

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 7 *2011*

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
(Deputy editor-in-chief)
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Radii P. Fedorenko, Professor
Institute of Applied Mathematics
Russian Academy of Sciences
4, Miusskaya Pl., Moscow, Russia

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
ASV Publishing House
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University
of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Department of Mechanical
Engineering
Massachusetts Institute of
Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakov, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosy
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics
and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universitat
31a, Windmuhlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Elena A. Korol, Professor
Department of Construction
Technology; Moscow State Univ. of
Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mecanique et Tecnologic
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du President Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkechoulunkatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. Fur Haustatiken und
Festigkeitslehre
Technische Universitaet Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Andrey B. Pavlov, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,
Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics
and Mathematics, Moscow State
Univ. of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Bernhard A. Scfhrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.
Via
Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obraztsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for
Technical Education, New Delhi,
India

Waclaw Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmers University of Technology
S-41296 Goteborg, Sweden

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researchers and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет (Издательство АСВ) и Издательство Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк).

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

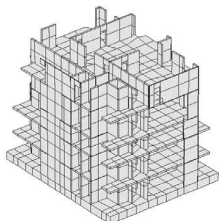


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette** with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- 1) Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Deputy Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательнее нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

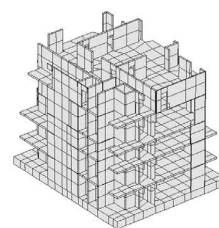


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ **Главный редактор**

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ **Технический редактор**

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ГОУ ВПО Московский государственный
строительный университет,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

- 1) Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- 2) Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- 3) Кайтуков Таймураз Батразович, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 7, Issue 1

2011

TABLE OF CONTENTS

Limit State and Zonal Disintegration of Rock Mass near Deep-level Openings <i>Qi Chengzhi, Chen Canzhou, Wang Mingyang, Qian Qihu</i>	<u>13</u>
Reflection and scattering of seismic waves by seismic barriers <i>Sergey V. Kuznetsov</i>	<u>23</u>
Non-Stationary Heat Transfer in Two-Layer Unlimited Plate at Combined Boundary Conditions of Second and Fourth Types <i>S.V. Fedosov, N.K. Anisimova, Yu.A. Shchepochkina, Yu.V. Shishkov</i>	<u>33</u>
Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами Часть 1: Системы первого порядка <i>П.А. Акимов, В.Н. Сидоров</i>	<u>39</u>
Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами Часть 2: Системы второго порядка <i>П.А. Акимов, В.Н. Сидоров</i>	<u>47</u>
Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами Часть 3: Уравнения произвольного порядка <i>П.А. Акимов, В.Н. Сидоров</i>	<u>57</u>
Концепция внедрения системы поддержки принятия решений в практику проектирования строительных конструкций с учетом риска их лавинообразного разрушения <i>В.Н. Алёхин, А.Б. Ханина, А.Г. Павленко</i>	<u>64</u>
Моделирование равнонапряженного цилиндра, подверженного силовым и температурным нагрузкам <i>В.И. Андреев, А.С. Минаева</i>	<u>71</u>

**Реализация и верификация методов субмоделирования
и динамического синтеза подконструкций в универсальных и
специализированных программных комплексах** **76**

А.М. Белостоцкий, А.Л. Потапенко

**Алгоритм автоматизированного проектирования механических систем
с оптимальными параметрами при импульсных воздействиях** **85**

Т.Л. Дмитриева, В.В. Безделев

**Дальневосточный опыт проектирования и строительства
высокой армогрунтовой конструкции** **95**

С.А. Кудрявцев, Ю.Б. Берестяный, Е.В. Федоренко, Т.Ю. Вальцева, Р.Г. Михайлин

LIMIT STATE AND ZONAL DISINTEGRATION OF ROCK MASS NEAR DEEP-LEVEL OPENINGS

Qi Chengzhi¹, Chen Canshou², Wang Mingyang², Qian Qihu²

¹ School of Civil and Communication Engineering, Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing, CHINA

² PLA University of Science and Technology, Nanjing, CHINA

ABSTRACT: When the initial geostress in deep level rock mass exceeds the uni-axial strength limit of rock mass, zonal disintegration phenomenon near underground opening arises. This phenomenon is quite different from the elasto-plastic solution of the problem according to classical elasticity and plasticity theories. This paper represents an attempt to study the formation mechanism of rock mass zonal disintegration near the deep level openings. At first the definition of great depth is discussed according to classical elasticity and plasticity theory. It is shown that the depth at which complete plasticity takes place can be regarded as the definition of great depth. Experiments on rock samples showed that deformation and fracture process of rock can be looked at as multi-stage phase transition process. On this basis the rock mass zonal disintegration is studied from the viewpoint of continuous phase transition. The Ginzburg-Landau expansion of Gibbs thermodynamic potential is used. Governing equation with respect to order parameter is derived, and the plastic deformation near the opening is determined. The result agrees with the experimental data well

Key words: deep level opening, rock mass zone disintegration, continuous phase transition

1. INTRODUCTION

When the initial geostress in rock mass at great depth exceeds the uni-axial strength limit of rock mass, the phenomenon of zonal disintegration near underground opening arises. Anomaly of this phenomenon lies in the localization of fracture of rock mass in discrete zones which alternate with relatively no-fractured zones (Fig.1). These zones repeat the form of the contour of underground openings.

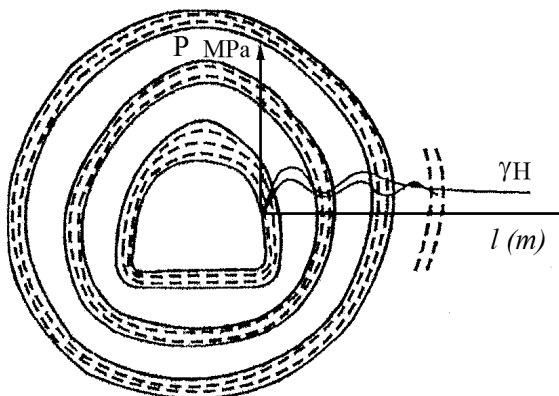


Figure 1. The phenomenon of rock mass zonal disintegration near deep level opening

The phenomenon of discrete fracturing ahead of stop faces in mining openings was firstly discovered by G.R.Adams, A.J.Jager (1980) [1], and the phenomenon around the deep level opening was firstly discovered in experiments and in situ observations by Yu.S. Kutsnetsov, E.I.Shemyakin, M.V.Kurlenia, V.N.Oparin and et al (1983) [2, 3]. Systematical in situ, experimental and theoretical studies were undertaken by E.I.Shemyakin, M.V.Kurlenia, V.N.Oparin and et al [3, 4,5,6,7]. E.I.Shemyakin, M.V.Kurlenia, V.N.Oparin and others think that this phenomenon is caused by the splitting of rock mass along the direction of the maximum tangential compression stress when the lateral compression stresses are small[4,5,6]. When splitting occurs, “false” opening contour forms, and the splitting process repeats. The whole process stops when the condition that the stress in rock mass exceeds the uni-axial strength of rock mass is not satisfied. Experiments showed that duo to the existence of discontinuity in rock mass, the deformation of rock mass does not satisfy the deformation compatibility condition of Saint-Venant, and the condition of smallness of the lateral compression can always be satisfied [7]. The phenomenon of zonal disintegra-

tion ahead of stop face was analyzed from the point of view of geological structure by V.N.Odintsev [8,9]. He thinks that the disintegration zones appear due to the formation of new structures by the dynamic fracture when the instable state is reached in the quasi-static deformation process in the rock mass. Such structures maintain stable in definite range of stress in the following loading process. Such a process repeats and the phenomenon of disintegration takes place. Gusev M.A. and Paroshin A.A. used the non-Euclidean model to study the mechanism of the formation of zonal disintegration [10]. As a parameter to describe the disintegration they used the parameter of non-compatibility of deformation which has the meaning of scalar curvature \square trace of Ricci tensor. On the basis of irreversible thermodynamics they derived the governing equation and obtained the periodic distribution of the parameter of non-compatibility of deformation.

The phenomenon of zonal disintegration is similar to the temporal-spatial structures in some physical-chemical processes. From the viewpoint of the relationship between temporal-spatial parameters the phenomenon of zonal disintegration is apparently the solution of the equations similar to that in quantum mechanics. Experiments showed that the deformation and fracture process of rock under loading can be looked at as multi-stage process of continuous phase transition [11]. From the viewpoint of non-equilibrium thermodynamics deep level rock mass is in strong non-equilibrium state after the excavation of the openings. According to the concepts of synergetics in strong non-equilibrium state self-organization process takes place which results in the dissipative structures [12]. Self-organization process proceeds in time and space. It is evident that classical elastic-plastic solutions do not take into account this process, therefore they can be considered as the first approximation of the solution of the problem.

In physics the theory of phase transition of the second order developed by L.D. Landau successfully explain the phenomena of supercon-

ductivity and superfluidity [13,14]. A.A. Abrikosov predicted successfully the vortex structure in superconductors of second kind [15]. If the deformation process of rock under loading can be looked as multi-stage process of phase transition, then this process should obey to the law of phase transition. This analogy stimulates the authors to study the phenomenon of zonal disintegration with the help of the phase transition theory. Therefore in the present paper an attempt is made to study the phenomenon of zonal disintegration from the point of view of phase transition.

2. DEFINITION OF GREAT DEPTH FROM THE VIEW-POINT OF CLASSICAL PLASTICITY THEORY

We start with the study of the stress-strain state of rock mass around deep level underground opening.

The circular underground opening without lining is subjected to external loading of magnitude $\sigma_\infty = \gamma H$, where γ is the density of rock mass, H is the depth of opening. Under elastic condition, the stresses and strains near the opening are determined by follows (here compressive stresses are considered as positive):

$$\sigma_{r/\varphi} = \sigma_\infty \mp (\sigma_\infty - q)(a^2/r^2) \quad \square \quad \sigma_z = \sigma_\infty \quad (1)$$

$$\varepsilon_{r/\varphi} = \mp \frac{\sigma_\infty a^2}{2\mu_0 r^2}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (2)$$

Where $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ are stress and strain tensors in polar coordinate system r, φ and z , σ_∞ is the hydro-static pressure at infinity; q is the external pressure acting on the wall of opening; μ_0 is the shear modulus of rock mass; a is the radius of circular opening; r is current coordinate.

In this case we have three mutually perpendicular maximum shear stresses:

$$T = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2}; T_1 = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}; T_2 = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_z}{2} \quad (3)$$

As a simple yield condition we take the Tresca's criterion, which is shown in Fig.2. The yield shear stress of the ideal plasticity is denoted by T_0 and the yield stress at uni-axial compression is denoted by σ_0 . With the depth, the principal shear stresses increase gradually. When $T = T_0$, yield arises at the wall of opening at first. In this case we have

$$T = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2} = \sigma_\infty = T_0 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (4)$$

i.e. when

$$\sigma_\infty = T_0 = \sigma_0/2 \quad (5)$$

yield arises in the wall of opening at first. According to S.A.Khastianovich and E.I.Shemyakin [16], the plasticity is considered as partial when only T reaches yield limit.

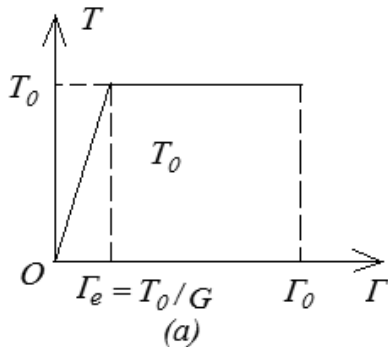


Figure 2. Stress-strain dependence for ideal plasticity

With the further increase of the depth, the yield condition is also satisfied in another plane of maximum shear stress:

$$T_1 = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \square \frac{\sigma_\infty}{2} = T_0 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (6)$$

According to the conception of S.A.Khastianovich and E.I.Shemyakin, the plasticity is complete when sliding takes place in 2 planes of maximum shear stress. In this case besides the formation of slip lines in plane r, φ , the slip lines arise in r, z plane also. And rock mass is cut into blocks and dynamic events such as rock-bursts and the gas extrusion etc. under disturbance of external factors take place easily. As a result we have the next relationship between σ_∞ and σ_0

$$\sigma_\infty = 2T_0 = \sigma_0 \quad (8)$$

Therefore from the viewpoint of occurrence of dynamic phenomena, great depth can be referred to the depth at which the initial geostress of rock mass reaches the uni-axial strength of rock mass.

As the governing parameter of strain we take the maximum shear strain

$$\Gamma = \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi \quad (9)$$

If, as a model of rock mass, we take the ideal plastic model, then rock mass enters plastic state when T attains T_0 . But the rock mass fractures only when the maximum strain Γ reaches the limit magnitude Γ_0 , i.e.

$$\Gamma = \Gamma_0 \quad (10)$$

For brittle rock $\Gamma_0 = \Gamma_e$, where Γ_e is the limit of elastic deformation.

When the rock mass near underground opening yields, the stresses in plastic zone can be expressed as:

$$\sigma_r = 2T_0 \ln \frac{r}{a}; \sigma_\varphi = 2T_0 \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) \quad (11)$$

And the radius of plastic zone is determined by the next equation:

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = e^{\frac{\sigma_\infty - T_0}{T_0}} \quad (12)$$

i.e. the radius of plastic zone grows rapidly with the depth and correspondingly with the stress.

When $\sigma_\infty = 2T_0 = \sigma_0$, from Equation (12) we obtain the radius of plastic zone: $c = 1.65a$.

Based on the assumption of elastic dilatation and the V.Karman's hypothesis, the displacement in the plastic zone is determined as [17]:

$$U = \frac{T_0(1-2\nu)}{G} r \ln \frac{q}{r} + \frac{D}{r} \quad (13)$$

where D is a constant to be determined by the condition of deformation at boundary $r = c$.

At $r = c$

$$\Gamma = \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = \Gamma = T_0/G \quad (15)$$

The shear deformation and the strain components are expressed as:

$$\Gamma = \Gamma_e \left[-1 + 2\nu + 2(1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right] \quad (15)$$

$$\varepsilon_r = \Gamma_e \left[(1-2\nu) \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right) + (1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right] \quad (16)$$

$$\varepsilon_\varphi = \Gamma_e \left[(1-2\nu) \ln \frac{a}{r} - (1-\nu) \left(\frac{c}{r}\right)^2 \right] \quad (17)$$

When the maximum shear deformation at the opening wall reaches its limit $\Gamma = \Gamma_0$, the opening walls begin to fracture, in this case the radius of plastic zone can be determined from (15)

$$\left(\frac{c_*}{a}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_e} + 1 - 2\nu \right) \quad (18)$$

From (18) we obtain $c_* \approx 2.73a$ when $\Gamma_0/\Gamma_e = 10$ and $\nu = 0.3$. In this case we have

$$\sigma_\infty \approx 3T_0 = 1.5\sigma_0 \quad (19)$$

The deformation at opening wall is expressed as:

$$\Gamma_a = \Gamma_e \left[-1 + 2\nu + 2(1-\nu) e^{\frac{\sigma_\infty - T_0}{T_0}} \right] \quad (20)$$

3. THE FEATURES OF DEFORMATION OF ROCK UNDER EXTERNAL LOADING

Experiments on rock samples showed that [11] upon reaching their maximum values stresses in rock begin to decrease with the growth of deformation because of the initiation of local sliding planes. In these sliding planes in process of the further deformation rock prepares for the microfracture. Therefore, we may relate the plastic deformation with the formation of sliding planes which are close to the maximum shear stress planes. Hence, the dependence of maximum shear stress T on maximum shear deformation Γ contains the basic information on deformation and fracture of rock.

Typical relationship between maximum shear stress T , dilatation θ and maximum shear strain Γ is shown in Fig.3 [11]. The hardening stage follows the elastic stage ($\Gamma < \Gamma_e, T < T_e$), and the softening stage begins at the point $\Gamma = \Gamma_0, T = T_0$. Rock fails when shear deformation attains its limit value T_c . The dilatation of rock decreases up to the elastic limit, but increases beyond this point, and becomes zero at the limit of strength. The absolute growth of dilatation takes place beyond the limit of strength.

Fig.4 represents the kinetic process of crack formation [11], where N/N_{\max} denotes the ratio of current quantity of cracks to the maximum quantity of cracks at the moment of failure of rock.

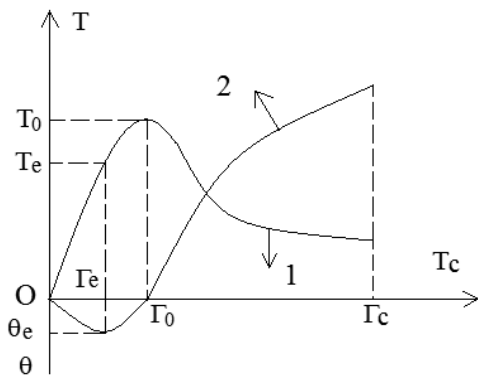


Figure 3. The stress-deformation diagram of rock

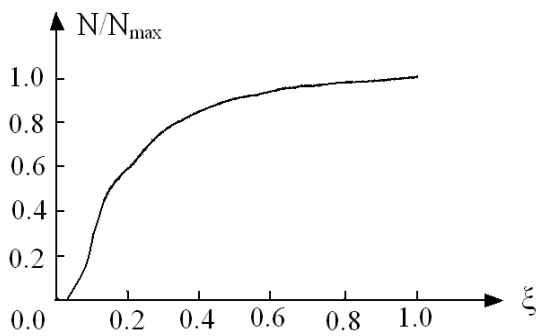


Figure 4. Dependence of N/N_{max} on $\xi = \Gamma/\Gamma_c$

The parameter N/N_{max} may be regarded as the damage parameter ω . In elastic deformation regime the growth of ω is imperceptible. When deformation process enters plastic deformation regime parameter ω grows rapidly. Besides pure shear deformation process, dilatation also contributes to the deformation significantly. Dilatation is accompanied with the loss of bonding and the formation of fracture planes, within which material particles are ground. More complex structures arise in the newly formed structures, and the formation of the more complex structures is accompanied with the change of the stability types. Further, new state appears, in which on the further straining stress decreases. Damage parameter grows quickly beyond the limit of strength, and approaches to 1 after the formation of main cracks. The kinetic process of the development of micro-cracks may be looked at as multi-stage continuous phase transition. Fig.4 reveals some features of continuous phase transition. The transition into stage beyond the

strength limit is accompanied with the change of the stability types; such a change is caused by the strong structural fluctuation. Therefore the arising of inflection point corresponding to the strength limit in the diagram is completely predictable. This fact allows us to use the phase transition theory to study zonal disintegration of rock mass near the deep level opening.

4. ZONAL DISINTEGRATION NEAR DEEP LEVEL OPENINGS AS CONTINUOUS PHASE TRANSITION

In analogy with the phase transition theory of second order, it is convenient to introduce dimensionless parameter of the following form for the description of irreversible deformation:

$$\psi = \frac{\Gamma - \Gamma_e}{\Gamma_c - \Gamma_e} \quad (21)$$

Rock mass has complex structural hierarchy. At different structural levels there exist corresponding structural surfaces. These structural surfaces are the weakened surfaces, in which the deformation and fracture of rock mass mainly concentrate. These structural surfaces are not closed compactly, but have definite width. Naturally, we can suppose that the wider these structural surfaces open, the less the strength of rock mass is. Therefore when the rock mass is subject to external loading the deformation and fracture of rock mass take place at the maximum structural scale level. With the growth of the loading, the less structural scale levels involve in deformation and fracture process.

In physics symmetry is a very important concept. The most common symmetry is the homogeneity and isotropy of space. In mechanics of deformable solids medium with isotropy property shares symmetry feature. Mechanical behavior of such medium is described by two parameters of elasticity. When fracture happens isotropy disappears, and symmetry is broken. Under the action of external load fracture takes

place at the largest scale level. In this case global symmetry of medium is broken. But the formed blocks may be looked as homogeneous and isotropic bodies. In this case symmetry is localized in blocks. With the increase of load the size of consecutively formed blocks gradually decreases. Therefore the fracture process may be looked as process of consecutive breaking and localization of symmetry.

The breakage of the symmetry is accompanied with the irreversible deformation, and the irreversible deformation is accompanied with the dissipation of energy and the formation of dissipative structures [12]. Therefore, according to the concept of physics, ψ may be regarded as the order parameter. Shear stress is the response of rock mass to external action. Rock mass responds not only to the initial defects, but also to the new defects. Therefore we may consider rock mass as the statically conservative system, whose total energy is its potential energy H.

Suppose that equilibrium state corresponds to the minimum of H, then we can obtain the following equilibrium equation:

$$\nabla H = 0 \quad (22)$$

Here we take the thermodynamic potential of the following form:

$$H = V_0 + V_1\psi - \frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{3!}V_3\psi^3 + \dots \quad (23)$$

In correspondence with the peculiarity of the continuous phase transition we have $V_2 > 0$, $V_3 > 0$.

When $\psi \square 0$ the total system is in equilibrium state, function (23) should satisfy the next condition

$$\frac{dH}{d\psi} = \left[V_1 - V_2\psi + \frac{1}{2}V_3\psi^2 + \dots \right]_{\psi=0} = 0 \quad (24)$$

Therefore from (24) we have $V_1 \square 0$. Not losing generality we suppose that $V_0 = 0$.

We can take the potential function ψ of the third order:

$$H = -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{3!}V_3\psi^3 \quad (25)$$

When the rock mass enters limit state, long-range interaction between the particles of rock mass occurs. By analogy with the expansion of Ginzburg-Landau [13] the gradient term should be added to expression (25)

$$H = -\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{3}V_3\psi^3 + \frac{1}{2}C(\nabla\eta)^2 \quad (26)$$

where C is the coefficient, and $C > 0$.

Thus the total potential in the whole area is determined by the following expression

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2}V_2\psi^2 + \frac{1}{3}V_3\psi^3 + \frac{1}{2}C(\nabla\psi)^2 \right] d\Omega \quad (27)$$

According to the fundamental law of Physics, for the stable state medium always chooses the parameters in such a way that to make the free energy minimal.

Take variation of equation (28) with respect to ψ we have

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\Omega} \left[-V_2\psi\delta\psi + V_3\psi^2\delta\psi + C\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta\psi \left[-V_2\psi + V_3\psi^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} C\nabla\psi \nabla(\delta\psi) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Because

$$\nabla(\nabla\psi \cdot \delta\psi) = \nabla^2\psi \cdot \delta\psi + \nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi)$$

we have

$$\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) = \nabla(\nabla\psi \cdot \delta\psi) - \nabla^2\psi \cdot \delta\psi$$

Integrating the second term of (28) by parts and applying Gauss theorem yields

$$\int_{\Omega} C \nabla \psi \cdot \nabla (\delta \psi) d\Omega = \int_{d\Omega} \delta \psi (C \nabla \psi) \vec{n} dS - \int_{\Omega} C \nabla^2 \psi \cdot \delta \psi d\Omega$$

where the first term on the right side in the above equation is the surface integration, dS is the area element, and $d\Omega$ is the surface of the medium. In this case equation (28) takes the following form

$$\delta \Phi = \int_{\Omega} \delta \psi [-V_2 \psi + V_3 \psi^2] d\Omega + \int_{\Omega} C \nabla \psi \nabla (\delta \psi) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \psi [-V_2 \psi + V_3 \psi^2 - C \nabla^2 \psi] d\Omega + \int_{d\Omega} (C \delta \psi \nabla \psi) \vec{n} dS = 0 \tag{29}$$

Because equation (29) is valid for any variation of order parameter $\delta \psi$ and for any point in the medium, the next condition

$$-V_2 \psi + V_3 \psi^2 - C \nabla^2 \psi = 0 \tag{30}$$

and boundary condition

$$(\nabla \psi) \cdot \vec{n} \Big|_{r=a} = 0 \tag{31}$$

must be satisfied.

Because of the axial symmetry of the stress-strain state around the circular opening, we have from (31)

$$C \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} \right) + V_2 \psi - V_3 \psi^2 = 0 \tag{32}$$

Under condition of small deformation, we may ignore the second order term on the right side. In this case we have:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} \right) + D^2 \psi = 0 \tag{33}$$

where $D^2 = V_2 / C$

Equation (34) can be rewritten as

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + D^2 r^2 \psi = 0 \tag{34}$$

Equation (34) is the uniform Bessel equation of the 0 order, whose solution has the following form [19]

$$\psi = C_1 J_0(Dr) + C_2 N_0(Dr) \tag{36}$$

where J_0 and N_0 are the Bessel's function of 0 order and Neumann's function of 0 order respectively.

Expanding boundary condition $(\nabla \psi) \cdot \vec{n} \Big|_{r=a} = 0$ yields

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \sin \theta \Big|_{r=a} = 0$$

Using the next formula of coordinate transformation

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

we can obtain the next equation in polar coordinate system

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \tag{37}$$

Using the following iteration relation

$$\frac{d}{Dr} [J_0(Dr)] = -J_1(Dr)$$

$$\frac{d}{Dr} [N_0(Dr)] = -N_1(Dr)$$

we have

$$\begin{aligned} \psi|_{r=a} &= -D[C_1 J_1(Da) + C_2 N_1(Da)] = 0 \\ C_2 &= -C_1 \frac{J_1(Da)}{N_1(Da)} \end{aligned} \quad (38)$$

Because the shear strain is not designated with positive and minute sign, we can take its absolute value of ψ

$$\psi = \left| C_1 \left[J_0(Dr) - \frac{J_1(Da)}{N_1(Da)} \cdot N_0(Dr) \right] \right| \quad (38)$$

From

$$\psi = \frac{\Gamma - \Gamma_e}{\Gamma_c - \Gamma_e}$$

we have

$$\Gamma = \psi(\Gamma_c - \Gamma_e) + \Gamma_e \quad (39)$$

The selection of parameter C_1 should make the solution at the opening wall coincide with the classical elasto-plastic solution. Parameter D depends on the radius of opening. Its selection should make the period of ψ coincide with the distance of the first zone of disintegration

Taking $Da = 3.2$ (i.e. $D = 3.2/a$), $\nu \approx 0.3$, $\Gamma_c/\Gamma_e \approx 10$, $\sigma_\infty = 3T_0 \approx 1.5 \sigma_0$ using the next equation

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \left| C_1 \left[J_0(Dr) - \frac{J_1(Da)}{N_1(Da)} \cdot N_0(Dr) \right] \right| (\Gamma_c - \Gamma_e) \\ + \Gamma_e &= \Gamma_e \left[-1 + 2\nu + 2(1-\nu)e^{\frac{\sigma_e - T_0}{T_0}} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

we obtain $C_1 \approx 1.862$.

From equation (39) we can determine the distribution of strain around the opening, which is illustrated in fig.5, in which curve 1 denotes the solution of (39), and curve 2 represents the solution of ideal plasticity (15). From Fig.5 it is evi-

dent that there is additional zone of disintegration besides the fracture zone near the opening. This result agrees with the experiment data [1]. The result seems to be absurd at first sight, because the deformation in the areas between disintegration zones is of the level of deformation at yield. But the experiments do show that fracture in areas between disintegration zones is very weak, in these zones cracks orient chaotically, and it seems that they appeared latter as a result of movement of rock mass around the opening toward the center of the opening [4].

It is necessary to point out that, the formation of deformation pattern is a common phenomenon in the deformation process of materials. Experimental observations, prevalent in the present technical literature, show beyond doubt that macroscopically uniform material domains, under surface traction, develop non-uniform and often highly localized deformation fields contrary to the prediction of "local" theories [19]. Therefore the formation of zonal disintegration is not an occasional phenomenon, but is the realization of the general law in the nature.

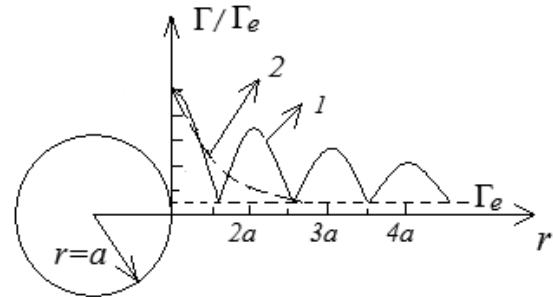


Figure 5. Plastic deformation distribution in rock mass around the opening (curve 1 – solution of Eq.(39); curve 2 – solution of Eq. (15))

5. CONCLUSION

This paper represents an attempt to study the formation mechanism of rock mass zonal disintegration near the deep level mining opening. At first the definition of great depth from the viewpoint of classical elasticity and plasticity theory

is discussed. It is shown that the depth at which complete plasticity takes place can be regarded as the definition of great depth. Experiments on rock samples showed that deformation and fracture process of rock can be looked at as multi-stage continuous phase transition process. Based on continuous phase transition theory rock mass zonal disintegration is studied. The Ginzburg-Landau expansion of Gibbs thermodynamic potential is used. Governing equation with respect to order parameter is obtained, and the plastic deformation near the opening is determined. The result agrees with the experimental data well.

ACKNOWLEDGEMENT

Financial support from the 973 National Scientific Program (№ 2010CB732003), National Science Fund of China (NSFC) (No.50825403) and Beijing Science Fund (No.KZ200810016007), the support and helpful consultation given by academician of Russian Academy of Science E.I. Shemyakin are gratefully acknowledged.

REFERENCES

1. **Adams G.R., Jager A .J.** Petroscopic observations of rock fracturing ahead of stop faces in deep-level gold mines, *J.The South Africa Institute of Mining and Metallurgy*, 1980, V.80, №6, 204-209.
2. **Glushinkhin F.P., Kutsnetsov G.N., Shklyarsky M.F. and et al.** Modeling in geo-mechanics. Moscow, Nedra, 1991.
3. **Shemykin E.I., Fisenko G.N., Kurlenja M.V. and et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part I: Data of in situ observations. *J. Soviet Mining Science*, 1986, №4, 3-13.
4. **Shemykin E.I., Fisenko G.N., Kurlenja M.V. and et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part II: The fracture of rock in models from

- equivalent materials. *J. Soviet Mining Science*, 1986, №4, 3-15.
5. **Shemykin E.I., Fisenko G.N., Kurlenja M.V. and et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part III: Theoretical representation. *J. Soviet Mining Science*, 1987, №1, 3-8.
6. **Shemykin E.I., Fisenko G.N., Kurlenja M.V. and et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part IV: Practical application. *J. Soviet Mining Science*, 1989, №4, 3-9.
7. **Kurlenja M.V., Oparin V.N., Bobrov G.F., et al.** On splitting effect in zones of supporting pressure, *J. Mining Science*, 1995, №5, 3-11.
8. **Odintsev V.N.** On mechanism of rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. *J. Mining Science*, 1994, №4, 10-19.
9. **Odintsev V.N.** Breaking off fracture of rock mass. Moscow, Press of IPKON RAS, 1996.
10. **Gusev M.A., Paroshin A.A.** Non-Euclidian model of rock-mass zone disintegration near underground mining opening, *Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, V.42, №1, 147-156.
11. **Adigamov N.S., Rudaev Ya. I.** Equation of state with the consideration of softening of material. *J.Mining Science*, 1999, №4, 24-32.
12. **Haken H.** Advanced synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
13. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Statistical physics, part I. Beijing World Publishing Corporation, Beijing, 1999.
14. **Ginzburg V.L.** Nobel lecture: On superconductivity and superfluidity as well as on the “physical minimum” at the beginning of the XXI century. *Review of Modern Physics*, 2004, V. 76, 981-998, July.
15. **Abrikosov A.A.** Nobel lecture: Type II superconductor and the vortex lattice. *Review of Modern Physics*, 2004, V. 76, 975-979, July.

16. **Khristianovich S.A., Shemyakin E.I.** On theory of ideal plasticity, *Solid Mechanics*, 1967, №4, 86-97.
17. **Shemyakin E.I.** Two problems of rock mechanics related with extraction of the deep level deposit of ore and coal. *J. Soviet Mining Science*, 1975, №6, 29-45.
18. **Asmar N.H.** Partial differential equation with Fourier series and boundary value problems, Beijing, China Machine Press, 2005.
19. **Valanis K.C.**, A gradient thermodynamic theory of self- organization. *Acta Mechanica*, 1998, 127, 1-23.

Qi Chengzhi, School of Civil and Communication Engineering, Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing, P.R.China, 100044;
E-mail: qichengzhi@mail.ru

Chen Canshou, PLA University of Science and Technology, 210007, Nanjing, P.R.China

Wang Mingyang, PLA University of Science and Technology, 210007, Nanjing, P.R.China

Qian Qihu, PLA University of Science and Technology, 210007, Nanjing, P.R.China

REFLECTION AND SCATTERING OF SEISMIC WAVES BY SEISMIC BARRIERS

Sergey V. Kuznetsov

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The basic idea of seismic barrier is to protect an area occupied by a building or a group of buildings from seismic waves. Depending on nature of seismic waves that are most probable in a specific region, different kinds of seismic barriers are suggested. For example, vertical barriers resembling a wall in a soil can protect from Rayleigh and bulk waves. The FEM simulation reveals that to be effective, such a barrier should be (i) composed of layers with contrast physical properties allowing “trapping” of the wave energy inside some of the layers, and (ii) depth of the barrier should be comparable or greater than the considered seismic wave length. Another type of seismic barrier represents a relatively thin surface layer that prevents some types of surface seismic waves from propagating. The ideas for these barriers are based on one Chadwick’s result concerning non-propagation condition for Rayleigh waves in a clamped half-space, and Love’s theorem that describes condition of non-existence for Love waves. The numerical simulations reveal that to be effective the length of the horizontal barriers should be comparable to the typical wavelength.

Key words: Barrier, seismic wave, bulk wave, Rayleigh wave, Love wave

INTRODUCTON

Methods of seismic protection.

Generally, current approaches for preventing failure of structures due to seismic activity can be divided into two groups: (i) approaches for creating seismically stable structures and joints; this group contains different methods ensuring either active or passive protection; and (ii) approaches for creating a kind of seismic barrier preventing seismic waves from transmitting wave energy into a protected region.

While the first group includes a lot of different engineering approaches and solutions, the second one contains very few studies; see Takahashi et al. (2001) and more recent works by Motamed et al. (2008), Kusakabe et al. (2008). The proposed research belongs to the second group.

Possible types of wave barriers.

The considered seismic barriers can be of two types: vertical, aimed to reflect, trap, and dissipate most of the seismic wave energy; and horizontal, based on Chadwick and Smith (1977) and Love (1911) theorems, and aimed to prevent certain types of seismic waves from propagation; see, Fig. 1.

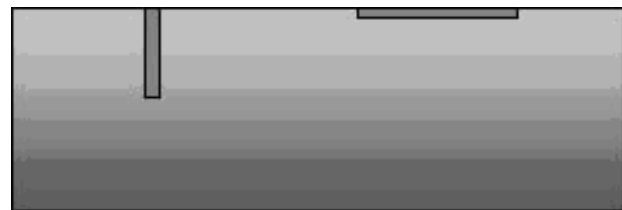


Figure 1. Vertical and horizontal seismic barriers.

Yet another interesting approach is to create a “rough” surface of the half-space to force the propagating Rayleigh wave scatter by caves and swellings; see Fig.2, where part of a free surface with the sinusoidal roughness is pictured. In this respect, the rough surface apparently transforms the elastic half-space into viscoelastic one. To be effective, periodic imperfections should have magnitude and period comparable to the magnitude and wavelength of propagating Rayleigh wave (Sobczyk 1966, Maradudin & Mills 1976, Maradudin & Shen 1980).

In practice, such a rough surface can be achieved by a series of rather deep trenches oriented transversally to the most probable direction of the wave front. Some of obvious deficiencies of this method are: (i) its inability to persist the surface waves other than Rayleigh waves; (ii) protection from Rayleigh waves

travelling only in directions that are almost orthogonal to orientation of the trenches; and, (iii) high sensitivity to the frequency of travelling Rayleigh waves. These shortcomings made an idea of exploiting a rough surface as a kind of protective barrier, unrealizable.

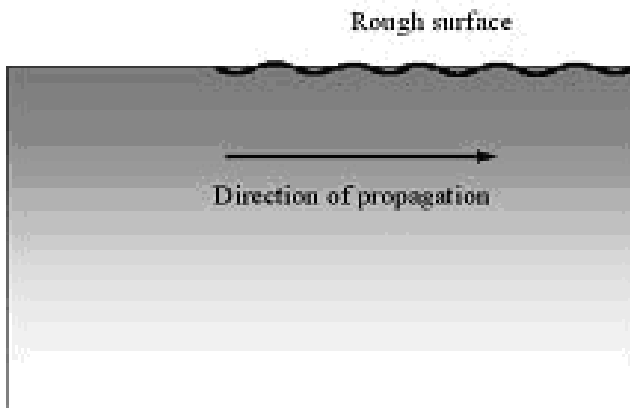


Figure 2. Rough surface acting as seismic barrier against Rayleigh waves.

Vertical barriers.

For bulk waves the most effective vertical barrier would be an empty trench, or a trench filled in with a lighter material than the ambient soil. For such a barrier most of the wave energy would be reflected, as is shown on Fig. 3.

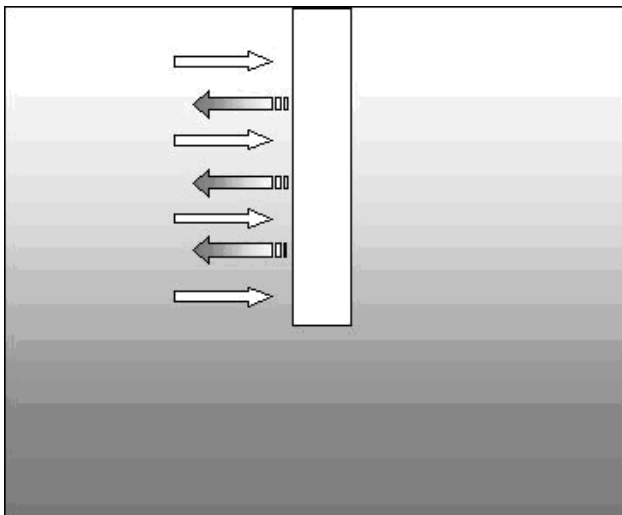


Figure 3. Full reflection of an incident bulk wave from an empty trench.

However, propagating Rayleigh or Love wave will simply overflow an empty trench, as Fig.4 shows.

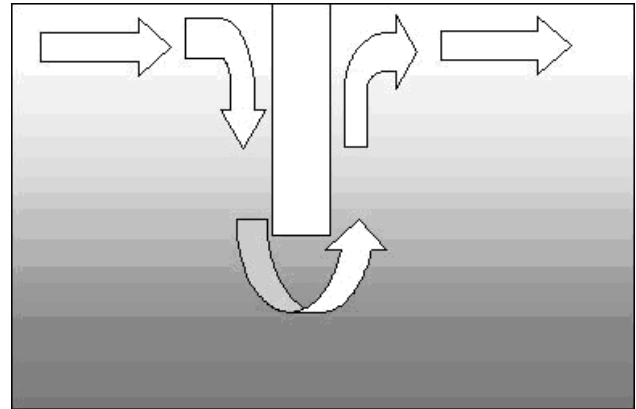


Figure 8. Flow of Rayleigh wave around an empty trench.

Thus, to be effective against the most dangerous types of seismic Rayleigh and Love waves, the vertical barrier should be of a more elaborate type. Possible structures of vertical barriers will be discussed later on.

Horizontal barriers.

Horizontal barriers can be constructed by modifying properties of the outer layer preventing the corresponding surface wave from propagation.

In practice, modifying physical properties of the outer layer can be achieved by reinforcing ground with piles or “soil nails”; see papers where reinforcing was studied for increasing bearing load of the soil (Blondeau 1989, De Buhhan et al. 1989, Abu-Hejleh et al. 2002, Eiksund 2004, Herle 2006).

If distance between piles is sufficiently smaller than the wave length, then a reinforced region can be considered as macroscopically homogeneous and either transversely isotropic or orthotropic depending on arrangement of piles. Of course, homogenized physical properties of the reinforced medium depend upon material of piles, distance between them, and their arrangements.

For stochastically homogeneous arrangement of piles and the initially isotropic upper soil layer,

the reinforced soil layer becomes transversely isotropic with the homogenized (effective) characteristics that can be evaluated by different methods:

Voigt homogenization yields the upper bound for effective characteristics (Bensoussan, Lions, Papanicolaou 1978):

$$\mathbf{C}_{effective} = (1 - f)\mathbf{C}_{soil} + f\mathbf{C}_{piles}, \quad (1)$$

where \mathbf{C}_* are the corresponding elasticity tensors and f is the average volume fraction of piles.

Reuss homogenization. This method is related to constructing the homogenized inverse tensors:

$$\mathbf{S}_{effective} = (1 - f)\mathbf{S}_{soil} + f\mathbf{S}_{piles} \quad (2)$$

yields the lower bound, where \mathbf{S}_* are the corresponding compliance tensors. In the case of pile reinforcement these two methods give too broad “fork” and thus, are not reliable.

Two-scale asymptotic expansion method. Much more accurate results give the two-scale asymptotic expansion method (Bensoussan, Lions, Papanicolaou 1978, Sanchez-Palencia 1983):

$$\mathbf{C}_{effective} = (1 - f)\mathbf{C}_{soil} + f\mathbf{C}_{piles} + \mathbf{K}, \quad (3)$$

where \mathbf{K} is the corrector that is defined by solving the special boundary value problem for a typical periodical cell. It is interesting to note that taking the corrector \mathbf{K} in Eq. (3) as the null tensor we arrive at Voigt homogenization (1).

Methods for constructing the corrector within the two-scale asymptotic expansion methods are discussed by Michel, Moulinec, and Suquet (1999), Cecchi and Rizzi (2001).

THE MAIN TYPES OF SURFACE ACOUSTIC WAVES

In this section we proceed to analyze of the main types of seismic surface waves and conditions for their non-existence

Rayleigh waves.

These waves discovered by Lord Rayleigh (Strutt 1885) propagate on a plane surface of a halfspace; see, Fig. 5 and exponentially attenuate with depth. These waves transmit the most seismic energy and lead to most severe damage in earthquakes.

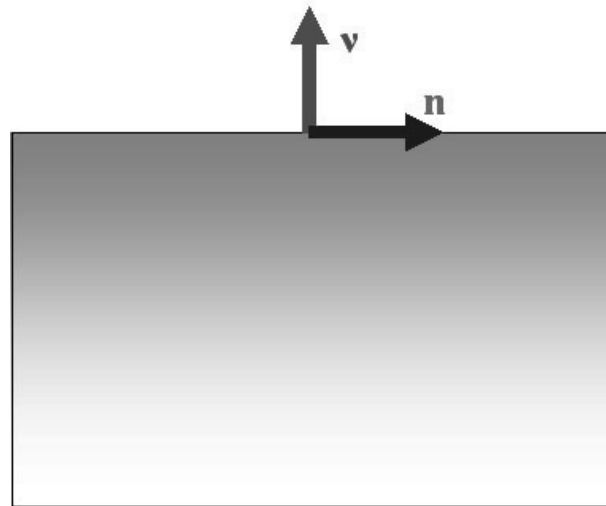


Figure 5. Rayleigh wave in a half-space.

One interesting problem associated with Rayleigh waves is a problem of “forbidden” directions of “forbidden” (necessary anisotropic) materials that does not transmit a Rayleigh wave along some directions. Forbidden materials and forbidden directions have been intensively searched both experimentally and numerically (Lim & Farnell 1968, 1969, Farnell 1970) until mid seventies when the theorem of existence for Rayleigh waves was rigorously proved (Barnett & Lothe 1973, 1974a,b, Lothe & Barnett 1976, Chadwick & Smith 1977, Chadwick & Jarvis 1979, Chadwick & Ting 1987). This theorem states that no materials possessing forbidden directions for Rayleigh waves can exist.

Despite proof of the theorem of existence, a small chance for existence of forbidden materials remained. This corresponded to the case of non-semisimple degeneracy of a special matrix associated with the first-order equation of motion; actually, this matrix is the Jacobian for the Hamiltonian formalism used for Rayleigh wave description. However, it was shown (Kuznetsov

2003) that even at the non-semisimple degeneracy a wave resembling the genuine Rayleigh wave can propagate. Thus, for waves propagating on a homogeneous half-space, no forbidden materials or directions can exist.

Stoneley waves.

These are waves were introduced by Stoneley (1924), and analyzed by (Sezawa & Kanai 1939, Cagniard 1939, Scholte 1947). Stoneley waves propagate on an interface between two contacting half-spaces, Fig 6.

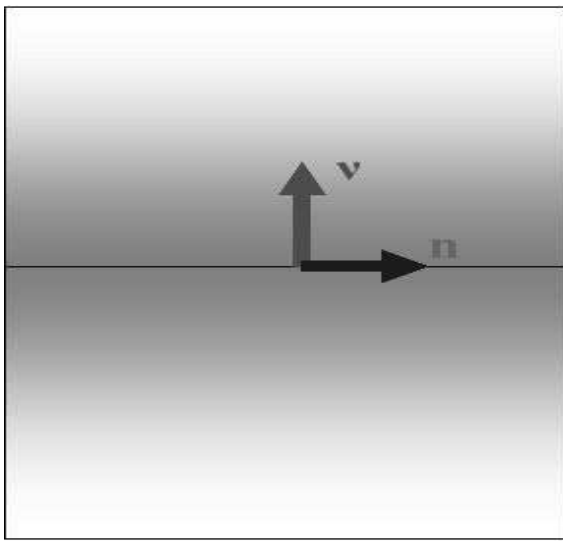


Figure 6. Stoneley wave on the interface between two contacting half-spaces.

In contrast to Rayleigh waves, Stoneley waves can propagate only if material constants of the contacting half-spaces satisfy special (very restrictive) conditions of existence. These conditions were studied by Chadwick & Borejko (1994), Sengupta & Nath (2001).

It should be noted that for the arbitrary anisotropy no *closed analytical* relations between material constants of the contacting half-spaces ensuring existence or non-existence of Stoneley waves have been found (2010).

Love and SH waves.

Love waves (Love, 1911) are horizontally polarized shear waves that propagate on the interface between an elastic layer contacting with elastic

half-space; Fig. 7. At the outer surface of the layer traction-free boundary conditions are generally considered.

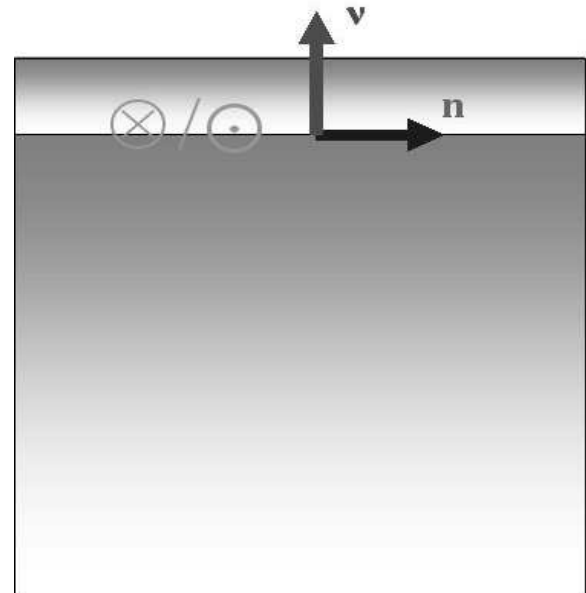


Figure 7. Love wave propagating on the interface.

In the case of both *isotropic* layer and half-space the conditions of existence derived by Love are:

$$c_{layer}^S < c_{halfspace}^S, \quad (4)$$

where c_*^S are the corresponding speeds of the transverse bulk waves. At violating condition (4) no Love wave can propagate. For the case of both anisotropic (monoclinic) layer and a half-space the condition of existence is also known (Kuznetsov 2006a).

SH waves resemble Love waves in polarization, but differ in absence of the contacting half-space. At the outer surfaces of the layered plate different boundary conditions can be formulated (Kuznetsov 2006b). In contrast to genuine Love waves, the SH waves exist at any combination of elastic properties of the contacting layers.

Besides Love and SH waves a combination of them can also be considered. This corresponds to a horizontally polarized wave propagating in

a layered system consisting of multiple layers contacting with a half-space. Analysis of conditions of propagation for such a system can be done by applying either transfer matrix method (Thomson 1950, Haskell 1953), known also as the Thomson-Haskell method due to its originators; or the global matrix method mainly developed by Knopoff (1964).

At present (2010) no closed analytical conditions of existence for the combined Love and SH waves propagating in anisotropic multilayered systems are known; however, these conditions can be obtained numerically by applying transfer or global matrix methods; see (Kuznetsov 2006a, b; Djeran-Maigre & Kuznetsov 2008).

Different observations show that genuine Love and the combined Love-SH waves along with Rayleigh and Rayleigh-Lamb waves play the most important role in transforming seismic energy in earthquakes (e.g. Agnew 2002, Braitenberg & Zadro 2007). But, as we have seen, there is a relatively simple (at least from a theoretical point of view) method for stopping Love and the combined Love and SH waves by modifying the outer layer in such a way that conditions of existence (4) are violated.

Lamb and Rayleigh-Lamb waves.

Lamb waves (Lamb, 1917) are dispersive waves propagating in a homogeneous plate and (if a plate is isotropic) polarized in the sagittal plane, similarly to polarization of the genuine Rayleigh waves. It is known (Lin & Keer 1992, Ting 1996) that Lamb waves can propagate at any anisotropy of the layer and at traction-free, clamped, or mixed boundary conditions imposed on the outer surfaces of the plate. The same result can be extrapolated to a layered plate containing multiple anisotropic homogeneous layers in a contact (Ting 2002). Thus, for Lamb waves no forbidden materials exist.

More interesting from seismological point of view are Rayleigh-Lamb waves; see Fig.8. These are dispersive waves propagating in a layered plate contacting with a (homogeneous) halfspace. Rayleigh-Lamb waves in isotropic media are polarized in the sagittal plane defined

by vectors \mathbf{v} (normal to a median plane) and \mathbf{n} (direction of propagation), as Lamb and Rayleigh waves. Needless to say that Rayleigh-Lamb waves are much more difficult for theoretical studies than Rayleigh or Lamb waves.

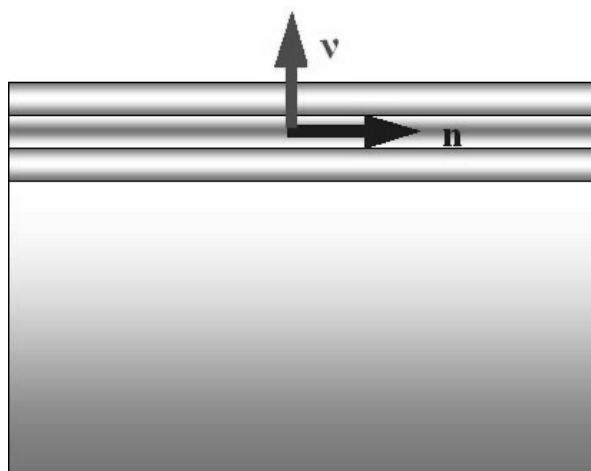


Figure 8. Rayleigh-Lamb waves.

SEISMIC BARRIERS

Herein, we present some results on numerical simulation of propagating seismic waves and their interaction with seismic barriers. The presented results were obtained by the explicit FE code implemented on a cluster and a metacluster computers.

Vertical barriers.

Theoretical analysis and numerical simulations reveal that to effectively protect from Rayleigh and Rayleigh-Lamb waves a vertical barrier (Fig.1) should satisfy several conditions: (i) the barrier should have a composite layered structure composed of vertical layers with contrast physical properties; (ii) depth of the barrier should be comparable to the wavelength of the most probable seismic wave; (iii) the protected zone should be completely surrounded by a barrier to avoid flowing of the seismic wave inside the protected zone.

Henceforth, all the numerical simulations are done with Abaqus/Explicit® CAE software.

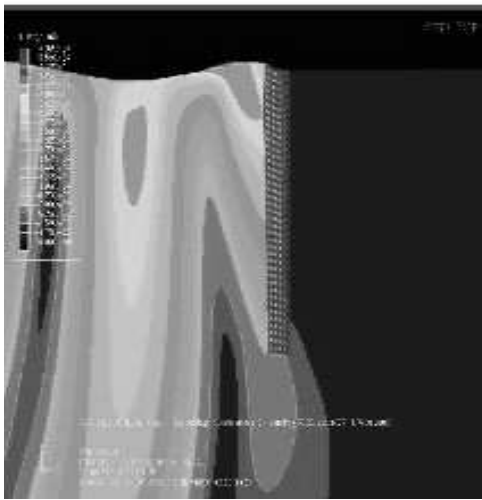
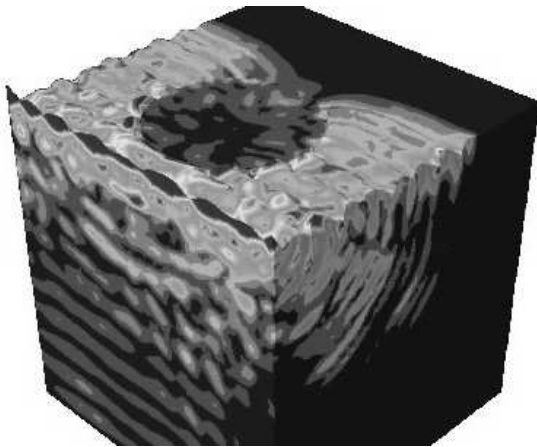


Figure 9. Round-shaped composite vertical barrier protecting from Rayleigh waves: a) 3D model; b) cross-section.

Figure 9 demonstrates a movie frame related to numerical simulation of a propagating seismic Rayleigh wave interacting with a round-shaped vertical barrier; the latter completely surrounds the protected region. The ratio of the wavelength to depth of the barrier was taken ~ 0.8 . This corresponded to the reference frequency about 7 Hz and the Rayleigh wavelength 20m (speed of Rayleigh wave was 140 m/sec; speed of the transverse bulk wave was ~ 180 m/sec); diameter of the protected region was 120m. Inside the protected region reduction of the magnitude of displacements was more than ten times comparing to the outside territory.

Transverse (horizontal) barriers.

Our analyses revealed that similarly to vertical barriers, the transverse barriers should satisfy several conditions to effectively protect from seismic waves: (i) length (horizontal) of the barrier should be comparable to the wavelength; (ii) material of the barrier should have larger density than the ambient soil for Rayleigh waves; that is in agreement with Chadwick's theorem stating that at the clamped surface of a halfspace, no Rayleigh wave can propagate; (iii) material of the barrier should satisfy the opposite Love's propagating condition (4) for protecting from propagating seismic Love waves.

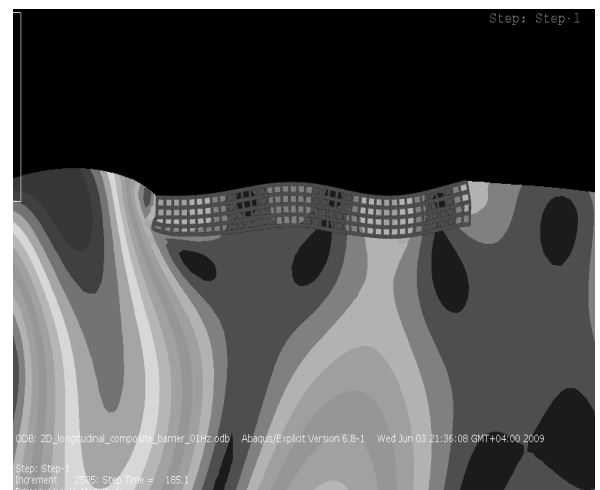
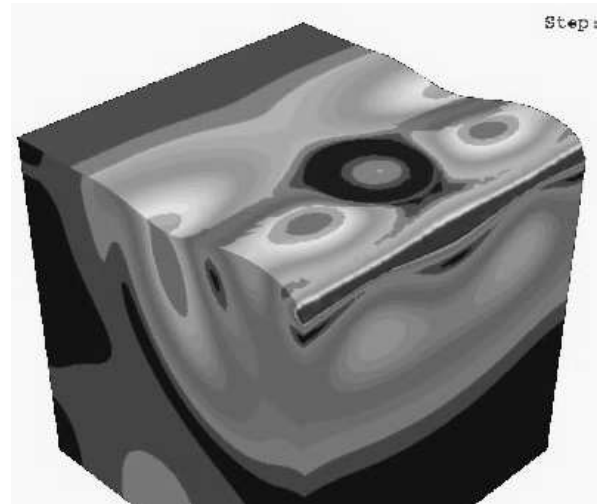


Figure 10. 3D model of the horizontal round-shaped barrier interacting with a long Rayleigh wave: a) 3D model; b) cross-section near the barrier.

Figure 10 demonstrates a movie frame related to numerical simulation of a propagating seismic Rayleigh wave having a long wavelength and interacting with a round-shaped transverse (horizontal) barrier; the latter completely surrounds the protected region. The ratio of the wavelength to length of the barrier was taken one and a half. Inside the protected region reduction of the magnitude of displacements was about three times comparing to magnitude of displacements at the outside territory.

CONCLUDING REMARKS

Herein, a brief outline of future research directions related to creating more efficient seismic barriers is given. A practically important case, when seismic barriers appear to be indispensable, is discussed in the last subsection.

Setting up an optimization problem.

To make search of the optimal geometric and physical properties of the protecting barriers more systematic, solution of the following optimizing problem can be suggested. Mathematically the optimization problem for minimizing magnitudes of deflections can be written as finding minimum of the following target function F :

$$\min_{C_1, \rho_1, l_1, h_1} \left(F(C_1; \rho_1; l_1; h_1) \equiv \max_{\omega \in \Omega} \max_{x \in D} [s(\omega) m(x, \omega)] \right), \quad (5)$$

where C_1, ρ_1 , and h_1, l_1 are the elasticity tensor, density, depth, and length of the barrier (in the case of isotropic material, Lamé constants can be used instead of the elasticity tensor), ω is the angular frequency, Ω is a spectral set, $s(\omega)$ is the corresponding spectral density, D denotes the protected zone, and m is the magnitude of deflections in the protected zone. This problem resembles one that is usually solved at finding optimal parameters of shock absorbers (Den Hartog 1985, Balandin et al. 2000, 2008).

A barrier utilizing concept of scattering seismic wave energy.

That is another type of seismic barriers. From technological point of view, such a barrier can be even simpler and possibly cheaper to create than vertical or horizontal barriers. To demonstrate this concept, consider a ring-shaped pile field as shown on Fig. 11.

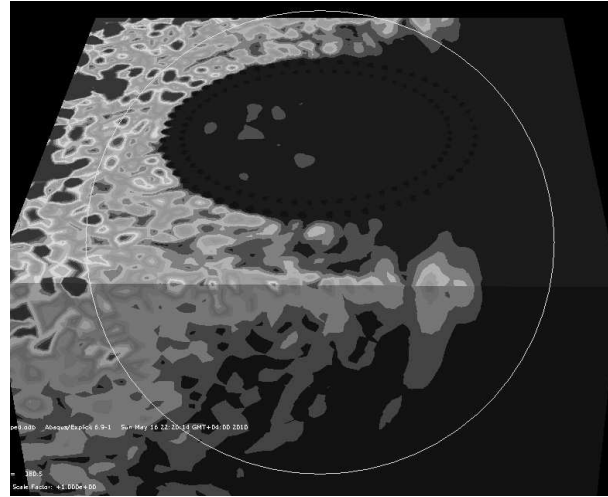


Figure 11. A ring-shaped pile field used to scatter seismic wave energy.

While interacting with seismic waves each pile acts as a scatter obstacle. Arrangement, material, and profile of the piles can be obtained by an optimization procedure that is similar to one outlined in the previous subsection.

Where seismic barriers can be most efficient?

Simple observations reveal that different types of seismic barriers can be most efficient at soft soils especially subjected to liquefaction, when more traditional seismic protection measures can be inadequate. Indeed, by diminishing amplitude of seismic waves inside the protected zone, the considered barriers should improve stability of liquefied soils.

However, for such soils a more complicated analysis of traveling waves involving Biot's theory of poroelasticity can be needed; see Detournay E. & Cheng (1993). It should also be mentioned that according to the genuine Biot's

theory all governing equations are linear, that ensures validity of the harmonic wave approach.

ACKNOWLEDGEMENT

The author thanks Russian Foundation for Fundamental Research (Grant 09-01-12063-ofi) for partial financial support.

REFERENCES

1. **Abu-Hejleh N., Zornberg J.G., Wang T. & Watcharamonthein J.** Monitored displacements of unique geosynthetic-reinforced bridge abutments. *Geosynthetics International*. 9(1), 2002.
2. **Agnew D.C.** History of seismology. *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*. 81(A), 2002, pp. 3-11.
3. **Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D.** Optimal protection from impact and shock: Theory and methods. *Appl. Mech. Rev., ASME*. 53(9), 2000, pp. 237-264.
4. **Balandin D.V., et al.** Concept of a platform based impact isolation system. *Medical Eng. & Physics*. 30(2), 2008, pp. 258-267.
5. **Barnett D.M. & Lothe J.** Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's functions, and surface waves in anisotropic elastic solids. *Phys. Norv.* 7, 1973, pp. 13-19.
6. **Barnett D.M. & Lothe J.** Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. *J. Phys. Ser. F*. 4, 1974, pp. 671-678.
7. **Barnett D.M., Lothe J.** An image force theorem for dislocations in anisotropic bicrystals. *J. Phys. Ser. F*. 4, 1974, pp. 1618-1635.
8. **Bensoussan A., Lions J.L. & Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.
9. **Blondeau F.** Fondations profondes - Cours de mécanique des sols de l'E.N.P.C. *Techniques de l'Ingénieur*, Chapitre C, 1989, pp. 248.
10. **Braitenberg C. & Zadro M.** Comparative analysis of the free oscillations generated by the Sumatra-Andaman Islands 2004 and the Chile 1960 Earthquakes, *Bull. Seism. Soc. Amer.* 97(1A). S6-S17, 2007.
11. **Cagniard L.** Reflexion et refraction des ondes seismique progressive (Thesis), Gauthier-Villars & Cie., Paris, 1939.
12. **Cecchi A. and Rizzi N.L.** Heterogeneous elastic solids: a mixed homogenization-rigidification technique. *Int. J. Solids Struct.* 38, 2001, pp. 29-36.
13. **Chadwick P. & Borejko P.** Existence and uniqueness of Stoneley waves, *Geophys. J. Int.* 118, 1994, pp. 279-284.
14. **Chadwick P. & Jarvis D.A.** Surface waves in a prestressed elastic body, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 366, 1979, pp. 517-536.
15. **Chadwick P. & Smith G.D.** Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials. *Adv. Appl. Mech.* 17, 1977, pp. 303-376.
16. **Chadwick P. & Ting T.C.T.** On the structure and invariance of the Barnett-Lothe tensors, *Quart. Appl. Math.* 45, 1987, pp. 419-427.
17. **Chimenti D.E.** Lamb waves in microstructured plates. *Ultrasonics*. 32, 1994, pp. 255-260.
18. **De Buhan P., Mangiavacchi R., Nova R., Pellegrini G. & Salençon J.** Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique*. 39(2), 1989, pp. 189-201.
19. **Den Hartog J.P.** *Mechanical Vibrations*. N.Y., Dover Publ., 1985.
20. **Detournay E. & Cheng A. H.-D.** *Fundamentals of Poroelasticity*, Vol. II *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice & Projects*. N.Y., Pergamon Press, 1993.

21. **Djeran-Maigre I. & Kuznetsov S.V.** Solitary SH waves in two layered traction free plates. *Comptes Rendus Acad Sci, Paris, Ser. Mecanique.* 336, 2008, pp. 102-107.
22. **Eiksund G., Hoff I. & Perkins S.** Cyclic triaxial tests on reinforced base course material. *Proceedings EuroGeo3, DGGT, Munich, Germany, Vol. 2, 2004,* pp. 619-624.
23. **Farnell G.W.** Properties of elastic surface waves. *Phys. Acoust.* 6, 1970, pp. 109-166.
24. **Guo N. & Cawley P.** Lamb wave propagation in composite laminates and its relationship with acousto-ultrasonics, *NDT & E Int.*, 26, 1993, pp. 75-84.
25. **Gunderson S.A., Barnett D.M. & Lothe J.** Rayleigh wave existence theory: a supplementary remark, *Wave Motion*, 9, 1987, pp. 319-321.
26. **Haskell N.A.** Dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. America.* V.43. No..1, 1953, pp.17-34.
27. **Herle V.** Long-term performance of reinforced soil structures. *Proceedings of the 13. Danube-Conference on Geotechnical Engineering, Slovenian Geotechnical Society, Ljubljana, Slovenia, Vol. 2, 2006,* pp. 251-256.
28. **Ketchart K. & Wu J.T.H.** Performance test for geosynthetic reinforced soil including effects of preloading. *Federal Highway Administration, McLean, VA, USA, Report No. FHWA-R-01-018, 2001.*
29. **Knopoff L.** A matrix method for elastic wave problems, *Bull. Seismol. Soc. America.* V.54. No.1, 1964, pp. 431-438.
30. **Kusakabe O., Takemura J., Takahashi A., Izawa J. & Shibayama S.** Physical modeling of seismic responses of underground structures, *Proceedings of the 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics, Goa, India, 2008,* pp. 1459-1474.
31. **Kuznetsov S.V.** Subsonic Lamb waves in anisotropic plates, *Quart. Appl. Math.* 60, 2002, pp. 577-587.
32. **Kuznetsov S.V.** Surface waves of non-Rayleigh type, *Quart. Appl. Math.* V.61. No.3, 2003, pp. 575-582.
33. **Kuznetsov S.V.** Love waves in monoclinic media (in Russian), *Prikl. Math. Mech.*, vol. 70, 2006, pp. 141-154.
34. **Kuznetsov S.V.** SH-waves in laminated plates, *Quart. Appl. Math.*, vol.64, 2006, pp. 153-165.
35. **Lamb H.** On waves in an elastic plate, *Proc. Roy. Soc.*, A93, 1917, pp. 114-128.
36. **Lim T.C. & Farnell G.W.** Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals, *J. Appl. Phys.*, 39, 1968, pp. 4319-4325.
37. **Lim T.C. & Farnell G.W.** Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 45, 1969, pp. 845-851.
38. **Lin W. & Keer L.M.** A study of Lamb waves in anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 92, 1992, pp. 888-894.
39. **Liu G.R., Tani J., Watanabe K., & Ohyo-shi T.** Lamb wave propagation in anisotropic laminates, *J. Appl. Mech.*, 57, 1990, pp. 923 - 929.
40. **Lothe J. & Barnett D.M.** On the existence of surface wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, *J. Appl. Phys.*, 47, 1976, pp. 428-433.
41. **Love A.E.H.** *Some Problems of Geodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1911, pp. 165-178.
42. **Lowe M.J.S.** Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media, *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 42, 1995, pp. 525-542.
43. **Maradudin A. and Mills D.L.** Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the Presence of surface roughness. *Phys. Rev.* 11(B), 1975, pp. 1392.
44. **Maradudin A. and Mills D.L.** Attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness. *Appl Phys. Letters.* 28(10), 1976, pp. 573-575.

45. **Maradudin A. and Shen J.** Multiple scattering of waves from random rough surfaces. *Phys. Rev.* 22(B), 1980, pp. 4234-4240.
46. **Michel J.C., Moulinec H. & Suquet P.** Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 172, 1999, pp. 109-143.
47. **Moghaddas-Nejad F. & Small J.C.** Resilient and permanent characteristics of reinforced granular materials by repeated load triaxial tests. *Geotechnical Testing Journal*, ASTM, Vol. 26, Issue 2, 2003.
48. **Motamed R., Itoh K., Hirose S., Takahashi A. & Kusakabe O.** Evaluation of Wave Barriers on Ground Vibration Reduction through Numerical Modeling in ABAQUS, *Proceedings of SIMULIA Customer Conference 2009*, London, UK, 2008, pp. 402-41.
49. **Sanchez-Palencia E.** Homogenization method for the study of composite media, *Asymptotic Analysis II*, 1983, pp. 192-214.
50. **Scholte J.G.** The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.: Geophys. Suppl.*, vol.5, 1947, pp. 120-126.
51. **Sengupta P.R. & Nath S.** Surface waves in fiber-reinforced anisotropic elastic media, *Sadhana*, 26, 2001, pp. 363-370.
52. **Sezawa K.** Dispersion of elastic waves propagated on the surface of stratified bodies and on curved surfaces. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo*, 3, 1927, pp. 1-18.
53. **Sezawa K. & Kanai K.** The range of possible existence of Stoneley waves and some related problems, *Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo)*, vol.17, 1939, pp.1-8.
54. **Sobczyk K.** Scattering of Reyleigh waves at a random boundary of an elastic body, *Proc. Vibr. Problems*, 7(4), 1966, pp. 363-374.
55. **Stoneley R.** Elastic waves at the surface of separation of two solids, *Proceedings of the Royal Society (London)* A106, 1924, pp. 416-428.
56. **Strutt J.W. (Lord Rayleigh)** On wave propagating along the plane surface of an elastic solid, *Proc. London Math. Soc.* Vol. 17, 1885, pp. 4-11.
57. **Takahashi A., Takemura J. & Shimodaira T.** Seismic performance of reinforced earth wall with geogrid, *Proceedings of the 15th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Istanbul, Turkey, 2001, pp. 1265-1268.
58. **Thomson W.T.** Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.* V.21. No.2, 1950, pp. 89-93.
59. **Ting T.C.T.** *Anisotropic elasticity: theory and Applications*, Oxford University Press, 1996.
60. **Ting T.C.T.** An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 55, 2002, pp. 297-311.

Sergey V. Kuznetsov, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101 Prosp. Vernadskogo, Moscow, 129526, RUSSIA;
 e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru;
 www.ipmnet.ru/~svkuznec

NON-STATIONARY HEAT TRANSFER IN TWO-LAYER UNLIMITED PLATE AT COMBINED BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND FOURTH TYPES

S.V. Fedosov, N.K. Anisimova, Yu.A. Shchepochkina, Yu.V. Shishkov

Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture, Ivanovo, RUSSIA

ABSTRACT: The work is devoted to the problems of mathematical modeling of heating processes during high-temperature decoration of building materials and products. Model of thermal treatment for the system “decorating material – decorated product” is suggested. The calculation of kinetic of heating of decorating material to the point of fusion is given. The dynamics of distribution of temperature fields on the surface and in the product on the stage of cooling.

Key words: decorations, building product, process, modeling

A lot of modern construction technologies involve industrial methods of application of physical fields for acceleration of physical and chemical processes necessary for giving particular properties to the materials and products obtained. [1]. These are the use of electric current of industrial frequency [2], high-frequency ways of heating [3], ultra-violet [4] and infra-red [5] radiations.

Alongside with traditional methods of application of physical fields in in-site concreting technologies with the use of thermally active formwork [6,7], lately the researchers have been more and more interested in the ways of high-temperature decorative finishing of building materials and products [8-12].

For the further in-depth theoretical and experimental researches of the developed technologies and their introduction in industry, it is necessary to develop reliable methods of calculation of technological processes and equipment, based on mathematical models, which are possibly close to real physical and chemical, heat and mass-exchange processes, proceeding in the developed apparatus [13].

One of perspective means to protect decorative finish of concrete, ceramic and other products is a high-temperature treatment involving a high-intensity influence of electric arc or low-temperature plasma on the decorated material [9,10,12].

Figure 1 shows the scheme of the process.

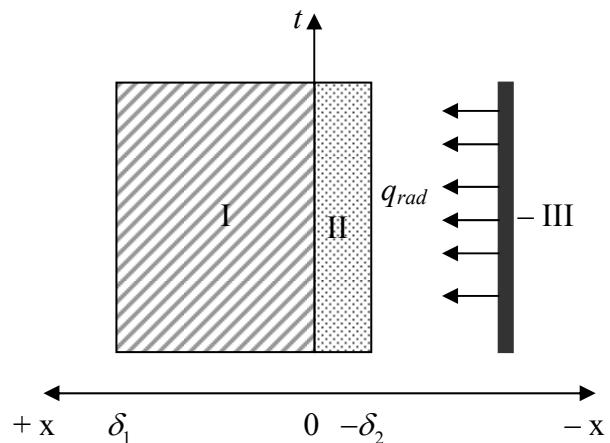


Fig.1. Illustration of thermal treatment model (I – concrete, II – decorated layer, III – source of radiation)

Present view of physico-chemical and heat processes running in the system are stated in detail in works [10, 12]. The present research is their continuation, and the basic attention in it is given to the problems of mathematical modeling of thermal processes at high-temperature treatment of building products.

The system of «decorative material and decorated product» can be presented according to figure 1 by two unlimited plates being in contact, each having their own size – δ_1 and δ_2 , and properties: heat conductivity – λ_1 and λ_2 , thermal capacity – c_1 and c_2 and density – ρ_1 and ρ_2 accordingly. Index "1" corresponds to the deco-

rated (basic) product, index "2" – to the decorative (rendered) material.

We assume that both products are in "ideal" thermal contact. The second (left one according to figure 1) surface of the basic product is heat insulated.

Between the second surface of a rendered material and the high-temperature gas environment there is a complex heat exchange determined by radiation and convection:

$$q_{den} = q_{rad} + q_{conv} = \alpha_{ef} (\dot{O}_{rad} - \dot{O}_{surf}). \quad (1)$$

Here: q_{den} – density of heat flow created by radiation (q_{rad}) and convection (q_{conv}), $J/m^2 \cdot c$; α_{ef} – effective factor of heat release due to radiation and convection, $J/m^2 \cdot K$; T_{rad} – temperature of radiating agent, K; T_{surf} – temperature of heat receiving surface of decorative material, K.

Boundary-value problem of non-stationary heat conductivity for the given case takes the following form:

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq \delta_1) \quad (2)$$

$$\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; -\delta_2 \leq x \leq 0) \quad (3)$$

$$t_1(x, 0) = t_{10}(x) \quad (4)$$

$$t_2(x, 0) = t_{20}(x) \quad (5)$$

$$q_{den} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(-\delta_2, \tau)}{\partial x} \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial x} \quad (7)$$

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau) \quad (8)$$

$$\frac{\partial t_1(\delta_1, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

The initial conditions (4) and (5) show, that at the moment of time, accepted for a start readout, distribution of temperatures through the thickness of each model plate has arbitrary character. There are no restrictions to satisfy these functions by any special condition (we note, that in the fundamental monography [14] at consideration of mass transfer problems such condition is

the requirement of parabolic functions of initial distribution).

The system of equations (2), (3) has a linear character. It is specified by the fact that thermal conductivity factors, generally being variable and dependent on temperature values, are taken outside the signs of mathematical operators of differentiation. However, application of a zone method [15] or a method of "microprocesses" [16, 17] allows breaking this barrier, provided that initial distribution of temperatures is determined by any function of coordinates.

The boundary condition (6) is a condition of the second kind and shows that a thermal flow brought to the right surface of plate II (Fig.10) by means of radiation and convection is transferred inside the plate by means of heat conductivity.

The boundary conditions (7) and (8) are conditions of the fourth kind and illustrate the fact, that the plates have equal temperatures in the place of their contact, and density of heat flow is also the same.

The boundary condition (9) is a condition of the second kind and can be referred to as the condition of «thermal insulation».

For solution of systems (2) - (9) we use the method of Laplace integrated transformations, that proved to be good in analysis of heat transfer problems.

Let's bring the system of equations (2) - (9) to dimensionless form, using the following symbols:

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta_1}; \quad K_\delta = \frac{\delta_2}{\delta_1}; \quad K_a = \frac{a_2}{a_1}; \quad K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (10)$$

$$T_1(\bar{x}, Fo) = \frac{t_{rad} - t_1(x, \tau)}{t_{rad} - t_0}; \quad T_2(\bar{x}, Fo) = \frac{t_{rad} - t_2(x, \tau)}{t_{rad} - t_0} \quad (11)$$

$$Fo = \frac{a_1 \tau}{\delta_1^2}; \quad Ki = \frac{q_n \delta_1}{\lambda_2 (t_{rad} - t_0)}. \quad (12)$$

Taking into account (10)-(12) we have:

$$\frac{\partial T_1(\bar{x}, Fo)}{\partial Fo} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \bar{x} \leq 1) \quad (13)$$

Non-Stationary Heat Transfer in Two-Layer Unlimited Plate at Combined Boundary Conditions of Second and Fourth Types

$$\frac{\partial T_2(\bar{x}, Fo)}{\partial Fo} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}^2} \quad (Fo > 0; -K_\delta \leq x \leq 0) \quad (14)$$

$$T_1(\bar{x}, 0) = T_{10}(\bar{x}); \quad T_2(\bar{x}, 0) = T_{20}(\bar{x}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_2(-K_\delta, Fo)}{\partial \bar{x}} = Ki \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_1(0, Fo)}{\partial \bar{x}} = K_\lambda \frac{\partial T_2(0, Fo)}{\partial \bar{x}} \quad (17)$$

$$T_1(0, Fo) = T_2(0, Fo) \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_1(1, Fo)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (19)$$

Solution of equations (13) and (14) in view of initial conditions (15) in the field of Laplace representation on time variable Fo is as follows:

$$T_1(\bar{x}, S) = A \operatorname{ch}(\sqrt{S}\bar{x}) + B \operatorname{sh}(\sqrt{S}\bar{x}) - \frac{1}{\sqrt{S}} \int_0^{\bar{x}} T_{10}(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{S}(\bar{x}-\xi)] d\xi \quad (20)$$

$$T_2(\bar{x}, S) = C \operatorname{ch}(\sqrt{S}\sqrt{K_a}\bar{x}) + D \operatorname{sh}(\sqrt{S}\sqrt{K_a}\bar{x}) - \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{K_a}} \int_0^{\bar{x}} T_{20}(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{S}\sqrt{K_a}(\bar{x}-\xi)] d\xi \quad (21)$$

Boundary conditions (16) - (19) in the field of complex variables can be written down as follows:

$$\frac{\partial T_2(-K_\delta, S)}{\partial \bar{x}} = -\frac{Ki}{S} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T_1(0, S)}{\partial \bar{x}} = K_\lambda \frac{\partial T_2(0, S)}{\partial \bar{x}} \quad (23)$$

$$T_1(0, S) = T_2(0, S) \quad (24)$$

$$\frac{\partial T_1(1, S)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (25)$$

Having carried out with the help of boundary conditions the search of four constants in equations (20) and (21) we can receive after a number of transformations:

$$T_1(\bar{x}, S) = \frac{\chi_3(S) \operatorname{ch}(\sqrt{S}\bar{x})}{S\sqrt{S}\chi_1(S) \operatorname{sh}\sqrt{S}} + \frac{K_\lambda \chi_2(S) \operatorname{sh}(\sqrt{S}\bar{x})}{S\sqrt{S}\chi_1(S)} - \frac{1}{\sqrt{S}} \int_0^{\bar{x}} T_{10}(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{S}(\bar{x}-\xi)] d\xi \quad (26)$$

$$T_2(\bar{x}, S) = \frac{\chi_3(S) \operatorname{ch}(\sqrt{S_1}\bar{x})}{S\sqrt{S}\chi_1(S) \operatorname{sh}\sqrt{S}} + \frac{\chi_2(S) \operatorname{sh}(\sqrt{S_1}\bar{x})}{\sqrt{K_a} S\sqrt{S}\chi_1(S)} \quad (27)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{K_a}} \int_0^{\bar{x}} T_{20}(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{S_1}(\bar{x}-\xi)] d\xi$$

In the expressions received it is designated:

$$\sqrt{S_1} = \sqrt{S}\sqrt{K_a} \quad (28)$$

$$\chi_1(S) = \operatorname{sh}\sqrt{S} \operatorname{ch}(\sqrt{S}\sqrt{K_a}K_\delta) + K_\lambda \sqrt{K_a} \operatorname{ch}\sqrt{S} \operatorname{sh}(\sqrt{S}\sqrt{K_a}K_\delta) \quad (29)$$

$$\chi_2(S) = I_1 S \sqrt{K_a} \operatorname{sh}(\sqrt{S}\sqrt{K_a}K_\delta) + I_2 S \sqrt{K_a} \operatorname{sh}\sqrt{S} + K_i \operatorname{sh}\sqrt{S} \quad (30)$$

$$\chi_3(S) = I_1 S \chi_1(S) - K_\lambda \chi_2(S) \operatorname{ch}\sqrt{S} \quad (31)$$

$$I_1 = \int_0^1 T_{10}(\xi) \operatorname{ch}[\sqrt{S}(1-\xi)] d\xi \quad (32)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{K_a}} \int_0^{K_\delta} T_{20}(\xi) \operatorname{ch}[\sqrt{S}\sqrt{K_a}(K_\delta-\xi)] d\xi \quad (33)$$

Carrying out transition from the area of representations into the area of originals with the use of the second theorem of expansion [18] and applying the rule of Laplace linearity of converse transformation, we have after complicated transformations:

$$T_1(\bar{x}, Fo) = \frac{1}{1 + K_a K_\lambda K_\delta} * \left\{ \int_0^1 T_{10}(\xi) d\xi K_\lambda \int_0^{K_\delta} T_{20}(\xi) d\xi K_i K_\lambda \left[Fo + \frac{(1-\bar{x})^2}{2} j(K_a, K_\lambda, K_\delta) \right] \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \left\{ \cos(\mu_n \bar{x}) \cos(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) - \sqrt{K_a} K_\delta \sin(\mu_n \bar{x}) \sin(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) \right\} * \exp(-\mu_n^2 Fo) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_\lambda I_2^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \cos[\mu_n(1+\bar{x})] \exp(-\mu_n^2 Fo) + 2 K_i K_\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[\mu_n(1+\bar{x})]}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 Fo) \quad (34)$$

$$T_2(\bar{x},Fo) = \frac{1}{1+K_a K_\lambda K_\delta} * \left\{ \int_0^1 T_{10}(\xi) d\xi - K_\lambda \int_0^{K_\delta} T_{20}(\xi) d\xi + Ki(\bar{x}-Fo K_a K_\delta) + Ki K_\lambda \left[j(K_a, K_\lambda, K_\delta) - \frac{1+K_a \bar{x}^2}{2} \right] \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \cos[\mu_n \sqrt{K_a} (K_\delta - \bar{x})] \times \exp(-\mu_n^2 K_a Fo) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_2^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \left[K_\lambda \cos \mu_n \cos(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) + \frac{1}{\sqrt{K_a}} \sin \mu_n \sin(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) \right] \times \exp(-\mu_n^2 K_a Fo) - 2Ki \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_2^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \left[K_\lambda \cos \mu_n \cos(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) + \frac{1}{\sqrt{K_a}} \sin \mu_n \sin(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) \right] \exp(-\mu_n^2 K_a Fo) \quad (35)$$

Besides it is also designated in the marked solutions:

$$\psi_1'(\mu_n) = \cos \mu_n \cos(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) (1 + K_a K_\lambda K_\delta) - \sin \mu_n \sin(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) \sqrt{K_a} (K_\lambda + K_\delta) \quad (36)$$

$$I_1^* = \int_0^1 T_{10}(\xi) \cos[\mu_n (1-\xi)] d\xi ; \quad (37)$$

$$I_2^* = \int_0^{K_\delta} T_{20}(\xi) \cos[\mu_n \sqrt{K_a} (K_\delta - \xi)] d\xi \quad (38)$$

$$j(K_a, K_\lambda, K_\delta) = \frac{1 + K_a K_\delta (3K_\delta^2 + 3K_\lambda + K_a K_\lambda K_\delta^2)}{6(1 + K_a K_\lambda K_\delta)} \quad (39)$$

The characteristic equation for the search of set of roots μ_n is as follows:

$$tg \mu_n = -\sqrt{K_a} K_\lambda tg(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) \quad (40)$$

Thus, expressions (34) - (40) in the aggregate allow to carry out all necessary calculations of heat transfer processes, as well as of boundary-value problem designated above (15) - (19); hence, they enable to calculate dimensional fields of temperatures in the layer of decorated material and in concrete product.

Consider solutions for an important case in practical use. According to existing technology

the decorated material is, as a rule, rendered on a product before the high-temperature processing. The temperature of the product and of the rendered material is the same. Under conditions of the given problem it means that the initial terms (15) are as follows:

$$T_1(\bar{x},0) = T_2(\bar{x},0) = 1 \quad (41)$$

And then expressions (34) and (35) become essentially simpler. Dropping some simple and awkward transformations, we have:

$$T_1(\bar{x},Fo) = \frac{1}{1+K_a K_\lambda K_\delta} * \left\{ 1 - K_\lambda K_\delta - Ki K_\lambda \left[Fo + \frac{(1-\bar{x})^2}{2} - j(K_a, K_\lambda, K_\delta) \right] \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} * \left\{ \mu_n \sin \mu_n \left[\cos(\mu_n \bar{x}) \cos(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) - \sqrt{K_a} K_\delta \sin(\mu_n \bar{x}) \sin(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) \right] - \frac{K_\lambda}{\sqrt{K_a}} \cos[\mu_n (1+\bar{x})] \right\} \exp(-\mu_n^2 Fo) \quad (42)$$

$$T_2(\bar{x},Fo) = \frac{1}{1+K_a K_\lambda K_\delta} * \left\{ 1 - K_\lambda K_\delta + Ki(\bar{x}-Fo K_a K_\delta) + Ki K_\lambda \left[j(K_a, K_\lambda, K_\delta) - \frac{1+K_a \bar{x}^2}{2} \right] \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1^*}{\mu_n^2 \psi_1(\mu_n)} \left\{ \mu_n \sin \mu_n \cos[\mu_n \sqrt{K_a} (K_\delta - \bar{x})] - \frac{\mu_n}{\sqrt{K_a}} \sin(\mu_n \sqrt{K_a} K_\delta) \right\} \times \left[K_\lambda \cos \mu_n \cos(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) + \frac{1}{\sqrt{K_a}} \sin \mu_n \sin(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) \right] + Ki \left[K_\lambda \cos \mu_n \cos(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) + \frac{1}{\sqrt{K_a}} \sin \mu_n \sin(\mu_n \sqrt{K_a} \bar{x}) \right] * \exp(-\mu_n^2 K_a Fo) \quad (43)$$

One of the purposes of analysis of high-temperature heat treatment process is the calculation of thermal kinetics of decorated material

Non-Stationary Heat Transfer in Two-Layer Unlimited Plate at Combined Boundary Conditions of Second and Fourth Types

up to fusion-point and the definition of dynamics of temperature fields in a coating and a product at cooling stage. As an example figures 2 and 3 give the results of calculations in accordance with the stages of heating and cooling.

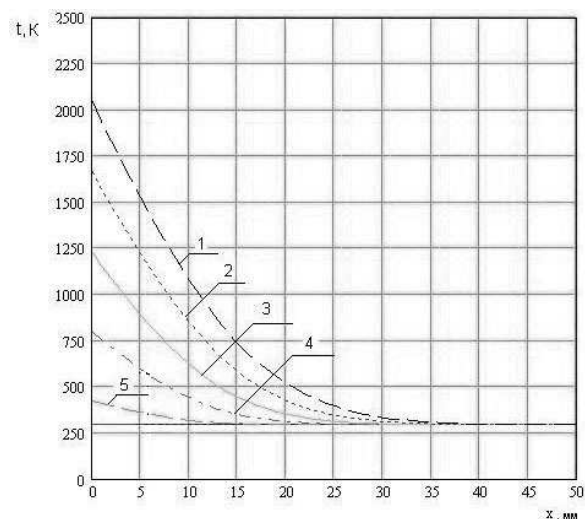


Fig.2. Change in temperature decorates the material in time

(1 – $\tau = 40$ s; 2 – $\tau = 62$ s; 3 – $\tau = 80$ s;
4 – $\tau = 100$ s; 5 – $\tau = 120$ s)

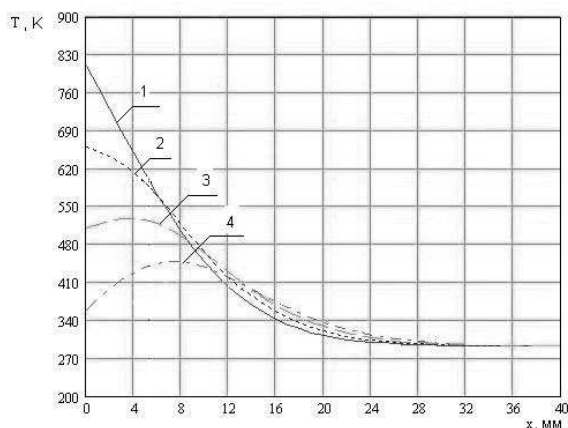


Fig. 3. Schedule field distributions of temperature in concrete during cooling

(1 – $\tau = 0$ s; 2 – $\tau = 10$ s; 3 – $\tau = 20$ s;
4 – $\tau = 30$ s)

REFERENCES

1. **Telichenko V.I., Slesarev M.Ju., Stoikov V.F., Sviridov V.N., Nagornyak I.N.**

- Safety and quality in construction: M.: Publishing house ACB, 2002. – 336 pages.
2. **Gordeyev S.N., Krasnenkov M.A., Popovkin I.V.** Electricity and Magnetism. – M.: MIREA, 1990 – 79 pages.
3. High-Frequency Heating of Dielectrics and Semiconductors /Edited by **A.V. Netushil.** M. – L.: Gosenergoizdat, 1959. – 480 pages.
4. **Blokh A.G.** The Bases of Heat Exchange by Radiation. /Edited by A.M. Gurvich. M.– JI.: Gosenergoizdat, 1962 – 331 pages.
5. **Knorre G.F., Paleev I.I.** The Theory of Furnace Processes. M. – L., “Energy”, 1966, 491 pages.
6. **Krylov B.A., Ambartsumyan S.A., Zvezdov A.I.** Instructions for Concrete Heating in Mass Concrete Structures. M. Publishing House “Krasny Proletary”, 2005, 275 pages.
7. **Fedosov S.V., Ibragimov A.M., Nesterov S.A.** Two-Side Heating of Concrete in a Mass Reinforced Concrete Base Slab With the Use of Thermally Active Formwork. “Building Materials“. 2007, №12, pp. 26-27.
8. **Fedosov S.V., Akulova M.V.** Plasma Metallization of Concrete. - M.: Publishing house ASV, 2003, 120 pages.
9. **Bazhenov Yu.M., Fedosov S.V., ShChepochkina Yu.A., Akulova M.V.** High-Temperature Processing of Concrete by Glassy Coatings. M.: Publishing house ASV, 2005, 128 pages.
10. **ShChepochkina Yu.A.** Glazed Artificial Stone Unroasted Materials and Products: Thesis for a doctor's degree. Ivanovo, 2007, 276 pages.
11. **Volokitin G.G., Skripnikova N.K., Shilyaev A.M., Petrachenko V.V., Kononov I.M.** Prospect for the Development of Plasmotechnological Processes in Building Industry // Non-traditional Technologies in Construction: Proceedings - Tomsk, 2001. – pp. 7-24.
12. **Akulova M.V.** Development of Scientific Bases for High-Temperature Processes of Multifunction Furnish of Concrete Prod-

- ucts: Dr.Sc.(Tech) Thesis. Ivanovo, 2004, 320 pages.
13. **Fedosov S.V., Ibragimov A.M., Gushchin A.V.** Application of Methods of Mathematical Physics for Modelling of Mass and Power Transfer in Technological Processes of Building Industry // Building materials, 2008, №4, pp. 65-67.
 14. **Lykov A.V., Mikhailov Yu.A.** Theory of Heat and Mass Transfer. – M. - L.: Gosenergoizdat, 1963 – 535 pages.
 15. **Rudobashta S.P.** Mass Transfer in Solid Phase Systems. M.: Chemistry, 1980. – 248 pages.
 16. **Fedosov S.V.** Teplomassoperenos in technological processes of the building industry: the monography / Fedosov S.V. – Ivanovo : IPK «PresSto», 2010.-364 c.
 17. **Fedosov S.V., Kiselnikov V.N., Shertayev V.U.** Application of Methods of the Theory of Heat Conductivity for Modelling of Convective Drying Processes. - Alma-Ata: Gylym, 1992, 167pages.
 18. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** Operational calculation. M., “Science”, 1975, 407 pages.
 19. **Fedosov S.V., Lebedev V.Ya., Barulin E.P., Kiselnikov V.N.** Temperature Field of the Particle Covered with a Film of Evaporating Liquid. Collection of Articles “Rheology, Processes and Devices of Chemical Technology”. Volgograd, 1982, pp. 21-34.
- lection committee of the University; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; E-mail: kancelaria@igasu.ru
- Schepochkina Yu.A., Doctor of technical sciences, professor of the department “Building material studies and special technologies” of State Educational Institution of High Professional Education “Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture”; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; E-mail: kancelaria@igasu.ru
- Shishkov Yu.V. , postgraduate of State Educational Institution of High Professional Education “Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture”; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; E-mail: kancelaria@igasu.ru

Fedosov S.V., academician of Russian academy of architecture and building sciences, Honoured Science Worker of Russian Federation, prizewinner of Government of Russian Federation in the sphere of science and technology, Doctor of technical sciences, professor, rector of State Educational Institution of High Professional Education “Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture.” Head of a chair “Building material studies and special technologies”; 20, ul. 8 Marta, Ivanovo, 153037, Russia; E-mail: rektor@igasu.ru.

Anisimova N.K., Candidate of technical sciences, senior lecturer of the department “Building material studies and special technologies” of State Educational Institution of High Professional Education “Ivanovo State University of Civil Engineering and Architecture”, member of the se-

КОРРЕКТНЫЕ МЕТОДЫ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧАСТЬ 1: СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

П.А. Акимов, В.Н. Сидоров

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами эффективного и корректного метода точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: точное аналитическое решение, корректный метод, многоточечная краевая задача, расчеты строительных конструкций, система дифференциальных уравнений, кусочно-постоянные коэффициенты, дискретно-континуальные методы

CORRECT ANALYTICAL SOLUTIONS OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE-CONSTANT COEFFICIENTS PART 1: SETS OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Correct analytical solution of multipoint boundary problems of structural mechanics for set of first-order differential equations with piecewise-constant coefficients is under consideration in the distinctive paper.

Key words: correct analytical solution, multipoint boundary problems, structural mechanics, structural analysis, set of first-order differential equations, piecewise-constant coefficients, discrete-continual methods

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье представлен разработанный авторами эффективный корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Необ-

ходимость решения подобного рода задач возникает, как известно, при расчетах самых разнообразных конструкций, зданий и сооружений на различные виды воздействий, в частности с использованием дискретно-континуальных методов [1, 7-9] (дискретно-континуальный конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ)).

**1. ПОСТАНОВКА МНОГОТОЧЕЧНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Прежде всего, следует отметить, что, в частности, с математической точки зрения вынесенная в заголовок статьи проблема является достаточно общей – как известно, система линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка введением соответствующих новых переменных сводится к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка [13].

Итак, пусть имеем систему n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и n_k линейных граничных условий, заданных в граничных точках x_k^b , $k = 1, \dots, n_k$ (ниже, очевидно, предполагается, что в число граничных точек входят также точки, в которых имеют место разрывы первого рода коэффициентов системы), т.е.:

$$\bar{y}^{(1)} - A_k \bar{y} = \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1; \quad (1)$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (2)$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3)$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x) = [y_1(x) \ y_2(x) \ \dots \ y_n(x)]^T$ – искомая n -мерная вектор-функция; A_k , $k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные матрицы постоянных коэффициентов, квадратные n -го порядка; $\bar{f}_k = \bar{f}_k(x) = [f_{k,1}(x) \ f_{k,2}(x) \ \dots \ f_{k,n}(x)]^T$, $k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные n -мерные вектор-функции правых частей; $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$, а также $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы и векторы правых частей

n -го порядка граничных условий в точке x_k^b ;
 $\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(1)}(x) = d\bar{y}/dx$.

**2. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ
МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ
ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Рассмотрим произвольное уравнение из (1).
Имеем:

$$\bar{y}^{(1)} - A_k \bar{y} = \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \quad (4)$$

Матрицу A_k здесь можно представить в виде [4, 6, 12, 13, 14]:

$$A_k = T_k J_k T_k^{-1}, \quad (5)$$

где $J_k = \begin{bmatrix} J_{k,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k,u} \end{bmatrix}; \quad (6)$

$$J_{k,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{k,p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k,p} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k,p} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь T_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы которой представляют собой собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A_k ; J_k – жорданова форма матрицы A_k ; $J_{k,p}$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{k,p} \in \mathbb{C}$ матрицы A_k ; $\dim J_{k,p} = m_{k,p}$, $p = 1, \dots, u_k$.

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 1: Системы первого порядка Жордановой клетке $J_{k,p}$ соответствует один собственный вектор матрицы A_k и $(m_{k,p} - 1)$ корневых векторов $\bar{t}_{k,s}$, удовлетворяющих уравнениям [4, 6, 12, 13, 14]:

$$(A_k - \lambda_{k,p} I)^j \bar{t}_{k,s} = 0, \quad (8)$$

$$j = 2, 3, \dots, m_{k,p}; \quad s = j + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i},$$

где I – единичная матрица n -го порядка; $\bar{t}_{k,s}$ – ненулевой вектор.

Важное значение для решения поставленной задачи имеет фундаментальная матрица-функция, по определению для системы (4) удовлетворяющая условиям [3, 11, 15, 16]

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) - A_k \varepsilon_k(x) = \delta(x)I \quad (9)$$

или

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(1)}(x) - A_k \varepsilon_k(x) = 0, & x \neq 0 \\ \varepsilon_k(+0) - \varepsilon_k(-0) = I, \end{cases} \quad (10)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; I – единичная матрица соответствующего порядка. Как известно [7-10, 16], построение фундаментальной матрицы-функции типа $\varepsilon_k(x)$ предполагает вычисление функции от матрицы коэффициентов, которое может производиться с использованием жордановой формы (5). Однако подобный стандартный алгоритм не может быть рекомендован для численной реализации, так как в действительности не существует численно устойчивого способа построения жордановых форм [14], причем проблемы возникают для матриц, в жордановой форме которых имеются клетки неединичного порядка. Кроме того, в задачах расчета конструкций имеются специфические особенности: число собственных значений, которым соответствуют жордановы клетки неединичного порядка, небольшое, и они, как правило, нулевые. В этой связи, для построения фундаментальной матрицы-функции ис-

пользуется описываемая ниже корректная авторская методика.

Как известно [13], ненулевой вектор \bar{t} такой, что $A\bar{t} = \lambda\bar{t}$ называют правым собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ , а ненулевой вектор \tilde{t} , для которого $A^T \tilde{t} = \lambda \tilde{t}$ именуют левым собственным вектором A , соответствующим собственному значению λ .

Собственные значения матриц A_k и A_k^T совпадают, и можем записать:

$$\tilde{T}_k = T_k^{-1}, \quad (11)$$

где T_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы $\bar{t}_{k,p}$ которой представляют собой собственные и корневые векторы матрицы A_k , причем

$$T_k = [\bar{t}_{k,1} \quad \bar{t}_{k,2} \quad \dots \quad \bar{t}_{k,n}]^T; \quad (12)$$

$$A_k \bar{t}_{k,s} = \lambda_{k,p} \bar{t}_{k,s}, \quad s = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i}; \quad (13)$$

\tilde{T}_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы $\tilde{t}_{k,p}$ которой являются собственными и корневыми векторами матрицы A_k^T ,

$$\tilde{T}_k = [\tilde{t}_{k,1} \quad \tilde{t}_{k,2} \quad \dots \quad \tilde{t}_{k,n}]^T; \quad (14)$$

$$A_k^T \tilde{t}_{k,s} = \lambda_{k,p} \tilde{t}_{k,s} \Leftrightarrow \tilde{t}_{k,s}^T A_k = \lambda_{k,p} \tilde{t}_{k,s}^T, \quad (15)$$

$$s = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i}.$$

Таким образом, вместо обращения комплексной матрицы T_k при построении жорданова разложения, на практике может производиться определение собственных значений и векторов матрицы A_k^T , откуда

$$A_k = T_k J_k \tilde{T}_k. \quad (16)$$

Произведем такую сортировку собственных значений (и соответственно преобразования матриц T_k , J_k и \tilde{T}_k) матриц A_k и A_k^T , что будет выполнено условие:

$$\left. \begin{cases} \forall \lambda_{k,p}, p = 1, \dots, l_{k,1} : \\ \lambda_{k,p} \neq 0, m_{k,p} = 1, \tilde{m}_{k,p} = 1 \\ \forall \lambda_{k,p}, p = l_{k,1} + 1, \dots, l_{k,2} : \\ \lambda_{k,p} \neq 0, m_{k,p} = 1, \tilde{m}_{k,p} > 1 \\ \forall \lambda_{k,p}, p = l_{k,2} + 1, \dots, u_k : \lambda_{k,p} = 0, \end{cases} \right\} \text{простые} \quad (17)$$

где $\tilde{m}_{k,p}$, $m_{k,p}$ – соответственно кратность собственного значения $\lambda_{k,p}$ и размерность жордановой клетки, которая ему соответствует.

Данная сортировка также важна для построения правильного соответствия между собственными векторами матриц A_k и A_k^T , определенными с использованием стандартного программного обеспечения.

Пусть $T_{k,11}, T_{k,12}, \tilde{T}_{k,11}, \tilde{T}_{k,12}$ – матрицы размером $n \times l_{k,1}$, $n \times (l_{k,2} - l_{k,1})$, $l_{k,1} \times n$, $(l_{k,2} - l_{k,1}) \times n$ соответственно, элементы которых задаются формулами:

$$(T_{k,11})_{ij} = (T_k)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq l_{k,1}; \quad (18)$$

$$(\tilde{T}_{k,11})_{ij} = (\tilde{T}_k)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq l_{k,1}; \quad 1 \leq j \leq n; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (T_{k,12})_{pq} &= (T_k)_{ij}; \quad (\tilde{T}_{k,12})_{qp} = (\tilde{T}_k)_{ji}, \\ p &= i; \quad q = j - l_{k,1}; \quad 1 \leq i \leq n; \quad l_{k,1} < j \leq n. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидны соотношения

$$T_k = [T_{k,1} \quad T_{k,2}]; \quad \tilde{T}_k = [\tilde{T}_{k,1}^T \quad \tilde{T}_{k,2}^T]^T, \quad (21)$$

где $T_{k,1} = [T_{k,11} \quad T_{k,12}]; \quad \tilde{T}_{k,1} = [\tilde{T}_{k,11}^T \quad \tilde{T}_{k,12}^T]^T. \quad (22)$

Как известно, матрицей проектирования P (проектором) называется матрица, обладающая свойством $P^2 = P$ [12]. Пусть $P_{k,11}, P_{k,12}$,

$P_{k,2}$ – матрицы проектирования на подпространства, натянутые на собственные и корневые векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_{k,p}$, $p = 1, \dots, l_{k,1}$; $\lambda_{k,p}$, $p = l_{k,1} + 1, \dots, l_{k,2}$ и $\lambda_{k,p}$, $p = l_{k,2} + 1, \dots, u_k$,

$$P_{k,11} = T_{k,11} D_k \tilde{T}_{k,11}; \quad P_{k,12} = T_{k,12} (\tilde{T}_{k,12} T_{k,12})^{-1} \tilde{T}_{k,12}; \quad (23)$$

$$P_{k,1} = P_{k,11} + P_{k,12}; \quad P_{k,2} = I - P_{k,1}, \quad (24)$$

где D – диагональная матрица $l_{k,1}$ -го порядка, значимые элементы которой

$$(D_k)_{ii} = (\tilde{t}_{k,i}, \tilde{t}_{k,i}), \quad 1 \leq i \leq l_{k,1}, \quad (25)$$

т.е.

$$\begin{aligned} (D_k^{-1})_{ii} &= 1/(\tilde{t}_{k,i}, \tilde{t}_{k,i}); \quad (D_k^{-1})_{ij} = 0, \\ i &\neq j; \quad i, j = 1, \dots, l_{k,1}. \end{aligned} \quad (26)$$

После определения собственных значений и векторов матриц A_k и A_k^T с использованием стандартного программного обеспечения и выполнения сортировок, как правило, возникает необходимость в проведении биортогонализации собственных векторов и их перестановках. Это связано с тем, что нормировка последних для матриц A_k и A_k^T может быть в общем случае различной. Кроме того, предложенная ранее сортировка, может сохранить несоответствия между собственными векторами матриц A_k и A_k^T при кратных ненулевых собственных значениях. Формулы необходимых преобразований имеют вид (знак \Rightarrow ниже условно обозначает операцию присваивания):

$$\tilde{T}_{k,11} \Rightarrow D_k^{-1} \tilde{T}_{k,11}; \quad \tilde{T}_{k,12} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,12} T_{k,12})^{-1} \tilde{T}_{k,12}. \quad (27)$$

Разложим матрицу на две составляющие матрицы n -го порядка

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 1: Системы первого порядка

$$A_k = A_{k,1} + A_{k,2}, \quad (28)$$

где $A_{k,1} = T_{k,1} J_{k,1} \tilde{T}_{k,1}$; $A_{k,2} = A_k - A_{k,1}$;
 $J_{k,1} = \text{diag}\{\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \dots, \lambda_{k,l_2}\}$. (29)

Иными словами, здесь $A_{k,1}$ и $A_{k,2}$ – части матрицы A_k , отвечающие соответственно ненулевым и нулевым (кратным и простым) собственным значениям.

Разложение (29) предлагается называть при решении задач строительной механики частичным жордановым разложением. Здесь можно провести следующую аналогию: наряду со стандартным термином «проблема собственных значений», существует и «частичная проблема собственных значений».

Весьма важными представляются следующие соотношения:

$$A_{k,1} = P_{k,1} A; \quad A_{k,2} = P_{k,2} A;$$

$$A_{k,1} A_{k,2} = A_{k,2} A_{k,1} = 0. \quad (30)$$

Пусть $F_{k,1}$ – матрица l_2 -го порядка, элементы которой задаются формулой

$$(F_{k,1})_{ij} = (F_k)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq l_2; \quad 1 \leq j \leq l_2, \quad (31)$$

где $F_k(x) = \exp(J_k x)$. (32)

С учетом нильпотентности матрицы $A_{k,2}$ не сложно показать, что

$$\exp(A_k x) = P_{k,1} \exp(A_k x) + P_{k,2} \exp(A_k x), \quad (33)$$

где $P_{k,1} \exp(A_k x) = T_{k,1} F_{k,1}(x) \tilde{T}_{k,1}$; (34)

$$P_{k,2} \exp(A_k x) = P_{k,2} + \sum_{k=1}^{m_{k,\max}-1} \frac{A_{k,2}^k x^k}{k!}; \quad (35)$$

$$m_{k,\max} = \max_{1 \leq i \leq u_k} m_{k,i}. \quad (36)$$

Вообще, фундаментальная матрица-функция системы (4) определена не однозначно, а с точностью до решения соответствующей однородной системы уравнений. Произведем однозначное определение, вводя дополни-

тельное требование об исключении возможности экспоненциального возрастания фундаментальной матрицы-функции, что является очень важным фактором для вычисления параметров решения, связанных с крайними условиями:

$$\varepsilon_k(x) = T_{k,1} \tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) \tilde{T}_{k,1} + \chi(x,0) [P_{k,2} + \sum_{k=1}^{m_{k,\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_{k,2}^k], \quad (37)$$

где

$$\chi(x, \lambda_{k,p}) = \begin{cases} \text{sign}(x) \theta(-\text{Re}(\lambda_{k,p})x), & \lambda_{k,p} \neq 0 \\ 0.5 \text{sign}(x), & \lambda_{k,p} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

– характеристическая функция;

$$\tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) = \text{diag}\{\chi(x, \lambda_{k,1}) \exp(\lambda_{k,1}x), \dots, \chi(x, \lambda_{k,l_2}) \exp(\lambda_{k,l_2}x)\}; \quad (39)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Выражение (37) позволяет исключить ряд нежелательных в практике расчетов случаев (необходимость оперировать в расчетах с очень большими числами, которая, как правило, либо препятствует получению результатов с желаемой точностью, либо ведет к переполнению разрядной сетки ЭВМ; плохая обусловленность системы разрешающих уравнений для определения соответствующих постоянных коэффициентов из граничных условий и т.д.).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\bar{Y}(x)$ – обобщенная вектор-функция неизвестных, т.е.

$$\bar{Y} = \bar{y}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (41)$$

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 1: Системы первого порядка

$$K^0 = \begin{bmatrix} K_{1,1}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{1,n_k-1}^0 \\ K_{2,1}^0 & K_{2,2}^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2}^0 & K_{3,3}^0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n_k-1,n_k-2}^0 & K_{n_k-1,n_k-1}^0 \end{bmatrix}; \quad (64)$$

$$K_{k,k-1}^0 = -B_k^- \varepsilon_{k-1}(-0); \quad K_{k,k}^0 = B_k^+ \varepsilon_k(+0); \quad (65)$$

$$K_{1,1}^0 = B_1^+ \varepsilon_1(+0); \quad K_{1,n_k-1}^0 = -B_{n_k}^- \varepsilon_{n_k-1}(-0); \quad (66)$$

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{1,n_k-1}^1 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2}^1 & K_{3,3}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n_k-1,n_k-2}^1 & K_{n_k-1,n_k-1}^1 \end{bmatrix}; \quad (67)$$

$$K_{k,k-1}^1 = B_k^- \varepsilon_{k-1}(h_{k-1}^b); \quad K_{k,k}^1 = -B_k^+ \varepsilon_k(-h_k^b); \quad (68)$$

$$K_{1,1}^1 = -B_1^+ \varepsilon_1(-h_1^b); \quad K_{1,n_k-1}^1 = B_{n_k}^- \varepsilon_{n_k-1}(h_{n_k-1}^b). \quad (69)$$

Здесь символ \otimes обозначает операцию прямого произведения матриц.

Важно отметить, что матрицы типа $\varepsilon_k(+0)$ и $\varepsilon_k(-0)$ не зависят от x .

Недостатком системы (55) является то, что главная часть матрицы коэффициентов (60) имеет структуру, в которой диагональные блоки являются, по сути, вырожденными. В этой связи, несмотря на то, что СЛАУ является ленточной, для ее решения не могут применяться многие соответствующие итерационные методы [5, 6], а требуется, например, использование метода Гаусса с выбором главного элемента [2]. С этих позиций полезно указать пути устранения этого недостатка. Преобразуем СЛАУ (55) следующим образом: каждое уравнение системы, начиная с первого (и заканчивая предпоследним), будем заменять суммой этого уравнения с последующим (вместо исходного первого уравнения берем сумму исходного первого с ис-

ходным вторым, вместо исходного второго – сумму исходного второго с исходным третьим, и так далее). Наконец, вместо исходного последнего уравнения берем сумму исходного последнего с исходным первым. Рассмотрим теперь полученную после преобразований матрицу (60):

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{1,1} & \tilde{K}_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{K}_{1,n_k-1} \\ \tilde{K}_{2,1} & \tilde{K}_{2,2} & \tilde{K}_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{3,2} & \tilde{K}_{3,3} & \tilde{K}_{3,4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{K}_{n_k-1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{K}_{n_k-1,n_k-2} & \tilde{K}_{n_k-1,n_k-1} \end{bmatrix}; \quad (70)$$

Можно показать, что блочные элементы, стоящие на главной диагонали матрицы (70) не являются вырожденными, а это дает ряд очевидных преимуществ на этапе численного решения преобразованной системы (55).

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследования частично проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.
2. Грант 2.3.9 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.

3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).
4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных зданий и сооружений сложной архитектурной формы» выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)».
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве: Монография – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
6. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Информатика в строительстве (с основами численного моделирования). Учебное пособие. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
7. **Золотов А.Б., Лейтес Е.С.** Об одном подходе к решению систем дифференциальных уравнений при расчете строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, 1976, №3.
8. **Кеч В., Теодореску П.** Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
9. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
10. **Уилкинсон Дж.Х.** Алгебраическая проблема собственных значений.– М.: Наука, 1970.–564 с.
11. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
12. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
13. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Золотов А.Б., Ширинский В.И.** Методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики. // Вестник МГСУ, №3, 2006, с. 29-39.
2. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бинном. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
5. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. – СПб.: Лань, 2007.– 664 с.
6. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооруже-

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

КОРРЕКТНЫЕ МЕТОДЫ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧАСТЬ 2: СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

П.А. Акимов, В.Н. Сидоров

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами эффективного и корректного метода точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: точное аналитическое решение, корректный метод, многоточечная краевая задача, расчеты строительных конструкций, система дифференциальных уравнений, кусочно-постоянные коэффициенты, дискретно-континуальные методы

CORRECT ANALYTICAL SOLUTIONS OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE-CONSTANT COEFFICIENTS PART 2: SETS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Correct analytical solution of multipoint boundary problems of structural mechanics for set of second-order differential equations with piecewise-constant coefficients is under consideration in the distinctive paper.

Key words: correct analytical solution, multipoint boundary problems, structural mechanics, structural analysis, set of second-order differential equations, piecewise-constant coefficients, discrete-continual methods

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая вторая часть статьи продолжает цикл работ, посвященных разработке и исследованию корректных методов точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффи-

циентами. В первой части статьи рассматривались системы дифференциальных уравнений первого порядка, к которым, как справедливо отмечается, могут быть сведены системы в общем случае и произвольного порядка. Преимуществами подобного сведения являются большая универсальность и алгоритмичность, одновременное определение неизвестных функций со всеми необхо-

димыми производными, удобство и эффективность программной реализации. Вместе с тем, существует ряд задач, для которых переход к многоточечной краевой задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка уже не столь оправдан. К числу таких, например, может быть отнесена проблема изгиба тонких плит [6-7]. Как обосновывалось в [6-7], здесь, с определенных позиций, предпочтительнее, чтобы разрешающей являлась система уже не первого, а второго порядка. Именно эта постановка и будет рассматриваться в данной статье.

1. ПОСТАНОВКА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть имеем систему n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и n_k линейных граничных условий, заданных в граничных точках x_k^b , $k = 1, \dots, n_k$ (ниже, очевидно, полагается, что в число граничных точек входят также точки, в которых имеют место разрывы первого рода коэффициентов системы), т.е.:

$$\bar{y}^{(2)} - A_k \bar{y} = \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1; \quad (1)$$

$$B_k^- \bar{Y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{Y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (2)$$

$$B_1^+ \bar{Y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{Y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3)$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x) = [y_1(x) \ y_2(x) \ \dots \ y_n(x)]^T$ – искомая n -мерная вектор-функция; A_k , $k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные матрицы постоянных коэффициентов, квадратные n -го порядка; $\bar{f}_k = \bar{f}_k(x) = [f_{k,1}(x) \ f_{k,2}(x) \ \dots \ f_{k,n}(x)]^T$,

$k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные n -мерные вектор-функции правых частей; $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$, а также $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы и векторы правых частей $2n$ -го порядка граничных условий в точке x_k^b ; $\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(1)}(x) = d\bar{y}/dx$; $\bar{y}^{(2)} = \bar{y}^{(2)}(x) = d^2\bar{y}/dx^2$;

$$\bar{Y} = \bar{Y}(x) = \begin{bmatrix} \bar{y}(x) \\ \bar{y}^{(1)}(x) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим произвольное уравнение из (1). Имеем:

$$\bar{y}^{(2)} - A_k \bar{y} = \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \quad (5)$$

Матрицу A_k здесь можно представить в виде [4, 5, 8, 9]:

$$A_k = T_k J_k T_k^{-1}, \quad (6)$$

где $J_k = \begin{bmatrix} J_{k,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k,u} \end{bmatrix}; \quad (7)$

$$J_{k,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{k,p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k,p} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k,p} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь T_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы которой представляют собой собственные и корневые (присоединенные)

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 2: Системы второго порядка

векторы матрицы A_k ; J_k – жорданова форма матрицы A_k ; $J_{k,p}$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{k,p} \in \mathbb{C}$ матрицы A_k ; $\dim J_{k,p} = m_{k,p}$, $p = 1, \dots, u_k$.

Жордановой клетке $J_{k,p}$ соответствует один собственный вектор матрицы A_k и $(m_{k,p} - 1)$ корневых векторов $\bar{t}_{k,s}$, удовлетворяющих уравнениям [4, 5, 8, 9]:

$$(A_k - \lambda_{k,p} I)^j \bar{t}_{k,s} = 0, \quad (9)$$

$$j = 2, 3, \dots, m_{k,p}; \quad s = j + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i},$$

где I – единичная матрица n -го порядка; $\bar{t}_{k,s}$ – ненулевой вектор.

Важное значение для решения поставленной задачи имеет фундаментальная матрица-функция, по определению для системы (5) удовлетворяющая условиям [3, 10]

$$\varepsilon_k^{(2)}(x) - A_k \varepsilon_k(x) = \delta(x)I \quad (10)$$

или

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(2)}(x) - A_k \varepsilon_k(x) = 0, & x \neq 0 \\ \varepsilon_k(+0) - \varepsilon_k(-0) = 0, \\ \varepsilon_k^{(1)}(+0) - \varepsilon_k^{(1)}(-0) = I, \end{cases} \quad (11)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; I – единичная матрица соответствующего порядка. Как известно [6-7, 10], построение фундаментальной матрицы-функции типа $\varepsilon_k(x)$ предполагает вычисление функции от матрицы коэффициентов, которое может производиться с использованием жордановой формы (6). Однако подобный стандартный алгоритм не может быть рекомендован для численной реализации, так как в действительности не существует численно устойчивого способа построения жордановых форм [9], причем проблемы возникают для матриц,

в жордановой форме которых имеются клетки неединичного порядка. Кроме того, в задачах расчета конструкций имеются специфические особенности: число собственных значений, которым соответствуют жордановы клетки неединичного порядка, небольшое, и они, как правило, нулевые. В этой связи, для построения фундаментальной матрицы-функции используется описываемая ниже корректная авторская методика.

Как известно [8], ненулевой вектор \bar{t} такой, что $A\bar{t} = \lambda\bar{t}$ называют правым собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ , а ненулевой вектор \tilde{t} , для которого $A^T\tilde{t} = \lambda\tilde{t}$ именуют левым собственным вектором A , соответствующим собственному значению λ .

Собственные значения матриц A_k и A_k^T совпадают, и можем записать:

$$\tilde{T}_k = T_k^{-1}, \quad (12)$$

где T_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы $\bar{t}_{k,p}$ которой представляют собой собственные и корневые векторы матрицы A_k , причем

$$T_k = [\bar{t}_{k,1} \quad \bar{t}_{k,2} \quad \dots \quad \bar{t}_{k,n}]^T; \quad (13)$$

$$A_k \bar{t}_{k,s} = \lambda_{k,p} \bar{t}_{k,s}, \quad s = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i}; \quad (14)$$

\tilde{T}_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцы $\tilde{t}_{k,p}$ которой являются собственными и корневыми векторами матрицы A_k^T ,

$$\tilde{T}_k = [\tilde{t}_{k,1} \quad \tilde{t}_{k,2} \quad \dots \quad \tilde{t}_{k,n}]^T; \quad (15)$$

$$A_k^T \tilde{t}_{k,s} = \lambda_{k,p} \tilde{t}_{k,s} \Leftrightarrow \tilde{t}_{k,s}^T A_k = \lambda_{k,p} \tilde{t}_{k,s}^T, \quad (16)$$

$$s = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} m_{k,i}.$$

Таким образом, вместо обращения комплексной матрицы T_k при построении жорданова разложения, на практике может производиться определение собственных значений и векторов матрицы A_k^T , откуда

$$A_k = T_k J_k \tilde{T}_k. \quad (17)$$

Произведем такую сортировку собственных значений (и соответственно преобразования матриц T_k , J_k и \tilde{T}_k) матриц A_k и A_k^T , что будет выполнено условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda_{k,p}, p = 1, \dots, l_{k,1} : \\ \lambda_{k,p} \neq 0, m_{k,p} = 1, \tilde{m}_{k,p} = 1 \\ \forall \lambda_{k,p}, p = l_{k,1} + 1, \dots, l_{k,2} : \\ \lambda_{k,p} \neq 0, m_{k,p} = 1, \tilde{m}_{k,p} > 1 \\ \forall \lambda_{k,p}, p = l_{k,2} + 1, \dots, u_k : \lambda_{k,p} = 0, \end{array} \right\} \text{простые} \quad (18)$$

где $\tilde{m}_{k,p}$, $m_{k,p}$ – соответственно кратность собственного значения $\lambda_{k,p}$ и размерность жордановой клетки, которая ему соответствует.

Данная сортировка также важна для построения правильного соответствия между собственными векторами матриц A_k и A_k^T , определенными с использованием стандартного программного обеспечения.

Пусть $T_{k,11}, T_{k,12}, \tilde{T}_{k,11}, \tilde{T}_{k,12}$ – матрицы размером $n \times l_{k,1}$, $n \times (l_{k,2} - l_{k,1})$, $l_{k,1} \times n$, $(l_{k,2} - l_{k,1}) \times n$ соответственно, элементы которых задаются формулами:

$$(T_{k,11})_{ij} = (T_k)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq l_{k,1}; \quad (19)$$

$$(\tilde{T}_{k,11})_{ij} = (\tilde{T}_k)_{ij}, \quad 1 \leq i \leq l_{k,1}; \quad 1 \leq j \leq n; \quad (20)$$

$$(T_{k,12})_{pq} = (T_k)_{ij}; \quad (\tilde{T}_{k,12})_{qp} = (\tilde{T}_k)_{ji}, \quad (21)$$

$$p = i; \quad q = j - l_{k,1}; \quad 1 \leq i \leq n; \quad l_{k,1} < j \leq n.$$

Очевидны соотношения

$$T_k = [T_{k,1} \quad T_{k,2}]; \quad \tilde{T}_k = [\tilde{T}_{k,1}^T \quad \tilde{T}_{k,2}^T]^T, \quad (22)$$

$$\text{где } T_{k,1} = [T_{k,11} \quad T_{k,12}]; \quad \tilde{T}_{k,1} = [\tilde{T}_{k,11}^T \quad \tilde{T}_{k,12}^T]^T. \quad (23)$$

Как известно, матрицей проектирования P (проектором) называется матрица, обладающая свойством $P^2 = P$ [8]. Пусть $P_{k,11}, P_{k,12}, P_{k,2}$ – матрицы проектирования на подпространства, натянутые на собственные и корневые векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_{k,p}, p = 1, \dots, l_{k,1}; \lambda_{k,p}, p = l_{k,1} + 1, \dots, l_{k,2}$ и $\lambda_{k,p}, p = l_{k,2} + 1, \dots, u_k$,

$$P_{k,11} = T_{k,11} D_k \tilde{T}_{k,11}; \quad P_{k,12} = T_{k,12} (\tilde{T}_{k,12} T_{k,12})^{-1} \tilde{T}_{k,12}; \quad (24)$$

$$P_{k,1} = P_{k,11} + P_{k,12}; \quad P_{k,2} = I - P_{k,1}, \quad (25)$$

где D – диагональная матрица $l_{k,1}$ -го порядка, значимые элементы которой

$$(D_k)_{ii} = (\bar{t}_{k,i}, \tilde{t}_{k,i}), \quad 1 \leq i \leq l_{k,1}, \quad (26)$$

т.е.

$$(D_k^{-1})_{ii} = 1/(\bar{t}_{k,i}, \tilde{t}_{k,i}); \quad (D_k^{-1})_{ij} = 0, \quad (27)$$

$$i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, l_{k,1}.$$

После определения собственных значений и векторов матриц A_k и A_k^T с использованием стандартного программного обеспечения и выполнения сортировок, как правило, возникает необходимость в проведении биортогонализации собственных векторов и их перестановках. Это связано с тем, что нормировка последних для матриц A_k и A_k^T может быть в общем случае различной. Кроме того, предложенная ранее сортировка, может сохранить несоответствия между собственными векторами матриц A_k и A_k^T при кратных ненулевых собственных значениях. Форму-

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 2: Системы второго порядка
 Будем отдельно рассматривать построение каждой из указанных составляющих. Для первой составляющей можем записать:

$$\tilde{T}_{k,11} \Rightarrow D_k^{-1} \tilde{T}_{k,11}; \quad \tilde{T}_{k,12} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,12} T_{k,12})^{-1} \tilde{T}_{k,12}. \quad (28)$$

Разложим матрицу на две составляющие матрицы n -го порядка

$$A_k = A_{k,1} + A_{k,2}, \quad (29)$$

где $A_{k,1} = T_{k,1} J_{k,1} \tilde{T}_{k,1}$; $A_{k,2} = A_k - A_{k,1}$;

$$J_{k,1} = \text{diag}\{\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \dots, \lambda_{k,l_2}\}. \quad (30)$$

Иными словами, здесь $A_{k,1}$ и $A_{k,2}$ – части матрицы A_k , отвечающие соответственно ненулевым и нулевым (кратным и простым) собственным значениям.

Разложение (30) предлагается называть при решении задач строительной механики частичным жордановым разложением. Здесь можно провести следующую аналогию: наряду со стандартным термином «проблема собственных значений», существует и «частичная проблема собственных значений».

Весьма важными представляются следующие соотношения:

$$A_{k,1} = P_{k,1} A; \quad A_{k,2} = P_{k,2} A; \\ A_{k,1} A_{k,2} = A_{k,2} A_{k,1} = 0. \quad (30)$$

Фундаментальную матрицу-функцию представим в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon_k(x) = \varepsilon_{k,1}(x) + \varepsilon_{k,2}(x), \quad (31)$$

где $\varepsilon_{k,1}(x)$ – составляющая фундаментальной матрицы-функции, отвечающая подпространству простых ненулевых собственных значений; $\varepsilon_{k,2}(x)$ – составляющая фундаментальной матрицы-функции, отвечающая подпространству простых и кратных нулевых собственных значений.

$$\varepsilon_{k,1}(x) = T_{k,1} \varepsilon_{k,0,1}(x) \tilde{T}_{k,1}, \quad (32)$$

где

$$\varepsilon_{k,0,1}(x) = \\ = \text{diag} \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{\lambda_{k,1}} |x|)}{2\sqrt{\lambda_{k,1}}} \dots - \frac{\exp(-\sqrt{\lambda_{k,l_1}} |x|)}{2\sqrt{\lambda_{k,l_1}}} \right\}. \quad (33)$$

Построение $\varepsilon_{k,2}(x)$ выполняется по принципиально иной схеме. Прежде всего, рассмотрим вспомогательную задачу построения фундаментальной матрицы $\tilde{\varepsilon}(x)$ для системы уравнений

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)}(x) - H \tilde{\varepsilon}(x) = \delta(x) I, \quad (34)$$

$$\text{где } H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Матрицу $\tilde{\varepsilon}_k(x)$ можно представить в виде

$$\tilde{\varepsilon}(x) = [\tilde{\varepsilon}_1(x) \quad \tilde{\varepsilon}_2(x) \quad \dots \quad \tilde{\varepsilon}_n(x)], \quad (36)$$

где $\tilde{\varepsilon}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – столбцы матрицы $\tilde{\varepsilon}(x)$,

$$\tilde{\varepsilon}_i(x) = [\tilde{\varepsilon}_{1,i}(x) \quad \tilde{\varepsilon}_{2,i}(x) \quad \dots \quad \tilde{\varepsilon}_{n,i}(x)]^T, \quad (37) \\ i = 1, 2, \dots, n;$$

$\tilde{\varepsilon}_{i,j}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – элементы матрицы $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Рассмотрим, например, процесс определения компонент вектора $\tilde{\varepsilon}_i(x)$. Согласно (34)-(35) имеем:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1,i}''(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{2,i}''(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{3,i}''(x) \\ \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{i,i}''(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{i+1,i}''(x) \\ \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{n-1,i}''(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{n,i}''(x) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1,i}(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{2,i}(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{3,i}(x) \\ \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{i,i}(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{i+1,i}(x) \\ \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{n-1,i}(x) \\ \tilde{\varepsilon}_{n,i}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \delta(x) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Последнее уравнение системы (31) имеет вид:

$$\tilde{\varepsilon}_{n,i}''(x) = 0, \text{ откуда } \tilde{\varepsilon}_{n,i}(x) = C_{n,i,1}x + C_{n,i,0},$$

где $C_{n,i,1}, C_{n,i,0}$ – константы интегрирования.

Условимся дальше все константы интегрирования полагать равными нулю. С этих позиций, очевидно, что из последних $n-i$ уравнений системы (38) после выполнения обратного хода аналогичного тому, что принят в методе Гаусса получим:

$$\tilde{\varepsilon}_{p,i}(x) = 0, \quad p = i+1, i+2, \dots, n. \tag{39}$$

Для i -го уравнения системы (38) в скалярном виде запишем

$$\tilde{\varepsilon}_{i,i}''(x) = \delta(x),$$

откуда

$$\tilde{\varepsilon}_{i,i}(x) = \xi(x), \tag{40}$$

где $\xi(x)$ – фундаментальная функция дифференциального уравнения

$$\xi''(x) = \delta(x),$$

т.е.
$$\xi(x) = x_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{41}$$

Продолжая обратный ход с учетом высказанных ранее соображений и известных свойств фундаментальной функции, будем иметь:

$$\tilde{\varepsilon}_{p,i}(x) = \underbrace{\xi(x) * \xi(x) * \dots * \xi(x)}_{i-p \text{ операций свертки}}, \quad p = 1, 2, \dots, i-1. \tag{42}$$

Обобщая формулы (39), (40) и (42) получим:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{p,i}(x) &= \\
 &= \begin{cases} \underbrace{\xi(x) * \xi(x) * \dots * \xi(x)}_{i-p \text{ операций свертки}}, & p = 1, 2, \dots, i-1 \\ \xi(x), & p = i \\ 0, & p = i+1, i+2, \dots, n, \end{cases} \\
 & \qquad \qquad \qquad p = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Вводя для краткости условное обозначение

$$\xi^{i-p+1}(x) = \underbrace{\xi(x) * \xi(x) * \dots * \xi(x)}_{i-p \text{ операций свертки}},$$

причем

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 2: Системы второго порядка

$$\xi^1(x) = \xi(x), \quad (44) \quad \xi^2(x) = \xi(x) * \xi(x) = x_+ * x_+ = \frac{1}{3!} x_+^3;$$

перепишем (43) в виде

$$\tilde{\varepsilon}_{p,i} = \begin{cases} \xi^{i-p+1}(x), & p = 1, 2, \dots, i-1 \\ \xi(x), & p = i \\ 0, & p = i+1, i+2, \dots, n, \end{cases} \quad (45)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

В матричном виде (45) выглядит следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \xi(x) & \xi^2(x) & \xi^3(x) & \dots & \xi^{n-2}(x) & \xi^{n-1}(x) \\ 0 & \xi(x) & \xi^2(x) & \dots & \xi^{n-3}(x) & \xi^{n-2}(x) \\ 0 & 0 & \xi(x) & \dots & \xi^{n-4}(x) & \xi^{n-3}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi(x) & \xi^2(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi(x) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Остановимся подробнее на вычислении сверток в выражениях (45). Как известно [7],

$$\theta(x) * x_+^n = \frac{1}{n+1} x_+^{n+1}, \quad (47)$$

в частности

$$\theta(x) * x_+ = \frac{1}{2} x_+^2. \quad (48)$$

Интегрируя (48) по переменной x , получим:

$$\int [\theta(x) * x_+^n] dx = \left[\int \theta(x) dx \right] * x_+^n =$$

$$= x_+ * x_+^n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} x_+^{n+2},$$

$$\text{т.е.} \quad x_+ * x_+^n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} x_+^{n+2}. \quad (49)$$

На основании (41) находим:

и т.д.

Обобщая приведенные формулы, имеем:

$$\xi^{i-p+1}(x) = \underbrace{\xi(x) * \xi(x) * \dots * \xi(x)}_{i-p \text{ операций свертки}} =$$

$$= \frac{1}{(2(p-i)+1)!} x^{2(i-p)+1}. \quad (50)$$

Подставляя (42) и (50) в (46), получим:

$$\tilde{\varepsilon}_{p,i} = \begin{cases} \frac{1}{(2(i-p)+1)!} x^{2(i-p)+1}, & p = 1, 2, \dots, i-1 \\ x_+, & p = i \\ 0, & p = i+1, i+2, \dots, n, \end{cases}$$

$$p = 1, 2, \dots, n. \quad (51)$$

Принимая во внимание (51), переписываем (47) в виде:

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} x_+ & \frac{1}{3!} x_+^3 & \frac{1}{5!} x_+^5 & \frac{1}{7!} x_+^7 & \dots & \frac{1}{(2n-1)!} x_+^{2n-1} \\ 0 & x_+ & \frac{1}{3!} x_+^3 & \frac{1}{5!} x_+^5 & \dots & \frac{1}{(2n-3)!} x_+^{2n-3} \\ 0 & 0 & x_+ & \frac{1}{3!} x_+^3 & \dots & \frac{1}{(2n-5)!} x_+^{2n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_+ \end{bmatrix}. \quad (52)$$

или с учетом (35)

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x) &= x_+ E + \frac{1}{3!} x_+^3 H + \frac{1}{5!} x_+^5 H^2 + \\ &+ \frac{1}{7!} x_+^7 H^3 + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} x_+^{2n-1} H^{n-1} = (53) \\ &= x_+ I + \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} H^j, \end{aligned}$$

где I – единичная матрица того же порядка, что и матрица H .

По сути, (53) можно представить и в виде бесконечной суммы, имея в виду нильпотентность матрицы H :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x) &= x_+ I + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} H^j = \\ &= x_+ I + \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} H^j. \end{aligned} \quad (54)$$

Итак, построив фундаментальную матрицу-функцию $\tilde{\varepsilon}(x)$ для вспомогательной задачи (34), по аналогии можем записать:

$$\varepsilon_{k,2}(x) = x_+ P_{k,2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} A_{k,2}^j. \quad (55)$$

Если обозначить максимальный порядок жордановой клетки соответствующей нулевому собственному значению матрицы A_k через $m_{k,\max}$, получим:

$$\varepsilon_{k,2}(x) = x_+ P_{k,2} + \sum_{j=1}^{m_{k,\max}} \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} A_{k,2}^j, \quad (56)$$

причем при решении практических задач строительной механики ряд (56) будет содержать небольшое число слагаемых. Объединяя (32) и (56), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(x) &= T_{k,1} \varepsilon_{k,0,1}(x) \tilde{T}_{k,1} + \\ &+ x_+ P_{k,2} + \sum_{j=1}^{m_{k,\max}} \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} A_{k,2}^j. \end{aligned} \quad (57)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Будем обозначать вектор-функцию $\bar{Y}(x)$, определяемую формулой (4), на произвольном интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) через $\bar{Y}_k(x)$, т.е.

$$\bar{Y}_k(x) \equiv \bar{Y}(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \quad (58)$$

Имеем [6-7]:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k(x) &= (E_k(x - x_k^b) - E_k(x - x_{k+1}^b)) \bar{C}_k + \\ &+ \tilde{\varepsilon}_k * \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \end{aligned} \quad (59)$$

где
$$E_k(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_k(x) & \varepsilon_k^{(1)}(x) \\ \varepsilon_k^{(1)}(x) & \varepsilon_k^{(2)}(x) \end{bmatrix}; \quad (60)$$

– матрица-функция типа Ганкеля;

$$\tilde{\varepsilon}_k(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_k(x) \\ \varepsilon_k^{(1)}(x) \end{bmatrix}; \quad (61)$$

\bar{C}_k – вектор искомых постоянных коэффициентов $2n$ -го порядка; * – символ обозначающий операцию свертки;

$$\bar{f}_k(x) \equiv f(x) \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (62)$$

$$\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (63)$$

Введя обозначения

$$\tilde{E}_k(x) = E_k(x - x_k^b) - E_k(x - x_{k+1}^b); \quad (64)$$

$$\bar{S}_k(x) = \tilde{\varepsilon}_k * \bar{f}_k, \quad (65)$$

Можем переписать (59) в виде

$$\bar{Y}_k(x) = \tilde{E}_k(x) \bar{C}_k + \bar{S}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \quad (66)$$

Подставляем (66) в граничные условия (2)-(3) с учетом соотношений

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 2: Системы второго порядка

$$\bar{Y}(x_k - 0) = \bar{Y}_{k-1}(x_k - 0), \quad k = 2, \dots, n_k; \quad (67) \quad \bar{G} = [\bar{G}_1^T \quad \bar{G}_2^T \quad \dots \quad \bar{G}_{n_k-1}^T]^T; \quad (77)$$

$$\bar{Y}(x_k + 0) = \bar{Y}_k(x_k + 0), \quad k = 1, \dots, n_k - 1. \quad (68) \quad \bar{C} = [\bar{C}_1^T \quad \bar{C}_2^T \quad \dots \quad \bar{C}_{n_k-1}^T]^T; \quad (78)$$

В результате получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов \bar{C}_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$:

$$\bar{G}_1 = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- - B_1^+ \bar{S}_1(x_1^b + 0) - B_{n_k}^- \bar{S}_{n_k-1}(x_{n_k}^b - 0); \quad (79)$$

$$\bar{G}_k = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+ - B_k^- \bar{S}_{k-1}(x_k^b - 0) - B_k^+ \bar{S}_k(x_k^b + 0), \quad k = 2, \dots, n_k - 1. \quad (80)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_k^- \tilde{E}_{k-1}(x_k^b - 0) \bar{C}_{k-1} + B_k^+ \tilde{E}_k(x_k^b + 0) \bar{C}_k &= \\ = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+ - B_k^- \bar{S}_{k-1}(x_k^b - 0) - B_k^+ \bar{S}_k(x_k^b + 0), & \\ & k = 2, \dots, n_k - 1; \\ B_1^+ \tilde{E}_1(x_1^b + 0) \bar{C}_1 + B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(x_{n_k}^b - 0) \bar{C}_{n_k-1} &= \\ = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^- - B_1^+ \bar{S}_1(x_1^b + 0) - B_{n_k}^- \bar{S}_{n_k-1}(x_{n_k}^b - 0). & \end{aligned} \right. \quad (69)$$

В матрице коэффициентов (74) полезно выделить главную K^0 и дополнительную K^1 части:

$$K = K^0 + K^1, \quad (81)$$

где $K^0 =$

$$= \begin{bmatrix} K_{1,1}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{1,n_k-1}^0 \\ K_{2,1}^0 & K_{2,2}^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2}^0 & K_{3,3}^0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n_k-1,n_k-2}^0 & K_{n_k-1,n_k-1}^0 \end{bmatrix}; \quad (82)$$

$K^1 =$

$$= \begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{1,n_k-1}^1 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2}^1 & K_{3,3}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n_k-1,n_k-2}^1 & K_{n_k-1,n_k-1}^1 \end{bmatrix}; \quad (83)$$

На основании свойств фундаментальной матрицы-функции записываем:

$$\tilde{E}_{k-1}(x_k^b - 0) = E_{k-1}(h_{k-1}^b - 0) - E_{k-1}(-0) = E_{k-1}(h_{k-1}^b) - E_{k-1}(-0), \quad k = 2, \dots, n_k; \quad (70)$$

$$\tilde{E}_k(x_k^b + 0) = E_k(+0) - E_k(0 - h_k^b) = E_k(+0) - E_k(-h_k^b), \quad k = 1, \dots, n_k - 1, \quad (71)$$

$$\text{где } h_k^b = x_{k+1}^b - x_k^b, \quad k = 1, \dots, n_k - 1. \quad (72)$$

Слагаемые $E_k(-0)$ и $E_k(+0)$ будем называть главными частями.

Систему (59) можно переписать в матричном виде

$$K \bar{C} = \bar{G}, \quad (73)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{1,n_k-1} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2} & K_{3,3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{n_k-1,n_k-2} & K_{n_k-1,n_k-1} \end{bmatrix}; \quad (74)$$

$$K_{k,k-1} = B_k^- \tilde{E}_{k-1}(x_k^b - 0); \quad K_{k,k} = B_k^+ \tilde{E}_k(x_k^b + 0); \quad (75)$$

$$K_{1,1} = B_1^+ E_1(x_1^b + 0);$$

$$K_{1,n_k-1} = B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(x_{n_k}^b - 0); \quad (76)$$

$$K_{k,k-1}^0 = -B_k^- \tilde{E}_{k-1}(-0); \quad K_{k,k}^0 = B_k^+ \tilde{E}_k(+0); \quad (84)$$

$$K_{1,1}^0 = B_1^+ \tilde{E}_1(+0); \quad K_{1,n_k-1}^0 = -B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(-0); \quad (85)$$

$$K_{k,k-1}^1 = B_k^- \tilde{E}_{k-1}(h_{k-1}^b); \quad K_{k,k}^1 = -B_k^+ \tilde{E}_k(-h_k^b); \quad (86)$$

$$K_{1,1}^1 = -B_1^+ \tilde{E}_1(-h_1^b); \quad K_{1,n_k-1}^1 = B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(h_{n_k-1}^b). \quad (87)$$

Система (73) насчитывает $2n \times (n_k - 1)$ уравнений. По своей структуре такая СЛАУ называется системой с окаймлением и для ее решения могут применяться специальные методы [2, 4, 5].

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследования частично проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.
2. Грант 2.3.9 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.
3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).
4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных зданий и сооружений сложной архитектурной формы» выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П.А., Золотов А.Б., Ширинский В.И. Методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики. // Вестник МГСУ, №3, 2006, с. 29-39.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бинном. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
5. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
7. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
8. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

КОРРЕКТНЫЕ МЕТОДЫ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧАСТЬ 3: УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

П.А. Акимов, В.Н. Сидоров

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена описанию разработанного авторами эффективного и корректного метода точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с кусочно-постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: точное аналитическое решение, корректный метод, многоточечная краевая задача, расчеты строительных конструкций, дифференциальные уравнения, кусочно-постоянные коэффициенты, дискретно-континуальные методы

CORRECT ANALYTICAL SOLUTIONS OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE-CONSTANT COEFFICIENTS PART 3: EQUATIONS OF ARBITRARY ORDER

Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Correct analytical solution of multipoint boundary problems of structural mechanics for differential equations of arbitrary order with piecewise-constant coefficients is under consideration in the distinctive paper.

Key words: correct analytical solution, multipoint boundary problems, structural mechanics, structural analysis, differential equation of arbitrary order, piecewise-constant coefficients, discrete-continual methods

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей третьей части статьи представлен эффективный корректный метод точного аналитического решения многоточечных краевых задач [1] строительной механики для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [18] произвольного по-

рядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Необходимость решения подобного рода задач возникает при расчетах разнообразных строительных конструкций (например, балки, стержни [3, 13-17]) на различные виды воздействий.

**1. ПОСТАНОВКА МНОГОТОЧЕЧНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО
ПОРЯДКА
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Пусть имеем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (ОЛДУ) n -го порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и n_k линейных граничных условий, заданных в граничных точках x_k^b , $k = 1, \dots, n_k$ (ниже, очевидно, полагается, что в число граничных точек входят также точки, в которых имеют место разрывы первого рода коэффициентов уравнения), т.е.:

$$\sum_{p=0}^n a_{k,p} y^{(p)}(x) = f_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad (2)$$

$$k = 2, \dots, n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (3)$$

где $y(x)$ – искомая функция; $a_{k,p}$, $p = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные постоянные коэффициенты; $f_k = f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n_k - 1$ – заданные функции правых частей; $B_k^-, B_k^+, \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$, а также $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы и векторы правых частей n -го порядка граничных условий в точке x_k^b ;

$$\bar{y} = \bar{y}(x) = [y(x) \ y^{(1)}(x) \ y^{(2)}(x) \ \dots \ y^{(n-1)}(x)]^T, \quad (4)$$

причем здесь и далее обозначено

$$\bar{y}^{(s)} = \bar{y}^{(s)}(x) = d^s \bar{y} / dx^s, \quad (5)$$

$$s = 1, 2, \dots, n - 1.$$

**2. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ
МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ
ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО
ПОРЯДКА**

Рассмотрим произвольное уравнение из (1).
Имеем:

$$\sum_{p=0}^n a_{k,p} y^{(p)}(x) = f_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \quad (6)$$

Фундаментальная функция $\varepsilon_k(x)$ дифференциального уравнения (6) по определению удовлетворяет уравнению [4, 19]

$$\sum_{p=0}^n a_{k,p} \varepsilon_k^{(p)} = \delta(x), \quad (7)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Как известно, $\varepsilon_k(x)$ определена не однозначно, а с точностью до решения соответствующего однородного дифференциального уравнения. В тоже время ее можно определить однозначно, выбирая в некотором специальном виде. А именно, для корректного использования фундаментальной функции в практических расчетах при решении задач строительной механики, целесообразно исключить из ее выражения экспоненциальные функции с положительными аргументами. В противном случае может возникнуть необходимость оперировать в расчетах с очень большими числами, что, как правило, либо препятствует получению результатов с желаемой точностью, либо ведет к переполнению разрядной сетки ЭВМ.

В соответствии с [7-12] целесообразно использовать следующие определяющие формулы для фундаментальной функции:

$$\varepsilon_k(x) = (\bar{C}_k, \bar{\psi}_k) = \sum_{r=1}^{n_{k,r}} (\bar{C}_{k,r}, \bar{\psi}_{k,r}), \quad (8)$$

где $\bar{C}_k = [\bar{C}_{k,1}^T \ \bar{C}_{k,2}^T \ \dots \ \bar{C}_{k,n_{k,r}}^T]^T$; (9)

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 3: Уравнения произвольного порядка

$$\bar{C}_{k,r} = [C_{k,r,1} \ C_{k,r,2} \ \dots \ C_{k,r,m_{k,r}}]^T; \quad (10) \quad \text{уравнений при решении многоточечных краевых задач.}$$

$$\bar{\psi}_k = [\bar{\psi}_{k,1}^T \ \bar{\psi}_{k,2}^T \ \dots \ \bar{\psi}_{k,n_{k,r}}^T]^T; \quad (11)$$

$$\bar{\psi}_{k,r} = \begin{cases} \chi(x, \lambda_{k,r}) \exp(z_{k,r}), & \lambda_{k,r} \neq 0; \ m_{k,r} = 0 \\ \chi(x, \lambda_{k,r}) \exp(z_{k,r}) \bar{z}_{k,r}, & \lambda_{k,r} \neq 0; \ m_{k,r} > 0 \\ \chi(x, \lambda_{k,r}), & \lambda_{k,r} = 0; \ m_{k,r} = 0 \\ \chi(x, \lambda_{k,r}) \bar{x}_{k,r}, & \lambda_{k,r} = 0; \ m_{k,r} > 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\bar{z}_{k,r} = [1 \ z_r \ z_r^2 \ \dots \ z_r^{m_{k,r}}]^T; \quad (13)$$

$$\bar{x}_{k,r} = [1 \ x_r \ x_r^2 \ \dots \ x_r^{m_{k,r}}]^T; \quad (14)$$

$$z_{k,r} = \lambda_{k,r} x; \quad (15)$$

$\lambda_{k,r}, r=1, \dots, n_{k,r}$ – различные корни соответствующего (7) характеристического уравнения (определяются аналитически (как правило, это возможно) или численно на ЭВМ)

$$\sum_{p=0}^n a_{k,p} \lambda^p = 0; \quad (16)$$

$\tilde{m}_{k,r}, r=1, \dots, n_{k,r}$ – соответствующие кратности указанных корней; $C_{k,r,j}, j=1, \dots, m_{k,r}, r=1, \dots, n_{k,r}$ – постоянные коэффициенты; $\chi(x, \lambda_{k,r})$ – характеристическая функция,

$$\chi(x, \lambda_{k,r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_{k,r}) \leq 0 \\ & \text{или } x < 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_{k,r}) > 0 \\ 0, & \text{если } x > 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_{k,r}) > 0 \\ & \text{или } x < 0 \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda_{k,r}) \leq 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$m_{k,r} = \tilde{m}_{k,r} - 1. \quad (18)$$

Выражение (8) для фундаментальной функции позволяет исключить перечисленные выше крайне нежелательные в расчетной практике случаи (с этой целью вводится соответствующая характеристическая функция) и всегда соответствует оптимальной обусловленности системы разрешающих

Величина $z_{k,r}$ выполняет также роль единого критерия, связывающего понятия протяженности системы и явления типа краевого эффекта. Постоянные коэффициенты $C_{k,r,j}, j=1, \dots, m_{k,r}, r=1, \dots, n_{k,r}$ определяются из условий непрерывности в точке $x=0$ функции $\varepsilon_k(x)$ и ее производных до $(n-2)$ -го порядка включительно и того факта, что производная $(n-1)$ -го порядка в этой точке имеет «скачок» равный $1/a_{k,n}$ [4, 19]:

$$\varepsilon_k^{(s)}(+0) - \varepsilon_k^{(s)}(-0) = \frac{1}{a_{k,n}} \delta_{s,n-1}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad (19)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

При определении производных высоких порядков фундаментальной функции зачастую приходится сталкиваться с известными трудностями, связанными, прежде всего, с громоздкостью сопутствующих математических выкладок. Еще большие сложности сопряжены с вопросами нахождения первообразных фундаментальной функции. Классические пути отыскания производных и первообразных заданной функции в данном случае не являются самыми рациональными. Предложенный в [7-12] способ определения производных ($s > 0$) и первообразных ($s < 0$) фундаментальной функции любого требуемого порядка s позволяет «обойти» упомянутые трудности и значительно уменьшить сложности, связанные с соответствующими процессами дифференцирования и интегрирования. Данный способ основывается на указанных в [7-12] явных и рекуррентных формулах вычисления постоянных коэффициентов в соответствующих выражениях.

$$\varepsilon_k^{(s)}(x) = (\bar{C}_k^s, \bar{\psi}_k) = \sum_{r=1}^{n_{k,r}} (\bar{C}_{k,r}^s, \bar{\psi}_{k,r}), \quad s \in Z, \quad (20)$$

$$\bar{C}_k^{s+1} = W_k \bar{C}_k^s, \quad (21)$$

$$K_{k,k-1}^0 = -B_k^- \tilde{E}_{k-1}(-0); \quad K_{k,k}^0 = B_k^+ \tilde{E}_k(+0); \quad (53)$$

$$K_{1,1}^0 = B_1^+ \tilde{E}_1(+0); \quad K_{1,n_k-1}^0 = -B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(-0); \quad (54)$$

$$K_{k,k-1}^1 = B_k^- \tilde{E}_{k-1}(h_{k-1}^b); \quad K_{k,k}^1 = -B_k^+ \tilde{E}_k(-h_k^b); \quad (55)$$

$$K_{1,1}^1 = -B_1^+ \tilde{E}_1(-h_1^b); \quad K_{1,n_k-1}^1 = B_{n_k}^- \tilde{E}_{n_k-1}(h_{n_k-1}^b). \quad (56)$$

Система (42) насчитывает $2n \times (n_k - 1)$ уравнений. По своей структуре такая СЛАУ называется системой с окаймлением и для ее решения могут применяться специальные методы [5, 6].

Недостатком системы (42) является то, что главная часть матрицы коэффициентов (43) имеет структуру, в которой диагональные блоки являются, по сути, вырожденными. В этой связи, несмотря на то, что СЛАУ является ленточной, для ее решения не могут применяться многие соответствующие итерационные методы, а требуется, например, использование метода Гаусса с выбором главного элемента [2]. С этих позиций полезно указать пути устранения этого недостатка. Преобразуем СЛАУ (42) следующим образом: каждое уравнение системы, начиная с первого (и заканчивая предпоследним), будем заменять суммой этого уравнения с последующим (вместо исходного первого уравнения берем сумму исходного первого с исходным вторым, вместо исходного второго – сумму исходного второго с исходным третьим, и так далее). Наконец, вместо исходного последнего уравнения берем сумму исходного последнего с исходным первым. Рассмотрим теперь полученную после преобразования матрицу (43):

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{1,1} & \tilde{K}_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{K}_{1,n_k-1} \\ \tilde{K}_{2,1} & \tilde{K}_{2,2} & \tilde{K}_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{3,2} & \tilde{K}_{3,3} & \tilde{K}_{3,4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{K}_{n_k-1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{K}_{n_k-1,n_k-2} & \tilde{K}_{n_k-1,n_k-1} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Можно показать, что блочные элементы, стоящие на главной диагонали матрицы (57) не являются вырожденными, а это дает ряд очевидных преимуществ на этапе численного решения преобразованной системы (42).

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследования частично проводились в рамках следующих работ:

1. Грант НШ-8684.2010.8 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Многоуровневые численные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочности зданий и сооружений с учетом конструктивных и физических особенностей» на 2010-2011 гг.
2. Грант 2.3.11 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка и исследование дискретно-континуальных методов для расчета строительных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по одному из направлений» на 2011-2013 гг.
3. НИР «Разработка теории и алгоритмов построения корректных аналитических решателей многоточечных краевых задач применительно к расчетам строительных конструкций», выполняемой по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» (проект 2.1.2/12148).
4. НИР «Разработка, исследование и развитие математических методов и программно-алгоритмических средств, реализующих безопасную технологию возведения уникальных зданий и сооружений сложной архитектурной формы» выполняемой по аналитической ведомственной целевой програм-

Корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Часть 3: Уравнения произвольного порядка

ме «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Золотов А.Б., Ширинский В.И.** Методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики. // Вестник МГСУ, №3, 2006, с. 29-39.
2. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бинном. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
4. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
6. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве: Монография – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Информатика: Учебник – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
10. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Информатика в строительстве (с основами численного моделирования). Учебное пособие. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2010. – 336 с.
11. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
12. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численно-аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
13. **Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.** Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.
14. **Ржаницын А.Р.** Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
15. **Саргсян А.Е.** Строительная механика. Механика инженерных конструкций. – М.: Высшая школа, 2008. – 464 с.
16. **Сидоров В.Н.** Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Редакционно-издательский центр Генерального штаба Вооруженных Сил Российской Федерации, 2002. – 352 с.
17. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Издательство АСВ, 2005. – 736 с.
18. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
19. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

КОНЦЕПЦИЯ ВНЕДРЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ПРАКТИКУ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ РИСКА ИХ ЛАВИНООБРАЗНОГО РАЗРУШЕНИЯ

В.Н. Алёхин, А.Б. Ханина, А.Г. Павленко

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»,
г. Екатеринбург, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Исследована методика проектирования зданий и сооружений с учетом риска их лавинообразного разрушения. Разработана концепция экспертной системы оптимального проектирования строительных конструкций

Ключевые слова: экспертные системы, оптимальное проектирование, лавинообразное обрушение, строительные конструкции, генетический алгоритм

THE CONCEPTION OF MAKING DECISION SUPPORT SYSTEM INTRODUCTION INTO BUILDING STRUCTURES DESIGN PRACTICE WITH AN ALLOWANCE FOR DISPROPORTIONATE COLLAPSE RISK

Vladimir N. Alekhin, Anna B. Khanina, Alexander G. Pavlenko

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education
«Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin»,
Ekaterinburg, RUSSIA

ABSTRACT: Design methods taking into account the disproportionate collapse risk of buildings and structures is investigated. The concept of expert system supporting optimum design of building structures is developed.

Key words: expert systems, optimum design, disproportionate collapse, building structures, genetic algorithm

Проблема безопасности и экономичности зданий и сооружений относится к числу основных проблем, выдвинутых на первый план непрерывно увеличивающимся объемом строительства в нашей стране. В последнее время активно обсуждаются методы расчета конструкций зданий и сооружений с учетом риска лавинообразного разрушения. Как отмечается в [1], необходимы разработки по развитию усовершенствованной методики оценки уязвимости конструктивных систем и их совершенствования для смягчения последствий лавинообразного обрушения при различных вариантах опасности. Инженеры нуждаются в простых методах

проектирования и расчетов, способных предотвратить потенциальную опасность лавинообразного обрушения зданий. В свете необходимости снижения материалоемкости строительства и повышения требований к качеству проектирования особенно актуальной становится задача внедрения в практику проектирования алгоритмов и программ автоматизированного поиска оптимальных решений [2]. В работе рассмотрена концепция создания экспертной системы (ЭС) оптимального проектирования конструкций зданий и сооружений с учетом риска лавинообразного разрушения этих конструкций.

Концепция внедрения системы поддержки принятия решений в практику проектирования строительных конструкций с учетом риска их лавинообразного разрушения

В США, Германии, Японии и других развитых странах разработаны и функционируют сотни систем поддержки принятия решений интеллектуального типа (базирующиеся на ЭС) в различных областях строительства: в проектировании гражданских и промышленных объектов; организационно-технологической подготовки и управления строительством; экологии, предотвращении и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций. В России академические и отраслевые институты разрабатывают ЭС в сфере инвестиционно-строительного процесса, ряд из них находится в эксплуатации [3].

Рассматриваемая экспертная система содержит следующие основные компоненты: решатель (интерпретатор), рабочую память (РП), именуемую также базой данных (БД), базу знаний (БЗ), компоненты приобретения знаний, объяснительный компонент, диалоговый компонент.

Основу ЭС составляет база знаний, которая закладывается во время ее разработки и может уточняться и расширяться при использовании по мере утверждения новых строительных норм, появления новых рекомендаций по проектированию конструкций. БЗ разрабатывается во взаимодействии с ведущими специалистами и представляет собой свод квалифицированных мнений (правил) и постоянно обновляющийся справочник наилучших методов и стратегий, используемых для решения конкретных задач. Экспертную систему предусмотрено построить на основании четких правил и рекомендаций зарубежных и отечественных строительных норм с учетом таких документов, как [4], [5], а также европейских стандартов и мирового опыта аварий зданий и сооружений. С помощью ЭС собирается и систематизируется требуемая исходная информация по объекту: тип, размеры, этажность, уровень ответственности, функциональное назначение, специфика происходящих в нем процессов при эксплуатации, местоположение, грунтовые условия, размещение и т.д. БД при необхо-

димости уточняется. Посредством диалога с пользователем на основании сценарного подхода и базы знаний ЭС задача формализуется. Как справедливо отмечено в [6], небольшие строения, габариты которых сопоставимы с размерами «локальных» повреждений, не имеет смысла проверять на возможность прогрессирующего разрушения. Осуществляется отбор объектов анализа согласно классификации зданий и сооружений по следующим признакам:

- 1) Объекты класса 1, при проектировании которых возможность возникновения аварийных ситуаций не принимается во внимание;
- 2) Объекты класса 2, в которых все конструкции могут быть защищены от аварийных повреждений за счет увеличения несущей способности или применения защитных устройств;
- 3) Объекты класса 3, некоторые конструктивные элементы которых невозможно защитить от аварийных повреждений, что требует проверки на прогрессирующее разрушение [6].

На следующем этапе блок решателя ЭС, согласно введенным пользователем данным, относит здание к тому или иному классу в зависимости от габаритов рассматриваемой конструкции и списка возможных аварийных ситуаций. ЭС по согласованию с пользователем выбирает один из трех возможных вариантов: расчет конструкции без учета лавинообразного разрушения; расчет конструкции без учета лавинообразного разрушения с указанием возможных превентивных мер защиты сооружения, либо расчет конструкции с учетом аварийной ситуации, но при условии сохранения целостности конструкции; третий вариант - расчет с учетом лавинообразного обрушения конструкции, то есть с удалением из расчетной схемы некоторых элементов. Удаляемые элементы выбираются в зависимости от исходной информации об объекте. Это означает, что, например, при размещении в здании взрывчатого вещества опасности подвергнуты преж-

де всего элементы, находящиеся в непосредственной близости от него. Расчет конструкции ведется с учетом возможного разрушения этих элементов.

Полученные от ЭС советы по корректировке исходной расчетной схемы конструкции (нагрузки от аварийных воздействий, исключение из расчетной схемы некоторых элементов конструкции) пользователь может применить для расчета объекта в одном из доступных расчетных программных комплексов. На основе полученных усилий в элементах конструкции предусмотрена возможность оптимизации этих элементов на основе генетического алгоритма (ГА), хорошо зарекомендовавшего себя эвристического метода поиска решений.

Постановка задачи оптимизации формулируется как определение проектных параметров $\{x_1 \dots x_n\}$ элементов стального каркаса здания по критерию минимума объема конструкции при выполнении ограничений по прочности, жесткости, местной и общей устойчивости.

ГА начинает работу с некоторого случайного набора исходных решений, который называется популяцией. Каждый элемент популяции именуется хромосомой и представляет решение проблемы в первом приближении:

$X = \{x_1 \dots x_n\}$. Таким образом, гены хромосомы - это проектные параметры сечений оптимизируемых элементов конструкции.

Хромосомы эволюционируют на протяжении множества итераций, носящих название поколений (или генераций). В ходе каждой итерации хромосома оценивается с использованием некоторой меры соответствия, которая именуется функцией приспособленности. Для создания следующего поколения новые хромосомы, называемые отпрысками, формируются либо путем скрещивания двух хромосом - родителей из текущей популяции, либо путем случайного изменения (мутации) одной хромосомы. Для реализации процедур скрещивания и мутации используются двоичные строки фиксированной длины. Новая популяция формируется путем

выбора согласно функции цели некоторых родителей и отпрысков и удаления оставшихся для того, чтобы сохранять постоянным размер популяции. Хромосомы с большей функцией соответствия имеют больше шансов быть выбранными (выжить). После нескольких итераций алгоритм сходится к лучшей хромосоме, которая является либо оптимальным, либо близким к оптимальному решением [7].

Концептуальное решение предлагаемой экспертной системы для расчета конструкций с учетом риска прогрессирующего обрушения рассмотрено на примере проектирования высотного здания в составе торгово-делового центра (рис. 1).

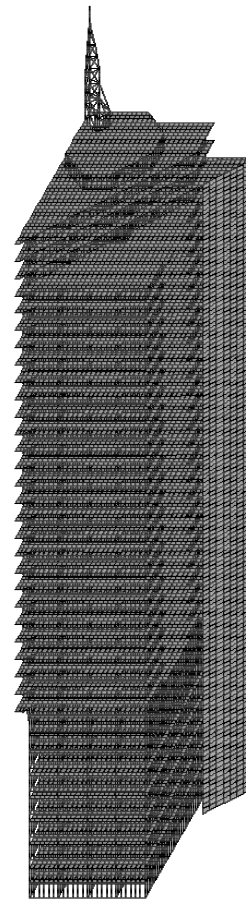


Рис.1. Расчетная схема здания торгово-делового центра в г. Екатеринбург

Несущая схема каркаса 38-этажной части – связевая, с внешним стволом в виде фермы.

Концепция внедрения системы поддержки принятия решений в практику проектирования строительных конструкций с учетом риска их лавинообразного разрушения

Общую устойчивость здания обеспечивают колонны, неразрезные диски перекрытий и вертикальная пространственная ферма, которая представляет собой систему вертикальных крестовых связей из стержневых элементов, расположенных по контуру здания. Вертикальная нагрузка воспринимается колоннами, горизонтальная нагрузка передается через перекрытия на ферму.

По логике экспертной системы низкая стилобатная часть отнесена к объектам класса 1, то есть при расчете аварийные ситуации не учитывались. Она запроектирована без мероприятий, препятствующих прогрессирующему разрушению. Так как высотная часть является объектом I уровня ответственности высотой более 75 метров, она была отнесена к объектам класса 3. К ней предъявлялись специальные требования по устойчивости к лавинообразному разрушению, и при расчете рассматривался вероятный выход из строя каких-либо несущих элементов здания.

Согласно концепции ЭС были выбраны схемы гипотетических локальных разрушений. Данное здание не содержит взрывоопасных производств, скопления горючих материалов, а также других объектов повышенного риска. Поэтому типы локальных разрушений определены стандартно, в соответствии с [8]. В качестве самых опасных типов локальных разрушений рассмотрены разрушения любой отдельно стоящей колонны и обрушение вышележащего перекрытия площадью 80 м². Разрушения участков стен лифтовой шахты и лестничной клетки не рассматривались в качестве опасного локального разрушения, так как лестнично-лифтовой узел отделен от основного объема здания деформационными швами и не участвует в обеспечении его общей устойчивости. Авария какого-либо элемента связевой фермы так же не рассматривалась, так как ферма воспринимает горизонтальные нагрузки и передает их на каркас. При расчете на прогрессирующее разрушение учитываются только постоянные и длительные временные нагрузки (вертикальные) нагрузки. Усилия в элементах фермы

при действии вертикальных нагрузок ничтожно малы, и их разрушение не приведет к лавинообразному разрушению.

Выбраны типы этажей, на которых моделировались разрушения. Рассмотрены все отличающиеся друг от друга этажи с учетом разумной типизации. Такими типами этажей в данном здании являются:

- 1) 1...7 этажи, в уровне которых на колонны каркаса 38 этажной части по периметру шарнирно опираются балки каркаса стилобатной части, чем создают большие дополнительные нагрузки;
- 2) типовые 8...20, 22...35 этажи
- 3) 21-й технический этаж, отличающийся от типового большими нагрузками от оборудования;
- 4) 36...38 этажи, имеющие треугольную форму в плане.

Согласно концепции экспертной системы определены наиболее опасные места расположения локальных разрушений на этажах. Смоделированы разрушения всех четырех угловых колонн здания, так как на разных углах перекрытия запроектированы различные консоли, и разрушение угловой колонны наиболее опасно. Также рассмотрены несколько разрушений средней колонны здания и крайних колонн по периметру здания в местах наибольших консольных выступов перекрытий. Обрушение участка вышележащего перекрытия моделировалось в крайнем пролете и в местах наибольших консолей перекрытия.

Определены нагрузки при расчете здания на аварийной стадии. В соответствии с [8], расчет с учетом локальных разрушений произведен на особое сочетание нагрузок, которое включает постоянные нагрузки с их нормативным значением, длительные временные нагрузки (временные нагрузки с пониженными нормативными значениями) и одно аварийное воздействие. Коэффициент сочетания всех нагрузок равен единице.

Расчеты каркаса здания на устойчивость против прогрессирующего разрушения выполнены с помощью программного комплек-

са “Лира 9.4”. Для проверки вертикальных элементов каркаса (колонн) построена расчетная схема каркаса здания, произведен статический расчет здания на расчетные эксплуатационные нагрузки и определены усилия в элементах на стадии эксплуатации. Затем выполнены расчеты, моделирующие локальные разрушения несущих конструкций каркаса.

По логике экспертной системы для всех выбранных схем локального разрушения последовательно выполнены статические расчеты здания на особое сочетание нагрузок и определены усилия в элементах. Усилия в отдельных конструктивных элементах, полученные на основании статических расчетов с учетом локальных разрушений, сравнивались с усилиями, полученными из статического расчета без учета локальных разрушений. Если в каком-либо элементе происходит увеличение усилий, то требуется выполнить проверку его прочности и при необходимости усилить конструкцию.

Для проверки горизонтальных несущих конструкций (перекрытий) были созданы отдельные расчетные модели четырех типов этажей в физически нелинейной постановке. В расчетную модель этажа входят колонны проверяемого этажа и перекрытие над ними (перекрытие над этажом). При удалении какого-либо несущего элемента (разрушении колонны) получаем схему, по которой работает каждый этаж во время локального разрушения.

На плиту перекрытия действует постоянная и длительная временная нагрузка с нормативными значениями. Для каждой из выбранных схем локальных разрушений корректировалась расчетная схема перекрытия. Моделировалось или разрушение вертикального несущего элемента, или обрушение участка вышележащего перекрытия. Нагрузка прикладывалась пошагово, общее количество шагов – 10 (на каждом шаге прикладывалось 10% полной нагрузки, после чего происходило переопределение модуля деформации материала).

Если нагрузка была приложена полностью и в системе не произошло разрушений, то этаж (а значит, и все здание) защищено от прогрессирующего разрушения при данном локальном разрушении. Если на каком-то шаге приложения нагрузки система разрушается (становится механизмом), перекрытие не защищено от данного аварийного воздействия, что может привести к прогрессирующему разрушению.

По результатам расчетов выявлено, что выбранные локальные разрушения не приводят к обрушению соседних вертикальных конструкций и лавинообразному разрушению здания. Наиболее неблагоприятными схемами локальных разрушений для вертикальных несущих элементов являются разрушения колонн по периметру здания, особенно угловых колонн. Уменьшение усилий в колоннах, расположенных близко к локальному разрушению, по сравнению с усилиями от расчетной эксплуатационной нагрузки составляет: при разрушении угловых колонн 1%...3%, при разрушении крайних колонн по периметру здания 2%...5%, при разрушении средних колонн внутри здания 9%...16%. То есть усилия в вертикальных элементах при аварийном воздействии оказываются меньше эксплуатационных усилий. В колоннах, находящихся далеко от локального разрушения, аварийные усилия меньше эксплуатационных на 27%...33%.

При разрушении какой-либо колонны нагрузка, которую она ранее воспринимала, распределяется на соседние с ней колонны, которые принимают дополнительное усилие. Но при расчете на стадии эксплуатации здание проверяется на воздействие всех постоянных, временных длительных и кратковременных нагрузок с коэффициентами надежности больше единицы. На стадии аварии здание рассчитывается при воздействии только постоянных и длительных временных нагрузок с коэффициентами надежности, равными единице. При аварии у колонн, близко расположенных к локальному разрушению, увеличивается грузовая площадь, на

Концепция внедрения системы поддержки принятия решений в практику проектирования строительных конструкций с учетом риска их лавинообразного разрушения

них передается нагрузка, ранее воспринимавшаяся разрушенными элементами. Но значение нагрузки значительно меньше (1275 кг/м^2 на стадии эксплуатации и 865 кг/м^2 при аварийном воздействии). Поэтому усилия в колоннах зачастую оказываются меньше.

Таким образом, вертикальные элементы каркаса защищены от прогрессирующего обрушения.

Расчеты показали, что обрушение вышележащего участка перекрытия площадью 80 м^2 не является опасной схемой локальных разрушений. Усилия в элементах перекрытия не превышают допустимых. Выявлено, что конструкции перекрытий не защищены от прогрессирующего разрушения при разрушении отдельно стоящих колонн. Это объясняется, в первую очередь, шарнирным опиранием балок перекрытий на колонны, предусмотренным в проекте. При выходе из работы какого-либо вертикального элемента шарнирно опертые балки превращаются в механизм, что приводит к прогрессирующему разрушению. Жестко сопряженные с колоннами ригели могут продолжать эффективно работать при образовании в системе больших пролетов и появлении консолей.

При выходе из строя какой-либо колонны изменяется схема работы перекрытия, пролеты увеличиваются в два раза, либо образуются большие консоли (при разрушении угловых колонн). В местах наибольших напряжений образуются пластические шарниры. Как и предполагалось, расчеты показали, что самыми опасными схемами локальных разрушений являются разрушения угловых колонн здания. Это объясняется тем, что при такой схеме разрушения в перекрытии образуется небольшая область развития пластических шарниров. При разрушении крайней колонны по периметру здания, а тем более средней колонны, общая область развития пластических шарниров в перекрытии велика, что позволяет более эффективно сопротивляться разрушению и приводит к меньшим напряжениям.

Согласно концепции экспертной системы был разработан проект усиления конструкций для защиты перекрытий от прогрессирующего разрушения. Согласно [8] было предусмотрено жесткое сопряжение ригелей с колоннами. Кроме того, потребовалось увеличить армирование плоской части перекрытия. В проекте была предусмотрена верхняя фоновая арматура, непрерывная по всей площади плиты $\text{Ø}5 \text{ Вр-I}$ с шагом 400 мм в обоих направлениях. Ее заменили на $\text{Ø}10 \text{ А400 (А-III)}$ с шагом 200 мм в обоих направлениях. Шаг нижней фоновой арматуры - по первоначальному проекту $\text{Ø}10 \text{ А400 (А-III)}$ с шагом 400 мм - также уменьшили до 200 мм , так как при отказе какой-либо колонны или при неравномерной осадке конструкций в области колонны может потребоваться усиленное нижнее армирование. На угловых участках перекрытий потребовалось также усилить местное армирование. Также был предусмотрен ряд конструктивных мероприятий, препятствующих прогрессирующему разрушению. Так, анкеровка нижней арматуры в районе обетонированных балок осуществляется на сварке (рис.2).

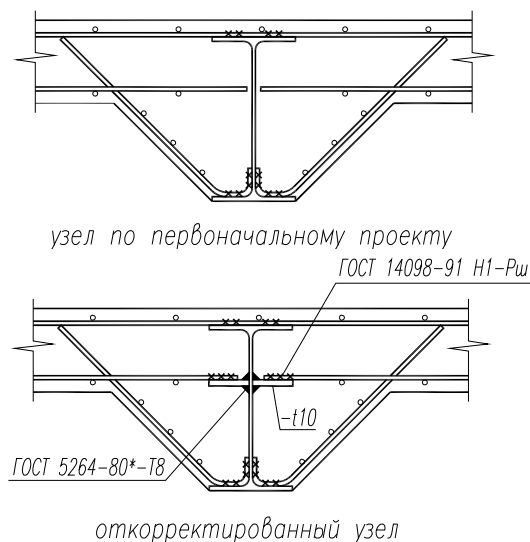


Рис.2. Конструктивные мероприятия, препятствующие лавинообразному разрушению рассматриваемого здания

Проект данного торгово-делового центра был откорректирован с учетом замечаний, выявленных в ходе расчета. В настоящее время здание находится в стадии строительства.

Таким образом, заложенные в ЭС знания экспертов по расчету зданий с учетом прогрессирующего разрушения, позволят повысить качество проектирования, и, как следствие, надежность конструкций. В процессе работы пользователя с ЭС, последняя обобщает накопленные знания в своей базе и предлагает пользователю рациональные пути решения поставленной задачи, приводя цепочку рассуждений и ссылки на параграфы нормативной документации. Путем использования модуля оптимизации на основе генетического алгоритма, может быть решена задача нахождения оптимальных, либо близких к оптимальным параметров сечений оптимизируемых элементов конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. МДС 20-2.2008. «Временные рекомендации по обеспечению безопасности большепролетных сооружений от лавинообразного (прогрессирующего) обрушения при аварийных воздействиях».
2. **Алехин В.Н.** Оптимальное проектирование стальных многоэтажных рам с учетом развития пластических деформаций в узлах. – Диссертация на соискание степени канд. техн. наук. – Свердловск, 1981.
3. **Ционский А.Я., Сапотницкий А.Я., Фоменко Л.Н.** Применение новых информационных технологий при оценке состояния строительных объектов». // Международная научно-практическая конференция: Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону, РГСУ, 1997, с. 63-64.
4. Рекомендации по защите жилых каркасных зданий при чрезвычайных ситуациях. – М.: Москомархитектура, 2002.
5. СНиП 21-01-97* Пожарная безопасность зданий и сооружений.
6. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007.
7. **Алехин В.Н., Ханина А.Б.** Оптимальное проектирование элементов стального каркаса здания на основе генетического алгоритма. // Доклады первой всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений». – Новосибирск, 2008.
8. Рекомендации по защите высотных зданий от прогрессирующего обрушения. – М.: Москомархитектура, 2006.

Алехин Владимир Николаевич, профессор, кандидат технических наук, декан строительного факультета, ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19, тел. +7(343) 375-44-70, E-mail: info@ustu.ru

Ханина Анна Борисовна, аспирант, ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19, тел. +7(343) 375-44-70, E-mail: info@ustu.ru

Павленко Александр Геннадьевич, аспирант, ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19, тел. +7(343) 375-44-70, E-mail: info@ustu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОНАПРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРЖЕННОГО СИЛОВЫМ И ТЕМПЕРАТУРНЫМ НАГРУЗКАМ

В.И. Андреев, А.С. Минаева

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается осесимметричная плоская задача теории упругости неоднородных тел для толстостенного цилиндра, находящегося под действием внешнего давления и стационарного температурного поля. Суть обратной задачи заключается в определении такой зависимости модуля упругости от радиуса, при которой напряженное состояние цилиндра будет заданным.

Ключевые слова: обратная задача теории упругости, плоское деформированное состояние, равнонапряженный цилиндр, модуль упругости

CREATION ON THE BASIS OF THE FIRST THEORY OF STRENGTH MODEL EQUAL STRESSED CYLINDER EXPOSED TO POWER AND TEMPERATURE LOADS

Vladimir I. Andreev, Anna S. Minaeva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The paper considers the axisymmetric plane problem of elasticity of inhomogeneous bodies for thick-walled cylinder under the action of external pressure and a stationary temperature field. The essence of the inverse problem is to determine such a dependence of the elastic modulus of the radius at which the stress state of the cylinder will be for-given.

Key words: inverse problem of the theory of elasticity, plane strain state, equal stress cylinder, elastic modulus

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [1] приведено разрешающее уравнение относительно напряжения σ_r для осесимметричной задачи (плоское деформированное состояние) для радиально неоднородного тела:

$$\sigma_r'' + \varphi(r)\sigma_r' + \psi(r) = f(r) \quad (1)$$

где для случая $\nu = const$

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}; \quad \psi(r) = -\frac{1-2\nu}{r(1-\nu)} \cdot \frac{E'}{E};$$

$$f(r) = -\frac{E(1+\nu)\varepsilon_a'}{r(1-\nu^2)}. \quad (2)$$

Здесь $E = E(r)$, а ε_a – вынужденные (в данном случае температурные) деформации, которые вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_a = \alpha_T T(r) \quad (3)$$

где $\alpha_T = const$ – коэффициент линейного температурного расширения.

Подставляя (2) и (3) в (1), приходим к уравнению

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E}\right)\sigma_r' - \frac{1-2\nu}{r(1-\nu)} \cdot \frac{E'}{E}\sigma_r =$$

$$= -\frac{E(1+\nu)\alpha_T T'}{r(1-\nu^2)}. \quad (4)$$

Стационарное температурное поле в цилиндре, на внутренней границе которого поддерживается температура T_0 , а на внешней поверхности $T=0$, описывается формулой

$$T(r) = T_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, \quad (5)$$

где b и a – соответственно внешний и внутренний радиусы цилиндра.

Для определения констант интегрирования уравнения (4) используются граничные условия

$$r = a, \quad \sigma_r = 0; \quad r = b, \quad \sigma_r = -p_b. \quad (6)$$

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

С учетом однородности материала уравнение (4) преобразовывается к виду

$$\sigma_r'' + \frac{3}{r} \sigma_r' = -\frac{E(1+\nu)\alpha_T T'}{r(1-\nu^2)}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с учетом (5) и (6) имеет вид

$$\sigma_r = \frac{199,95}{2r^2} - 99,975 + 36,05 \ln(r/a) \quad (8)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (9)$$

можно определить напряжения σ_θ :

$$\sigma_\theta = r\sigma_r' + \sigma_r. \quad (10)$$

Из третьего соотношения Дюгамеля-Неймана, полагая $\varepsilon_z = 0$, можно получить выражение для напряжений σ_z :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha_T E T. \quad (11)$$

На рис.1 приведены результаты расчета, полученные при следующих исходных данных: $\nu = 0,2$; $a = 1$ м; $b = 2$ м; $T_0 = 100^\circ\text{C}$; $E_0 = 2 \cdot 10^4$ МПа; $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$; $p_a = 0$; $p_b = 50$ МПа.

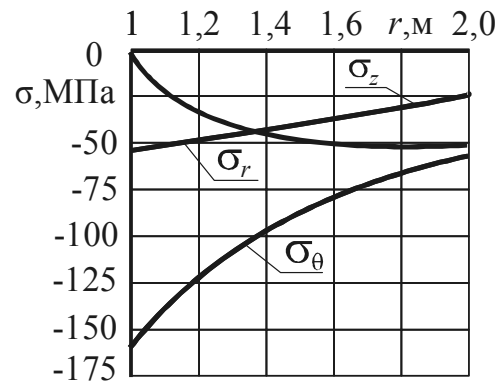


Рис.1. Напряжения в однородном цилиндре

Отметим, что решение задачи получено в предположении, что цилиндр достаточно длинный, и в нем осуществляется плоское деформированное состояние. Однако на практике конструкции имеют конечную длину и при наличии свободных торцов напряжения σ_z на торцах будут равны нулю. Как показано в [2], из условия

$$\int_F \sigma_z dA = 0$$

можно вычислить среднее напряжение

$$\sigma_z^* = -\int_F \sigma_z dA / A,$$

которое следует добавить к вычисленным напряжениям. Тогда в средней части цилиндра будет осуществляться напряженное состояние, соответствующее конечному цилиндру.

РАВНОНАПРЯЖЕННЫЙ ЦИЛИНДР. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Идея метода создания модели равнонапряженных конструкций основана на многочисленных результатах расчетов неоднородных тел, в которых показано, что если в некоторой области тела модуль упругости меньше, чем в однородном материале, то напряжения в этой области также уменьшаются, и наоборот. Ниже приводится решение обратной задачи, в которой разыскивается функция $E(r)$, уменьшающаяся вблизи внутренней поверхности цилиндра, что приводит к снижению напряжений σ_θ в этой области.

В данном случае, исходя из теории прочности максимальных нормальных напряжений, определяется напряженное состояние, удовлетворяющее условию $\sigma_{\max} = \sigma_\theta = const$, что соответствует модели равнонапряженного цилиндра [3]. Заметим, что поскольку в данной задаче все напряжения отрицательны, то максимальным считается наибольшее по абсолютной величине напряжение.

Подставляя $\sigma_\theta = \sigma_0 = const$ в уравнение равновесия (8), получим

$$\sigma_r' = \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{r}. \quad (11)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = \frac{K}{r} + \sigma_0 \quad (12)$$

Из граничных условий (6) можно определить константы K и σ_0 :

$$K = 100 \text{ МПа} \cdot \text{м}, \quad \sigma_0 = -100 \text{ МПа}.$$

Подставляя функцию напряжений (12) в разрешающее уравнение (4), после некоторых преобразований получаем дифференциаль-

ное уравнение первого порядка для определения функции $E(r)$:

$$E' - \frac{K}{r[A(1-k) - kr\sigma_0]} E - \frac{B}{A(1-k) - kr\sigma_0} E^2 = 0 \quad (13)$$

где
$$B(r) = -\frac{\alpha_T T' \cdot r}{1-\nu}; \quad k = \frac{1-2\nu}{1-\nu}.$$

Уравнение (13) представляет собой уравнение Бернулли [4], решая которое, получаем искомую зависимость $E(r)$:

$$E = \frac{1}{\frac{B}{a^m} \frac{(ar+b)^n}{r^n} G + \frac{(ar+b)^n}{r^n} D}, \quad (14)$$

где
$$G(r) = \ln(ar+b) + \frac{nb}{ar+b} - \frac{nb^2}{2(ar+b)^2} + \frac{nb^3}{3(ar+b)^3} - \frac{b^n}{n(ar+b)^n};$$

$$a = -k\sigma_0; \quad n = 1/(1-k); \quad m = n+1; \\ b = K(1-k).$$

Упомянутое выше «уменьшение модуля упругости вблизи внутреннего контура» следует понимать не по отношению к однородному материалу, а относительно значения E вблизи внешнего контура цилиндра. Поэтому константу D можно определить из двух различных граничных условий для E :

$$1 - r = a, \quad E = E_0 = 20000 \text{ МПа}; \\ 2 - r = b, \quad E = E_0 = 20000 \text{ МПа}.$$

На рис.2. представлены соответствующие двум указанным вариантам графики зависимости $E(r)$.

Для проверки полученных результатов было проведено решение прямой задачи, определяемой уравнением (4), путем прямой подстановки в него зависимости (14). На рис. 3 приведены эпюры напряжений σ_r и σ_θ .

Как и следовало ожидать, результаты вычисления напряжений оказались для обоих вариантов одинаковыми. Следует отметить, что в равнонапряженном неоднородном ци-

линдре напряжение $\sigma_{\theta \max}^{\text{неодн}} = \sigma_0 = -100$ МПа, в то время, как в однородном цилиндре $\sigma_{\theta \max}^{\text{одн}} = -160$ МПа. Таким образом, введя коэффициент $\beta = \sigma_{\theta \max}^{\text{одн}} / \sigma_{\theta \max}^{\text{неодн}}$, можно определить во сколько раз наибольшие напряжения в однородном цилиндре больше, чем в аналогичном неоднородном. В данном случае этот коэффициент равен $\beta = 1,6$.

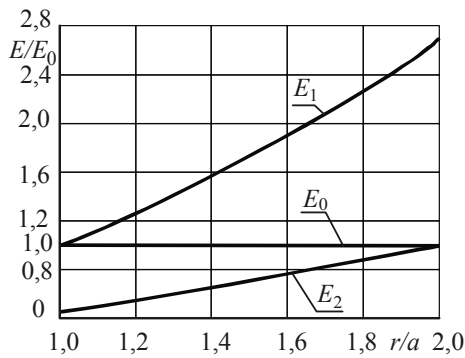


Рис. 2. Зависимости модуля упругости в неоднородном (E_1, E_2) и однородном (E_0) цилиндрах

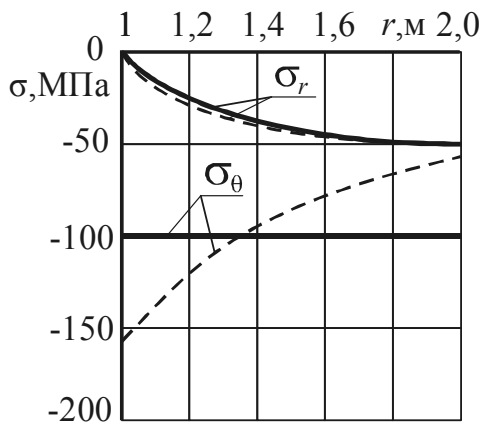


Рис. 3. Напряжения в неоднородном (—) и однородном (---) цилиндрах

Особо следует остановиться на напряжениях σ_z , эпюры которых показаны на рис. 4. На первый взгляд, вызывает удивление различие в напряжениях σ_z для двух зависимостей функции $E(r)$, показанных на рис.2, поскольку напряжения σ_r и σ_θ для

этих двух вариантов расчета практически совпадают. Этот факт объясняется следующим образом. Напряжения σ_z при плоском деформированном состоянии вычисляются из третьего соотношения Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha_T E T, \quad (15)$$

которое содержит «температурное» слагаемое, зависящее от E . Если рассмотреть напряжения на краях отрезка $[a, b]$, то в рассматриваемом примере $T(a) = 100^\circ$, а $T(b) = 0$. Поэтому в точке $r = b$ из-за отсутствия «температурного» слагаемого напряжения σ_z совпадают, а в точке $r = a$ отличаются на величину

$$\Delta\sigma_z = \alpha_T [E_1(a) - E_2(a)] \cdot T(a). \quad (16)$$

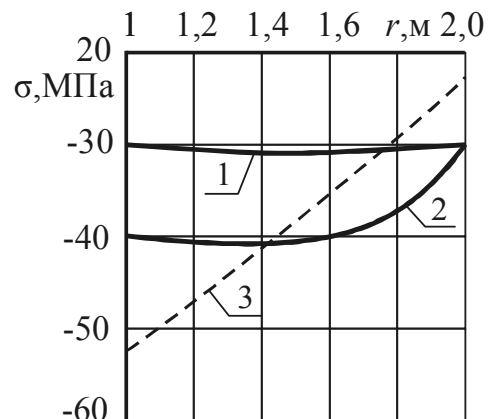


Рис. 4. Напряжения σ_z в толстостенном цилиндре.
1,2 - неоднородный цилиндр;
3 - однородный цилиндр

Учитывая, что $E_1(a) = E_0 = 2 \cdot 10^4$ МПа, а $E_2(a) = 0,45 \cdot E_0 = 0,9 \cdot 10^4$ МПа, получим $\Delta\sigma_z(a) = 10$ МПа, что совпадает с результатом, показанным на рис. 4. В заключение отметим, что *равнонапряженный* цилиндр не совпадает с *равнопрочным* цилиндром [3], поскольку при изменении модуля упругости материала

путем модификации его состава, как правило, изменяются и его прочностные свойства. Построению моделей *равнопрочных* бетонных и железобетонных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, находящихся под действием только силовых нагрузок, посвящена диссертация [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: Изд-во АСВ, 2002, – 288 с.
3. Андреев В.И., Потехин И.А. Равнопрочные и равнонапряженные конструкции. Моделирование и создание. // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века, 2009, № 6, с. 48-50.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
5. Потехин И.А. Способ оптимизации конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел. Дисс. канд. техн. наук. – М., 2009. – 142 с.

Андреев Владимир Игоревич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, ГОУ ВПО Московский государственный строительный Университет (МГСУ). Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26., тел./факс: +7(499)183-57-42; e-mail: asv@mgsu.ru

Минаева Анна Сергеевна, магистрант кафедры сопротивления материалов, ГОУ ВПО Московский государственный строительный Университет (МГСУ). Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26., тел./факс: +7(499)183-57-42; e-mail: 51788@rambler.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ СУБМОДЕЛИРОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПОДКОНСТРУКЦИЙ В УНИВЕРСАЛЬНЫХ И СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ

А.М. Белостоцкий¹, А.Л. Потапенко²

¹ ЗАО НИЦ «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ;

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО НИЦ «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья посвящена рассмотрению актуальных вопросов реализации и верификации методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах.

Ключевые слова: метод конечных элементов, верификация, методы субмоделирования, методы динамического синтеза подконструкций, универсальные и специализированные программные комплексы

SUBMODELING AND DYNAMIC SYNTHESIS OF SUBSTRUCTURES METHODS REALIZATIONS IN MULTIPURPOSES AND OBJECT-ORIENTED PROGRAM PACKAGES

Alexander M. Belostotsky¹, Alexey L. Potapenko²

¹ JSC Scientific & Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA;

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² JSC Scientific & Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Dynamic synthesis of substructures and submodeling methods are realized in actual versions of FE program packages STADYO and ASTRA-NOVA. Main algorithmic features and practical problems are presented.

Key words: finite element method, dynamic synthesis of substructures, submodeling methods, program packages, algorithmic features, practical problems

1. Современные универсальные конечноэлементные программные комплексы (ANSYS, NASTRAN, ABAQUS) содержат опции построения и импорта-экспорта редуцированных матриц влияния для обеспечения, в частности, совместных разработок и точного анализа сложных многосвязных статически и динамически нагруженных инженерных конструкций и сооружений. Другой стороной того же процесса является субмоделирование – например, уточненный трехмерный

нелинейный анализ сложных и/или оригинально решенных конструктивных узлов стержневых систем (опирания колонн, соединения поясов-раскосов ферм, деталей трубопроводных систем). В статье приводятся основные положения и матричные соотношения методов динамического синтеза подконструкций (МДС) и субмоделирования, реализованные в отечественных ПК: универсальном *СТАДИО* и объектно-ориентированном *АСТРА-НОВА* (рис 1).

Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах



Рис.1. Взаимосвязь различных моделей, универсальных и специализированных ПК.

2. Одним из наиболее действенных способов увеличения вычислительной эффективности конечноэлементных алгоритмов является метод суперэлементов (МСЭ), известный также как метод подконструкций. Ключевой процедурой МСЭ является статическая конденсация [1] – исключение внутренних степеней свободы подконструкции $\{u_i\}$, – приводящая исходную блочную систему уравнений равновесия

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_b \end{Bmatrix}$$

к редуцированной системе относительно компонент вектора граничных неизвестных $\{u_b\}$:

$$[\bar{K}]\{u_b\} = \{\bar{F}\},$$

где $[\bar{K}] = [K_{bb}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]$,

$$\{\bar{F}\} = \{F_b\} - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}\{F_i\}.$$

Учет возможной повторяемости подсистем приводит к существенной экономии как за счет уменьшения числа арифметических действий, так и к существенному сокращению объемов хранимой и перерабатываемой информации. Структура данных организована иерархически, так что внесение локальных изменений в расчетную схему, т.е. корректировка части численной модели сооружения может производиться независимо для каждой подконструкции с минимальными вычислительными затратами. Представление глобальной расчетной модели системы в виде совокупности подконструкций является также очень удобным для ее описания и создает предпосылку для создания (применения) эффективных пре- и постпроцессорных программных средств [11].

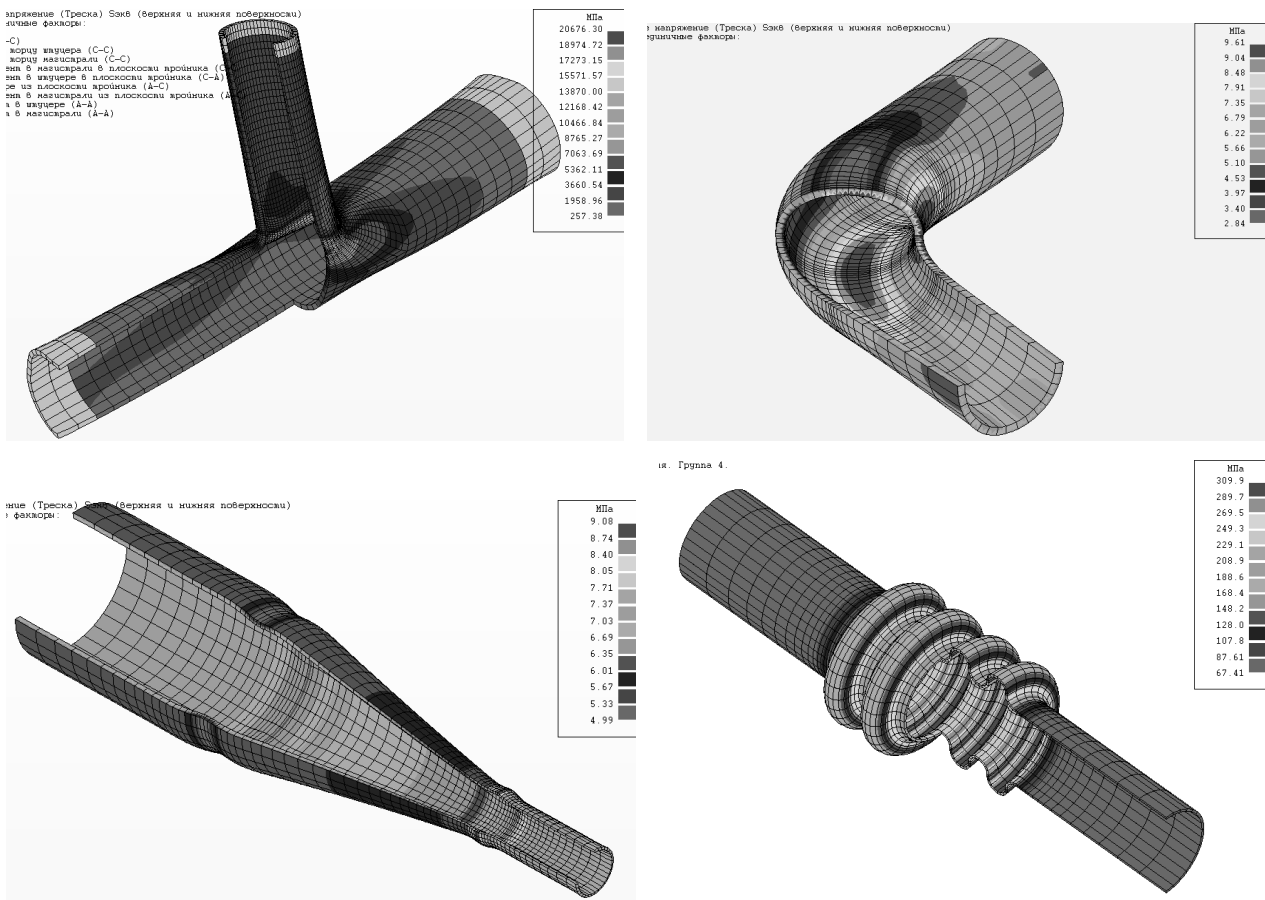


Рис. 2. АСТРА-СТАДИО. Субмоделирование – уточненный расчет деталей трубопроводов.

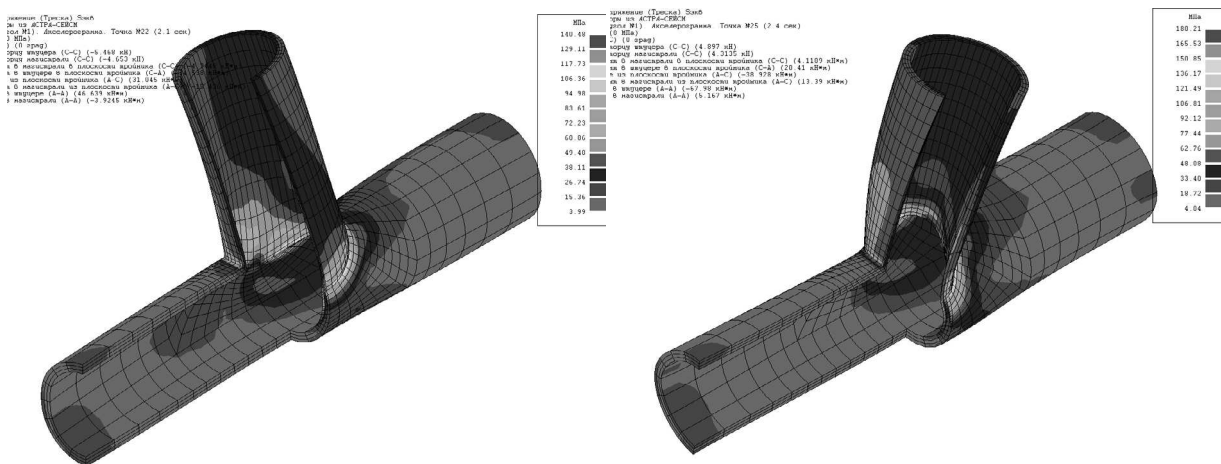


Рис.3. АСТРА-СТАДИО. Кадры видеоролика динамики НДС тройника от сейсмического воздействия, заданного акселерограммой.

3. Суперэлементный алгоритм распространен также на решение системы линейных уравнений на каждом шаге неявной схемы прямого интегрирования уравнений движения и на каждой итерации при расчете соб-

ственных колебаний [11]. Альтернативный и более эффективный подход состоит в построении специальных суперэлементных алгоритмов, основанных на непосредственной конденсации уравнений движения и идеоло-

Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах гически близких методу динамического синтеза подконструкций.

Методы динамического синтеза подконструкций можно классифицировать по способу выбора базисных векторов метода Релея-Ритца для подконструкций и по способу их стыковки. Чаще всего в качестве базиса для подконструкций используются ее формы колебаний при определенных граничных условиях: R.R.Craig, M.C.C.Vampton [2] и [3] – для закрепленной границы, [4] – для свободной границы, [5] – для частично закрепленной границы подконструкции. Из трех рассмотренных вариантов метода наиболее предпочтительным, с вычислительной и реализационной точек зрения, является первый, использующий формы колебаний основной системы метода перемещений. При этом, для упрощения стыковки подконструкций и для правильного учета их жестких смещений и перемещений граничных точек базис из форм колебаний целесообразно дополнить набором статических функций формы суперэлементов, каждая из которых представляет собой вектор упругих перемещений узлов подконструкции, вызванных единичным смещением по направлению соответствующей фиктивной связи для основной системы метода перемещений. Такой подход, в частности, описан в работах [6,7,10].

В общем случае при динамическом синтезе в качестве базиса для подконструкций может быть использована любая подходящая система линейно независимых векторов, не обязательно включающая формы колебаний. Так, в статье [8] используется некоторый специфический базис, для построения которого не требуется решение частной проблемы собственных значений для подконструкции.

Численное решение результирующей редуцированной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений находится по модифицированным неявным разностным схемам типа Ньюмарка с использованием значимой части собственных частот $[\Omega] = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ и форм $[\Phi]$ парциальных подсистем-подконструкций [9]:

$$\begin{aligned}
 & [\bar{M}]\{\ddot{u}_b\} + [\bar{C}]\{\dot{u}_b\} + \\
 & + [\bar{K}]\{u_b\} + \\
 & \sum [G][\Omega] \int_0^t \text{SIN}[\Omega(t-\tau)][G]^T \{u_b(\tau)\} d\tau = \\
 & = \sum (\{\bar{F}(t)\} - [G][\Omega]^2 \{q(t)\}), \\
 & \quad \{u_b(0)\} = \{u_{0b}\}, \{\dot{u}_b(0)\} = \{v_{0b}\} \\
 & \quad [\bar{M}] = [M_b] + \sum [\bar{M}], [\bar{C}] = [C_b], \\
 & \quad [\bar{K}] = [K_b] + \sum [\bar{K}]. \\
 & \quad [\bar{M}] = [M_{bb}] - [M_{bi}][M_{ii}]^{-1}[M_{ib}], \\
 & \quad [\bar{K}] = [K_{bb}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}], \\
 & \quad \{\bar{F}(t)\} = \{F_b(t)\} - [M_{bi}][M_{ii}]^{-1}\{F_i(t)\}, \\
 & \quad [G] = [K_{bi}][\Phi][\Omega]^{-2} - [M_{bi}][\Phi] \\
 & \quad \{q\} = \{q(t)\} = \text{COS}[\Omega t][\Phi]^T [M_{ii}]^{-1}\{\bar{u}_{0i}\} + \\
 & \quad + [\Omega]^{-1} \text{SIN}[\Omega t][\Phi]^T [M_{ii}]^{-1}\{\bar{v}_{0i}\} + \\
 & \quad + [\Omega]^{-1} \text{SIN}[\Omega t] * [\Phi]^T \{F_i(t)\}, \\
 & \quad \{\bar{u}_{0i}\} = \{u_{0i}\} + [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{u_{0b}\}, \\
 & \quad \{\bar{v}_{0i}\} = \{v_{0i}\} + [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{v_{0b}\}, \\
 & \quad \text{SIN}[\Omega t] = \text{diag}[\sin(\omega_1 t), \sin(\omega_2 t), \dots, \sin(\omega_n t)].
 \end{aligned}$$

Здесь подразумевается суммирование по всем подконструкциям в смысле процедуры суперэлементной сборки. Обозначения $[M_b]$, $[C_b]$ и $[K_b]$ используются для дополнительных матриц масс, демпфирования и жесткости, которые могут быть добавлены к соответствующим матрицам после сборки. С помощью этих матриц можно учитывать дополнительные упругие и вязкие связи, а также массы, сосредоточенные в граничных узлах.

4. Наиболее популярен реализованный в универсальных «коммерческих» ПК (NASTRAN, ANSYS, ADAMS,...) упомянутый подход Крейга-Бемптона [2], сводящийся к построению редуцированных матриц жесткости и масс:

$$[\hat{K}] = [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{CC} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{NN} \end{bmatrix};$$

$$[\hat{M}] = [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ib} \\ M_{bi} & M_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{M}_{CC} & \hat{M}_{NC} \\ \hat{M}_{CN} & \hat{M}_{NN} \end{bmatrix},$$

где
$$[\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{iC} & \Phi_{iN} \end{bmatrix},$$

Φ_{iC} – перемещения внутренних степеней свободы СЭ для заданных единичных перемещений граничных (стыковочных) узлов, Φ_{iN} – перемещения внутренних степеней свободы, соответствующие удерживаемым собственным формам колебаний при ограничении степеней свободы (заделке) граничных узлов, $[\hat{K}_{NN}]$ и $[\hat{M}_{NN}]$ – диагональные модальные матрицы жесткости и масс, $[\hat{K}_{CC}] \equiv [\bar{K}]$, $[\hat{M}_{CC}] \equiv [\bar{M}]$, $[\hat{M}_{NC}] = [\hat{M}_{CN}]^T$ – заполненные матрицы.

Этот же алгоритм с 1999г. реализован и в исследовательском ПК СТАДИО [11]. Программная реализация матричных операций при формировании $[\hat{K}]$ и $[\hat{M}]$ (и редуцированных векторов нагрузок $\{\hat{F}\}$), а также возможные аффинные преобразования в основном построены на стандартных процедурах, содержащихся в модулях ПК. Не встречается каких-либо трудностей, следуя канонической конечно(супер)элементной сборке, и учет $[\hat{K}]$, $[\hat{M}]$ и $\{\hat{F}\}$ в общей суперэлементной модели. Импорт-экспорт матриц организован как через текстовые файлы, формат которых учитывает блочно-диагональную структуру $[\hat{K}]$ и заполненную структуру $[\hat{M}]$ (в частности, поддерживается формат ПК ANSYS, NASTRAN), так и через компактные бинарные файлы ПК СТАДИО (рис.1).

5. Первоначальное развитие и использование метода динамического синтеза подконструкций в аэрокосмической отрасли – об этом свидетельствуют упомянутые основополагающие теоретические работы [1-6] – представляется исторически и предметно обоснованным. Действительно, разработку и рас-

четную оптимизацию динамически связанных основных подсистем (блоков и узлов) ведут независимо десятки конструкторских фирм, а «цена вопроса» крайне высока.

Ранее опубликован важный практический пример подобного моделирования, выполненного с использованием ПК СТАДИО [11,12]: динамика и прочность разработанного НПП ВНИИЭМ Блока привода солнечных батарей (БП СБ) в составе российского сегмента международной космической станции (РС МКС) «Альфа». Блок содержит пластинчато-оболочечно-стержневую несущую конструкцию с тремя редукторными механизмами, два из которых приводят в движение СБ, а третий соединяет указанный Блок с основной частью РС. Включение редукторных механизмов в расчетную модель БП и всей МКС является нетривиальной задачей, так как вследствие большого передаточного отношения двигатель редуктора может совершать сотни оборотов при повороте выходного вала на несколько градусов, а приведенный к валу СБ момент инерции редуктора бокового привода сопоставим с инерционными характеристиками самой СБ. Кроме того, в состав механизма входит муфта с существенно нелинейной характеристикой и приводной электродвигатель, одним из режимов управления которым является отсутствие электрического момента на валу.

Разработана и верифицирована подробная параметризованная линейно-упругая динамическая пространственная модель орбитальной системы “МКС – Блок приводов – крыло_1 СБ – крыло_2 СБ”, гибко перестраиваемая для рассмотрения вариантов взаимной ориентации РС и 2-х крыльев СБ, штатных этапов сборки МКС и СБ, различных режимов работы двигателя при динамических нагрузках на predetermined узлы системы, для решения задач прочностной и динамической оптимизации системы. Модель содержит 12 конечноэлементных и 3 “матричных” подсистем-суперэлементов (редуцированные матрицы жесткости и масс Крейга-Бемптона РС и 2-х сборок СБ, сформированные «смежника-

Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах

ми» на балочно-оболочечных КЭ-моделях в «формате» ПК NASTRAN), соединенных в единую суперэлементную модель. При этом рычажно-стержневая модель каждого редуктора обеспечивает требуемые передаточные отношения и инерционные характеристики первой и второй ступеней, содержит элемент магнитной муфты с линеаризованной крутильной жесткостью и имеют реалистичные связи с корпусом Блока приводов.

Разработанная суперэлементная динамическая модель развивается по мере эксплуатации и строительства МКС, а использованный подход к анализу упругих систем, включающих редукторы и другие механизмы, может быть с успехом использован для решения аналогичных задач в других отраслях машиностроения.

6. Другая обширная техническая область, где востребован и весьма эффективен предлагаемый подход – трубопроводные системы различных отраслей. Например, необходимо в рамках одной расчетной модели оперативно задать и комплексно проанализировать (статика, циклика, сейсмика, вибрации,...) связанную ядерным реактором систему всех петель 1-го контура «реактор – трубопроводы – парогенераторы – насосы – ГЗЗ – компенсатор объема –...» с адекватным учетом геометрико-жесткостных, инерционных и диссипативных характеристик и сложных условий крепления оборудования.

Реализованный в объектно-ориентированном программном комплексе *АСТРА-НОВА* [14] и уже 34 года используемый в практике массового проектирования суперэлементный подход (каждый «балочный» суперэлемент – неразветвленный пространственный участок трубопровода, опорной конструкции или оборудования – имеет только по 2 узла стыковки) дополняется формированием/учетом редуцированных матриц влияния Крейга-Бэмптона не только деталей (тройники – 3 узла стыковки, отводы, косые стыки, секторные колена, переходники и линзовые компенсаторы – по 2 узла), но и более сложного оборудования и опорных конструкций в единой модели тру-

бопроводной системы (рис.4). При этом, после определения усилий во всех узлах-сечениях динамической суперэлементной модели может быть выполнен уточненный расчет МКЭ напряженного состояния и прочности самой детали/оборудования/опорной конструкции на сгенерированной оптимальной модели (например, для тройникового соединения [15]).

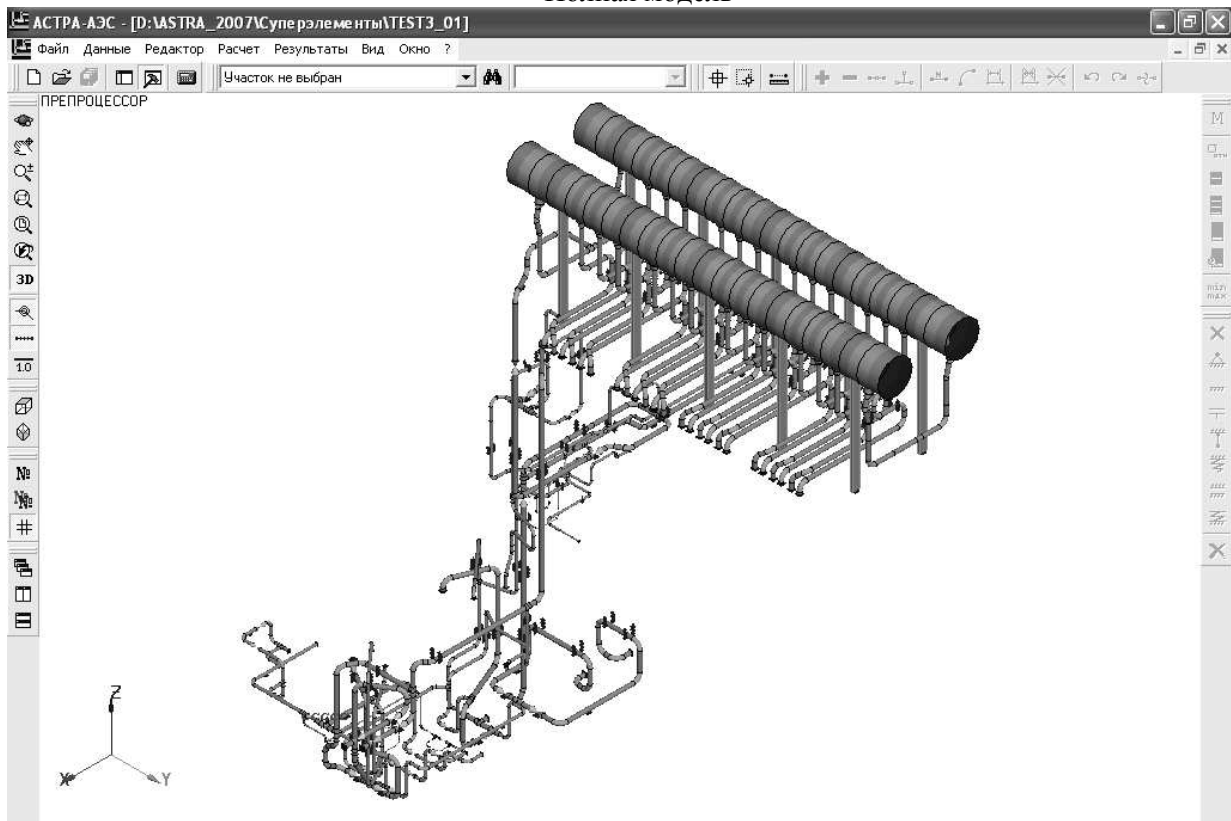
Заслуживающей упоминания особенностью построения матриц Крейга-Бэмптона для объемных или оболочечных моделей элементов трубопроводной системы является предварительное связывание узлов на торцевых (патрубковых) гранях условиями деформирования по балочной гипотезе плоских сечений – в ПК СТАДИО эту процедуру можно осуществить несколькими альтернативными способами [11]. В запланированной перспективе – создание и наполнение «базы данных» (редуцированных матриц Крейга-Бэмптона) типовых деталей, нестандартных опорных конструкций и технологического оборудования.

7. Обобщая изложенное, отметим, что современные конечноэлементные программные комплексы должны содержать опции:

- субмоделирования для уточненного анализа трехмерного НДС тяжело нагруженных узлов-деталей;
- построения и импорта-экспорта редуцированных матриц влияния (жесткости, масс и нагрузок) как в текстовых форматах известных систем, так и в виде компактных бинарных файлов для обеспечения, в частности, совместных разработок и точного анализа сложных многосвязных динамически нагруженных инженерных конструкций и сооружений.

Более того, для объектно-ориентированных ПК, используемых в массовом проектировании объектов строительства и машиностроения, естественным (в духе интеграции в САПР) и эффективным представляется создание, пополнение и использование суперэлементных «баз данных» – матриц жесткости, масс, демпфирования и «единичных» нагрузок типовых элементов-деталей и узлов.

Полная модель



Модель с матричным СЭ Крейга-Бемптона (оборудование на опорах)

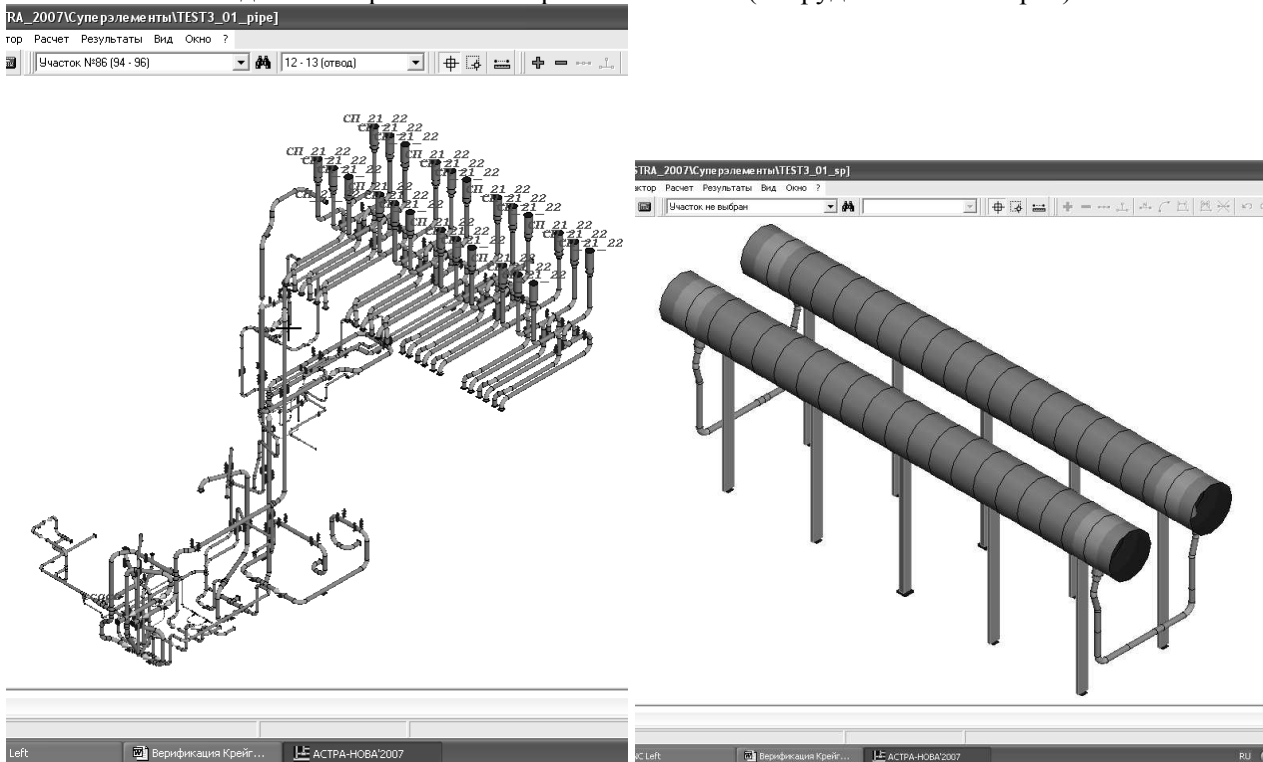


Рис. 4. Полная модель, формирование и учет матричного СЭ Крейга-Бемптона в составе АСТРА-модели трубопроводной системы АЭС.

Собственные частоты АСТРА-моделей, Гц

№ Частоты	Полная модель	СЭ Крейга- Бемптона	Модели трубопроводов с присоединенными матричными СЭ (Крейга-Бемптона)				
			N = 0	N = 2	N = 5	N = 10	N = 20
1	0.402		0.402	0.402	0.402	0.402	0.402
2	0.415		0.415	0.415	0.415	0.415	0.415
3	0.619		0.619	0.619	0.619	0.619	0.619
4	0.690		0.690	0.690	0.690	0.690	0.690
5	0.728		0.728	0.728	0.728	0.728	0.728
6	0.807		0.807	0.807	0.807	0.807	0.807
7	1.033		1.033	1.033	1.033	1.033	1.033
8	1.100		1.100	1.100	1.100	1.100	1.100
9	1.220		1.220	1.220	1.220	1.220	1.220
10	1.319		1.319	1.319	1.319	1.319	1.319
...
85	4.506		4.506	4.506	4.506	4.506	4.506
86	4.533	4.529	—	4.533	4.533	4.533	4.533
87	4.642		4.642	4.642	4.642	4.642	4.642
...
142	6.523		6.523	6.523	6.523	6.523	6.523
143	6.569	6.629	—	6.570	6.570	6.569	6.569
144	6.599		6.599	6.599	6.599	6.599	6.599
...
198	10.367		10.367	10.367	10.367	10.367	10.367
199	10.498	10.500	—	—	10.499	10.499	10.498
200	10.536		10.536	10.536	10.536	10.536	10.536
...
338	17.872		17.872	17.872	17.872	17.872	17.872
339	18.022	18.118	—	—	18.029	18.029	18.023
340	18.172		18.172	18.172	18.172	18.172	18.172
...
366	21.533		21.533	21.533	21.533	21.533	21.533
367	21.538	21.546	—	—	21.540	21.540	21.538
368	21.959		21.959	21.959	21.959	21.959	21.959
...
400	23.126		23.126	23.126	23.126	23.126	23.126

Примечание: N – число внутренних степеней свободы (собственных форм) суперэлемента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гайан Р.** Приведение матриц жесткости и массы.- Ракетная техника и космонавтика, т.3, # 2, 1965, 277-278 с.
2. **Craig R.R., Jr., Bampton M.C.C.** Coupling of substructures for dynamic analysis - AIAA Journal, 1968, vol.6, No.7, p. 1313-1319.
3. **Benfield W.A., Hruda R.F.** Vibration analysis of structures by component mode substitution. - AIAA Journal J., 1976, vol. 9, p. 1255-1261.
4. **MacNeal R.H.** A hybrid method of component mode synthesis. - Computers and structures, 1971, vol. 4, p. 591-601.
5. **Hale A.L., Meirovitch L.** A general procedure for improving substructures representation in dynamic synthesis. - Journal of Sound and vibration, 1982, vol. 84, No.2, p. 269-287.

6. Hurty W.C. Dynamic analysis of structural systems using component modes. - AIAA Journal., 1984, vol.4, p.733-738.
7. Leung Y.T. Dynamic substructure response. - Journal of sound and vibration, 1991, vol. 149, # 1, p.83-90.
8. Wang J.H., Chen H.R. Substructure modal synthesis method with high computation efficiency. - Computer methods in applied mechanics and engineering, 1990, vol.79, No. 2, p.203-217.
9. Belyi M.V. Superelement method for transient dynamic analysis of structural systems.- Int. J. Numer. Meth. Eng., 1993, vol. 36, p.2263-2286.
10. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
11. Белостоцкий А.М., Белый М.В. Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. // Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с. 65-69.
12. Аронзон А.Б., Белостоцкий А.М., Геча В.Я., Горшков А.И., Канунникова Е.А. Математическое моделирование динамики МКС «Альфа» с учетом упругоинерционных характеристик несущих конструкций, солнечных батарей и больших перемещений механизмов. // Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с. 21-28.
13. Белостоцкий А.М., Сутурин И.М. Суперэлементное моделирование статического и динамического НДС многоэтажных панельных зданий. // Сб. научн. трудов МГСУ №5 «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», М., 2002, с. 57-69.
14. Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л. Развитие и интеграция в САПР «семейства» программных комплексов АСТРА-НОВА для нормативных расчетов на прочность трубопроводных систем различного назначения. // САПР и графика. 2003, №5, с. 55-65
15. Белостоцкий А.М., Пеньковой С.Б. Конечноэлементное моделирование НДС емкостного оборудования АЭС. // Сб. научн. трудов МГСУ №8 «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», М., 2005, с. 71-83.
16. Потапенко А.Л. Генерация оптимальных конечноэлементных моделей тройниковых соединений различных типов. // Сб. научн. трудов МГСУ №9 «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики», М., 2006, с. 112-119.
17. Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Потапенко А.Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем. // Строительная механика и расчет сооружений, М., №6, 2006, с. 45-52.

Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, Генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ) ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет (ГОУ ВПО МГСУ), Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
 тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761;
 e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Потапенко Алексей Леонидович, ведущий инженер-программист, ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»), Россия, 125040, г. Москва, ул. Верхняя, 34, офис 412;
 тел/факс: +7 (495) 737-4081, +7 (499) 257-7761;
 e-mail: stadyo@stadyo.ru.

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Т.Л. Дмитриева¹, В.В. Безделев²

¹ Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск, РОССИЯ

² ОАО «Иркутский Промстройпроект», г. Иркутск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Разработан алгоритм оптимального проектирования упругих конструкций, подверженных действию импульсных нагрузок. Алгоритм основан на совместном использовании метода конечных элементов и методов нелинейного математического программирования. Решены прикладные задачи виброударозащиты.

Ключевые слова: оптимальное проектирование конструкций, нелинейное программирование, метод конечных элементов, импульсное воздействие

ALGORITHM FOR THE COMPUTER-AIDED DESIGN OF MECHANICAL SYSTEMS WITH OPTIMAL PARAMETERS UNDER IMPULSE LOADS

Tatiana L. Dmitrieva¹, Vladimir V. Bezdelev²

¹ Irkutsk state technical university, Irkutsk, RUSSIA

² JSC "Irkutsk Promstroyproekt", Irkutsk, RUSSIA

ABSTRACT: A design optimization algorithm of the elastic structures under impulse loads has been developed. The algorithm is based on the finite element method and the nonlinear programming method. Applied tasks of the vibro shock protection were solved

Key words: optimum design of structures, nonlinear programming, the finite element method, impulse loads

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении задач виброударозащиты механических систем, а также задач сейсмостойкости зданий и сооружений возникает вопрос подбора оптимальных параметров этих конструкций. Такие задачи можно рассматривать как задачи оптимального проектирования конструкций.

Представим задачу оптимизации механической системы, подверженной действию кратковременной импульсной нагрузки, в форме задачи нелинейного математического программирования (НМП) [1-4].

Найти

$$\min f(x, P(x, t)), \quad x \in E^{n_x} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} g_j(x, P(x, t)) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \\ x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, \dots, n_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\{x\}$ – вектор варьируемых геометрических и физических параметров механической системы. Целевая функция f и ограничения g_j связаны с варьируемыми параметрами через параметры состояния $P(x, t)$, которые

могут представлять собой явные функции от динамических перемещений, скоростей и ускорений в узловых точках системы:

$$\{P(x, t)\} = \{\phi(\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta})\}, \quad \delta \in E^n. \quad (3)$$

n – число динамических степеней свободы. Время t изменяется от 0 до τ . Векторы динамических перемещений, скоростей и ускорений системы $\{\delta\}, \{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\}$ неявно зависят от $\{x\}$ и определяются решением дифференциальных уравнений МКЭ в постановке [5]:

$$[M(x)]\{\ddot{\delta}\} + [C(x)]\{\dot{\delta}\} + [K(x)]\{\delta\} = \{R(x, t)\} \quad (4)$$

с начальными условиями $\{\delta(0)\}, \{\dot{\delta}(0)\}$, не зависящими от $\{x\}$.

Для того, чтобы задача (1), (2) была решена методами НМП, необходимо получить явную зависимость функций ограничений от варьируемых параметров. Эта проблема решается путём построения приближённой задачи. При этом необходимо учесть, что скорость сходимости существенно зависит от нелинейности ограничительных функций, которая обусловлена двумя факторами. Во-первых, параметры состояния имеют сложную зависимость от $\{x\}$, связанную со структурой механической системы. Во-вторых, сами ограничения, как правило, нелинейно связаны с параметрами состояния. Тогда аппроксимации параметров состояния дадут более качественные приближения, чем аппроксимации функций $\{g\}$. Это позволяет использовать полученные аппроксимации на более широкой области пространства варьируемых параметров, что в итоге увеличивает скорость сходимости алгоритма. В алгоритме использовались аппроксимации первого порядка, выполненные путём разложения функций в ряд Тейлора в окрестности пробной точки $\{x^*\}$.

Другая проблема состоит в том, чтобы исключить зависимость целевой и ограничительных функций от времени. Для этого рассматриваются только те моменты времени

t^{CR} , при которых ограничения достигают своего экстремума. Тогда линеаризация параметров состояния имеет следующий вид:

$$\tilde{P}_k(x, t^{CR}) = P_k(x^*, t^{CR}) + \left\{ \frac{dP_k}{dx} \right\}_{x=x^*}^T \{x - x^*\}. \quad (5)$$

Для определения коэффициентов аппроксимации был использован метод анализа чувствительности, где выполнялось прямое дифференцирование параметров состояния по варьируемым параметрам [6]. Продифференцируем уравнение (4) по x_i ($i=1, 2, \dots, n_x$):

$$[M] \left\{ \frac{\partial \ddot{\delta}}{\partial x_i} \right\} + [C] \left\{ \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial x_i} \right\} + [K] \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right\} = \{F_i\}. \quad (6)$$

Начальные условия

$$\left\{ \frac{\partial \delta(0)}{\partial x_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial \dot{\delta}(0)}{\partial x_i} \right\}$$

этой системы равны нулю, а вектор псевдо-нагрузки $\{F_i\}$ находится по выражению:

$$\{F_i\} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial M}{\partial x_i} \right] \{\ddot{\delta}\} - \left[\frac{\partial C}{\partial x_i} \right] \{\dot{\delta}\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{\delta\}. \quad (7)$$

Таким образом, трудоемкость прямого метода пропорциональна числу варьируемых параметров. Преимущество такого подхода состоит в том, что задачи (4) и (6) отличаются только правой частью, поэтому решение задачи динамического анализа и анализа чувствительности может быть совмещено. Иными словами численное интегрирование уравнений (4) и (6) удобно выполнять одновременно.

Алгоритм автоматизированного проектирования механических систем с оптимальными параметрами при импульсных воздействиях

2. АЛГОРИТМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Для решения практических задач было разработано специализированное программное обеспечение на языке FORTRAN. Приведём описание основных блоков алгоритма (рис. 1).

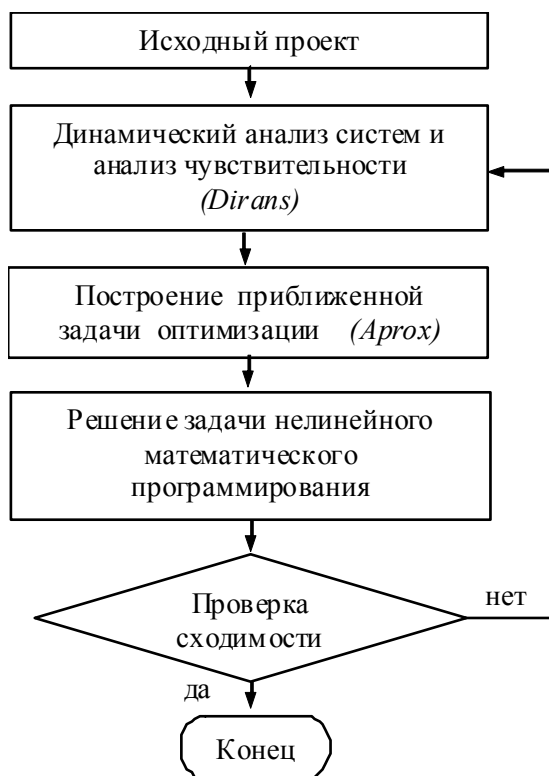


Рис. 1.

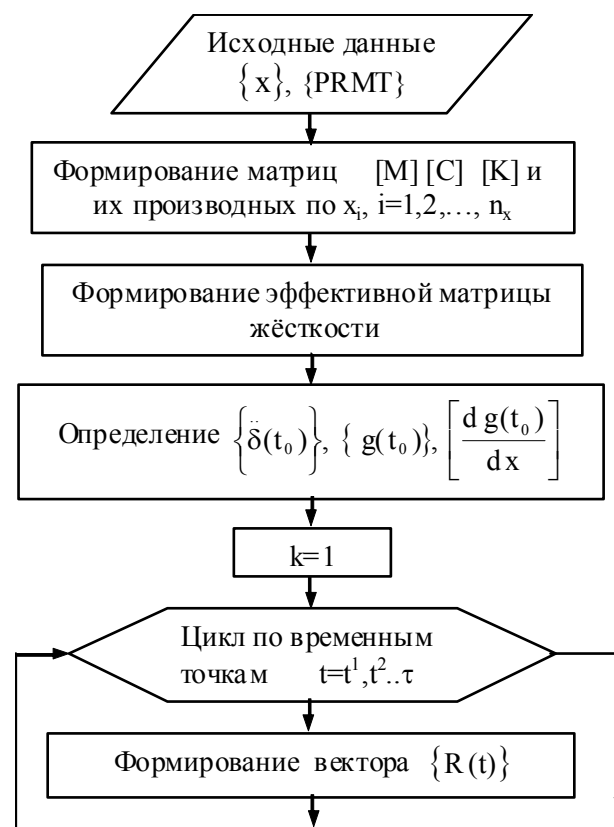
Блок *Dirans* предназначен для формирования коэффициентов аппроксимации на основе прямого метода анализа чувствительности. Для решения системы дифференциальных уравнений состояния (4) и (6) использовался метод прямого интегрирования (θ -метод Вилсона) [5].

Блок *Aprox* включает построение приближенной задачи оптимизации. Здесь строятся линейные аппроксимации параметров состояния по варьируемым параметрам [6].

Блок *NMPack* предназначен для решения задачи условной минимизации. Исходная условно-экстремальная задача заменяется задачей на безусловный экстремум при помощи методов модифицированных функций Лагранжа [7,8]. Задача безусловной минимизации решается с использованием многометодной стратегии, включающей прямые и градиентные поисковые методы [9]. Переключение на тот или иной метод выполняется на основе эвристического алгоритма [3].

3. ОПИСАНИЕ БЛОКА РАСЧЕТА И АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ DIRANS

Блок-схема алгоритма решения задачи динамического анализа и анализа чувствительности приведена на рис. 2.



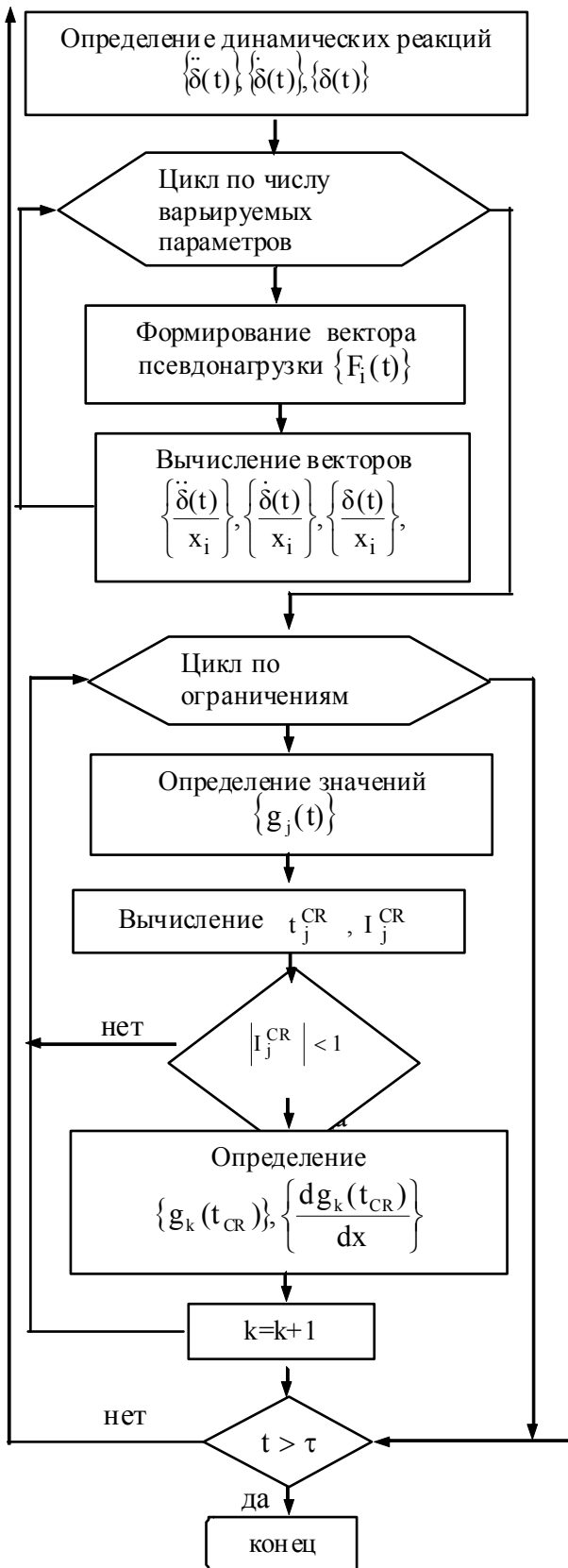


Рис. 2

В программах блока реализован анализ чувствительности первого порядка (5). В качестве параметров состояния приняты функции ограничений.

Входными параметрами блока являются массивы $\{x\}$ и $\{PRMT\}$. Массив $\{PRMT\}$ содержит параметры интегрирования: начальный и конечный момент времени, а также шаг интегрирования Δt , который определяется по выражению $\Delta t = \tau / (n_s - 1)$, где n_s – число дискретных точек интегрирования.

Для работы с блоком необходимо обращение к программам, формирующим матрицы масс, демпфирования, жесткости, вектор динамической нагрузки, а также к программам, где формируется вектор ограничений. В результате работы блока вычисляются два основных массива. Это массив $\{g^{CR}\}$ размерностью m_1 и массив первых производных $\left[\frac{d g^{CR}}{d x} \right]$, размерностью $m_1 \times n_x$, где $m_1 \geq m$. На

рис. 2 показан принцип формирования вектора $\{g^{CR}\}$ на примере задачи, когда число исходных ограничений равно двум.

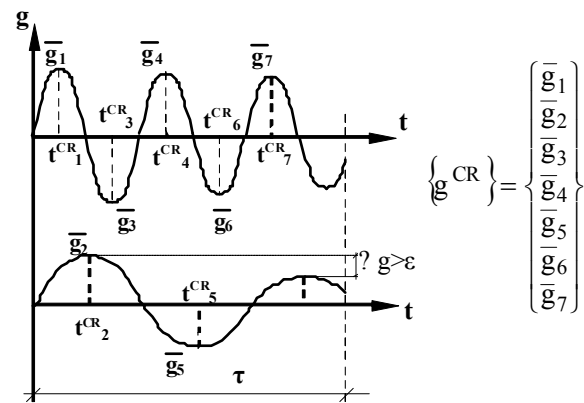


Рис. 2. Формирование вектора $\{g^{CR}\}$

Размерность массива увеличивается за счёт того, что ограничения вычисляются в моменты времени t^{CR} , когда они достигают экстремальных значений. Таких моментов может быть много, если рассматриваемый промежуток времени τ достаточно велик.

Алгоритм автоматизированного проектирования механических систем с оптимальными параметрами при импульсных воздействиях

Однако учитывая, что амплитуда колебаний за счёт демпфирования уменьшается, можно ограничиться рассмотрением первых n_t моментов времени ($5 \leq n_t \leq 15$) для каждого ограничения. Кроме того, устанавливается полоса отбора. Если амплитудное значение ограничения g_j в момент времени t_k меньше максимального амплитудного значения g_j^{max} на величину Δg и $\Delta g > \varepsilon$, то ограничение в этот момент времени не учитывается

Для решения систем дифференциальных уравнений (4), (6) был использован метод прямого интегрирования. Формирование эффективной матрицы жёсткости для интегрирования этих уравнений производится один раз, что значительно сокращает объём вычислений. На каждом i -том временном шаге процедуры прямого интегрирования интервал $[t^{i-1} - t^i]$ проверяется на присутствие экстремальных значений ограничений g_j^{CR} . Для этого зависимость g_j от t на участке $[t^{i-2} - t^i]$ аппроксимируется квадратной параболой. Для вычисления экстремума проводятся следующая проверка. Вычисляется параметр I_j^{CR} , который соответствует времени наступления экстремум в долях от шага интегрирования, если начало координат совместить с точкой t^{i-1} .

$$I_j^{CR} = B_j / (2 \cdot A_j), \text{ где} \\ A_j = g_j^{i-2} - 2g_j^{i-1} + g_j^i, \quad B_j = g_j^{i-2} - g_j^i. \quad (8)$$

Если на участке $[t^{i-1} - t^i]$ функция ограничений g_j имеет экстремум, то

$$|I_j^{CR}| < 1.$$

В этом случае вычисляется g_k^{CR} .

$$g_k^{CR} = g_j^{i-2} + 0,5 A_j (I_j^{CR} + 1)^2 - \\ - (A_j + 0,5 B_j) (I_j^{CR} + 1), \quad (9)$$

а затем определяются производные

$$\left[\frac{d g_k^{CR}}{d x} \right],$$

соответствующие моменту времени t_k^{CR} . В общем случае, если g_j является функцией $\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$, выражение для её производной в критический момент времени имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{d g_k^{CR}}{d x} \right\} = \left\{ \frac{\partial g_k^{CR}}{\partial x} \right\} + \left[\frac{\partial \delta^{CR}}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial \delta} \right\} + \\ + \left[\frac{\partial \dot{\delta}^{CR}}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial \dot{\delta}} \right\} + \left[\frac{\partial \ddot{\delta}^{CR}}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial \ddot{\delta}} \right\} \\ + \frac{\partial g_k}{\partial t} \left\{ \frac{dt}{dx} \right\}_{t=t_k^{CR}}. \quad (10)$$

Как уже отмечалось, моменты времени t_k^{CR} соответствуют экстремальным значениям функций ограничений. Поэтому последнее слагаемое в выражении (10) будет нулевым. Производные

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial \dot{\delta}} \right\}, \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial \ddot{\delta}} \right\}, \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial \delta} \right\}$$

находятся в явном виде аналитически или численно в конечных разностях. Производные

$$\left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial x_i} \right\}, \left\{ \frac{\partial \ddot{\delta}}{\partial x_i} \right\}$$

вычисляются решением систем дифференциальных уравнений (6) при различных векторах псевдонагрузки (7).

Дифференцирование

$$\left[\frac{\partial M}{\partial x_i} \right], \left[\frac{\partial C}{\partial x_i} \right], \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right], \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]$$

выполняется в явном виде аналитически или численно в конечных разностях. Значения производных

$$\left[\frac{\partial \delta^{CR}}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial \dot{\delta}^{CR}}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial \ddot{\delta}^{CR}}{\partial x} \right]$$

определяются через значения этих производных, вычисленных в трех соседних точках интегрирования. Тогда для определения

$$\{g\} \text{ и } \left[\frac{dg}{dx} \right]$$

необходимо хранить значения массивов

$$\left[\frac{\partial \delta}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial \ddot{\delta}}{\partial x} \right],$$

найденных в точках t^{i-2}, t^{i-1}, t^i .

Процедура определения коэффициентов аппроксимации является наиболее трудоемкой частью всего процесса оптимального проектирования и занимает основное время вычислений. Число итераций при выполнении процедуры прямого дифференцирования равно $n_s \times n_x$ ($n_s = \tau / \Delta t + 1$). Для получения результатов с достаточной степенью точности рекомендуется брать маленький шаг Δt на итерациях прямого интегрирования. Это требование обусловлено тем, что при определении производных ошибка округления может накапливаться за счет приближения в величинах $\{\delta\}, \{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\}$ входящих в вектор правых частей.

Таким образом, скорость решения зависит от числа варьируемых параметров n_x , от размерности механической системы n , а также от количества временных точек интегрирования n_s .

4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ ВИБРОУДАРОЗАЩИТЫ

Для иллюстрации работы алгоритма приведём пример задачи оптимизации виброударозащитных систем балочного типа, на кото-

рых установлена аппаратура, чувствительная к механическим воздействиям.

На рис. 4 показана расчетная схема подвески, имеющая n степеней свободы.

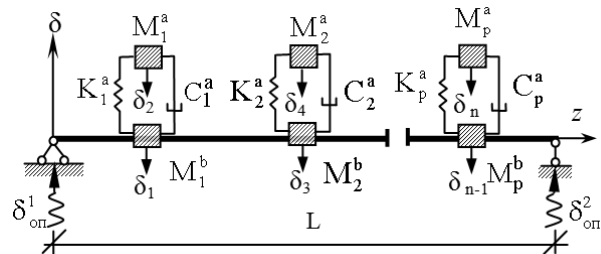
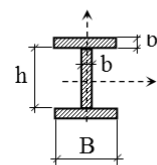


Рис. 4. Схема подвески



Поперечное сечение балки принято в виде составного двутавра (рис. 5).

Рис. 5

Кинематическое воздействие на опоры задавалось в следующем виде (рис. 6):

$$\delta_{on} = a_0 \cdot e^{\sin \alpha t} \cdot \sin vt \quad (t \leq \tau_p).$$

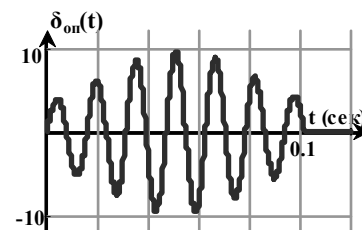


Рис. 6. График внешнего импульса, подаваемого на опоры.

Минимизируется ускорение верхних присоединённых масс, где расположена аппаратура, защищаемая от виброудара. Ограничения накладываются на перемещения точек системы, а также на напряжения, возникающие в результате действия статических и динамических нагрузок. Варьируются геометрические и физические параметры: размеры поперечного сечения балки, величины масс, демпфирования и жесткости.

Ниже рассмотрим наиболее простой случай, когда на балке имеют место только две мас-

Алгоритм автоматизированного проектирования механических систем с оптимальными параметрами при импульсных воздействиях

сы – M_1^a и M_1^b , расположенные посередине пролёта. Воздействие на опоры принято симметричным. Минимизируемой величиной является ускорение верхней массы $\ddot{\delta}_2$. Число варьируемых параметров равно 7, число ограничений – 9. Все ограничения заданы в безразмерной форме. Математическая постановка задачи имеет вид:
найти

$$\min f(x) = 1/x_1$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} g_1 &= |\delta_1 - \delta_{on}| / \Delta_1^{don} - 1 \leq 0, \\ g_2 &= |\delta_2| / \Delta_2^{don} - 1 \leq 0, \\ g_3 &= |\delta_1 - \delta_2| / \Delta_3^{don} - 1 \leq 0, \\ g_4 &= |\ddot{\delta}_2| \cdot x_1 - 1 \leq 0, \\ g_5 &= |\sigma_1| / \sigma^{don} - 1 \leq 0, \\ g_6 &= |\sigma_2| / \sigma^{don} - 1 \leq 0, \\ g_7 &= |\sigma^{st}| / \sigma^{don} - 1 \leq 0, \\ g_8 &= |\delta_1^{st}| / \Delta_4^{don} - 1 \leq 0, \\ g_9 &= |\delta_2^{st}| / \Delta_5^{don} - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Варьировались величины присоединённой массы (x_2), вязкость C^a сосредоточенного демпфера (x_3) и жесткости пружины K^a (x_4), а также параметры поперечного сечения балки: ширина полки (x_5) и высота стенки двутавра (x_6), толщина стенки и полки двутавра (x_7). Параметр x_1 введён для исключения зависимости целевой функции от времени. В результате такого приёма появляется дополнительное ограничение g_4 . Нижние и верхние границы изменения варьируемых параметров приведены в табл. 1.

В ограничения g_5 и g_6 входят: нормальное напряжение σ_1 (в крайнем по высоте волокне сечения) и главное напряжение σ_2 (под полкой двутавра). Ограничения 7-9 накладывались на статические перемещения и напряжения, возникающие от собственного веса

конструкции. Массивы, входящие в уравнение (4) формировались следующим образом:

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} M^b & 0 \\ 0 & M^a \end{bmatrix}, \\ [C] &= \begin{bmatrix} C^b + C^a & -C^a \\ -C^a & C^a \end{bmatrix}, \\ [K] &= \begin{bmatrix} K^b + K^a & -K^a \\ -K^a & K^a \end{bmatrix}, \\ \{R(t)\} &= \begin{Bmatrix} K^b \cdot \delta_{on}(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$M^b = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2 \cdot g}, \quad C^b = 2\xi \cdot M^b \omega_1$$

$$K^b = \frac{48EI_x}{L^3}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{K^b}{M^b}},$$

$$E = 2,06 \cdot 10^8 \frac{\kappa H}{m^2}, \quad L = 4 \text{ м},$$

$$\gamma = 78,5 \frac{\kappa H}{m^3}, \quad \xi = 0,03.$$

Рассматривался промежуток времени движения системы равный 0,3 сек. Время внешнего воздействия – 0,102 сек. Шаг интегрирования принимался $3 \cdot 10^{-3}$ сек. Задача на условный экстремум была решена методом деформируемого многогранника.

Исходные данные отражены в табл. 2. В табл. 3 даны начальные и оптимальные значения варьируемых параметров. В табл. 4 приведены изменения целевой функции на итерациях, а также максимальные невязки активных ограничений.

Для проверки достоверности полученных результатов было выполнено решение задачи динамического анализа для исходного и оптимального проекта при помощи программы MathCAD. Здесь же были вычислены функции ограничений исходной и оптимальной задачи. На рис. 8-9 приведены основные результаты расчёта.

Таблица 1

Границы изменения варьируемых параметров						
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Введённый параметр	M^a (т)	C^a (кН·сек/м)	K^a (кН/м)	B (м)	h (м)	b (м)
0,001-10	0,2-0,8	11-100	15-1000	0,05-0,45	0,1-0,8	0,006-0,035

Таблица 2

Исходные данные задачи								
Характеристики внешнего воздействия			Допуски на перемещения					Допуск на напряжение
a_0 (мм)	α (сек ⁻¹)	ν (сек ⁻¹)	$\Delta_1^{\text{доп}}$ (мм)	$\Delta_2^{\text{доп}}$ (мм)	$\Delta_3^{\text{доп}}$ (мм)	$\Delta_4^{\text{доп}}$ (мм)	$\Delta_5^{\text{доп}}$ (мм)	$[\sigma^{\text{доп}}]$ (кН/м ²)
3,6	30	400	10	1	1	2	80	230000

Таблица 3

M^a (т)	C^a (кН·сек/м)	K^a (кН/м)	B (м)	h (м)	b (м)	$ \ddot{\delta}_{\text{max}} $ (м/сек ²)
Начальные параметры системы						
0,3	40	1000	0,2	0,5	0,01	122,2
Оптимальные параметры системы						
0,8	11	98	0,12	0,244	0,006	2,056

Таблица 4

Изменение целевой функции $f(x)$ и максимальных невязок ограничений на итерациях								
Итерации	1	2	3	4	5	6	7	
$f(x)$	122,2	60,450	25,11	11,04	5,430	1,9	2,350	
g_{max}	$g_3=1,256$	$g_3=0,66$	-	-	$g_3=0,169$	$g_9=0,057$	$g_1=0,011$	$g_1=1,743 \cdot 10^{-3}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм оптимального проектирования стержневых систем, подверженных действию кратковременных импульсных нагрузок. Программное обеспечение, созданное на основе алгоритма, позволило решить прикладные задачи оптимального проектирования системы виброударозащиты. Результаты, полученные при решении этих

задач, показали устойчивую работу алгоритма. Предложена методика построения качественных аппроксимаций при формировании явной задачи нелинейного математического программирования. Применена эффективная схема решения задачи на условный экстремум на основе методов модифицированных функций Лагранжа, обладающих широкой областью сходимости и высокой надёжностью.

Алгоритм автоматизированного проектирования механических систем с оптимальными параметрами при импульсных воздействиях

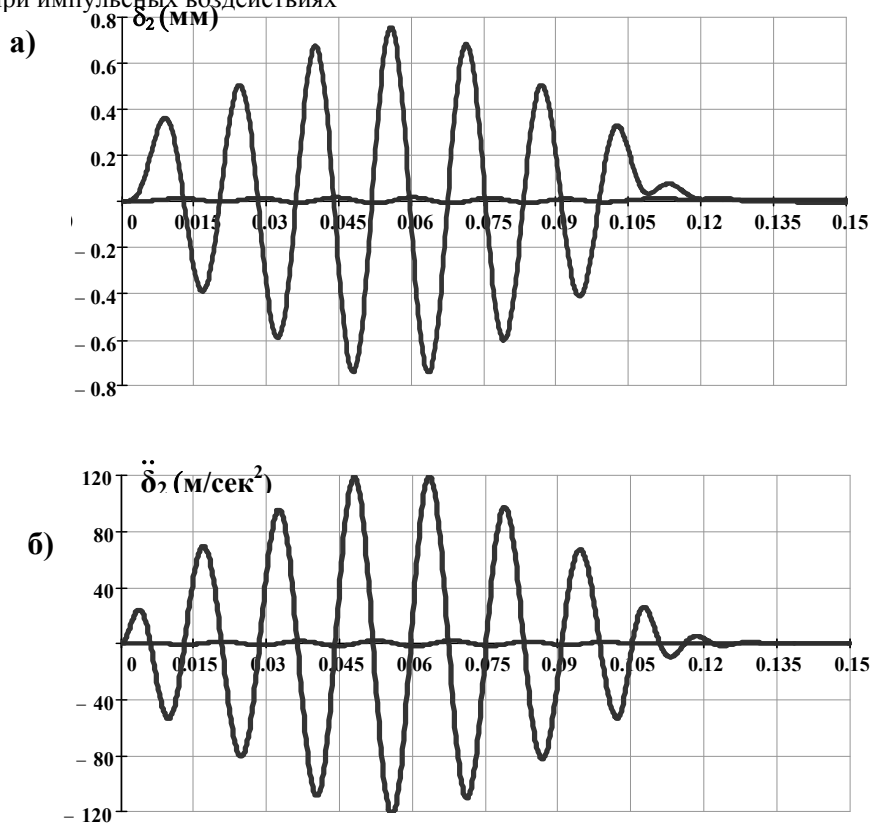


Рис. 8. Графики ускорений $\ddot{\delta}_2(t)$ (а) и перемещений $\delta_2(t)$ (б) массы m_2 исходной и оптимальной системы

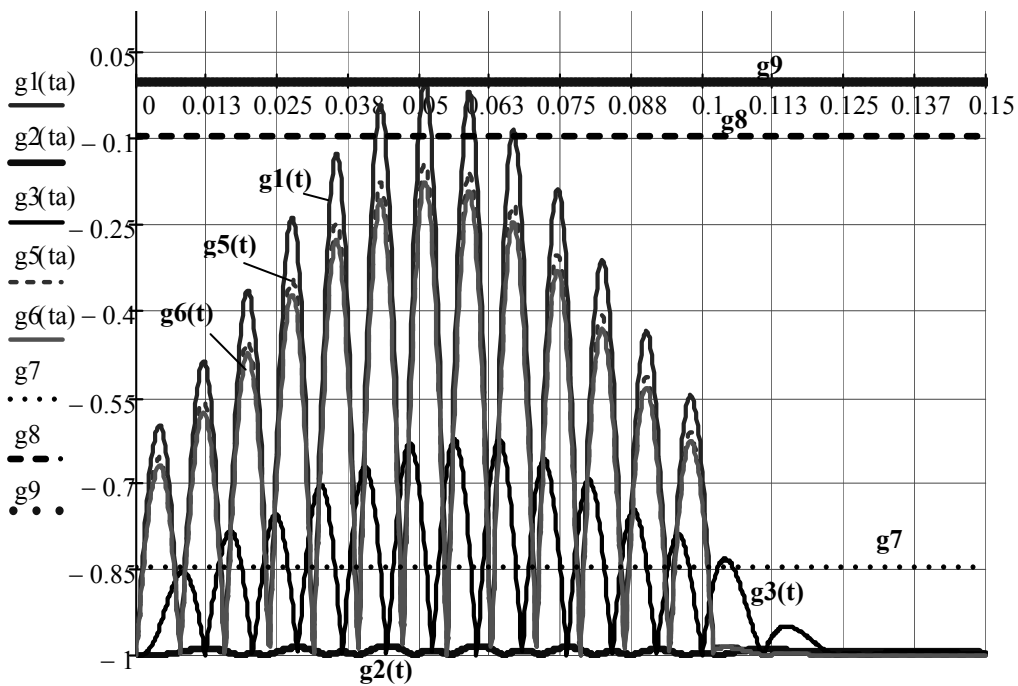


Рис. 9. Графики функций ограничений оптимальной системы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чаплинский И. А., Дмитриева Т. Л., Гребенюк Г. И., Безделев В. В.** Совершенствование двойственных алгоритмов поиска экстремума в задачах оптимального проектирования конструкций. Строительство и архитектура, 1990, №6, с.14-16.
2. **Дмитриева Т.Л., Безделев В.В.** Численный анализ и оптимальное проектирование систем виброударозащиты. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела // Труды международной научно-технической конференции. М.: МИИТ, 2006, с.143-146
3. **Безделев В.В., Дмитриева Т.Л.** Рекурсивный многометодный алгоритм решения задач оптимизации строительных конструкций. Проблемы оптимального проектирования сооружений// Доклады 1 Всероссийской конференции, Новосибирск, 2008, с. 55-62
4. **Хог Э., Арора Я.С.** Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
5. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 1982. - 448 с.
6. **Дмитриева Т.Л.** Аппроксимация параметров состояния в задачах оптимизации систем, подверженных нестационарным динамическим воздействиям. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. ИрГупс, 2008, с. 110-114.
7. **Дмитриева Т.Л.** Алгоритм нелинейного математического программирования, использующий две модифицированных функции Лагранжа. Математика, её приложения и математическое образование// Материалы III Всероссийской конференции с международным участием. Улан-Удэ, 2008, с.124-131.
8. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа и методы оптимизации. - М.: Наука, 1989. - 400 с.
9. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 536 с.

Дмитриева Татьяна Львовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и строительной механики, Иркутский государственный технический университет (ИрГТУ), Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, тел. +7 (3952) 40-51-44, факс +7 (3952) 40-51-45; e-mail: dmital@istu.edu.

Безделев Владимир Викторович, кандидат технических наук, доцент, заместитель генерального директора по качеству, начальник технического центра, ОАО «Иркутский Промстройпроект» (ОАО ИПСП), Россия, 664025, г. Иркутск, ул. Степана Разина, 6, тел. +7 (3952) 21-13-07, факс: +7 (3952) 34-40-48, e-mail: bezdelev@ipsp.ru

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ОПЫТ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И СТРОИТЕЛЬСТВА ВЫСОКОЙ АРМОГРУНТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ

*С.А. Кудрявцев¹, Ю.Б. Берестяный², Е.В. Федоренко¹, Т.Ю. Вальцева¹,
Р.Г. Михайлин¹*

¹ Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, РОССИЯ;

² Научно-внедренческое предприятие «ДВ-Геосинтетика», г. Хабаровск, РОССИЯ;

АННОТАЦИЯ: В статье приводится опыт проектирования и строительства армогрунтовой конструкции повышенного уровня ответственности с использованием интегральных георешеток. Освещаются вопросы расчетов армирования высокого откоса, как в аналитической форме, так и на основе геотехнического моделирования, а так же вопросы разработки берегозащитных мероприятий от действия морских волн. В практике отечественного проектирования и строительства отсутствуют аналоги рассматриваемого объекта, поэтому информация будет интересна как проектировщикам, так и строителям.

Ключевые слова: армогрунтовая конструкция, крутой откос, георешетка, берегозащита, сетконы, высокий откос

FAR EASTERN EXPERIENCE IN DESIGN AND CONSTRUCTION OF HIGH SLOPE WITH GEOGRIDE REINFORCEMENT

*Sergey A. Kudryavtsev¹, Yuriy B. Berestyanyy², Evgeniy V. Fedorenko¹,
Tatyana Yu. Valtseva¹, Roman G. Mikhailin¹*

¹ Far Eastern Transport University, Khabarovsk, RUSSIA;

² Company «DV- GEOSYNTHETICS», Khabarovsk, RUSSIA;

ABSTRACT: In the given article the designing and building experience of high slope with reinforcement of the raised responsibility level with the use of integrated geogrids is presented. Questions of calculations of reinforcing of a high slope, both in the analytical form, and on the basis of geotechnical modeling, and points of working out bank protective measures against action of sea waves are light up. In practice of native designing and building there are no analogs of the considered object, therefore the information may be interesting both to designers, and builders.

Key words: high slope with reinforcement, integrated geogrids, bank protective measures, designing and building experience, geotechnical modeling

ВВЕДЕНИЕ

Рекультивация существующего полигона твёрдых бытовых отходов (ТБО) в г. Владивостоке выполняется в рамках подготовки города к проведению саммита АТЭС 2012. Местоположение свалки отходов – живописное место в районе бухты Горностай, находящейся вблизи города. Протяжённость свалки вдоль побережья составляет более 500 м.

Сложность объекта заключается в сложившейся ситуации: гора мусора, высотой до 50 метров спускается откосом под углом до 420 непосредственно к волноприбойной зоне Уссурийского залива, побережье которого в данном районе не имеет защиты от сильных штормов Японского моря и цунами. Таким образом, наиболее сложной задачей для проектирования, в ряду всех мероприятий по рекультивации полигона ТБО, являлось обеспечение эксплуатационной надёжности

конструкции защиты высокого откоса от воздействий волн расчётных штормов и способность конструкции выдержать единовременный накат волны цунами с характерными параметрами без критических разрушений. Кроме того, защитное сооружение должно обеспечивать стабильность комплекса при существующих гравитационных и сейсмических воздействиях.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ

В соответствии с существующими нормами проектирования (ГОСТ 27751-8 и СНиП 2.01.07-85*) объект имеет повышенный уровень ответственности. Расчётный период жизненного цикла всего сооружения, определённый заказчиком проектирования, составляет от 80 до 120 лет.

Проектирование конструкции защиты высокого откоса, в составе проекта рекультивации существующего полигона ТБО г. Владивостока, выполнено научно-внедренческим предприятием «ДВ-Геосинтетика», имеющим немалый опыт проектирования и сопровождения строительства геотехнических объектов в Дальневосточном федеральном округе. Из предложенных и рассмотренных вариантов, наиболее приемлемым для решения поставленных задач и оптимальным по содержанию, заказчиком выбран вариант с конструкцией высокой армогрунтовой стены, запроектированной на компактном, но прочном основании. Конструкция состоит из трех уровней: первый – береговая защита (высота до 8 м), второй и третий – подпорная структура (общей высотой около 40 м).

На основе предоставленных исходных данных были сформированы и обоснованы следующие расчетные характеристики грунтов: материал засыпки армогрунтового сооружения: угол $\varphi=29,5^\circ$; $c=0,0104$ МПа; $E_0=47$ МПа; $\gamma=20,5$ кН/м³; примерные расчетные характеристики ТБО: $c=0,020$ МПа; $\varphi=37^\circ$; $E_0=5$ МПа; $\gamma=16$ кН/м³; характеристики грунтов основания: $c=0,087$ МПа;

$\varphi=36^\circ$; $E_0=200$ МПа; $\gamma=22$ кН/м³. В качестве армирующих элементов приняты интегральные геосинтетические материалы: второй ярус – одноосная георешетка с прочностью 170 кН/п.м., третий ярус – двухосная георешетка с прочностью 40 кН/м.

За счёт использования в основании сооружения (первый уровень) скального грунта из изверженных морозоустойчивых пород, заключённых в сетчатые контейнеры – сетконы, конструкция берегозащиты позволяет использовать глыбы не очень большого размера, но при этом за счет геосинтетической оболочки придать им объем до 2 кубических метров. Для защиты от расчётных штормовых волн и, частично, от цунами дополнительно запроектированы сооружения из тетраподов весом до 5 т.

Второй и третий уровни защиты выполнены в виде армогрунтовой конструкции с использованием, соответственно, одноосной и двухосной георешёток в качестве полотен для формирования геобойм. В обоймах применён местный щебенисто-глыбовый грунт с глинистым заполнителем. Выбор типов и марок, используемых при проектировании геосинтетических материалов, определён жёсткими требованиями по всем показателям, соответствующим высокому уровню ответственности сооружения, проектным физико-механическим характеристикам геоматериалов с учётом заданного срока службы сооружения – до 120 лет и другим требованиям, связанным с природными и техногенными воздействиями. Исходным сырьём для производства принятых геоматериалов должен быть полиэтилен (97%), как форма неорганического соединения, обеспечивающая наибольшую устойчивость к характерным для объекта видам воздействия, включая агрессивность условий морского побережья, реагентов и продуктов природного гидролиза отходов свалки, а так же к воздействиям ультрафиолетового излучения.

Для определения параметров армирования конструкции, геометрических размеров сооружения и физико-механических характе-

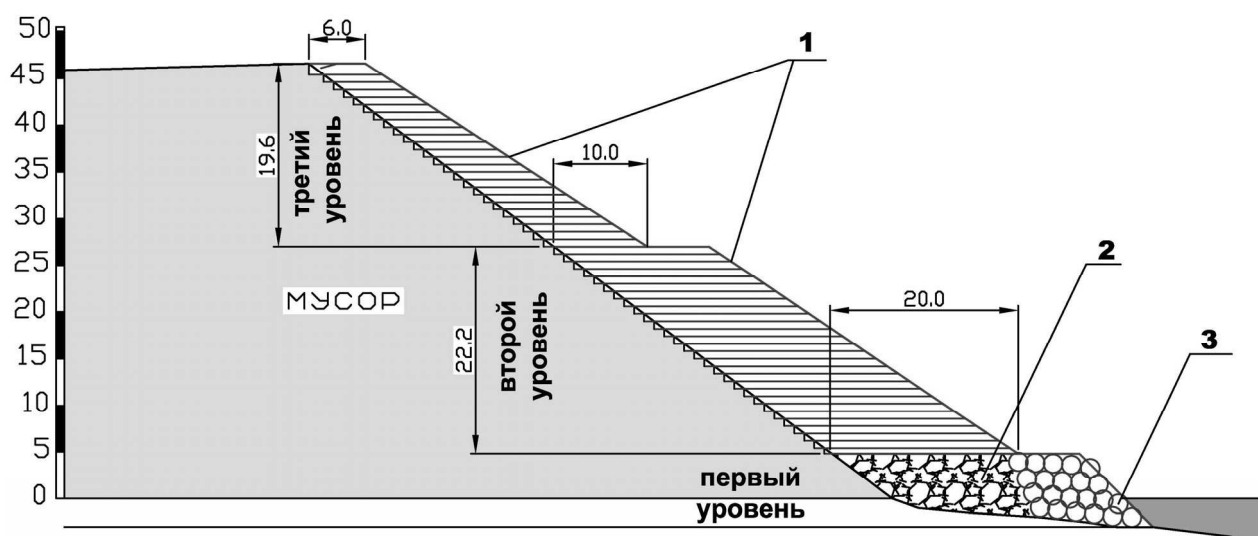


Рис. 1 Геометрические параметры сооружения:

1 – геотехническая обойма из георешетки и грунта; 2 – несортированный скальный грунт; 3 – сетчатые контейнеры (сетконы), заполненные скальным грунтом

ристик геоматериалов использованы аналитические способы расчетов с применением отечественных и зарубежных методик. Согласно методу предельного равновесия сил и моментов (1) необходимо проверить выполнение условия для каждого клина:

$$\sum E_{уд,i} \geq E_{сд}, \quad (1)$$

где $\sum E_{уд,i}$ – сумма удерживающих сил, кН/м; $E_{сд}$ – сдвигающие силы, кН/м. Удельная (на 1 метр ширины) растягивающая нагрузка в георешетке на глубине z вычисляется по формуле:

$$T_i = k_{E,3} \left[\frac{\gamma_3 z_i + q}{1 - \frac{k_E (\gamma_c z_i + 3q) \left(\frac{z_i}{L}\right)^2}{3(\gamma_3 z_i + q)}} \right] h_i, \quad (2)$$

где h_i – максимальное расстояние до следующей георешетки (шаг), м; γ_3 – удельный

вес грунта засыпки, кН/м³; k_E , k_E – коэффициент активного давления грунта; q – величина распределенной нагрузки, кН/м²; γ_c – удельный вес грунта природного склона, составляющего заднюю стенку армированного блока, кН/м; z – расчетная высота, м.

По формуле (2) была определена удельная (на 1 метр ширины) растягивающая нагрузка в георешетке, после чего был построен график зависимости «шаг армирования – глубина расположения арматуры» (рис. 2), который необходим для целей оптимизации размещения решеток таким образом, чтобы напряжение в каждой не превышало расчетную прочность. При помощи этого графика определен характер размещения георешеток в массиве.

Для уточнения отдельных расчётных параметров элементов сооружения, в связи с несовершенством существующих аналитических методов, привлечены возможности геотехнического моделирования работы конструкций. Это позволило комплексно оценить работу всех деталей сооружения, их напряжённно-деформированное состояние на всех этапах строительства и оптимизировать технические параметры конструкций.

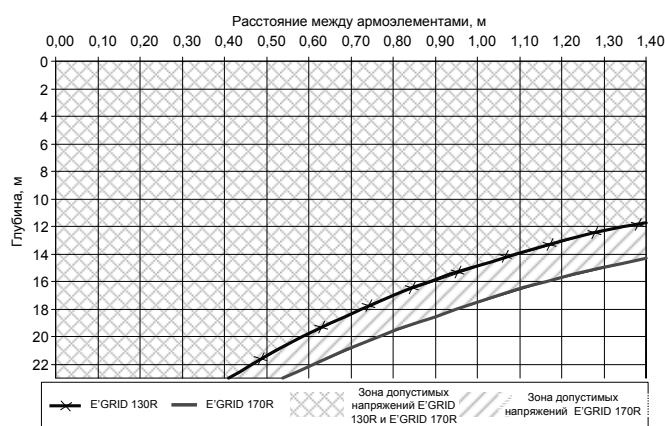
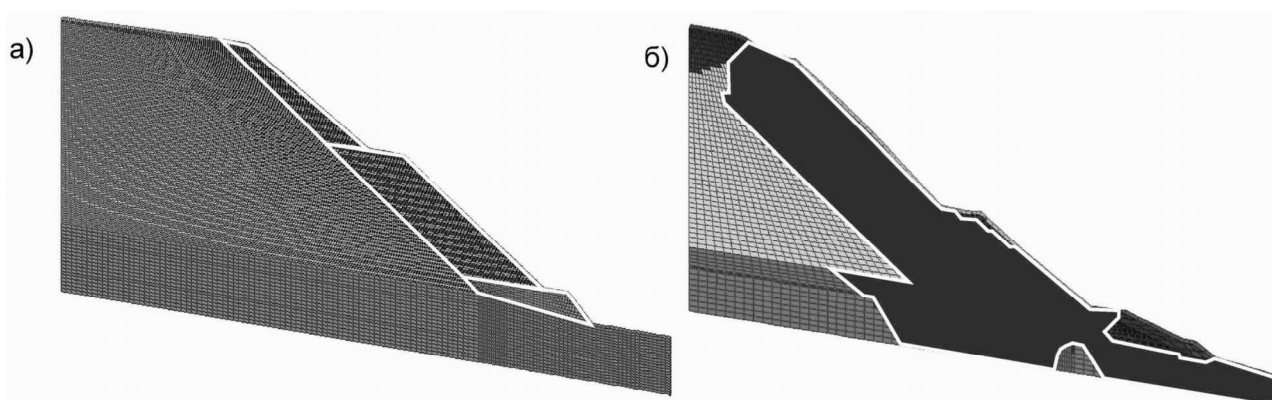


Рис. 2. График для определения параметров армирующих прослоек второго уровня.



а – расчетная схема; б - зоны развития пластических и упругих деформаций.

Геотехническое моделирование конструкции проводилось на программном комплексе «FEM models», разработанном геотехниками г. Санкт-Петербурга. Основой программного комплекса является метод конечных элементов, что позволяет решать трехмерные теплофизические и напряженно-деформированного состояния задачи сооружений и их оснований размерностью в несколько миллионов степеней свободы в приемлемое время (часы) на обычном персональном компьютере. Комплекс «FEM models» позволяет решать как микро, так и макро задачи, связанные не только с конструкциями стандартного представления, но и с аморфными средами, изменяющими свои физические и геометрические параметры в пространстве и во времени (гидротехнические сооружения, глобальные и местного уровня изменения параметров геологических систем). В силу своих возможностей

программный комплекс «FEM models» признан «Российским Обществом по механике грунтов, геотехнике и фундаментостроению» как базовый для решения сложных практических задач геотехники. Было выполнено послойное моделирование устройства каждого яруса, т.е. имитировалось постепенное нагружение основания и откоса ТБО, после чего определялись параметры напряженно-деформированного состояния конструкции в целом и в каждом слое геосинтетических материалов в отдельности. Проектные показатели деформируемости конструкции в целом имеют невысокие значения при её значительных габаритах, а уровень напряжённого состояния армирующих элементов из геоматериалов находится в пределах их проектной прочности, рассчитанной на период жизненного цикла сооружения.



Рис. 4. В основании сооружения георешетка с прочностью в 4,25 раза меньше требуемой.

Рабочий проект получил положительное заключение государственной экспертизы и утверждён заказчиком к производству работ.

СТРОИТЕЛЬСТВО

Прежде всего, следует отметить, что в России практики строительства армогрунтовых сооружений таких размеров и уровня ответственности не существует.

Работы на объекте начались в октябре 2009 г, в ходе строительства подрядной организацией были допущены серьезные упрощения высокоответственной конструкции без обоснований, перерасчетов и согласований с проектировщиком.

Так первый уровень защитной конструкции - основание с берегоукреплением – отсыпан из предназначенных в отвал некондиционных грунтов расположенного недалеко параллельного объекта того же подрядчика. Грунты слабо морозоустойчивые, размокаемые, из метаморфических пород с преобладающим содержанием вымываемой глинистой фракции. Верх конструкции присыпан скальным грунтом изверженных пород. Несущая способность такого основания предельно низкая. Из конструкции берегоукрепления исключены сетчатые контейнеры с заменой на каменную наброску с максимальной массой глыб не превышающих 1,5 т, в то время как в конструкции предполагалось ис-

пользование волнолома из 5 тонных тетраподов. Отказ от сетчатых контейнеров предопределил новые параметры берегозащитной конструкции: расчетная масса глыб - до 3,6 т, отсыпаемая из этих глыб берма имеет максимальную глубину подошвы под водой до 9 м, необходимо использование водолазных работ. Найти в Приморском крае необходимое количество глыб, удовлетворяющих проектным требованиям, очень сложно и дорого. Использование сетконов позволило бы уложить конструкцию берегозащиты с помощью кранов на глубину около 3 м без применения дорогостоящих и трудоемких водолазных работ.

Для постройки второго и третьего уровней армогрунтовой конструкции защиты высокого откоса подрядчиком, без должных технических согласований со специалистами, приобретены геосинтетические материалы неизвестного происхождения. Состав исходного сырья геоматериалов документально не подтверждён, а этот показатель имеет большое значение для безопасной эксплуатации армогрунтового сооружения, но обозначен как полипропилен. Следует отметить, что срок службы полипропиленовых изделий в условиях строительства объекта в 5-8 раз меньше, чем из полиэтилена, как требуется по проекту.

По результатам официальных испытаний основных из приобретённых геоматериалов в специализированной лаборатории «Дальст-

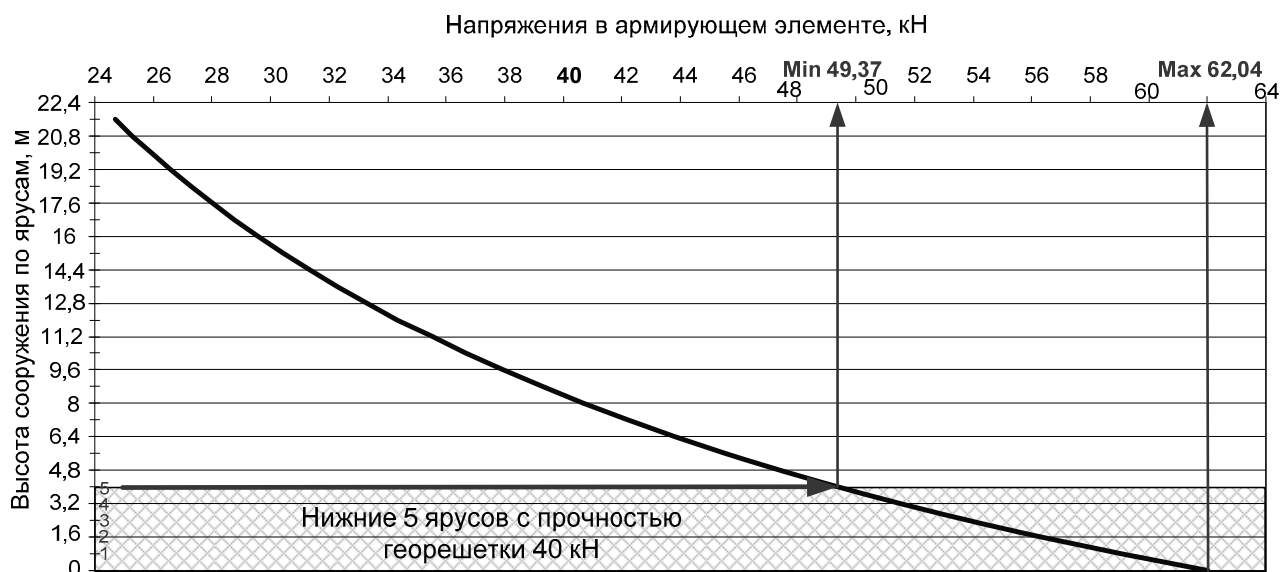


Рис. 5. График зависимости напряжений в георешетке от высоты конструкции.

ройиспытания» г. Владивостока их прочность оказалась ниже требуемой проектными расчётами на **18-20%**, что недопустимо. Геометрические размеры структур приобретенных материалов в значительной мере не соответствуют структуре материалов, принятых в проекте по расчёту, что не обеспечивает их композитобразующую способность на 32% и анкерующую – на 60%.

Подрядчиками были допущены серьезные отступления от проекта:

1. Первые пять ярусов геотехнической обоймы (высота 4,0 м) выполнены с недопустимым использованием двухосной георешётки с заявленной прочностью менее требуемой в **4,25** раза, чем в проектной документации (рис. 4).
2. Использование при формировании торцов геотехнической обоймы мешков с грунтом заканчивается после устройства 2-го яруса, что является причиной нарушения конфигурации геотехнической обоймы.
3. Имеются деформации (спльвы) конструкции откосной части берегоукрепления в сторону моря на 2-2,5 м и на высоту более 1 м.
4. Наличие местных просадок двух и более нижних ярусов конструкции на

величину 20-30 см, уже даже при их частичном нагружении, указывает на наличие дефектов в конструкции в целом и в ее основании. В отдельных местах отмечена осадка сооружения под собственным весом на величину до 1 м.

5. Укладка георешеток в конструкцию выполнена с нарушением технологии использования конструктивных элементов.
6. Смежные по высоте полотна георешетки, уложенные плоскостью к плоскости дополнительно создают predetermined плоскости скольжения с очень низким коэффициентом трения пластика по пластику.
7. Отмечены разрушения в нижних ярусах 2-х обойм, выполненных из двухосной георешетки с заниженной прочностью. Волны от нерасчетной величины, по характерным признакам, достигали высоты 2-го яруса конструкции защиты откоса. Местами отмечается вымывание из обоймы глинистого заполнителя и мелких фракций грунта засыпки с трещинами и деформациями разрыва обоймы от воздействия волноприбоя.

8. Размеры камня, используемого в настоящий момент для берегоукрепления, определяют их массу не более 1500 кг.

Расчеты максимального растягивающего напряжения, возникающего в армирующих элементах, свидетельствует о том, что в нижней части конструкции, где была использована георешетка с прочностью 40 кН возникают напряжения 62,04 кН. Минимальные напряжения (49,37 кН), возникающие в этой части конструкции существенно превышают даже номинальную прочность использованной георешетки (рис. 5).

Приведенные наглядные примеры и фактические последствия отступлений от проектных решений при строительстве защитной конструкции показывают, что имеются все основные предпосылки для возникновения аварийной ситуации при использовании материалов с несоответствующими проекту свойствами.

Обобщая приведенный выше опыт можно сделать вывод: применение современных геотехнологий в строительстве дело нужное, они во многом являются экономически более выгодной и надежной альтернативой традиционным решениям. Но отсутствие нормативной литературы, однозначно регламентирующей применение того или иного метода расчета, достоверного и апробированного, создает сложности для проектировщиков. Пока лишь только в немногих ВУЗах преподается курс геотехнологий в строительстве, что приводит к отсутствию знаний и у молодых специалистов. Схожая ситуация и у строителей, новизна технологии и отсутствие информации создает сложности для развития и внедрения технологий, позволяющих значительно повысить надежность и долговечность сооружений, а во многих случаях еще и снизить стоимость строительства.

Российя, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47, e-mail: dvgeosintetika@mail.ru.

Берестяный Юрий Борисович, член РОМГГиФ, кандидат технических наук, директор Научно-внедренческого предприятия «ДВ-Геосинтетика». Россия, 680031 Хабаровск, ул. Павловича, д. 13, e-mail: dvgeosintetika@mail.ru.

Федоренко Евгений Владимирович, кандидат геолого-минералогических наук, доцент кафедры «Железнодорожный путь, основания и фундаменты», Дальневосточный государственный университет путей сообщения. Россия, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47, e-mail: yginfd@mail.ru.

Вальцева Татьяна Юрьевна, аспирант кафедры «Железнодорожный путь, основания и фундаменты», Дальневосточный государственный университет путей сообщения. Россия, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47, e-mail: vtu25@mail.ru.

Михайлин Роман Геннадьевич, аспирант кафедры «Железнодорожный путь, основания и фундаменты», Дальневосточный государственный университет путей сообщения. Россия, 680021 Хабаровск, ул. Серышева, 47, E-mail: mrg13@mail.ru.

Кудрявцев Сергей Анатольевич, член РОМГГиФ, доктор технических наук, профессор кафедры «Железнодорожный путь, основания и фундаменты», Дальневосточный государственный университет пу-