h_{2n-l-1}. \quad (26)$$

Можно доказать справедливость следующих рекуррентных формул, позволяющих осуществлять БВП:

$$a_{r+1,k} = \sum_l h_{l-2k} a_{r,k}; \quad (27)$$

$$d_{r+1,k} = \sum_l g_{l-2k} a_{r,k}. \quad (28)$$

Для восстановления сигнала применяется выражение:

$$a_{r-1,k} = \sum_l (h_{k-2l} a_{r,l} + g_{k-2l} a_{r,l}); \quad (29)$$

где $l = \overline{0, 2n-1}$, n – порядок вейвлета.

2. КОМПЬЮТЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ

Проведём численные расчёты в системе MATLAB.

В качестве исследуемого сигнала будем использовать цифровую акселерограмму землетрясения в Спитаке (Армения, 1988), а точнее одну из горизонтальных компонент. Произведем следующие расчеты: 1) преобразование Фурье; 2) оконное преобразование Фурье; 3) вейвлет-преобразование с применением различных базисных функций.

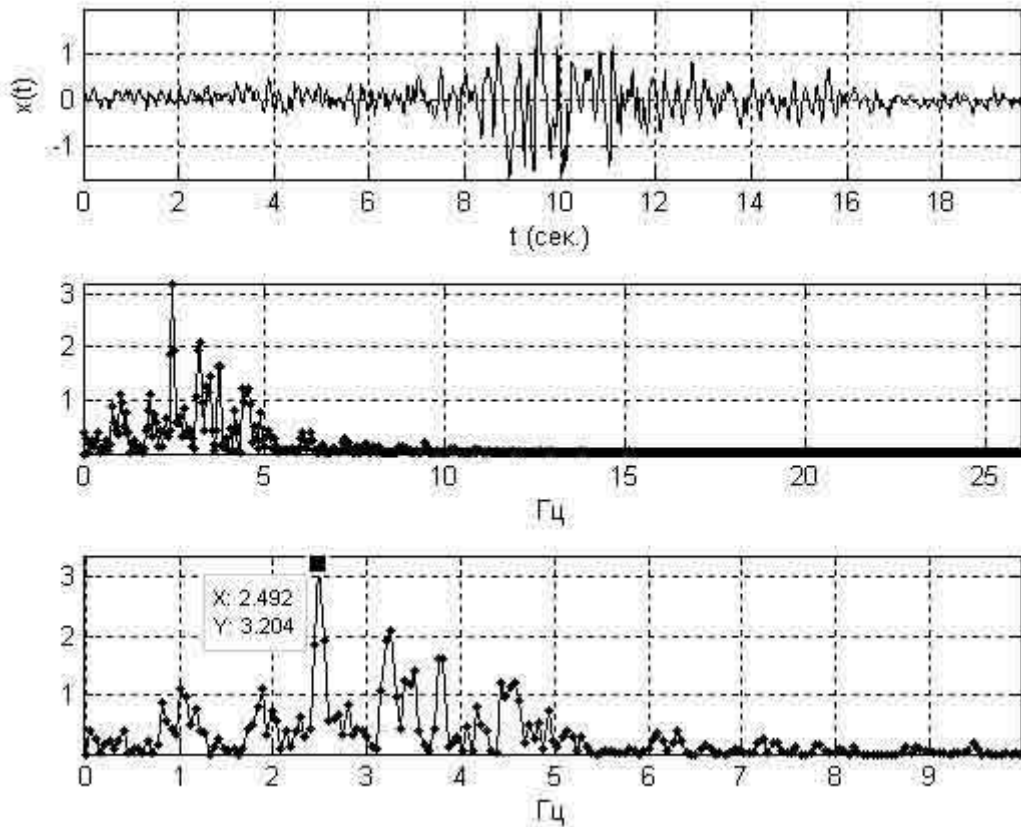


Рис.1. Акселерограмма и ее спектр

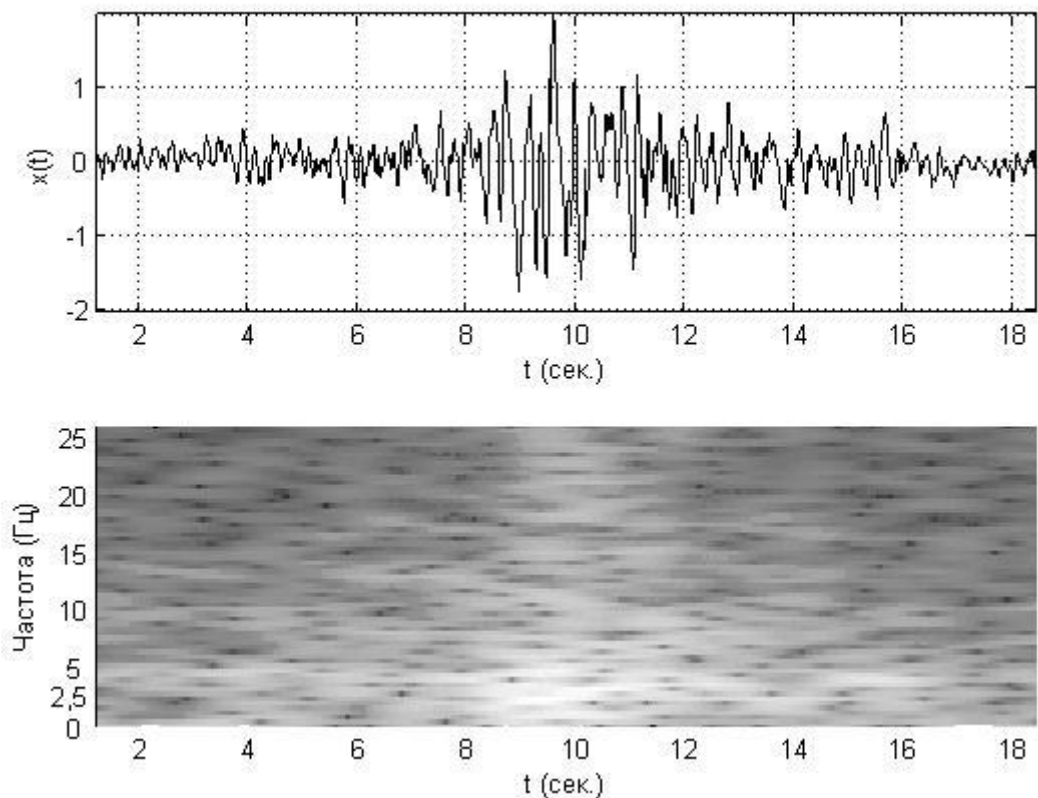


Рис.2. Акселерограмма и спектрограмма

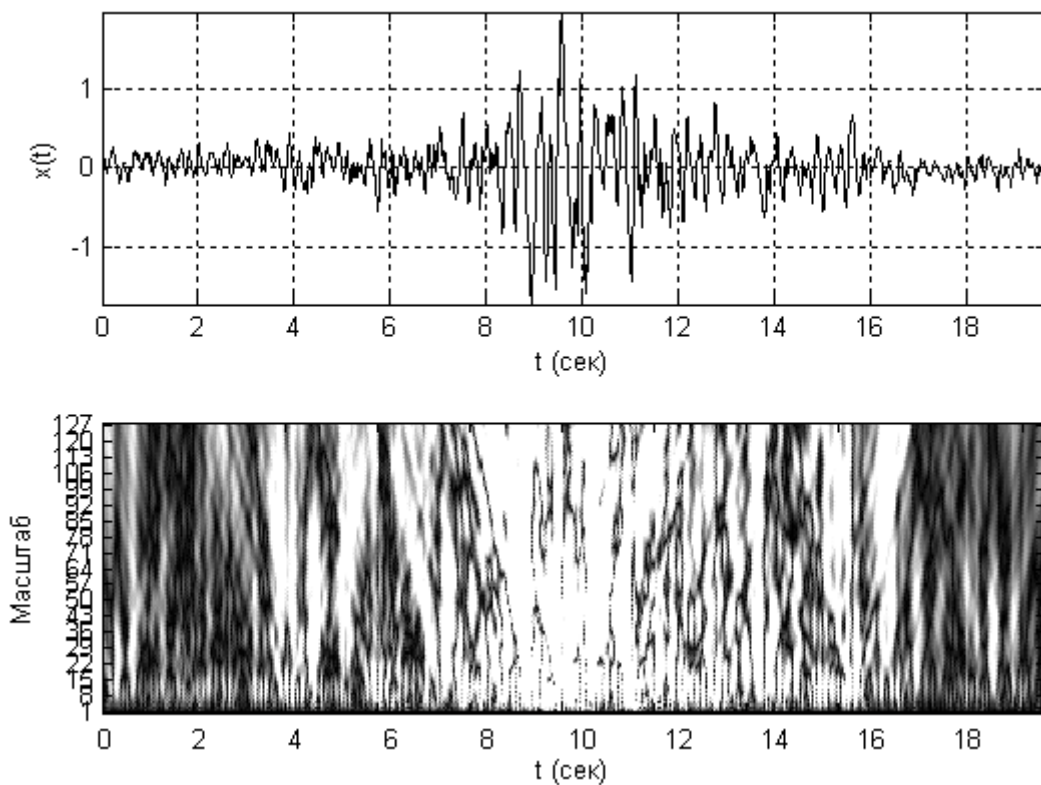


Рис.3. Акселерограмма и вейвлет-спектрограмма (haar)

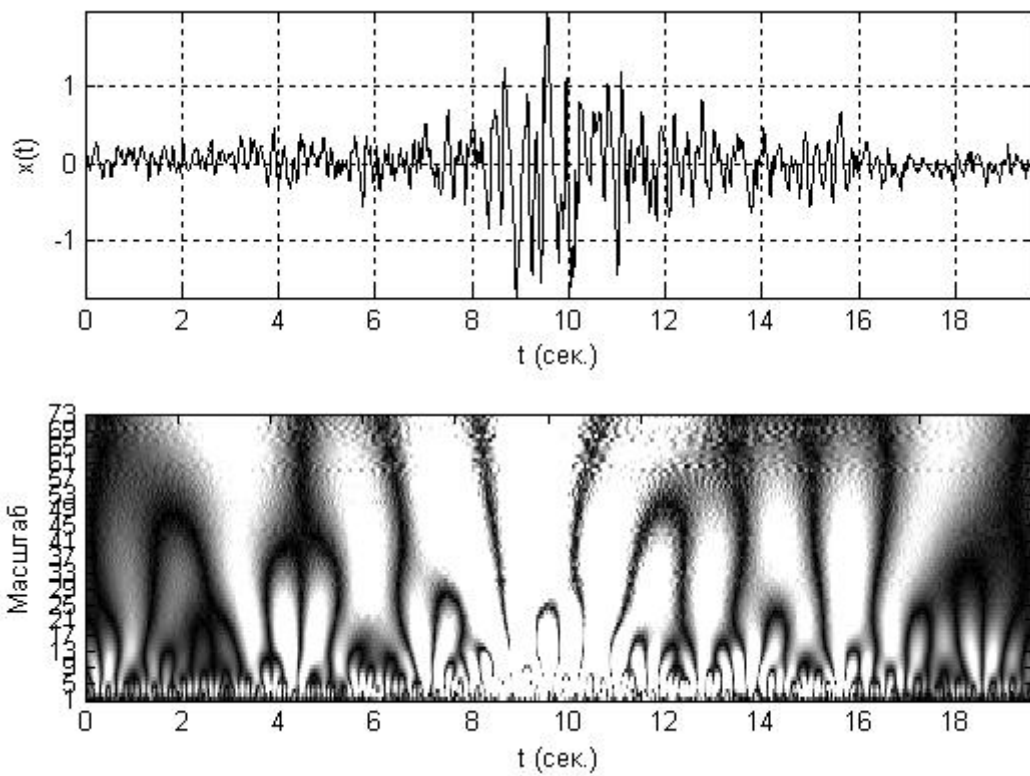


Рис.4. Акселерограмма и вейвлет-спектрограмма (mexh)

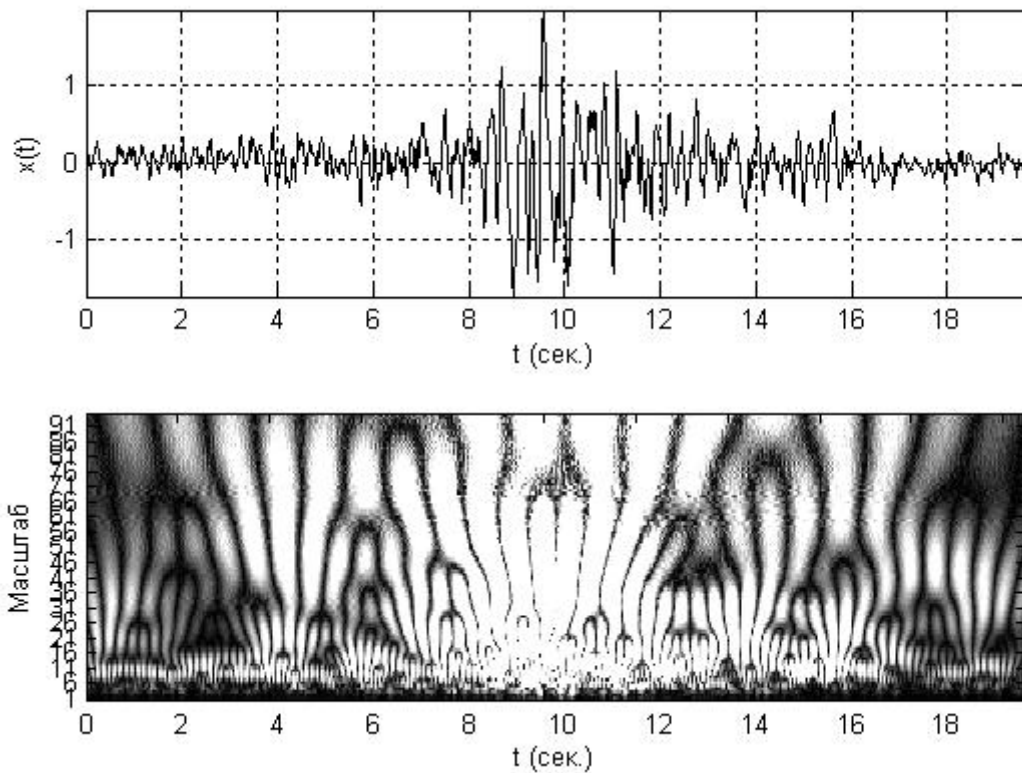


Рис.5. Акселерограмма и вейвлет-спектрограмма (morl)

На рис.1. изображены графики акселерограммы и ее спектра, найденного при помощи БПФ. Как видно из спектра, пик соответствует частоте 2.492 Гц.

Для того чтобы определить, какому временному интервалу принадлежит этот пик (и вообще для построения частотно-временной картины), проведём оконное преобразование Фурье. Результаты этого преобразования представлены на рис.2. Как видно из спектрограммы, частотный пик в 2.5 Гц имеет место в окрестности 8.5, 10 Гц.

Выполним вейвлет-преобразование с базисной функцией, называемой вейвлет Хаара (haar). Вейвлет Хаара представляет собой следующую функцию:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2; \\ -1, & 1/2 \leq t < 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

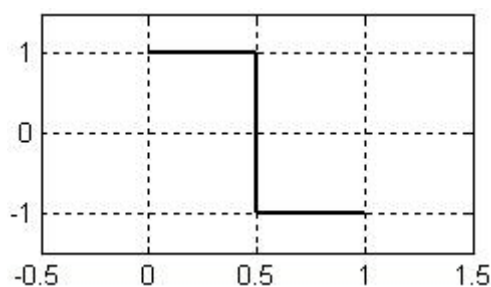


Рис.6. Вейвлет Хаара

Вейвлет Хаара обладает свойством выявлять «переходы», перегибы функции. На вейвлет-спектрограмме (рис.3) белые области соответствуют этим перегибам. По оси ординат откладывается масштаб (уровень разрешения сигнала). Таким образом, есть возможность наблюдать те или иные особенности сигнала (в зависимости от вейвлета) на разных масштабах (разных частотных составляющих).

Выполним вейвлет-преобразование с базисной функцией называемой, «мексиканская шляпа» (mexh). Данный вейвлет имеет следующий вид:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (31)$$

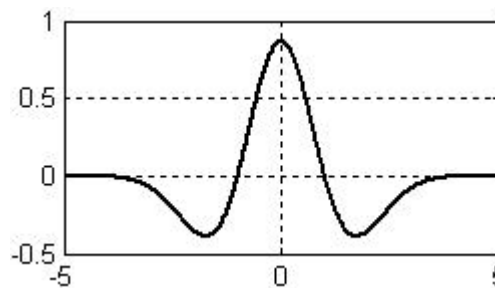


Рис.7. Вейвлет «мексиканская шляпа»

Данный вейвлет обладает свойством выявлять экстремумы функции. На вейвлет-спектрограмме (рис.4) белые области соответствуют этим экстремумам.

Выполним вейвлет-преобразование с базисной функцией называемой, вейвлет Морлета (morl):

$$\psi(t) = C e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t); \quad (32)$$

где C – нормализующий коэффициент.

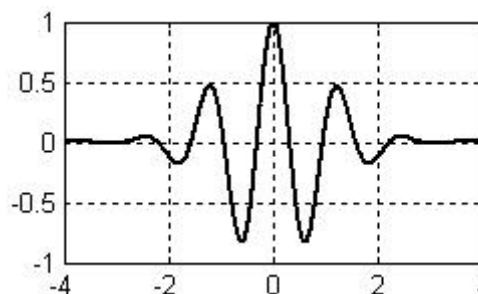


Рис.8. Вейвлет Морлета

Этот вейвлет хорошо локализован как во временной области, так и в частотной. На рис.5 представлен результат вейвлет-преобразования с этой функцией.

В данной работе мы ограничились использованием базисных функций, которые имеют аналитически явный вид, хотя существует большое количество базисных функций, которые задаются итерационными способами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: ВУС, 1999.
2. Кристалинский Р.Е., Кристалинский В.Р. Преобразование Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006.
3. К. Блатер. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2007.
4. Р. Блейхут. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989.

Мкртычев Олег Варданович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного

строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: mkrtychev@yandex.ru

Решетов Андрей Александрович, аспирант кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета. 129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: andrew331@bk.ru

Oleg V. Mkrtychev, Professor, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mkrtychev@yandex.ru

Andrey A. Reshetov, Graduate Student, Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: andrew331@bk.ru

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОГНОЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ СОЦИАЛЬНО ЗНАЧИМЫХ ОБЪЕКТОВ ГОРОДА

Н.И. Сенин, П.А. Акимов, М.А. Захарченко

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ: В настоящей статье рассматриваются некоторые современные подходы к прогнозному математическому моделированию состояния социально значимых объектов города. Излагаются корректные дискретно-континуальные методы расчета зданий и сооружений регулярной структуры на основе построения точных аналитических решений многоточечных краевых задач строительной механики, затрагиваются актуальные вопросы мониторинга технического состояния зданий и сооружений с использованием технологии пространственно-координатных геодезических измерений и конечноэлементного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций.

Ключевые слова: прогнозное математическое моделирование, численные методы, численно-аналитические методы, расчетное обоснование, мониторинг

SEVERAL RELEVANT PROBLEMS OF PREDICTIVE MATHEMATICAL MODELLING OF RESPONSIBLE PROJECTS OF CITY

Nikolay I. Senin, Pavel A. Akimova, Mariya A. Zakharchenko

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Several sophisticated approaches to predictive mathematical modelling of responsible projects of city are under consideration in the distinctive paper. Correct discrete-continual methods of structural analysis based on analytical solutions of multipoint boundary problems of structural mechanics are presented. Some vital problems of structural monitoring are studied as well.

Key words: predictive mathematical modelling, numerical methods, semianalytical methods, structural analysis, structural monitoring

Мировой и отечественный опыт, отраженный в многочисленных трудах научно-практических конференций, публикациях в периодических изданиях и монографиях, известные события последних лет в городах Российской Федерации и мира свидетельствуют о том, что проблема системного обеспечения техногенной безопасности мегаполиса является весьма актуальной. До недавнего времени уровень расчетов многих

строительных объектов был недостаточным и зависел от множества весьма субъективных факторов. Подобная практика привела, в частности, к известным трагическим последствиям и катастрофам. Эффективное, экономически оправданное решение задач расчета социально значимых строительных объектов города производится с использованием специализированных программных комплексов промышленного типа, реали-

зующих численные методы механики. Современная концепция требует, чтобы адекватное расчетное обоснование сопровождало объекты на всех этапах их зарождения (проектирования и строительства) и жизни (эксплуатации, ремонта и реконструкции), обеспечивая необходимый анализ и прогноз состояния в составе компьютерных информационно-диагностических систем мониторинга. В настоящей статье, в частности, предлагаются дискретно-континуальные методы расчета зданий и сооружений регулярной структуры на основе построения точных аналитических решений многоточечных краевых задач строительной механики, а также некоторые эффективные подходы к мониторингу технического состояния зданий и сооружений с использованием технологии пространственно-координатных геодезических измерений и конечноэлементного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций.

1. Корректные дискретно-континуальные методы расчета высотных зданий и сооружений регулярной структуры на основе построения точных аналитических решений многоточечных краевых задач строительной механики.

Разработаны следующие корректные дискретно-континуальные методы расчета строительных конструкций, зданий и сооружений, сочетающие качественные свойства замкнутых решений с общностью численных подходов: дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ). Область применения перечисленных методов составляют, в частности, высотные здания и сооружения, имеющие регулярную структуру по одному из координатных направлений (условно называемому основным направлением). Методы являются дискретно-континуальными (численно-аналитическими, полуаналитическими) в том смысле, что по основному направлению со-

храняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного рода с обоснованно контролируемой степенью точности. В итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных элементов (дискретно-континуальные конечные элементы для ДКМКЭ, дискретно-континуальные граничные элементы для ДКМГЭ, дискретно-континуальные сеточные элементы для ДКВРМ). По сути, дискретно-континуальные методы включают четыре основных этапа.

Первый этап. Сведение исходной задачи расчета высотного здания или сооружения к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению (например, по высоте здания или сооружения) и использования метода стандартной (расширенной) области А.Б. Золотова.

Второй этап. Дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих им функционалов. Наиболее универсальным здесь является использование техники метода конечных элементов в рамках ДКМКЭ. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, причем на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по «неосновным» координатным направлениям аппроксимируются, как правило, полиномами, а в основном направлении их вид остается искомым. Иными словами, неизвестные функции фактически определяются своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

Третий этап. Переход к разрешающей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, сопровождаемый, как правило, введением дополнительных неизвестных. Заметим, что в ряде случаев более рациональным является сведение к соответствующим системам второго по-

рядка. Количество дифференциальных уравнений в системе достаточно велико и насчитывает несколько тысяч штук. Разрешающая система имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{y}'(x) &= A\bar{y}(x) + \bar{f}(x) && \text{или} \\ \bar{y}''(x) &= A\bar{y}(x) + \bar{f}(x), && (1)\end{aligned}$$

где $\bar{y}(x)$ – искомая n -мерная вектор-функция; A – матрица постоянных коэффициентов n -го порядка; $\bar{f}(x)$ – n -мерная вектор-функция правых частей; x – переменная, отвечающая основному направлению.

Четвертый этап. Аналитическое решение разрешающих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что все сложности реализации дискретно-континуальных методов определяются характерными специфическими особенностями этих систем.

Прежде всего, важен фактор количества рассматриваемых дифференциальных уравнений. Как правило, в рамках традиционных методов (метод Л.В. Канторовича, метода В.З. Власова, метод прямых и т.д.) можно решить систему, насчитывающую очень небольшое число (два, три и т.д.) обыкновенных дифференциальных уравнений и то это требует зачастую привлечения ряда специальных мер (ограничение протяженности объекта и прочее). Перечисленные методы вообще изначально ориентировались разработчиками исключительно на ручной счет. Так, например, выбор базисных функций в них чаще всего не предполагает никакой дискретизации. Кроме того, эти базисные функции далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли соответствующей части заданных граничных условий. При решении же трехмерных задач с использованием предлагаемых дискретно-континуальных методов количество дифференциальных уравнений исчисляется тысячами, и все традиционно применяемые подходы для аналитического решения таких систем несостоятельны. В связи с отмеченным выше практически все исследователи

ищут не точное аналитическое решение в виде формулы со слагаемыми экспоненциального типа, а строят решение с помощью разложений в ряды (методы Л.В. Канторовича и В.З. Власова, метод конечных полос), использования сплайн-функций (метод конечных полос) и т.д. Идеино наиболее близким к разработанным дискретно-континуальным методам является метод прямых.

Стандартные полуаналитические подходы очень плохо справляются с учетом сосредоточенных нагрузок и нагрузок, распределенных на небольших участках. Между тем, расчет на такие нагрузки является наиболее важным для большинства рассматриваемых объектов. Не менее критичны в этом же смысле и граничные условия: либо они несостоятельны, либо для их адекватного учета требуется некоторый специальный вид таких условий, не имеющий места в общем случае. Точность и сходимость решений, получаемых по стандартным полуаналитическим методам, часто сильно зависит от вида выбираемых базисных функций для аппроксимации неизвестных, а также от количества учитываемых членов ряда. Сходимость же в зонах краевых эффектов, сосредоточенных факторов, концентраций напряжений и деформаций (т.е. в наиболее ответственных зонах) весьма медленная и слабо зависит от количества учитываемых членов ряда Фурье. И даже, например, если сходимость для перемещений относительно высока, для напряжений и внутренних усилий она много меньше. Данный факт отчасти объясняется известным в теории рядов эффектом Гиббса, способам борьбы с которым посвящено достаточно много работ.

Отмеченные недостатки стандартных методов следуют из математической сути задачи и указываются в обзорных статьях и монографиях.

Вычислительная специфика при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) определяется матрицей A . Решение, его корректность и эффективность зависит от ее спектра. Для большинства за-

дач строительной механики спектр матрицы A имеет следующие особенности:

- наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного значения матрицы A к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \geq M, \quad (2)$$

где M – большое число;

– в спектральном разложении матрицы A присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;

– жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих объект по «неосновным» направлениям, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Жорданово (спектральное) разложение матрицы A имеет вид:

$$A = T J T^{-1}, \text{ где } J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & J_u \end{bmatrix}; J_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_p \end{bmatrix}; \quad (3)$$

T – невырожденная матрица n -го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A ; J – матрица Жордана n -го порядка; J_p – жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_p ; $\dim J_p = m_p$; u – количество различных собственных значений.

Традиционный подход, рекомендуемый в неспециальной математической литературе и в публикациях в области строительной механики, фактически сразу предлагает искать решения задач (1) соответственно в видах:

- решение для системы (1) первого порядка:

$$\bar{y}(x) = \exp(Ax) \bar{y}(0) + \int_0^x \exp(A(x - \xi)) \bar{f}(\xi) d\xi; \quad (4)$$

- решение для системы (1) второго порядка:

$$\bar{y}(x) = ch(\sqrt{Ax}) \bar{y}(0) + \frac{1}{2} A^{-1/2} sh(\sqrt{Ax}) \bar{y}'(0) + \frac{1}{2} \int_0^x sh(\sqrt{A}(x - \xi)) \bar{f}(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Функции от матриц вычисляются по известным правилам, причем

$$\exp(Ax) = T \exp(Jx) T^{-1}; \quad ch(\sqrt{Ax}) = T ch(\sqrt{Jx}) T^{-1}; \quad sh(\sqrt{Ax}) = T sh(\sqrt{Jx}) T^{-1}. \quad (6)$$

Решения (4) и (5) в первую очередь ориентируются на задачи Коши. Для случаев, когда исходные уравнения имеют эллиптический тип, (4) и (5) являются, по сути, решениями по методу начальных параметров или начальных функций. Несмотря на наличие в некотором ограниченном числе задач решений по формулам (4) и (5), в общем случае они практически нереализуемы. Это связано с тем, что в решениях (4) и (5) всегда имеются функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$, причем величина λx достигает значительных величин (например $12 < \lambda x < 300$). Реализация таких функций на ЭВМ является «вычислительной катастрофой».

фой». Чем точнее аппроксимация по «неосновным» направлениям объекта, тем большие значения принимает величина λx .

Системы (1) являются жесткими. В частности, отсюда вытекает характер решения вблизи границ (краевой эффект, эффект малого параметра) и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок. Часть составляющих решения системы является быстроизменяющимися, а часть меняется медленно. Как следствие, никакой дискретный подход, например, использующий сплайны, не в состоянии уловить все компоненты решения одновременно и его асимптотику. Важным параметром является протяженность (например, высота) строительного объекта. Если, например, она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Часто решение систем (1) ведется либо некорректными методами, зачастую не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, ортогональной прогонки и другие, причем метод ортогональной прогонки сопряжен с большим объемом вычислений и неоправданным «усилением» (ортогонализацией и нормировкой) исчезающих по длине факторов)).

В литературе жесткие системы, безусловно, исследуются, но в основном при решении задач Коши и, как правило, для систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от аргумента. В рамках представляемой работы цель состояла именно в получении аналитического решения при постоянных (или кусочно-постоянных) коэффициентах, что наиболее характерно для большинства задач расчета высотных зданий и сооружений.

Важной особенностью при построении решения в форме (4) или (5) является необходимость вычисления жордановых клеток и присоединенных векторов. Эта задача также является некорректной, необходимое для ее решения математическое и программное обеспечение в общем случае отсутствует. В линейной алгебре доказывается, что не может существовать ни одного численно устойчивого универсального способа вычисления жордановых канонических форм. Это можно преодолеть путем возмущения матрицы, но тогда возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Суть предлагаемого авторами подхода состоит в следующем.

1. Строится фундаментальная матрица-функция, свертка с которой является оператором, обратным к исходному дифференциальному. Для этой цели матрица A коэффициентов системы представляется в виде суммы

$$A = A_+ + A_- + A_0, \text{ где } A_+ = P_+ A; A_- = P_- A; A_0 = P_0 A = A - A_+ - A_-, \quad (7)$$

где P_+ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями; P_- проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями; P_0 – проектор на подпространство, отвечающее собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям;

$$P_+ = T_+ (\tilde{T}_+ T_+)^{-1} \tilde{T}_+; P_- = T_- (\tilde{T}_- T_-)^{-1} \tilde{T}_-; P_0 = E - P_+ - P_-; \quad (8)$$

T_+ и \tilde{T}_+ – соответственно матрицы размерности $n \times n_+$ и $n_+ \times n$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A с неотрицательными действительными частями; T_- , \tilde{T}_- – соответственно матрицы размерности

$n \times n_-$ и $n_- \times n$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A с отрицательными действительными частями; E – единичная матрица соответствующего порядка; n_+ и n_- – соответственно количество ненулевых собственных значений с неотрицательными и отрицательными действительными частями.

Заметим, что матрицы \tilde{T}_+ и \tilde{T}_- предлагается определять из решения левой проблемы собственных значений для матрицы A (учитывается тот факт, что, как следует из отмеченного выше, практически невозможно на практике построить матрицы T и T^{-1} в разложении (3) при наличии в матрице J жордановых клеток неединичного порядка). Левая проблема собственных значений матрицы A , как известно, сводится к (правой) проблеме собственных значений матрицы A^T . Отметим, что после решения проблем собственных значений для матриц A и A^T следует провести такую сортировку их собственных значений (и соответственно собственных векторов), чтобы сначала нумеровались все ненулевые собственные значения. Сопутствующие преобразования определяются формулами (знак \Rightarrow условно обозначает операцию присваивания)

$$\tilde{T}_+ \Rightarrow (\tilde{T}_+ T_+)^{-1} \tilde{T}_+; \quad \tilde{T}_- \Rightarrow (\tilde{T}_- T_-)^{-1} \tilde{T}_-. \quad (9)$$

Подчеркнем, что проектор P_0 не нуждается в специальном построении. Он элементарно находится как разность единичной матрицы соответствующего порядка с парой проекторов P_+ и P_- , которым он ортогонален. Описанные процедуры упрощают применение метода стандартной области, связанное с наличием дискретно-континуальных элементов нулевой жесткости.

Фундаментальные матрицы-функции для задач (1) могут быть представлены в следующих специальных видах, удобных для решения практических проблем расчета конструкций, зданий и сооружений:

– для системы (1) первого порядка:

$$\varepsilon(x) = T_1 \tilde{\varepsilon}_0(x) \tilde{T}_1 + \chi(x, 0) [P_0 + \sum_{k=1}^{m_{\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_0^k], \quad (10)$$

где

$$\chi(x, \lambda_p) = \begin{cases} \chi(x), & \text{Re}(\lambda_p) \leq 0 \\ -\chi(-x), & \text{Re}(\lambda_p) > 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\tilde{\varepsilon}_0(x) = \text{diag} \{ \chi(x, \lambda_1) \exp(\lambda_1 x), \dots, \chi(x, \lambda_l) \exp(\lambda_l x) \}; \quad (12)$$

$$T_1 = [T_+ \quad T_-]; \quad \tilde{T} = [\tilde{T}_+^T \quad \tilde{T}_-^T]^T; \quad (13)$$

– для системы (1) второго порядка:

$$\varepsilon(x) = T_1 \varepsilon_0(x) \tilde{T}_1 + x_+ P_0 + \sum_{j=1}^{m_{\max}-1} \frac{1}{(2j+1)!} x_+^{2j+1} A_0^j, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon_0(x) = -0.5 \cdot \sqrt{\tilde{J}^{-1}} \exp(-\sqrt{\tilde{J}} |x|); \quad \tilde{J} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l \}. \quad (15)$$

В формулах (10)-(15) приняты следующие обозначения: $m_{\max} = \max_{l \leq i \leq u} m_i$, причем величина m_{\max} конечна и небольшая; $l = n_+ + n_-$ – число ненулевых собственных значений матрицы A ; $\chi(x)$ – функция Хэвисайда; $x_+ = \chi(x) \cdot x$.

В (10) и (14) нет компонент типа $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$. Следует особо отметить, что такие представления основаны на том, что из свойств задач строительной механики вытекает, что все жордановы клетки неединичного порядка соответствуют нулевым собственным значениям и являются нильпотентными, т.е. их некоторая степень приводит к нулевым клеткам.

2. Рассматриваются двухточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Имеем (ниже условно принято $x = 0$ и $x = l$ – координаты граничных точек):

– для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x); \quad B_0\bar{y}(0) + B_l\bar{y}(l) = \bar{g}, \quad (16)$$

где B_0, B_l – заданные матрицы коэффициентов граничных условий n -го порядка; \bar{g} – заданный вектор правых частей граничных условий n -го порядка.

– для системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\bar{y}''(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x); \quad B_0\bar{Y}(0) + B_l\bar{Y}(l) = \bar{g}, \quad (17)$$

где $\bar{Y} = \bar{Y}(x) = [(\bar{y}(x))^T \quad (\bar{y}'(x))^T]^T$; B_0, B_l – заданные матрицы коэффициентов граничных условий $2n$ -го порядка; \bar{g} – заданный вектор правых частей граничных условий $2n$ -го порядка.

Решение задачи (16) определяется формулой:

$$\bar{y}(x) = [\varepsilon(x) - \varepsilon(x-l)]\bar{C} + \int_0^l \varepsilon(x-\xi)\bar{f}(\xi)d\xi, \quad (18)$$

где \bar{C} – n -мерный вектор коэффициентов, определяемый из граничных условий (16) явным матричным методом или методом базисных вариаций.

Решение задачи (17) можем записать следующим образом:

$$\bar{Y}(x) = [E(x) - E(x-l)]\bar{C} + \int_0^l \tilde{\varepsilon}(x-\xi)\bar{F}(\xi)d\xi, \quad (19)$$

$$\text{где} \quad E(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x) & \varepsilon'(x) \\ \varepsilon'(x) & \varepsilon''(x) \end{bmatrix}; \quad \tilde{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \varepsilon'(x) \end{bmatrix}; \quad \bar{F}(x) = \begin{bmatrix} \bar{f}(x) \\ \bar{f}'(x) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где \bar{C} – $2n$ -мерный вектор постоянных коэффициентов, определяемый из граничных условий (17) явным матричным методом или методом базисных вариаций.

Матрицу-функцию $E(x)$ можно представить в виде:

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x), \quad (21)$$

$$\text{где} \quad E_1(x) = T_1 \begin{bmatrix} E & \text{sign}(x)\sqrt{J} \\ \text{sign}(x)\sqrt{J} & J \end{bmatrix} \otimes \varepsilon_0(x)\tilde{T}_1; \quad (22)$$

$$E_2(x) = \chi(x) \left[\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes P_0 + \sum_{j=1}^{m_{\max}} \begin{bmatrix} z_j(x) & z_j'(x) \\ z_j'(x) & z_j''(x) \end{bmatrix} \otimes A_2^j \right]; \quad z_j(x) = \frac{1}{(2j+1)!} x_+^{2j+1}; \quad (23)$$

$\chi(x)$ – функция Хэвисайда; знак \otimes обозначает операцию кронекерова (прямого) произведения матриц; каждый $\sqrt{\lambda_p}$ при вычислении \sqrt{J} выбирается с неотрицательной вещественной частью; $\text{sign}(x) = 2\chi(x) - 1$.

Представленные общие виды решений корректны при любых условиях и свободны от всех недостатков, присущих, например, методам типа начальных параметров. Последние, главным образом, применимы на практике лишь при расчете балок и пространственных стержней при отсутствии упругого основания.

Рассмотрим теперь многоточечную краевую задачу, под которой понимается задача с «внутренними» граничными условиями, представляющая из себя, таким образом, совокупность обычных краевых задач, рассматриваемых на областях, имеющих общие границы.

Постановка многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка состоит из n уравнений и $n_k - 1$ граничных условий, заданных в граничных точках x_k^b , $k = 1, \dots, n_k$:

$$\bar{y}' - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (24)$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (25)$$

где $B_1^+, B_k^-, B_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы граничных условий n -го порядка; $\bar{g}_1^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные n -мерные векторы правых частей граничных условий.

Вектор-функция решение задачи (24)-(25) на произвольном интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) , обозначается $\bar{y}_k(x)$ и определяется формулой:

$$\bar{y}_k(x) = (\varepsilon(x - x_k^b) - \varepsilon(x - x_{k+1}^b))\bar{C}_k + \varepsilon(x) * \bar{f}_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (26)$$

где \bar{C}_k – вектор постоянных коэффициентов n -го порядка, определяемых из условий (25); * – символ, обозначающий операцию свертки.

$$\bar{f}_k(x) \equiv f(x)\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b); \quad \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (27)$$

Постановка многоточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений второго порядка состоит из n уравнений и $n_k - 1$ линейных граничных условий в граничных точках x_k^b , $k = 1, \dots, n_k$, т.е.:

$$\bar{y}'' - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (28)$$

$$B_k^- \bar{Y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{Y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \bar{Y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{Y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (29)$$

где $B_1^+, B_k^-, B_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы граничных условий $2n$ -го порядка; $\bar{g}_1^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+, k = 2, \dots, n_k - 1, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные $2n$ -мерные векторы правых частей граничных условий.

Общее решение задачи на произвольном интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) имеет вид:

$$\bar{Y}_k(x) = [E(x - x_k^b) - E(x - x_{k+1}^b)]\bar{C}_k + \tilde{\varepsilon}(x) * \bar{F}_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (30)$$

где \bar{C}_k – вектор постоянных n -го порядка, определяемых из условий (29);

$$\bar{F}_k(x) \equiv \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) \bar{F}(x); \quad \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (31)$$

Прямое или точное решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе (выполнен анализ более 600 российских и зарубежных публикаций, в том числе обзорных статей) не приводится. По-видимому, главную роль в этом сыграли перечисленные особенности подобных задач. Отметим, что эти особенности характерны именно для строительных задач (расчеты конструкций, зданий, сооружений) и, может быть, по этой причине они не являлись предметом широкого исследования в математике, хотя решением близких проблем в значительной степени занимались в МГУ им. М.В. Ломоносова, в том числе в научных школах М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко, Б.М. Левитана, А.А. Шкаликова и других. Однако в работах перечисленных ученых исследовались в основном качественные вопросы (существование, единственность и т.д.), тогда как проблемы численной реализации практически не затрагивались. В рамках же представляемой работы реализован устойчивый алгоритм аналитического решения при любом числе неизвестных в корректной для вычислений форме, который является основой для построения программных комплексов промышленного типа.

Дискретно-континуальные методы (в особенности ДКМКЭ) также эффективны при определении собственных частот и форм колебаний высотных зданий и сооружений, что весьма актуально с позиций исследования чувствительности последних к периодическим воздействиям. На определенном этапе такого рода проблемы сводятся в простейшем случае к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\bar{y}'(x) = A_s \bar{y}(x), \quad x \in (0, l); \quad B_0 \bar{y}(0) + B_l \bar{y}(l) = 0, \quad (32)$$

где \bar{y} – вектор-функция неизвестных (искомая собственная функция); A_s – матрица коэффициентов, зависящая от искомого собственного значения s .

Согласно изложенному выше общее решение задачи (32) имеет вид:

$$\bar{Y}(x) = (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_s(x-l)) \bar{C}_s, \quad (33)$$

где $\varepsilon_s(x)$ – фундаментальная матрица-функция системы (32),

$$\varepsilon_s(x) = T_s \varepsilon_{s,0}(x) T_s^{-1}; \quad (34)$$

T_s – матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A_s ; $\varepsilon_{s,0}$ – диагональная матрица, определяемая формулой (см. также (11))

$$\tilde{\varepsilon}_{s,0}(x) = \text{diag}\{\chi(x, \lambda_{s,1}) \exp(\lambda_{s,1}x), \dots, \chi(x, \lambda_{s,n}) \exp(\lambda_{s,n}x)\}; \quad (35)$$

$\lambda_{s,p}$, $p = 1, 2, \dots, n$ – собственные значения матрицы A_s ; \bar{C}_s – вектор постоянных коэффициентов, определяемых из граничных условий (32).

Поясним процесс нахождения \bar{C}_s . Понимая условия (32) в виде

$$B_0 \bar{Y}(+0) + B_l \bar{Y}(l-0) = 0, \quad (36)$$

и подставляя (33) в (36), получим:

$$B_{\Gamma,s} \bar{C}_s = 0, \quad (37)$$

$$\text{где} \quad B_{\Gamma,s} = B_0 \varepsilon_s(+0) - B_l \varepsilon_s(-0) - B_0 \varepsilon_s(-l) + B_l \varepsilon_s(l). \quad (38)$$

Как известно, ненулевой вектор \bar{C}_s , удовлетворяющий системе (37), существует тогда и только тогда, когда

$$\det(B_{\Gamma,s}) = 0. \quad (39)$$

Непосредственное вычисление собственных значений и собственных функций краевой задачи выполняется на основе специально разработанного шагового алгоритма, состоящего в следующем:

а) Задаются (с некоторым постоянным или переменным шагом) $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k, \dots$ (причем, очевидно, $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_k < \dots$);

б) Вычисляются собственные значения матриц B_{Γ,s_k} , $k = 1, 2, 3, \dots$, т.е. $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, \dots, \lambda_{n,k}$.

в) Если среди собственных значений $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, \dots, \lambda_{n,k}$ имеются нулевые, то s_k – искомое собственное значение с кратностью, равной числу нулевых собственных значений матрицы B_{Γ,s_k} . Для каждого собственного значения определяется соответствующий собственный вектор (\bar{C}_s) матрицы B_{Γ,s_k} и далее по формуле (33) находится искомая собственная функция.

Заметим, что поиск нулевых собственных значений на практике ведется с некоторой точностью Δ , т.е., если $|\lambda| \leq \Delta$, то λ полагается нулевым.

2. Мониторинг технического состояния высотных монолитных зданий и сооружений с использованием технологии пространственно-координатных геодезических измерений и конечноэлементного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций.

Рост технической сложности и ответственности возведенных, строящихся и планируемых к строительству высотных зданий и сооружений в мегаполисах (в частности, в городе Москва) определяет насущную необходимость в проведении мероприятий по обеспечению технической безопасности подобных объектов. Основными способами обеспечения безопасности ответственных зданий и сооружений являются: качественное проектирование и строительство объектов с учетом необходимости контроля состояния зданий и сооружений при строительстве и эксплуатации, инструментальный и визуальный мониторинг технического состояния на всех стадиях строительства и эксплуатации в непрерывном автоматическом и периодическом режимах.

Актуальность данного исследования в настоящее время определяется повсеместным внедрением систем мониторинга для высотных зданий и сооружений и, в то же время, недостаточным нормативно-техническим обеспечением и методической базой, регулирующей предметное содержание, состав и методику проведения работ. Целью выполнения исследований являлось:

– обеспечение безопасности, предотвращение аварий и контроль состояния высотных монолитных зданий и сооружений сложной архитектурной формы путем создания эффективных и универсальных автоматизированных систем мониторинга технического состояния на основе интегрированных комплексов средств инструментального контроля и математического моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) несущих конструкций;

– радикальное сокращение временных и производственных затрат на проведение мониторинга высотных монолитных зданий и сооружений сложной архитектурной формы при строительстве и эксплуатации в условиях

крупных современных городов на основе современных информационных технологий;

– возможность в ходе жизненного цикла объекта мониторинга обоснованно устанавливать необходимость проведения мероприятий по восстановлению нормативного технического состояния конструкций;

– снижение материальных затрат за счет определения необходимости проведения текущих ремонтных работ до момента, когда вероятность отказа конструкций становится выше показателя их надежности;

– возможность практического использования созданной интегрированной информационной технологии силами специалистов широкого круга проектных и строительных организаций;

– возможность использования полученных результатов в учебном процессе при подготовке и переподготовке специалистов в области обеспечения безопасности и мониторинга высотных зданий и сооружений.

Основными подсистемами разрабатываемой системы мониторинга высотного объекта должны быть: автоматическая (сигнальная) подсистема мониторинга (оповещение людей о возникновении аварийной ситуации) и подсистема периодического мониторинга (оценка надежности объекта, определение рекомендаций по дальнейшей безопасной эксплуатации).

Автоматическая (сигнальная) подсистема мониторинга состояния несущих конструкций должна осуществлять в режиме реального времени контроль критически важных интегральных характеристик надежности конструкций объекта, с целью оповещения о превышении предельно допустимых величин.

Автоматическая система контроля технического состояния объекта, наряду с другими системами контроля (тепло и водоснабжения, пожарной безопасности, климатических условий и т.п.) функционирует в автоматическом режиме в соответствии с концепцией так называемого «умного дома». Исходная информация о состоянии объекта при помощи преобразователей различного типа – линейных и угловых перемещений,

усилий и напряжений и т.д. собирается на компьютеризованных измерительных приборах в пределах локальных зон, обеспечивающих стабильность измерений. Далее, по локальным компьютерным сетям информация поступает и обрабатывается в централизованном диспетчерском пункте, своевременно выдавая предупреждение о возможности возникновения аварийной ситуации.

Современный подход к вопросам безопасности высотных зданий и сооружений требует разработки систем автоматического контроля на стадии проектирования с учетом основных конструктивных и функциональных особенностей объекта, с последующей их реализацией при строительстве и эксплуатации. Для более эффективного предупреждения развития аварийных ситуаций такие системы должны дополняться процедурами периодического контроля физических и геометрических параметров технического состояния конструкций.

Подсистема периодического мониторинга состояния несущих конструкций осуществляет контроль показателей, характеризующих надежность конструкций, с целью предупреждения ситуаций, при которых значения регистрируемых параметров превысят их предельно допустимые величины, установленные соответствующими нормами проектирования. Одним из результатов периодического мониторинга является оценка НДС несущих конструкций при помощи конечноэлементного моделирования их работы с учетом изменяющихся условий эксплуатации и накопленных повреждений.

Геодезический мониторинг деформационных процессов является важнейшей составляющей системы контроля технической безопасности высотных зданий и сооружений из-за ветровых динамических воздействий, а также сложных инженерно-геологических условий эксплуатации. Методика геодезического мониторинга для высотных объектов разрабатывается с учетом их конструктивных, архитектурных особенностей, а также геологических, технологиче-

ских и технических причин возникновения деформаций.

Деформации рассматриваемых объектов могут иметь сложный пространственный характер. Пространственные геометрические характеристики деформационных процессов могут быть определены с применением целого ряда разнообразных геодезических методов и современных приборов.

Перспективными геодезическими средствами, используемыми для решения задачи пространственно-координатного мониторинга, являются приборы GPS-позиционирования, которые на современном этапе позволяют определять пространственные координаты точек с точностью до 1 см, что для высотных объектов с возможными горизонтальными перемещениями порядка нескольких десятков сантиметров представляет довольно высокую точность.

С помощью GPS-систем эффективно определяются динамические показатели колебаний высотных зданий и сооружений от ветровых воздействий. На основе постобработки информации определяются фоновые и резонансные компоненты смещения в направлениях по ветру и перпендикулярно ему, что дает представление о фоновом компоненте структурной реакции высотного объекта.

Для контроля пространственного положения объектов могут быть использованы современные электронные тахеометры, отвечающие заданным требованиям к точности измерения деформаций зданий и сооружений. В качестве автоматизированных систем непрерывного контроля перемещений зданий и сооружений наиболее распространены на сегодня решения, представленные такими производителями как Trimble Navigation и Leica Geosystem.

Безотражательные тахеометры позволяют производить с высокой точностью съемку недоступных для установки отражательных призм точек на фасадах зданий. Возможность автоматизированных измерений обеспечивает система самонаведения приборов на специальные активные отражатели (технология Autolock). Роботизированные измерения осуще-

ствляются с помощью технологии Robotic, при этом управление прибором и сбор данных измерений осуществляется дистанционно по радиомодему. Роботизированные системы эффективно используются для слежения за деформациями объектов, съемки движущихся объектов и т.д. В электронном тахеометре Trimble S8 (точность измерения углов 1" и расстояний 1мм+1мм/км), специально разработанном для мониторинга используется технология MultiTrack™, которая предоставляет возможность слежения как за пассивными отражателями, так и за активными отражателями на очень больших расстояниях. Программное обеспечение Trimble 4D Control считывает данные приемов из Trimble S8 в виде отдельных сеансов и указывает любое перемещение целей с течением времени. Программа настраивается для предоставления таких функций, как предупреждения о перемещении цели и оповещения.

Лазерное сканирование на сегодняшний день зарекомендовало себя как высокопроизводительная технология, которая может эффективно применяться для решения проблемы пространственно-координатного мониторинга объектов большой сложности и насыщенности. Точность измерений лазерных сканеров лежит в диапазоне от 1мм до 10мм на расстояниях до 1000м, при этом количество измерений в секунду может составлять до 100 000 точек.

Первичным результатом получаемых данных является трехмерное облако точек, преобразуемое затем с помощью специального программного обеспечения в электронную пространственную модель объекта, на основании которой определяются перемещения, и оценивается состояние здания или сооружения по сравнению с предыдущим этапом измерений.

При контроле деформаций высотных зданий и сооружений используется, так называемая, пространственно-координатная модель (ПК-модель) объекта. Модель повторяет форму здания или сооружения, ее точки размещены в основных конструктивных узлах объекта, в частности в узлах каркаса. В этих точках

размещаются специальные отражательные марки, позволяющие фиксировать пространственные координаты в ходе лазерной тахеометрической съемки. Узлы ПК-модели с определенной точностью совпадают с узлами конечно-элементной модели сооружения (МКЭ-модель) (рис. 2.1)

Если эксплуатационные нагрузки оставались стабильными, то изменения пространственных координат узлов ПК-модели, зафиксированные в ходе повторной тахеометрической съемки, являются следствием имевших место смещений, вызванных различными природно-техногенными причинами основания. Степень влияния этих смещений на НДС несущих конструкций объекта можно оценивать по МКЭ-модели, к которой, помимо эксплуатационных нагрузок, прикладываются «наложенные перемещения» в узлах ПК-модели. При этом отсутствие полной картины и причины смещений компенсируется знанием результатов их воздействия на объект.

Итак, при неравномерных деформациях ПК-модель объекта частично отражает пространственные деформации, происходящие в объеме всего здания или сооружения. МКЭ-модель при вводе достоверно составленных нагрузочных данных (перемещений узлов ПК-модели) позволяет контролировать изменение НДС конструкций и оценивать их фактическую несущую способность в заданных условиях эксплуатации объекта. Оценка влияния зафиксированных перемещений контролируемых узлов ПК-модели на несущую способность конструкций объекта производится после обоснованной интерполяции значений перемещений в основные конструктивные узлы МКЭ-модели (опорные узлы колонн каркаса, узлы соединения колонн и главных балок перекрытий, узлы соединения колонн и плит перекрытий, узлы соединения несущих стен в уровне перекрытий этажей и др.).

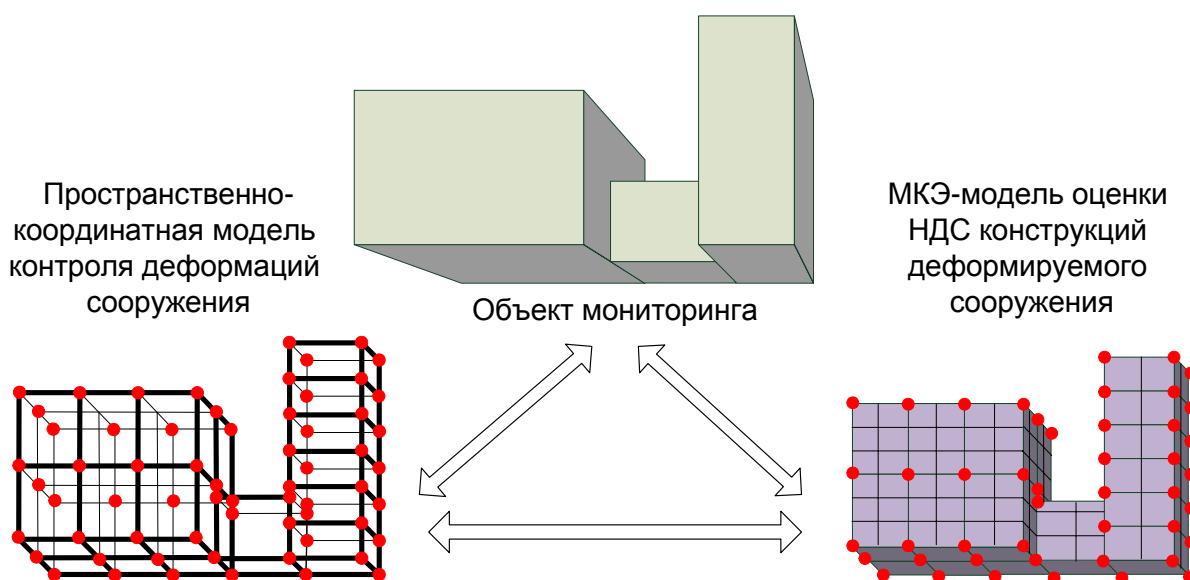


Рис. 2.1. ПК-модель и МКЭ-модель оценки технического состояния объекта мониторинга

В зависимости от количества контролируемых узлов ПК-модели и расчетной схемы объекта может использоваться различная интерполяция перемещений. Для вычисления промежуточных значений перемещений основных узлов МКЭ-модели истинная функция перемеще-

ний заменяется интерполяционной функцией (N_i), которая в узлах МКЭ-модели, соответствующих контролируемым узлам ПК-модели, дает «точные» значения перемещений (U_i) и позволяет определять значения перемещений (V_i) в искомым основных узлах модели.

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n N_i U_i = N \bar{U}, \quad (40)$$

где \bar{V} – вектор, элементами которого являются перемещения основных узлов МКЭ-модели; N – матрица, элементами которой являются интерполяционные функции; \bar{U} – вектор, элементами которого являются перемещения контролируемых узлов ПК-модели.

Для реализации данной технологии используемый конечноэлементный программный комплекс должен обладать специальным сервисом, позволяющим проводить интерполяцию перемещений узлов в автоматическом режиме.

Реализация алгоритма расчета на наложенные перемещения связана с обработкой глобальной матрицы жесткости, т.е. с заданием граничных условий, соответствующих ненулевым значениям линейных перемещений узлов элементов конструкций. Рассматриваются две группы узлов: узлы, в которых наложенные перемещения не заданы, и узлы, перемещения которых задаются (основные узлы МКЭ-модели). Разрешающая система уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{(\alpha)} & \bar{v}_1^{(\beta)} \\ 0 & \bar{v}_2^{(\beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^{(\alpha)} & 0 \\ \bar{f}_2^{(\alpha)} & \bar{f}_2^{(\beta)} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

где $\bar{v}_1^{(\alpha)}$ – перемещения в узлах первой группы при закрепленных узлах второй группы, вызванные нагрузкой $\bar{f}_1^{(\alpha)}$, приложенной к узлам первой группы; $\bar{v}_1^{(\beta)}$ – перемещения в узлах первой группы, вызванные перемещениями узлов второй группы, при этом $\bar{v}_1 = \bar{v}_1^{(\alpha)} + \bar{v}_1^{(\beta)}$; $\bar{v}_2^{(\beta)}$ – перемещения в узлах второй группы; $\bar{f}_2^{(\alpha)}$ – реакции в закрепленных узлах второй группы, вызванные перемещениями узлов первой группы, при этом $\bar{f}_2 = \bar{f}_2^{(\alpha)} + \bar{f}_2^{(\beta)}$ – нагрузка, приложенная к узлам второй группы.

Существенное сокращение объема и времени обработки данных достигается в настоящей работе за счет разработанной технологии формирования блочной МКЭ-модели, создаваемой на базе основной модели в соответствии с принятой конфигурацией ПК-модели (рис. 2.2). При этом блоки являются подконструкциями, т.е. обладают свойствами расчетной модели. В данном случае расчету может подвергаться система контролируемых блоков, выделенных из текущей деформационной МКЭ-модели, граничные узлы которых испытывают наиболее значительные зарегистрированные перемещения.

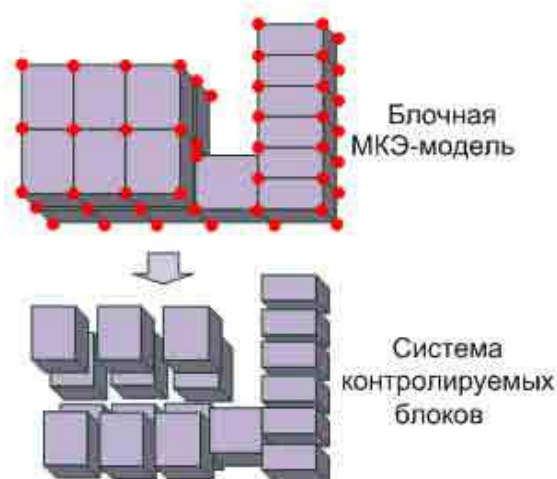


Рис. 2.2. Система контролируемых блоков

Некоторые актуальные вопросы прогнозного математического моделирования состояния социально значимых объектов города

МКЭ-моделирование на предварительном этапе мониторинга позволяет определить предельные деформационные показатели, превышение которых в ходе эксплуатации будет представлять опасность для несущей способности здания или сооружения.

Основная проблема проведения ПК-съемки высотных объектов связана с невозможностью использования стандартных плоских световозвращающих марок на больших высотах и в стесненных условиях доступа к объекту (рис. 2.3а) из-за снижения точности измерений при критических углах падения луча лазерного дальномера тахеометра менее 30° - 35° к плоскости катафотного слоя марки. Данные ограничения в рамках настоящей работы преодолены путем создания специализированной технологии ПК-съемки. В ее основе лежит использование специально разработанных сферических световозвращающих марок, позволяющих проводить устойчивые измерения координат при любых углах визирования с заданной точностью в большом диапазоне расстояний. Сферическая световозвращающая марка (рис. 2.3б) представляет собой сферу радиусом 20мм, обклеенную световозвращающей катафотной тканью. При наведении на такие марки с любой точки стояния тахеометра автоматически обеспечивается нормальное падение луча к сферической поверхности в точке наведения и прохождение его продолжения через центр сферы, что исключает эффект косоугольного визирования и позволяет наблюдать расположенные на фасаде объекта марки с любого направления без снижения точности наведения (рис. 2.4).

Возникающая константа измерений (расстояние до центра сферы) определяется экспериментально для используемого типа электронного тахеометра.

Использование сферических марок при ПК-съемке в условиях плотной городской застройки позволяет получать более полную картину пространственных деформаций объекта за счет увеличения количества внешних узлов ПК-модели, расположенных в верхних контролируемых уровнях объекта, по сравнению с использованием стандартных плоских марок.

Очевидно, что в современных условиях повсеместного внедрения информационных технологий разработку методики мониторинга технического состояния высотных монолитных зданий и сооружений сложной архитектурной формы наиболее эффективно осуществлять в рамках интегрированной информационной технологии (ИИТ). ИИТ мониторинга формируется на основе объединения современных технологий проведения инженерных исследований. Предметом ИИТ мониторинга является комплексная информация о фактическом техническом и эксплуатационном состоянии объекта в форме комплекта исполнительной документации. Технической основой предлагаемой ИИТ является аппаратно-программный комплекс (АПК), сформированный из современных технических, аппаратных и программных средств проведения инженерных исследований, обработки, преобразования, передачи и представления информации о результатах исследований в электронной форме.



Рис. 2.3. а) Плоские самоклеящиеся световозвращающие марки;
б) Сферические световозвращающие марки.

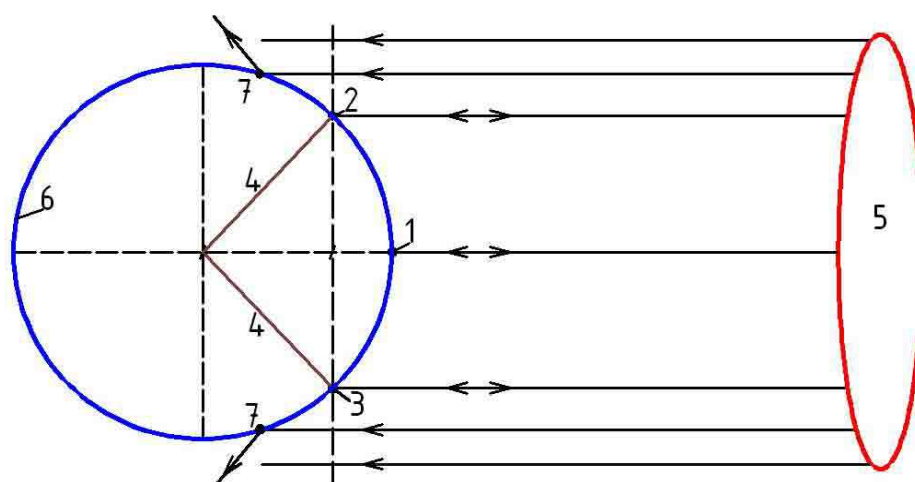


Рис. 2.4. Характер отражения сферической световозвращающей марки.

1 – точка наведения; 2,3 – точка минимума световозвращения катафотной сферической поверхности; 4 – константа световозвращающей сферической марки; 5 – объектив светодальномера; 6 – сфера со световозвращающим катафотным покрытием; 7 – точка критического угла падения для катафотной сферической поверхности.

Замечания. Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.

2. Грант 2.3.9 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.

3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала

высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).

4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных зданий и сооружений сложной архитектурной формы», выполняемая в рамках Тематического плана ФГБОУ ВПО «МГСУ» (проект 5.1.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
2. Золотов А.Б., Акимов П.А. Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы. – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
3. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Математические методы в строи-

Некоторые актуальные вопросы прогнозного математического моделирования состояния социально значимых объектов города

тельной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.

6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

7. Коргин А.В., Коргина М.А., Ранов И.И., Поляков Д.А. Мониторинг изменения напряженно-деформированного состояния строительных конструкций зданий и сооружений на основе МКЭ-анализа пространственно-координатных моделей. // Вестник МГСУ, №4, 2007, с. 83-87.

8. Коргина М.А. Использование современных технологий пространственно-координатных геодезических измерений и МКЭ-анализа напряженно-деформированного состояния несущих конструкций в ходе мониторинга технического состояния ответственных зданий и сооружений. // Вестник МГСУ, спецвыпуск №1, 2009, с. 140-146.

9. Коргина М.А., Коргин А.В. Интегрированная информационная технология мониторинга технического состояния зданий и сооружений. // Вестник МГСУ, спецвыпуск №1, 2009, с. 42-44.

10. Ранов И.И., Коргин А.В., Коргина М.А., Поляков Д.А. Исследование параметров отражения сферическими световозвращающими марками при измерении расстояний электронными тахеометрами. // Вестник МГСУ, №4, 2007, с. 88-91.

11. Ранов И.И., Коргин А.В., Коргина М.А., Поляков Д.А. Экспериментальные исследования точности измерений деформаций сооружений электронными тахеометрами. // Вестник МГСУ, №4, 2007, с. 92-94.

12. Сенин Н.И. Инновационные формы сотрудничества высшего образования и бизнеса в области подготовки кадров для строительной отрасли. // Промышленное и гражданское строительство, № 9, 2008, с. 30-31.

13. Akimov P.A., Sidorov V.N. Correct Method of Analytical Solution of Multipoint Boundary Problems of Structural Analysis for Systems of Ordinary Differential Equations with Piecewise Constant Coefficients. // Advanced Materials Research Vols. 250-253, 2011, pp. 3652-3655.

14. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N. Correct Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems of Structural Analysis. // Journal of Beijing University of Civil Engineering and Architecture. Vol. 25, No. 2, Jun. 2009.

Сведения об авторах

Сенин Николай Иванович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», директор Института строительства и архитектуры, профессор, кандидат технических наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7 (495) 287-49-12, e-mail: isa@mgsu.ru.

Акимов Павел Алексеевич, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», профессор кафедры информатики и прикладной математики, доктор технических наук, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7 (499) 183-59-94, 183-57-42; e-mail: pavel.akimov@gmail.com, pavel.akimov2@gmail.com

Захарченко Мария Андреевна, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», старший преподаватель кафедры испытаний сооружений, кандидат технических наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, тел./факс: +7 (495) 287-49-12, e-mail: isa@mgsu.ru.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОВРЕМЕННЫХ ДОСТУПНЫХ GPU РЕШАТЕЛЕЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.В. Сидоров

ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются и анализируются существующие свободно распространяемые решатели, использующие для вычислений графическое устройство компьютера. Цель этого анализа – исследование возможностей и ограничений подобных параллельных решателей для решения прикладных задач, сводящихся к решению больших систем линейных алгебраических уравнений. Такие задачи, в основном из области теории сооружений, решаются в Научно-образовательном центре компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» и в Научно-исследовательском центре СтаДиО. Изучены новые возможности по использованию GPU в пакете программ PETSc, а так же проведены сравнительные тесты с использованием GPU и без их использования. Была исследована библиотека программ CUSP, которая специально создавалась для решения задач линейной алгебры при помощи графического устройства компьютера. Рассмотрен новый проект MAGMA, который является аналогом LAPACK для использования на GPU. Исследования проводились в НОЦ КМ МГСУ и на кафедре информатики в строительстве Рурского технического университета в Бохуме (Германия).

Ключевые слова: задачи линейной алгебры, GPGPU (General-purpose computing on graphics processing units), CUDA, параллельные решатели, библиотеки: PETSc, CUSP, MAGMA.

INVESTIGATION OF MODERN FREELY GPU SOLVERS CAPABILITIES FOR PARALLEL COMPUTATIONS

Alexander V. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This article reviews the existing shareware solvers that run on the graphical device of computer. The purpose of this review is to explore the possibilities and limitations of these parallel solvers for linear algebraic problems that arise in the Research and Educational Centre of computer modeling at MSUCE and Research & Engineering Center StaDyO. Explored new possibilities of using a GPU in PETSc suit and compared with the results without using of GPU. Research is carried out the CUSP library, which was created specifically for the problems of linear algebra on GPU. Studied new MAGMA project, which is analogous to LAPACK for the GPU.

Key words: linear algebraic problems, GPGPU (General-purpose computing on graphics processing units), CUDA, parallel solvers, libraries: PETSc, CUSP, and MAGMA.

ВВЕДЕНИЕ

Цель проведенного исследования - обзор и анализ существующих современных свободно распространяемых решателей, использующих для вычисления ресурсы графического устройства, насколько быстро они мо-

гут решать задачи, возникающие при использовании конечно-элементного программного комплекса СтаДиО [1] и что необходимо для организации собственного простого решения, основанного на платформе графического устройства компьютера.

1. ГРАФИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА NVIDIA CUDA

CUDA [2] позволяют получить разработчикам доступ к памяти и к набору виртуальных инструкций параллельных вычислительных элементов графического устройства, поддерживающего произвольные расчеты на видеокартах. При использовании CUDA, новейшие графические устройства NVIDIA становятся доступными для вычислений, подобных тем, которые выполняются на центральном процессоре компьютера. Но в отличие от центрального процессора, у графического устройства параллельная обработка информации заключается в медленном выполнении обработки большого количества одновременных потоков информации, а не в работе с каждым отдельным потоком, но с высокой скоростью. Такой подход к вычислениям при решении обычных задач на графическом устройстве называется GPGPU (GPU общего назначения) [3].

2. ПАКЕТ ПРОГРАММ PETSc

PETSc [4] - набор программ и структур данных для масштабируемых параллельных расчетов, предназначенных к использованию в научных приложениях, основанных на решении дифференциальных уравнений в частных производных. Этот набор программ поддерживает стандарт параллелизации MPI [5], POSIX-реализацию потоков для компьютеров с общей памятью и графические устройства NVIDIA, а также комбинацию POSIX-реализации потоков для компьютеров с MPI-распределенной памятью с MPI-GPU параллелизацией. Пакет PETSc предоставляет свои собственные (непосредственно реализованные в нём) итерационные методы, «свои» предобуславливатели, а так же позволяет использовать «сторонние» прямые методы.

Итерационные методы, реализованные в PETSc: В пакете PETSc реализованы итерационные методы Рундсона, Чебышева, ме-

тод сопряженных градиентов (Conjugate Gradients), метод минимальных остатков (Minimum Residual) и обобщенный метод минимальных остатков (Generalized Minimal Residual method), устойчивая версия метода квадратичных двусопряженных градиентов (Stabilized version of BiConjugate Gradient Squared), метод квазимиимальных остатков с транспонированием (a transpose free Quasi Minimal Residual), метод сопряженных остатков (Conjugate Residuals) и обобщенный метод сопряженных остатков (Generalized Conjugate Residual), метод квадратичных сопряженных градиентов (Conjugate Gradient Squared), метод двусопряженных градиентов (Biconjugate gradient method), гибкий обобщенный метод минимальных остатков (Flexible Generalized Minimal Residual), метод для решения разреженных систем линейных уравнений (Sparse Linear Equations) и для решения разреженных систем линейных уравнений с симметричной матрицей коэффициентов при неизвестных (Sparse Symmetric Equations), метод наименьших квадратов (Least Squares), модификация с сведением к погрешности предыдущих итераций (GMRES with approximations to the error from previous restart cycles), а также неявный метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradient without explicitly forming).

Предобуславливатели, реализованные в PETSc: метод Якоби (Jacobi), метод последовательной верхней релаксации (Successive over Relaxation), блочный метод Якоби (block Jacobi), (Point block Jacobi) и (point block SOR), «весовая» модификация Шварца (additive Schwarz), метод неполной факторизации (Incomplete factorizations), неполной факторизации Холецкого (Incomplete Cholesky factorization), многосеточный метод с предобуславливанием (multigrid preconditioning) и с выравниванием (Balancing Neumann-Neumann).

Прямые решатели, реализованные в PETSc: метод Холецкого (Cholesky), а также модификации «LU», «QR», «XXt and XYt».

Решатели PETSc на GPU

В настоящее время имеется возможность работы с алгебраическими решателями PETSc на графических устройствах Nvidia. Иной раз это обеспечивает альтернативную технологию высокопроизводительного экономического решения.

При работе с GPU PETSc берет за основу шаблонные NVIDIA, библиотеки CUSP и THRUST [6]:

- NVIDIA THRUST – C++ шаблонные заголовки схожие с частью STL;
- NVIDIA CUSP – C++ шаблонные заголовки численных методов линейной алгебры.

Обработка разреженных матриц на GPU:

- Матрицы генерируются на CPU;
- Данные записываются по требованию (либо никогда не переписываются).

На GPU работают все итерационные методы кроме улучшенной устойчивой версии метода квадратичных двусопряженных градиентов (Improved Stabilized version of BiConjugate Gradient Squared). На GPU запускаются предобуславливатели, реализующие алгоритмы Якоби, сглаженного накопления (smoothed agglomeration), SACUSPPOLY, и инверсии разреженных приближений (sparse approximate inverse).

Тестирование PETSc

В качестве тестовой расчётной модели выбрана расчётная схема воздушного бака для АЭС (см. Рис.1). У матрицы коэффициентов при неизвестных разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (матрицы жесткости расчётной схемы воздушного бака) 120 708 строк, 120 708 столбцов и 5 614 198 (11 228 396 в случае несимметричного представления) ненулевых элементов.

В этом тесте относительный допуск (погрешность) сходимости был взят равным $1e-07$. Задача последовательно решалась на CPU и на CPU + GPU, а также с применением MPI-

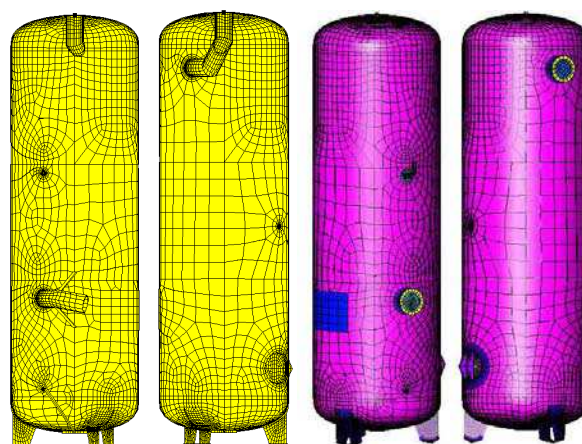


Рис. 1. Конечно-элементная модель воздушного бака для АЭС.

параллелизации с двумя ядрами на CPU и с двумя ядрами на CPU + GPU.

Тестовая система: Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (96 CUDA Cores).

Для решения системы уравнений использовался метод сопряженных невязок с предобуславливателем (preconditioned conjugate residuals method) [7], с привлечением следующих предобуславливателей:

- предобуславливание Якоби (предобуславливание с диагональной градуировкой (diagonal scaling preconditioning));
- предобуславливание SOR (алгоритм Гаусса-Зейделя с последовательной релаксацией (successive over relaxation, Gauss-Seidel)). Этот алгоритм не является действительной параллельной версией метода SOR, а реализуется как блочный метод Якоби с использованием алгоритма SOR в каждом блоке.

Результаты с использованием предобуславливателя Якоби показывают, что последовательный режим GPU + CPU примерно в 2 раза быстрее, чем отдельная реализация на CPU. MPI-параллелизация напротив замедляет режим CPU + GPU, но ускоряет режим с отдельным использованием только CPU.

Результаты с использованием предобуславливателя SOR демонстрируют (см. Рис.2), что этот предобуславливатель без каких либо

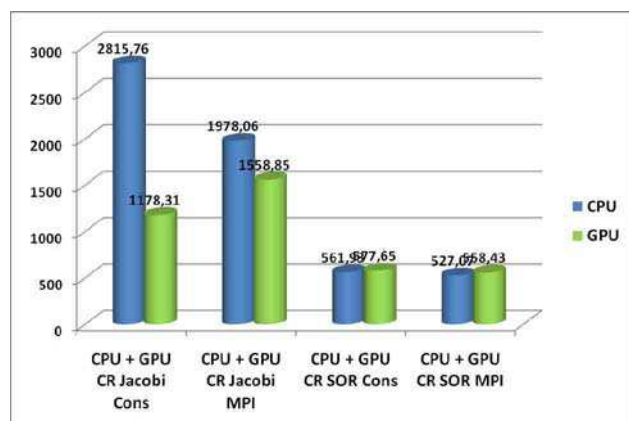


Рис. 2. Гистограмма результатов теста.

режимов оптимизации для GPU решает систему уравнений гораздо быстрее, чем она решается с предобуславливателем Якоби, реализующим оптимизацию под GPU-параллелизацию, и что впереди предстоит все еще много работы, связанной с разработкой и развитием GPU решателей.

3. БИБЛИОТЕКА CUSP

Cusp [8] – библиотека алгоритмов и программ для решения задач линейной алгебры, учитывающих разреженность матриц, а также для вычислений графов на CUDA. Cusp обеспечивает гибкий, высокоуровневый интерфейс для работы с разреженными матрицами для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами коэффициентов.

Cusp предоставляет поддержку чтения, хранения и записи матриц в формате MatrixMarket.

Cusp дает возможность использования различных итерационных методов для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами. При этом поддерживаются следующие итерационные методы:

- Метод сопряженных градиентов (CG);
- Метод двусопряженных градиентов (BiCG);
- Устойчивый метод двусопряженных градиентов (BiCGstab);

- Обобщенный метод минимальных остатков (GMRES);
- Метод сопряженных градиентов «с мультимассами» (CG-M);
- Устойчивый метод двусопряженных градиентов «с мультимассами» (BiCGstab-M).

Использование предобуславливателей – это путь повышения скорости сходимости итерационных решателей средствами математики. Хороший предобуславливатель ускоряет вычисление и в некотором смысле аппроксимирует обратную матрицу. Библиотека Cusp поддерживает такие предобуславливатели, как:

- Алгебраический многосеточный предобуславливатель (AMG), основанный на сглаженном агрегировании;
- Предобуславливатель с обратным приближением (AINV);
- Диагональный предобуславливатель.

Тестирование библиотеки CUSP

Выбранная тестовая модель “Tab” – это расчёт достаточно простого объекта, похожего на табуретку. Размер матрицы жесткости сформированной расчётной схемы: 678 строк и 678 столбцов, в матрице 2331 (4662 в случае несимметричной версии) ненулевых элементов. Относительная погрешность для выполнения условия сходимости взята равной 10^{-7} , максимальное количество итераций назначено равным 5000. Конфигурация системы: Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (96 CUDA Cores).

Результаты, представленные в таблице на следующей странице, демонстрируют, что некоторые решатели и все предобуславливатели, которые предоставляет библиотека CUSP, плохо сориентированы (плохо совместимы) на операции с матрицами коэффициентов при неизвестных (матрицами жесткости) характерной структуры, получаемыми при реализации метода конечных элементов. Но сама библиотека заслуживает дальнейшего изучения.

	No Preconditioner	Smoothed Aggregation algebraic multigrid preconditioner	Diagonal preconditioner
Conjugate Gradient method	Successfully converged after 1760 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Biconjugate Gradient method	Successfully converged after 1765 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Biconjugate Gradient Stabilized method	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations	Failed to converge after 5000 iterations
Generalized Minimum Residual method	Failed to converge after 5000 iterations	nan	nan

4. БИБЛИОТЕКА MAGMA

Проект создания и развития библиотеки MAGMA (Матричная Алгебра на GPU и Многоядерные Архитектуры) [9] ставит своей целью разработку компактной библиотеки решения задач линейной алгебры, схожей с библиотекой LAPACK, но предназначенной для разнородных/гибридных компьютерных архитектур, начиная с современных "Многоядерных+GPU" систем.

Настоящие исследования библиотеки MAGMA основываются на идее, что для решения сложных проблем, возникающих при использовании гибридной среды, оптимальные программные решения должны идти сами к гибридации, сочетая в рамках единой структуры преимущества различных алгоритмов.

MAGMA 1.0 предполагает для использования один NVIDIA GPU, поддерживающий CUDA. Эта возможность расширяется версией 0.2 с добавлением поддержки графических устройств Fermi.

В библиотеку входят программы, реализующие следующие алгоритмы:

- Алгоритмы LU, QR, а также алгоритм факторизации Холецкого, с арифметическими действиями, как над действительными, так и над комплексными числами;

- Алгоритм Эссенберга (Hessenberg), двухдиагональное и трехдиагональное исключения, реализующие арифметические действия, как над действительными, так и над комплексными числами;

- Линейные решатели на основе алгоритмов LU, QR и алгоритма факторизации Холецкого, с арифметическими действиями, как над действительными, так и над комплексными числами;

- Решатели для задач о собственных и сингулярных значениях с арифметическими действиями, как над действительными, так и над комплексными числами;

- Решатели для обобщенной задачи о собственных значениях, определенной по Эрмиту;

- Решатели на основе алгоритмов LU, QR и алгоритма факторизации Холецкого со смешанной оценкой сходимости, с арифметическими действиями, как над действительными, так и над комплексными числами;

- Алгоритмы MAGMA BLAS с арифметическими действиями над действительными числами с одинарной и двойной точностью, включающими алгоритмы gemm, gemv, symv, and trsm.

Тестирование библиотеки MAGMA

Для тестирования взята задача DGEV (эталонный тест LAPACK). В этой тестовой задаче с двойной точностью решаются системы уравнений $A * X = B$, где A это матрица

размером M-на-N, а X и B - матрицы размером N-на-NRHS.

$$\text{MFLOPS} = \frac{(1 * 10^{-6}) * [(\frac{2}{3}) * N^3 + 2 * N^2]}{(\text{CPU seconds})}$$

GPU Результаты, полученные на системе Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.3GHz, 4 Gb RAM, Nvidia 540M 1 Gb (96 CUDA Cores):

N	NRHS	GFlop/s	b-Ax / A
1024	100	8.86	2.819232e-15
2048	100	13.69	2.918877e-15
3072	100	16.48	3.332595e-15
4032	100	17.37	3.070450e-14
5184	100	18.01	1.191584e-14
6016	100	18.36	1.037878e-14
7040	100	18.61	2.298301e-14
8064	100	18.94	7.340451e-15
9088	100	19.08	2.057905e-15
10112	100	19.20	3.002565e-15

Результаты, показанные на Рис. 3, получены на одном процессоре одного из вычислительных узлов кластера Hoffman2 (код является однопоточным и статично связанным).

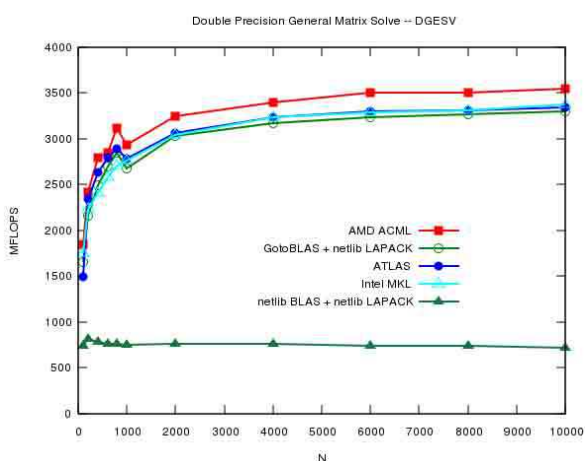


Рис. 3. Диаграмма теста DGESV на одном процессоре одного из вычислительных узлов кластера Hoffman2

Этот тест показывает, что GPU-параллелизация является хорошим направлением в ус-

корении решения систем линейных алгебраических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Научно-исследовательский центр СтаДиО <http://www.stadyo.ru/>
2. CUDA Zone http://www.nvidia.ru/object/cuda_home_new_ru.html
3. GPGPU <http://ru.wikipedia.org/wiki/GPGPU>
3. PETSc: Home Page <http://www.mcs.anl.gov/petsc/>
4. Message Passing Interface http://ru.wikipedia.org/wiki/Message_Passing_Interface
5. thrust - Code at the speed of light <http://code.google.com/p/thrust/>
6. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, Magnus R. Hestenes and Eduard Stiefel, Journal of Research of the National Bureau of Standards Vol. 49, No. 6, December 1952 Research Paper 2379 pp. 409—436.
7. cusp-library - Generic Parallel Algorithms for Sparse Matrix and Graph Computations <http://code.google.com/p/cusp-library/>
8. MAGMA <http://icl.cs.utk.edu/magma/>
9. Alexander M. Belostotsky, Sergey L. Vasilyev, Alexander V. Sidorov. Solving of large algebraic problems by parallel algorithms. Leading program packages features and own investigation. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 6, Issue 1&2, 2010, pp. 65-65.

Сидоров Александр Владимирович, аспирант, младший научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 929-50-17; E-mail: sidcmc@gmail.com, nicc@mgso.ru

