Publishing House ASV

begell house, inc. publishers

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

Volume 14 • Issue 1 • 2018

ISSN 2588-0195 (Online)
ISSN 2587-9618 (Print) Continues ISSN 1524-5845

International Journal for

Computational Civil and Structural Engineering

Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций

http://raasn.ru/public.php

http://ijccse.iasv.ru/

DOI: 10.22337/2587-9618

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Urban Planning Institute
of Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Moscow Institute of Architecture (State Academy);
Perm National Research Polytechnic University;
Kielce University of Technology (Poland);
9b9, Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D.,
Director of ASV Publishing House;
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO";
Tomsk State University of Architecture and Building;
Russian University of Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center "STADYO";
Russian University of Transport (RUT – MIIT);
Russian University of Friendship of Peoples;
Perm National Research Polytechnic University;
Tomsk State University of Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor, Dr.Sc.,
SemanticPro;
Boston, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute, Polish Academy of
Sciences; Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko, Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analise Numerique; NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

PUBLISHER

Publishing House ASV
(ООО «Издательство АСВ»)
19/1,12, Yaroslavskoe Shosse, 120338, Moscow, Russia
Tel. +7(925)084-74-24; E-mail: iasv@iasv.ru; Интернет-сайт: http://iasv.ru/

INDEXED IN:

Russian Science Citation Index
CrossRef
Google Scholar
DOAJ (Directory of Open Access Journals)
Ulrichsweb Global Serials Directory
WorldCat

ADVISORY EDITORIAL BOARD

Robert M. Aloyan,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Mojtaba Aslami, Ph.D,
Fasa University;
Daneshjou blvd, Fasa,
Fars Province, Iran

Mukhtaritdin M. Batdalov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Dagestan State University
of National Economy;
5, Ul. D. Ataeva, Makhachkala,
Dagestan, 367008, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Yuri M. Bazhenov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Alexander T. Bekker,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Far Eastern Federal University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
8, Sukhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak,
Professor, Ph.D.,
University of Žilina;
1, Univerzitná, Žilina, 010 26,
Slovakia

Evgeniy M. Chernishov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical
University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir G. Gagarin,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Alexander S. Gorodetsky,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
LIRA SAPR Ltd.;
7a Kiyanovsky Side Street
(Pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vladimir T. Erofeev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT);
9b9 Obrazcova Street, Moscow,
127994, Russia

Sergey V. Fedosov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ivanovo State Polytechnic
University;
20, Ulitsa 8 Marta, Ivanovo,
153037, Russia

Sergiy Yu. Fialko,
Professor, Dr.Sc.,
Cracow University of
Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Vyatcheslav A. Ilyichev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
Podzemproekt Ltd.;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa
Polskiego Kielce, 25 – 314,
Poland

Sergey Yu. Kalashnikov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Volgograd State Technical
University;
28, Lenin avenue, Volgograd,
400005, Russia

Semen S. Kaprielov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutskaya St., Moscow,
109428, Russia

Nikolay I. Karpenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building
Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction
Sciences;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
21, Lokomotivny Proezd,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov,
Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Perm National Research
Polytechnic University;
29 Komsomolsky pros., Perm,
Perm Krai, 614990, Russia

John T. Katsikadelis,
Professor, Dr.Eng, PhD, Dr.h.c.,
National Technical University of
Athens;
Zografou Campus
9, Iroon Polytechniou str
15780 Zografou, Greece

Vitaly I. Kolchunov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Southwest State University;
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
94, 50 let Oktyabrya, Kursk,
305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport
(RUT – MIIT); 9b9 Obrazcova
Street, Moscow, 127994, Russia

Sergey B. Krylov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Center of Construction;
6, 2nd Institutskaya St., Moscow,
109428, Russia

Sergey V. Kuznetsov,
Professor, Dr.Sc.,
Ishlinsky Institute for Problems
in Mechanics of the Russian
Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo,
Moscow, 119526, Russia

Vladimir V. Lalin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
Saint-Petersburg, 195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya Sq., Tomsk,
634003, Russia

Rashid A. Mangushev,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan,
420043, Republic of Tatarstan,
Russia

Vladimir L. Mondrus,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe Shosse 26,
Moscow, 129337, Russia

Valery I. Morozov,
Corresponding Member
of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil
Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Anatoly V. Perelmuter,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect,
Petrozavodsk, 185910,
Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
7, Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi,
Professor, Dr.Sc.,
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Vladimir P. Selyaev,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Ogarev Mordovia State
University;
68, Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Eun Chul Shin,
Professor, Ph.D.,
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh,
Professor, Ph.D,
University of Roorkee;
Roorkee, India, 247667

Wacław Szcześniak,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka,
Professor, Dr.Sc.,
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki,
Professor, Dr.Sc.,
Wroclaw University
of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University
of Technology;
Pl. Politechniki 1, 00-661
Warsaw, Poland

Segrey I. Zhavoronok, Ph.D.,
Institute of Applied Mechanics of
Russian Academy of Sciences;
Moscow Aviation Institute
(National Research University);
7, Leningradsky Prt.,
Moscow, 125040, Russia

Askar Zhussupbekov,
Professor, Dr.Sc.,
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D.,
Deputy Executive Scientific
Secretary of the Russian
Academy of Architecture and
Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka,
107031, Moscow, Russia

EDITORIAL TEAM

Alexander V. Kuzmin,
Full Member of RAACS,
President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
Research Center of Construction;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Pavel A. Akimov,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Executive Scientific Secretary of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Scientific Research Center "STADYO"; Tomsk State University of Architecture and Building; Russian University of Friendship of Peoples;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research & Development Center "STADYO"; Russian University of Transport (RUT – MIIT); Russian University of Friendship of Peoples; Perm National Research Polytechnic University; Tomsk State University of Architecture and Building;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi,
Professor, Dr.Sc.,
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov,
Professor, Dr.Sc.,
SemanticPro;
Boston, USA

Charles El Nouty,
Professor, Dr.Sc.,
LAGA Paris-13 Sorbonne Paris Cite; 99 avenue J.B. Clément,
93430 Villetaneuse, France

Darya Filatova,
Professor, Dr.Sc.,
Kielce University of Tecnology;
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25-314, Poland

Vladimir Ya. Gecha,
Professor, Dr.Sc.,
Research and Production Enterprise All-Russia Scientific-Research Institute of Electromechanics with Plant Named after A.G. Iosiphyan;
30, Volnaya Street, Moscow, 105187, Russia

Taymuraz B. Kaytukov,
Advisor of RAACS, Ph.D,
Deputy Executive Scientific Secretary of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Amirlan A. Kusainov,
Foreign Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Kazakh-American University,
9, Toraighyrov Str., Almaty, 050043, Republic of Kazakhstan

Nadezhda S. Nikitina,
Professor, Ph.D,
Director of ASV Publishing House;
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Nikolai P. Osmolovskii,
Professor, Dr.Sc.,
Systems Research Institute Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenko,
Professor, Dr.Sc.,
Equipe d'Analise Numerique NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin,
Professor, Dr.Sc.,
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya, 195251 Saint-Petersburg, Russia

Marina V. Shitikova,
Professor, Dr.Sc.,
Voronezh State Technical University;
14, Moscow Avenue,
Voronezh, 394026, Russia

Vladimir N. Sidorov,
Advisor of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Russian University of Transport (RUT – MIIT); Russian University of Friendship of Peoples; Moscow Institute of Architecture (State Academy); Perm National Research Polytechnic University; Kielce University of Technology (Poland);
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia

Valery I. Telichenko,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
The First Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Vladimir I. Travush,
Full Member of RAACS,
Professor, Dr.Sc.,
Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
Urban Planning Institute of Residential and Public Buildings;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Igor L. Shubin,
Corresponding Member of RAACS, Professor, Dr.Sc.,
Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences;
21, Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russia

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Maldybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Petr P. Gaidzhurov, Professor, Dr.Sc.,
Don State Technical University; 1, Gagarina Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.,
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.,
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, Ph.D.,
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obraztsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.,
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, Ph.D., Ing.,
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Ph.D.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)

Международный научный журнал "International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)" (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года (ISSN 2588-0195 (Online); ISSN 2587-9618 (Print) Continues ISSN 1524-5845). В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основной критерий отбора статей для публикации в журнале − их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по отраслям науки

- 01.00.00 Физико-математические науки;
- 05.00.00 Технические науки

и группам специальностей

- 01.02.00 Механика
- 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление
- 05.23.00 Строительство и архитектура.

В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ).

Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science. Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Учредители журнала – *Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/* (Россия, г. Москва) и *Издательский дом Begell House Inc.* (США, г. Нью-Йорк).

Издатели журнала – *Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/* (Россия, г. Москва) и до 2017 года *Издательский дом Begell House Inc.* (США, г. Нью-Йорк). Официальными партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук* (*РААСН*), осуществляющая научное курирование издания, и *Научно-исследовательский центр СтаДиО* (ЗАО НИЦ СтаДиО).

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

- предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности публиковать результаты своих исследований;
- привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;
- обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взымается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (http://raasn.ru); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (http://iasv.ru); подраздел «Журнал IJCCSE»): с основной информацией о журнале, его целями и задачами, составом редакционной коллегии и редакционного совета, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей, сведениями о соблюдении редакционной этики, о политике авторского права и лицензирования, о представлении журнала в информационных системах (индексировании), информацией о подписке на журнал, контактными данными и пр. Журнал работает по лицензии Creative Commons типа cc by-nc-sa (Attribution Non-Commercial Share Alike) – Лицензия «С указанием авторства – Некоммерческая – Копилефт».

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ − 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: http://www.rosp.ru/) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»
Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;
Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, офис 12.
Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33
Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (адреса электронной почты: sidorov.vladimir@gmail.com, sidorov@iasv.ru, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или к техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: tkaytukov@gmail.com; Kaytukov@raasn.ru). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство АСВ с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (Publishers International Linking Association (PILA)), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

С октября 2016 года стал возможным прием статей на рассмотрение и рецензирование через онлайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала (электронная редакция):

http://ijccse.iasv.ru

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

В феврале 2018 года журнал был зарегистрирован в Directory of open access journals (DOAJ) – это один из самых известных поисковых сервисов в мире, который предоставляет открытый доступ к материалам и индексирует не только заголовки журналов, но и научные статьи.

Индексирование. В настоящее время журнал индексируется в следующих системах Russian Science Citation Index, CrossRef, Google Scholar, DOAJ (Directory of Open Access Journals), Ulrichsweb Global Serials Directory, WorldCat.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)
Volume 14, Issue 1 ***2018***

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

СОДЕРЖАНИЕ

Обоснование механической безопасности стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018 года в России. Постановка задач расчетных исследований 14
А.М. Белостоцкий, А.И. Нагибович

Апробация численной методики расчета динамического НДС трехмерной системы «основание – сооружение напорного фронта ГТС – водохранилище» на примере шлюза-регулятора Кубанских ГЭС 26
Д.С. Дмитриев

О применении расширенных теорий пластин И.Н. Векуа – А.А. Амосова к задачам о дисперсии волн 36
С.И. Жаворонок

Анализ возможных причин и механизмов разрушений строительных сооружений 49
Е.М. Зверяев, Е.А. Ларионов

Индуктивный анализ деформации арочной фермы 64
М.Н. Кирсанов

Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах 71
Е.Б. Коренева

Об одном численном способе определения осадки поверхности грунтового массива, вызванной сооружением оболочки обделки тоннеля 78
С.Б. Косицын, В.Ю. Акулич

Расчет долговременной фильтрации в пористой среде 92
Л.И. Кузьмина, Ю.В. Осипов, Н.В. Ветошкин

Моделирование аэродинамической неустойчивости строительных конструкций на примере сечения моста.
Часть 1: Оценка аэродинамической неустойчивости сечения инженерными методами. 102
И.Ю. Ланцова, И.Н. Афанасьева

Локальное численное решение краевых задач строительной механики с использованием гибридного дискретного вейвлет-базиса 113
М.Л. Мозгалева, П.А. Акимов, Д.Ф. Семин

Особенности численного решения краевых задач на алгоритмическом языке программирования Python 126
В.Л. Мондрус, Д.К. Сизов

Моделирование колебаний нелинейных систем с учетом нелокального демпфирования 137
В.Д. Потапов, Е.С. Шепитько

Разработка конструкций из цельной древесины для объектов инфраструктуры 145
К.П. Пятикрестовский, В.И. Травуш, А.А. Погорельцев, А.А. Клюкин

О методике повышения защищенности объекта экономики от воздействия воздушной ударной волны 155
А.В. Рыбаков, Е.В. Иванов, Д.С. Седов, Л.Е. Иванова

Жесткое и нежесткое кинематическое воздействие для многоопорной системы: еще раз о роли демпфирования в динамических нагрузках при расчете на сейсмические воздействия 164
А.Г. Тяпин

Проблемы и задачи нестационарной фильтрации 171
В.А. Шабанов

Влияние повышенных температур на механические свойства бетона 178
В.И. Андреев, Л.С. Полякова

Ушел из жизни Виталий Михайлович Бондаренко 185

Ушел из жизни Николай Николаевич Шапошников 187

К юбилею Виталия Ивановича Колчунова 188

К юбилею Сергея Викторовича Федосова 189

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
(Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)
Volume 14, Issue 1 ***2018***

Scientific coordination is carried out by the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS)

CONTENTS

Structural Safety Analysis of Stadiums for the 2018 FIFA World Cup in Russia. Formulation of Problems of Structural Analysis 14
Alexander M. Belostotsky, Alexander I. Nagibovich

Approbation of the Numerical Method of Calculating the Dynamic Stress-Strain State of the Three-Dimensional System "Basis – Facility of the Pressure Front Hydraulic Engineering Structure – Water Reservoir" on the Example of the Cluster-Regulator of the Kuban Hydroelectric Power Stations 26
Dmitry S. Dmitriev

On the Use of Extended Plate Theories of Vekua – Amosov Type for Wave Dispersion Problems 36
Sergey I. Zhavoronok

Analysis of Possible Causes and Mechanisms of Destruction of Building Structures 49
Evgeniy M. Zveryayev, Evgeniy A. Larionov

Inductive Analysis of the Deformation of the Arched Truss 64
Mikhail N. Kirsanov

Method of Compensating Loads for Solving of Anisotropic Medium Problems 71
Elena B. Koreneva

On One Numerical Method for the Computing of Sedimentation of the Surface of the Soil Massive Caused by the Construction of the Shell Lining of the Tunnel 78
Sergey B. Kosytsyn, Vladimir Y. Akulich

Calculation of Long-Term Filtration in a Porous Medium 92
Ludmila I. Kuzmina, Yuri V. Osipov, Nikita V. Vetoshkin

Simulation of Aerodynamic Instability of Structures on the Example of the Bridge Section
Part 1: Evaluation of Aerodynamic Instability of the Section by Engineering Methods 102
Irina U. Lantsova, Irina N. Afanasyeva

Local Numerical Solution of Boundary Problems of Structural Mechanics With the Use of Hybrid Discrete Wavelet Basis 113
Marina L. Mozgaleva, Pavel A. Akimov, Dmitry F. Semin

Features of the Numerical Solution of Boundary Value Problems With the Use of Python Algorithmic Programming Language 126
Vladimir L. Mondrus, Dmitry K. Sizov

Computer Modeling of Nonlinear System Vibrations With Allowance for Nonlocal Damping 137
Vadim D. Potapov, Elena S. Shepitko

Development of Structures from Solid Wood for Objects of Infrastructure 145
Konstantin P. Pyatikrestovsky, Vladimir I. Travush, Alexander A. Pogoreltsev, Alexander A. Klushkin

About Methods of Improving Safety of the Facility from the Impact of Air Shock Wave 155
Anatoly V. Rybakov, Evgeniy V. Ivanov, Dmitry S. Sedov, Lubov E. Ivanova

Rigid and Non-Rigid Kinematic Excitation for Multiply-Supported System: Once More About the Contribution of Damping to the Dynamic Loads in Seismic Analysis 164
Alexander G. Tyapin

Problems of Nonstationary Filtration 171
Vsevolod A. Shabanov

Influence of Elevated Temperatures on Mechanical Properties of Concrete 178
Vladimir I. Andreev, Lyudmila S. Polyakova

In Memory of Prof. Vitaly M. Bondarenko 185

In Memory of Prof. Nikolay N. Shaposhnikov 187

To the Anniversary of Prof. Vitaly I. Kolchunov 188

To the Anniversary of Prof. Sergey V. Fedosov 189

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-14-25

ОБОСНОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СТАДИОНОВ К ЧЕМПИОНАТУ МИРА ПО ФУТБОЛУ 2018 ГОДА В РОССИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ РАСЧЕТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

***А.М. Белостоцкий*[1, 2, 3 ,4, 5, 6], *А.И. Нагибович*[1, 7]**

[1] Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ
[2] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ
[3] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ
[4] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[5] Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ
[6] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ
[7] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлены: описание особенностей расчетного обоснования механической безопасности трехмерных большепролетных систем «грунтовое основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия и фасадов» футбольных стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года в России при основных и особых сочетаниях нагрузок и постановка задач будущих исследований.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, механическая безопасность, футбольный стадион.

STRUCTURAL SAFETY ANALYSIS OF STADIUMS FOR THE 2018 FIFA WORLD CUP IN RUSSIA. FORMULATION OF PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS

***Alexander M. Belostotsky*[1,2, 3 ,4, 5, 6], *Alexander I. Nagibovich*[1, 7]**

[1] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
[2] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA
[3] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA
[4] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[5] Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA
[6] Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA
[7] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article presents structural safety analysis of the three-dimensional long-span systems “ground base – reinforced concrete foundation structures and stands - metal structures of the coating and facades” of football stadiums for the 2018 World Cup in Russia with basic and special combinations of loads and formulation problems of future investigations.

Keywords: math modeling, numerical methods, related production, stress-strain state, strain-stress state, mechanical safety, football stadium.

Современное проектирование и строительство уникальных зданий и сооружений немыслимо без расчетного обоснования и глубоких всесторонних исследований поведения несущих конструкций под действием разного рода воздействий.

Одними из наиболее грандиозных и ответственных объектов строительства являются уникальные большепролетные сооружения, такие как: стадионы, дворцы спорта и аквапарки, торгово-развлекательные комплексы, пешеходные, автомобильные и железнодорожные мосты различных конструктивных решений.

В этом году в период с 14 июня по 15 июля в России пройдет Чемпионат Мира по футболу. Подготовка к этому мероприятию требует значительных затрат и, в первую очередь, проектирования и строительства новых весьма вместительных стадионов, отвечающие современным требованиям безопасности и критериям FIFA.

К проведению чемпионата построены и реконструированы 12 футбольных стадионов: «Лужники» и «Открытие Арена» в г.Москва, «Санкт-Петербург Арена» («Зенит»), г.Санкт-Петербург, «Казань Арена» в г.Казань, «Нижний Новгород Арена» в г.Нижний Новгород, «Волгоград Арена» в г.Волгоград, «Ростов Арена» в г.Ростов-на-Дону, «Екатеринбург Арена» в г.Екатеринбург, «Самара Арена» в г.Самара, «Мордовия Арена» в г.Саранск, «Арена Балтика» в г.Калининград, «Фишт» в г.Сочи.

Несущие конструкций футбольного стадиона представляют собой пространственную большепролетную систему, состоящую из следующих основных фрагментов: грунтовое или свайное основание, железобетонные конструкции фундаментов и трибун, металлические конструкции покрытия и фасада. Расчетное обоснование механической/конструктивной безопасности (напряженно-деформированного состояния (НДС), динамики, прочности и устойчивости) такого рода комбинированных систем имеет ряд особенностей. Ниже приведены наиболее значимые из них:

1) «Экстремальная» вычислительная размерность задач, с известными последствиями. Очевидная сложность заключается в анализе и обработке значительного объема проектной и нормативной документации и построения в точном соответствии с ними подробной геометрической, а затем и конечноэлементной модели системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлоконструкции покрытия и фасадов» при основных и особых сочетаниях нагрузок и воздействий. Модели включают в себя внушительное (несколько сотен-тысяч) количество типов сечений, жесткостей, материалов конструкций.
2) Как правило, разработку и расчетную оптимизацию связанных основных подсистем, таких как основание, железобетонные конструкции чаши стадиона, металлические конструкции покрытия, фасадные конструкции и т.д. ведут независимо друг от друга различные проектные организации. Зачастую построить расчетную модель полной системы «основание – железобетонные конструкции чаши стадиона – металлические конструкции крыши» этим фирмам не представляется возможным. Препятствиями к этому служат различные факторы, от большой вычислительной размерности таких моделей до несовместимости форматов файлов расчетных моделей в различных программных комплексах и коммерческих тайн. В такой ситуации рациональным решением был бы переход к исследованию НДС, прочности, устойчивости и динамики пространственной системы несущих железобетонных и металлических конструкций футбольного стадиона в рамках сепаратных моделей, что позволяет решить проблемы организационного характера при проектировании уникальных сооружений, а также значительно снизить вычислительную размерность задачи. Для обоснования такого перехода требуется провести сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной модели конструкций стадиона (системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун –

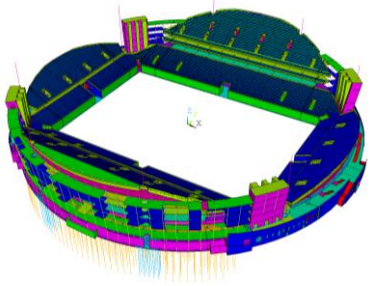
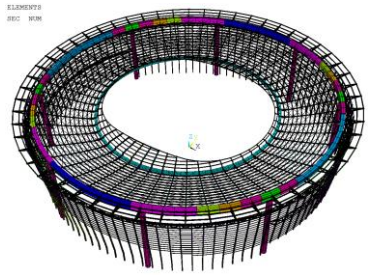
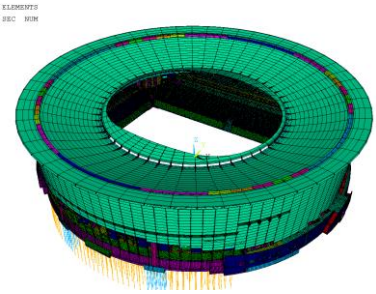
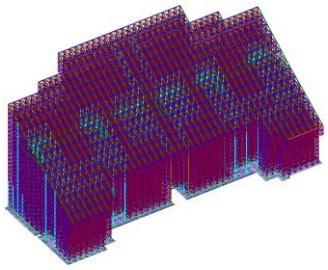
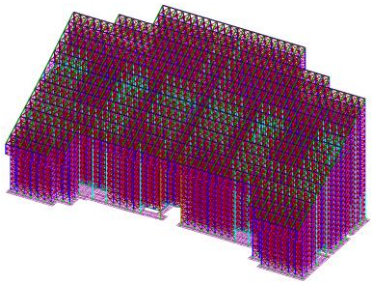
№	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Количество узлов	Количество элементов	Программный комплекс/ Типы КЭ
1	«свайно-грунтовое основание – железобетонные конструкции чаши стадиона»		***296 960***	***355 555***	ANSYS Mechanical SHELL181 BEAM188 MPC184 SURF154 COMBIN14
2	«металлические конструкции покрытия и фасада»		***8 956***	***16 088***	ANSYS Mechanical SHELL181 BEAM188 LINK180 MPC184 SURF154
3	«свайно-грунтовое основание – железобетонные конструкции чаши стадиона – металлические конструкции покрытия и фасада»		***301 630***	***367 623***	ANSYS Mechanical SHELL181 BEAM188 LINK180 MPC184 SURF154 COMBIN14
4	несущие конструкции северной сборно-разборной трибуны		***43 566***	***117 964***	SCAD Office 5 42 44 51 100
5	несущие конструкции южной сборно-разборной трибуны		***41 468***	***114 109***	SCAD Office 5 42 44 51 100

Рисунок 1. Разработанные расчетные КЭ-модели несущих конструкций стадиона в г. Екатеринбург. ПК ANSYS Mechanical и ПК SCAD Office.

металлоконструкции покрытия и фасадов») и моделей подсистем и оценить насколько велико влияние податливости опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун» на статическое состояние, динамику и устойчивость подсистемы «металлоконструкции покрытия и фасадов». При слабом влиянии, т.е. при отсутствии совместных форм и незначительном расхождении значений частот колебаний для родственных форм, можно сделать вывод о возможности исследования НДС в рамках сепаратных моделей.

Альтернативным подходом, который можно применить даже в том случае, когда сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной модели конструкций стадиона и моделей подсистем не дает удовлетворительного ответа (возможность декомпозиции), является метод суперэлементов (МСЭ) или метод динамического синтеза подконструкций.

3) При устройстве свайных или свайно-плитных фундаментов футбольных стадионов возникает задача моделирования неоднородного грунтового основания и свайного поля, содержащего порядка десяти тысяч свай. Процесс моделирования такого количества свай требует применения макросов – написанных на встроенном в программный комплекс (или стороннем) языке программирования скриптов или подпрограмм-макросов, что позволяет эффективно, автоматизировано и в короткие сроки задавать и итерационно корректировать жесткости и обрабатывать выходные данные для такого массива свай.
4) Динамические воздействия, обусловленные согласованными движениями большого числа людей, находящихся на трибунах спортивных сооружений, вызывают колебания конструкций, которые, в свою очередь, могут снижать комфортность пребывания людей в таких сооружениях.

При проектировании конструкций трибун спортивных сооружений необходимо исключить возможность их резонансного возбуждения, от синхронного движения людей. Для этого предельные прогибы конструкций трибун должны быть определены исходя из физиологических требований («зыбкости») по п.10.10 СНиП 2.01.07-85*. Кроме того, частоты собственных колебаний конструкций трибун должны быть в вертикальном направлении больше 5 Гц, а в горизонтальном направлении – больше 3 Гц (данные критерии могут незначительно отличаться и определяются в СТУ).

Расчет на динамическую комфортность неразрывно связан с многоитерационным процессом дополнения и корректировки положения несущих конструкций стадиона на основании результатов статических и динамических расчетов для удовлетворения критериям динамической комфортности (иными словами зыбкости) конструкции «гребенки» трибун.

5) Для металлических конструкций покрытий и фасада требуется провести расчет на устойчивость с учетом физической и геометрической нелинейностей и начальных несовершенств. Также необходимо геометрически нелинейное моделирование предварительно напряженных вантовых элементов в составе конструкций покрытия (для стадионов, покрытия которых имеют соответствующие конструктивные решения), в том числе, при расчете на прогрессирующее обрушение.
6) Для наиболее сложных и ответственных узлов металлических конструкций покрытий требуется проводить уточненный трехмерный физически нелинейный КЭ-анализ НДС и прочности наиболее напряженных конструктивных узлов с учетом реальной диаграммы деформирования. Как правило, такой расчет проводит с использованием оболочечно-стержневой конечноэлементной модели

Стадион в г. Самара «Самара Арена»

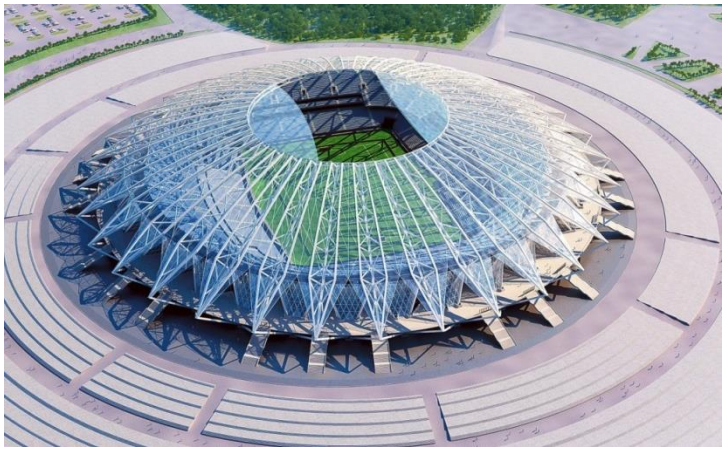


Рисунок 2. Архитектурный проект стадиона в г. Самара.

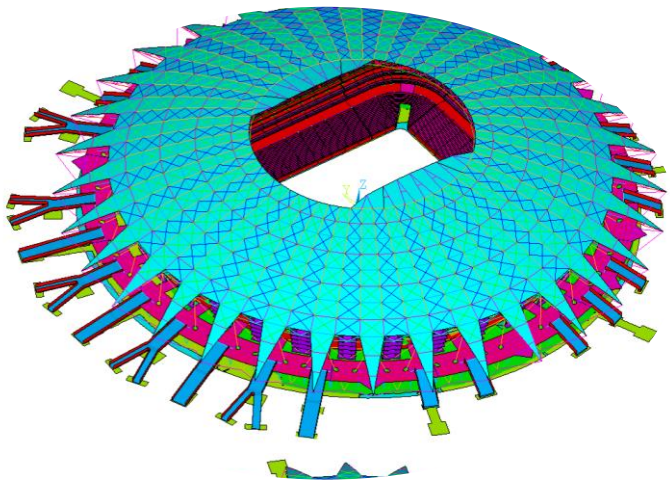


Рисунок 3. Разработанная трехмерная оболочечно-стержневая КЭ-модель стадиона в г. Самара (ПК ANSYS Mechanical).



Рисунок 4. Фотография стадиона в г. Самара (по состоянию на январь 2018 года).

Стадион в г. Нижний Новгород «Нижний Новгород Арена»

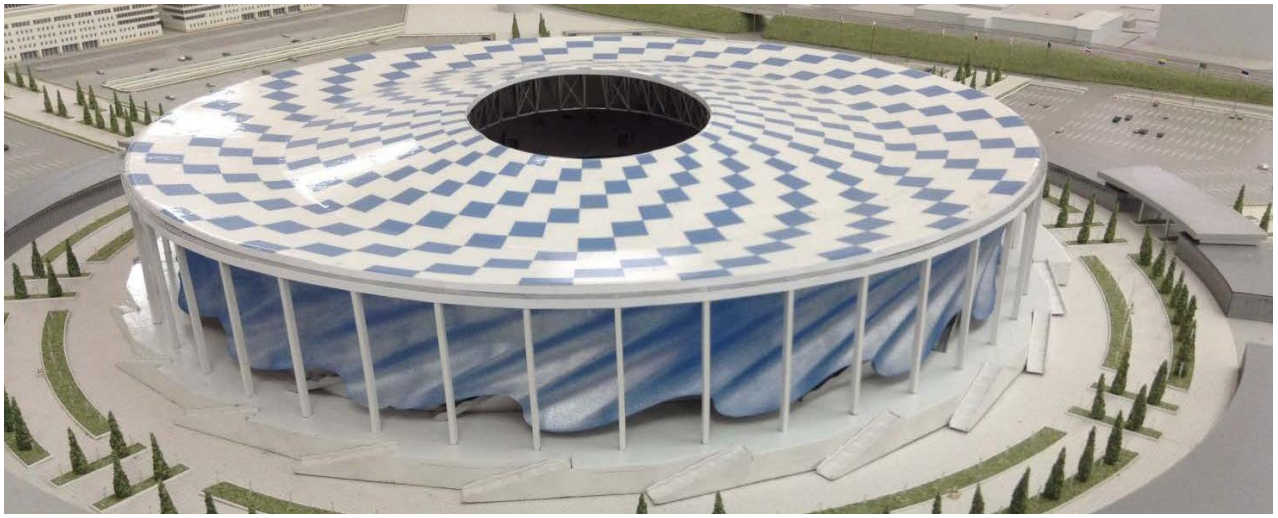


Рисунок 5. Архитектурный проект стадиона в г. Нижний Новгород.

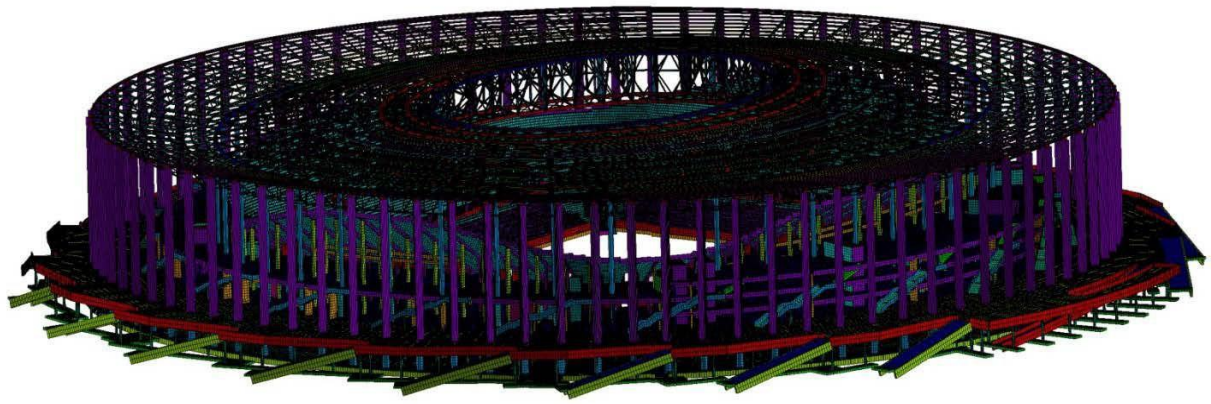


Рисунок 6. Разработанная трехмерная оболочечно-стержневая КЭ-модель стадиона в г. Нижний Новгород (ПК ANSYS Mechanical).



Рисунок 7. Фотография стадиона в г. Нижний Новгород (по состоянию на декабрь 2017 года).

Стадион в г. Волгоград «Волгоград Арена»



Рисунок 8. Архитектурный проект стадиона в г. Волгоград.

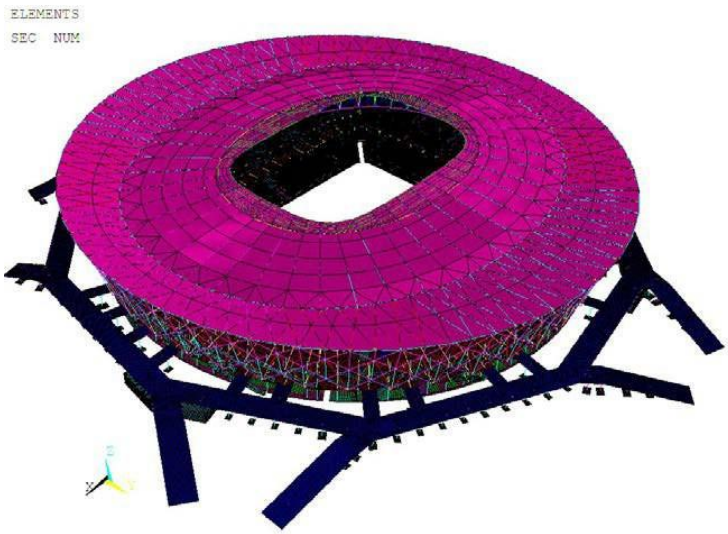


Рисунок 9. Разработанная трехмерная оболочечно-стержневая КЭ-модель стадиона в г. Волгоград (ПК ANSYS Mechanical).



Рисунок 10. Фотография стадиона в г. Волгоград (по состоянию на декабрь 2017 года).

Стадион в г. Екатеринбург «Екатеринбург Арена»

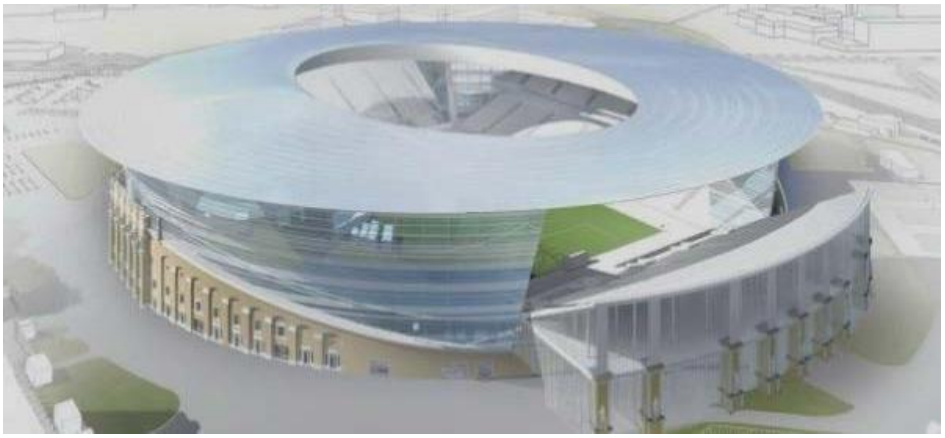


Рисунок 11. Архитектурный проект стадиона в г. Екатеринбург.

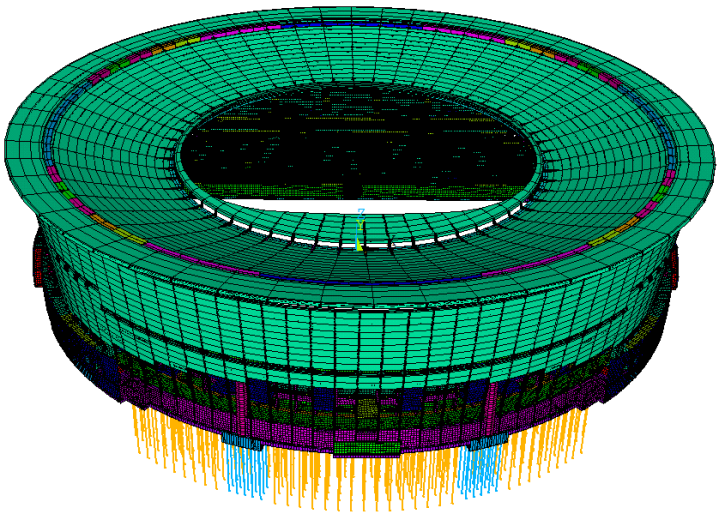


Рисунок 12. Разработанная трехмерная оболочечно-стержневая КЭ-модель стадиона в г. Екатеринбург (ПК ANSYS Mechanical).



Рисунок 13. Фотография стадиона в г. Екатеринбург (по состоянию на декабрь 2017 года).

покрытия, в которую встраивается объемная модель исследуемого узла, имеющая необходимые зоны сгущения сетки конечных элементов для более адекватного воспроизведения НДС. Разработанные таким образом модели верифицируются путем сравнения максимальных перемещений до и после включения узла в общую модель от расчетной нагрузки.

7) Некоторые стадионы к чемпионату мира по футболу в России расположены в сейсмически активных районах (Калининград, Ростов-на-Дону, Краснодар, Сочи). Соответственно для них необходимо проводить динамические расчеты систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлоконструкции покрытия и фасадов» на сейсмические воздействия уровня ПЗ (по линейно-спектральной методике на трехкомпонентные спектры ускорений) и МРЗ (прямым интегрированием уравнений движения на трехкомпонентные акселерограммы).
8) В составе конструкций стадионов возводимых и реконструируемых к проведению чемпионата мира для увеличения количества зрительских мест может быть предусмотрено устройство временных сборно-разборных трибун. Моделирование и расчет временных сборно-разборных трибун, как правило, имеет многоитерационный характер. Для удовлетворения критериев прочности требуется корректировать первоначальные варианты конструкций временных трибун на основании результатов статических и динамических расчетов. В результате такого оптимизационного процесса могут быть удовлетворены как требования прочности и устойчивости конструкций так и физиологические требования по «зыбкости» или, другими словами, динамической комфортности.
9) Для повышения качества расчетных обоснований проектных решений современных сложных объектов строительства, во избежание просчетов в проектировании, приводящих к аварийным ситуациям в ходе строительства и эксплуатации, разработаны требования, согласно которым проектным организациям рекомендуется осуществлять расчеты не менее чем по двум моделям, независимо разработанным в двух верифицированных ПК, проводить сопоставительный анализ полученных результатов. Сопоставляются основные интегральные характеристики конструкций, такие как масса сооружения, собственные частоты и формы колебаний, перемещения сооружения целиком и отдельных конструктивных элементов, усилия в основных типах несущих конструктивных элементов. Для того чтобы добиться приемлемого различия значений, в тесном взаимодействии с коллегами, выполняющими альтернативный расчет, требуется провести калибровки расчетных моделей и устранить все возможные расхождения в жесткостных характеристиках, нагрузках и т.д. что в свою очередь позволяет свести значениях сравниваемых параметров конструкций до приемлемых величин.
10) Научно-техническое сопровождение прохождения в ФАУ «Главгосэкспертиза России» в части расчетного обоснования проектов стадионов. Успешному прохождению экспертизы предшествует большая предварительная работа, в том числе, со смежниками-«альтернативщиками» по достижению приемлемого соответствия основных результатов расчетов, предоставление развернутых ответов на замечания и предложения штатных и приглашенных экспертов, которые, в ряде случаев могут потребовать серьезных дополнительных исследований.

Эти и ряд других проблем численного моделирования требуют углубленных математических исследований, разработки эффектив-

ных методик решения указанных наукоемких задач строительства.

В связи с вышеизложенным, целью дальнейшего исследования является разработка, верификация и апробация эффективной методики численного моделирования, нагрузок и воздействий при максимально адекватном отражении конструктивных особенностей и напряженно деформированного состояния систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлоконструкции покрытия и фасадов». При этом ставится задача обоснования возможности независимой работы конструкторов и расчетчиков, разрабатывающих разные разделы проекта (железобетонные конструкции фундаментов и трибун, металлоконструкции покрытия и фасадов).

Описание разрабатываемой методики и результаты её верификации и апробации на реальных объектах будут изложены в следующих статьях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Модернизация и применение численных методов к расчету плитно-оболочечных систем на статические и динамические воздействия. // В кн. «Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования». – М., Наука, 1980, с. 11-58.
2. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем «сооружение – основание». // Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, 1990, с. 175-180.
3. **Белостоцкий А.М., Белый М.В.** Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. // Труды XVIII Международной конференции BEM&FEM-2000, Санкт-Петербург, 2000, с.65-69.
4. **Белостоцкий А.М.** Прогнозное математическое моделирование состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса. // Вестник МГСУ, №3, 2006, с. 20-61.
5. **Dougill J.W., Blakeborough A., Cooper P.** Dynamic Performance Requirements for Permanent Grandstands Subject to Crowd Action. London. The Institution of Structural Engineers, 2001, pages.
6. **Holmes J.D., Denoon R.O., Kwok K.C.S., Glanville M.J.** Wind Loading and Response of Large Stadium Roofs. // IASS International Symposium on Shell & Spatial Structures, Singapore, 1997,
7. **Flaga A., Kimbar G., Matys P.** A New Approach to Wind Tunnel Similarity Criteria for Snow Load Prediction With an Exemplary Application of Football Stadium Roof. // EACWE 5 Florence, Italy, July 2009.
8. СП 20.13330.2011 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: ФГУП ЦПП, 2011.
9. СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. – М.: Минрегион России, 2011.
10. СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (с Изменениями №1,2) – М.: ГУП «НИИЖБ», ФГУП ЦПП, 2012.
11. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83* – М.: ФГУП ЦПП, 2016.
12. СП 14.13330.2014 Строительство в сейсмических районах СНиП II-7-81* (актуализированная редакция СНиП II-7-81* «Строительство в сейсмических районах» (СП 14.13330.2011)) (с Изменением №1) – М.: ФГУП ЦПП, 2014.

REFERENCES

1. **Belostotsky A.M.** Modernizatsiya i Primeneniye Chislennykh Metodov k Raschetu Plitno-Obolochechnykh Sistem na Staticheskiye i Dinamicheskiye Voz-deystviya [Modernization and Application of Numerical Methods to the Analysis of Plate-Shell Systems for Static and Dynamic Impacts]. // "Dinamicheskiye kharakteristiki i kolebaniya elementov energeticheskogo oborudovaniya", Moscow, Nauka, 1980, pp. 11-58.
2. **Belostotsky A.M.** Postroyeniye Effektivnykh Prostranstvennykh Modeley Dlya Staticheskogo i Dinamicheskogo Rascheta Sistem "Sooruzheniye – Osnovaniye" [Development of Effective Spatial Models for Static and Dynamic Analysis of "Structure – Foundation" Systems]. // Trudy TsNIISK im. Kucherenko, 1990, pp. 175-180.
3. **Belostotsky A.M., Belyi M.V.** Superelementnyye Algoritmy Resheniya Prostranstvennykh Nelineynykh Staticheskikh i Dinamicheskikh Zadach Bolshoy Razmernosti. Realizatsiya v Programmnom Komplekse STADIO i Opyt Raschetnykh Issledovaniy [Superelement Algorithms for Solving Spatial Nonlinear Static and Dynamic Problems of Large Dimension. Implementation in the STADIO Software Package and Experience in Computational Research]. // Trudy XVIII Mezhdunarodnoy konferentsii BEM&FEM-2000, Sankt-Peterburg, 2000, pp. 65-69.
4. **Belostotsky A.M.** Prognoznoye Matematicheskoye Mdelirovaniye Sostoyaniya i Tekhnogennoy Bezopasnosti Otvetstvennikh Obyektov i Kompleksov Megapolisa [Predictive Mathematical Modeling of the State and Technological Safety of Responsible of Objects and Complexes of a Megacity]. // Vestnik MGSU, No. 3, 2006, pp. 20-61.
5. **Dougill J.W., Blakeborough A., Cooper P.** Dynamic Performance Requirements for Permanent Grandstands Subject to Crowd Action. London. The Institution of Structural Engineers, 2001, pages.
6. **Holmes J.D., Denoon R.O., Kwok K.C.S., Glanville M.J.** Wind Loading and Response of Large Stadium Roofs. // IASS International Symposium on Shell & Spatial Structures, Singapore, 1997,
7. **Flaga A., Kimbar G., Matys P.** A New Approach to Wind Tunnel Similarity Criteria for Snow Load Prediction With an Exemplary Application of Football Stadium Roof. // EACWE 5 Florence, Italy, July 2009.
8. SP 20.13330.2011 Nagruzki i Vozdeystviya. Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP 2.01.07-85* [Loads and impacts. Updated version of SNiP 2.01.07-85*]. Moscow, FGUP TsPP, 2011.
9. SP 16.13330.2011. Stalnyye Konstruktsii. Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP II-23-81* [Steel structures. Updated version of SNiP II-23-81 *]. Moscow, Minregion Rossii, 2011.
10. SP 63.13330.2012 Betonnyye i Zhelezobetonnyye Konstruktsii. Osnovnyye Polozheniya. Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP 52-01-2003 (s Izmeneniyami No. 1, 2) [Concrete and Reinforced Concrete Structures. Basic Provisions. Updated Version of SNiP 52-01-2003 (with Modifications No. 1,2)]. Moscow, GUP «NIIZhB», FGUP TsPP, 2012.
11. SP 22.13330.2016 Osnovaniya Zdaniy i Sooruzheniy. Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP 2.02.01-83* [Foundations of Buildings and Structures. Updated Version of SNiP 2.02.01-83*]. Moscow, FGUP TsPP, 2016.
12. SP 14.13330.2014 Stroitelstvo v Seysmicheskikh Rayonakh SNiP II-7-81* (Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP II-7-81* "Stroitelstvo v seysmicheskikh rayo-nakh" (SP 14.13330.2011)) (s Izmeneniyem №1) [Construction in Seismic Regions SNiP II-7-81 * (Updated Version SNiP II-7-81* "Construction in Seismic Regions" (SP

14.13330.2011)) (with Modification No. 1)]. Moscow, FGUP TsPP, 2014.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения» Российского университета транспорта (МИИТ); профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительных конструкций и вычислительной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810; тел. +7 (499) 706-88-10; e-mail: amb@stadyo.ru.

Нагибович Александр Игоревич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810;
тел. +7 (499) 706-88-10; e-mail: nagibovich@yandex.ru

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Director of Scientific Research Center “StaDyO”; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – MIIT); Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University; Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Peoples' Friendship University of Russia; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (499) 706-88-10;
E-mail: amb@stadyo.ru.

Alexander I. Nagibovich, Senior Engineer of Scientific Research Center “StaDyO”; PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia;
phone +7 (499) 706-88-10;
E-mail: nagibovich@yandex.ru

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-26-35

АПРОБАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКОГО НДС ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ «ОСНОВАНИЕ – СООРУЖЕНИЕ НАПОРНОГО ФРОНТА ГТС – ВОДОХРАНИЛИЩЕ» НА ПРИМЕРЕ ШЛЮЗА-РЕГУЛЯТОРА КУБАНСКИХ ГЭС

Д.С. Дмитриев
Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлены результаты апробации разработанной методики уточненного численного моделирования динамического НДС трехмерной системы «грунтовое основание – водохранилище – сооружение напорного фронта ГТС» при сейсмических воздействиях, на реальном гидроэнергетическом объекте. Проведено сопоставление двух различных способов моделирования жидкости, взаимодействующего с сооружением и основанием гидроузла. Затронуты вопросы выбора размеров блока основания и учета инерционной нагрузки от него, а также способа задания исходного сейсмического воздействия.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, связанные системы «сооружение – жидкость», сейсмостойкость, собственные частоты и формы колебаний, динамическое напряженно-деформированное состояние

APPROBATION OF THE NUMERICAL METHOD OF CALCULATING THE DYNAMIC STRESS-STRAIN STATE OF THE THREE-DIMENSIONAL SYSTEM “FOUNDATION – FACILITY OF THE PRESSURE FRONT HYDRAULIC ENGINEERING STRUCTURE – WATER RESERVOIR” ON THE EXAMPLE OF THE CLUSTER-REGULATOR OF THE KUBAN HYDROELECTRIC POWER STATIONS

Dmitry S. Dmitriev
Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

Abstract: In the article, the results of approbation of the developed technique of the refined numerical simulation of the dynamic stress-strain state of the three-dimensional system “ground base (earth foundation) – reservoir – construction of the pressure head of the hydraulic system” under seismic influences. A comparison is made between two different ways of modeling the fluid interacting with the structure and the base of the hydroelectric power station. The issues of choosing the dimensions of the base unit and taking into account the inertial load from it, as well as the method of determining the initial seismic action, are touched upon.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, finite element method, connected systems “structure – fluid”, seismic stability, natural frequencies and vibration modes, dynamic stress-strain state

1. ВВЕДЕНИЕ

Апробация разработанной численной методики расчета динамического НДС трехмерной системы «грунтовое основание – водохранилище – сооружение напорного фронта ГТС» при сейсмических воздействиях [1,2,3] выполнена на реальном гидротехническом

сооружении при действии постоянных, статических и сейсмических нагрузок с использованием расчетного программного комплекса ANSYS Mechanical.

В качестве объекта для апробации разработанной численной методики выбран шлюз-регулятор №1 (ШР-1) Кубанских ГЭС. Это низконапорное гидротехническое сооружение относящиеся ко II классу опасности (из-за своего назначения и условий эксплуатации). Для гидротехнических сооружений высокой опасности (II класс), согласно [4] необходимо проводить расчеты на сейсмические воздействия с использованием методов динамической теории (ДТ) сейсмостойкости. В расчетах данного типа имеется целый ряд условностей и неопределенностей, в том числе касающихся учета водного массива, взаимодействующего с сооружением [13]. В разработанной численной методике расчета динамического НДС гидросооружений именно вопросу учета жидкости уделено особое внимание. В данной статье приведены результаты апробации данной методики.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Перед данными расчетными исследованиями были поставлены следующие задачи:

1. разработать подробную, пространственную, конечноэлементную модель системы «грунтовое основание - сооружение шлюза-регулятора №1 – водный массив»;
2. провести комплекс вариантных расчетов системы по разработанной и верифицированной численной методике, в соответствии с положениями, заложенными в действующих нормах;
3. провести сопоставительный анализ результатов, полученных при двух различных способах моделирования жидкости;
4. проанализировать трехмерное НДС гидросооружения и основания при сейсмических воздействиях.

3. ОПИСАНИЕ СООРУЖЕНИЯ

Шлюз-регулятор №1 предназначен для деления потока воды между ГАЭС, находящейся в составе Каскада Кубанских ГЭС и Большим Ставропольским каналом в республике Карачаево-Черкесия. В весенне-летний период излишки воды забираются из Большого Ставропольского канала и через гидроагрегаты ГАЭС и холостой водосброс наполняют Кубанское водохранилище. В осенне-зимний период гидроагрегаты ГАЭС работают в насосном режиме и подают воду из водохранилища в Большой Ставропольский канал.

Данное гидротехническое сооружение представляет собой трехпролетный водослив с широким порогом, выполненный из монолитного железобетона. Ширина каждого пролета 6 м, высота 2.3 м. Отметка порога на входе и выходе равна 639.3 м. Напор на пороге при НПУ составляет 5.95 м. Расчетная пропускная способность ШР-1 составляет 150 $м^3/с$. Плановые размеры подводной части здания раны 18.4×10.0 м, высота здания - 8.0 м.

В пролетах предусмотрены 3 пары пазов для аварийно-ремонтных, рабочих и ремонтных затворов. Рабочий - плоский, колесный, глубинный со стороны НБ. Аварийно-ремонтный – плоский, скользящий, двухсекционный, поверхностный со стороны НБ. Ремонтный – плоский, скользящий, поверхностный со стороны ВБ. Маневрирование рабочими затворами производится за счет стационарных подъемных механизмов, суммарный вес которых составляет 12.3 т. Ремонтные и аварийно-ремонтные затворы опускаются с помощью катучей лебедки весом 13.3 т.

Надводная часть шлюза представляет собой одноэтажное каркасное здание со следующими размерами: в плане 23.45×5.4 м, высотой 7.5 м. Колонны и подкрановые балки выполнены из сборного железобетона, стены (ограждающие конструкции) и перегородки кирпичные. Несущими конструкциями кровли являются железобетонные плиты. Пло-

щадь производственных помещений составляет 120 м^2. Над пролетами водослива устроен мостовой переезд. Балки, на которых лежат плиты автодороги шарнирно опираются на бычки монолитной части.

Подводящий и отводящий каналы имеют крепление откосов каменной наброской и в месте сопряжения с сооружением крепление выполнено железобетонными плитами.

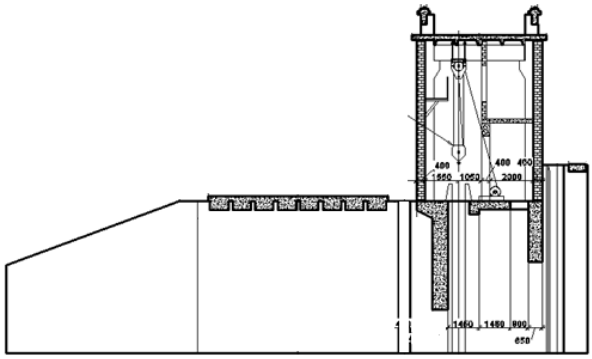


Рисунок 1. Поперечный разрез ШР-1.

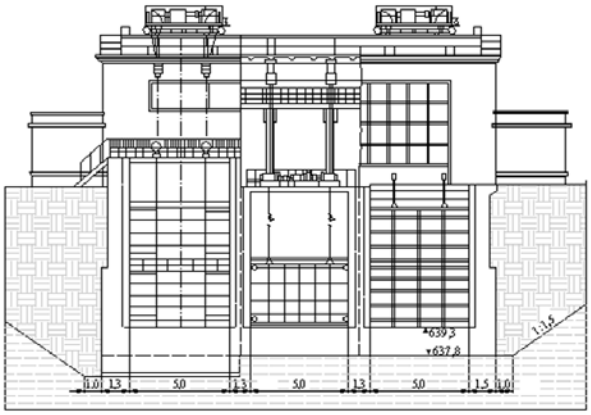


Рисунок 2. продольный разрез ШР-1.

4. ОПИСАНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Расчетная модель шлюза-регулятора №1 создавались в препроцессоре программного комплекса ANSYS Mechanical с использованием специально разработанных параметризированных макросов, написанных на внутреннем языке программирования APDL.

Для моделирования подводной железобетонной части сооружения (плиты основания, бычков и боковых устоев) использовались восьми узловые конечные элементы SOLID45. Массив грунта, включая подводящий и отводящий каналы, так же моделировался объемными элементами SOLID45. Для моделирования стен, плит мостового переезда и кровли использовались четырёхугольные и треугольные в плане конечные элементы оболочки Кирхгофа-Лява типа SHELL43. Балки, колонны и пешеходный мостик моделировались пространственными стержневыми конечными элементами типа BEAM44. Нагрузки от механического оборудования задавались, как присоединенные массы, с помощью конечных элементов типа MASS21.

В рамках исследований, посвященных выбору оптимального метода моделирования жидкости, водный массив моделировался двумя методами:

1. с использованием объемных акустических элементов типа FLUID30;
2. с использованием объемных элементов гидродинамической среды типа FLUID80.

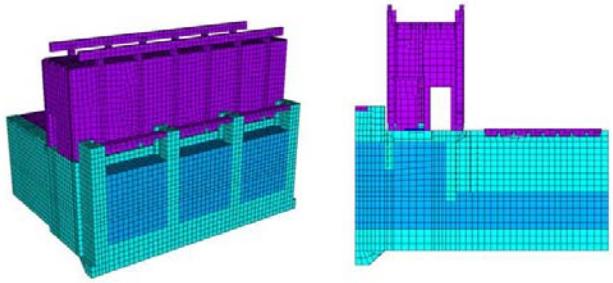


Рисунок 3. Общий вид КЭ-модели ШР-1 без грунтового массива.

Для монолитных железобетонных конструкций материал принят, соответствующий бетону класса Б25, со следующими параметрами: Плотность: ρ=2.2 т/м^3, модуль упругости: E=2.7×E^3 кН/м^2, коэффициент Пуассона μ=0.2. Так как моделирование сложного, нелинейного поведения железобетона не входило в задачи данного исследования, материал был принят упругим и изотропным.

При моделировании массива грунта основания были приняты некоторые упрощения. Геологическое строение массива было реду-

цированно до двух инженерно-геологических слоев с ровной горизонтальной границей по основанию сооружения. Подводящий и отводящий каналы приняты трапецеидальной формы, а береговые примыкания имеют более упрощенные очертания.

Четких рекомендаций по назначению размеров грунтового массива не существует, что приводит к некоторому произволу в выборе габаритных размеров основания. Многоитерационные расчеты с поиском несжимаемой толщи позволяют определить оптимальный размер основания для конкретной задачи, но чаще всего они вписываются в рамки от 2H до 4H, где H – высота гидросооружения [5]. Итоговые размеры массива грунта имеют следующие параметры: глубина – 36 м, длина (вдоль потока) – 90 м, ширина поперек потока – 72 м.

В практике расчетов гидросооружений на сейсмостойкость получил распространение учет основания, обладающего лишь упругими (но не инерционными) свойствами [5,6, 14,15]. Эта условная схема позволяет добиться внутренней сходимости частот и форм колебаний для рассматриваемой системы плотина-основание, при расчете по линейно-спектральной теории (ЛСТ). Расчет шлюза-регулятора по ЛТС также проводился в рамках этой работы, но результаты этих исследований не отражены в данной статье. Для расчетов сооружения прямым динамическим методом с использованием трехкомпонентных синтезированных акселерограмм, грунтовому массиву задавалась плотность, тем самым учитывалась инерционная нагрузка.

В качестве граничных условий узлам на внешних поверхностях грунтового массива были ограничены линейные перемещения в направлении перпендикулярном плоскости массива, а также наложены условия не отражения волн. Контакт сооружения с грунтом принимался абсолютно жестким (элементы сооружения и основания имеют общие узлы на контакте).

Материалы массива грунта принимались упругими, со следующими физическими свойствами:

1. Насыпные и погребные почвы (верхний слой) – плотность ρ=1.86 т/м^3, модуль упругости E=15 МПа, коэффициент Пуассона μ=0.3 (деформационные характеристики приняты по[7]);
2. Коренные грунты – плотность ρ=1.98 т/м^3, модуль упругости E=15 МПа, коэффициент Пуассона μ=0.3.

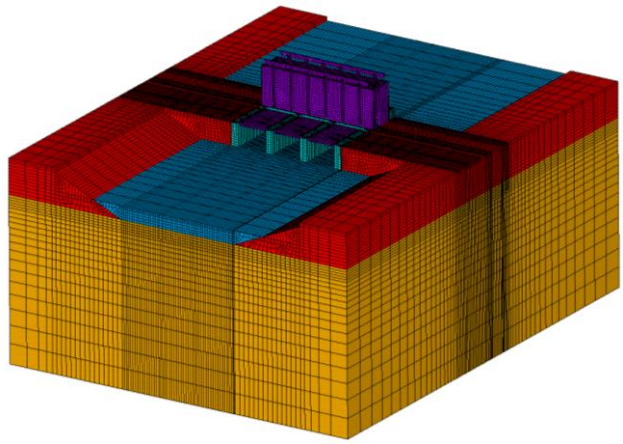


Рисунок 4. Общий вид КЭ-модели ШР-1 с грунтовым и водным массивами.

Вычислительная размерность расчетной модели ШР-1 – 245 528 конечных элементов и 265 422 узлов. Из них 37 648 элементов являются конечными элементами водного массива. Характерный размер конечных элементов изменяется в диапазоне от 0.5 м до 4 м.

5. ПАРАМЕТРЫ РАСЧЕТА

Исходное сейсмическое воздействие. При проведении расчетов ШР-1 на сейсмостойкость прямым динамическим методом были использованы исходные акселерограммы, рекомендованные для сейсмических расчетов рассматриваемого района. В отчете по сейсмическому микрорайонированию участка расположения сооружения представлен набор акселерограмм. Из этого набора была выбрана одна трехкомпонентная акселеро-

грамма рис.5. Критериями выбора были максимальное пиковое значение ускорений и наибольший спектр ускорений. При сопоставительном анализе результатов с разным способом учета жидкости, использовалась одна компонента X (вдоль потока) исходной акселерограммы продолжительностью 10 секунд с максимальным ускорением -9.813 м/с^2 рис. 6.

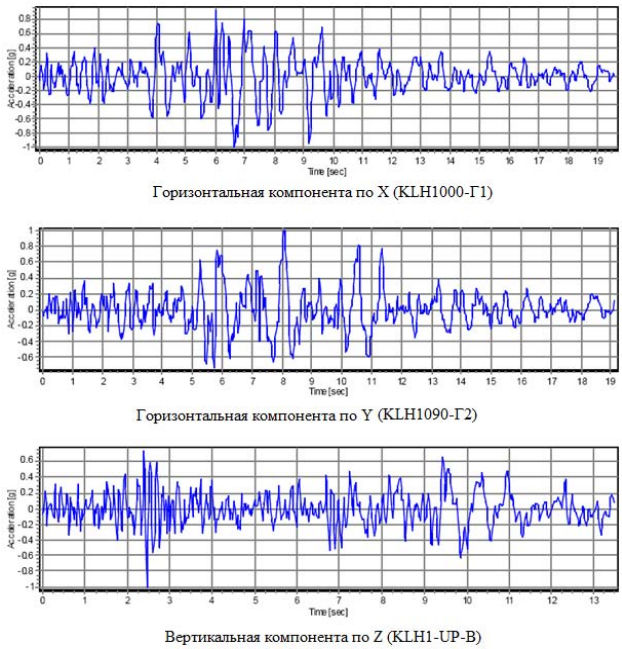


Рисунок 5. Исходная трехкомпонентная акселерограмма. Ускорение в долях от g.

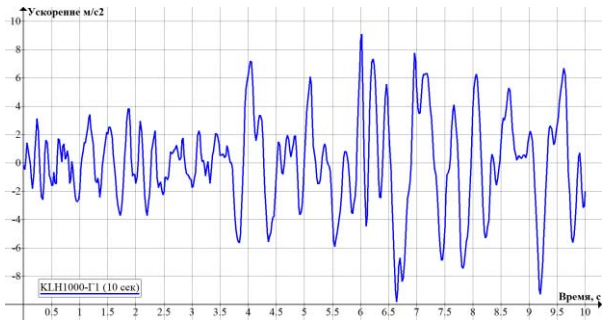


Рисунок 6. Акселерограмма по X. Для сопоставительного анализа. Ускорение в м/с^2.

Исходное сейсмическое воздействие в виде ускорения прикладывалось в качестве инерционной нагрузки. Данный подход достаточно широко применяется в практике расчетов гидросооружений на сейсмостойкость.

Метод и шаг интегрирования. При решении задачи использовался метод интегрирования Ньюмарка Параметры интегрирования Ньюмарка α, δ по умолчанию приняты равными α=0.2525 и δ=0.505. После выбора типа интегрирования, задавался шаг интегрирования по времени. Шаг интегрирования принят кратным шагу исходной акселерограммы, для исключения возможности пропуска пикового значения и равным 1/6 от минимального периода собственных колебаний конструкции. Значение шага интегрирования принято равным 0.005 с.

Демпфирование. Для железобетонных конструкций сооружения задавалось 5% демпфирование Релея, константы демпфирования принимали следующие значения (α=4.44 и β=0.000379). Для массива грунта коэффициент ξ задавался равным 15% от критического [8], при этом константы демпфирования равны (α=7.754817 и β=0.00126).

Моделирование водной среды. Как отмечалось ранее, в рамках данного исследования моделирование водного массива проводилось с использованием двух разных типов конечных элементов, каждый из которых имеет свои особенности.

При использовании акустических элементов типа FLUID30 для них применялись различные внутренние настройки. Внешний слой элементов, который контактировал с грунтом и сооружением, задавался элементами, у которых в качестве узловых степеней свободы выступают линейные перемещения и давление. У остальных элементов в узлах только одна степень свободы - давление. Всем узлам, находящимся на контакте воды с ограничивающими поверхностями, задавались условия контакта Fluid–structure interaction (FSI). В качестве граничных условий, помимо ограничения перемещений на внешней границе водного массива, на свободной поверхности жидкости задавалось нулевое давление.

При моделировании водного массива элементами FLUID80 на контактной поверхности жидкость и сооружение/основание не имели общих узлов, в отличии от случая с акустическими элементами. У совпадающих узлов объединялись перемещения в направлении перпендикулярном контактной поверхности. В качестве граничных условий задавались только ограничения перемещений по нормали на внешней границе водного массива. Следует отметить, что для возможности использования элементов FLUID80 расчетная модель была упрощена (фактически изменена). Часть водного массива, контактирующая с наклонными стенками отводящего и подводящего каналов, была исключена из расчетной модели рис.7. Это вынужденное упрощение связано с особенностью элементов гидродинамической среды типа FLUID80. В работах [9,11] подробно описаны особенности данного типа конечных элементов, которые усложняют, а в некоторых случаях делают невозможным проведение динамических расчетов.

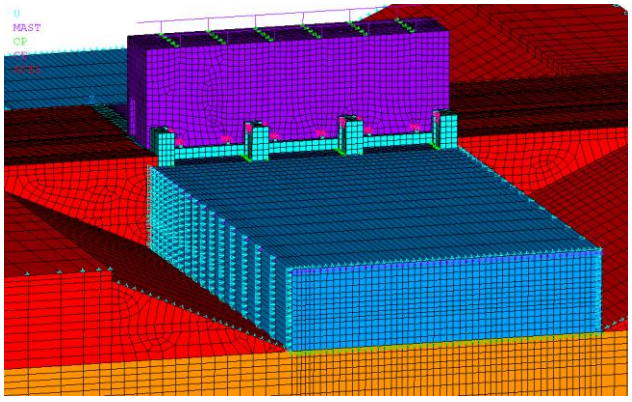


Рисунок 7. Упрощенная расчетная модели с элементами жидкости – FLUID80.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

На первых этапах были приведены важные для понимания объекта расчеты собственных частот и форм колебаний и сейсмических реакций по линейно-спектральной теории, но в рамках данной статьи эти результаты не представлены.

Для вывода результатов в модели были выбраны точки, которые являются характерными для данного сооружения. При сопоставлении результатов с использованием двух разных методов моделирования жидкости оценивались перемещения рельса катучей лебедки по X (вдоль потока) и эквивалентные напряжения по Мизесу в элементе на напорной грани. Горизонтальные перемещения имеют идентичный характер для обоих вариантов моделирования жидкости и отличаются в приделах 3%. Горизонтальные перемещения без учета жидкости также хорошо соотносятся, что говорит о малом влиянии массива жидкости для конкретного сооружения и конкретного исходного воздействия рис.9. Сопоставление результатов по изменению эквивалентных напряжений в элементе на напорной грани показало ожидаемую картину рис.10.

По результатам сопоставительного анализа сделан вывод о возможности использования для данной задачи только элементов типа FLUID30, для элементов FLUID80 необходимо значительно упростить расчетную схему. Необходимо отметить, что даже при упрощении модели продолжительность расчета при использовании элементов FLUID80 больше в 2.3 раза по сравнению с элементами FLUID30. Что делает более предпочтительным использование именно акустических элементов.

Расчет на полную акселерограмму проводился только с акустическими элементами. В качестве результатов выводились и анализировались следующие данные: линейные перемещения, ускорения, эквивалентные напряжения. Для получения истинного ускорения в рассматриваемых точках сооружения из ответной акселерограммы вычиталась исходная. Эти преобразования касались только ускорений. Помимо результатов по выбранным точкам, анализировалось и общее НДС всего сооружения в целом.

7. ВЫВОДЫ

В результате расчетных исследований, выполненных в рамках апробации численной методики, можно сформулировать следующие выводы:

1. разработана адекватная пространственная динамическая конечноэлементная модель системы «грунтовое основание - сооружение шлюза-регулятора №1 – водный массив», комбинирующая объемные элементы жидкости и твердого тела и оболочечно-стержневые элементы сооружения;
2. на базе выполненных разработок и исследований можно сделать вывод о достоверности полученных расчетами критериальных параметров системы «основание - водная среда - сооружение», определяющих прочность, устойчивость и динамику несущих железобетонных и металлических конструкций шлюза-регулятора №1;
3. сопоставительный анализ результатов расчета с использованием объемных элементов жидкости типа FLUID30 и FLUID80 позволил сделать вывод о возможности использовать оба варианта на простых по форме сооружениях (с вертикальными стенками). Для гидросооружений более сложной формы применение элементов FLUID80 невозможно;
4. применение описанных подходов к моделированию жидкости в расчетах на сейсмостойкость гидросооружений возможно не только для низконапорных гидроузлов. Аналогичный подход использован при расчете арочной плотины Нам Чиен во Вьетнаме, высотой 132.5 м [10];
5. следует рекомендовать численную методику, изложенную в [1,2,3] и примененную в настоящем исследовании, к использованию в практике динамических расчетов гидротехнических сооружений [12].

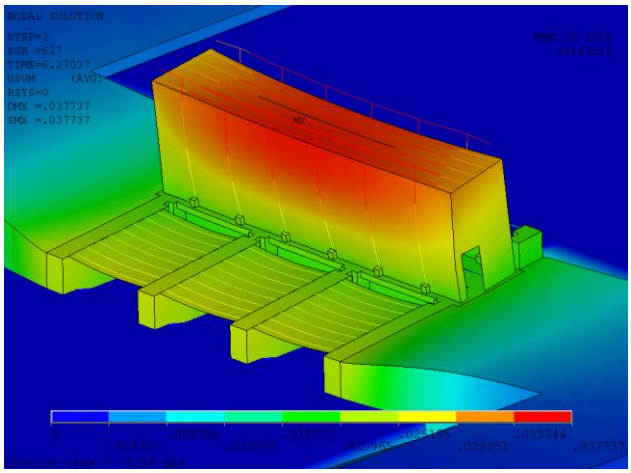


Рисунок 8. Горизонтальные перемещения по X. Время – 6.27 с. Элементы жидкости – FLUID30.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С.** Сравнение методов динамического расчета гидротехнических сооружений по заданным акселерограммам (с использованием программного комплекса ANSYS) // Природообустройство, 2013, №5, с. 43-46.
2. **Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С., Нгуен Тай Нанг Лыонг.** Методика численного моделирования напряженно-деформированного состояния системы «основание – плотина – водохранилище» при сейсмических воздействиях. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 80-86.
3. **Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С., Нгуен Тай Нанг Лыонг.** Верификация методики численного моделирования динамического напряженно-деформированного состояния трехмерных систем «сооружение – жидкость». // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Volume 11, Issue 4, 2015, pp. 124-132.

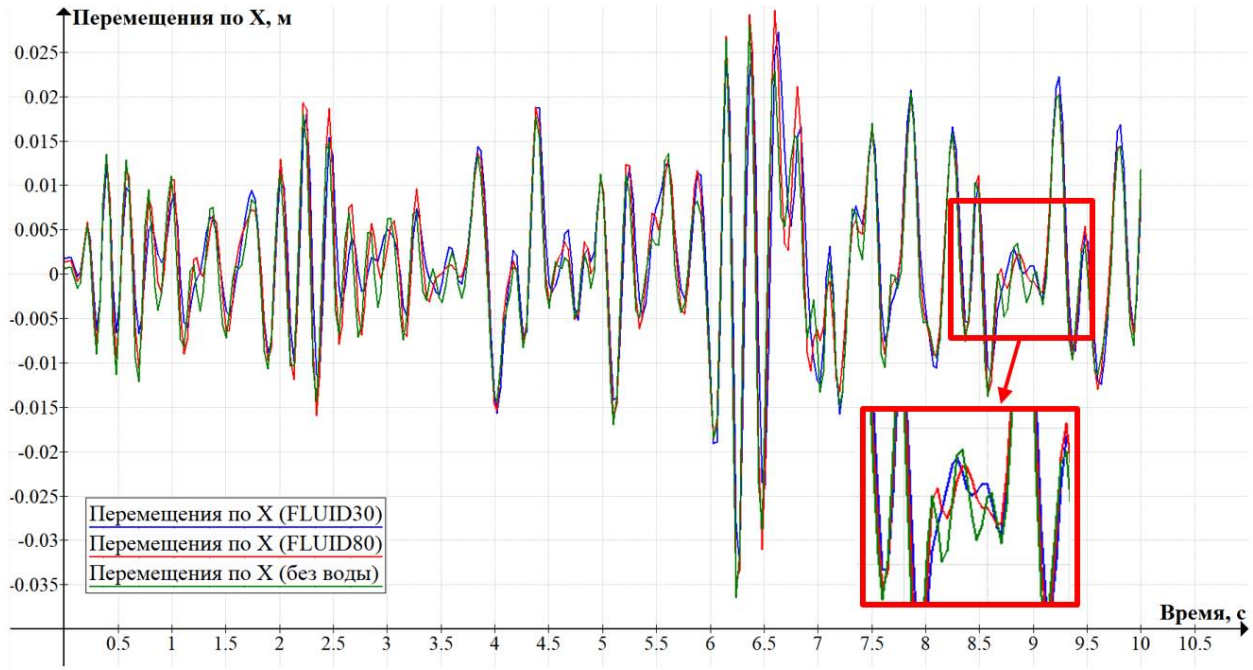


Рисунок 9. Горизонтальные перемещения (U_x) рельса катучей лебедки на кровле здания.

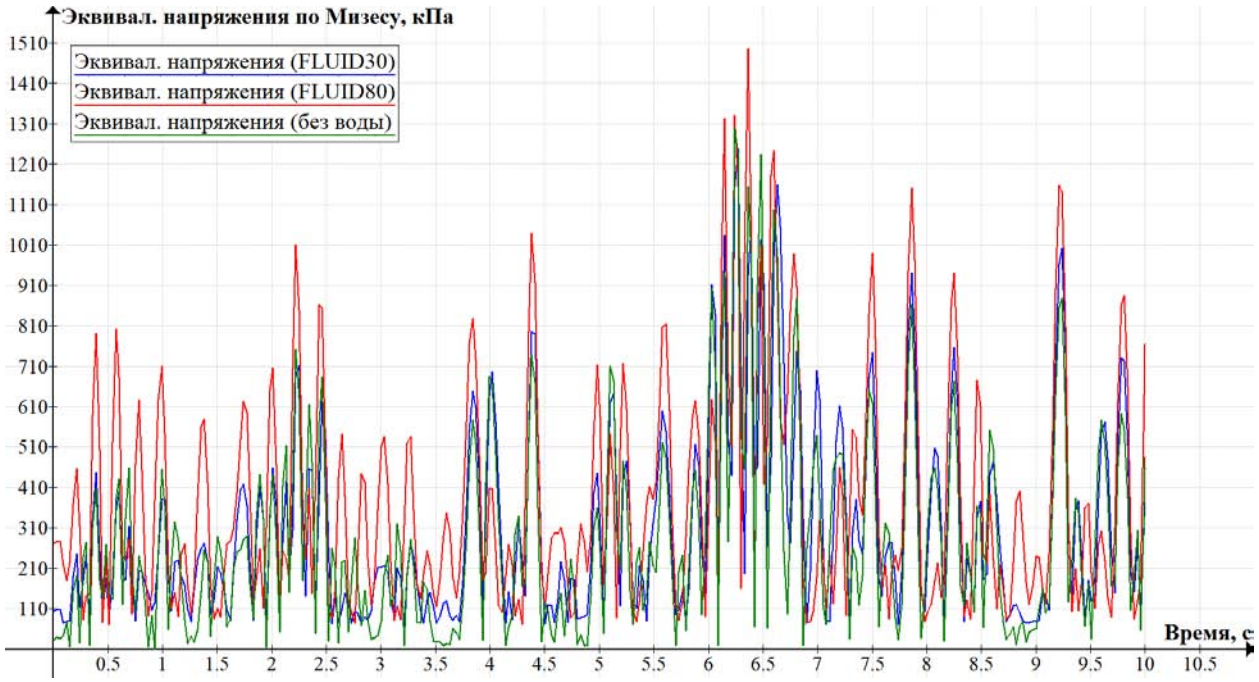


Рисунок 10. Эквивалентные напряжения по Мизесу в элементе на напорной грани сооружения, кПа.

4. СП 14.13330.2014 Строительство в сейсмических районах (Актуализированная редакция СНиП II-7-81).
5. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического динамического напряженно деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия закрытия швов и макротрещин. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности

05.23.07 – «Гидротехническое строительство». – М.: МГУП, 1998. – 367 с.
6. Учет сейсмических воздействий при проектировании гидротехнических сооружений (Пособие к разделу 5: Гидротехнические сооружения СНиП II-7-81).
7. СП 23.13330.2011 Основания гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85.
8. СП 23-105-2004 Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена.
9. **Дмитриев Д.С.** Особенности использования конечных элементов с возможностью учета поверхностных гравитационных волн при динамическом расчете связанных систем «гидротехническое сооружение – жидкость». // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2017, № 3, с. 50-58.
10. **Нгуен Тай Нанг Лыонг.** Апробация методики численного моделирования статического и сейсмического напряженно-деформированного состояния на трехмерной системе «основание – плотина – водохранилище» ГЭС Нам Чиен (Вьетнам). // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 127-136.
11. **Zhu J., Lin Z., Liu Q., Zhang L.** Calculation of the Added Mass of a Liquid Tank's Bulkheads. // Journal of Marine Science and Application, March 2014, Volume 13, Issue 1, pp. 41-48.
12. **Taylan D., Aydın T.** Analysis of Dynamic Behavior of Darideresi-II Dam by ANSYS. // Natural Hazards, 2018, Volume 90, Issue 3, pp 1223-1235.
13. **Zhang C., Pan J., Wang J.** Influence of Seismic Input Mechanisms and Radiation Damping on Arch Dam Response. // Seismic Safety Evaluation of Concrete Dams, 2013, pp 241-262
14. **Omidi O., Lotfi V.** A Symmetric Implementation of Pressure-Based Fluid – Structure Interaction for Nonlinear Dynamic Analysis of Arch Dams. // Journal of Fluids and Structures, Volume 69, 2017, pp 34-55.
15. **Gong A.M., Huang H.Y., Zhang H.Y.** Dynamic Response Analysis of Tailings Dam under Seismic Action. // Applied Mechanics and Materials, Volume 799-800, 2015, pp. 746-750.

REFERENCES

1. **Belostotsky A.M., Dmitriyev D.S.** Sravneniye Metodov Dinamicheskogo Ras-cheta Gidrotekhnicheskikh Sooruzheniy po Zadannym Akselerogrammam (s Ispolzovaniyem Programmnogo Kompleksa ANSYS) [Comparison of Methods of Dynamic Analysis of Hydraulic Structures Based on Specified Accelerograms (Using ANSYS Software)]. // Prirodoobustroystvo, 2013, No. 5, pp. 43-46.
2. **Belostotsky A.M., Dmitriyev D.S., Nguyen Tay Nang Lyong**. Metodika Chislennogo Modelirovaniya Napryazhenno-Deformirovannogo Sostoyaniya Sistemy "Osnovaniye – Plotina – Vodokhranilishche" pri Seysmicheskikh Vozdeystviyakh [Numerical Method Modelling Strain-Stress State System "Foundation – Dam – Reservoir" at Seismic Impacts]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 80-86.
3. **Belostotskiy A.M., Dmitriyev D.S., Nguyen Tay Nang Lyong.** Verifikatsiya Metodiki Chislennogo Modelirovaniya Dinamicheskogo Napryazhenno-Deformirovannogo Sostoyaniya Trekhmernykh Sistem "Sooruzheniye – Zhidkost" [Verification of Numerical Method of Stress-Strain Dynamic Analysis of Three-Dimensional System "Structure – Fluid"]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 11, Issue 4, 2015, pp. 124-132.
4. SP 14.13330.2014 Stroitelstvo v Seysmicheskikh Rayonakh (Aktualizirovannaya Redaktsiya SNiP II-7-81) [Construction

in seismic regions (updated version of SNiP II-7-81].
5. **Belostotsky A.M.** Chislennoye Modelirovaniye Staticheskogo i Dinamicheskogo Napryazhenno Deformirovannogo Sostoyaniya Prostranstvennykh Sistem "Sooruzheniye – Osnovaniye – Vodokhranilishche" s Uchetom Nelineynykh Effektov Otkrytiya Zakrytiya Shvov i Makrotreshchin [Numerical Simulation of the Static and Dynamic Stress-Strain State of the Spatial Systems "Construction – Foundation – Reservoir" with Allowance for Nonlinear Effects of Opening and Closure of Seams and Macrocracks]. Ph.D. Thesis. Moscow, MGUP, 1998, 367 pages.
6. Uchet Seysmicheskikh Vozdeystviy pri Proyektirovanii Gidrotekhnicheskikh Sooruzheniy (Posobiye k Razdelu 5: Gidrotekhnicheskiye Sooruzheniya SNiP II-7-81) [Allowance for Seismic Impacts in Within Design of Hydraulic Engineering Structures (Manual to Section 5: Hydraulic Engineering Structures SNiP II-7-81).
7. SP 23.13330.2011 Osnovaniya gidrotekhnicheskikh sooruzheniy. Aktualizirovan-naya redaktsiya SNiP 2.02.02-85 [SP 23.13330.2011 Foundations of hydrotechnical structures. Updated version of SNiP 2.02.02-85].
8. SP 23-105-2004 Otsenka Vibratsii Pri Proyektirovanii, Stroitelstve i Ekspluatatsii Obyektov Metropolitena [SP 23-105-2004 Assessment of Vibration in the Design, Construction and Operation of Subway Facilities].
9. **Dmitriyev D.S.** Osobennosti Ispolzo-vaniya Konechnykh Elementov s Vozmozhnostyu Ucheta Poverkhnostnykh Gravitatsionnykh Voln pri Dinamicheskom Raschete Svyazannykh Sistem "Gidrotekhnicheskoye Sooruzheniye – Zhidkost" [Features of the Use of Finite Elements with the Possibility of Allowance for Surface Gravity Waves in the Dynamic Analysis of Coupled Systems "Hydraulic Engineering Structure – Fluid"]. // Stroitelnaya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy, 2017, No. 3, pp. 50-58.
10. **Nguyen Tay Nang Lyong**. Aprobatsiya Metodiki Chislennogo Modelirovaniya Staticheskogo i Seysmicheskogo Napryazhenno-Deformirovannogo Sostoyaniya na Trekhmernoy Sisteme "Osnovaniye – Plotina – Vodokhranilishche" GES Nam Chiyen (Vyetnam) [Approbation Method of Numerical Simulation of Stress-Strain Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional System "Foundation – Dam – Reservoir" on the Example of Nam Chien Hydro Power Plant (Vietnam)]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 127-136.
11. **Zhu J., Lin Z., Liu Q., Zhang L.** Calculation of the Added Mass of a Liquid Tank's Bulkheads. // Journal of Marine Science and Application, March 2014, Volume 13, Issue 1, pp. 41-48.
12. **Taylan D., Aydın T.** Analysis of Dynamic Behavior of Darideresi-II Dam by ANSYS. // Natural Hazards, 2018, Volume 90, Issue 3, pp 1223-1235.
13. **Zhang C., Pan J., Wang J.** Influence of Seismic Input Mechanisms and Radiation Damping on Arch Dam Response. // Seismic Safety Evaluation of Concrete Dams, 2013, pp 241-262
14. **Omidi O., Lotfi V.** A Symmetric Implementation of Pressure-Based Fluid – Structure Interaction for Nonlinear Dynamic Analysis of Arch Dams. // Journal of Fluids and Structures, Volume 69, 2017, pp 34-55.
15. **Gong A.M., Huang H.Y., Zhang H.Y.** Dynamic Response Analysis of Tailings Dam under Seismic Action. // Applied Mechanics and Materials, Volume 799-800, 2015, pp. 746-750.

Дмитриев Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10,
E-mail: stadyo@stadyo.ru

Dmitry S. Dmitriev, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 8th floor, 18, 3-ya Ulitsa Tverskogo Polya, Moscow, 125040, Russia;
tel. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-36-48

ON THE USE OF EXTENDED PLATE THEORIES OF VEKUA – AMOSOV TYPE FOR WAVE DISPERSION PROBLEMS

Sergey I. Zhavoronok
Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA
Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI, Moscow, RUSSIA

Abstract: The extended plate theory of I.N. Vekua – A.A. Amosov type is constructed on the background of the dimensional reduction approach and the Lagrangian variational formalism of analytical dynamics. The proposed theory allows one to obtain the hierarchy of refined plate models of different orders and to satisfy the boundary conditions on plates' faces exactly by introducing the corresponding constraint equations into the Lagrangian model of two-dimensional continuum. The normal wave dispersion in an elastic layer is considered, the convergence of the two-dimensional solutions to the exact one is studied for the locking phase frequencies, the dimensionless stress distributions across the thickness of a layer are shown.

Keywords: hierarchical modeling of plates, dimensional reduction, analytical continuum dynamics, constrained Lagrangian systems, elastic layer, wave dispersion

О ПРИМЕНЕНИИ РАСШИРЕННЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН И.Н. ВЕКУА – А.А. АМОСОВА К ЗАДАЧАМ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН

С.И. Жаворонок
Институт прикладной механики Российской Академии наук, г. Москва, РОССИЯ
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Расширенная теория пластин И.Н. Векуа – А.А. Амосова построена на базе метода пространственной редукции задачи механики деформируемого твердого тела и Лагранжева вариационного формализма аналитической динамики континуальных систем. Предложенная общая теория позволяет получить иерархическую систему моделей пластин различных порядков и притом точно удовлетворить краевым условиям на лицевых поверхностях, вводя соответствующие краевым условиям уравнения связей в Лагранжеву формулировку модели двумерного континуума. Рассмотрена задача о дисперсии нормальных волн в упругом слое, изучена сходимость последовательности решений двумерных задач к точному решению трехмерной задачи теории упругости по частотам запирания распространяющихся мод, приведены безразмерные распределения компонентов тензора напряжения, соответствующие собственным функциям, по толщине слоя.

Ключевые слова: иерархические модели пластин, редукция пространственной размерности, аналитическая динамика континуума, Лагранжевы системы со связями, слой упругий, нормальных волн дисперсия

INTRODUCTION

An accurate and reliable modeling of high-frequency and wave dynamics of various thin-walled structures requires refined shell and plate models [1] accounting for higher-order degrees of freedom and of transverse normal strains [2] besides the translation and rotation of mid-surface's points and the transverse shear. Indeed, essentially three-dimensional stress and strain states were found even in homogeneous isotropic plates [3, 4] and conical shells [5]; such a strain state with boundary layers appearing near the faces could be properly

described by at least fourth-order polynomial approximation of displacement field [3] even for a thin plate. Thus, various traditional models of shear-deformable shells and plates fail in the case of high-frequency dynamics while the refined models based on special function expansions [4] or power series expansions [5] may be quite efficient. Moreover three-dimensional field distributions should be accounted for laminated structures [2, 6, 7] due to the effects of anisotropy and weak transverse stiffness. The detail survey of refined theories for laminated structures is presented in [8] by Carrera who proposed the "Carrera Unified Formulation" of refined shell models [7].

Another topical problem that needs for higher order shell and plate modeling consists in the modeling of dynamics of functionally graded structures with high heterogeneity across their thickness [9]. The known exact solutions obtained for such structures primarily in statics (e. g. see [10]) could be useful as appropriate reference solutions. It has to be noted that only a few exact solutions were obtained for free vibration problems for graded plates [11]. Thus, reliable approximate models are strictly required; the higher-order shear theories accounting for the transverse normal strain were used [12, 13], including non-polynomial based ones [14]. On the other hand, the proper choice of assumption-based plate model for reliable modeling of high frequency dynamics could become too complex. Thus, the power series expansion [5, 15, 16], generalized Fourier expansions [17], or sampling surfaces approach [18] resulting in full hierarches of two-dimensional models may be efficient alternatives in mechanics of heterogeneous thin-walled structures. Let us also note that the hierarchical approach could be very useful for wave dispersion problems where the use of different plate theories should be well-founded [19]. Such an approach based on the use of Legendre polynomials as expansion functions was developed in [20, 21]. This method results in the classical spectral problem statement; it has shown its reliability and simplicity and was further used for Lamb wave dispersion problem in graded plates [22], moreover its state-space formalism was developed recently [23]. Thus, the hierarchical modeling could be also efficient in such problems for heterogeneous thin-walled structures as boundary resonances [24] or edge waves analysis [25-27] where three-dimensional elasticity solutions or higher-order asymptotic approximations may become too complex.

On the other hand, the general dimensional reduction approach based on the generalized Fourier series results in the one of most general shell theories proposed by I.N. Vekua [28]. Its efficiency in various transient dynamics problems for shells was shown, for instance, in [29]. The further development of the hierarchical theory of shells of Vekua type was proposed by A.A. Amosov [30]; in particular the exact dependency of the metrics on the normal coordinate was taken into account. The Amosov's formalism [31] is based on the Galerkin method and on the tensor algebra of linear operators in Hilbert spaces; such a formulation make it possible, among other things, to use powerful computer algebra systems to construct higher-order models of shells of variable thickness and curvature and allows one the automation level close to the finite element modeling. Several other versions of the Vekua's approach were also proposed recently (e. g. see [32-34]).

The Amosov's shell theory results in the set of various models of two-dimensional Lagrangian systems in terms of the analytical dynamics of continua. Indeed, the continuum system can be defined on a two-dimensional manifold within a set of field variables and the Lagrangian density; the type of a theory depends on the definition of the field variables. In particular, the use of expansion factors of the three-dimensional displacement field with respect to the orthogonal function system of normal coordinate as field variables leads to the classical higher-order shell theory [28-34]. As well Legendre polynomials as trigonometric expansion functions could be used under the same formalism; in other word the theory [31]

secures the covariance of the governing equations with respect to the expansion system. The further development consists in the biorthogonal expansion of the displacement vector; it allows the introduction of finite element, or finite layer discretization similar to [18] into the unified formulation of the shell theory of A.A. Amosov's type [35].

The higher-order plate models obtained in terms of the variational formalism [35] were validated on the background of the well-known Rayleigh-Lamb problem of wave dispersion in a plane elastic layer [36]. The satisfying convergence of approximate solutions given by plate models to the exact one [36] was shown for phase frequencies [37, 39] and for normal waveforms [38-42].

It must be noted nevertheless that the so-called "elementary" theory [42] allows one to satisfy the boundary conditions on the faces of a plate only approximately as a result of the convergence of a sequence of two-dimensional solutions [31, 43], therefore the reflection condition on the face of a layer cannot be secured for all computed wave forms. This drawback can be eliminated in "extended" higher-order theories; the earliest one was based on the use of series residuals as supplementary variables [28]. The analytical dynamics formalism offer another possibility. Indeed, the boundary conditions shifted from the faces onto the base surface become constraint equations for the Lagrangian system [44, 45]. Thus, the dynamic equations can be derived by means of the Lagrange multipliers method [44, 45] that allows one to obtain asymptotically consistent low-order models [46, 47]. On the other hand, the spectral problem of the wave dispersion is can be solved using the approach [48]; the use of this method and the accuracy of extended higher-order plate models is shown below.

1. BASICS OF THE EXTENDED PLATE THEORY OF N-TH ORDER

Let us consider a plate as a three-dimensional body of thickness $2h$, bounded by faces $S_{\pm}$ and a lateral surface S_B, and let its two-dimensional model be defined on the manifold S, corresponding to the mid-plane and furnished by the curvilinear coordinates

$$\xi^{\alpha} \in D_{\xi} \subseteq \mathbb{R}^2,\ \alpha = 1,2$$

[35, 46, 49]. A Lagrangian continuum system on S can be defined within the configuration manifold Ω_N, the set of field variables $u_{\alpha}^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ being the biorthogonal expansion factors for the displacement $\mathbf{u}$ with respect to the system $p_{(k)}(\zeta)$, $p^{(k)}(\zeta)$ [35, 46],

$$(p_{(k)}, p^{(m)})_1 = \delta_{(k)}^{(m)};$$

$$\mathbf{u}\left(t,\xi^{\alpha},\zeta\right) \approx \left(u_{\alpha}^{(k)}\mathbf{r}^{\alpha} + u_3^{(k)}\mathbf{n}\right) p_{(k)}\left(\zeta\right),\ k = \overline{0,N};$$

$$u_{\alpha}^{(k)} = \left(u_{\alpha}, p^{(k)}\right)_1 \equiv \int_{-1}^{1} u_{\alpha}\left(t,\xi^{\alpha},\zeta\right) p^{(k)}\left(\zeta\right) d\zeta, \ldots$$

here $\zeta \in [-1,1]$ denotes the dimensionless normal coordinate. The surface Lagrangian densitiy can be written as follows [49]:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_S\left(u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_{\alpha}^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \overline{\nabla}_{\beta} u_{\alpha}^{(k)}, \overline{\nabla}_{\beta} u_3^{(k)}\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\rho_{(k)}^{(m)}\left(\dot{u}_{(m)}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}^{(k)} + \dot{u}_{(m)}^{3}\dot{u}_3^{(k)}\right) + F_{(k)}^{i} u_i^{(k)} - \\
&- \tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{\nabla}_{\gamma} u_{\delta}^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha\beta 3} u_3^{(m)}\right)\overline{\nabla}_{\beta} u_{\alpha}^{(k)} - \\
&- \tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{3\beta\gamma 3}\overline{\nabla}_{\gamma} u_3^{(m)} + C_{(km)}^{3\beta\gamma} u_{\gamma}^{(m)}\right)\overline{\nabla}_{\beta} u_3^{(k)} - \\
&- \tfrac{1}{2} h^{-1}\left(C_{(km)}^{33\gamma\delta}\overline{\nabla}_{\gamma} u_{\delta}^{(m)} + C_{(km)}^{333} u_3^{(m)}\right)\bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)} u_3^{(n)} - \\
&- \tfrac{1}{2} h^{-1}\left(C_{(km)}^{\alpha 3\gamma 3}\overline{\nabla}_{\gamma} u_3^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha 3\gamma} u_{\gamma}^{(m)}\right)\bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)} u_{\alpha}^{(n)};
\end{aligned} \tag{1.1}$$

while the contour density is represented as

$$\mathcal{L}_{\partial S}\left(u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}\right) = q_{B(k)}^{\alpha} u_{\alpha}^{(k)} + q_{B(k)}^{\alpha} u_{\alpha}^{(k)}. \tag{1.2}$$

Here $\rho_{(k)}^{(m)}$, $D_{(n\square)}^{(\square k)}$, $C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{(km)}^{33\gamma\delta}$, $C_{(km)}^{\alpha 3\gamma 3}$, $C_{(km)}^{\alpha\beta 3}$, $C_{(km)}^{3\beta\gamma}$, $C_{(km)}^{333}$,… are linear operators [31,35,43]:

$$\rho_{(k)}^{(m)} = \left(\rho p_{(k)}, p^{(m)}\right)_1; \quad D_{(n\square)}^{(\square k)} = \left(\tfrac{d}{d\zeta} p_{(n)}, p^{(k)}\right)_1;$$
$$C_{(km)}^{\alpha\beta 3} = h^{-1} D_{(k\square)}^{(\square n)} C_{(nm)}^{\alpha\beta 33}; \quad C_{(km)}^{3\beta\gamma} = h^{-1} D_{(k\square)}^{(\square n)} C_{(nm)}^{3\beta 3\gamma};$$
$$C_{(km)}^{333} = h^{-1} D_{(k\square)}^{(\square n)} C_{(nm)}^{3333};$$
$$C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(C^{\alpha\beta\gamma\delta} p_{(k)}, p_{(m)}\right)_1, \ldots$$

The following constraint equations follow from the boundary conditions on $S_{\pm}$ [44-46]:

$$\begin{gathered} C_{\pm(k)}^{i\alpha\beta} \bar{\nabla}_\beta u_\alpha^{(k)} + C_{\pm(k)}^{i\beta 3} \bar{\nabla}_\beta u_3^{(k)} + \\ + h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(\cdot k)} \left(C_{\pm(k)}^{i3\alpha} u_\alpha^{(m)} + C_{\pm(k)}^{i33} u_3^{(m)}\right) = q_\pm^i; \\ C_{\pm(k)}^{i\beta j} = C^{i3j\beta}\,|_{\zeta=\pm 1}\, \mathrm{p}_{(k)}(\pm 1). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Thus, the plate model is defined as a two-dimensional continuum within the field variables $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ the Lagrangian densities (1.1), (1.2) and the constraints (1.3). The appropriate equations of dynamics could be obtained as generalized Lagrange equations of the second kind [44, 45] by means of Lagrange multiplier method. They coinside with the "elementary" theory [35] if the constraints (1.3) are neglected:

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^{\alpha} &= \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} \sigma_{(m)}^{\alpha 3} + F_{(k)}^{\alpha}; \\ \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^{3} &= \bar{\nabla}_\beta \sigma_{(k)}^{3\beta} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(\cdot m)} \sigma_{(m)}^{33} + F_{(k)}^{3}; \end{aligned} \tag{1.4}$$

The problem statement is closed by the boundary conditions (1.5) on the contour ∂S

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\nu_\beta - q_{B(k)}^{\alpha}\right)\delta u_\alpha^{(k)}\Big|_{S_B} &= 0; \\ \left(\sigma_{(k)}^{3\beta}\nu_\beta - q_{B(k)}^{3}\right)\delta u_3^{(k)}\Big|_{S_B} &= 0; \end{aligned} \tag{1.5}$$

and the initial conditions (1.6):

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(k)}\Big|_{t=t_0} &= U_\alpha^{(k)}; \; u_3^{(k)}\Big|_{t=t_0} = U_3^{(k)}; \\ \dot{u}_\alpha^{(k)}\Big|_{t=t_0} &= V_\alpha^{(k)}; \; \dot{u}_3^{(k)}\Big|_{t=t_0} = V_3^{(k)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. STATEMENT OF THE WAVE DISPERSION PROBLEM FOR THE EXTENDED PLATE THEORY

Let us consider hence a plane isotropic layer:

$$C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = G_{(km)}\left[\lambda a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + \mu\left(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}\right)\right];$$
$$C_{(km)}^{3333} = G_{(km)}(\lambda + 2\mu); \quad C_{(km)}^{\alpha 3\beta 3} = G_{(km)} \mu a^{\alpha\beta};$$
$$C_{(km)}^{\alpha\beta 33} = G_{(km)} \lambda a^{\alpha\beta}; \quad G_{(km)} = \left(p_{(k)}, p_{(m)}\right)_1.$$

Let the wave propagate along the axis Ox_1 of the Cartesian frame and let us introduce the following dimensionless variables:

$$\begin{gathered} \xi = x_1 h^{-1}; \quad \zeta = x_2 h^{-1}; \quad \tau = t c_2 h^{-1}; \\ \tilde{u}_{\alpha\beta}^{(k)} = u_\alpha^{(k)} h^{-1}; \quad \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{(k)} = \left(\rho c_2^2\right)^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}, \\ c_2 = \mu\rho^{-1} \end{gathered} \tag{1.7}$$

is the shear wave velocity. As a result, we obtain the following dimensionless dynamic equations for the Nth order theory:

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 u_1^{(k)} &= \beta^{-2} \partial_\xi^2 u_1^{(k)} + D_{(n\square)}^{(\square k)} \bar{D}_{(m\square)}^{(\square n)} u_1^{(m)} - \\ &- \left[D_{(\cdot m)}^{(k\cdot)} - \left(\beta^{-2} - 2\right) \bar{D}_{(m\square)}^{(\square k)}\right] u_2^{(m)}; \\ \partial_\tau^2 u_2^{(k)} &= \partial_\xi^2 u_2^{(k)} + \beta^{-2} D_{(n\square)}^{(\square k)} \bar{D}_{(m\square)}^{(\square n)} u_2^{(m)} - \\ &- \left[\left(\beta^{-2} - 2\right) D_{(m\square)}^{(\square k)} - \bar{D}_{(m\square)}^{(\square k)}\right] u_2^{(m)}, \\ \beta^2 &= \left(c_2/c_1\right)^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu), \\ c_1 &= (\lambda + 2\mu)\rho^{-1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

is the bulk wave velocity. The dimensionless constraint equations corresponding to (1.3) can be written as

$$\begin{gathered} \left[\left(\beta^{-2} - 2\right)\partial_\xi u_1^{(k)} + \beta^{-2} \bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)} u_3^{(n)}\right] p_{(k)}^{\pm} = 0; \\ \left(\bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)} u_1^{(n)} + \partial_1 u_3^{(k)}\right) p_{(k)}^{\pm} = 0 \\ p_{(k)}^{\pm} = p_{(k)}(\pm 1), \end{gathered} \tag{1.9}$$

the sign "+" corresponds to the upper face and the "−" to the lower one; therefore we have two pairs of constraint equations on both faces.
Let us consider normal waves, i. e.

$$u_\alpha^{(k)} = U_\alpha^{(k)} \exp\left[i\left(\kappa\xi - \omega\tau\right)\right], \qquad (1.10)$$
$$\kappa = kh$$

is the dimensionless wavenumber and

$$\omega = \Omega h / c_2$$

is the dimensionless phase frequency. Substituting (1.10) into (1.8) we obtain the spectral problem (1.11) for the linear operator $\mathbf{A}$ given by (1.12) (see [37-42]):

$$\left(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = \left(U_1^{(m)}\ U_2^{(m)}\right), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{A}_{(2N+2)\times(2N+2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\left(A_{(m)}^{(k)}\right)_{11} &= 4\left(1-\beta^2\right)\kappa^2\delta_{(m)}^{(k)} + D_{(\cdot n)}^{(k\cdot)}\bar{D}_{(\cdot m)}^{(n\cdot)};\\
\left(A_{(m)}^{(k)}\right)_{12} &= i\kappa\left[D_{(\cdot m)}^{(k\cdot)} - 2\left(1-2\beta^2\right)\bar{D}_{(\cdot m)}^{(k\cdot)}\right]; \quad (1.12)\\
\left(A_{(m)}^{(k)}\right)_{21} &= i\kappa\left[2\left(1-2\beta^2\right)D_{(\cdot m)}^{(k\cdot)} - \bar{D}_{(\cdot m)}^{(k\cdot)}\right];\\
\left(A_{(m)}^{(k)}\right)_{21} &= \kappa^2\delta_{(m)}^{(k)} + 4\left(1-\beta^2\right)D_{(\cdot n)}^{(k\cdot)}\bar{D}_{(\cdot m)}^{(n\cdot)}.
\end{aligned}$$

The linear constraints (1.9) can be hence formulated for the images $U_i^{(k)}$ as follows:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_S \\ \mathbf{B}_A \end{pmatrix}_{4\times(2N+2)}; \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{B}_S = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_-\right), \quad \mathbf{B}_A = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-\right);$$

$$\mathbf{B}_\pm = \begin{pmatrix} i\kappa\left(\beta^{-2}-2\right)\delta_{(n)}^{(k)}p_{(k)}^{\pm} & \beta^{-2}\bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)}p_{(k)}^{\pm} \\ \bar{D}_{(n\square)}^{(\square k)}p_{(k)}^{\pm} & i\kappa\delta_{(n)}^{(k)}p_{(k)}^{\pm} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Here the symmetry conditions for the constraints are taken into account. Considering hence for (1.13), (1.14), we obtain the solution of the constrained stationary values problem for two quadratic forms $\mathbf{A}$ and $\mathbf{I}$ accordingly to [48]:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}/\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{U} = 0. \qquad (1.15)$$

Following [48], let us introduce the QZ decomposition for the constraint matrix (1.13)

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times 4}, \qquad (1.16)$$

As a result, we obtain the following operator accounting for the constraints (1.13):

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}, \qquad (1.17)$$
$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times(2N+2)}$$

and the stationary values for (1.15) can be found from the unconstrained problem:

$$\left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \omega^2\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{U}. \qquad (1.18)$$

The spectrum of the system consists in two subspectra S and A corresponding to the longitudinal and bending waves in the layer:

$$\begin{aligned}
S &: k, m = \{2n, N + 2n\};\\
A &: k, m = \{2n-1, N + 2n - 2\},\\
n &\in [0, [\tfrac{1}{2}(N-1)]] \cup \mathrm{Z}.
\end{aligned}$$

The waveforms can be defined hence in terms of the Nth order plate theory as follows [37]:

$$\begin{gathered}
u_\alpha^n(\zeta) = U_\alpha^{kn} p_{(k)}(\zeta),\\
\alpha = 1, 2, \quad k = 0\ldots N-1, \quad n = 1\ldots N;\\
\mathbf{U}^m = \mathbf{Q}\cdot\left\lfloor V_1^{km} \quad V_2^{km}\right\rfloor, \quad m \in \left[1, 2N-2\right] \cap \mathrm{Z}.
\end{gathered} \qquad (1.19)$$

3. CONVERGENCY ANALYSIS

Accordingly to [37-42], let us use Legendre polynomials as expansion functions $p_{(k)}(\zeta)$. The locking phase frequencies computed as stationary values of the problem (1.15), or the eigenvalues for the spectral problem (1.18) at $\kappa \to 0$, are presented below in the Table 1 and Table 2 for longitudinal and bending waves respectively.

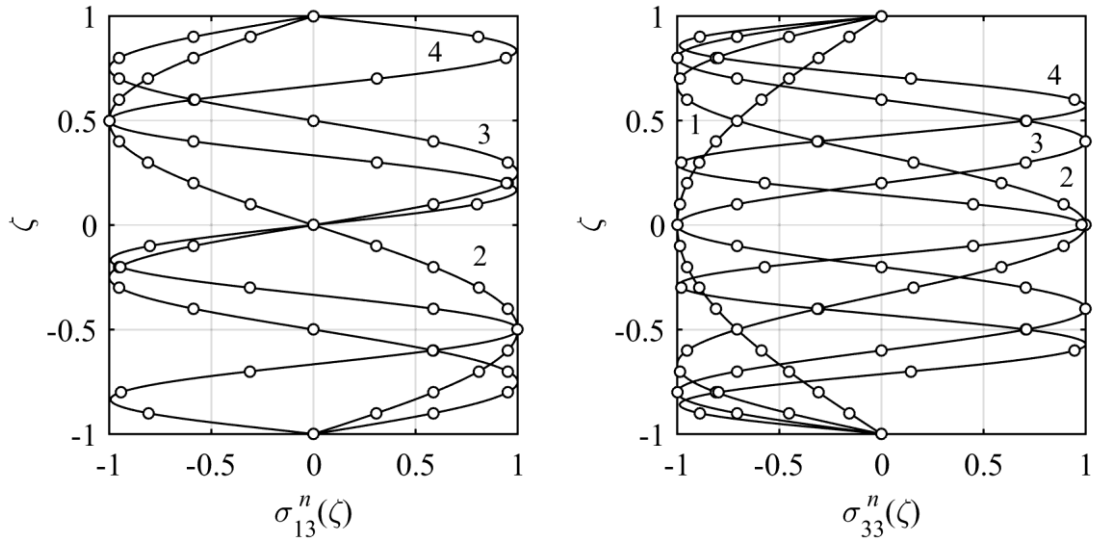
Table 1. Convergence of dimensionless locking frequencies of longitudinal waves to the Rayleigh-Lamb problem solution.

n / N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.00	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0.00	1.89	–	–	–	–	–	–	–	–
4	0.00	1.89	1.97	–	–	–	–	–	–	–
5	0.00	1.91	1.98	5.68	–	–	–	–	–	–
6	0.00	1.91	2.00	4.03	5.68	–	–	–	–	–
7	0.00	1.91	2.00	4.03	5.74	9.83	–	–	–	–
8	0.00	1.91	2.00	4.02	5.73	6.37	9.82	–	–	–
9	0.00	1.91	2.00	4.02	5.72	6.37	9.64	14.67	–	–
10	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.11	9.13	9.64	14.67	–
11	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.11	9.13	9.51	13.73	20.40
12	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.35	9.52	12.40	13.73
13	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.35	9.53	12.40	13.32
14	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.00	9.53	10.84	13.32
15	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.00	9.53	10.84	13.34
16	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.00	9.53	10.05	13.34
Ex.	0.00	1.91	2.00	4.00	5.72	6.00	8.00	9.53	10.00	12.00

Table 2. Convergence of dimensionless locking frequencies of bending waves to the Rayleigh-Lamb problem solution.

n / N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.00	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0.00	0.99	–	–	–	–	–	–	–	–
4	0.00	0.99	3.77	–	–	–	–	–	–	–
5	0.00	1.00	2.98	3.77	–	–	–	–	–	–
6	0.00	1.00	2.98	3.82	7.68	–	–	–	–	–
7	0.00	1.00	3.00	3.81	5.16	7.68	–	–	–	–
8	0.00	1.00	3.00	3.81	5.16	7.67	12.14	–	–	–
9	0.00	1.00	3.00	3.81	5.06	7.67	7.70	12.14	–	–
10	0.00	1.00	3.00	3.81	5.06	7.62	7.70	11.65	17.41	–
11	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.20	7.62	10.70	11.65	17.41
12	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.20	7.62	10.70	11.41	15.92
13	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.56	11.41	14.21
14	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.56	11.42	14.21
15	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.00	11.42	12.19

n / N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.00	11.41	12.19
Ex.	0.00	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.00	11.00	11.43



(a) (b)

Figure 1. Normal waveforms of longitudinal waves: exact solution [36] (solid line), plate theory of 15th order (dots).

The approximate solutions given by the extended plate theories converge to the exact solutions of the three-dimensional Rayleigh-Lamb problem [36] at the orders shown in the Table 3 (the convergence is estimated by the relative error computed at $\kappa \to 0$ as follows:

$$\left(\omega_0 - \omega_{0L}\right)/\omega_{0L} \le 0{,}05 .$$

Table 3. The approximate solutions by the extended plate theories at various orders.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitudinal modes								
N	3	3	4	6	6	10	10	16
Bending modes								
N	3	5	5	9	11	9	15	12

Let us compute the stress profiles corresponding to the approximate wave forms obtained from the plate theory of Nth order:

$$\sigma_{13}^{n}(\zeta) = \left\lfloor \bar{D}_{(m)}^{(k)} U_1^{mn} + i\kappa U_3^{kn} \right\rfloor p_{(k)}(\zeta);$$

$$\sigma_{33}^{n}(\zeta) = \left[i\kappa\left(\beta^{-2} - 2\right) U_1^{kn} + \beta^{-2} \bar{D}_{(m)}^{(k)} U_3^{mn} \right] p_{(k)}(\zeta).$$

The normalized stress forms corresponding to longitudinal waves are shown on the Figure 1. It can be seen that for all stress profiles the homogeneous boundary condition on the faces of the layer are satisfied exactly.

CONCLUSIONS

The solution of the wave dispersion problem for the plane elastic layer is obtained on the background of the extended plate theory of N[th] order. This theory allows the exact satisfaction of the boundary conditions on the faces of the layer, thus, the wave reflection condition on the faces is secured. The convergence of the approximate locking phase frequencies to the exact ones following from the solution of the

three-dimensional Rayleigh-Lamb problem is shown.

ACKNOWLEDGEMENTS

This investigation was performed as a part of the State Task for Basic Researches GP 14 (0050-2017-0001), state register number AAAA-A17-117032010136-3.

REFERENCES

1. **Grigolyuk E.I., Selezov I.T.** Non-Classical Theories for Beams, Plates, and Shells Oscillations. // Outcomes of Science and Technology: Mechanics of Deformable Solids. – VINITI, Moscow, 1973, 272 pages.
2. **Carrera E.** A Study of Transverse Normal Stress Effect on Vibration of Multilayered Plates and Shells // J. Sound & Vibration, Vol. 225, 1999, pp. 803-829.
3. **Batra R.C., Aimmanee S.** Vibrations of Thick Isotropic Plates with Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories // Comput. and Struct., Vol. 83, 2005, pp. 934-955.
4. **Zhou D., Au F.T.K., Cheung Y.K., Lo S.H.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Circular and Annular Plates via the Chebyshev-Ritz Method // Int. J. Sol. Struct., Vol. 40, 2003, pp. 3089-3105.
5. **Kang Jae-Hoon, Leissa A. W.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells. // Trans. of ASME, Vol. 71, 2004, pp. 502-507.
6. **Carrera E., Brischetto S.** Importance of Higher Order Modes and Refined Theories in Free Vibration Analysis of Composite Plates. // J. Applied Math., Vol. 77, 2010, 011013 (14 pp).
7. **Carrera E., Zappino E.** Carrera Unified Formulation for Free Vibration Analysis of Aircraft Structures // AIAA Journal, Vol. 54, No. 1, 2016, pp. 280-292.
8. **Carrera E.** Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. // Arch. Comput. Methods Eng., 9, 2002, pp. 87-140.
9. **Jha D.K., Kant T., Singh R.K.** A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates. // Composite Struct., Vol. 96, 2013, pp. 833-849.
10. **Brischetto S.** A General Exact Elastic Shell Solution for Bending Analysis of Functionally Graded Materials. // Composite Struct., Vol. 175, 2017, pp. 70-85.
11. **Vel C.C., Batra R.C.** Three-Dimensional Exact Solution for the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates // J. Sound & Vibration, Vol. 272, 2004, pp. 703-730.
12. **Sheikholeslami S.A. Saidi A.R.** Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory. // Composite Structures, Vol. 106, 2013, pp. 350-361.
13. **Gupta A., Talha M., Singh B.N.** Vibration Characteristics of Functionally Graded Material Plate with Various Boundary Constraints Using Higher Order Shear Deformation Theory. // Composites Part B: Engrg., Vol. 94, 2016, pp. 64-74.
14. **Gupta A., Talha M.** An Assessment of a Non-Polynomial Based Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Vibration Response of Gradient Plates with Initial Geometric Imperfections // Composites Part B: Engrg., Vol. 107, 2016, pp. 141-161.
15. **Matsunaga H.** Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2D Higher-Order Deformation Theory. // Composite Struct., Vol. 82, 2008, pp. 499-512.
16. **Matsunaga H.** Free Vibration and Stability of Functionally Graded Shallow Shells According to a 2D Higher-Order Deformation Theory. // Composite Struct., Vol. 84, 2008, pp.132-146.

17. **Zozulya V.V., Chang Ch.** A High Order Theory for Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells. // Int. J. Mech. Sci., Vol. 60, 2012, pp. 12-22.
18. **Kulikov G.M. Plotnikova S.V.** Three-Dimensional Solution of the Free Vibration Problem for Metal-Ceramics shells using the Method of Sampling Surfaces // Mechanics of Composite Materials. Vol. 53(2017). Pp. 31-44.
19. **Mehrkash M., Azkari M., Mirdamadi H. R.** Reliability Assessment of Different Plate Theories for Elastic Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Plates. // Ultrasonics, Vol. 54, 2014, pp. 106-120.
20. **Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T.** Guided Waves in Radially Graded Cylinders: A Polynomial Approach. // NDT&E Int., Vol. 38, 2005, pp. 344-353.
21. **Yu J., Lefebvre J.E., Guo Y.Q.** Free-Ultrasonic Waves in Multilayered Plates: An Improvement of the Legendre Polynomial Approach for Multilayered Structures with Very Dissimilar Materials // Composites. Part B: Engrg., Vol. 5, 2013, pp. 260-269.
22. **Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H.** Investigation of the Coupled Lamb Waves Propagation in Viscoelastic and Anisotropic Multilayer Composites by Legendre Polynomial Method. // Composite Structures, Vol. 153, 2016, pp. 557-568.
23. **Zheng M., He C., Lu Y., Wu B.** State-Vector Formalism and the Legendre Polynomial Solution for Modelling Guided Waves in Anistropic Plates. // J. Sound & Vibration, Vol. 412, 2018, pp. 372-378.
24. **Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.** Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies. San Diego – London – Boston – New York – Sydney – Tokyo – Toronto, Academic Press, 1998.
25. **Zernov V., Kaplunov J.D.** Three-Dimensional Edge Waves in Plates // Proc. Roy. Soc. Lond. A: Math. Phys. Engrg. Sci., Vol. 464, 2008, pp. 301-318.
26. **Wilde M. V.** Investigation of the Boundary Resonance Phenomenon in Plates on the Basis of the 3D Elasticity Theory Equations. // Mech. Deform. Media, Saratov Univ., Issue 16, 2010, pp. 7-14.
27. **Wilde M. V.** Higher Order Edge Waves in Thick Plates. // Vestn. Lobachevsky Univ. N. Novgorod, Issue 9, 2011, pp. 173-183.
28. **Vekua I. N.** Shell Theories: General Methods of Construction. Boston, USA, Pitman Adv. Publ. Progr., 1985.
29. **Guliaev V.I., Bazhenov B.A., Lizunov P.P.** Nonclassical Shell Theory and Applications in Engineering. Lvov, Vishcha Shkola, 1978 (in Russian).
30. **Amosov A.A.** An Approximate Three-Dimensional Theory of Thick Plates and Shells // Structural Mechanics and Design of Buildings, No. 5, 1987, pp. 37-42.
31. **Amosov A.A., Zhavoronok S.I.** An Approximate High-Order Theory of Thick Anisotropic Shells. // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 1, 2003, pp. 28-38.
32. **Volchkov Yu.M., Dergileva L.A.** Reducing Three-Dimensional Elasticity Problems to Two-Dimensional Problems by Approximating Stresses and Displacements by Legendre Polynomials. // J. Appl. Mech. Techn. Phys., Vol. 48, 2007, pp. 450-459.
33. **Annin B.D., Volchkov Yu.M.** Nonclassical models of the theory of plates and shell.s // J. Appl. Mech. Techn. Phys., Vol. 57, 2016, pp. 769-776.
34. **Zozulya V.V.** A Higher Order Theory for Shells, Plates and Rods // Int. J. Mech. Sci., Vol. 103, 2015, pp. 40-54.
35. **Zhavoronok S.I.** Variational Equations of a Three-Dimensional Anisotropic Theory of Shells. // Vestn. Lobachevsky Univ. N. Novgorod, Iss. 4-5, 2011, pp. 2154-2156.
36. **Grinchenko V.T., Meleshko V.V.** Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies. Kiev, USSR, Nauk. dumka, 1981.
37. **Zhavoronok S.I.** Investigation of Harmonic Waves in Elastic Layer Using Nth Order Three-Dimensional Shells' Theory // The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh

Materialov i Konstruktsii, Vol. 16, 2010, pp. 693-701.
38. **Zhavoronok S.I.** Investigation of Propagating Modes of Harmonic Waves in Elastic Layer Using Nth Order Three-Dimensional Shell Theory. // The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, Vol. 17, 2011, pp. 278-287.
39. **Zhavoronok S.I.** Kinematics of Normal Modes in Elastic Layer for Some Wavenumbers Investigation Based on Nth Order Three Dimensional Shells Theory. // The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, Vol. 18, 2012, pp. 45-56.
40. **Zhavoronok S.I.** A Formulation of the Three-Dimensional Approximated Shells Theory of Nth Order Using Generalized Displacements and its Application to Steady Dynamics. // The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, Vol. 18, 2012, pp. 333-344.
41. **Egorova O.V., Kurbatov A.S., Zhavoronok S.I.** An Application of Various N'th Order Shell Theories to Normal Waves Propagation problems. // Proc. Tula State Univ., Vol. 11, 2014, pp. 255-266.
42. **Egorova O.V., Kurbatov A.S., Zhavoronok S.I.** The Variational Equations of the Extended N'th Order Shell Theory and its Application to Some Problems of Dynamics. // PNPU Mech. Bulletin, No. 2, 2015, pp. 36-59.
43. **Zhavoronok S.I., Leontiev A.N., Leontiev K.A.** Analysis of Thick-Walled Rotation Shells Based on the Legendre Polynomials. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 6, 2010, pp. 105-111.
44. **Zhavoronok S.I.** On the Variational Formulation of the Extended Thick Anisotropic Shells Theory of I.N. Vekua Type // Procedia Enginering, Vol. 111, 2015, pp. 888-895.
45. **Zhavoronok S.I.** The Generalized Lagrange Equations of the Second Kind for the Extended Three-Dimensional Nth Order Theory of Anisotropic Shells // The Journal of Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, Vol. 21, 2015, pp. 370-381.
46. **Zhavoronok S.I.** The Extended Shell Theory of Vekua-Amosov Type and the Low-Order Plate Models // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 12, 2016, pp. 27-35.
47. **Zhavoronok S.I.** A General Higher-Order Shell Ttheory Based on the Analytical Dynamics of Constrained Continuum Systems. // Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 4. CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden, 2017, pp. 189-192.
48. **Golub G.H., Underwood R.** Stationary Values of the Ratio of Quadratic Forms Subject to Linear Constraints // ZAMP, Vol. 21, 1970, pp. 318-326.
49. **Zhavoronok S.I.** On Hamiltonian Formulations and Conservation Laws for Plate Theories of Vekua-Amosov Type // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13, 2017, pp. 82-95.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Григолюк Э.И. Селезов И.Т.** Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
2. **Carrera E.** A Study of Transverse Normal Stress Effect on Vibration of Multilayered Plates and Shells // J. Sound & Vibration, Vol. 225, 1999, pp. 803-829.
3. **Batra R. C., Aimmanee S.** Vibrations of Thick Isotropic Plates with Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories // Comput. and Struct., Vol. 83, 2005, pp. 934-955.
4. **Zhou D., Au F.T.K., Cheung Y.K., Lo S.H.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Circular and Annular Plates via the

Chebyshev-Ritz Method // Int. J. Sol. Struct., Vol. 40, 2003, pp. 3089-3105.
5. **Kang Jae-Hoon, Leissa A. W.** Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells. // Trans. of ASME, Vol. 71, 2004, pp. 502-507.
6. **Carrera E., Brischetto S.** Importance of Higher Order Modes and Refined Theories in Free Vibration Analysis of Composite Plates. // J. Applied Math., Vol. 77, 2010, 011013 (14 pp).
7. **Carrera E., Zappino E.** Carrera Unified Formulation for Free Vibration Analysis of Aircraft Structures // AIAA Journal, Vol. 54, No. 1, 2016, pp. 280-292.
8. **Carrera E.** Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. // Arch. Comput. Methods Eng., 9, 2002, pp. 87-140.
9. **Jha D.K., Kant T., Singh R.K.** A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates. // Composite Struct., Vol. 96, 2013, pp. 833-849.
10. **Brischetto S.** A General Exact Elastic Shell Solution for Bending Analysis of Functionally Graded Materials. // Composite Struct., Vol. 175, 2017, pp. 70-85.
11. **Vel C.C., Batra R.C.** Three-Dimensional Exact Solution for the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates // J. Sound & Vibration, Vol. 272, 2004, pp. 703-730.
12. **Sheikholeslami S.A. Saidi A.R.** Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory. // Composite Structures, Vol. 106, 2013, pp. 350-361.
13. **Gupta A., Talha M., Singh B.N.** Vibration Characteristics of Functionally Graded Material Plate with Various Boundary Constraints Using Higher Order Shear Deformation Theory. // Composites Part B: Engrg., Vol. 94, 2016, pp. 64-74.
14. **Gupta A., Talha M.** An Assessment of a Non-Polynomial Based Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Vibration Response of Gradient Plates with Initial Geometric Imperfections // Composites Part B: Engrg., Vol. 107, 2016, pp. 141-161.
15. **Matsunaga H.** Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2D Higher-Order Deformation Theory. // Composite Struct., Vol. 82, 2008, pp. 499-512.
16. **Matsunaga H.** Free Vibration and Stability of Functionally Graded Shallow Shells According to a 2D Higher-Order Deformation Theory. // Composite Struct., Vol. 84, 2008, pp.132-146.
17. **Zozulya V.V., Chang Ch.** A High Order Theory for Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells. // Int. J. Mech. Sci., Vol. 60, 2012, pp. 12-22.
18. **Kulikov G.M. Plotnikova S.V.** Three-Dimensional Solution of the Free Vibration Problem for Metal-Ceramics shells using the Method of Sampling Surfaces // Mechanics of Composite Materials. Vol. 53(2017). Pp. 31-44.
19. **Mehrkash M., Azkari M., Mirdamadi H. R.** Reliability Assessment of Different Plate Theories for Elastic Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Plates. // Ultrasonics, Vol. 54, 2014, pp. 106-120.
20. **Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T.** Guided Waves in Radially Graded Cylinders: A Polynomial Approach. // NDT&E Int., Vol. 38, 2005, pp. 344-353.
21. **Yu J., Lefebvre J.E., Guo Y.Q.** Free-Ultrasonic Waves in Multilayered Plates: An Improvement of the Legendre Polynomial Approach for Multilayered Structures with Very Dissimilar Materials // Composites. Part B: Engrg., Vol. 5, 2013, pp. 260-269.
22. **Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H.** Investigation of the Coupled Lamb Waves Propagation in Viscoelastic and Anisotropic Multilayer Composites by Legendre Polynomial Method. // Composite Structures, Vol. 153, 2016, pp. 557-568.

23. **Zheng M., He C., Lu Y., Wu B.** State-Vector Formalism and the Legendre Polynomial Solution for Modelling Guided Waves in Anistropic Plates. // J. Sound & Vibration, Vol. 412, 2018, pp. 372-378.
24. **Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.** Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies. San Diego – London – Boston – New York – Sydney – Tokyo – Toronto, Academic Press, 1998.
25. **Zernov V., Kaplunov J.D.** Three-Dimensional Edge Waves in Plates // Proc. Roy. Soc. Lond. A: Math. Phys. Engrg. Sci., Vol. 464, 2008, pp. 301-318.
26. **Вильде М.В.** Исследование явления краевого резонанса в пластинах на основе трехмерных уравнений теории упругости. // Механика деформируемых сред, 2010, №16, с. 7-14.
27. **Вильде М.В.** Кромочные волны высшего порядка в толстой пластине. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4-5, с. 2060-2062.
28. **Vekua I.N.** Shell Theories: General Methods of Construction. Boston, USA, Pitman Adv. Publ. Progr., 1985.
29. **Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.** Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: Вища школа, 1978.– 192 с.
30. **Амосов А.А.** Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 1987, с. 37-42.
31. **Amosov A.A., Zhavoronok S.I.** An Approximate High-Order Theory of Thick Anisotropic Shells. // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Vol. 1, 2003, pp. 28-38.
32. **Volchkov Yu.M., Dergileva L.A.** Reducing Three-Dimensional Elasticity Problems to Two-Dimensional Problems by Approximating Stresses and Displacements by Legendre Polynomials. // J. Appl. Mech. Techn. Phys., Vol. 48, 2007, pp. 450-459.
33. **Annin B.D., Volchkov Yu.M.** Nonclassical models of the theory of plates and shell.s // J. Appl. Mech. Techn. Phys., Vol. 57, 2016, pp. 769-776.
34. **Zozulya V.V.** A Higher Order Theory for Shells, Plates and Rods // Int. J. Mech. Sci., Vol. 103, 2015, pp. 40-54.
35. **Жаворонок С.И.** Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек. /// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4-5, с. 2154-2156.
36. **Гринченко В.Т., Мелешко В.В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 284 с.
37. **Жаворонок С.И.** Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2010, Том 16, №5, с. 693-701.
38. **Жаворонок С.И.** Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2011, Том 17, №2, с. 278-287.
39. **Жаворонок С.И.** Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2012, Том 18, №1, с. 45-56.
40. **Zhavoronok S.I.** A Formulation of the Three-Dimensional Approximated Shells Theory of Nth Order Using Generalized Displacements and its Application to Steady Dynamics. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2012, Том 18, №3, с. 333-344.
41. **Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С.** О приложении различных вариантов теории оболочек N-го порядка к некоторым задачам о прогрессивных

волнах. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки, 2014, №11-1, с. 255-266.
42. **Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С.** О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2015, №2, с. 36-59.
43. **Zhavoronok S.I., Leontiev A.N., Leontiev K.A.** Analysis of Thick-Walled Rotation Shells Based on the Legendre Polynomials. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Vol. 6, 2010, pp. 105-111.
44. **Zhavoronok S.I.** On the Variational Formulation of the Extended Thick Anisotropic Shells Theory of I.N. Vekua Type // Procedia Enginering, Vol. 111, 2015, pp. 888-895.
45. **Жаворонок С.И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек. // Механика композиционных материалов и конструкций, 2015, Том 21, №3, с. 370-381.
46. **Zhavoronok S.I.** The Extended Shell Theory of Vekua-Amosov Type and the Low-Order Plate Models // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Vol. 12, 2016, pp. 27-35.
47. **Zhavoronok S.I.** A General Higher-Order Shell Ttheory Based on the Analytical Dynamics of Constrained Continuum Systems. // Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 4. CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden, 2017, pp. 189-192.
48. **Golub G.H., Underwood R.** Stationary Values of the Ratio of Quadratic Forms Subject to Linear Constraints // ZAMP, Vol. 21, 1970, pp. 318-326.
49. **Zhavoronok S.I.** On Hamiltonian Formulations and Conservation Laws for Plate Theories of Vekua-Amosov Type // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 13, 2017, pp. 82-95.

Zhavoronok Sergey Igorevich, Ph.D., Senior researcher of the Department of Mechanics of Smart and Composite Materials and Systems, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences (IAM RAS); Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Machine Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI. Post Address: Leningradskiy Prospekt 7, 125040, Moscow, Russia, IAM RAS; phone: +7(495) 941-1777;
+7(916) 134-2843;
E-mail: Zhavoronok@iam.ras.ru, zhavor71@mail.ru

Жаворонок Сергей Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН); доцент кафедры сопротивления материалов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); 125 040, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 7, стр. 1; тел. +7(495) 941-1777; +7(916) 134-2843.
E-mail: Zhavoronok@iam.ras.ru, zhavor71@mail.ru

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 49-63 (2018)
DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-49-63

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЧИН И МЕХАНИЗМОВ РАЗРУШЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Е.М. Зверяев[1], Е.А. Ларионов[2]
[1] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ
[2] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: С целью лучшего понимания волновых свойств уравнения Тимошенко произведен вывод уточненного уравнения из уравнений плоской задачи теории упругости для длинной полосы. Для вывода используется метод простых итераций включающий в себя в задачах теории упругости известные методы: полуобратном метод Сен-Венана и оператор Пикара. В соответствии с полуобратном методом задается часть неизвестных, которые трактуются как величины начального (нулевого) приближения. По ним производятся вычисления с помощью последовательности из четырех операторов Пикара таким образом, что выходные данные одного оператора являются входными для следующего. Вычислив таким образом все искомые неизвестные в нулевом приближении путем прямого интегрирования по поперечной координате, вычисляются величины начального приближения в первом приближении. Эти величины являются малыми второго порядка по безразмерной толщине. Выражения для неизвестных получаются как степенные функции от поперечной координаты и как функции производных по продольной координате. В силу теоремы Банаха о неподвижной точке процесс вычисления является асимптотически сходящимся. После этого выполняются граничные условия на длинных сторонах с помощью производных от произволов интегрирования, зависящих только от продольной координаты. Отсюда получаются обыкновенные дифференциальные уравнения для определения этих произвольных функций. В свою очередь постоянные интегрирования последних уравнений могут быть найдены из условий на коротких сторонах полосы. Обыкновенные дифференциальные уравнения расщепляются на уравнения для медленно изменяющихся и быстро изменяющихся величин. Медленно изменяющиеся величины дают классическое решение колебаний балки. Быстро изменяющиеся дают возмущенные решения, описывающие высокочастотные колебания и сингулярно возмущенные волновые решения для сосредоточенных в пространстве и времени воздействий. Часть таких решений отсутствует в уравнении Тимошенко. Предполагается, что выделенные сдвиговые волны провоцируют в зданиях, подверженных быстрым воздействиям (тараны самолетом, взрывы, сейсмические подвижки основания) обрывы связей междуэтажных перекрытий с последующим прогрессирующим обрушением.

Ключевые слова: уравнение Тимошенко, плоская задача теории упругости, полуобратный метод, классическое решение, волна, быстрые воздействия, сингулярные решения, прогрессирующее обрушение

ANALYSIS OF POSSIBLE CAUSES AND MECHANISMS OF DESTRUCTION OF BUILDING STRUCTURES

Evgeniy M. Zveryayev[1], Evgeniy A. Larionov[2]
[1] Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA
[2] National Research Moscow State Building University, Moscow, RUSSIA

Annotation: In order to better understand the wave properties of the Timoshenko equation, the derivation of the refined equation from the equations of the plane elasticity problem for a long band is carried out. The simple iterations method is used for the derivation. It includes known methods: the semi-inverse method of Saint-Venant and Picard operator. In accordance with the semi-inverse method, a part of the unknowns is defined, which are interpreted as the values of the initial (zero) approximation. Proceeding from them, a sequential computation is carried out using a sequence of the four Picard operators in such a way that the outputs of the one operator are the inputs for the next. Calculating in this way all the unknowns in the zeroth approximation by the direct inte-

gration over the transverse coordinate, the values of the initial approximation are calculated in the first approximation. These quantities are small of the second order with respect to the dimensionless thickness. Expressions for the unknowns are obtained as power functions of the transverse coordinate and as a function of the derivatives along the longitudinal coordinate. By the Banach fixed point theorem, the computation process is asymptotically convergent one. After this, boundary conditions on the long sides are satisfied by means of the derivatives of the arbitrariness, depending only on the longitudinal coordinate. This gives us the ordinary differential equations for the determination of these arbitrary functions. In turn, the integration constants of the last equations can be found from the conditions on the short sides of the strip. The ordinary differential equations are split into equations for slowly varying and quickly varying quantities. The slowly changing values give the classical solution of the beam oscillations. The quickly varying solutions give the perturbed solutions describing high-frequency oscillations and singularly perturbed wave solutions for time-concentrated effects. Some of these solutions are absent in the Timoshenko equation. It is assumed that the selected shear waves provoke in the buildings subjected to the rapid impacts (shock by airplane, explosions, and seismic movements of the base) the interruptions of interlayers between the floors and subsequent progressive collapse.

Keywords: Timoshenko equation, plane elasticity problem, semi-inverse method, classic solution, wave, fast effects, singular solutions, progressive collapse

ВВЕДЕНИЕ

Исследование различных сооружений и конструкций проводится исходя из некоторой идеализированной схемы объекта. Реальные сооружения и конструкции имеют разнообразные физические свойства и несовершенства всякого рода, не в полной мере поддающиеся теоретическому описанию. Для математического анализа и расчета необходима ясность схемы и какое-то конечное число выделенных для учета исходных свойств, которое не охватывает все множество свойств реального объекта, но заключает в себе главное. Только в силу этого возможно математическое описание объекта и понимание. Такая расчетная модель нужна как при проектировании объекта, так и при наличии существующего объекта, когда на основании его поведения при разрушении нужно выбрать уточненную расчетную схему, лучше отражающую механические свойства этого объекта. Особенно это важно в случае тонкостенных систем, обладающих повышенным уровнем деформативности.

Существующие силовые воздействия на тонкостенные сооружения можно как нагрузки по лицевым поверхностям разделить на три вида по признаку изменяемости:

– медленноменяющиеся распределенные;

– быстроменяющиеся распределенные;

– локальные (сосредоточенные).

Медленноменяющиеся состояния (решения) также называют Сен-Венановыми, поскольку они в большинстве случаев описываются полиномами или другими похожими простыми функциями. Нахождение таких решений не вызывает больших трудностей в силу заранее известного их поведения. Нахождение решений при быстроменяющихся и локальных нагрузках связывается с теориями типа Тимошенко. Считается, что эти теории позволяют соответствующим образом описать их воздействие на тонкостенную систему. Наибольший интерес представляют задачи связанные также с быстрыми во времени воздействиями: сейсмическими – на основание сооружения, поверхностными взрывными и сосредоточенными.

Уравнению Тимошенко посвящено большое количество исследований. Обзор работ, использующих это уравнение, содержится в статьях [1-3]. Вывод уравнения типа Тимошенко с учетом рассеяния энергии дан в работе [4]. Традиционно уравнения типа Тимошенко выводятся исходя из уравнений равновесия для балки в усилиях и моментах. Считается, что продольные напряжения распределены по высоте балки линейно, а касательные равномерно. Однако поскольку последнее положение не соответствует действительности, а из статической теории балок

известно, что касательные напряжения распределены по параболе, вводится поправочный коэффициент $k' < 1$. Существуют исследования посвященные определению этого коэффициента, например [6-8]. Изучаются вопросы существования поперечных волн, их фазовые скорости и дисперсионные соотношения, наличие «двух спектров» собственных частот [4, 8]. Аспекты волн и колебаний балки также рассматривались в ряде работ исходя из балочных представлений [9-13].

Мы здесь не претендуем на полное представление работ по динамике балки Тимошенко, а приводим только примеры работ, использующие балочное приближение в усилиях и моментах. Настоящее исследование ставит себе цель произвести анализ динамических свойств длинной полосы с помощью уравнений плоской задачи теории упругости в напряжениях и перемещениях без традиционных гипотез. Вывод уточненного уравнения Тимошенко из уравнений теории упругости произведен в работе [14] на основе принципа сжатых отображений методом простых итераций. Какие-либо гипотезы о распределении перемещений и напряжений по толщине полосы не используются.

В связи с развитием численных методов расчета конструкций имеется необходимость качественных исследований уравнений состояния тонкостенных элементов с тем, чтобы увеличить возможности осмысления физического смысла численных результатов.

1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Фридрихс называет явления, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания, асимптотическими [15]. Большинство дифференциальных уравнений механики и физики обладает такими решениями, и интересна задача изучения тех черт этих уравнений, которые делают такие быстрые переходы возможными. Понижение порядка дифференциального уравнения в сочетании с потерей граничного условия, является характерной чертой асимптотического явления. Цель асимптотического анализа задачи заключается в подробном описании решения граничной задачи внутри переходного слоя. Потребность в таких уточненных теориях связана с несколькими причинами. Во-первых, уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории. Существует мнение, что настоящее понимание теории возникает после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории тонкостенных систем позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классических теорий. Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классических моделей. Классическая теория учитывает "грубые" эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния, и для того чтобы разобраться в них зачастую достаточно физической интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий последовательных в смысле учёта всех малых одного порядка, крайне трудно сделать, руководствуясь только физической интуицией и не располагая регулярными методами [1].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого впечатления лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось в некоторой степени на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений без использования уравнений теории упругости. Однако, если все эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек, строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, являющимся методом построения решения,

удовлетворяющим принципу сжатых отображений, различие исчезает.

Истоки идеи метода простых итераций в теории упругости просматриваются в полуобратном методе Сен-Венана. «Сен-Венану принадлежит заслуга приведения проблемы кручения и изгиба балок в связь с общей теорией. Он учитывал трудность нахождения общих решений и настоятельную необходимость получения в практических целях какой-либо теории, которая могла бы служить для определения деформаций в сооружениях; ему было вполне ясно также, что только в очень редких случаях можно знать точное распределение нагрузки, приложенной к части какой-либо конструкции; это привело его к размышлениям о методах, применявшихся к решению частных задач до того, как были получены общие уравнения. Таким образом, он пришел к изобретению полуобратного метода, который носит его имя. Многие из обычных допущений и выводов, оказываются верными, по крайней мере, в большинстве случаев; следовательно, сохраняя некоторые из этих допущений и выводов, можно упростить уравнения и получить их решения; правда, пользуясь этими решениями, мы не можем удовлетворить любым наперед заданным граничным условиям; однако же граничные условия практически наиболее важного типа могут быть удовлетворены» [16].

Если метод Сен-Венана трактовать, придавая «обычным допущениям и выводам» роль величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по этим остальным вычислить поправку к величинам начального приближения и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости предположений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс конечно нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба стержня, нетрудно оценить сходимость вычислений к некоторому решению с помощью асимптотических рассуждений используя наличие малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом, приходим к принципу сжатых отображений, теореме Банаха о неподвижной точке и методу простых итераций.

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений.

Отображение $y = Ay$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется условие $\rho\left(Ax, Ay\right) \le \varepsilon\rho\left(x, y\right)$. Точка y называется неподвижной точкой отображения, если $y = Ay$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $y = Ay$. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)}$. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению y независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}\ldots$ находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$.

Используемый в настоящей работе метод простых итераций близок к методу, встречающемуся в литературе под названием метода последовательных приближений Пикара-Линделефа для решения дифференциального уравнения $y' = f\left(x, y\right)$, разрешенного относительно производной [17]. Это дифференциальное уравнение с условием

$y(t_0)=y_0$ равносильно интегральному уравнению

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f\left[t,\left(y(t)\right)\right]dt+y_0$$

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме

$$y_{(n+1)}(x)=\int_{x_0}^{x} f\left[t,\left(y_{(n)}(t)\right)\right]dt+y_0$$

Метод позволяет построить последовательность функций $y_{(n)}(t)$, сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими. Очевидно, что метод Пикара-Линделефа является частным случаем метода простых итераций для дифференциального уравнения первого порядка.

В настоящей работе метод простых итераций применяется для построения уравнений деформирования тонкой полосы из общих уравнений теории упругости, содержащих в себе малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода простых итераций.

Заметим, что метод простых итераций не регламентирует процедуру выполнения начальных или граничных условий. Важно достаточно или нет произволов интегрирования для выполнения всех граничных условий.

2. ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННАЯ ПОЛОСА. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Длинную прямоугольную полосу отнесем к прямоугольной системе координат x^*, z^*, так что $0\le x^*\le l,\ -h\le z^*\le h$. Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Уравнения движения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в виде:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial x^*}=0,\quad \frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial z^*}=0$$

– соотношения упругости

$$\sigma_x^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right),\quad \tau^*=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma$$

$$\sigma_z^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right)$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w^*}{\partial z^*},\quad \varepsilon_x=\frac{\partial u^*}{\partial x^*},\quad \gamma=\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}$$

Здесь использованы традиционные обозначения теории упругости. Звездочки указывают на то, что координаты и отмеченные ими искомые величины размерные. Ведем безразмерные величины: безразмерные координаты $x=x^*/l$, $z=z^*/h$, безразмерные перемещения $u=u^*/h$, $w=w^*/h$, безразмерные напряжения $\sigma_x=\sigma_x^*/E$, $\sigma_z=\sigma_z^*/E$, $\tau=\tau^*/E$ и безразмерное время $t=t^*/T$, в котором T – некоторое характерное время, определенное ниже. Безразмерные уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial z}=\eta^2\ddot{u},\quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial x}=\eta^2\ddot{w}$$

$$\sigma_x=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right),\quad \tau=\frac{1}{2(1+\nu)}\gamma$$

$$\sigma_z=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \varepsilon_x=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma=\frac{\partial u}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}$$

где $\varepsilon = h/l$ и

$$\eta^2 = \frac{\rho h^2}{ET^2} \tag{1}$$

– малые параметры, перепишем в таком порядке

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} + \eta^2 \ddot{w} \\
\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x},\ \sigma_x = \varepsilon_x + \nu\sigma_z \\
\varepsilon_z = (1-\nu^2)\sigma_z - \nu\varepsilon_x \\
\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \eta^2 \ddot{u}
\end{gathered} \tag{2}$$

чтобы, задав две функции $w_{(0)}$ и $\tau_{(0)}$ в качестве начального приближения, вычислить остальные искомые неизвестные последовательно по следующей схеме:

$$\begin{gathered}
\left(w = w_{(0)},\ \tau = \tau_{(0)}\right) \Rightarrow \left(u_{(0)}, \sigma_{z(0)}\right) \Rightarrow \\
\left(w_{(1)}, \tau_{(1)}\right) \Rightarrow \left(\varepsilon_{x(0)}, \sigma_{x(0)}, \varepsilon_{z(0)}\right)
\end{gathered} \tag{3}$$

В работе [14] введено понятие о w, τ и 0-процессах, позволяющих построить решение системы (2) по схеме (3). Если выбрать в качестве начального приближения функции, задающие прогиб и касательное напряжение не зависящим от координаты z, т.е. принять

$$w = w_0(x),\ \tau = \tau_0(x) \tag{4}$$

Процесс вычисления всех неизвестных производится по такой последовательности уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n)},\quad \frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)} \\
\tau_{(n)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma_{(n)},\quad \frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x} \\
\varepsilon_{x(n)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x},\qquad \sigma_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} + \nu\sigma_{z(n)} \\
\varepsilon_{z(n+1)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(n)} - \nu\varepsilon_{x(n)},\ \frac{\partial w_{(n+1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n+1)} \\
\frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x},\quad \gamma_{(n+1)} = 2\left(1+\nu\right)\tau_{(n+1)}
\end{gathered}$$

дающей все компоненты полного НДС в любом приближении. Уравнения для вычисления искомых величин в нулевом приближении выглядит так

$$\begin{gathered}
w_{(0)} = w_0(x),\ \tau_{(0)} = \tau_0(x) \\
u_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x) \\
\sigma_{z(0)} = \int \left(-\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + m^2 \ddot{w}_0 \right) dz + \sigma_{z0}(x) \\
\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x},\ \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)} \\
\varepsilon_{z(0)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)} \\
w_{(1)} = w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz \\
\tau_{(1)} = \int \left(-\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} + m^2 \ddot{u}_0 \right) dz
\end{gathered} \tag{5}$$

Отмеченные нулем без скобок в индексе величины являются произволами интегрирования. Четыре произвола интегрирования w_0, τ_0, σ_{z0}, u_0 должны быть определены из граничных условий на длинных сторонах полосы.

Легко видеть, что интегральные выражения являются операторами Пикара. Таким образом, сложный оператор четвертого порядка по координате z расщеплен на последовательность простых интегральных операторов. Вычисления производятся таким образом, что выходные величины одного оператора являются входными для следующего. Все вычисленные величины являются непрерывными функциями.

В силу линейности задачи начальное приближение может быть разложено на два:

$$\begin{aligned} &w = w_0(x),\ \tau = \tau_0 = 0 \\ &w = w_0 = 0,\ \tau = \tau_0(x) \end{aligned} \qquad (6)$$

Величины начального приближения в первом случае совпадают с гипотезами Кирхгоффа

$$\varepsilon_z = 0,\ \gamma = \gamma_0 = \tau_0 = 0$$

Итерационный процесс вычисления неизвестных при таком начальном приближении назван w-процессом. Искомые величины нулевого приближения (и w, τ – нулевого и первого), вычисленные при таких значениях заданных начальных величин, записываются так:

$$w = w_0(x),\ \tau_{(0)} = \tau_0 = 0,\ u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z$$
$$\sigma_{z(0)} = \eta^2 \ddot{w}_{(0)} z,\ \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z$$
$$\sigma_{x(0)} = (-\varepsilon^2 w_0'' + \nu\eta^2 \ddot{w}_0) z$$
$$\varepsilon_{z(0)} = \left[\left(1-\nu^2\right)\eta^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' \right] z$$
$$w_{(1)} = \left[\left(1-\nu^2\right)\eta^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' \right] \frac{z^2}{2}$$
$$\tau_{(1)} = \left[\varepsilon^3 w_0''' - \left(1+\nu\right)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' \right] \frac{z^2}{2}$$

Найдем неизвестные во втором итерационном τ-процессе

$$w_{(0)} = w_0 = 0,\ \tau_{(0)} = \tau_0(x)$$
$$u_{(0)} = 2(1+\nu)\tau_0 z,\ \sigma_{z(0)} = -\varepsilon\tau_0' z$$
$$\varepsilon_{x(0)} = 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0' z,\ \sigma_{x(0)} = (2+\nu)\varepsilon\tau_0' z$$
$$\varepsilon_{z(0)} = -(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' z,\ w_{(1)} = -(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' \frac{z^2}{2}$$
$$\tau_{(1)} = \left[-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\left(1+\nu\right)\eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{z^2}{2}$$

Этот процесс можно сравнить с учетом сдвига в теории Тимошенко.

Вычисление произволов интегрирования w_0, τ_0, σ_{z0}, u_0 и операции с ними выделим в 0-процесс

$$w_{(0)} = w_0 = 0,\ \tau_{(0)} = \tau_0 = 0,\ u_0 = u_0(x)$$
$$\sigma_{z0} = \sigma_{z0}(x),\ \varepsilon_{x0} = \varepsilon u_0',\ \sigma_{x0} = \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0}$$
$$\varepsilon_{z(0)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0'$$
$$w_{(1)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0'$$
$$\tau_{(1)} = \left(-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0\right) z$$

Здесь и далее штрихом обозначена операция дифференцирования по x.

Вычисленные в трех процессах искомые перемещения и напряжения должны быть просуммированы. Имеем формулы

$$\begin{aligned} w \approx{}& \left[\left(1-\nu^2\right)\eta^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' \right] \frac{z^2}{2} - \\ &-(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' \frac{z^2}{2} + \left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0' \right] + w_0 \\ u \approx{}& -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 z + u_0 \\ \sigma_x \approx{}& (-\varepsilon^2 w_0'' + \nu\eta^2 \ddot{w}_0) z + \\ &+(2+\nu)\varepsilon\tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} \\ \tau \approx{}& \left[\varepsilon^3 w_0''' - \left(1+\nu\right)\varepsilon\eta^2 w_0' - \right. \\ &\left. -\left(2+\nu\right)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\left(1+\nu\right)\eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{z^2}{2} + \\ &+\left(-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0\right) z + \tau_0 \\ \sigma_z \approx{}& -\left[\varepsilon^4 w_0^{IV} - \left(1+\nu\right)\varepsilon^2\eta^2 w_0'' - \left(2+\nu\right)\varepsilon^3\tau_0''' \right. \\ &\left. +2\left(1+\nu\right)\varepsilon\eta^2 \ddot{\tau}_0' \right] \frac{z^3}{6} + \\ &-\left(\varepsilon^3 u_0''' - \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' + \varepsilon\eta^2 \ddot{u}_0'\right) \frac{z^2}{2} + \\ &+\left(-\varepsilon\tau_0' + \eta^2 \ddot{w}_0\right) z + \sigma_{z0} \end{aligned} \qquad (7)$$

Неизвестные записаны в форме полиномов по степеням координаты z и малого параметра ε и определяются функциями w_0, τ_0, σ_{z0}, u_0. Они в свою очередь зависят от граничных условий на длинных сторонах полосы при $z=\pm 1$ и на концах $x=0;1$.

3. ВЫПОЛНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДЛИННЫХ СТОРОНАХ ПОЛОСЫ

На лицевых поверхностях полосы $z^*=\pm h$ надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими

$$\sigma_z^*=Z_+^*,\ \tau^*=X_+^*\ \text{при}\ z^*=h^*$$
$$\sigma_z^*=Z_-^*,\ \tau^*=X_-^*\ \text{при}\ z^*=-h^*$$

В безразмерном виде эти условия записываются так

$$\sigma_z=Z_+,\ \tau=X_+\ \text{при}\ z=1$$
$$\sigma_z=Z_-,\ \tau=X_-\ \text{при}\ z=-1$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E.
Условия будем выполнять величинами первого приближения, считая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины, т.е.

$$\tau\approx\tau_{(0)}+\tau_{(1)},\ \sigma_z\approx\sigma_{z(0)}+\sigma_{z(1)}.$$

На основании формул (7) запишем выражения для напряжений, на которые накладываются условия на длинных сторонах

$$\Big\lfloor \varepsilon^3 w_0'''-(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{w}_0'-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+$$
$$+2(1+\nu)\eta^2\ddot{\tau}_0\Big]\frac{1}{2}+$$
$$+\left(-\varepsilon^2u_0''-\nu\varepsilon\sigma_{z0}'+\eta^2\ddot{u}_0\right)+\tau_0=X_+$$
$$\Big\lfloor \varepsilon^3 w_0'''-(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{w}_0'-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+$$
$$+2(1+\nu)\eta^2\ddot{\tau}_0\Big]\frac{1}{2}-$$
$$-\left(-\varepsilon^2u_0''-\nu\varepsilon\sigma_{z0}'+\eta^2\ddot{u}_0\right)+\tau_0=X_-$$
$$-\Big\lfloor \varepsilon^4 w_0^{IV}-(1+\nu)\varepsilon^2\eta^2 w_0''-(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''+$$
$$+2(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{\tau}_0'\Big]\frac{1}{6}-$$
$$-\left(\varepsilon^3u_0'''-\nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''+\varepsilon\eta^2\ddot{u}_0'\right)\frac{1}{2}+$$
$$+\left(-\varepsilon\tau_0'+\eta^2\ddot{w}_0\right)+\sigma_{z0}=Z_+$$
$$\Big\lfloor \varepsilon^4 w_0^{IV}-(1+\nu)\varepsilon^2\eta^2 w_0''-(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''+$$
$$+2(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{\tau}_0'\Big]\frac{1}{6}$$
$$-\left(\varepsilon^3u_0'''-\nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''+\varepsilon\eta^2\ddot{u}_0'\right)\frac{1}{2}-$$
$$-\left(-\varepsilon\tau_0'+\eta^2\ddot{w}_0\right)+\sigma_{z0}=Z_-$$

Складывая и вычитая попарно эти выражения, получаем уравнения

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^2u_0''-\nu\varepsilon\sigma_{z0}'+\eta^2\ddot{u}_0=\frac{1}{2}\left(X_+-X_-\right)\\&-\varepsilon^3u_0'''+\nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''-\varepsilon\eta^2\ddot{u}_0'+2\sigma_{z0}=Z_++Z_-\end{aligned}\qquad(8)$$

относительно неизвестных σ_{z0}, u_0 и уравнения

$$\begin{aligned}&\varepsilon^3w_0'''-(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{w}_0'-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+\\&+2(1+\nu)\eta^2\ddot{\tau}_0+2\tau_0=X_++X_-\\&-\varepsilon^4w_0^{\mathrm{IV}}+(1+\nu)\varepsilon^2\eta^2\ddot{w}_0''+\\&+6\eta^2\ddot{w}_0+(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''-\\&-2(1+\nu)\varepsilon m^2\ddot{\tau}_0'-6\varepsilon\tau_0'=3\left(Z_+-Z_-\right)\end{aligned}\qquad(9)$$

относительно неизвестных w_0, τ_0. Уравне-

ния (8) описывают продольные и поперечные деформации растяжения-сжатия. Уравнения (9) описывают задачу изгиба с учетом инерции вращения элемента и сдвига.
Если первое уравнение системы (9) умножить на ε, продифференцировать по x

$$\varepsilon^4 w_0^{\mathrm{IV}} - (1+\nu)\varepsilon^2\eta^2\ddot{w}_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' + \\ +2(1+\nu)\varepsilon\eta^2\ddot{\tau}_0' + 2\varepsilon\tau_0' = \varepsilon\left(X_+' + X_-'\right)$$

и сложить со вторым, получим соотношение

$$\varepsilon\tau_0' = \frac{3}{2}\eta^2\ddot{w}_0 - \frac{3}{4}(Z_+ - Z_-) - \frac{1}{4}\varepsilon\left(X_+' + X_-'\right)$$

При отсутствии нагрузки, т.е. считая

$$Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0,$$

внесем величину

$$\varepsilon\tau_0' = \frac{3}{2}\eta^2\ddot{w}_0 \qquad (10)$$

во второе уравнение системы (9). Получим уравнение

$$\frac{2}{3}\left[\varepsilon^4 w_0^{1V} - \left(4+\frac{5}{2}\nu\right)\varepsilon^2\eta^2\ddot{w}_0'' + 3(1+\nu)\eta^4\ddot{\ddot{w}}_0\right] + \\ +2\eta^2\ddot{w}_0 = 0 \qquad (11)$$

которое сравним с известным уравнением Тимошенко [5]

$$EI\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} - \rho I\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*2}\partial t^{*2}} + \frac{\rho^2 I}{k'G}\frac{\partial^4 y^*}{\partial t^{*4}} + \\ +\rho F\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = 0$$

Здесь E – модуль Юнга,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

– модуль сдвига, k' – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, F – площадь поперечного сечения, ρ – масса единицы длины балки, y^* – прогиб, I – момент инерции поперечного сечения. Имеются различные рекомендации по выбору величины коэффициента k': для прямоугольного поперечного сечения используется значение 0.833, а также значение $2/3$ и значение $3/4$ для круглого сечения; указывалось $\pi^2/12$, но также допускались значения $5/6$ и $5/(6-\nu)$ [6]. Приведенное к безразмерному виду уравнение

$$\frac{2}{3}\left[\varepsilon^4 y^{1V} - (4+3\nu)\varepsilon^2\eta^2\ddot{y}'' + 3(1+\nu)\eta^4\ddot{\ddot{y}}\right] + \\ +2\eta^2\ddot{y} = 0$$

где $y = y^*/h$,

в случае прямоугольного сечения балки

$$(I = 2bh^3/3,\ F = 2bh)$$

при $k' = 2/3$, как это рекомендовалось [5], по существу совпадает с уравнением (11). При наибольшем из рекомендуемых значений $k' = 5/6$ различие будет больше. В то же время можно показать, что уравнение (11) получено для правильного параболического распределения касательных напряжений по высоте с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Замечание 1. Подстановка формулы (10) во второе уравнение системы (9) является ошибочной операцией, поскольку система имеет пятый порядок относительно величины τ_0 и четвертый после дифференцирования первого уравнения относительно τ_0'. Это означает, что, по крайней мере, не меньше четырех решений в подстановке (10) потеряно. Отсюда следует, что для получения уравнения Тимошенко из двумерных уравнений надо

совершать неправильные операции. На неэквивалентность перехода от системы уравнений в частных производных к одному уравнению указывал Р. Курант [18].

Замечание 2. Первое уравнение системы (9) содержит операторы

$$\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0';$$
$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0.$$

Соответствующие первому однородное уравнение

$$\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' = 0$$

имеет медленноменяющееся решение, тогда как уравнение

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = 0,$$

содержащее малые параметры ε и η при производных, имеет быстроменяющееся решение.

Второе уравнение также состоит из двух операторов, которым соответствуют уравнения

$$-\varepsilon^4 w_0^{\mathrm{IV}} + (1+\nu)\varepsilon^2\eta^2 \ddot{w}_0'' + 6\eta^2 \ddot{w}_0 = 0;$$
$$(2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' - 2(1+\nu)\varepsilon m^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' = 0.$$

Здесь также первое уравнение имеет медленноменяющиеся решения, второе – быстроменяющиеся. Из первого также следует оценка $\eta^{s2} \sim \varepsilon^4$, из второго – $\eta^{q2} \sim \varepsilon^2$. В формуле (1) эти величины будут определяться так:

$$\eta^{s2} = \frac{\rho h^2}{E T^{s2}}; \quad \eta^{q2} = \frac{\rho h^2}{E T^{q2}},$$

где T^s и T^q – периоды поперечных и продольных колебаний соответственно.

4. РАСЩЕПЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (9)

Медленноменяющиеся решения обладают свойством малой изменяемости, означающим, что при дифференцировании по аргументам асимптотический порядок искомой величины не меняется, т.е. можно написать [19]

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon^0.$$

Быстроменяющиеся функции при дифференцировании увеличиваются в ε^{-1} раз. Соответственно можно написать асимптотическую оценку применения символов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon^{-1}.$$

В соответствии с этим запишем уравнения (9) для медленных величин

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} - (1+\nu)\varepsilon\eta^{s2} \ddot{w}_0^{s'} + 2\tau_0^s = X_+^s + X_-^s$$
$$-\varepsilon^4 w_0^{s\mathrm{IV}} + (1+\nu)\varepsilon^2\eta^{s2} \ddot{w}_0^{s''} + 6\eta^{s2} \ddot{w}_0^s - 6\varepsilon\tau_0^{s'} = 3\left(Z_+^s - Z_-^s\right)$$

Вторые члены в этих уравнениях на основании оценок, полученных в Замечании 2, могут быть отброшены как $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с первыми. После этого, исключив τ_0 из второго уравнения с помощью первого, получим уравнение для медленной функции w_0^s

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{s''''} + 2\eta^{s2} \ddot{w}_0^s = Z_+^s - Z_-^s + \varepsilon\left(X_+^{s'} + X_-^{s'}\right) \quad (12)$$

При отсутствии продольной нагрузки это уравнение совпадает с классическим уравнением поперечных колебаний балки.

Быстроменяющиеся величины удовлетворяют уравнениям

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q\prime\prime}+2(1+\nu)\eta^{q2}\ddot{\tau}_0^q+2\tau_0^q= \\ =X_+^q+X_-^q \tag{13}$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{q\prime\prime\prime}-2(1+\nu)\varepsilon\eta^{q2}\ddot{\tau}_0^{q\prime}-6\varepsilon\tau_0^{q\prime}= \\ =3\left(Z_-^q-Z_+^q\right) \tag{14}$$

При приложении сосредоточенных нагрузок первое уравнение описывает распространение волны разрыва, спровоцированное тангенциальной нагрузкой, а второе – нормальной.

Рассмотрим случай приложения сосредоточенной силы

$$3\left(Z_-^q-Z_+^q\right)=\delta(x-c)\varphi(t)$$

в точке $0<c<1$. Функция φ показывает изменение силы во времени,

$$X_+^q=X_-^q=0.$$

Проинтегрируем уравнение (14)

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{q\prime\prime\prime}-2(1+\nu)\varepsilon\eta^{q2}\ddot{\tau}_0^{q\prime}-6\varepsilon\tau_0^{q\prime}= \\ =\delta(x-c)\varphi(t)$$

по x в пределах от 0 до x. Получим

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0+6\tau_0=C$$

при $0\le x<c$

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0+6\tau_0= \\ =P\theta(c)\varphi(t)+C$$

при $c<x\le 1$.

Здесь θ – функция Хэвисайда. Поскольку θ везде на отрезке $[0,1]$ кроме точки c постоянная величина, частное решение находится из уравнения

$$2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0+6\tau_0=P\theta(c)\varphi(t) \tag{15}$$

описывающего распространение скачка касательного напряжения в виде функции Хэвисайда со скоростью

$$a=\frac{T}{h}\left(\frac{1+\nu}{3}\frac{\rho}{E}\right)^{-1/2} \tag{16}$$

Физический смысл этого уравнения поясним на примере удара по балке с жестко защемленными краями (Рис. 1).

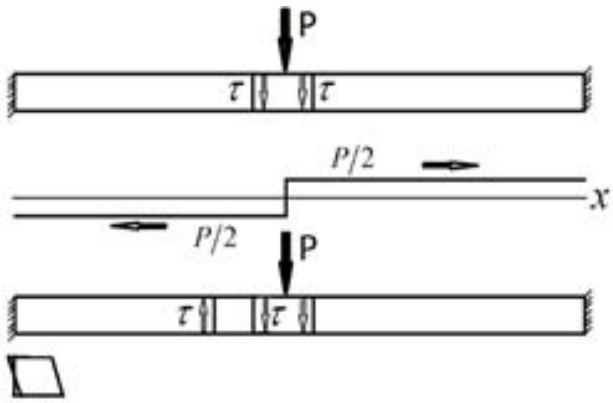


Рисунок 1. Пример удара по балки с жестко защемленными краями.

Выделим мысленно из балки элемент некоторой длины под силой P. Этот элемент, будучи нагруженным силой P, нагружает левую и правую части балки касательным напряжением τ. Скачки напряжения движутся от места приложения силы к опорам. Поскольку движущиеся элементы балки искривлены сдвигом, так как это показано внизу рисунка, при вступлении элемента в контакт с опорой в ней возникает усилие, стремящее совершить поворот концевого элемента, провоцирующего прогиб балки вниз. Волна, пробежав по балке несколько, может быть 5–10 [20] раз, затухнет. Поскольку скорость волны велика и соответствующее время ее пробега T^q в ε^{-1} меньше периода порождаемых ею поперечных колебаний T^s, наблюдаемые поперечные колебания существенно запаздывают относительно момента удара.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим теперь полученные результаты исследования и применим их через выяснение механического смысла для построения модели прогрессирующего разрушения.

Показано, что известное уравнение Тимошенко, рекомендуемое для расчетов балок при высокоскоростных воздействиях, может быть получено путем сведения двух уравнений в одно с потерей быстроменяющейся компоненты. Такие явления известны [18]. Система уравнений (9) расщепляется на три уравнения: одно из них параболического типа совпадает с классическим уравнением низкочастотных колебаний балки под действием медленно меняющихся нагрузок, два других гиперболического типа описывают возникающие в полосе высокочастотные колебания и волны под действием быстроменяющихся распределенных или сосредоточенных нагрузок. В случае поперечного удара по высотному зданию волна сдвига волна (15) будет двигаться в обе стороны от места удара, вполне возможно разрушая, вообще говоря, некоторые узлы крепления перекрытий этажей к внешним несущим конструкциям здания. В силу высокой скорости распространения волны сдвига это может вызвать прогрессирующее разрушение без видимых поперечных колебаний здания.

Такой вывод подтверждает заключение Федерального Агентства Чрезвычайных Ситуаций (FEMA), которое изучило обстоятельств разрушения башен Всемирного торгового центра (ВТЦ) в Нью-Йорке в мае 2002 года. Агентство признало, что конструкция башен ВТЦ соответствовала требованиям, предъявляемым к прочности конструкции, а разрушение башен объясняется действием экстраординарных факторов, находящихся вне возможностей контроля проектировщиков и строителей. FEMA высказало мнение, что разрушение возможно было вызвано ослаблением конструкций, поддерживающих перекрытия этажей. В тот момент, когда поддерживающие фермы на этажах зоны удара отделились от центральных опорных колонн, верхние этажи стали падать на нижние, и здание «сложилось» https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1329423.

Предложенная FEMA версия была впоследствии отвергнута в процессе завершившегося в сентябре 2005 года более детального расследования, произведенного Национальным институтом стандартов и технологии (NIST). Так же как и FEMA, NIST не имел претензий к конструкции башен ВТЦ, отмечая, что сами атаки, а так же величина нанесенных зданиям повреждений были далеко за пределами всего того, что когда-либо происходило в США. NIST объяснил разрушение башен тем, что оседающий пол (точнее, перекрытие) загнул внутрь внешние колонны здания, что вызвало обрушение верхних этажей.

Однако, можно предположить, что ослабление креплений конструкций, поддерживающих перекрытия этажей и оседающий пол явилось следствием волны сдвига. Таким образом, следует считать, что FEMA и NIST говорят одно и то же.

Поскольку выделенные в работе элементарные движения описываются простыми уравнениями, интегралы которых могут быть записаны в замкнутом виде, мы имеем возможность выполнять любые граничные условия на длинных сторонах и торцевых, в том числе условия сопряжения.

Подобные рассуждения можно применить и к случаю сейсмического воздействия на основание здания и сооружения. Быстрая подвижка основания приводит к искажению формы непосредственно к нему примыкающего элемента здания, рассматриваемого как балка. Далее происходит движение волны типа (15) вверх по зданию и при отражении от верхнего конца возможны повреждения в его верхней части. Кроме того, возможны искажения элемента стены здания, непосредственно примыкающего к основанию. Это будет второй возможной моделью для прочностного расчета, применимой и к невысоким зданиям.

Уравнения движения (8) здесь не рассмотрены. Они тоже имеют волновой характер, и им отвечает равномерно распределенная по толщине продольная волна или продольные колебания, в зависимости от вида заданной нагрузки, отсутствующие в уравнении Тимошенко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Григолюк Э.И., Селезов И.Т.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. // Механика твердых деформируемых тел, Т.5, М. 1973, 272 с.
2. **Гусев Б.В., Саурин В.В.** О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона, №3 (2017); ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312.
3. **Rossihin Yu.A., Shitikova M.V.** Transient Response of Thin Bodies Subjected to Impact: Wave Approach. // The shock and vibration digest 2007, 39; No 4, pp. 273-309.
4. **Маневич А.И.** Поперечные волны в балке Тимошенко из вязко-упругого материала // Theoretical Foundations of Civil Engineering, Warsaw, 2009, XV, pp. 209-216.
5. **Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.** Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. **Жилин П.А., Ильичева Т.П.** Анализ применимости теории типа Тимошенко при сосредоточенном воздействии на пластину // ПМТФ, 1984, № 1, с. 150-156.
7. **Hutchinson J.R.** Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. // Journal of Applied Mechanics, 68, 2001, pp. 87-92.
8. **Kaneko T.** On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams. // Journal of Physics D: Applied Physics, 8, 1975, pp. 1927-1936.
9. **Уфлянд Я.С.** Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ, Т. 12, №3, 1948, с. 287-300.
10. **Wang X.Q., So R.M.C.** Timoshenko Beam Theory: A Perspective Based on the Wave-Mechanics Approach. // Wave Motion, 57, 2015, pp. 64-87.
11. **Илгамов М.А.** Коротковолновая динамика тонких пластин. // Вычислительная механика сплошных сред, Т.5, №2, 2012, с. 134-143.
12. **Nesterenko V.V.** A Theory of Transverse Vibration of the Timoshenko Beam. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 57, 1993, pp. 669-677.
13. **Manevich A.I,** Dynamics of Timoshenko Beam on Linear and Nonlinear Foundation: Phase Relations, Significance of the Second Spectrum, Stability. // Journal of Sound and Vibration, 334, 2015, pp. 209–220.
14. **Зверяев Е.М., Макаров Г.И.** Общий метод построения теорий типа Тимошенко. // ПММ, 2008, Т. 72, Вып. 2, с. 308-321.
15. **Friedrichs K.O.** Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics. // Bull. Amer. Math. Soc., V. 61, No. 6, 1955, pp. 485-504.
16. **Love A.E.H.** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, Univ. Press, 2013, 662 pages.
17. **Kamke E.** Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Akademie Verlag, 1959, 666 pages.
18. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
19. **Гольденвейзер А.Л.** Теория тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
20. **Батуев Г.С., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А.** Инженерные методы исследования ударных процессов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.

REFERENCES

1. **Grigolyuk E.I., Selezov I.T.** Neklassicheskiye Teorii Kolebaniy Sterzhney, Plastin i Obolochek [Non-classical Theories of the Oscillations of Rode, Plates and Shells]. // Itogi Nauki I Tekhniki. Mekhani-

ka Tverdykh Deformiruyemykh Tel, T.5, M. 1973, 272 pages.
2. **Gusev B.V., Saurin V.V.** O Kolebaniyakh Neodnorodnykh Balok [About oscillations of non-uniform beams]. // Inzhenernyy vestnik Dona, No. 3, 2017; ivdon.ru/ru/ magazine/archive/n3y2017/431.
3. **Rossihin Yu.A., Shitikova M.V.** Transient Response of Thin Bodies Subjected to Impact: Wave Approach. // The shock and vibration digest 2007, 39; No 4, pp. 273-309.
4. **Manevich A.I.** Poperechnyye Volny v Balke Timoshenko iz Vyazko-Uprugogo Materiala [Transverse Waves in a Timoshenko Beam from a Viscoelastic Material]. // Theoretical Foundations of Civil Engineering, Warsaw, 2009, XV, C. 209–216.
5. **Timoshenko S., Young D.H., Weaver W.** Kolebaniya v Inzhenernom Dele [Vibration Problems in Engineering]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1985, 472 pages.
6. **Zhilin P.A., Il'icheva T.P.** Analiz Primenimosti Teorii Tipa Timoshenko pri Sosredotochennom Vozdeystvii na Plastinu [Analysis of the Applicability of Theory of Tymoshenko Type with Concentrated Action on Plate]. // PMTF, 1984, No. 1, pp. 150-156.
7. **Hutchinson J.R.** Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. // Journal of Applied Mechanics, 68, 2001, pp. 87-92.
8. **Kaneko T.** On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams. // Journal of Physics D: Applied Physics, 8, 1975, pp. 1927-1936.
9. **Uflyand Ya.S.** Rasprostraneniye Voln pri Poperechnykh Kolebaniyakh Sterzhney i Plastin [Wave Propagation Accompanying Transverse Oscillations of Rods and Plates]. // Applied Mathematics and Mechanics, Tom 12, No. 3, 1948, pp. 287-300.
10. **Wang X.Q., So R.M.C.** Timoshenko Beam Theory: A Perspective Based on the Wave-Mechanics Approach. // Wave Motion, 57, 2015, pp. 64-87.
11. **Ilgamov M.A.** Korotkovolnovaya Dinamika Tonkikh Plastin [Short-Wave Dynamics of Thin Plates]. // Vychislitelnaya Mekhanika Sploshnykh Sred, T.5, No. 2, 2012, pp. 134-143.
12. **Nesterenko V.V.** A Theory of Transverse Vibration of the Timoshenko Beam. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 57, 1993, pp. 669-677.
13. **Manevich A.I,** Dynamics of Timoshenko Beam on Linear and Nonlinear Foundation: Phase Relations, Significance of the Second Spectrum, Stability. // Journal of Sound and Vibration, 334, 2015, pp. 209–220.
14. **Zveryaev E.M., Makarov G.I.** Obshchiy Metod Postroyeniya Teoriy Tipa Timoshenko [The General Method for Constructing Timoshenko-Type Theories]. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Tom 72, No. 2, 2008, pp. 308-321.
15. **Friedrichs K.O.** Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics. // Bull. Amer. Math. Soc., V. 61, No. 6, 1955, pp. 485-504.
16. **Love A.E.H.** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, Univ. Press, 2013, 662 pages.
17. **Kamke E.** Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Akademie Verlag, 1959, 666 pages.
18. **Courant R.** Partial differential equations. New York – London, Interscience, 1962.
19. **Goldenweiser A.L.** Teoriya Tonkikh Uprugikh Obolochek [Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1975, 512 pages.
20. **Batuev G.S., Golubkov Yu.V., Efremov A.K., Fedosov A.A.** Inzhenernyye Metody Issledovaniya Udarnykh Protsessov [Engineering Methods for Studying Shock Processes]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 240 pages.

Зверяев Евгений Михайлович, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук; 125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4;
тел.: +7(499) 978-13-14; факс: +7(499) 972-07-37;
E-mail: zveriaev@mail.ru.

Ларионов Евгений Алексеевич, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7(499)183-59-94; +7(495)422-22-89;
E-mail: KaferdraIPM@mgsu.ru.

Evheniy M. Zveryayev, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Senior Researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences; Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia;
phone: +7(499)978-13-14; fax: +7(499)972-07-37;
E-mail: zveriaev@mail.ru.

Evheniy A. Larionov, Professor, Dr.Sc.; Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia;
phones: : +7(499)183-59-94; +7(495)422-22-89;
E-mail: KaferdraIPM@mgsu.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 64-70 (2018)
DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70

ИНДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Получено и проанализировано аналитическое решение задачи о прогибе плоской арочной статически определимой фермы под действием равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузки. Для получения зависимости прогиба от числа панелей использован метод индукции по двум параметрам – по числу панелей в ригеле и числу панелях в опорных боковых фермах. Все преобразования и анализ выполнены в системе компьютерной математики Maple. Найдены выражения для усилий в отдельных стержнях. Получено асимптотическое приближение решений.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, интеграл Мора, Maple

INDUCTIVE ANALYSIS OF THE DEFORMATION OF THE ARCHED TRUSS

Mikhail N. Kirsanov
National research University “MPEI”, Moscow, RUSSIA

Abstract: An analytical solution to the problem of the deflection of a flat arched statically determinate truss under the action of a uniformly distributed and concentrated load is obtained and analyzed. To obtain the dependence of the deflection on the number of panels, an induction method was used in two parameters — the number of panels in the crossbar and the number of panels in the supporting side trusses. All transformations and analysis are performed in the system of computer mathematics Maple. Expressions for the forces in individual rods are found. The asymptotic approximation of solutions is obtained.

Keywords: truss, deflection, induction, Mohr' integral, Maple

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Развитие аналитических методов на основе систем компьютерной математики дало возможность получать точные формульные решения задач механики, в том числе и механики стержневых систем. Простые формульные решения могут быть использованы как при проектировании сооружений, так и для оценки решений, полученных в стандартных программных комплексах, основанных на численных преобразованиях. Особенно эффективны такие оценки в случае анализа систем большой размерности, где накопление ошибок округления является существенной проблемой. Большинство известных аналитических решений для регулярных конструкций с произвольным числом ячеек периодичности построены методом индукции по одному натуральному параметру, характеризующему сложность конструкции - числу ячеек периодичности. Многократно сложнее и важнее получить решение для конструкций с двумя и более параметрами индукции. Это существенно расширяет область применимости полученных формул, увеличивает разнообразие видов рассчитываемых конструкций. Кроме того, аналитическое представление решения дает возможность проанализировать поведение конструкции, выделив некоторые ее особенности.

Рассмотрим распорную ферму арочного типа (рис. 1), содержащую два независимых параметра m и n, характеризующих ее форму.

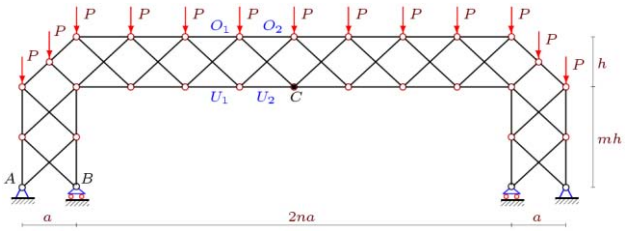


Рисунок 1. Ферма при n=4, m=2. Загружение верхнего пояса.

В ферме с n панелями в половине пролета ригеля и m вертикальными панелями в боковых опорных частях содержится $M=8(n+m)+12$ стержней, включая шесть стержней, моделирующих опоры. Ферма статически определима — число узлов в два раза больше числа стержней. Однако, независимо от усилий определить шесть реакций опор в опорных стержнях нельзя. Ферма *внешне* статически неопределима.

2. РАСЧЕТ УСИЛИЙ

Пользуясь программой [1], ранее успешно использованной для вывода аналитических зависимостей в плоских [2-7] и пространственных [8,9] фермах методом индукции, пронумеруем узлы и стержни и внесем в программу координаты узлов (рис. 2).

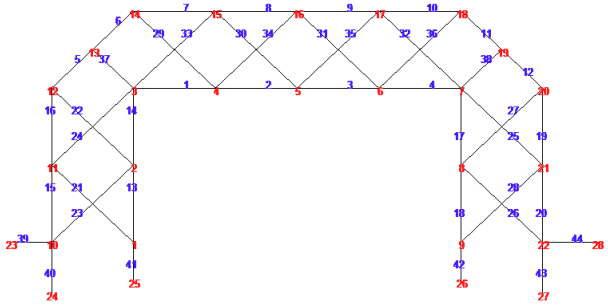


Рисунок 2. Номера стержней и узлов, n=m=2.

Матрица G уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов стержней, которые вычисляются через длины стержней l_i, $i=1,..,M$ и их условные проекции $l_{j,i}$, $j=1,2$ на оси координат. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы:

$$G_{t,i}=-l_{j,i}/l_i,\ \ t=2V_{i,2}+j-2,\ t\le M,\ \ j=1,2,$$
$$G_{t,i}=l_{j,i}/l_i,\ t=2V_{i,1}+j-2,\ \ t\le M,\ \ \ j=1,2,$$
$$i=1,...,M.$$

Система уравнений равновесия узлов имеет вид

$$\mathbf{G}\bar{S}=\bar{B},$$

где $\bar{S}=\{S_1,...,S_M\}$ — вектор усилий, $\bar{B}$ — вектор внешних нагрузок.

Для случая нагружения верхнего пояса (рис. 1) имеем:

$$B_{2i}=1,\ i=2n+3m+2,...,4n+3m+6.$$

В четные элементы вектора нагрузок записываются вертикальные силы, в нечетные — горизонтальные. Первые же расчеты ферм с различными n и m показали, что для нечетных m определитель матрицы G обращается в нуль, что свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции [10]. Действительно, при $m=1$ можно выявить схему возможных скоростей узлов (рис. 3).

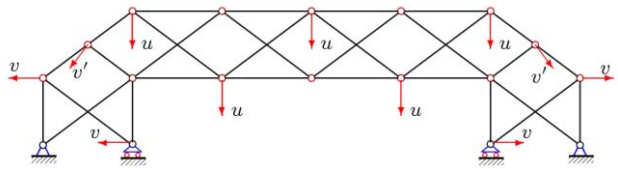


Рисунок 3. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы (n=2, m=1).

Соотношение возможных скоростей определяется из кинематики механизма:

$$v/h=u/a=2v'/\sqrt{a^2+h^2}\ .$$

Аналогичные схемы скоростей, доказывающие изменяемость конструкции, существуют и для других нечетных значений m.

3. ПРОГИБ

Для определения прогиба фермы используем интеграл Мора в виде,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{M-6} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где суммирование ведется по стержням фермы и обозначено: $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса ригеля, $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней. Жесткости стержней EF приняты одинаковыми для всех стержней. Расчет ферм с различными n и m=2k выявил, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\Delta = P \frac{A_{n,k} a^3 + C_{n,k} c^3 + H_{n,k} h^3}{h^2 EF}, \qquad (1)$$

отличаясь только коэффициентами при степенях (кубах) размеров a, h и

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Индукция проводилась в два этапа. Сначала по числу n при фиксированном k был получен ряд формул, затем эти коэффициенты этих формул обобщались по числу k. При этом выяснилось, что коэффициент при a^3 не зависит от k:

$$A_{n,k} = (10n^4 + 2(5-2(-1)^n)n^3 + 2(1-3(-1)^n)n^2 + \\ + 5(1-(-1)^n)n - 3 - 3(-1)^n)/24.$$

Этот коэффициент получен из решения рекуррентного уравнения девятого порядка

$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + 4A_{n-2,k} - 4A_{n-3,k} - 6A_{n-4,k} + \\ + 6A_{n-5,k} + 4A_{n-6,k} - 4A_{n-7,k} - A_{n-8,k} + A_{n-9,k}.$$

Для построения рекуррентного уравнения по последовательности коэффициентов применялся оператор rgf_findrecur, а для его решения — оператор rsolve системы Maple. Несколько сложнее были получены коэффициенты:

$$C_{n,k} = (n^2 + ((2k+1)n + 4k + 1)(1-(-1)^n))/4,$$
$$H_{n,k} = k((7-(-1)^n)n + 17 - 11(-1)^n)/6 + k^2(3 - \\ -(2n+7)(-1)^n)/2 + 4k^3(1-(-1)^n)(n+2)/3.$$

Учитывая, что символьные преобразования в системе Maple выполняются медленно, при выводе этих формул необходимо было правильно выбрать порядок двойной индукции. Сначала по предварительным расчетам с малыми значениями m и n выяснялся приблизительный порядок степеней полиномов, далее выполнялась индукция по параметру с большим порядком (для $H_{n,k}$ это параметр n), затем по параметру с меньшим порядком. Для случая нагружения фермы по нижнему поясу (рис. 4) решение меняется не сильно.

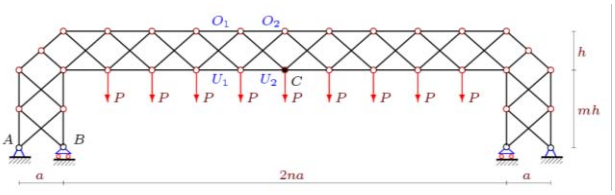


Рисунок 4. Ферма при n=5, m=2. Загружен нижний пояс ригеля.

Коэффициент $A_{n,k}$ остается прежним, а другие коэффициенты имеют вид:

$$C_{n,k} = (2n^2 + (1-(-1)^n)(2n+1) + 4k(1-(-1)^n)n)/8,$$
$$H_{n,k} = (4k^3(1-(-1)^n)n + 3k^2(1-(-1)^n(2n+1))/2 + \\ + k((7-(-1)^n)n - 3(-1)^n - 3)/2)/3.$$

Прогиб от действия одной вертикальной силы в точке C также вычисляется по формуле (1) с коэффициентами

$$A_{n,k} = (4n^3 + 3(1-(-1)^n)n^2 + (5-3(-1)^n)n + \\ +3-3(-1)^n)/12,$$
$$C_{n,k} = (2n + (2k+1)(1-(-1)^n))/4,$$
$$H_{n,k} = ((1-(-1)^n)(3+4k)k^2 + k(7-(-1)^n)/2)/3.$$

4. АНАЛИЗ ПРОГИБА. УСИЛИЯ В СТЕРЖНЯХ И РЕАКЦИИ ОПОР

Рассмотрим случай фермы с заданным пролетом L, высотой H и произвольным числом панелей в ригеле, так что

$$a = L/(2n+2).$$

Аналитическая форма решения позволяет наглядно выявить некоторые его особенности. Зафиксируем также общую нагрузку на ферму по верхнему поясу

$$P_{sum} = (2n+5)P.$$

Введем обозначение для безразмерного прогиба

$$\Delta' = \Delta EF/(P_{sum}L).$$

На рисунке 5 при $H = mh = 12м$ и L=100 м даны три ломаные кривые, имеющие явно выраженный минимум и немонотонно растущие с числом n. Асимптотику этого роста выявляет следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta'/n^2 = H/(8kL).$$

Помимо оценки величины прогиба фермы для проектировщика желательно иметь информацию об усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях с целью проверки их на устойчивость и прочность. В процессе вывода формул для прогиба программа получала аналитические выражения для усилий во всех стержнях конструкции. В качестве тестируемых выберем по два стержня в верхнем и нижнем поясе ригеля.

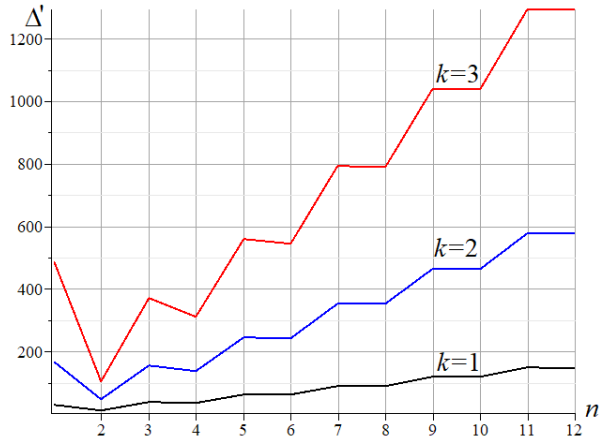


Рисунок 5. Зависимость прогиба от числа панелей.

Совершенно очевидно, что это только некоторые стержни, опасные с точки зрения потери устойчивости или прочности. Полноценный расчет должен включать в себя и другие (в лучшем случае — все) стержни. Формулы для усилия в этих стержнях приводим лишь для примера. Для определения закономерности образования коэффициентов в усилиях стержней потребовалась последовательность расчетов меньшей длины. Как и в процедуре вывода формулы для прогиба, необходимая длина последовательности коэффициентов определяется получением рекуррентного уравнения с физически достоверным решением, тестируемым в численной моде программы на произвольных числах панелей. Индукция по числу n дает решение, не зависящее от числа m. Стержни нижнего пояса в середине пролета растянуты:

$$U_1 = P(n^2-3)a/(2h),\ U_2 = P(n^2-1)a/(2h),$$

стержни верхнего пояса сжаты:

$$O_1 = -P(n+2)(n-1)a/(2h),$$
$$O_2 = -Pn(n+1)a/(2h).$$

Эти формулы справедливы как при загружении верхнего так и нижнего пояса. Реакции неподвижных опор зависят от числа панелей

m=2k и при загружении верхнего пояса имеют вид:

$$Y_A = P(4k+4+n(2k+1))/2,$$
$$X_A = Pa(n+2)/(2h).$$

Реакции симметрично расположенных подвижных шарниров:

$$Y_B = -P(4k-1+n(2k-1))/2.$$

Для случая загружения нижнего пояса эти реакции другие:

$$Y_A = P(2k+1)n/2,\ X_A = Pan/(2h),$$
$$Y_B = -P(n(2k-1)+1)/2.$$

5. ВЫВОДЫ

Предложенная схема статически определимой арочной фермы, несмотря на ее внешнюю статическую неопределимость [11], допускает точное аналитическое решение для прогиба в зависимости от числа панелей при различных нагрузках. При этом выявлены случаи кинематической изменяемости конструкции. Решение имеет полиномиальный вид по числам панелей, а ломаные кривые зависимости прогиба от n обнаруживают как локальные так и глобальные минимумы. Найдена квадратичная асимптотика полученной зависимости. Примененный алгоритм и выведенные формулы могут быть использованы в задачах оптимизации конструкций [12-14]. Обзоры задач для плоских ферм, решенных методом индукции, содержатся в [15-17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирсанов М.Н.** Maple и Maplet. Решения задач механики. – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
2. **Кирсанов М.Н.** Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly». // Строительная механика и расчет сооружений, 2016, №4, с. 2-5.
3. **Тиньков Д.В.** Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой. // Постулат, 2017, №12.
4. **Kirsanov M.N.** An Inductive Method of Calculation of the Deflection of the Truss Regular Type. // Architecture and Engineering, 2016, No. 3, Vol. 1, pp. 14-17.
5. **Shipaeva A.S.** Calculation of the Deflection of Girder Beam Loaded on the Bottom Flange in the System Maple. // Science Almanac, 2016, No. 5-3(19), pp. 236-239.
6. **Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.** The Formula for the Deflection of a Truss Loaded at Half-Span by a Uniform load. // Postulat, 2018, No. 3.
7. **Kirsanov M.N.** Analytical Calculation, Marginal and Comparative Analysis of a Flat Girder. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 1(29), pp. 84-105.
8. **Kirsanov M.N.** Evaluation of Spatial Deflection of Coatings with Periodic Structure. // Magazine of Civil Engineering, 2017, No. 8, pp. 58-66.
9. **Kirsanov M.N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 3(31), pp. 71-79.
10. **Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R.** Analytical Calculation of the Displacement of the Truss Support. // Science Almanac, 2017, No 2-3(28), pp. 275-278.
11. **Астахов С.В.** Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета. // Строительство и архитектура, 2017, Том 5, №2(15), с. 50-54.
12. **Алексейцев А.В.** Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узло-

вых соединений стержней. // Инженерно-строительный журнал, 2013, №5(40), с. 27-37.
13. **Серпик И.Н., Алексейцев А.В.** Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. – М.: АСВ, 2012. – 239 с.
14. **Baumann B., Kost B.** Structure Assembling by Stochastic Topology Optimization. // Computers and Structures, 2005, Vol. 83, No. 25-26. pp. 2175-2184.
15. **Тиньков Д.В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций. // Инженерно-строительный журнал, 2015, №5(57), с. 66-73.
16. **Осадченко Н.В.** Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами. // Постулат, 2017, №12, ст. 28, 9 с.
17. **Широков А.С.** Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple. // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. – Казань: Издво Академии наук Республики Татарстан, 2017, с. 267-272.

REFERENCES

1. **Kirsanov M.N.** Maple i Maplet. Resheniya Zadach Mekhaniki [Maple and Maplet. Solutions of Problems of Mechanics]. Saint-Petersburg, Lan, 2012, 512 pages.
2. **Kirsanov M.N.** Analiticheskiy Raschet Balochnoy Fermy s Reshetkoy Tipa “butterfly” [Theoretical Analysis of a Beam Farm With a Butterfly Grid]. // Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy, 2016, No. 4, pp. 2-5.
3. **Tinkov D.V.** Raschet Progiba Ploskoy Arochnoy Fermy s Krestoobraznoy Reshetkoy [Calculation of the Deflection of a Flat Arched Farm With a Cross-Shaped Grid]. // Postulat, 2017, No. 12.
4. **Kirsanov M.N.** An Inductive Method of Calculation of the Deflection of the Truss Regular Type. // Architecture and Engineering, 2016, No. 3, Vol. 1, pp. 14-17.
5. **Shipaeva A.S.** Calculation of the Deflection of Girder Beam Loaded on the Bottom Flange in the System Maple. // Science Almanac, 2016, No. 5-3(19), pp. 236-239.
6. **Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.** The Formula for the Deflection of a Truss Loaded at Half-Span by a Uniform load. // Postulat, 2018, No. 3.
7. **Kirsanov M.N.** Analytical Calculation, Marginal and Comparative Analysis of a Flat Girder. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 1(29), pp. 84-105.
8. **Kirsanov M.N.** Evaluation of Spatial Deflection of Coatings with Periodic Structure. // Magazine of Civil Engineering, 2017, No. 8, pp. 58-66.
9. **Kirsanov M.N.** Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover. // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture, 2016, No. 3(31), pp. 71-79.
10. **Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R.** Analytical Calculation of the Displacement of the Truss Support. // Science Almanac, 2017, No 2-3(28), pp. 275-278.
11. **Astakhov S.V.** Vyvod Formuly Dlya Progiba Vneshne Staticheski Neopredelimoy Ploskoy Fermy pod Deystviyem Nagruzki v Seredine Proleta [The Derivation of the Formula for the Deflection of an Externally Statically Indeterminate Flat Farm Under the Influence of a Load in the Middle of the Span]. // Stroitelstvo i arkhitektura, 2017, Tom 5, No. 2(15), pp. 50-54.
12. **Alekseytsev A.V.** Evolyutsionnaya Optimizatsiya Stalnykh Ferm s Uchetom Uzlovykh Soyedineniy Sterzhney [Evolutionary

Optimization of Steel Trusses With Allowance for Nodal Connections of Rods]. // Inzhenerno-Stroitelnyy Zhurnal, 2013, No. 5(40), pp. 27-37.
13. **Serpik I.N., Alekseytsev A.V.** Optimizatsiya Metallicheskikh Konstruktsiy Putem Evolyutsionnogo Modelirovaniya [Optimization of Steel Structures Through Evolutionary Modeling]. Moscow, ASV, 2012, 239 pages.
14. **Baumann B., Kost B.** Structure Assembling by Stochastic Topology Optimization. // Computers and Structures, 2005, Vol. 83, No. 25-26. pp. 2175-2184.
15. **Tinkov D.V.** Sravnitelnyy Analiz Analiticheskikh Resheniy Zadachi o Progibe Fermennykh Konstruktsiy [Comparative Analysis of Analytical Solutions of the Problem of Deflection of Truss Structures]. // Inzhenerno-Stroitelnyy Zhurnal, 2015, No. 5(57), pp. 66-73.
16. **Osadchenko N.V.** Raschet Progiba Ploskoy Nerazreznoy Staticheski Opredelimoy Fermy s Dvumya Proletami [Calculation of the Deflection of a Flat, Continuous, Statically Determinate Truss With Two Spans]. // Postulat, 2017, No. 12, st. 28, 9 p.
17. **Широков А.С.** Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple. // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. – Казань: Издво Академии наук Республики Татарстан, 2017, с. 267-272.
18. **Shirokov A.S.** Induktivnyy Vyvod Zavisimosti Progiba i Smeshcheniya Opory Arochnoy Fermy ot Chisla Paneley v Sisteme Maple [Inductive Derivation of the Dependence of Deflection and Displacement of the Arch of the Arch Support on the Number of Panels in the Maple System]. // Mezhdunarodnyy nauchnyy seminar «Nelineynyye modeli v me-khanike, statistike, teorii polya i kos-mologii» – GRACOS-17. Kazan. Izdatelstvo Akademii nauk Respubliki Tatarstan, 2017, pp. 267-272.

Кирсанов Михаил Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра теоретической механики и мехатроники; 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, дом 14;
тел. +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru.

Mikhail N. Kirsanov, Professor, Dr.Sc., National Research University “MPEI”, Department of theoretical mechanics and mechatronics; 111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya str., 14; tel. +7(495)362-73-14,
E-mail: c216@ya.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 71-77 (2018)

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77

МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Е.Б. Коренева

Московское высшее общевойсковое командное орденов Жукова, Ленина и Октябрьской Революции Краснознаменное училище, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: К решению задач статики и колебаний плит, обладающих цилиндрической анизотропией, применяется метод компенсирующих нагрузок (МКН) [1]. Для получения решений поставленных задач и построения основного и компенсирующего решений используется приём Нильсена, так как при рассмотрении анизотропных тел разрешающее дифференциальное уравнение четвёртого порядка с переменными коэффициентами не удаётся расчленить на два взаимно сопряжённых дифференциальных уравнения второго порядка. Вследствие этого удаётся получить решения в функциях Бесселя и функциях, им родственных. Такой приём может быть использован при рассмотрении задач об осесимметричном, антисимметричном и несимметричном изгибе круглых ортотропных пластин, лежащих на упругом винклеровском основании, а также об осесимметричных колебаниях круглых ортотропных пластин и о колебаниях с одним или несколькими узловыми диаметрами. Решения получаются в замкнутом виде в цилиндрических функциях.

Ключевые слова: ортотропия, круглые пластины, метод компенсирующих нагрузок, функции Бесселя

METHOD OF COMPENSATING LOADS FOR SOLVING OF ANISOTROPIC MEDIUM PROBLEMS

Elena B. Koreneva

Moscow Higher Combined-Arms Command Academy, Moscow, RUSSIA

Abstract: The work applies the method of compensating loads (MCL) for solution of statics and vibrations problems of plates with cylindrical anisotropy. For receiving of basic and compensating solutions Nielsen's equation is used. The solution expressed in terms of Bessel functions is obtained. Such way can be used in consideration of symmetric, antisymmetric and unsymmetric flexure of orthotropic circular plates resting on an elastic Winkler's subgrade. The similar method can be also utilized for examination of the symmetric vibrations of the orthotropic circular plates as well as for the cases of vibrations with one or a few nodal diameters. The solutions are obtained in closed form in terms of the cylindrical functions.

Keywords: orthotropic circular plate, method of compensating loads, Bessel functions

1. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины постоянного сечения, лежащей на упругом винклеровском основании [2]:

$$r^4\frac{d^4w}{dr^4}+2r^3\frac{d^3w}{dr^3}-n^2r^2\frac{d^2w}{dr^2}+n^2r\frac{dw}{dr}-\frac{kw}{Dn_2}r^4=\frac{qr^4}{Dn_2}. \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жёсткость, k – коэффициент постели основания, σ - Пуассоново отношение.

Используя зависимости

$$E_r=\frac{E}{n_1},\ E_\theta=En_2,\ \sigma_r=\frac{\sigma}{n^2},\ \sigma_\theta=\sigma, \quad (2)$$

определяется параметр

$$n^2=n_1n_2.$$

В литературе, например в [1], рассматривались вопросы изгиба круглых пластин постоянной толщины, лежащих на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Там исходное разрешающее уравнение четвёртого порядка с переменными коэффициентами можно заменить системой двух сопряжённых дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых является уравнением Бесселя.

При рассмотрении случаев изгиба пластин из анизотропного материала анализ разрешающего дифференциального уравнения четвёртого порядка показал, что никогда, ни при каких значениях параметров оно не распадается на два взаимно сопряжённых. Таким образом, существовавшая ранее методика, предложенная для изотропных пластин и связанная с применением МКН [3], [4], при рассмотрении вопросов об анизотропных средах и получении решений в замкнутом виде в функциях Бесселя в подобных задачах не годится.

Введём в рассмотрение уравнение Нильсена, имеющее следующий вид [4]:

$$r^4 \frac{d^4w}{dr^4} + A_3 r^3 \frac{d^3w}{dr^3} + A_2 r^2 \frac{d^2w}{dr^2} + A_1 r \frac{dw}{dr} + A_0 w = 0, \tag{3}$$

где соответственно

$$A_3 = 6 - 4a - 4c;$$
$$A_2 = 2(a^2 - \mu^2 c^2) + 4(a + c - 1)^2 + 4(a-1)(c-1) - 1;$$
$$A_1 = \left[2(\mu^2 c^2 - a^2) - (2a-1)(2c-1)\right](2a + 2c - 1);$$
$$A_0 = (a^2 - \mu^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2) - b^4 c^4 r^{4c}.$$

Решение уравнения (3) выражается в функциях Бесселя и может быть представлено в следующей форме:

$$w = r^a \left[C_1 J_\mu(u) + C_2 Y_\mu(u) + C_3 I_\mu(u) + C_4 K_\mu(u)\right], \; u = br^c, \tag{4}$$

здесь J_μ, Y_μ, I_μ, K_μ - функции Бесселя.

Далее сопоставим уравнения (3) и (4). Они подобны, если мы положим, что

$$a^2 - \mu^2 c^2 = 0 \tag{5}$$

или

$$a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2 = 0. \tag{6}$$

В результате получим

$$c = 1, \; a = 0, \; b = \sqrt[4]{\frac{k}{n_2 D}} i^{1/2}.$$

Из условия (5) получим $\mu = 0$, а из условия (6) имеем $\mu = \pm 2$.

Общее решение дифференциального уравнения для случая $\mu = 0$:

$$w = C_1 J_0\left(bri^{1/2}\right) + C_2 Y_0\left(bri^{1/2}\right) + C_3 I_0\left(bri^{1/2}\right) + C_4 K_0\left(bri^{1/2}\right). \tag{7}$$

При $\mu = \pm 2$ общее решение того же уравнения имеет следующий вид:

$$w = B_1 u_\mu(br) + B_2 \upsilon_\mu(br) + B_3 f_\mu(br) + B_4 g_\mu(br). \tag{8}$$

Выражения для u_μ, υ_μ, f_μ, g_μ приводятся в [2].

Таким образом, с помощью указанного выше приёма удалось получить решение исследуемой задачи в функциях Бесселя.

2. МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК

Применим метод компенсирующих нагрузок к рассмотрению задачи о круглой ортотропной пластине, лежащей на упругом винклеровском основании. Ищем решение задачи в виде суммы основного w_0 и компенсирую-

щего w_k решений [1], [3], [4]. Основным назовём такое решение, которое, удовлетворяя дифференциальному уравнению, описывающему задачу, содержит особенности, отражающие тот или иной тип нагрузки. В большинстве случаев основное решение рассматривается как решение задачи о загружении неограниченной пластины. Для того чтобы искомое решение удовлетворяло граничным условиям, вводится компенсирующее решение.

3. ОСНОВНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим задачу о бесконечной ортотропной пластине, загруженной сосредоточенной силой. Примем начало координат в точке приложения силы. В качестве примера рассмотрим случай $\mu = \pm 2$. Тогда уравнение упругой поверхности имеет вид (8). Введём безразмерную координату $x = br$.

Определим постоянные интегрирования B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . Для бесконечной пластины, когда аргумент $x \to \infty$, как следует из теории специальных функций, $u_\mu(x)$ и $\upsilon_\mu(x)$ обращаются в бесконечность. Поскольку для изучаемой задачи перемещения и усилия при $x \to 0$ должны обращаться в нуль, примем

$$B_1 = B_2 = 0 .$$

Рассмотрим условия в начале координат; при $x = 0$ прогиб должен оставаться конечным. Поскольку при $x \to 0$ функция g_μ стремится к бесконечности, а функция f_μ остаётся конечной, положим $B_4 = 0$. Таким образом, имеем:

$$w = B_3 f_\mu(x). \qquad (9)$$

Для определения постоянной B_3 запишем выражение для поперечной силы Q_1 . Для этого, исходя из условий равновесия, следует приравнять предел, к которому стремится эта сила при $x \to 0$, величине

$$-\frac{Pb}{2\pi x} .$$

С другой стороны, исходя из уравнения упругой поверхности (8) и формул, приведённых в [2], запишем

$$Q = -Db^3 B_3 g_0(x).$$

Исходя из теории,

$$\text{при } x \to 0 \quad g_\mu'(x) = \frac{2}{\pi x},$$

получим выражение для

$$B_3 = \frac{P}{4Db^2}.$$

В результате уравнение упругой поверхности изучаемой пластины имеет вид:

$$w = \frac{P}{4Db^2} f_0(x). \qquad (10)$$

Положим $P = 1$; в этом случае указанное выше выражение является основной функцией влияния. Определив указанную основную функцию влияния, можно получить решения ряда задач о бесконечных пластинах при различных загружениях. Упомянутые решения назовём основными. Для этого воспользуемся принципом сложения воздействий, дающим возможность при интегрировании основной функции влияния (10) получить искомое решение.

Перейдём к решению задачи о бесконечной ортотропной пластине, загруженной нагрузкой q , равномерно распределённой по окружности с приведённым радиусом α .

Для составления уравнения упругой поверхности следует сначала найти элементарный прогиб в точке A с приведёнными коэффи-

циентами (x,φ) от действия элементарной нагрузки, приходящейся на участок дуги длиной

$$\frac{\alpha}{b}d\theta$$

и приложенной в точке B с приведёнными коэффициентами (α,θ) [1].

Запишем выражение для приведённого расстояния между точками A и B:

$$z = \sqrt{x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x\cos(\theta-\varphi)}.$$

Элементарный прогиб в точке A, вызванный элементарной нагрузкой, равен

$$dw = \frac{q\alpha d\theta}{4Db^3} f_\mu(z). \qquad (11)$$

Интегрируя приведённое выше выражение (11), получим:

$$w = \frac{q\alpha}{4Db^3}\int_0^{2\pi} f_\mu\left(\sqrt{\alpha^2+x^2-2\alpha x\cos(\theta-\varphi)}\right)d\theta. \qquad (12)$$

Используя формулу сложения цилиндрических функций, выполняя интегрирование и отделяя действительную часть, получим выражения для прогибов:

при $x \le \alpha$

$$w = \frac{\pi q\alpha}{2Db^3}\left[f_\mu(\alpha)u_\mu(x) - g_\mu(\alpha)\upsilon_\mu(x)\right], \qquad (13)$$

при $x \ge \alpha$

$$w = \frac{\pi q\alpha}{2Db^3}\left[u_\mu(\alpha)f_\mu(x) - \upsilon_\mu(\alpha)g_\mu(x)\right]. \qquad (14)$$

Далее можно получить формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. В качестве примера приведём формулы для изгибающего момента G_1:

при $x \le \alpha$

$$G_1 = -\frac{\pi q\alpha}{2b}\left\{f_\mu(\alpha)\left[\upsilon_\mu(x) - (1-\sigma)\frac{u_\mu'(x)}{x}\right] + g_\mu(\alpha)\left[u_\mu(x) + (1-\sigma)\frac{\upsilon_\mu'(x)}{x}\right]\right\}, \qquad (15)$$

при $x \ge \alpha$

$$G_1 = -\frac{\pi q\alpha}{2b}\left\{u_\mu(\alpha)\left[g_\mu(x) - (1-\sigma)\frac{f_\mu'(x)}{x}\right] + \upsilon_\mu(\alpha)\left[f_\mu(x) + (1-\sigma)\frac{g_\mu'(x)}{x}\right]\right\}. \qquad (16)$$

Рассмотрим решение задачи о пластинах бесконечного радиуса, загруженных осесимметричными нагрузками, распределёнными по круговым областям. Для этого следует интегрировать приведённые выше решения.

В качестве примера решим задачу о бесконечной ортотропной пластине, находящейся под действием нагрузки q_0, равномерно распределённой по площади кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с приведёнными радиусами α_1 и α_2. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Для построения решения следует проинтегрировать выражения (13) и (14), заменив в них нагрузку q элементарной нагрузкой

$$\frac{q_0 d\alpha}{b}.$$

В результате получим:

при $x \le \alpha_1$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k}\left\{\left[\alpha_2 g_0'(\alpha_2) - \alpha_1 g_0'(\alpha_1)\right]u_0(x) + \left[\alpha_2 f_0'(\alpha_2) - \alpha_1 f_0'(\alpha_1)\right]\upsilon_0(x)\right\}; \qquad (17)$$

при $\alpha_1 \le x \le \alpha_2$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k}\{\alpha_2 g_0'(\alpha_2)u_0(x) + \alpha_2 f_0'(\alpha_1)\upsilon_0(x) - \\ -\alpha_1 u_0'(\alpha_1)g_0(x) - \alpha_1\upsilon_0'(\alpha_1)f_0(x) - \frac{2}{\pi}\}, \quad (18)$$

при $x \ge \alpha_2$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k}\{[\alpha_2\upsilon_0'(\alpha_2) - \alpha_1\upsilon_0'(\alpha_1)]f_0(x) + \\ +[\alpha_2 u_0'(\alpha_2) - \alpha_1 u_0'(\alpha_1)]g_0(x)\}. \quad (19)$$

Для того чтобы получить решение о неограниченной пластине, загруженной силами q_0, равномерно распределёнными по площади круга, ограниченного окружностью с приведённым радиусом α, следует в решениях (17)-(19) положить

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha.$$

Используя полученные результаты, можно получить основные решения для случаев загружения угловыми деформациями и моментами, распределёнными по окружностям, и другие задачи.

4. КОМПЕНСИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ

Решение представим в виде:

$$w = w_0 + w_k. \quad (20)$$

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины, лежащей на упругом винклеровском основании. Пластина не имеет отверстия и её приведённый радиус равен β. Искомую компенсирующую нагрузку w_k можно рассматривать как результат влияния некоторой специально подобранной нагрузки, действующей по окружности с радиусом, равным или большим β. При $x = 0$ функции $f_\mu(x)$ и $g_\mu(x)$ имеют особенности, поэтому не войдут в компенсирующее решение. Представим его в следующем виде:

$$w = Au_\mu(x) + B\upsilon_\mu(x). \quad (21)$$

Для сокращения записи будем пользоваться соотношениями:

$$u_\mu^{(M)}(\beta) = -u_\mu(\beta) - (1-\sigma)\frac{\upsilon_0'(\beta)}{\beta},$$
$$\upsilon_\mu^{(M)}(\beta) = \upsilon_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{u_0'(\beta)}{\beta},$$
$$f_0^{(M)}(\beta) = -f_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{g_0'(\beta)}{\beta}, \quad (22)$$
$$g_0^{(M)}(\beta) = g_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{f_0'(\beta)}{\beta}.$$

Обозначим через w_0, φ_0, M_0, Q_0 соответственно прогиб, угол поворота, радиальный изгибающий момент и перерезывающую силу для основного решения при $x = \beta$. Рассмотрим несколько частных примеров.

а) Пластина со свободным контуром. В этом случае на контуре при $x = \beta$ радиальный изгибающий момент и поперечная сила равны нулю:

$$M_1(\beta) = 0,\ Q_1(\beta) = 0. \quad (23)$$

Внесём в граничные условия (23) зависимости (20) и (21) и получим следующие выражения:

$$Q_0 - Db^3[A\upsilon_0'(\beta) - Bu_0'(\beta)] = 0, \quad (24)$$
$$M_0 - Db^3[A\upsilon_0^{(M)}(\beta) + Bu_0^{(M)}(\beta)] = 0. \quad (25)$$

Отсюда определим коэффициенты A и B; имеем:

$$A = \frac{1}{Db^2}\frac{M_0 u_0'(\beta) + Q_0 \ell u_0^{(M)}(\beta)}{u_0'(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta) + \upsilon_0'(\beta)u_0'^{(M)}(\beta)}, \quad (26)$$

$$B = \frac{1}{Db^2} \frac{M_0 \upsilon_0'(\beta) - Q_0 \ell \upsilon_0^{(M)}(\beta)}{u_0'(\beta)\upsilon_0'^{(M)}(\beta) + \upsilon_0'(\beta)u_0^{(M)}(\beta)}. \quad (27)$$

Далее внесём (26) и (27) в выражения (20) и (21) и получим искомое решение. Затем можно приступить к нахождению усилий.

б) Пластина с зажатым наружным контуром. В этом случае

$$\text{при } x = \beta \quad w = 0,\ \frac{dw}{dx} = 0.$$

Коэффициенты A и B определяются из следующих выражений:

$$\overline{w}_0 + Au_0(\beta) + B\upsilon_0(\beta) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\varphi_0}{b} + Au_0'(\beta) + B\upsilon_0'(\beta) = 0, \quad (29)$$

и, следовательно,

$$A = \frac{\overline{w}_0 \upsilon_0'(\beta) - \varphi_0 \ell \upsilon_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)u_0'(\beta) - u_0(\beta)\upsilon_0'(\beta)}, \quad (30)$$

$$B = \frac{\overline{w}_0 u_0'(\beta) - \varphi_0 \ell u_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)u_0'(\beta) - u_0(\beta)\upsilon_0'(\beta)}. \quad (31)$$

в) Пластина с шарнирным опиранием по контуру. В этом случае граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x = \beta \quad w = 0,\ G_1 = 0,$$

$$\overline{w}_0 + Au_0(\beta) + B\upsilon_0(\beta) = 0, \quad (32)$$

$$M_0 - Db^2\left[A\upsilon_0^{(M)}(\beta) + Bu_0^{(M)}(\beta)\right] = 0, \quad (33)$$

откуда имеем:

$$A = \frac{\overline{w}_0 u_0^{(M)}(\beta) - \frac{M_0}{Db^2}u_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta) - u_0(\beta)u_0^{(M)}(\beta)},$$

$$B = \frac{\frac{M_0}{Db^2}u_0(\beta) - \overline{w}_0\upsilon^{(M)}(\beta)}{\upsilon_0(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta) - u_0(\beta)u_0^{(M)}(\beta)}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые удалось получить решение задачи об осесимметричном изгибе круглой пластины, лежащей на упругом винклеровском основании, сделанной из материала, обладающего цилиндрической анизотропией. Результат даётся в цилиндрических функциях. К полученному решению применён метод компенсирующих нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коренев Б.Г.** Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 458 с.
2. **Коренева Е.Б.** Аналитические методы расчёта пластин переменной толщины и их практические приложения. – М.: АСВ, 2009. – 240 с.
3. **Koreneva E.B.** Method of Compensating Loads for Solving of a Problems of Unsymmetric Bending of Infinite Ice Slab with Circular Opening. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13(2), 2017, pp. 50-55.
4. **Коренева Е.Б.** Моделирование работы ледовой плиты с отверстием. Решение в функциях Бесселя. // Строительная механика и расчёт сооружений, №3, 2017, с. 20-24.

REFERENCES

1. **Korenev B.G.** Nekotoryye Zadachi Teorii Uprugosti i Teploprovodnosti, Reshayemyye v Besselevykh Funktsiyakh [Some Problems in the Theory of Elasticity and Heat Conduction, Solved in Bessel Functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 458 pages.
2. **Koreneva E.B.** Analiticheskiye Metody Rascheta Plastin Peremennoy Tolshchiny i ikh Prakticheskiye Prilozheniya [Analytical Methods for Calculating Variable Thickness

Plates and Their Practical Applications]. Moscow, ASV, 2009, 240 pages.
3. **Koreneva E.B.** Method of Compensating Loads for Solving of a Problems of Unsymmetric Bending of In-finite Ice Slab with Circular Opening. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13(2), 2017, pp. 50-55.
4. **Koreneva E.B.** Modelirovaniye Raboty Ledovoy Plity s Otverstiyem. Resheniye v Funktsiyakh Besselya [Modeling the Operation of an ice Plate with a Hole. Solution in Bessel Functions]. // Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy, №3, 2017, s. 20-24.

Коренева Елена Борисовна, доктор технических наук, Московское высшее общевойсковое командное орденов Жукова, Ленина и Октябрьской Революции Краснознамённое училище; 109380, Россия, г.Москва, ул. Головачёва, д.2, тел.: +7(499)175-82-45;
E-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.

Elena B. Koreneva, Dr.Sc., Moscow Higher Combined-Arms Command Academy, ul. Golovacheva, 2, 109380, Moscow, Russia, tel. +7(499)175-82-45;
E-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 78-91 (2018)
DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-78-91

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДКИ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТОВОГО МАССИВА, ВЫЗВАННОЙ СООРУЖЕНИЕМ ОБОЛОЧКИ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ

С.Б. Косицын, В.Ю. Акулич
Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Работа направлена на геотехнический прогноз влияния строительства перегонного тоннеля на изменение напряженно-деформированного состояния окружающего грунтового массива, а именно на возникающие при этом осадки на поверхности земли. Работа предполагает как численное, так и аналитическое решения с последующим сравнительным анализом.

Ключевые слова: тоннель, грунтовый массив, геотехника, тоннелепроходческий механизированный комплекс, мульда оседания, плоские и пространственные конечные элементы, контактные конечные элементы

ON ONE NUMERICAL METHOD FOR THE COMPUTING OF SEDIMENTATION OF THE SURFACE OF THE SOIL MASSIVE CAUSED BY THE CONSTRUCTION OF THE SHELL LINING OF THE TUNNEL

Sergey B. Kosytsyn, Vladimir Y. Akulich
Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive work is aimed at the geotechnical forecast of the influence of the construction of the tunnel on the change in the stress-strain state of the surrounding soil mass, namely, the precipitations that arise on the surface of the earth. The work assumes both a numerical and an analytical solution with subsequent comparative analysis.

Keywords: tunnel, soil massif, geotechnics, slurry shield, sedimentation mold, shell and spatial finite elements, contact finite elements

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является геотехнический прогноз влияния строительства перегонного тоннеля на изменение напряженно-деформированного состояния окружающего грунтового массива, а именно на возникающие при этом осадки на поверхности земли.

В процессе ведения работ тоннелепроходческим механизированным комплексом (щитовой проходкой), на участке тоннеля, который не закреплен или частично закреплен, происходит смещение породы в сторону тоннеля. Таким образом, количество породы, которое вынимается из подземного пространства, всегда больше, чем теоретическое, посчитанное из проектного профиля тоннеля. Дополнительный объем породы, извлеченный из подземного пространства, носит название «потерянный объем» и определяется через параметр V, который является отношением между объемами извлеченной породы и самого тоннеля (определенному по внешнему диаметру тоннеля).

Потерянный объем является мерой нарушенности массива проходческими работами и вызывает развитие мульды оседания земной поверхности.

Для решения поставленной задачи необходимо составить такую расчетную модель тоннеля с окружающим его грунтовым массивом, которая позволяла бы учитывать объем дополнительного потерянного грунта, извлеченного из подземного пространства в процессе ведения работ тоннелепроходческим механизированным комплексом, с последующим анализом полученного напряженно-деформированного состояния системы и сравнением результатов с аналитическим методом определения осадок. Моделирование и расчеты произведены в современном конечно-элементном программном комплексе *MSC PATRAN – NASTRAN* в конструктивно нелинейной постановке задачи.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСАДКИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ВЕДЕНИЯ РАБОТ ТОННЕЛЕПРОХОДЧЕСКИМ МЕХАНИЗИРОВАННЫМ КОМПЛЕКСОМ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ В ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКАХ

В основу расчетного комплекса *MSC PATRAN – NASTRAN* положен метод конечных элементов, позволяющий выполнять математическое моделирование процессов, протекающих в грунте. Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния представляются как в табличном, так и в графическом виде [1].

При решении задач методом конечных элементов массив считается сплошным. Условие сплошности удовлетворяется тем, что элементы в процессе деформирования области не теряют контакта друг с другом. Деформирование элемента обусловлено приложением со стороны соседних элементов или внешних воздействий узловых сил, каждая из которых раскладывается на составляющие вдоль координатных осей. В итоге получается уравнение в матричной форме, связывающее известные внешние силы с неизвестными перемещениями узлов через матрицу жесткости элемента. После определения узловых перемещений в соответствии с известными соотношениями теории упругости находятся деформации и напряжения внутри элементов [2, 3, 4].

Проведены расчеты осадок земной поверхности в плоской и пространственной постановках задачи. В табл. 1 представлены основные физико-механические свойства грунтов.

Тоннель запроектирован в монолитном железобетоне из бетона В45 и арматуры А240, А400.

Геометрические характеристики кольца обделки перегонного тоннеля: наружный диаметр – 5800 мм; внутренний диаметр – 5300 мм; средняя длина кольца обделки вдоль тоннеля – 1400 мм; толщина блока – 250 мм; величина расстояния между грунтом и наружной поверхностью обделки составила – 50 мм.

Геометрические схемы плоской и пространственной расчетных моделей разработаны на основании исходных данных по конструктивным решениям проектируемого объекта и данных инженерно-геологических изысканий. В начале, для апробации предлагаемого метода, расчетные модели составлялись для одного тоннеля как в плоской, так и пространственной постановках.

В плоской постановке задачи (рис. 1) для расчета из рассматриваемого участка выделена полоса шириной 1,4 м, равная ширине кольца обделки строящегося тоннеля. Рассмотренная часть тоннеля

Таблица 1. Физико-механические характеристики грунтов.

№	Описание грунтов	Плотность, кг/м^3	Коэффициент Пуассона ν	Модуль деформации E, МПа	Удельное сцепление C, МПа	Угол внутр. трения φ, град.
1	Насыпной грунт	1920	0,3	13	0,015	13
2	Суглинки пылеватые	2080	0,37	22	0,033	21
3	Суглинки песчанистые	2160	0,35	27	0,045	23
4	Суглинки песчанистые	2120	0,35	27	0,046	24
5	Пески пылеватые	2000	0,31	30	0,006	33
6	Пески мелкие	2010	0,3	33	0,004	34

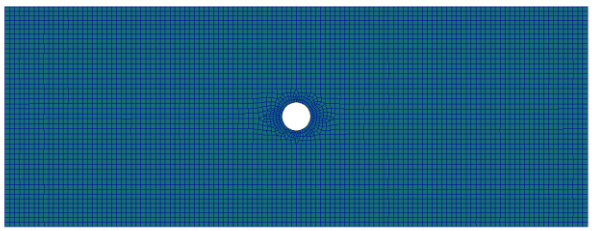


Рисунок 1. Плоская расчетная схема с одним тоннелем.

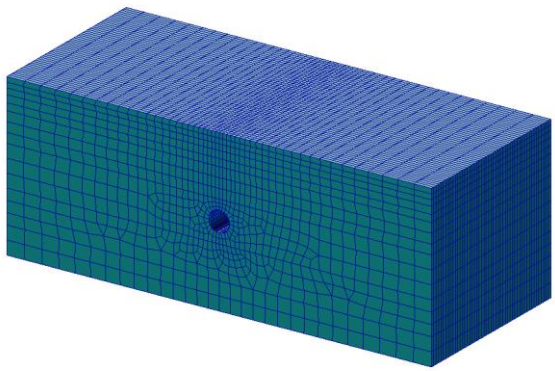


Рисунок 2. Пространственная расчетная схема с одним тоннелем.

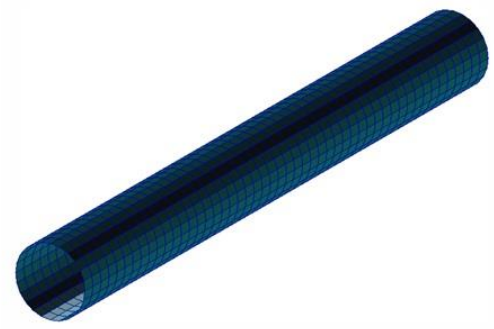


Рисунок 3. Оболочка тоннеля в пространственной расчетной схеме.

смоделирована прямыми балочными конечными элементами с шестью степенями свободы в каждом узле. Области грунта аппроксимированы четырехузловыми плоскими конечными элементами также с шестью степенями свободы в каждом узле.

В пространственной постановке задачи (рис. 2) грунт смоделирован однородным трехмерным массивом. Оболочка аппроксимирована двумерными плоскими четырехузловыми элементами, основанными на гипотезе прямых нормалей, с шестью степенями свободы в каждом узле (рис. 3). Объемный массив, моделирующий грунт, представлен трехмерными конечными элементами в форме четырехузловых тетраэдров и восьмиузловых параллелепипедов [5]. Использование тетраэдров вызвано тем, что в месте расположения отверстия, подкрепленного оболочкой, геометрия массива является сложной.

Для моделирования контакта между внешней стенкой обделки тоннеля и окружающего грунта использовались контактные элементы, позволяющие задавать начальный зазор (в комплексе *NASTRAN* их называют *GAP* элементами), что позволило учесть изъятие дополнительного объема грунта, происходящего при продвижении тоннелепроходческого механизированного комплекса, благодаря созданию зазора между внешней стенкой обделки тоннеля и окружающим грунтом. Эти элементы имели ненулевые длины и стремящиеся к нулю жесткости при растяжении. Их жесткости при сжатии стремились к бесконечности. Величина начального зазора принята равной

50 мм. Расчетная область закреплена от перемещений, нормальных к поверхностям массива, по торцам, с боков и снизу. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели [6, 7, 8].

Расчеты произведены в конструктивно нелинейной постановке (контактные усилия определены методом последовательных приближений) и разбиты на два этапа. На первом этапе определено начальное напряженно-деформированное состояние грунта от его собственного веса (бытовое состояние); на втором этапе определено конечное напряженно-деформированное состояние грунта после возведения тоннеля с нагрузками от собственного веса грунта и веса тоннельной обделки. На рис. 4 и рис. 5 представлены поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате первого и второго этапа расчета для плоской и пространственной расчетной модели соответственно.

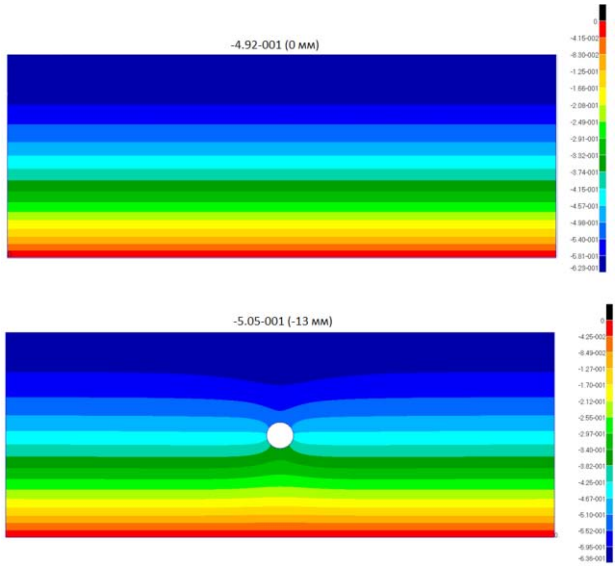


Рисунок 4. Поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате первого и второго этапов расчета соответственно для плоской расчетной модели.

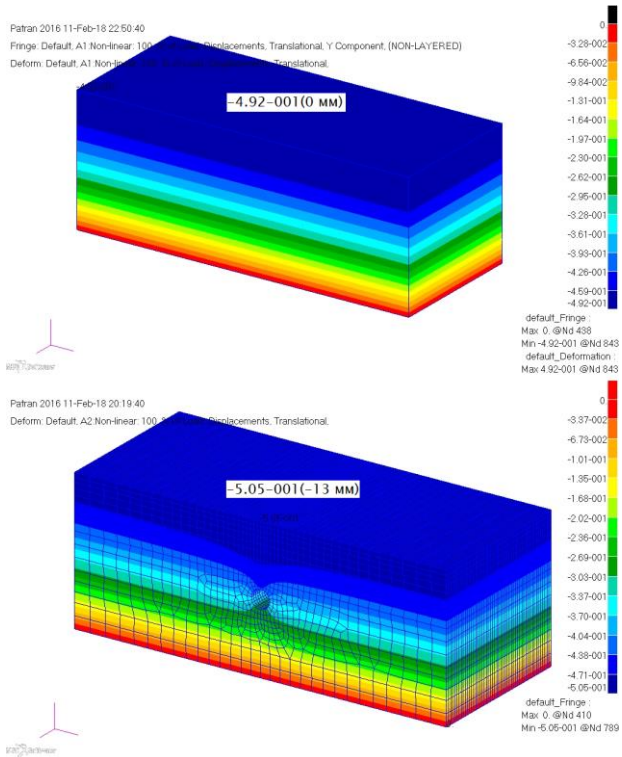


Рисунок 5. Поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате первого и второго этапов расчета соответственно для пространственной расчетной модели.

Максимальная осадка над осью тоннеля после проходки составила 13,0 мм как в плоской, так и в пространственной постановках задачи (получена как разность осадок конечного и бытового состояний).

Усилия, возникающие в контактных *GAP* элементах показаны на рис. 6.

Следует отметить, что при отказе от использования контактных элементов типа *GAP*, которые позволяют учитывать изъятие дополнительного объема грунта (создают зазор), происходящего при продвижении тоннелепроходческого механизированного комплекса, расчётная модель ведёт себя не вполне корректно и даёт несоответствующее действительности поле вертикальных перемещений грунтового массива [9, 10] (поверхность грунта поднимается, а не просаживается, что показано на рис. 7).

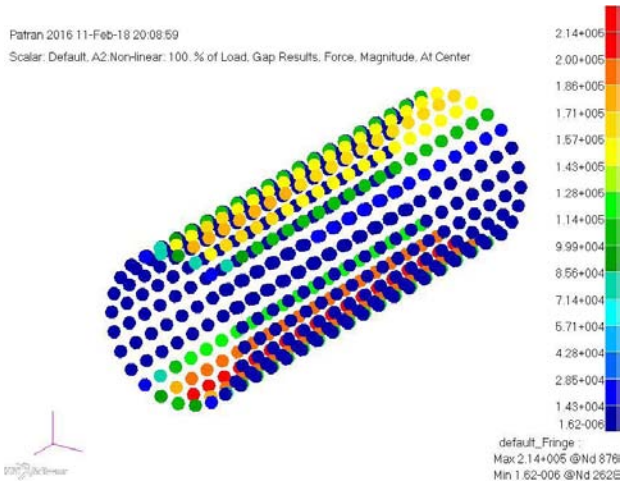


Рисунок 6. Внутренние усилия в контактных GAP элементах.

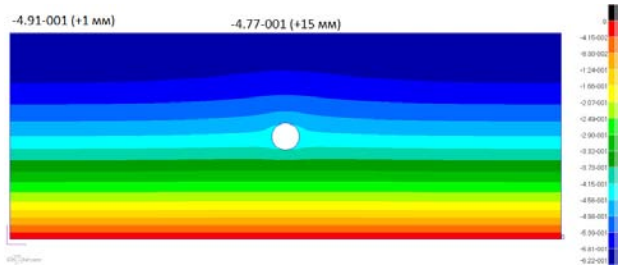


Рисунок 7. Поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве без использования контактных GAP элементов. Подъем поверхности над тоннелем.

Для сравнительного анализа полученного результата произведен расчет осадки земной поверхности при продвижении тоннелепроходческого механизированного комплекса по аналитической методике.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДОК ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗА СЧЕТ «ПОТЕРИ ОБЪЕМА» ГРУНТА

Обобщенный полуэмпирический метод определения осадки земной поверхности для случая строительства одиночного тоннеля в однородных породах был предложен Attewell и Woodman [11, 12]. Мульда оседания земной поверхности (рис. 8), образующаяся в результате строительства тоннеля, может быть описана зависимостью:

$$S = \frac{V_s}{\sqrt{2\pi}i_x} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}} \left[G\left(\frac{y-y_i}{i_x}\right) - G\left(\frac{y-xy_f}{i_x}\right) \right] \quad (1)$$

где S – величина осадки земной поверхности в точке (x, y); x – расстояние от рассматриваемой точки до продольной оси тоннеля; y – координата точки по продольной оси тоннеля; V_s – полезный объем мульды оседания земной поверхности; y_i – начальная позиция тоннеля; y_f – расположение лба забоя; i_x – ширина мульды оседания, $i_x=kZ$; k – безразмерная константа, характеризующая параметры породы; Z – расстояние от поверхности земли до продольной оси тоннеля; G – функция распределения:

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha; \quad \alpha = \frac{y-y_i}{i} \quad (2)$$

Рассматривая характер мульды оседания земной поверхности (рис. 8), можно выделить интересующее нас поперечное направление развития осадок над забоем тоннеля.

Peck R.B. [13, 14] показал, что мульду оседания земной поверхности в поперечном направлении можно описать функцией Гаусса, и такое описание получило широкое распространение при анализе вертикальных осадок в поперечном направлении:

$$S_v(x) = S_{v,\max} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}} \quad (3)$$

где $S_{v,max}$ – величина осадки земной поверхности над продольной осью тоннеля; x – расстояние от центра тоннеля до рассматриваемой точки; i_x – параметр ширины мульды, представляющий собой стандартное отклонение функции Гаусса.

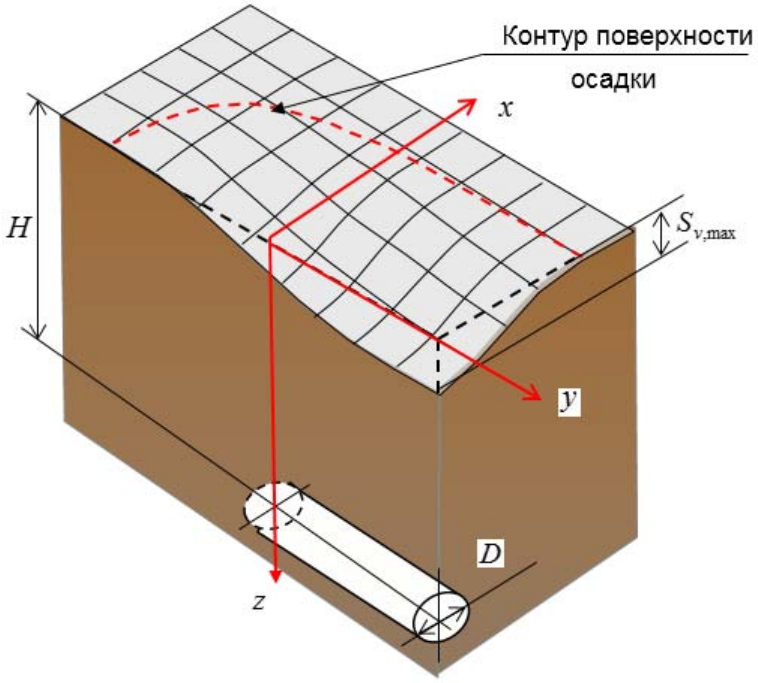


Рисунок 8. Форма мульды оседания земной поверхности, вызванная процессом продвижения тоннелепроходческого комплекса.

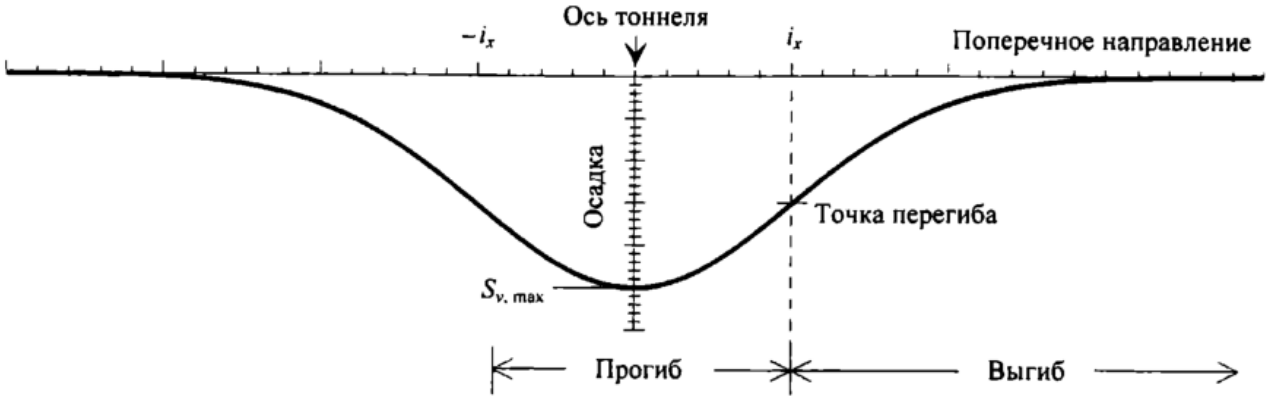


Рисунок 9. Осадка земной поверхности в поперечном направлении при проходке тоннелепроходческого комплекса.

Типовой характер мульды оседания земной поверхности в поперечном направлении показан на рис. 9. Максимальный наклон мульды оседания расположен в точке перегиба, которая располагается на расстоянии i_x от центральной продольной оси тоннеля. Точка перегиба отделяет зону выгиба от зоны прогиба [15,16].

Площадь области, ограниченной Гауссовой функцией, по определению равна единице. Следовательно, площадь, определяемая кривой мульды осадки (3) представленной выше, определяется формулой:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_\upsilon dx \qquad (4)$$

где V_s – объем мульды осадки на единицу длины тоннеля.

В грунтах с малой водопроницаемостью смещение частиц грунта к тоннельной обделке происходит без дренирования. Другими словами, зазор между тоннельной обделкой и границей разработанной полости полностью заполняется грунтом. Поэтому объем поверхностной мульды осадки равен объему грунта, удаленному сверх объема, занимаемого тоннелем. Обычно он определяется как отношение этого дополнительного (потерянного) объема к объему тоннеля (на единицу его длины):

$$V_{sp} = V_L \cdot \frac{\pi D^2}{4} \qquad (5)$$

где V_L – потеря объема; D – внешний диаметр тоннеля.

На практике выражение (5) применяется в процентах.

Учитывая зависимости (4) и (5), выражение (3) можно преобразовать к виду:

$$S_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{V_L D^2}{4 i_x} e^{-\frac{x^2}{2i_x^2}} \qquad (6)$$

Для данного диаметра тоннеля D форма и величина поперечной кривой осадки зависит только от потери объема грунта V_L и ширины мульды i_x. Эти два критических параметра будут обсуждены более подробно далее.

«Потеря объёма» грунта V_L равна разности выбранного грунта и теоретического объёма тоннеля, приходящейся на единицу длины тоннеля.

При строительстве тоннелей щитовым способом на деформации поверхности грунта влияют следующие факторы: перебор и выпуски породы в забое; передвижение щитов даже с небольшим углом атаки; увеличенный строительный зазор между обделкой и грунтовым массивом; податливость обделки; деформации щитов и их вибрации.

Примечание: перебор – выработка большего объёма породы по сравнению с объёмом тоннеля; выпуски – превышенное количество тампонажного раствора или породы за тоннельную обделку.

Все эти факторы определяют величину «потери объема» грунта, от которой в большей мере зависят осадки дневной поверхности.

Современная технология проходки позволяет ограничить перемещения грунта до такой степени, чтобы ущерб от него подземным сооружениям и сооружениям на поверхности был минимальным. Тем не менее, полностью избежать воздействия щитовой проходки на окружающую среду не представляется возможным.

Для оценки ширины впадины поверхности грунта удобно использовать параметр мульды осадки i_x. В поперечном сечении кривой осадки это расстояние от точки перегиба (то есть точки максимального наклона) до оси тоннеля. O`Reilly и New [17, 18] выполнили большое количество замеров по этим кривым при проходке тоннелей в глинистых породах. В результате обработки экспериментальных данных ими была получена следующая линейная зависимость параметра ширины мульды i_x от глубины заложения тоннеля z_0:

$$i_x = 0{,}43 z_0 + 1{,}1 \qquad (7)$$

На основании анализа экспериментальных данных авторы работы [17, 18] сделали вывод о том, что для глинистых грунтов во многих случаях значение коэффициента K, определяющего точку перегиба, можно определять по формуле K=0,5. В то же время они указали, что эта величина может меняться в диапазоне 0,4 – 0,7 для жесткой и мягкой глины соответственно. Как видно из рис. 10 простая линейная функция достаточно хорошо описывает зависимость, полученную экспериментальным путем в полевых условиях.

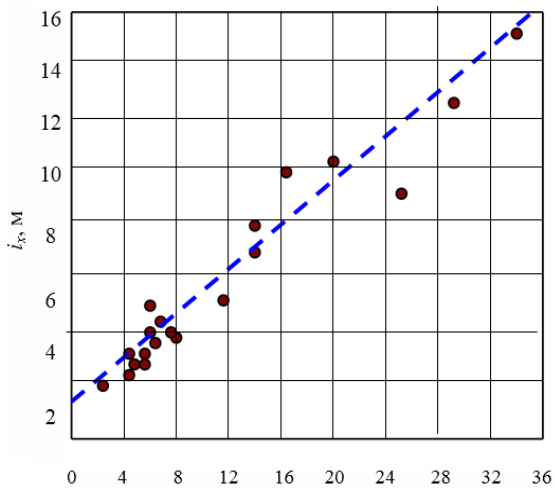


Рисунок 10. Зависимость расстояний от точек перегиба i_x поверхности осадки до оси тоннеля от глубины тоннеля z_0.

Тем не менее, для удобства использования с достаточной для инженерных расчетов точностью авторы [17, 18] упростили уравнение (7), приведя его к виду:

$$i_x = Kz_0 \qquad (8)$$

Позднее Rankin [19] на основании большого количества данных, полученных в полевых условиях, подтвердил величину K=0,5. Таким образом получается простая зависимость:

$$i_x = 0{,}5z_0 \qquad (9)$$

Кроме полевых замеров Kimura и Mair [20] были выполнены испытания на центрифуге. Результаты испытаний показали, что величина K=0,5 не зависит от жесткости тоннельной конструкции. Авторы [20] пришли к выводу, что значение K не зависит от способа проходки тоннеля.

Для сравнительного анализа полученного результата методом конечных элементов

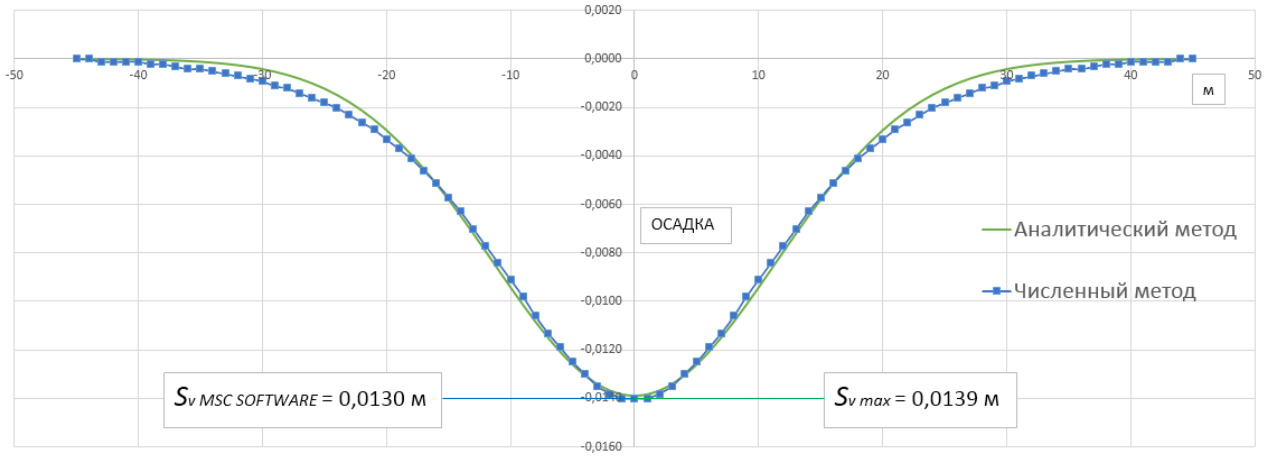


Рисунок 11. Кривые мульды осадков, полученные аналитическим и численным методами.

был произведен расчет осадки земной поверхности при проходке тоннелепроходческого механизированного комплекса по аналитической методике изложенной выше.

Диаметр оси оболочки тоннельной обделки: D = 5,8 м = 5800 мм;

Глубина заложения оси тоннеля z_0 = 22,7 м =22700 мм;

Параметр i_x = 11350 мм;

Объем мульды осадки на единицу длины тоннеля:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_v dx = \sqrt{2\pi} i_x S_{v,\max} = 28443 \cdot S_{v,\max} \qquad (10)$$

Объем «потерянного грунта» на единицу длины тоннеля принимается в размере 0,015 (1,5%) объема тоннеля V_L=0,015.

Объем «потерянного грунта» на единицу длины тоннеля:

$$V_{sp} = V_L \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 396111\,(мм^2) \qquad (11)$$

Приравнивая объем мульды осадки объему «потерянного грунта»:

$$28443 \cdot S_{v,\max} = 396111 \qquad (12)$$

получим максимальный размер осадки поверхности:

$$S_{v,\max} = \frac{396111}{28443} = 13{,}9\,(мм) \qquad (13)$$

В результате аналитического расчета максимальная осадка поверхности земли над осью тоннеля составила:

$$S_{v,\max} = 13{,}9\,(мм) \qquad (14)$$

Кривые мульды осадок, полученные аналитическим и численным методами, показаны на рис. 11. Расхождение составляет 6,4% от значения осадки, полученной в *MSC PATRAN – NASTRAN*. Это говорит о хорошей сходимости результатов численного и аналитического расчетов и о корректной работе построенной конечноэлементной модели.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДКИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ КАЛИНИНСКО-СОЛНЦЕВСКОЙ ЛИНИИ МЕТРОПОЛИТЕНА

Предложенный метод нашел применение при определении осадок земной поверхности, расположенной в пределах зоны влияния строительства перегонных тоннелей Калининско-Солнцевской линии Московского метрополитена.

Геометрические схемы плоской и пространственной расчетных моделей для решения поставленной задачи разработаны на основании исходных данных по конструктивным решениям проектируемого объекта и данных инженерно-геологических изысканий, приведенных в табл. 1.

Плоская и пространственная расчетные модели показаны на рис. 12 и рис.13 соответственно.

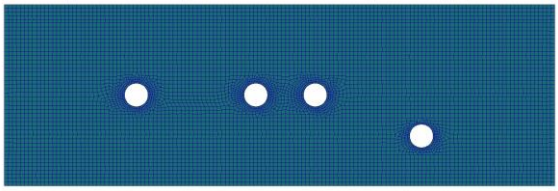


Рисунок 12. Плоская расчетная схема с четырьмя проектируемыми тоннелями линии метрополитена.

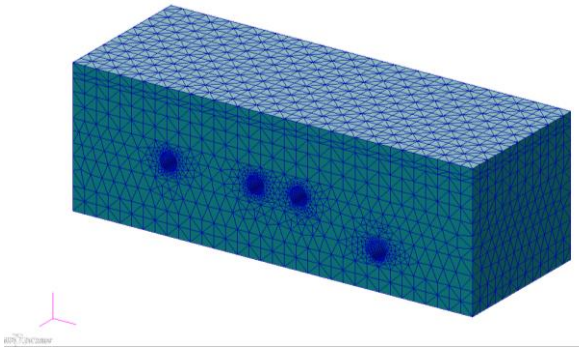


Рисунок 13. Пространственная расчетная схема с четырьмя проектируемыми тоннелями линии метрополитена.

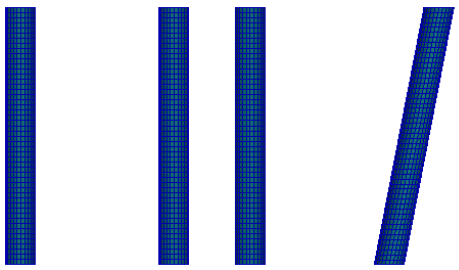


Рисунок 14. Расположение четырех проектируемых тоннелей линии метрополитена. Вид сверху.

Один из четырех проектируемых тоннелей линии метрополитена расположен под углом относительно других тоннелей в горизонтальной плоскости (рис. 14). Эту особенность позволила учесть пространственная расчетная модель.

Расчеты произведены в конструктивно нелинейной постановке (контактные усилия определены методом последовательных приближений) и разбиты на два этапа. На первом этапе определено начальное напряженно-деформированное состояние грунта от его собственного веса (бытовое состояние); на втором этапе определено конечное напряженно-деформированное состояние грунта после возведения тоннеля с нагрузками от собственного веса грунта и веса тоннельной обделки. На рис. 15 и рис. 16 представлены поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате второго этапа расчета для плоской и пространственной расчетной модели соответственно.

Максимальная осадка над осью тоннеля после проходки составила 23,0 мм как в плоской, так и в пространственной постановках задачи.

4. ВЫВОДЫ

Разработан приближенный численный способ учета пропуска грунта в разрабатываемую область тоннеля. Для одного тоннеля численные результаты сопоставлены с результатами, полученными известным аналитическим методом. Расхождение максимальной осадки (над осью тоннеля) составило 6,4% от значения осадки, полученной в комплексе *MSC PATRAN – NASTRAN*. Это говорит о хорошей сходимости результатов численного и аналитического расчетов и о корректной работе построенной конечноэлементной модели.

Работоспособность предложенного метода проверена на примере расчета четырех перегонных тоннелей линии московского метрополитена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров А.В., Потапов В.Д.** Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990 – 400 с.

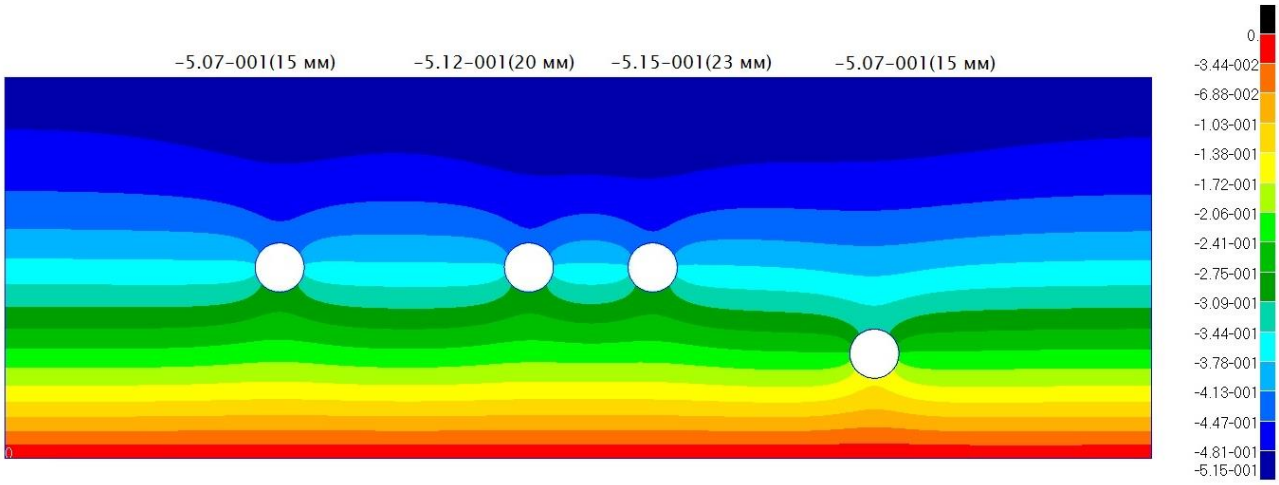


Рисунок 15. Поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате второго этапа расчета плоской расчетной модели.

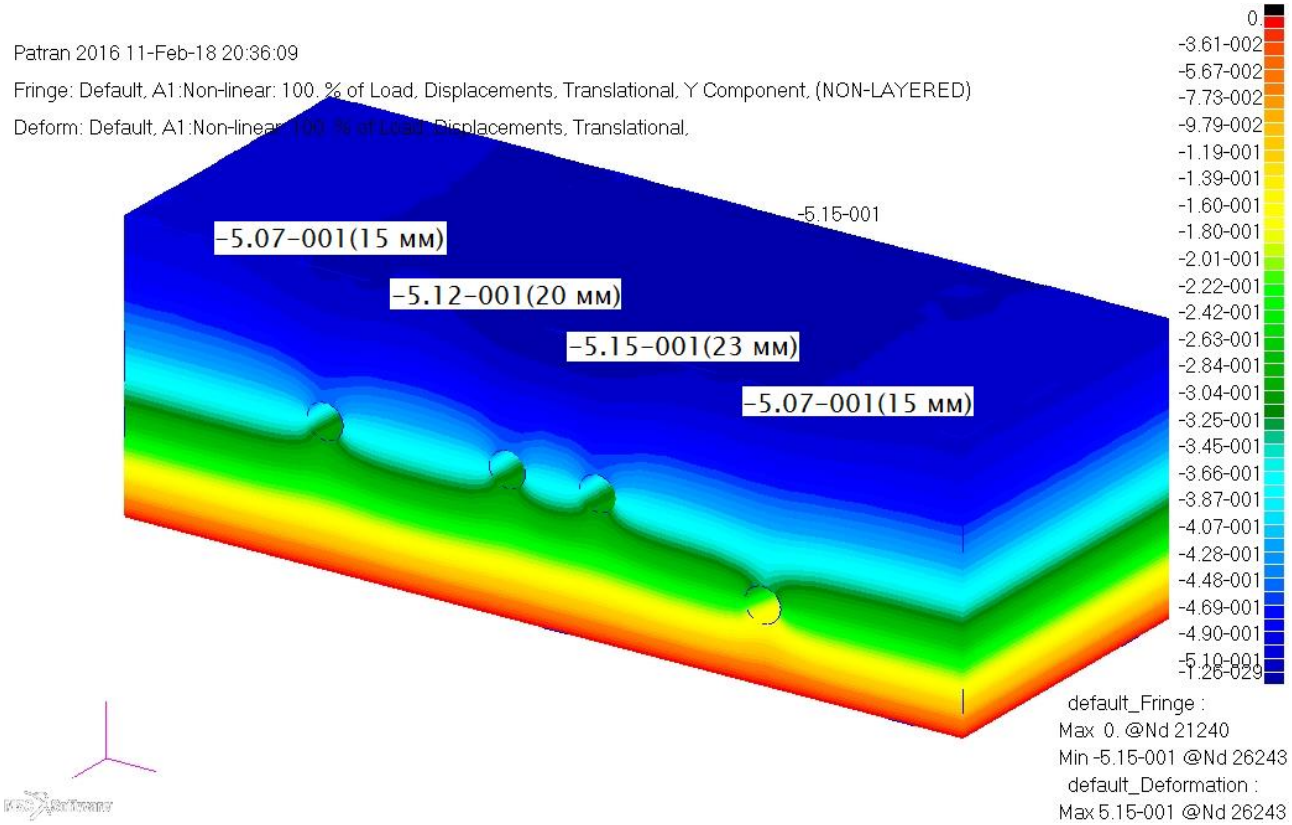


Рисунок 16. Поля вертикальных перемещений в грунтовом массиве в результате второго этапа расчета пространственной расчетной модели.

2. **Габбасов Р.Ф.** К расчету гибких труб на совместное действие внешней нагрузки и внутреннего давления с учетом отпора грунта. // Гидротехническое строительство, 1970, №10, с. 17-19.
3. **Клейн Г.К.** Расчет подземных трубопроводов. – М.: Издательство литературы по строительству, 1969. – 240 с.
4. **Косицын С.Б., Долотказин Д.Б.** Расчет стержневых систем, взаимодействующих с упругим основанием, методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC/ NASTRAN FOR WINDOWS. – М.: МИИТ, 2004 – 116 с.
5. **Косицын С.Б., Чан Суан Линь.** Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 2014, Volume 10, Issue 1, с. 72-78.
6. **Леонтьев Н.Н.** Практический метод расчета тонкостенной цилиндрической трубы на упругом основании. // Тр. Московского инженерно-строительного института, Из. 27. – М.: 1957, с. 47-69.

7. **Прево Р.** Расчет на прочность трубопроводов заложенных в грунт. – М.: Стройиздат, 1964. – 123 с.
8. **Шагивалеев, К.Ф.** Расчет замкнутой цилиндрической оболочки, заполненной сыпучим материалом, на радиальную нагрузку. // Известия вузов. Строительство, 2003, №2, с. 20-23.
9. **Шапошников, Н.Н.** Расчет круговых тоннельных обделок на упругом основании, характеризуемом двумя коэффициентами постели. // Научн. тр. Московского института инженеров железнодорожного транспорта, 1961, Вып. 131, с. 296-305.
10. **Attewell P.B.** Ground Movements Caused by Tunnelling in Soil. // Large ground movements and structures. London, Pentech Press, 1978, pp. 120-140.
11. **Attewell P.B., Woodman J.P.** Predicting the Dynamics of Ground Settlement and its Derivatives Caused by Tunneling in Soil. // Ground Engineering, 1982, pp. 75-83.
12. **Attewell P.B. Yeates J., Selby A.R.** Soil Movements Induced by Tunneling and Their Effects on Pipelines and Structures. Glasgo, Blackie, 1986, 180 pages.
13. **Attewell P.B., Selby A.R.** Tunnelling in Compressible Soils: Large Ground Movements and Structural Implications. // Tunnelling and Underground Space Technology, 1989, No. 4, pp. 41-54.
14. **Broms B.B., Bennermark H.** Stability of Clay in Vertical Openings. // Journal of Soil Mechanics and Foundations. ASCE, 1967, – 193 pages.
15. **Davis E.H., Gunn M.J., Mair R.J., Seneviratne H.N.** The Stability of Shallow Tunnels and Underground Openings in Cohesive Material. Geotechnique, 1980, 370 pages.
16. **Lake L.M., Rankin W.J., Hawley J.** Prediction and Effects of Ground |Movements Caused by Tunnelling in Soft Ground Beneath Urban Areas. CIRIA Funders Report, 1992, pp. 80-91.
17. **Mair R.J., Gunn M.J., O'Reilly M.P.** Ground Movements Around Shallow Tunnels in Soft Clay. // Proc. 10-th ICSMFE, Vol. l. Rotterdam, Balkema, 1981, 245 pages.
18. **O'Reilly M.P., New B.** Settlement Above Tunnels in the United Kingdom – Their Magnitude and Prediction. // Proc. Int. Symposium Tunnelling-82. London, Institution of Mining and Metallurgy, 1982, 278 pages.
19. **Peck R.B.** Deep Excavations and Tunnelling in Soft Ground. // Proc. 7-th ICSMFE. Mexico, 1969, pp. 146-151.
20. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method. 5th edition. Volume 2: Solid mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000, 479 pages.

REFERENCES

1. **Alexanduov A.V., Potapov V.D.** Osnovy Teorii Uprugosti i Plastichnosti [Foundations of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 2000, 400 pages.
2. **Gabbasov R.F.** K Raschetu Gibkikh Trub na Sovmestnoye Deystviye Vneshney Nagruzki i Vnutrennego Davleniya s Uchetom Otpora Grunta [To Calculation of the Flexible Pipes on Joint Action of the External Load and Internal Pressure Given the Resistance of the Soil]. // Hydraulic Engineering Construction, 1970, No. 10, pp. 17-19.
3. **Kleyn G.K.** Raschet Podzemnykh Truboprovodov [Calculation of Underground Pipelines]. Moscow, Publisher of House of Literature on Construction, 1969, 240 pages.
4. **Kositsyn S.B., Dolotkazin D.B.** Raschet Sterzhnevykh Sistem, Vzaimodeystvuyushchikh s Uprugim Osnovaniyem, Metodom Konechnykh Elementov s Ispolzovaniyem Programmnogo Kompleksa MSC/ NASTRAN FOR WINDOWS [Calculation

of beam systems interacting with an elastic foundation by finite element method using the software complex MSC/NASTRAN FOR WINDOWS]. Moscow, MIIT, 2004, 116 pages.

5. **Kositsyn S.B., Tran Xuan Linh.** Chislennyy Analiz Napryazhenno-Deformirovannogo Sostoyaniya Ortogonalno Peresekayushchikhsya Tsilindricheskikh Obolochek bez Ucheta i s Uchetom ikh Odnostoronnego Vzaimodeystviya s Okruzhayushchim Massivom Grunta [Numerical Analysis of Stress – Strain State of Orthogonal Intersecting Cylindrical Shells With and Without Taking into Account their Unilateral Interaction With the Surrounding Soil. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014, Volume 10, Issue 1, pp. 72-78.
6. **Leontiev N.N.** Prakticheskiy Metod Rascheta Tonkostennoy Tsilindricheskoy Truby na Uprugom Osnovanii [A Practical Method of Calculation of Thin-Walled Cylindrical Pipe on an Elastic Foundation. // Proc. of Moscow construction engineering university, 1957, Issue 27, pp. 47-69.
7. **Prevo R.** Raschet na Prochnost Truboprovodov Zalozhennykh v Grunt [Strength calculation of pipelines laid in the ground]. Moscow, Stroyizdat, 1964, 123 pages.
8. **Shagivaleev K.F.** Raschet Zamknutoy Tsilindricheskoy Obolochki, Zapolnennoy Sypuchim Materialom, na Radialnuyu Nagruzku [The calculate a closed cylindrical shell filled with loose material on radial load]. // Proc. of universities. Construction, 2003, No. 2, pp. 20-23.
9. **Shaposhnikov N.N.** Raschet Krugovykh Tonnelnykh Obdelok na Uprugom Osnovanii, Kharakterizuyemom Dvumya Koeffitsiyentami Posteli [Calculation of Circular Tunnel Linings in Elastic Foundation Characterized by the Two Coefficients of Elastic Foundation]. // Scientific Proc. of Moscow state university of railway engineering, 1961, Issue 131, pp. 296-305.
10. **Attewell P.B.** Ground Movements Caused by Tunnelling in Soil. // Large ground movements and structures. London, Pentech Press, 1978, pp. 120-140.
11. **Attewell P.B., Woodman J.P.** Predicting the Dynamics of Ground Settlement and its Derivatives Caused by Tunneling in Soil. // Ground Engineering, 1982, pp. 75-83.
12. **Attewell P.B. Yeates J., Selby A.R.** Soil Movements Induced by Tunneling and Their Effects on Pipelines and Structures. Glasgo, Blackie, 1986, 180 pages.
13. **Attewell P.B., Selby A.R.** Tunnelling in Compressible Soils: Large Ground Movements and Structural Implications. // Tunnelling and Underground Space Technology, 1989, No. 4, pp. 41-54.
14. **Broms B.B., Bennermark H.** Stability of Clay in Vertical Openings. // Journal of Soil Mechanics and Foundations. ASCE, 1967, – 193 pages.
15. **Davis E.H., Gunn M.J., Mair R.J., Seneviratne H.N.** The Stability of Shallow Tunnels and Underground Openings in Cohesive Material. Geotechnique, 1980, 370 pages.
16. **Lake L.M., Rankin W.J., Hawley J.** Prediction and Effects of Ground |Movements Caused by Tunnelling in Soft Ground Beneath Urban Areas. CIRIA Funders Report, 1992, pp. 80-91.
17. **Mair R.J., Gunn M.J., O'Reilly M.P.** Ground Movements Around Shallow Tunnels in Soft Clay. // Proc. 10-th ICSMFE, Vol. l. Rotterdam, Balkema, 1981, 245 pages.
18. **O'Reilly M.P., New B.** Settlement Above Tunnels in the United Kingdom – Their Magnitude and Prediction. // Proc. Int. Symposium Tunnelling-82. London, Institution of Mining and Metallurgy, 1982, 278 pages.

19. **Peck R.B.** Deep Excavations and Tunnelling in Soft Ground. // Proc. 7-th ICSMFE. Mexico, 1969, pp. 146-151.
20. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method. 5th edition. Volume 2: Solid mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000, 479 pages.

Косицын Сергей Борисович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73;
E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru.

Акулич Владимир Юрьевич, аспирант кафедры «Теоретическая механика» Российского университета транспорта (МИИТ); 127994, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9; тел./факс +7(499) 978-16-73;
E-mail: 79859670635@yandex.ru.

Sergey B. Kosytsyn, Advisor of RAASN, Dr. Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, Obrazcova Street, 9b9; phone/fax: +7(499) 978-16-73; E-mail: kositsyn-s@yandex.ru, kositsyn-s@mail.ru.

Vladimir Y. Akulich, PhD student of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, Obrazcova Street, 9b9; phone/fax: +7(499) 978-16-73;
E-mail: 79859670635@yandex.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-92-101

CALCULATION OF LONG-TERM FILTRATION IN A POROUS MEDIUM

Ludmila I. Kuzmina[1], Yuri V. Osipov[2], Nikita V. Vetoshkin[2]
[1] National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA
[2] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The filtration problem in a porous medium is an important part of underground hydromechanics. Filtration of suspensions and colloids determines the processes of strengthening the soil and creating waterproof walls in the ground while building the foundations of buildings and underground structures. It is assumed that the formation of a deposit is dominated by the size-exclusion mechanism of pore blocking: solid particles pass freely through large pores and get stuck at the inlet of pores smaller than the diameter of the particles. A one-dimensional mathematical model for the filtration of a monodisperse suspension includes the equation for the mass balance of suspended and retained particles and the kinetic equation for the growth of the deposit. For the blocking filtration coefficient with a double root, the exact solution is given implicitly. The asymptotics of the filtration problem is constructed for large time. The numerical calculation of the problem is carried out by the finite differences method. It is shown that asymptotic approximations rapidly converge to a solution with the increase of the expansion order.

Keywords: filtration, porous medium, suspended and retained particles, mathematical model, asymptotics

РАСЧЕТ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Л.И. Кузьмина[1], Ю.В. Осипов[2], Н.В. Ветошкин[2]
[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ
[2] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача фильтрации в пористой среде – важная составная часть подземной гидромеханики. Задачи фильтрации суспензий и коллоидов описывают процессы укрепления грунта и создания водонепроницаемых стен в грунте при строительстве фундаментов зданий и подземных сооружений. Предполагается, что при образовании осадка основную роль играет механико-геометрический механизм блокирования пор: твердые частицы беспрепятственно проходят через большие поры и застревают на входе пор, размеры которых меньше диаметра частиц. Одномерная математическая модель фильтрации монодисперсной суспензии включает уравнение массообмена взвешенных и осажденных частиц и кинетическое уравнение роста осадка. Для блокирующего коэффициента фильтрации с двукратным корнем приводится точное решение в неявном виде. Строится асимптотика задачи фильтрации при большом значении времени. Численный расчет задачи выполнен методом конечных разностей. Показано, что с ростом порядка асимптотические приближения быстро сходятся к решению.

Ключевые слова: фильтрация, пористая среда, взвешенные и осажденные частицы, математическая модель, асимптотика

1. INTRODUCTION

The filtration of suspension in a porous medium is one of the most important problems of underground hydromechanics. The transport and retention of suspended particles in the pores of soil and rock are actual for the oil industry,

strengthening of foundations, cleaning of surface waters and liquid industrial wastes [1-3]. The nature of filtration of the suspension in a porous medium depends on the composition of the fluid, the material of the porous medium, the ratio of the dimensions of the suspended particles and pores. We assume that the electrostatic and gravitational forces, the viscosity of the liquid, and the diffusion of the particles do not have a significant effect on the filtration process. If the particle and pore size distributions overlap, then the main mechanism of particle capture is size-exclusion interaction of particles and pores: the suspended particles of the suspension are freely transferred by the fluid flow through the large pores and get stuck in the small pore throats [4,5].

The paper considers the filtration of identical solid suspended particles in a homogeneous porous medium. It is assumed that the distribution of the pore sizes is constant on each cross-section of the framework of the porous medium. A one-dimensional model of filtration, including the equation of mass transfer of suspended and retained particles and the kinetic equation of the deposit growth, is used below. The conditions of a constant concentration of suspended particles at the porous medium inlet and the absence of suspended and retained particles in a porous medium at the initial time determine a unique solution of the problem.

Some mathematical models of filtration have exact analytical solution [6-8]. In the absence of exact solutions, an asymptotics can be constructed [9-11]. If analytical solutions are unknown, numerical methods are used [12-15].

The exact solution of the filtration problem for a quadratic filtration coefficient with a multiple root is obtained in the paper. Since the solution is given by an implicit formula, an asymptotics is constructed to determine the properties of the solution for large time. It is shown that general limit conditions for the solution are insufficient to obtain an asymptotic expansion for $t \to \infty$, so it is necessary to use the exact solution for construction of the asymptotics.

In Section 2 a mathematical model of the filtration problem is presented, the exact solution of the problem is obtained in Section 3. In Section 4, asymptotics is constructed for large time; the results of numerical calculations are given in Section 5. Conclusion finalize the paper in Section 6.

2. MATHEMATICAL MODEL

The one-dimensional filtration problem of a monodisperse suspension in a porous medium is considered in a half-strip

$$\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ t > 0\}.$$

The mathematical model of the filtration problem includes a hyperbolic system of two first-order equations with unknown concentrations of suspended particles $C(x,t)$ and retained particles $S(x,t)$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C; \quad (2)$$

with boundary and initial conditions

$$C\big|_{x=0} = 1; \quad (3)$$

$$C\big|_{t=0} = 0; \quad S\big|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Here $\Lambda(S)$ is a decreasing nonnegative function, which is called the filtration coefficient.

The inconsistency of conditions (3), (4) at the origin leads to the discontinuity of the solution. The discontinuity line $t = x$ is called the concentrations front of the suspended and retained particles. It is a mobile boundary of two phases - a suspension and an empty porous medium. Before the concentrations front in the domain

$$\Omega_0 = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\ 0 < t < x\}$$

the solution is zero; in the domain

$$\Omega_S = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\ t > x\}$$

the solution is positive. At the front $t = x$, the solution $C(x,t)$ has a strong discontinuity (the suspended particles concentration has a gap); the solution $S(x,t)$ has a weak discontinuity (the retained particles concentration is continuous, but has a break, that is, a derivative jump occurs).

During the filtration, the retained particles concentration increases, and the number of free small pores of the porous medium is reduced. With prolonged filtration, more and more suspended particles pass unobstructed through the large pores without precipitation, and the growth rate of the retained particles concentration slows down. When all small pores are blocked by the particles, the formation of the deposit ceases, and the suspended particles pass freely through the porous medium. The maximum value of the retained particles concentration $S_{\max}$ is the minimum positive root of $\Lambda(S)$. Such filtration coefficient is called a blocking coefficient.

Consider the third-order polynomial with a double root

$$\Lambda(S) = (1-S)^2 + a(1-S)^3,\ a > 0. \qquad (5)$$

Below, the exact solution of the problem (1) - (4) with the blocking filtration coefficient (5) is constructed by the methods used in [16, 17].

3. EXACT SOLUTION

First, we determine the solution at the porous medium inlet $x = 0$. According to (3), equation (2) takes the form

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (1-S)^2 + a(1-S)^3. \qquad (6)$$

Division of the variables and integration with respect to t yields

$$\int_0^t \frac{\partial S / \partial t}{(1-S)^2 + a(1-S)^3}\, dt = t. \qquad (7)$$

Using the initial condition (4), the integral in the left side of (7) can be written in the form

$$\int_0^{S_0} \frac{dS}{(1-S)^2 + a(1-S)^3} = t \qquad (8)$$

Calculation of the integral in the left side of (8) gives

$$\int_0^{S_0} \left(-\frac{a}{(1-S)} + \frac{1}{(1-S)^2} + \frac{a^2}{(1+a-aS)} \right) dS = \left(a\ln(1-S) + \frac{1}{1-S} - a\ln(1+a-aS) \right)\Big|_0^{S_0}. \qquad (9)$$

The solution $S_0(t)$ at the porous medium inlet is determined in implicit form

$$a\ln\left(\frac{(1-S_0)(1+a)}{1+a-aS_0} \right) + \frac{S_0}{1-S_0} = t. \qquad (10)$$

Now the solution for $x > 0$ can be obtained. From equation (2)

$$C = \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)}. \qquad (11)$$

Substitution of (11) into equation (1) yields

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad (12)$$

Using the equality

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S/\partial t}{\Lambda(S)}\right)=\frac{1}{\Lambda(S)}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}- \\ -\frac{\Lambda'(S)}{\Lambda^2(S)}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S/\partial x}{\Lambda(S)}\right), \quad (13)$$

the equation (12) can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S/\partial t}{\Lambda(S)}+\frac{\partial S/\partial x}{\Lambda(S)}+S\right)=0. \quad (14)$$

Integration of (14) with respect to the variable t gives

$$\frac{\partial S/\partial t}{\Lambda(S)}+\frac{\partial S/\partial x}{\Lambda(S)}+S=K(x). \quad (15)$$

Since the solution is zero in the domain Ω_0, the function $S(x,t)$ and its partial derivatives are zero for $t=0$. Then the integration constant is determined from (15): $K(x)=0$. Equation (15) takes the form

$$\frac{\partial S/\partial t}{\Lambda(S)}+\frac{\partial S/\partial x}{\Lambda(S)}+S=0. \quad (16)$$

Multiplication of (16) by $\Lambda(S)$ yields

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}+S\Lambda(S)=0. \quad (17)$$

Denote the characteristic variables

$$\tau=t-y,\quad x=y. \quad (18)$$

The partial derivatives in new variables

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial \tau};\quad \frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial S}{\partial \tau}.$$

Equation (17) takes the form

$$\frac{\partial S}{\partial y}+S\Lambda(S)=0. \quad (19)$$

Division of the variables and integration of equation (19) with respect to the variable y gives

$$\int_0^y \frac{\partial S/\partial y}{S\Lambda(S)}dy=-y. \quad (20)$$

Using the condition

$$S(y,\tau)\big|_{y=0}=S_0(\tau), \quad (21)$$

the integral in the left side of equation (20) can be written in a form

$$\int_{S_0}^{S}\frac{dS}{S\Lambda(S)}=-y. \quad (22)$$

The integral in the left side of equation (22) can be calculated for the filtration coefficient (5)

$$\left(\frac{1}{a+1}\ln S+(a-1)\ln(1-S)+\frac{a^3}{a+1}\ln(a+1-aS)+\frac{1}{1-S}\right)\Bigg|_{S_0}^{S}=-y, \quad (23)$$

or

$$\frac{1}{a+1}\ln\frac{S}{S_0}+(a-1)\ln\frac{1-S}{1-S_0}+\frac{a^3}{a+1}\ln\frac{a+1-aS}{a+1-aS_0}+\frac{1}{1-S}=\frac{1}{1-S_0}-y. \quad (24)$$

In the variables x, t the relation (24) has the form

$$\frac{1}{a+1}\ln\frac{S}{S_0}+(a-1)\ln\frac{1-S}{1-S_0}+\frac{a^3}{a+1}\ln\frac{a+1-aS}{a+1-aS_0}+\frac{1}{1-S}=\frac{1}{1-S_0}-x, \quad (25)$$

where $S_0(t)$ is determined by formula (10).
The relation (27) defines in an implicit form the exact solution $S(x,t)$ of problem (1) - (4) in the domain Ω_S. For a known function $S(x,t)$, the solution $C(x,t)$ is determined by formula (11).

4. ASYMPTOTICS FOR LARGE TIME

4.1 Asymptotic solution at the inlet $x = 0$

Asymptotics $S_0^{as}(t)$ at the inlet of the porous medium for $t \to \infty$ is constructed in a form

$$S_0^{as} = 1 - \frac{b_1}{t} - \frac{b_2 \ln t + b_3}{t^2} - \\ - \frac{b_4 \ln^2 t + b_5 \ln t + b_6}{t^3} + O\left(\frac{\ln^3 t}{t^4}\right), \tag{26}$$

where

$$f = O\left(\frac{\ln^3 t}{t^4}\right)$$

is a function satisfying the estimate

$$|f| \le const \cdot \ln^3 t / t^4 .$$

Substitution of the series (26) into the left side of equation (10) yields

$$\frac{t}{b_1} - \left(a + \frac{b_2}{b_1^2}\right)\ln t + \left(a\ln\left((1+a)b_1\right) - 1 - \frac{b_3}{b_1^2}\right) + \\ + \frac{(b_2^2 - b_1 b_4)\ln^2 t + (ab_1^2 b_2 + 2b_2 b_3 - b_1 b_5)\ln t}{b_1^3 t} + \\ + \frac{ab_1^2 b_3 + b_3^2 - a^2 b_1^4 - b_1 b_6}{b_1^3 t} + O\left(\frac{\ln^3 t}{t^2}\right) = t. \tag{27}$$

Equation of the coefficients with the same powers $t^k \ln^l t$ gives a recurrent system of equations with the unknowns b_i, $i = 1,...,6$:

$$\frac{1}{b_1} = 1; \quad a + \frac{b_2}{b_1^2} = 0; \quad a\ln\left((1+a)b_1\right) - 1 - \frac{b_3}{b_1^2} = 0;$$
$$b_2^2 - b_1 b_4 = 0; \quad ab_1^2 b_2 + 2b_2 b_3 - b_1 b_5 = 0;$$
$$ab_1^2 b_3 + b_3^2 - a^2 b_1^4 - b_1 b_6 = 0.$$

Substitution of the obtained coefficients into the expansion (26) yields

$$S_0^{as}(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{a\ln t + A}{t^2} - \frac{a^2 \ln^2 t}{t^3} - \\ - \frac{(2aA - a^2)\ln t + (A^2 - Aa - a^2)}{t^3}, \tag{28}$$

where

$$A = A(0) = 1 - a\ln(1+a).$$

4.2 Asymptotic solution for $x > 0$

The asymptotic solution of problem (1) - (4) for $t \to \infty$ is constructed in a form

$$S^{as}(y,\tau) = 1 - \frac{a_1}{\tau} - \frac{a_2 \ln\tau + a_3}{\tau^2} - \\ - \frac{a_4 \ln^2\tau + a_5 \ln\tau + a_6}{\tau^3} + O\left(\frac{\ln^3\tau}{\tau^4}\right). \tag{29}$$

Substitution of the expansion (29) into the relation (24) gives the recurrent system of equations with the unknowns a_i, $i = 1,...,6$. The asymptotic solution $S^{as}(y,\tau)$ is obtained similarly to Sec. 4.1

$$S^{as}(y,\tau) = 1 - \frac{1}{\tau} + \frac{a\ln\tau + A}{\tau^2} - \frac{a^2\ln^2\tau}{\tau^3} - \\ - \frac{\left(2aA - a^2\right)\ln\tau + \left(A^2 - aA - a^2 - y\right)}{\tau^3}, \tag{30}$$

where $A = A(y) = 1 - a\ln(1+a) - y$.

The asymptotic solution $C^{as}(y,\tau)$ is obtained from the relation (11)

$$C^{as}(y,\tau)=1-\frac{y}{\tau^2}+O\left(\frac{\ln^3\tau}{\tau^3}\right). \qquad (31)$$

Next terms of the asymptotics (31) can be obtained from the equation (1). In the characteristic variables (18), equation (1) has the form

$$\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \qquad (32)$$

Substitution of the expansion (30) into the equation (32) and integration of (32) with respect to y using the condition (3) yields

$$C^{as}(y,\tau)=1-\frac{y}{\tau^2}+\frac{2a\ln\tau+2A-a+y}{\tau^3}y-\frac{3a^2\ln^2\tau+a(6A-5a+3y)\ln\tau}{\tau^4}y- \\ -\frac{6-10a-4a^2-9y+5ay+2y^2+(10a^2-12a+6ay)\ln(1+a)+6a^2\ln^2(1+a)}{2\tau^4}y. \qquad (33)$$

In the variables x, t the asymptotic solution of the problem (1) – (4) for $t\to\infty$ takes the form

$$S^{as}(x,t)=1-\frac{1}{t-x}+\frac{a\ln(t-x)+A}{(t-x)^2}-\frac{a^2\ln^2(t-x)+\left(2aA-a^2\right)\ln(t-x)+\left(A^2-aA-a^2-x\right)}{(t-x)^3}; \qquad (33)$$

$$C^{as}(x,t)=1-\frac{x}{(t-x)^2}+\frac{2a\ln(t-x)+2A-a+x}{(t-x)^3}x-\frac{3a^2\ln^2(t-x)+a(6A-5a+3x)\ln(t-x)}{(t-x)^4}x- \\ -\frac{6-10a-4a^2-9x+5ax+2x^2+(10a^2-12a+6ax)\ln(1+a)+6a^2\ln^2(1+a)}{2(t-x)^4}x. \qquad (34)$$

Here $A=A(x)=1-a\ln(1+a)-x$.

5. NUMERICAL CALCULATION

Calculation of the solution of the problem (1)-(4) and its asymptotics (33), (34) is performed for $a=1$. In Fig. 1 graphs of exact S_0 and asymptotic solutions S_i of various orders at the porous medium inlet $x=0$ are presented.

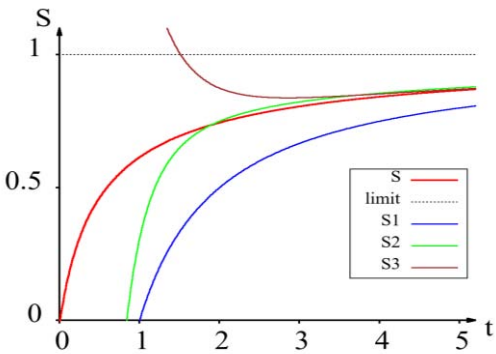


Figure 1. Retained concentration $S_0(t)$ for $x=0$.

Laboratory experiments allow determining the concentrations of suspended and retained particles at the filter outlet at any time after breakthrough. Therefore, the solution for $x=1$ is of the utmost interest.

Graphs of the exact solution C, S and asymptotic solutions C_i, S_i of various orders at the porous medium outlet are shown in Fig. 2, 3.

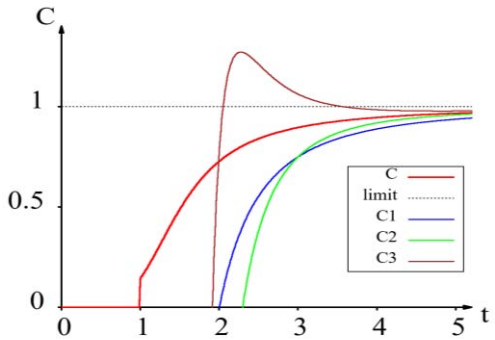


Figure 2. Suspended concentration $C(x,t)\big|_{x=1}$.

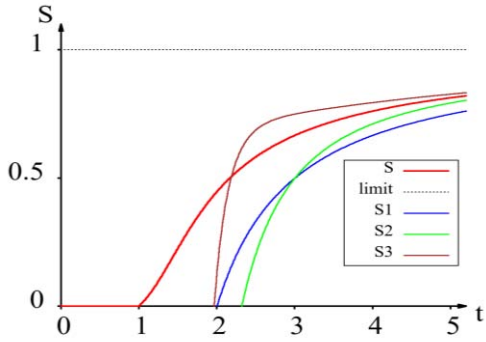


Figure 3. Retained concentration $S(x,t)\big|_{x=1}$.

The graphs show that the asymptotics converge rapidly to the solution and the solution does not exceed the limit values

$$\lim_{t\to\infty} C(x,t) = C(x,t)\big|_{x=0} = 1; \qquad \lim_{t\to\infty} S(x,t) = S_{\max} = 1. \tag{35}$$

The convergence of the asymptotics improves with increasing order of the asymptotic approximation.

6. CONCLUSION

The one-dimensional mathematical model of filtration of a monodisperse suspension in a porous medium with size-exclusion mechanism for particles retention is considered. The exact solution of the problem for the blocking filtration coefficient with double root is obtained. An asymptotics for $t \to \infty$ is constructed. It is shown that the asymptotic solution rapidly converges to the limiting values.

Asymptotics near the porous medium inlet and near the concentrations front of the suspended and retained particles is constructed by substituting asymptotic expansions into the filtration equations and boundary conditions [9, 18]. In contrast to this, it was found out that the equations (1), (2) and the limit conditions (35) do not determine uniquely the asymptotic solution of the filtration problem for $t \to \infty$. To obtain the asymptotics, it is necessary to use the exact solution of the problem.

It is proved that the asymptotic solution of the filtration problem with a a double root blocking filtration coefficient includes terms of the form $\ln^k t / t^l$. Note that in the case of a simple root the asymptotics decreases exponentially [19]. Determination of asymptotic expansion for the filtration coefficient with a root of multiplicity above two requires a separate study.

In contrast to the implicit form of the exact solution, the asymptotics of the filtration problem is constructed in explicit form. The explicit dependence of the suspended and retained particles concentrations on time and coordinate makes it possible to reduce the amount and cost of field studies and laboratory experiments [20, 21].

REFERENCES

1. **Civan F.** Reservoir Formation Damage: Fundamentals, Modeling, Assessment and Mitigation. 2nd ed., Gulf Professional Pub., Amsterdam, 2007.
2. **Li S., Liu R., Zhang Q., Zhang X.** Protection Against Water or Mud Inrush in Tunnels by Grouting: A Review. // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 8, 2016, pp. 753-766.
3. **Noubactep C., Caré S.** Dimensioning Metallic Iron Beds for Efficient Contaminant Removal. // Chemical Engineering Journal, 163, 2010, pp. 454-460.
4. **Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S.** Analytical Micro Model for Size Exclusion: Pore Blocking and Permeability Reduction. // Journal of Membrane Science, 308, 2008, pp. 115-127.
5. **Bashtani F., Ayatollahi S., Habibi A., Masihi M.** Permeability Reduction of Membranes During Particulate Suspension Flow; Analytical Micro Model of Size Exclusion Mechanism. // Journal of Membrane Science, 435, 2013, pp. 155-164.

6. **You Z., BedrikovetskyP., Kuzmina L.** Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension – Colloidal Transport in Porous Media. // Abstract and Applied Analysis, 2013, article ID 680693.
7. **Kuzmina L., Osipov Yu.** Calculation of Filtration of Polydisperse Suspension in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 86, 2016, 01005.
8 **Kuzmina L., Osipov Yu.** Filtration Model of the Unsteady Suspension Flow in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00097.
9. **You Z., Osipov Yu.V., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.I.** Asymptotic Model for Deep Bed Filtration. // Chemical Engineering Journal, 258, 2014, pp. 374-385.
10. **Kuzmina L.I., Osipov Y.V., Galaguz Y.P.** A Model of Two-Velocity Particles Transport in a Porous Medium. // International Journal of Non-linear Mechanics, 93, 2017, pp. 1-6.
11. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic Solution for Deep Bed Filtration with Small Deposit. // Procedia Engineering, 111, 2015, pp. 491-494.
12. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Calculation of the Filtration in a Heterogeneous Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00052.
13. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of filtration of 2-types Particles Suspension in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00053.
14. **Sefrioui N., Ahmadi A., Omari A., Bertin H.** Numerical Simulation of Retention and Release of Colloids in Porous Media at the Pore Scale. // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 427, 2013, pp. 33-40.
15. **Kuzmina L.I., Osipov Y.V., Galaguz Y.P.** Numerical and Asymptotic Modeling of a Filtration Problem with the Initial Deposit. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13(3), 2017, pp. 70-76.
16. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. // Theoretical Foundations of Chemical Engineering, 41(5), 2007, pp. 556-564.
17. **Bedrikovetsky P.G., You Z., Badalyan A., Osipov Y., Kuzmina L.** Analytical Model for Straining-Dominant Large-Retention Depth Filtration. // Chemical Engineering Journal, 330, 2017, pp. 1148-1159.
18. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Particle Transportation at the Filter Inlet. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 10(3), 2014, pp. 17-22.
19. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic Model of Filtration in Almost Stationary Mode. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 12(1), 2016, pp. 158-163.
20. **Faramarzi L, Rasti A, Abtahi S.M.** An Experimental Study of the Effect of Cement and Chemical Grouting on the Improvement of the Mechanical and Hydraulic Properties of Alluvial Formations. // Journal of Construction & Building Materials, 126, 2016, pp. 32-43.
21. **Bedrikovetsky P.G., Marchesin D., Checaira F., Serra A.L., Resende E.** Characterization of Deep Bed Filtration System from Laboratory Pressure Drop Measurements. // Journal of Petroleum Science and Engineering, 32(3), 2001, pp. 167-177.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Civan F.** Reservoir Formation Damage: Fundamentals, Modeling, Assessment and Mitigation. 2nd ed., Gulf Professional Pub., Amsterdam, 2007.
2. **Li S., Liu R., Zhang Q., Zhang X.** Protection Against Water or Mud Inrush in

Tunnels by Grouting: A Review. // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 8, 2016, pp. 753-766.
3. **Noubactep C., Caré S.** Dimensioning Metallic Iron Beds for Efficient Contaminant Removal. // Chemical Engineering Journal, 163, 2010, pp. 454-460.
4. **Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S.** Analytical Micro Model for Size Exclusion: Pore Blocking and Permeability Reduction. // Journal of Membrane Science, 308, 2008, pp. 115-127.
5. **Bashtani F., Ayatollahi S., Habibi A., Masihi M.** Permeability Reduction of Membranes During Particulate Suspension Flow; Analytical Micro Model of Size Exclusion Mechanism. // Journal of Membrane Science, 435, 2013, pp. 155-164.
6. **You Z., BedrikovetskyP., Kuzmina L.** Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension – Colloidal Transport in Porous Media. // Abstract and Applied Analysis, 2013, article ID 680693.
7. **Kuzmina L., Osipov Yu.** Calculation of Filtration of Polydisperse Suspension in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 86, 2016, 01005.
8 **Kuzmina L., Osipov Yu.** Filtration Model of the Unsteady Suspension Flow in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00097.
9. **You Z., Osipov Yu.V., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.I.** Asymptotic Model for Deep Bed Filtration. // Chemical Engineering Journal, 258, 2014, pp. 374-385.
10. **Kuzmina L.I., Osipov Y.V., Galaguz Y.P.** A Model of Two-Velocity Particles Transport in a Porous Medium. // International Journal of Non-linear Mechanics, 93, 2017, pp. 1-6.
11. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic Solution for Deep Bed Filtration with Small Deposit. // Procedia Engineering, 111, 2015, pp. 491-494.
12. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Calculation of the Filtration in a Heterogeneous Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00052.
13. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of filtration of 2-types Particles Suspension in a Porous Medium. // MATEC Web of Conferences, 117, 2017, 00053.
14. **Sefrioui N., Ahmadi A., Omari A., Bertin H.** Numerical Simulation of Retention and Release of Colloids in Porous Media at the Pore Scale. // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 427, 2013, pp. 33-40.
15. **Kuzmina L.I., Osipov Y.V., Galaguz Y.P.** Numerical and Asymptotic Modeling of a Filtration Problem with the Initial Deposit. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 13(3), 2017, pp. 70-76.
16. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. // Theoretical Foundations of Chemical Engineering, 41(5), 2007, pp. 556-564.
17. **Bedrikovetsky P.G., You Z., Badalyan A., Osipov Y., Kuzmina L.** Analytical Model for Straining-Dominant Large-Retention Depth Filtration. // Chemical Engineering Journal, 330, 2017, pp. 1148-1159.
18. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Particle Transportation at the Filter Inlet. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 10(3), 2014, pp. 17-22.
19. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic Model of Filtration in Almost Stationary Mode. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), 12(1), 2016, pp. 158-163.

20. **Faramarzi L, Rasti A, Abtahi S.M.** An Experimental Study of the Effect of Cement and Chemical Grouting on the Improvement of the Mechanical and Hydraulic Properties of Alluvial Formations. // Journal of Construction & Building Materials, 126, 2016, pp. 32-43.
21. **Bedrikovetsky P.G., Marchesin D., Checaira F., Serra A.L., Resende E.** Characterization of Deep Bed Filtration System from Laboratory Pressure Drop Measurements. // Journal of Petroleum Science and Engineering, 32(3), 2001, pp. 167-177.

Liudmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20, tel. +7(495) 77295 90 * 15219, E-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994,
E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Nikita V. Vetoshkin, Undergraduate student in Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26, tel. +7(499)1835994, e-mail: getz1165@gmail.com.

Кузьмина Людмила Ивановна, доцент, кандидат физико-математических наук, Департамент прикладной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, тел. +7(495) 77295 90 *15219; e-mail: lkuzmina@hse.ru.

Осипов Юрий Викторович, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994;
E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Ветошкин Никита Владимирович, студент бакалавриата по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника» Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; e-mail: getz1165@gmail.com.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-102-112

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРИМЕРЕ СЕЧЕНИЯ МОСТА ЧАСТЬ 1: ОЦЕНКА АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЕЧЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫМИ МЕТОДАМИ

И.Ю. Ланцова[1], И.Н. Афанасьева[2,3]

[1] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

[2] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

[3] Флоридский университет, г. Гейнсвилл, США

Аннотация: Данная статья посвящена оценке аэродинамической неустойчивости мостовых конструкций. В ходе численного моделирования были получены аэродинамические характеристики, которые были использованы для оценки аэродинамической неустойчивости согласно Еврокоду. В многовариантных расчетах для исследования влияния турбулентности использовались две модели турбулентности (k-w SST и DES). Используя инженерные оценки, приведенные в Еврокоде, были определены критические скорости возникновения галопирования, дивергенции и вихревого возбуждения для сечения Такомского моста. Также представлено сравнение результатов для критериев аэродинамической неустойчивости, полученные для разных моделей турбулентности. Полученные результаты показали качественное совпадение для рассмотренных моделей турбулентности.

Ключевые слова: аэродинамическая неустойчивость, галопирование, дивергенция, вихревое возбуждение, CFD, мост

SIMULATION OF AERODYNAMIC INSTABILITY OF STRUCTURES ON THE EXAMPLE OF THE BRIDGE SECTION PART 1: EVALUATION OF AERODYNAMIC INSTABILITY OF THE SECTION BY ENGINEERING METHODS

Irina Yu. Lantsova[1], Irina N. Afanasyeva[2,3]

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

[2] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

[3] University of Florida, Gainesville, USA

Abstract: This paper is devoted to aerodynamic instability of bridge structures. CFD simulation was used to obtain criteria of aerodynamic instability by Eurocode. Two models of turbulence (k-w SST and DES) were used in multivariate calculations to investigate influence of turbulence. Galloping, divergence and vortex shedding were investigated for Takoma bridge using engineering criteria from Eurocode. Comparison of results of all criteria is presented as well. Results show qualitative coincidence of two different models.

Keywords: aerodynamic instability, galloping, divergence, vortex shedding, CFD, bridge

1. ВВЕДЕНИЕ

Висячие мосты обладают рядом неоспоримых достоинств по сравнению с конструкциями мостов других типов. Однако уже давно было замечено, что висячие мосты весьма ненадежны при сильном ветре. Одной из крупнейших в истории мостостроения ката-

строф стало обрушение моста через реку Такома (США) 7 ноября 1940 года. Строительство этого моста (рис. 1) было закончено летом 1940 года. Пролет − третий в мире по длине − имел длину 854 м. Большого движения не ожидалось, и мост был построен очень узким - шириной 11,9 м. Проезжая часть была рассчитана на 2 ряда автомобилей. Полотно дороги было подвешено на двух стальных канатах со стрелой провеса 70,7 м.



Рисунок 1. Обрушение Такомского моста.

Сразу после постройки была обнаружена большая чувствительность моста к действию ветра − амплитуды (размахи) колебаний моста достигали 1,5 м. Было сделано несколько попыток устранить эти большие колебания путем введения дополнительных связей и установки гидравлических демпферов (амортизаторов) на пилонах. Но это не предотвратило катастрофы.

Начиная с 8 часов утра 7 ноября наблюдались не очень сильные вертикальные (в форме нескольких волн) изгибные колебания с частотой 0,8 Гц. Примечательно, что ветер имел не очень большую скорость − около 17 м/с, тогда как до этого были случаи, когда мост выдерживал более сильный ветер. Около 10 часов утра скорость ветра несколько возросла (до 18,7 м/с), и установились (в форме одной волны) изгибно-крутильные колебания со значительно меньшей частотой (0,2 Гц) и весьма большими амплитудами. Когда закрутка достигала максимума, проезжая часть наклонялась к горизонту под углом 45°. Резкое изменение частоты колебаний произошло, по-видимому, вследствие обрыва каких-то важных связей в конструкции. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего большой участок проезжей части полотна отломился и упал в воду. Весь процесс был заснят на кинопленку, что явилось ценным материалом для исследования причин обрушения. [1]

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования аэродинамической устойчивости была выбрана задача взаимодействия сечения моста на реке Такома с воздушным потоком.

Данная задача была представлена коллективом ученых из Китая на международной конференции (The Seventh International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications (BBAA7) Shanghai, China; September 2-6, 2012). Свои результаты они представили в [2], где описывается их методика связанного решения задачи с применением программного комплекса ANSYS Fluent с авторским программным комплексом. Геометрические параметры сечения указаны на рис. 2

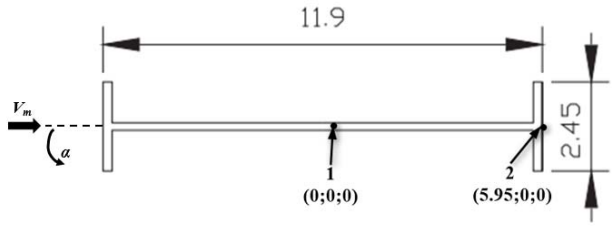


Рисунок 2. Геометрические параметры сечения.

Для решения задачи были выделены следующие этапы:

1) Подбор параметров расчетной модели, при помощи тестовых расчетов для различных размеров сетки;
2) Исследование обтекания сечения моста как жесткого тела, при различных углах атаки ветра при скорости ветра 10 м/с для определения критериев и критических скоростей аэродинамической неустойчивости;

3) Исследования взаимного влияния аэродинамического потока и гибкой упругой конструкции путем прямого связанного аэроупругого расчета при различных скоростях ветра, для определения условия наступления аэродинамической неустойчивости;
4) Сопоставление результатов инженерных оценок и прямого связанного расчета.

В ходе основных аэродинамических расчетов определялись следующие параметры:

1) Аэродинамические коэффициенты:

– аэродинамический коэффициент лобового сопротивления:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_{in}^2\cdot L\cdot H} \qquad (2.1)$$

– аэродинамический коэффициент подъемной силы:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_{in}^2\cdot L\cdot H} \qquad (2.2)$$

– аэродинамический коэффициент момента:

$$C_{MZ} = \frac{M_Z}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot V_{in}^2\cdot L^2} \qquad (2.3)$$

где F_D, F_L – аэродинамические силы лобового сопротивления (вдоль оси oX) и подъемной силы (вдоль оси oY) соответственно для рассматриваемой конструкции; M_Z – аэродинамический момент относительно оси кручения oZ на единицу длины пролета H; ρ – плотность воздуха, равная 1.185 кг/м^3; V_m – средняя скорость потока, равная 10 м/с; L – ширина сечения.

2) Частоты колебаний (f_{FD}, f_{FL}) и число Струхаля:

$$Sh = \frac{B\cdot f_{F_L}}{V_m} \qquad (2.4)$$

где B – высота сечения; f_{FL} – частота колебаний подъемной силы F_L (частота срыва вихрей).

Поскольку задача рассматривается в двумерной постановке, т.е. решается в плоскости OXY, в направлении оси Z расчетная область дискретизирована на один элемент, размер которого равен 0.1 м.

Все аэродинамические расчеты проводились с использованием специализированного программного комплекса ANSYS CFX.

3. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

3.1. Параметры расчетов.

Для аэродинамических расчетов вся конструкция рассматривалась как абсолютно жесткое неподвижное тело. Расчеты проводились в нестационарной постановке.

Так как при числах Рейнольдса ~10^6 поток является турбулентным, для замыкания уравнений Навье-Стокса использовались модели турбулентности, а именно URANS k-ω SST и Detached Eddy Simulation (DES SST) [3]. Для дискретизации по пространству применялся метод конечных объемов (МКО).

Для расчетов в нестационарной постановке физическое время составило ~80 с.

3.2. Расчетные сетки.

Расчетная область разбивалась на элементы в ANSYS Workbench. Варианты расчетных сеток (Моделей) представлены в таблице 1. и на рис. 3.

3.3. Граничные и начальные условия.

На *входе* задано условие *INLET* (U=V_m, V=W=0) с горизонтальной направленной скоростью потока, равномерно распределенной по высоте. Для определения аэродинамических характеристик (аэродинамических коэффициентов и частоты срыва вихрей) значение скорости V_m было принято равным 10 м/с^2.

Таблица 1. Параметры расчетных сеток для CFD-тестов.

Вариант расчетной сетки	Кол-во узлов	Пограничный слой			Размер эл-в в объеме 1	Размер эл-в в объеме 2	Размер эл-в на поверх-ности сечения
		Толщина первого слоя, м	Кол-во слоев	Коэф-т прогрес-сии			
Модель 1	1 611 548	3.0e-5	20	2.2	2.5e-2	0.25	2.0e-3
Модель 2	846 742	3.0e-5	15	2.5	3.0e-2	0.3	5.0e-3
Модель 3	526 814	3.0e-5	15	2.5	3.5e-2	0.4	1.0e-2
Модель 4	381 894	3.0e-5	15	2.5	4.0e-2	0.4	2.0e-2
Модель 5	235 200	3.0e-5	10	3	5.0e-2	0.5	3.0e-2
Модель 6	378 858	5.0e-4	15	2	4.0e-2	0.4	2.0e-2
Модель 7	223 778	5.0e-4	10	2.2	5.0e-2	0.5	4.0e-2
Модель 8	215 904	1.0e-3	10	2	5.0e-2	0.5	1.0e-1
Модель 9	201 314	1.0e-3	10	2.2	8.0e-2	0.6	1.0e-1

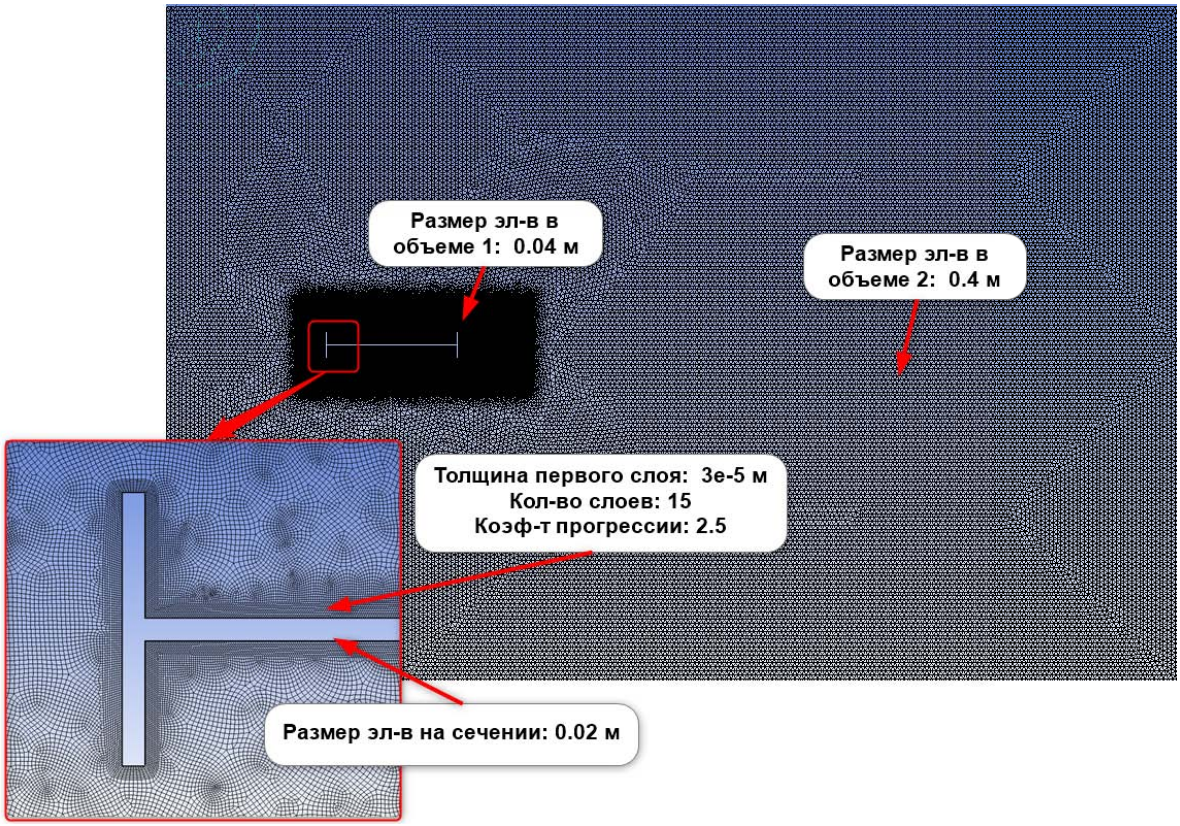


Рисунок 3. Расчетная сетка: Модель 4 (381 894 узлов).

В качестве условия на *выходе* (*Outlet*) канала были заданы «мягкие» граничные условия *«Opening»* с осредненным относительным давлением равным нулю. Так как задача решалась в двумерной постановке, то *на боковых границах* области были заданы условия симметрии *«Symmetry»*. На поверхности обтекаемого тела применялось условие прилипания на стенке *«No Slip Wall»*. В качестве *начальных* условий для задач была принята скорость, равная 0.

4. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЕЧЕНИЯ

4.1. Вихревое возбуждение.

Вихревое возбуждение возникает, если вихри попеременно срываются с противоположных краев конструкции, в результате чего возникает переменная нагрузка, перпендикулярная направлению действия ветра.

Если частота вихревых возбуждений совпадает с собственной частотой конструкции, могут возникнуть колебания большой амплитуды. Это происходит при так называемой критической скорости ветра. В Eurocode [4] приводится формула, для вычисления этой скорости:

$$V_{cr,i} = \frac{B \cdot f_i}{Sh} \qquad (4.1)$$

где B – ширина поперечного сечения в зоне вихревого возбуждения; f_i – собственная частота i-ой формы изгибных колебаний в поперечном к направлению действия ветра направлении (в данном случае $f_i = 0.13$ Гц соответствует первой частоте собственных колебаний); Sh – число Струхаля.

Согласно Eurocode [4] эффект вихревого возбуждения должен исследоваться, если отношение максимального размера конструкции к минимальному в плоскости, нормальной направлению действия ветра, превышает 6.

Вызываемое вихревое возбуждение не нужно исследовать, если

$$V_{cr,i} > 1.25 \cdot V_m \qquad (4.2)$$

где $V_{cr,i}$ – критическая скорость ветра согласно для i-ой собственной формы колебаний; V_m – средняя скорость потока ветра.

Ниже представлены результаты нестационарных расчетов, в ходе которых были определены частоты срыва вихрей при различных углах атаки. Затем для полученных частот были вычислены числа Струхаля Sh и по формуле (4.6) определена критическая скорость ветра (f_1=0.13 Гц) (таблица 2).

Таблица 2. Числа Струхаля Sh и значения критической скорости ветра V_{cr} для различных углов α, °.

Угол α, °	*Sh*	V_{cr}, м/с	Угол α, °	*Sh*	V_{cr}, м/с
0	0.131	***2.44***	*40*	0.152	***8.13***
1	0.142	***2.44***	*45*	0.162	***8.13***
2	0.153	***2.44***	*50*	0.192	***7.22***
3	0.164	***2.44***	*55*	0.201	***7.22***
4	0.175	***2.44***	*60*	0.188	***7.98***
5	0.185	***2.44***	*65*	0.189	***8.13***
10	0.149	***3.90***	*70*	0.216	***7.22***
15	0.153	***4.64***	*75*	0.218	***7.22***
20	0.178	***4.64***	*80*	0.219	***7.22***
25	0.130	***7.22***	*85*	0.217	***7.22***
30	0.113	***9.29***	*90*	0.214	***7.22***
35	0.141	***8.13***	–	–	–

4.2. Галопирование.

Галопирование – аэродинамическая неустойчивость, характерная для гибких сооружений с особыми формами поперечного сечения. При определенных условиях в таких сооружениях возможны колебания с большими амплитудами в перпендикулярном потоку направлении. [5]

В начале по критерию Глауэрта–Ден-Гартога (необходимое условие) определяются углы, при которых возможно возникновение галопирования.

Ниже представлены результаты нестационарных расчетов, в ходе которых были определены значения аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления C_D и подъемной силы C_L при различных углах атаки.

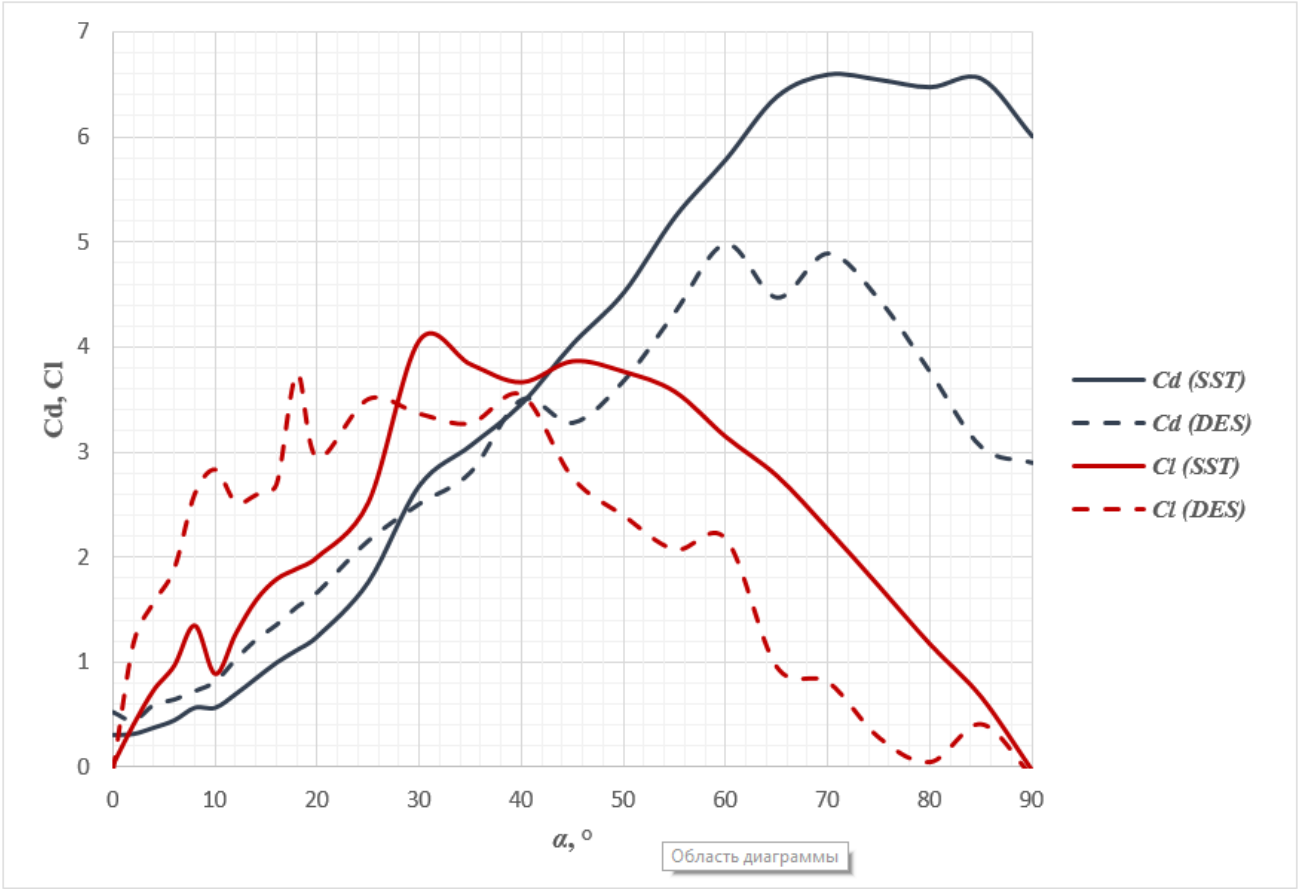


Рисунок 4. График зависимости аэродинамических коэффициентов силы лобового сопротивления C_D и подъемной силы C_L от угла атаки α, °.

Далее по формуле (2.15) был вычислен критерий Глауэрта–Ден-Гартога H. В таблице 3 красным отмечены те углы, для которых выполняется критерий Глауэрта–Ден-Гартога, т.е. для этих углов возможно возникновение галопирования.

Далее из достаточного условия (2.14) находится критическая скорость, при которой возникает галопирование. Выражение для этой скорости также приводится в Eurocode [4] и имеет вид:

$$V_{CG} = \frac{2 \cdot Sc \cdot f_i \cdot B}{a_g} \qquad (4.8)$$

где f_i – собственная частота i-ой формы изгибных колебаний в поперечном к направлению действия ветра направлении (f_i- = 0.13 Гц); B – ширина сечения поперек ветрового потока (B=2.45 м); a_g – коэффициент нестабильности при галопировании, равный $H \cdot k_s$, где k_s принят равным 0.9, а H – критерий Глауэрта–Ден-Гартога; Sc - число Скрутона,

Таблица 3. Значения аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления C_D и подъемной силы C_L и критерий Глауэрта–Ден-Гартога H для различных углов α, °.

Угол α, °	Угол α, рад.	SST				DES			
		C_D	C_L	C'_L	H	C_D	C_L	C'_L	C_D
0	0.00	0.30	0.03	10.93	11.23	0.53	-0.03	34.61	35.14
2	0.03	0.31	0.41	10.11	10.42	0.45	1.18	22.89	23.34
4	0.07	0.37	0.74	7.98	8.35	0.60	1.57	10.18	10.79
6	0.10	0.44	0.97	8.79	9.24	0.65	1.89	14.83	15.48
8	0.14	0.56	1.35	-1.17	**-0.60**	0.73	2.60	13.44	14.17
10	0.17	0.56	0.89	-1.19	**-0.63**	0.82	2.83	-1.18	**-0.36**
12	0.21	0.69	1.27	10.06	10.75	1.03	2.52	-3.39	**-2.36**
14	0.24	0.84	1.59	7.45	8.29	1.22	2.59	2.47	3.70
16	0.28	0.99	1.79	4.26	5.25	1.36	2.69	16.52	17.88
18	0.31	1.11	1.89	3.06	4.17	1.53	3.74	3.52	5.05
20	0.35	1.24	2.00	5.19	6.43	1.67	2.94	-1.96	**-0.29**
25	0.44	1.76	2.52	11.81	13.57	2.16	3.50	2.43	4.59
30	0.52	2.68	4.06	7.50	10.18	2.51	3.36	-1.36	1.15
35	0.61	3.06	3.83	-2.30	0.76	2.81	3.27	1.03	3.83
40	0.70	3.46	3.66	0.17	3.63	3.50	3.54	-2.96	0.54
45	0.79	4.03	3.86	0.55	4.58	3.28	2.75	-6.61	**-3.33**
50	0.87	4.52	3.76	-1.69	2.83	3.68	2.39	-3.91	**-0.23**
55	0.96	5.24	3.57	-3.55	1.69	4.33	2.07	-1.27	3.06
60	1.05	5.79	3.14	-4.55	1.24	4.98	2.17	-6.42	**-1.44**
65	1.13	6.39	2.77	-5.03	1.36	4.47	0.95	-7.80	**-3.33**
70	1.22	6.60	2.26	-6.06	0.54	4.89	0.81	-3.85	1.04
75	1.31	6.55	1.72	-6.23	0.32	4.45	0.28	-4.35	0.10
80	1.40	6.48	1.17	-6.00	0.48	3.76	0.05	0.75	4.51
85	1.48	6.56	0.67	-6.91	**-0.35**	3.05	0.41	-0.78	2.27
90	1.57	6.01	-0.03	-8.01	**-2.00**	2.90	-0.09	-5.70	**-2.80**

$$Sc = \frac{2 \cdot \delta \cdot m}{\rho \cdot B^2} \qquad (4.9)$$

$$V_{CG} > 1.25 \cdot V_m \qquad (4.10)$$

где δ – логарифмический декремент колебаний (δ=0.03); ρ – плотность воздуха (ρ =1.185 кг/м^3); m – погонная масса конструкции (m=4250 кг/м).

Согласно Eurocode [4] аэродинамическая неустойчивость при галопировании возникает в том случае, когда скорость ветра достигает величины, при которой начинается колебательный процесс с нарастающей амплитудой.

Для выбранных «опасных» углов атаки по формуле (4.8) определена критическая скорость начала колебательного процесса (таблица 4).

4.3. Дивергенция.

Согласно Eurocode [4], должны принципиально исключаться такие виды динамической неустойчивости как дивергенция и флаттер, возникающие, если деформации конструкции вызывают переменные аэродинамические нагрузки.

Таблица 4. Значения критерий Глауэрта–Ден-Гартога H и критической скорости V_{CG} для различных углов α, °.

Угол α, °	Угол α, рад.	SST		DES	
		H	V_{CG}, м/с	***H***	V_{CG}, м/с
8	0.14	-0.60	**5.76**	-	-
10	0.17	-0.63	**5.54**	-0.36	**9.77**
12	0.21	-	-	-2.36	**1.47**
20	0.35	-	-	-0.29	**12.09**
45	0.79	-	-	-3.33	**1.04**
50	0.87	-	-	-0.23	**15.24**
60	1.05	-	-	-1.44	**2.42**
65	1.13	-	-	-3.33	**1.05**
85	1.48	-0.35	**10.09**	-	-
90	1.57	-2.00	**1.74**	-2.80	**1.25**

Чтобы быть восприимчивой к дивергенции или флаттеру, конструкция должна одновременно выполнять все три условия, указанные в Eurocode [4].

Если все условия выполняются, необходимо проверить исследуемую конструкцию на возможность возникновения флаттера или дивергенции из условия:

$$V_{div} > 2 \cdot V_m \qquad (4.11)$$

Критическая скорость ветра для дивергенции вычисляется по следующей формуле:

$$V_{div} = \left[\frac{2 \cdot k_\Theta}{\rho \cdot L^2 \cdot \frac{dc_M}{d\Theta}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.12)$$

где k_Θ – крутильная жесткость сечения (k_Θ =1.2·10^4 Нм/рад); C_M – аэродинамический коэффициент момента; $\frac{dc_M}{d\Theta}$ – производная аэродинамического коэффициента момента; ρ – плотность воздуха (ρ =1.185 кг/м^3); L – протяженность конструкции вдоль ветрового потока (L=11,9 м).

Ниже представлены результаты расчетов, в ходе которых были определены значения аэродинамического момента CMZ при различных углах атаки (рис. 5). Далее по формуле (4.12) для всех улов была вычислена критическая скорость ветра для возникновения дивергенции (таблица 5).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многовариантные аэродинамические расчеты показали близость инженерных оценок, полученных с помощью разных моделей турбулентности. Качественное совпадение законов изменения аэродинамических коэффициентов от угла атаки, и соответственно критериальных параметров, дает возможность использовать менее требовательную к ресурсам модель k-w SST. Возможность использования стационарных расчетов для получения предварительной инженерной оценки аэродинамической устойчивости является хорошей основой для проведения исследований [6]. Тем не менее, остается необходимость развития и исследования методики прямого динамического моделирования поведения конструкции в потоке [7] для получения более достоверной картины и количественного сопоставления с инженерными оценками.

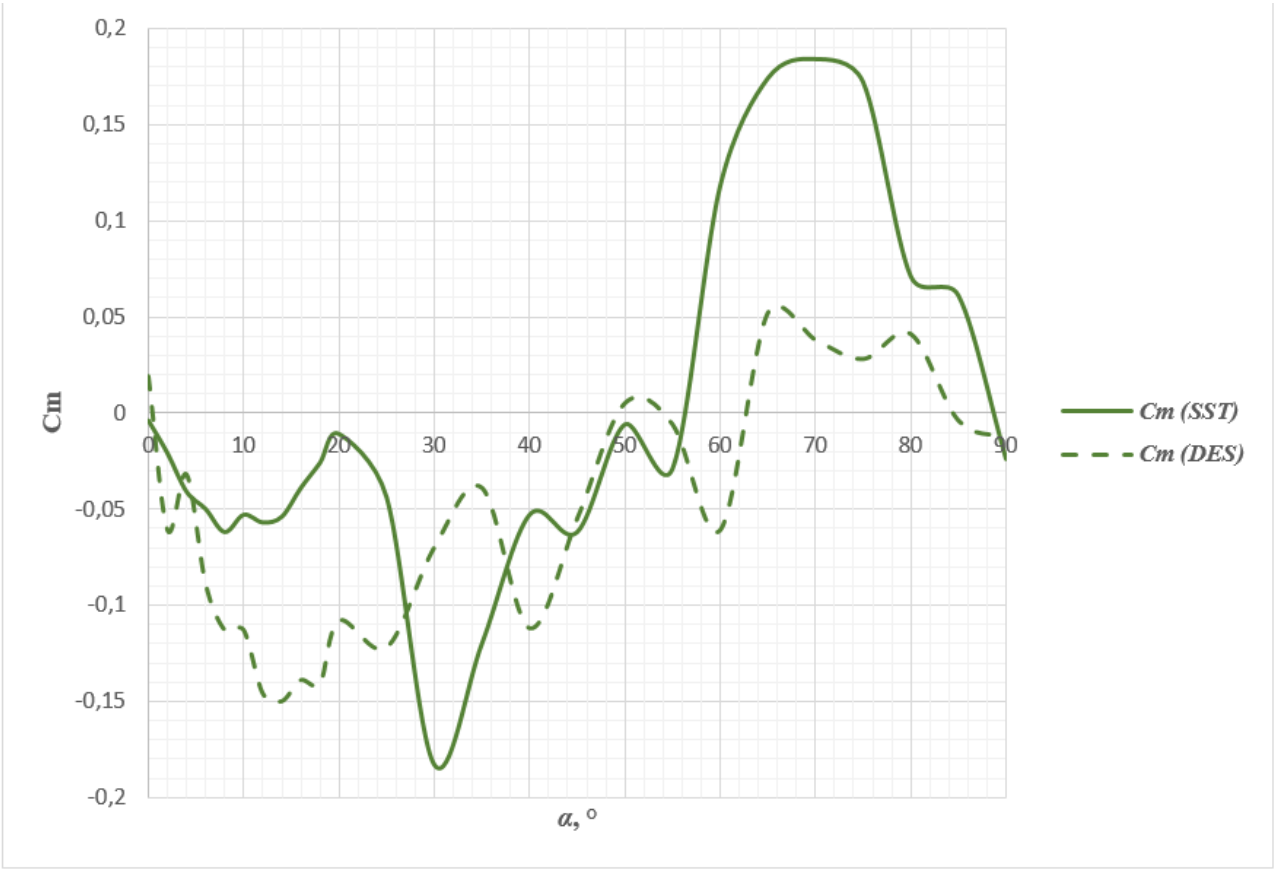


Рисунок 5. График зависимости аэродинамического коэффициента момента C_M от угла атаки α, °.

Таблица. 5. Значения коэффициента аэродинамического момента C_{MZ} и значения критической скорости ветра V_{DIV} для различных углов α, °.

Угол α, °	Угол α, рад.	SST			DES		
		C_M	C'_M	V_{DIV}, м/с	C_M	C'_M	V_{DIV}, м/с
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0.00	-0.004	-0.490	**17.18**	0.019	-2.312	**7.91**
2	0.03	-0.021	-0.532	**16.50**	-0.061	-0.736	**14.03**
4	0.07	-0.041	-0.419	**18.58**	-0.032	-0.401	**19.01**
6	0.10	-0.050	-0.292	**22.28**	-0.089	-1.156	**11.19**
8	0.14	-0.062	-0.042	**58.67**	-0.113	-0.337	**20.74**
10	0.17	-0.053	0.063	**47.77**	-0.113	-0.479	**17.39**
12	0.21	-0.057	-0.002	**297.36**	-0.146	-0.537	**16.41**
14	0.24	-0.054	0.264	**23.42**	-0.150	0.099	**38.24**
16	0.28	-0.039	0.400	**19.03**	-0.139	0.139	**32.22**
18	0.31	-0.026	0.401	**19.00**	-0.141	0.445	**18.04**
20	0.35	-0.011	-0.151	**31.00**	-0.108	0.150	**31.07**
25	0.44	-0.044	-0.989	**12.10**	-0.122	0.219	**25.70**
30	0.52	-0.183	-0.436	**18.22**	-0.070	0.474	**17.47**
35	0.61	-0.120	0.747	**13.92**	-0.039	-0.242	**24.47**
40	0.70	-0.053	0.333	**20.84**	-0.112	-0.089	**40.25**

1	2	3	4	5	6	7	8
45	0.79	-0.062	0.266	**23.31**	-0.055	0.668	**14.73**
50	0.87	-0.006	0.189	**27.68**	0.005	0.282	**22.64**
55	0.96	-0.029	0.715	**14.23**	-0.006	-0.377	**19.60**
60	1.05	0.118	1.161	**11.16**	-0.061	0.331	**20.91**
65	1.13	0.174	0.375	**19.65**	0.052	0.570	**15.93**
70	1.22	0.184	-0.010	**122.98**	0.038	-0.138	**32.41**
75	1.31	0.172	-0.645	**14.98**	0.028	0.014	**101.71**
80	1.40	0.071	-0.637	**15.07**	0.041	-0.181	**28.28**
85	1.48	0.061	-0.543	**16.32**	-0.004	-0.310	**21.60**
90	1.57	-0.024	0.041	**59.45**	-0.013	-0.002	**243.83**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черный Г.Г.** Слово о вечно новой механике. – М.: МГОФ. Знание, 2011. – 52 с.
2. **Zhan H, Fang T.** Flutter stability studies of Great Belt East Bridge and Tacoma Narrows Bridge by CFD numerical simulation, the7th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications (BBAA7), Shanghai, China, 2012
3. ANSYS CFX 17.0 User's Guide. Canonsburg, 2016.
4. Eurocode 1: Basis design and action on structures. Part 2-4: «Wind action». ENV 1991 – 2 – 4, – CEN, 1994.
5. **Симиу Э., Сканлан Р.** Воздействие ветра на здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
6. **Lantsova I., Afanasyeva I.** Investigation of Aerodynamic Instability of a Thin Plate. // MATEC Web of Conferences 117, 2017.
7. **Афанасьева И.Н.** Моделирование двумерного нестационарного обтекания гибкой упругой конструкции в связанной постановке. Часть 3: верификация методики численного моделирования связанной задачи аэрогидроупругости. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций), Volume 10, Issue 3, 2014, с. 40-48.

REFERENCES

1. **Chernyy G.G.** Slovo o Vechno Novoy Mekhanike [The Word About the Eternally New Mechanics]. Moscow, MGOF. Znaniye, 2011, 52 pages.
2. **Zhan H, Fang T.** Flutter stability studies of Great Belt East Bridge and Tacoma Narrows Bridge by CFD numerical simulation, the7th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications (BBAA7), Shanghai, China, 2012
3. ANSYS CFX 17.0 User's Guide. Canonsburg, 2016.
4. Eurocode 1: Basis design and action on structures. Part 2-4: «Wind action». ENV 1991 – 2 – 4, – CEN, 1994.
5. **Simiu E., Skanlan R.** Vozdeystviye Vetra na Zdaniya i Sooruzheniya [The Impact of Wind on Buildings and Structures]. Moscow, Stroyizdat, 1984, 360 pages.
6. **Lantsova I., Afanasyeva I.** Investigation of Aerodynamic Instability of a Thin Plate. // MATEC Web of Conferences 117, 2017.
7. **Afanasyeva I.N.** Modelirovaniye Dvumernogo Nestatsionarnogo Obtekaniya Gibkoy Uprugoy Konstruktsii v Svyazannoy Postanovke. Chast 3: Verifikatsiya Metodiki Chislennogo Modelirovaniya Svyazannoy Zadachi Aerogidrouprugosti [2-D Modelling of Fluid – Structure Interaction Between an Elastic Structure and Transient Flow. Part 3: Verification of Numerical Technique of Couples Aeroelastic

Problem Simulation]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Mezhdunarodnyy zhurnal po raschetu grazhdanskikh i stroitelnykh konstruktsiy), Volume 10, Issue 3, 2014, pp. 40-48.

Ланцова Ирина Юрьевна, ассистент и аспирант кафедры прикладной математики, инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов Национального исследовательского Московского строительного университета, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,
тел./факс: +7(499)183-59-94;
E-mail: niccm@mgsu.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, кандидат технических наук, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО» (ЗАО НИЦ «СтаДиО»); магистрант Флоридского университета (США); 125040, Россия, г. Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, E-mail: stadyo@stadyo.ru.

Irina Yu. Lantsova, assistant postgraduate of Department of Applied Mathematics, engineer of Research & Education Center of Computation Simulation; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia; tel./fax: +7 (499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru

Irina N. Afanasyeva, Ph.D., senior engineer of Scientific Research Center StaDyO; Master's Degree Student, University of Florida (USA); 125040, Russia, Moscow, ul. 3-ya Yamskogo Polya, 18, 8 floor, office 810,
tel. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-113-125

ЛОКАЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСА

М.Л. Мозгалева[1], П.А. Акимов[2,3,4,5,6], Д.Ф. Семин[1]

[1] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

[3] Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ

[4] Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

[5] Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

[6] Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматривается двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования гибридного дискретного вейвлет-базиса, причем соответствующее изложение проводится для простейших одномерных задач. Описаны аппроксимации сеточных функций в выбранном базисе и схема построения двухсеточного метода решения, рассмотрен одномерный пример решения краевой задачи строительной механики (численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли).

Ключевые слова: двухсеточный метод, краевая задача, вейвлет-анализ, дискретный вейвлет-базис, численное решение, аппроксимация

LOCAL NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS WITH THE USE OF HYBRID DISCRETE WAVELET BASIS

Marina L. Mozgaleva[1], Pavel A. Akimov[2,3,4,5,6], Dmitry F. Semin[1]

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

[2] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

[3] Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

[4] Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

[5] Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

[6] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to the two-grid method of structural analysis based on hybrid discrete wavelet basis (in particular, the simplest one-dimensional problems are under consideration). Approximations of the mesh functions in this basis, general idea of the two-grid method and one-dimensional numerical example of beam analysis are presented.

Keywords: two-grid method, boundary problem, wavelet analysis, discrete wavelet basis, numerical solution, approximation

ВВЕДЕНИЕ

Разработка, исследование и верификация методов расчета строительных конструкций остаются актуальными задачами, поскольку в этом существует постоянная практическая необходимость. Так, например, характерной особенностью последних десятилетий в строительстве является все больший объем работ, связанный с реконструкцией и пере-

делкой старых зданий. Очевидно, что в соответствующих ситуациях существует опасность, что непроверенные корректным расчетом конструктивные изменения приведут к возникновению аварийной ситуации. Разумеется, существуют и другие тенденции, например, резкое увеличение строительства домов по индивидуальным проектам с использованием нестандартных строительных материалов и конструктивных решений, связанных с реальными условиями и желаниями заказчика. Еще одним фактором, стимулирующим развитие численных и численно-аналитических методов, в настоящее время являются особенности развития вычислительной техники. Это в первую очередь резкое увеличение парка высокопроизводительных персональных ЭВМ с развитым программным обеспечением. Следует также отметить и развитие математических средств, обеспечивающее повышение эффективности методов в значительной большей мере, чем даже непосредственно техническое развитие вычислительной техники (ЭВМ).

Известная история развития численных методов показывает, что основной тенденцией является построение алгоритмов, позволяющих рассчитывать сложные конструкции в целом, что приводит к громадным вычислительных схемам. В тоже время опасной с позиции прочности является состояние в небольшом количестве зон, при этом, как правило, известных. Это, прежде всего, места концентраций (углы, щели, трещины, места стыковок элементов конструкций и т.д.), локальных изменений в строительном объекте при его реконструкции (пробивка новых проходов, снос опор, мешающих функциональному назначению сооружения и т.д.) или конструкции локальных усилений (стойки, подкрепляющие балки, металлические стяжки и т.д.). Очевидно, что во всех перечисленных случаях требуется адекватное расчетное обоснование, связанное именно с вышеперечисленными локальными изменениями [1-3].

В свою очередь, локальный расчет при правильном выборе реализующих численных и численно-аналитических методов может привести к вычислительным схемам, характеризующимся относительно небольшим количеством неизвестных. Это позволяет проводить локальные расчеты с большой точностью без применения сверхмощных ЭВМ. Высокоэффективным, динамично развивающимся в настоящее время инструментарием для проведения такого рода исследований является вейвлет-анализ [4-36]. При многоуровневом вейвлет-анализе решение представляется в виде композиции локальных и глобальных компонент, что позволяет оценить влияние различных (с точки зрения локализации) факторов. При этом зачастую оказывается возможным построить не только более высококачественную расчетную модель, но и внести некоторые обоснованные конструктивные изменения.

1. ГИБРИДНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ БАЗИС

Будем рассматривать следующие функции:

– отцовский вейвлет (рис. 1.1*а*)

$$\Phi(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x<0\vee x\ge 1;\end{cases} \tag{1.1}$$

– первый материнский вейвлет (рис. 1.1*б*)

$$\Psi_1(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1/3\\ -1, & 2/3\le x<1\\ 0, & x<0\vee 1/3\le x<2/3\vee x\ge 1;\end{cases} \tag{1.2}$$

– второй материнский вейвлет – вариант «французской шляпы» (рис. 1*в*)

$$\Psi_2(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<1/3\vee 2/3\le x<1\\ 2, & 1/3\le x<2/3\\ 0, & x<0\vee x\ge 1.\end{cases} \tag{1.3}$$

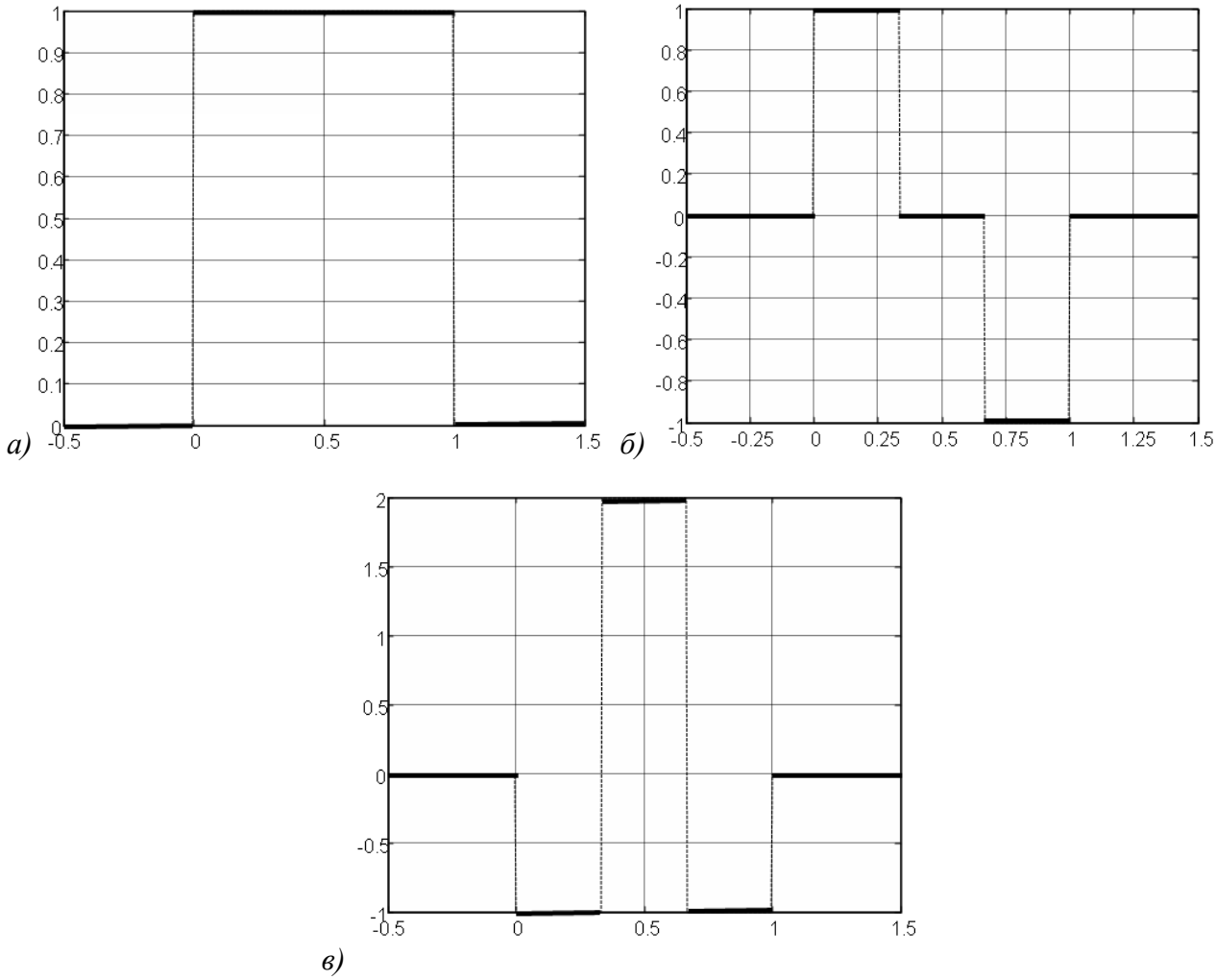


Рисунок 1.1. Функции гибридного дискретного базиса.

Матрица перехода с одного уровня на следующий уровень имеет ту же структуру, что и в базисе Хаара [12,18-21,26,27,30,31]

$$Q_G = \begin{bmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & Q \end{bmatrix}, \qquad (1.4)$$

где в случае Хаара

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (1.5)$$

а в рассматриваемом случае

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

Обозначим семейство дискретных функций: $\{\overline{\psi}_j^p\}$, $j = 1,2,\ldots, N_p$, $p = 1,\ldots,M$, M – количество уровней, $N = 3^M$ – размерность пространства,

$$\overline{\psi}_j^p = [\,\overline{\psi}_{1,j}^p \quad \overline{\psi}_{2,j}^p\,]^T, \ 1 \le p < M; \qquad (1.7)$$

$$\psi_{1,j}^p(i) = \alpha_{1,p}\Psi_1\left(\frac{i-0.5}{3^p} - (j-1)\right); \qquad (1.8)$$

$$\psi_{2,j}^p(i) = \alpha_{2,p}\Psi_2\left(\frac{i-0.5}{3^p} - (j-1)\right); \qquad (1.9)$$

$$\overline{\psi}_1^M = [\,\overline{\psi}_{1,1}^M \quad \overline{\psi}_{2,1}^M \quad \overline{\phi}_1^M\,]^T, \qquad (1.10)$$

где $$\phi_1^M(i) = \alpha_M \Phi\left(\frac{i-0.5}{3^M}\right). \quad (1.11)$$

где $N_p = N/3^p$ – количество $\overline{\psi}_{1,j}^p$ и $\overline{\psi}_{2.j}^p$ на p-ом уровне;

$$\alpha_p = 1/\sqrt{3^p}\ ,\ \alpha_{1,p} = 1/\sqrt{2^p}\ ,\ \alpha_{2,p} = 1/\sqrt{6^p} \quad (1.12)$$

– нормирующие множители.
Заметим, что поскольку $1/3$ не имеет конечного точного значения, для корректного вычисления используется выражение

$$\frac{i-0.5}{3^p} \quad \text{вместо} \quad \frac{i-1}{3^p}.$$

Представленная таким образом совокупность $\{\overline{\psi}_j^p\}$ является базисом в N-мерном векторном пространстве. Причем, такой базис будет ортонормированный.
Пусть задан вектор $\overline{u} \in R^N$, $\overline{u} = \{u_i\}_{1 \le i \le N}$. Представим его разложение в базисе Хаара

$$\overline{u} = \sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N_p}(v_j^p\overline{\psi 1}_j^p + w_j^p\overline{\psi 2}_j^p\right) + u_1^M\overline{\phi}_1^M, \quad (1.11)$$

где соответственно имеем

$$v_j^p = (\overline{\psi}_{1,j}^p,\ \overline{u}),\ w_j^p = (\overline{\psi}_{2,j}^p,\ \overline{u}),$$
$$u_1^M = (\overline{\phi}_1^M,\ \overline{u}),\ j = 1,2,...,N_p,\quad p = 1,...,M. \quad (1.12)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим пример сеточного разбиения для $N = 9 = 3^2$, т.е. $M = 2$. Тогда расположение узлов по уровням можно представить в виде, представленном на рис. 2.1.

Формирование коэффициентов разложения на первом уровне ($k = 1,2,3$)

$$u_k^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_{3k-2}^0 + u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0) = \sqrt{3}\widetilde{u}_k^0; \quad (2.1)$$

$$\widetilde{u}_k^0 = \frac{1}{3}(u_{3k-2}^0 + u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0) \quad (2.2)$$

– среднее значение;

$$v_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{3k-2}^0 - u_{3k}^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}2h\frac{u_{3k}^0 - u_{3k-2}^0}{2h} = -\sqrt{2}h(D_0u^0)_{3k-1}; \quad (2.3)$$

$$w_k^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-u_{3k-2}^0 + 2u_{3k-1}^0 - u_{3k}^0) = -\frac{1}{\sqrt{6}}h^2\frac{u_{3k-2}^0 - 2u_{3k-1}^0 + u_{3k}^0}{h^2}) = -\frac{h^2}{\sqrt{6}}(D^2u^0)_{3k-1}. \quad (2.4)$$

Формирование коэффициентов разложения на втором уровне:

$$u_k^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_1^1 + u_2^1 + u_3^1); \quad (2.5)$$

$$v_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1^1 - u_3^1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}6h\frac{u_3^1 - u_1^1}{6h} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}6h\frac{\widetilde{u}_3^0 - \widetilde{u}_1^0}{6h} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}6h(D_0\widetilde{u}^0)_2; \quad (2.6)$$

$$w_1^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-u_1^1 + 2u_2^1 - u_3^1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(3h)^2\frac{u_1^1 - 2u_2^1 + u_3^1}{(3h)^2}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(3h)^2\frac{\widetilde{u}_1^0 - 2\widetilde{u}_2^0 + \widetilde{u}_3^0}{(3h)^2}) = -\frac{(3h)^2}{\sqrt{2}}(D^2\widetilde{u}^0)_2; \quad (2.7)$$

Для осреднения (редукции) полагаем

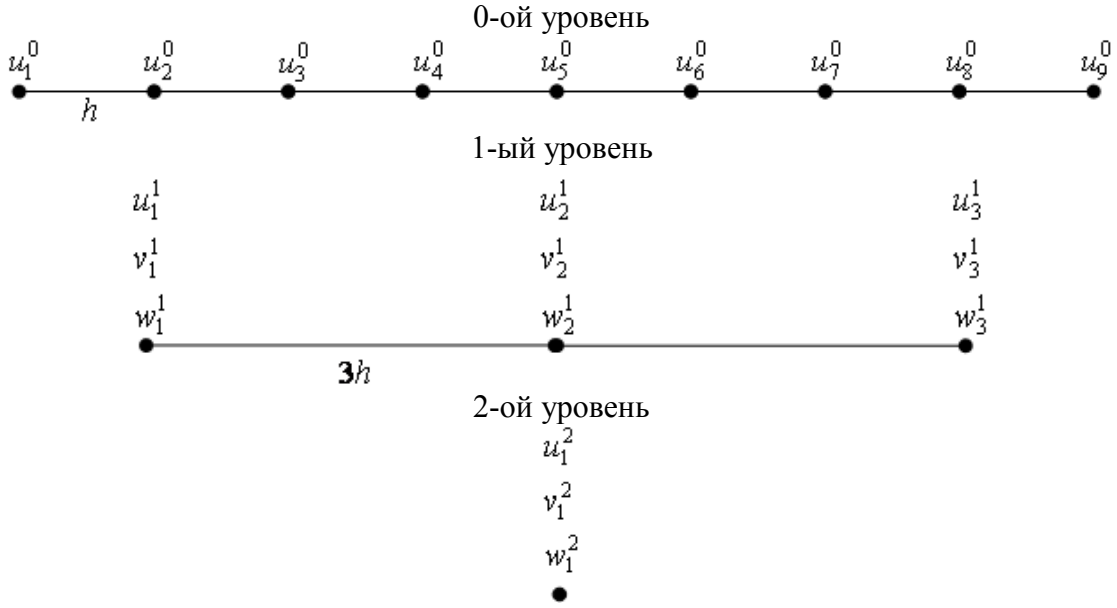


Рисунок 2.1. Схема осреднения сеточной функции.

$$(D_0 u^0)_{3k-1} = (D_0 \widetilde{u}^0)_2, \quad k = 1,2,3; \qquad (2.8)$$

$$(D^2 u^0)_{3k-1} = (D^2 \widetilde{u}^0)_2, \quad k = 1,2,3. \qquad (2.9)$$

При этом можно отметить следующие зависимости

$$\begin{cases} (D_0 u^0)_{3k-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}h} v_k^1 \\ (D^2 u^0)_{3k-1} = -\dfrac{\sqrt{6}}{h^2} w_k^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_0 \widetilde{u}^0)_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot 6h} v_1^2 \\ (D^2 \widetilde{u}^0)_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{(3h)^2} w_1^2; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} v_k^1 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} v_1^2 \\ w_k^1 = \dfrac{1}{3^2\sqrt{3}} w_1^2, \end{cases} \quad k = 1,2,3. \qquad (2.10)$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ СЕТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть задан отрезок длиной L. Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию $\overline{u} = [u_1 \dots u_N]^T$ можно представить в виде

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \overline{\Phi}_j^0, \qquad (3.1)$$

где $\overline{\Phi}_j^0$ – j-й вектор единичного базиса нулевого уровня, $1 \le j \le N_0 = N$;

$$\overline{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j, \end{cases} \quad 1 \le i \le N; \quad u_j^0 = u_j,$$

$$1 \le j \le N; \quad N_0 = N = 3^M. \qquad (3.2)$$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе первого уровня в следующем виде

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \overline{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \overline{\Psi}_{1,j}^1 + \sum_{j=1}^{N_1} w_j^1 \overline{\Psi}_{2,j}^1, \qquad (3.3)$$

где соответственно имеем

$$u_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{1,j}^1), \quad w_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{2,j}^1),$$
$$1 \le j \le N_1; \quad N_1 = N/3; \quad (3.4)$$
$$\bar{u}^1 = [u_1^1 \ \ldots \ u_{N_1}^1]^T; \quad (3.5)$$
$$\bar{v}^1 = [v_1^1 \ \ldots \ v_{N_1}^1]^T; \quad (3.6)$$
$$\bar{w}^1 = [w_1^1 \ \ldots \ w_{N_1}^1]^T; \quad (3.7)$$
$$\bar{\Phi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{3j-2}^0 + \bar{\Phi}_{3j-1}^0 + \bar{\Phi}_{3j}^0); \quad (3.8)$$

– j-й аппроксимирующий вектор дискретного базиса первого уровня, $1 \le j \le N_1$;

$$\bar{\Psi}_{1,j}^1 = \alpha_1(\bar{\Phi}_{3j-2}^0 - \bar{\Phi}_{3j}^0); \quad (3.9)$$
$$\bar{\Psi}_{2,j}^1 = \alpha_2(-\bar{\Phi}_{3j-2}^0 + 2\bar{\Phi}_{3j-1}^0 - \bar{\Phi}_{3j}^0) \quad (3.10)$$

– j-е детализирующие векторы дискретного базиса первого уровня, $1 \le j \le N_1$;

$$\alpha = 1/\sqrt{3}; \quad \alpha_1 = 1/\sqrt{2}; \quad \alpha_2 = 1/\sqrt{6}. \quad (3.11)$$

Исходя из представления (3.3) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке первого уровня, состоящей из N_1 узлов, а второе и третье слагаемые называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня. Преставление (3.3) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 + \bar{w}_1^0; \quad (3.12)$$
$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1; \quad (3.13)$$
$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_{1,j}^1 = \Psi_{1,1} \Psi_{1,1}^T \bar{u} = \Psi_{1,1} \bar{v}^1; \quad (3.14)$$
$$\bar{w}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} w_j^1 \bar{\Psi}_{2,j}^1 = \Psi_{2,1} \Psi_{2,1}^T \bar{u} = \Psi_{2,1} \bar{w}^1, \quad (3.15)$$

где соответственно имеем

$$\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1 \ \ldots \ \bar{\Phi}_{N_1}^1]; \quad (3.16)$$
$$\Psi_{1,1} = [\bar{\Psi}_{1,1}^1 \ \ldots \ \bar{\Psi}_{1,N_1}^1]; \quad (3.17)$$
$$\Psi_{2,1} = [\bar{\Psi}_{2,1}^1 \ \ldots \ \bar{\Psi}_{2,N_1}^1] \quad (3.18)$$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса первого уровня.

В силу ортонормированности базиса операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T; \quad (3.19)$$
$$P_{\Psi,1} = \Psi_{1,1} \Psi_{1,1}^T; \quad P_{\Psi,2} = \Psi_{2,1} \Psi_{2,1}^T \quad (3.20)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

4. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Пусть система линейных алгебраических уравнений порядка N

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (4.1)$$

является дискретным аналогом некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке.

Подставим в (4.1) выражение для u в виде (3.12). И умножим поочередно обе стороны равенства слева на Φ_1^T, $\Psi_{1,1}^T$ и $\Psi_{2,1}^T$, т.е. […]

$$\Phi_1^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Phi_1^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Phi_1^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Phi_1^T \bar{f}$$
$$\Psi_{1,1}^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_{1,1}^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Psi_{1,1}^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Psi_{1,1}^T \bar{f}$$
$$\Psi_{2,1}^T A \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_{2,1}^T A \Psi_{1,1} \bar{v}^1 + \Psi_{2,1}^T A \Psi_{2,1} \bar{w}^1 = \Psi_{2,1}^T \bar{f}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} A_{1,1}\bar{u}^1 + A_{1,2}\bar{v}^1 + A_{1,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_u \\ A_{2,1}\bar{u}^1 + A_{2,2}\bar{v}^1 + A_{2,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_v \\ A_{3,1}\bar{u}^1 + A_{3,2}\bar{v}^1 + A_{3,3}\bar{w}^1 &= \bar{f}_w, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где соответственно имеем

$$A_{1,1} = \Phi_1^T A \Phi_1; \quad A_{1,2} = \Phi_1^T A \Psi_{1,1}; \quad A_{1,3} = \Phi_1^T A \Psi_{2,1}; \quad (4.3)$$

$$A_{2,1} = \Psi_{1,1}^T A \Phi_1; \quad A_{2,2} = \Psi_{1,1}^T A \Psi_{1,1}; \quad A_{2,3} = \Psi_{1,1}^T A \Psi_{2,1}; \quad (4.4)$$

$$A_{3,1} = \Psi_{2,1}^T A \Phi_1; \quad A_{3,2} = \Psi_{2,1}^T A \Psi_{1,1}; \quad A_{3,3} = \Psi_{2,1}^T A \Psi_{2,1} \quad (4.5)$$

– блочные матрицы размером $N_1 \times N_1$

$$\bar{f}_u = \Phi_1^{\mathrm{T}} \bar{f}; \quad \bar{f}_v = \Psi_{1,1}^T \bar{f}; \quad \bar{f}_w = \Psi_{2,1}^T \bar{f} \qquad (4.6)$$

– векторы правой части размером N_1.

Находим решение системы (4.2), используя блочный метод Гаусса.

Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \bar{f}_v \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \bar{f}_w \end{array}\right]$$

Выполняем прямой ход. Первый шаг:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{2,2}^1 & A_{2,3}^1 & \bar{f}_v^1 \\ 0 & A_{3,2}^1 & A_{3,3}^1 & \bar{f}_w^1 \end{array}\right],$$

где соответственно имеем

$$A_{2,2}^1 = A_{2,2} - C_{2,1}A_{1,2}; \quad A_{2,3}^1 = A_{2,3} - C_{2,1}A_{1,3}; \quad \bar{f}_v^1 = \bar{f}_v - C_{2,1}\bar{f}_u; \quad C_{2,1} = A_{2,1}A_{1,1}^{-1}; \quad (4.7)$$

$$A_{3,2}^1 = A_{3,2} - C_{3,1}A_{1,2}; \quad A_{3,3}^1 = A_{3,3} - C_{3,1}A_{1,3}; \quad \bar{f}_w^1 = \bar{f}_w - C_{3,1}\bar{f}_u; \quad C_{3,1} = A_{3,1}A_{1,1}^{-1}. \quad (4.8)$$

Второй шаг:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \bar{f}_u \\ 0 & A_{2,2}^1 & A_{2,3}^1 & \bar{f}_v^1 \\ 0 & 0 & A_{3,3}^2 & \bar{f}_w^2 \end{array}\right],$$

где соответственно имеем

$$A_{3,3}^2 = A_{3,3}^1 - C_{3,2}A_{2,3}^2; \quad \bar{f}_w^2 = \bar{f}_w^1 - C_{3,2}\bar{f}_v^1; \quad C_{3,2} = A_{3,2}^1 (A_{2,2}^1)^{-1}. \quad (4.9)$$

Выполняем обратный ход:

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= (A_{3,3}^2)^{-1} \bar{f}_w^2 \\ \bar{v}^1 &= (A_{2,2}^1)^{-1} (\bar{f}_v^1 - A_{2,3}^1 \bar{v}^1) \\ \bar{u}^1 &= A_{1,1}^{-1} (\bar{f}_u - A_{1,2}\bar{v}^1 - A_{1,3}\bar{w}^1). \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Тогда, следуя формулам (3.12)-(3.15), решение исходной задачи (4.1) получаем в виде:

$$\bar{u} = \Phi_1 \bar{u}^1 + \Psi_{1,1}\bar{v}^1 + \Psi_{2,1}\bar{w}^1, \qquad (4.11)$$

при этом следует отметить, что предложенный алгоритм позволяет получить решение, оперируя матричными операторами размерности

$$N_1 = N/3.$$

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА – ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ

В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом основании со следующими параметрами (рис. 5.1*а*): L=8 м – длина; h=1.3 м, b=1 м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м^2 – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке,

$$P_h = 100/h_b;$$

$k = 75 \cdot 10^3$ кН/м^3 – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера;

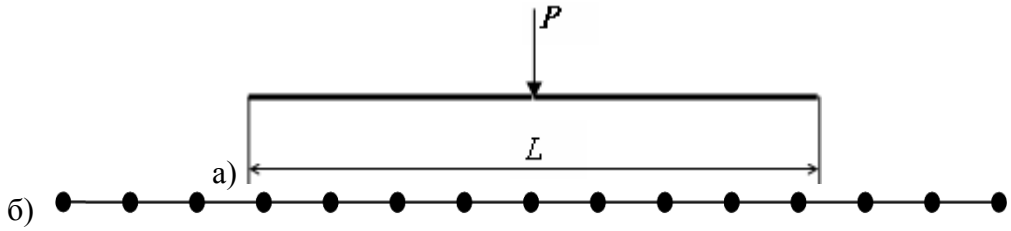


Рисунок 5.1. К постановке задачи.

$$\bar{k} = kb,\ J = bh^3/12.$$

Определение прогиба балки Бернулли сводится к решению краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x),\quad 0 < x < L; \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \text{ – краевые условия,} \quad (5.2)$$

где соответственно имеем

$$4\alpha^4 = \bar{k}/EJ;\quad F = (P/(EJ))\delta(x - L/2). \quad (5.3)$$

Для получения дискретного решения задачи разбиваем отрезок $(0,\ L)$ на равные части с шагом h_b (рис. 5.1*б*). Если n – общее количество точек, то очевидно, что

$$h_b = L/(n-1). \quad (5.4)$$

Далее переходим от решения краевой задачи (5.1)-(5.2) к решению системы разностных уравнений $A\bar{y} = \bar{f}$, подробно представленных с учетом краевых условий (5.2) в виде:

$$\begin{aligned}
&i = 1:\ \ y_1 = f_1 \\
&i = 2: \\
&\ -2y_1 + (5 + 4h_b^4\alpha^4)y_2 - 4y_3 + y_4 = f_2 \\
&2 < i < n-1: \\
&\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 4h_b^4\alpha^4)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i \\
&i = n-1: \\
&\ y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5 + 4h_b^4\alpha^4)y_{n-1} - 2y_n = f_{n-1} \\
&i = n:\ \ y_n = f_n,
\end{aligned} \quad (5.5)$$

где соответственно имеем

$$x_i = h_b(i-1);\quad y_i = y(x_i);$$

$$f_i = \begin{cases} 0,\ i = 1 \vee i = n \\ h_b^4[F(x_i)/h_b],\ 2 \le i \le n-1. \end{cases} \quad (5.6)$$

По результатам расчета при $N = 27$ построены сравнительные графики прогибов. На рис. 5.2 приведено сравнение непосредственного решения системы (5.5) y и $u0$, построенного по формуле (4.11). Следует отметить, что получено полное совпадение результатов.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016-2017 годы, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

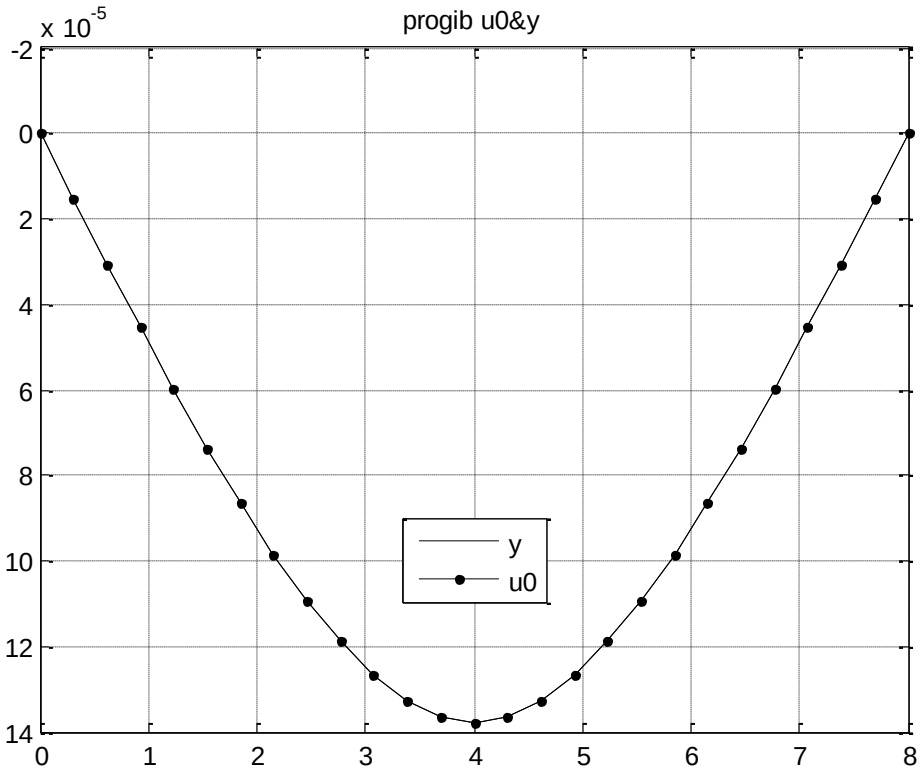


Рисунок 5.2. Сравнение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Двухсеточный метод расчета строительных конструкций на основе использования дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 128-139.
2. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** Theoretical Foundations of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2924-2927.
3. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** About Verification of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 3013-3016.
4. **Al-Bayati A.Y., Ibraheem K.I., Ghatheth A.I.** A Modified Wavelet Algorithm to Solve BVPs with An Infinite Number of Boundary Conditions. // Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, 2011.
5. **Alvarez Dıaz L., Vampa V., Martın M.T.** The Construction of Plate Finite Elements Using Wavelet Basis Functions. // Revista Investigacion Operacional, Vol. 30, No. 3, 2009, pp. 193-204.
6. **Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J.** Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
7. **Awrejcewicz J., Krysko A.V.** Wavelets-based Analysis of Parametric Vibrations of Flexible Plates. // International Applied Mechanics. Vol. 39, No. 9, 2003, pp. 997-1028.
8. **Cattani C.** Haar Wavelet Spline. // J. Interdisciplinary Math. 4, 2001, pp. 35-47.
9. **Chen X., Yang S., Ma J., He Z.** The Construction of Wavelet-Finite Element and its Application. // Finite Elements in Analysis and Design, 40, 2004, pp. 541-554.

10. **Daubechies I.** Recent Results in Wavelet Applications. // J. Electron. Imaging, 1998, 7, pp. 719-724.
11. **Fazal-i-Haq, Arshed A.** Numerical Solution of Fourth Order Boundary-Value Problems Using Haar Wavelets. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, N. 63, pp. 3131-3146.
12. **Fazal-i-Haq, Imran A., Siraj-ul-Islam.** A Haar Wavelets Based Numerical Method for Eightorder Boundary Problems. // International Journal of Mathematical and Computer Sciences, 6, 1, 2010, pp. 25-31.
13. **Glabisz W.** The Use of Walsh-Wavelets Packets in Linear Boundary Value Problems. // Comput. and Struct., 82, 2004, pp. 131-141.
14. **Glowinski R., Pan T.W., Wells R.O. Jr., Zhou X.** Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains. // Journal of Computational Physics, Volume 126, Issue 1, 1996, pp. 41-50.
15. **Gomes S., Cortina E.** Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method. // Siam J. Numer. Anal., 33-1, 1996, pp. 149-161.
16. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Multivariable Wavelet Based Finite Element Method and its Application to Thick Plates. // Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 821-833.
17. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Spline Wavelet Finite-Element Method in Structural Mechanics. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, 2006, pp. 166-190.
18. **Hariharan G.** Solving Finite Length Beam Equation by the Haar Wavelet Method. // International Journal of Computer Applications, Volume 9, No. 1, 2010, pp. 27-34.
19. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Approach to Linear Stiff Systems. // Mathematics and Computers in simulation, Vol. 64, 2004, pp. 561-567.
20. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Direct Method for Solving Variational Problems. // Mathematics and computers in simulation, 64, 2004, pp. 569-585.
21. **Hsiao C.H., Wang W.J.** Haar Wavelet Approach to Nonlinear Stiff Systems. // Math. Comput. Simulat, 57, 2001, pp. 347-353.
22. **Jaffard S.** Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, pp. 965-98.
23. **Jang G.-W., Kim J.E., Kim Y.Y.** Multiscale Galerkin Method Using Interpolation Wavelets for Two-Dimensional Elliptic Problems in General Domains. // Int. J. Numer. Meth. Eng. N2, 2004, T.59, pp. 225-253.
24. **Ko J., Kurdila A.J.** A Class of Finite Element Methods Based on Orthonormal Compactly Supported Wavelets. // Computational Mechanics, 1995, 16(4), pp. 235-244.
25. **Ko J., Kurdila A.J., Pilant M.S.** Triangular Wavelet Based Finite Elements Via Multivalued Scaling Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 146, 1997, pp. 1-17.
26. **Lepik U.** Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 2007, 56, 1, pp. 28-46.
27. **Lepik U.** Numerical Solution Of Differential Equations Using Haar Wavelets. // Math. and Comp. Simulation Vol. 68, 2005, pp. 127-143.
28. **Ma J., Xue J.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam Element. // Finite Element in Analysis and Design, 2003, 39, pp. 965-975.
29. **Ma J., Xue J., Yang S., He Z.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam element. // Finite Elements in Analysis and Design, 39, 2003, pp. 965-975.
30. **Majak J., Pohlak M., Eerme M.** Application of the Haar Wavelet Based Discretization Technique to Orthotropic Plate and Shell Problems. // Mechanics of Composite Materials, 45(6), 2009, pp. 631-642.
31. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Lepikult T.** Weak formulation based Haar wavelet method for solving differential

equations. // Applied Mathematics and Computation, 211(2), 2009, pp. 488-494.
32. **Monasse P., Perrier V.** Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions. // SIAM J. Math. Anal., 29(4), 1998, p. 1040-1065.
33. **Naldi G., Venini P.** Wavelet Analysis of Structures: Statics, Dynamics and Damage Identification. // Meccanica, 32, 1997, pp. 223-230.
34. **Qian S., Weiss J.** Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations. // J. Comput. Phys., 106, 1993, pp. 155-175.
35. **Vampa V., Alvarez Dıaz L., Martin M.T.** Daubechies Wavelet Beam Element. // Mecanica Computacional, 26, 2007, pp. 654-666.
36. **Xu J., Shann W.** Galerkin Wavelets Methods for Two-Point Boundary Value Problems. // Numer. Math., 63, 1992, pp. 123-144.

REFERENCES

1. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** Dvukhsetochnyy Metod Rascheta Stroitelnykh Konstruktsiy na Osnove Ispolzovaniya Diskretnogo Bazisa Khaara. Chast 1: Odnomernyye Problemi [Two-Grid Method of Structural Analysis Based on Discrete Haar Basis. Part 1: One-Dimensional Problems]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 128-139
2. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** Theoretical Foundations of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 2924-2927.
3. **Akimov P.A., Mojtaba Aslami.** About Verification of Correct Wavelet-Based Approach to Local Static Analysis of Bernoulli Beam. // Applied Mechanics and Materials, Vols. 580-583, 2014, pp. 3013-3016.
4. **Al-Bayati A.Y., Ibraheem K.I., Ghatheth A.I.** A Modified Wavelet Algorithm to Solve BVPs with An Infinite Number of Boundary Conditions. // Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, 2011.
5. **Alvarez Dıaz L., Vampa V., Martın M.T.** The Construction of Plate Finite Elements Using Wavelet Basis Functions. // Revista Investigacion Operacional, Vol. 30, No. 3, 2009, pp. 193-204.
6. **Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J.** Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 2703-2716.
7. **Awrejcewicz J., Krysko A.V.** Wavelets-based Analysis of Parametric Vibrations of Flexible Plates. // International Applied Mechanics. Vol. 39, No. 9, 2003, pp. 997-1028.
8. **Cattani C.** Haar Wavelet Spline. // J. Interdisciplinary Math. 4, 2001, pp. 35-47.
9. **Chen X., Yang S., Ma J., He Z.** The Construction of Wavelet-Finite Element and its Application. // Finite Elements in Analysis and Design, 40, 2004, pp. 541-554.
10. **Daubechies I.** Recent Results in Wavelet Applications. // J. Electron. Imaging, 1998, 7, pp. 719-724.
11. **Fazal-i-Haq, Arshed A.** Numerical Solution of Fourth Order Boundary-Value Problems Using Haar Wavelets. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, N. 63, pp. 3131-3146.
12. **Fazal-i-Haq, Imran A., Siraj-ul-Islam.** A Haar Wavelets Based Numerical Method for Eightorder Boundary Problems. // International Journal of Mathematical and Computer Sciences, 6, 1, 2010, pp. 25-31.
13. **Glabisz W.** The Use of Walsh-Wavelets Packets in Linear Boundary Value Problems. // Comput. and Struct., 82, 2004, pp. 131-141.
14. **Glowinski R., Pan T.W., Wells R.O. Jr., Zhou X.** Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains. // Journal of Computational Physics, Volume 126, Issue 1, 1996, pp. 41-50.
15. **Gomes S., Cortina E.** Convergence Estimates

for the Wavelet Galerkin Method. // Siam J. Numer. Anal., 33-1, 1996, pp. 149-161.
16. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Multivariable Wavelet Based Finite Element Method and its Application to Thick Plates. // Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 821-833.
17. **Han J., Ren W., Huang Y.** A Spline Wavelet Finite-Element Method in Structural Mechanics. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66, 2006, pp. 166-190.
18. **Hariharan G.** Solving Finite Length Beam Equation by the Haar Wavelet Method. // International Journal of Computer Applications, Volume 9, No. 1, 2010, pp. 27-34.
19. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Approach to Linear Stiff Systems. // Mathematics and Computers in simulation, Vol. 64, 2004, pp. 561-567.
20. **Hsiao C.H.** Haar Wavelet Direct Method for Solving Variational Problems. // Mathematics and computers in simulation, 64, 2004, pp. 569-585.
21. **Hsiao C.H., Wang W.J.** Haar Wavelet Approach to Nonlinear Stiff Systems. // Math. Comput. Simulat, 57, 2001, pp. 347-353.
22. **Jaffard S.** Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems. // SIAM J. Numer. Anal., 29, 1992, pp. 965-98.
23. **Jang G.-W., Kim J.E., Kim Y.Y.** Multiscale Galerkin Method Using Interpolation Wavelets for Two-Dimensional Elliptic Problems in General Domains. // Int. J. Numer. Meth. Eng. N2, 2004, T.59, pp. 225-253.
24. **Ko J., Kurdila A.J.** A Class of Finite Element Methods Based on Orthonormal Compactly Supported Wavelets. // Computational Mechanics, 1995, 16(4), pp. 235-244.
25. **Ko J., Kurdila A.J., Pilant M.S.** Triangular Wavelet Based Finite Elements Via Multivalued Scaling Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 146, 1997, pp. 1-17.
26. **Lepik U.** Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 2007, 56, 1, pp. 28-46.
27. **Lepik U.** Numerical Solution Of Differential Equations Using Haar Wavelets. // Math. and Comp. Simulation Vol. 68, 2005, pp. 127-143.
28. **Ma J., Xue J.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam Element. // Finite Element in Analysis and Design, 2003, 39, pp. 965-975.
29. **Ma J., Xue J., Yang S., He Z.** A Study of the Construction and Application of a Daubechies Wavelet-Based Beam element. // Finite Elements in Analysis and Design, 39, 2003, pp. 965-975.
30. **Majak J., Pohlak M., Eerme M.** Application of the Haar Wavelet Based Discretization Technique to Orthotropic Plate and Shell Problems. // Mechanics of Composite Materials, 45(6), 2009, pp. 631-642.
31. **Majak J., Pohlak M., Eerme M., Lepikult T.** Weak formulation based Haar wavelet method for solving differential equations. // Applied Mathematics and Computation, 211(2), 2009, pp. 488-494.
32. **Monasse P., Perrier V.** Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions. // SIAM J. Math. Anal., 29(4), 1998, p. 1040-1065.
33. **Naldi G., Venini P.** Wavelet Analysis of Structures: Statics, Dynamics and Damage Identification. // Meccanica, 32, 1997, pp. 223-230.
34. **Qian S., Weiss J.** Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations. // J. Comput. Phys., 106, 1993, pp. 155-175.
35. **Vampa V., Alvarez Dıaz L., Martin M.T.** Daubechies Wavelet Beam Element. // Mecanica Computacional, 26, 2007, pp. 654-666.
36. **Xu J., Shann W.** Galerkin Wavelets Methods for Two-Point Boundary Value Problems. // Numer. Math., 63, 1992, pp. 123-144.

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной мате-

матики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26,тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета; главный научный сотрудник Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; email: akimov@raasn.ru,
pavel.akimov@gmail.com.

Семин Дмитрий Федорович, аспирант кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26; тел./факс: +7(499) 183-59-94,
E-mail: KafedraIPM@mgsu.ru.

Marina L. Mozgaleva, Dr.Sc., Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia;
phone/fax: +7(499) 183-59-94;
E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc., Professor; Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA; Professor of Department of Applied Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building; Principal researcher of the Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63;
fax: +7 (495) 650-27-31;
E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com

Dmitry F. Semin, Ph.D. Student, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia;
phone/fax: +7(499) 183-59-94;
E-mail: KafedraIPM@mgsu.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-126-136

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

В.Л. Мондрус[1], Д.К. Сизов[2]

[1] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

[2] ООО «ВИБРОСЕЙСМОЗАЩИТА», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Решение большинства практических задач, возникающих при расчете конструкций, требует численного решения краевых задач. В статье на примерах решения конкретных краевых задач описываются возможности современного объектно-ориентированного языка программирования Python. Данный язык обладает удобным синтаксисом и возможностями гибкого использования существующих библиотек численных методов, позволяющих пользователю в максимально короткие сроки подготовить программный код и приступить к изучению задачи. Богатые возможности графической библиотеки Matplotlib позволяют получать графическое отображение результатов расчета. Использованная в статье библиотека Numpy является стандартной библиотекой для проведения любых матрично-векторных расчетов на языке Python, её применение превращает язык Python в среду для программирования численных расчетов, аналогичную таким широко известным программным продуктам, как Matlab и GNUOctave. В статье методом конечных разностей решена задача для уравнения Лапласа, описывающем поле распределение температуры на прямоугольной области; задача поиска минимума функционала Дирихле вариационно-разностным методом; динамическая задача колебания массы на вязко-упругом элементе при колебаниях основания и трехмерная задача теории упругости вариационно-разностным методом.

Ключевые слова: вариационно-разностный метод решения краевых задач, язык программирования Python, трехмерная краевая задача теории упругости, поиск минимума функционала Дирихле

FEATURES OF THE NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH THE USE OF PYTHON ALGORITHMIC PROGRAMMING LANGUAGE

Vladimir L. Mondrus[1], Dmitry K. Sizov[2]

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

[2] LLD «VIBROSEYSMOZASHCHITA», Moscow, RUSSIA

Abstract: The solution of the majority of the practical tasks arising at calculation of constructions demands a numerical solution of boundary value problems. In article on examples of a solution of specific boundary value problems possibilities of a modern object-oriented programming language of Python are described. This language possesses convenient syntax and opportunities of flexible use of the existing libraries of the numerical methods allowing the user to prepare a program code and to start studying of a task in the shortest terms. Rich opportunities of graphic library Matplotlib are allowed to have graphic display of results of calculation. The Numpy library used in article is standard library for carrying out any matrix and vector calculations in the Python language, its application turns the Python language on Wednesday for programming of numerical calculations, similar to such widely known software products as Matlab and GNU Octave. In article the method of finite differences has solved a task for Laplace's equation, the describing field distribution of temperature on rectangular area; problem of search of a minimum of functionality of Dirikhle by a variational-difference method; a dynamic problem of vibration of weight on a visco-elastic element at vibrations of the basis and a three-dimensional task of the theory of elasticity by a variational-difference method.

Keywords: variational-difference method of a solution of boundary value problems,
Python programming language, three-dimensional boundary value problem of the theory of elasticity,
search of a minimum of functionality of Dirikhle

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЯЗЫКА PYTHON

Язык Python является простым для изучения языком программирования, способствующем написанию высокоструктурированных программ. Одно из основных преимуществ данного языка, как средства для решения краевых задач – это, прежде всего, изобилие библиотек, позволяющих в максимально сжатые сроки использовать уже существующие библиотечные модули в своих собственных программах. Одной из привлекательных черт данного языка является открытость реализаций, существуют интерпретаторы языка для многих платформ. Наиболее известной эталонной реализацией языка является CPython, которая написана на языке C. Python основан на языке программирования Java, в процессе трансляции происходит трансляция исходного кода языка Python в язык Java, что способствует еще большей переносимости программ. Особого внимания заслуживает транслятор IronPython, предназначенный для интеграции программ Python с приложениями, созданными для платформы Microsoft.NET Framework. Также существует реализация языка Python на самом языке Python (интерпретатор PyPy, включающий в себя Jit компилятор). Описанное программное обеспечение находится в свободном доступе и может быть скачано с официальных сайтов.

Важным свойством языка является наличие обширной литературы, затрагивающей как описание синтаксиса языка, так и конкретные пакеты, предназначенные для решения определенного круга задач. Наиболее известными сферами применения Python в области разработки научного софта является машинное обучение и анализ данных, в том числе обладающих разряженным и плохо структурированным составом. Своей способностью к обработке больших массивов данных данный язык обязан, прежде всего, нескольким библиотекам, специально созданных для быстрой обработки данных.

Основу, так называемого, "математического" Python составляет ряд наиболее известных в сообществе Python пакетов: NumPy, SciPy и Matplotlib, а также Pandas. Первоначально язык Python не задумывался как язык для численных расчетов, однако наличие данных пакетов позволяет использовать его как средство вычислений в некоторой степени аналогичное иным пакетам матричных вычислений MATLAB и GNUOctave, распространяющихся как на основе коммерческих, так и свободных лицензий.

Библиотека NumPy позволяет создавать массивы произвольной размерности и обладает множеством встроенных функций-операций для работы с ними. Так, например, для транспонирования матрицы, либо вычисления какой-либо функции от всех элементов массива не требуется написание кода, включающего в себя циклы, что приводит к значительному сокращению как самого программного кода, так и способствует большей векторизуемости вычислений.

Пакет SciPy включает в себя поддержку специальных функций, быстрое преобразование Фурье, операции линейной алгебры, подпрограммы решения дифференциальных уравнений и поисковой оптимизации, а также включает в себя функции интерполяции и сглаживания. Также поддерживается включение кода C внутрь кода Python программ.

Matplotlib позволяет получать качественное графическое представление данных, как в виде двухмерных, так и трехмерных графиков. Далее в статье используются именно результаты, полученные с использованием данного пакета, помимо которого возможно применение библиотеки DISLIN, либо Chaco и Mayavi, Mayavi2.

В качестве примеров рассмотрим несколько решений краевых задач с использованием возможностей описанных библиотек.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Как известно, уравнение Лапласа описывает многие стационарные процессы (теплопроводности, диффузии, электростатики и т.д.). Рассмотрим двухмерную прямоугольную область, на границах которой задано распределение температуры (рис. 1).

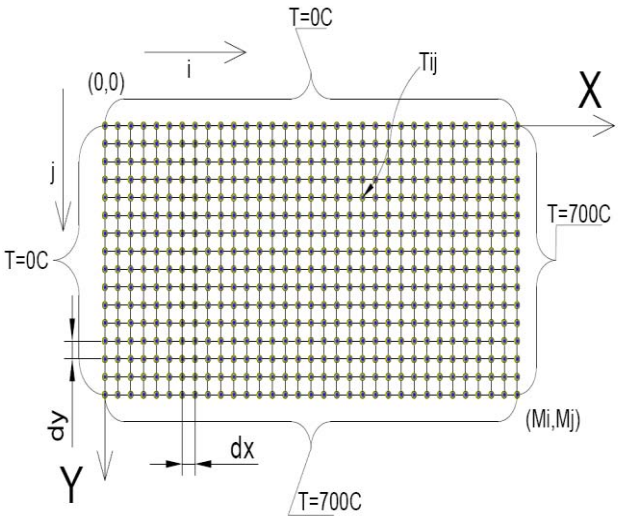


Рисунок 1. Рассматриваемая область с заданной на границах температурой.

Уравнение Лапласа и граничные условия для прямоугольной области имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \\ \begin{cases} T(x,0) = 0^0 C, \;\; T(x, Y_0) = 700^0 C \\ T(0, y) = 0^0 C, T(X_0, y) = 700^0 C \end{cases} \end{cases} \tag{2.1}$$

Для решения задачи применим метод конечных разностей, записав конечно-разностный аналог уравнения в виде:

$$\frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{dx^2} + \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{dy^2} = 0, \tag{2.2}$$

где $T_{i,j}^{k+1}$ – значение искомой функции в [i,j] точке на k+1 итерации, dx, dy – шаг по координате x и y. Укрупненная блок схема решения задачи распределения температуры представлена на рис. 2.

Выполнив итерации метода Зейделя, на сетке размером 50x50 точек, получим поле распределение температур, которое можно представить средствами библиотеки Matplotlib в виде двух и трехмерных графиков, представленных в таблице 1. Как видно из рисунков, граничные условия задачи выполнены с высокой точностью. Библиотека Matplotlib позволяет производить настройку преобладающих цветов графического отображения в весьма широких пределах и предоставляет пользователю богатые возможности выбора цветовых форм оформления графиков из существующего набора.

При выполнении расчетов на языке Python следует избегать явной записи циклов по отдельным точкам области, максимально используя возможности индексных срезов библиотеки NumPy, что позволяет максимально ускорить процесс вычислений.

3. ПОИСК МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ДИРИХЛЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Потенциальная энергия мембраны с точностью до множителя, выражающего её физические свойства выражается кратным интегралом по области:

$$D[u] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 \right] dx\, dy, \tag{3.1}$$

где Ω – область, занимаемая мембраной; u – искомая функция.

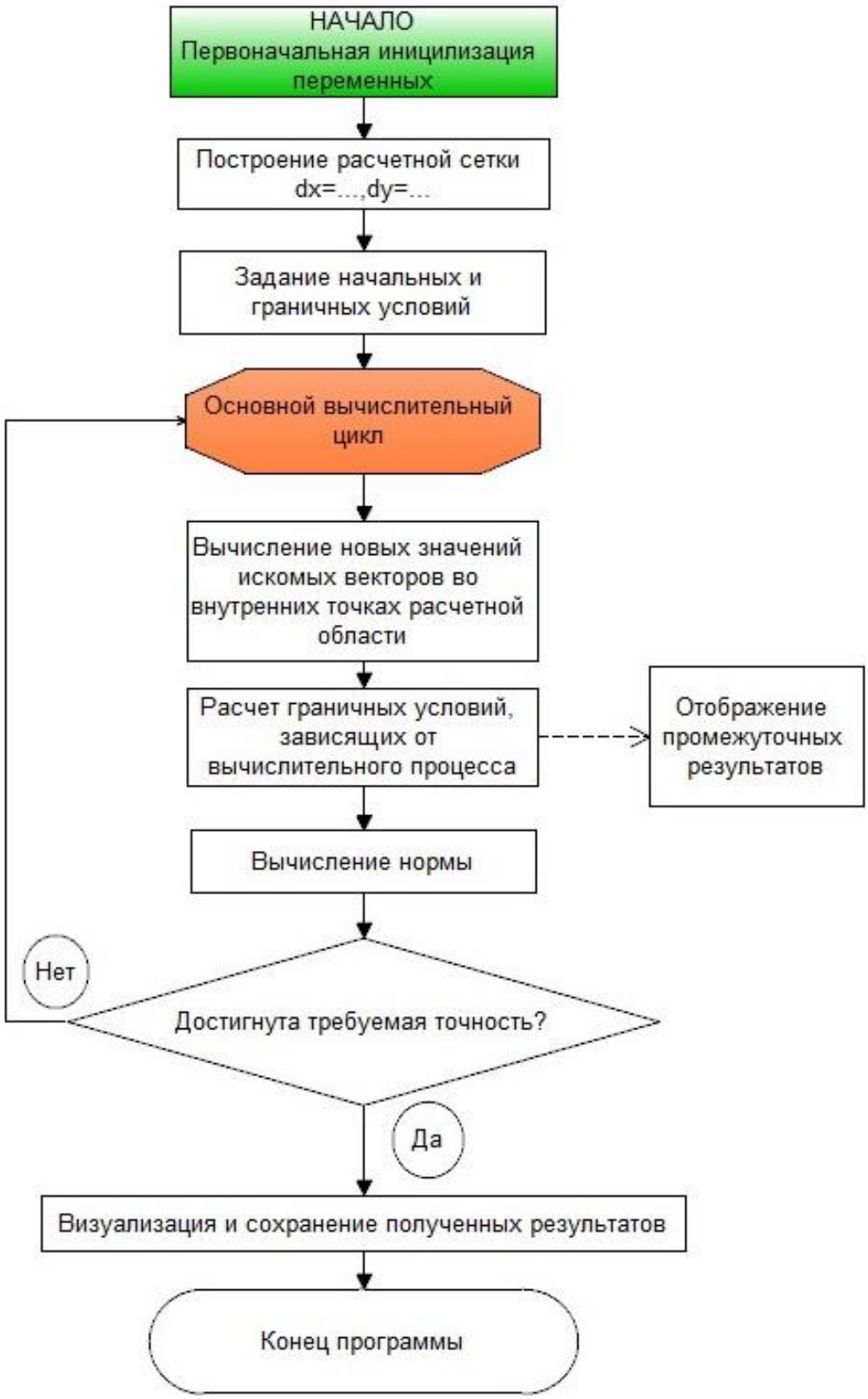
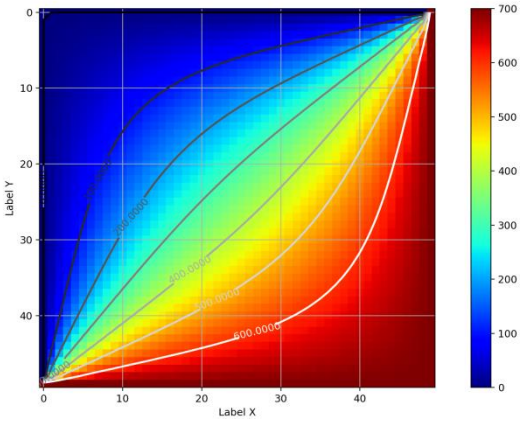
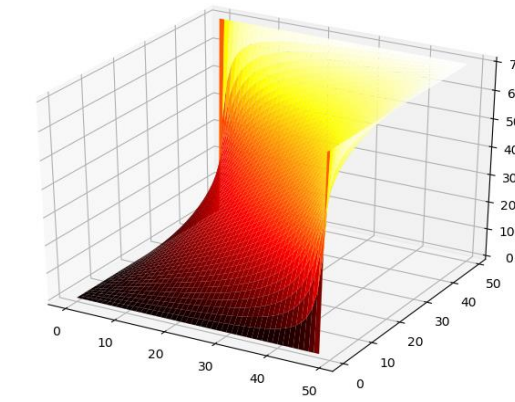


Рисунок 2. Укрупненная блок-схема программы для задачи теплообмена (блок с вычислением граничных условиях, зависящих от вычислительного процесса позволяет получить значения искомой функции на тех участках границы области, где граничные условия не заданы).

Таблица 1. Поле распределение температур.

Изополе температур на двухмерной области

Трехмерный график поля температур


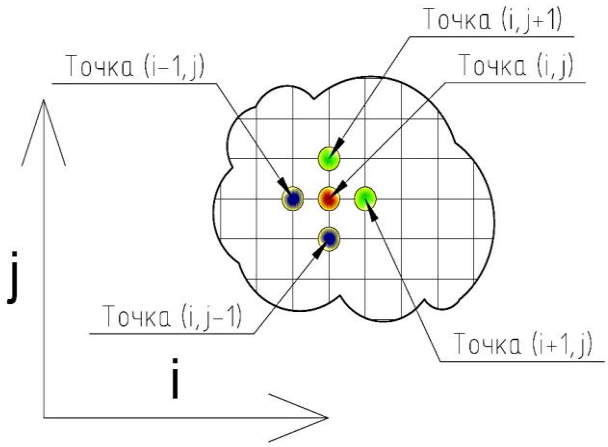


Рисунок 3. Фрагмент конечно-разностной сетки (область [i,j] точки).

Положение равновесия мембраны соответствует условие минимальности данного функционала при заданных граничных условиях. Решение задачи будем производить вариационно-разностным методом с численным вычислением производной от функционала каждой точке области решения.

Конечно-разностный аналог функционала имеет вид:

$$D[u]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_x}\right)^2+\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_y}\right)^2\right]h_x h_y = \left[\ldots+\underbrace{\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_x}\right)^2+\left(\frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j}}{h_y}\right)^2}_{Point[i-1,j]}+\right.$$

$$\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_x}\right)^2+\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_y}\right)^2}_{Point[i,j]}$$

$$\left.+\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j-1}-u_{i,j-1}}{h_x}\right)^2+\left(\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_y}\right)^2}_{Point[i,j-1]}+\ldots\right] \qquad (3.2)$$

На рис.3 показан фрагмент конечно-разностной сетки в окрестности точки с индексами *i*, *j*. Видно, что непосредственное участие в формировании уравнения в [*i,j*] точке принимают лишь выражения для энергии в [*i-1,j*], [i,j] и [*i,j-1*] точках, несмотря на то, что в каждом вариационно-разностном уравнении будет участвовать пять точек с индексами [*i-1,j*], [*i,j*], [*i,j-1*], [*i+1,j*], [*i,j+1*].

В процессе вычислений по методу Зейделя на точки с индексами [*i+1,j*], [*i,j+1*] будет распространяться влияние со стороны точек [*i-1,j*], [*i,j*] и [*i,j-1*].

На рис. 4 приводится укрупненная блок-схема вариационно-разностного метода с учетом использования хеш-таблицы (особой формы именованного массива) языка Python. применение хэш-массива позволяет естественным образом учесть изменение вида уравнений на границах рассматриваемой прямоугольной области.

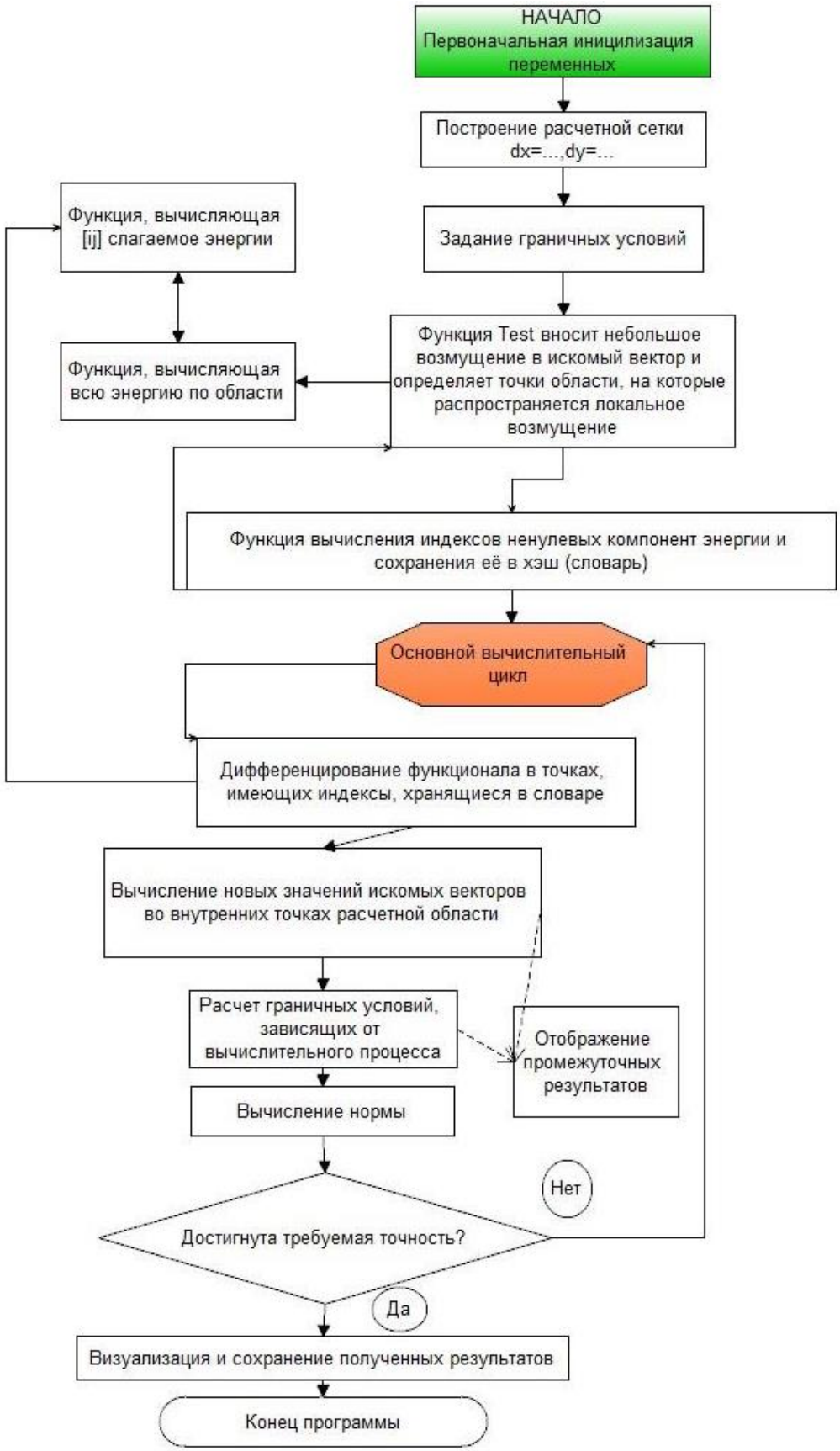
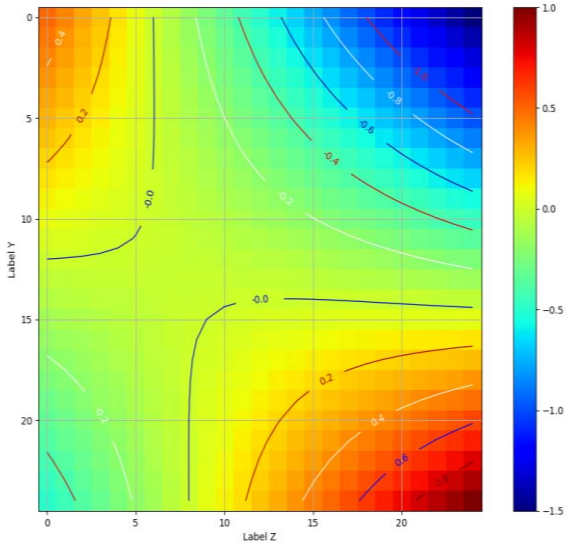
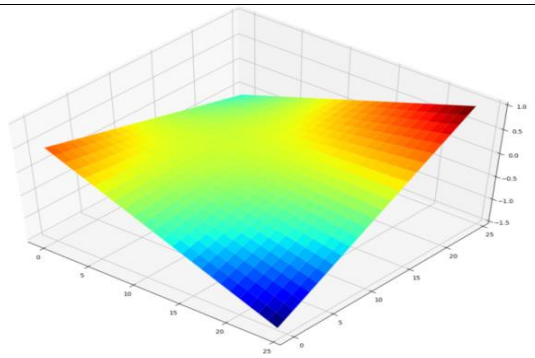


Рисунок 4. Укрупненная блок-схема вариационно-разностного метода.

На границах области число входящих в уравнение вариационно-разностного метода слагаемых меняется, использование хэш-массива позволяет хранить индексы тех компонентов энергии, которые вносят ненулевой вклад на границе.

В таблице 2 приводятся результаты решения двухмерной задачи минимизации функционала Дирихле при заданных условиях на границе.

Таблица 2. Результаты решения двухмерной задачи минимизации функционала Дирихле при заданных условиях на границе.

Изополе величины u на двухмерной области

Трехмерный график величины u


4. РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Одной из важных технических задач является защита оборудования и зданий от вибрирующего основания. Для гашения вибрационного воздействия чаще всего используются системы виброизоляции, основанные на разделении защищаемого объекта и источника колебаний вязкоупругим элементом. Простейшая модельная схема системы виброзащиты сосредоточенной массы представлена на рис. 5.

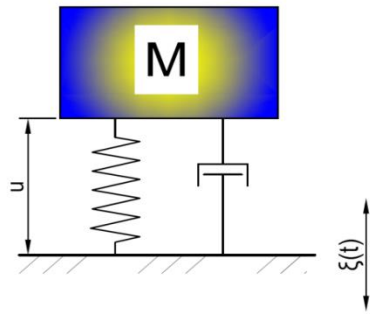


Рисунок 5. Система виброзащиты объекта

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение массы на вязкоупругом элементе имеет вид:

$$M\frac{d^2u}{dt^2}+b\frac{du}{dt}+cu=M\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad (4.1)$$

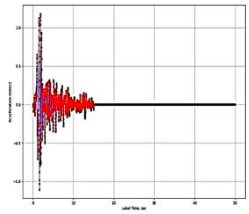
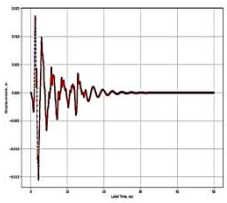
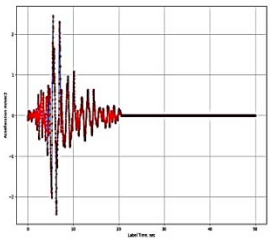
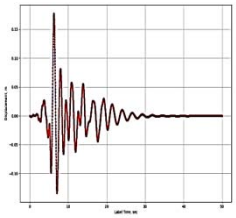
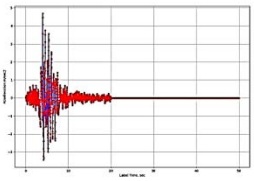
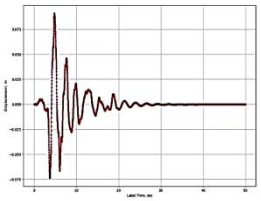
где M – масса объекта; u – искомое относительное перемещение, c – жесткость пружины, b – вязкость, а правая часть уравнения включает в себя заданное ускорение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

основания.

Решение задачи произведем методом Эйлера-Коши, результаты приводятся в таблице 3 (при различных заданных акселерограммах).

Таблица 3. Результаты решения задачи методом Эйлера-Коши.

Акселерограмма, м/с^2	Перемещения массы, м
	
	
	

5. РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Решение задачи для трехмерного тела представляет определенные трудности, связанные, прежде всего с объемом вычислительной работы, а также с подготовкой и вводом исходных данных. Рассмотрим трехмерное упругое тело в виде параллелепипеда, сжатого на определенную заданную величину (одинаковую для всех точек верхней грани). Боковые поверхности параллелепипеда свободны от усилий, а нижняя грань жестко защемлена, точки верхней грани имеют только перемещение вниз, перемещение в плоскости верхней грани исключено. Как известно, выражение для потенциальной энергии упругого дела, выраженное через перемещения имеет вид:

$$A[u,v,w]=\frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+$$
$$+G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{G}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\right. \quad (5.1)$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, а u,v,w – компоненты вектора перемещений.

Согласно принципу минимума потенциальной энергии, действительное распределение вектора перемещений сообщает полной потенциальной энергии системы Π абсолютный минимум. Выражение потенциальной энергии упругого тела имеет вид:

$$\Pi=\iiint_V A[u,v,w]dV-\iiint_V(Xu+Yv+Zw)dV$$
$$-\iint_{S_1}(X_\nu u+Y_\nu v+Z_\nu w)dS, \quad (5.2)$$

где X,Y,Z – компоненты вектора объемных сил; X_ν,Y_ν,Z_ν – компоненты вектора поверхностных сил, заданных на поверхности S_1.

При рассматриваемых граничных условиях (сжатие прямоугольного параллелепипеда) компоненты объемных сил и компоненты вектора поверхностных сил на свободных гранях параллелепипеда равны нулю. В этом случае выражение потенциальной энергии упрощается - остается лишь член, включающий в себя трехмерный интеграл от потенциальной энергии.

Дискретизация трехмерной области сеткой показана на рис. 6, а локальная связь входящих в каждое уравнение вариационно-разностного метода компонент функционала энергии приводится на рис. 7 для внутренних точек области. Для решения задачи производная функционала в [*i,j,k*] точке вычисляется аналитически. Решение задачи осуществляется итерационным методом Зейделя. С целью учета свободной границы парал-

лелепипеда вводится расширенная область, размеры которой позволяют выполнять итерации внутри параллелепипеда единообразно как для внутренних точек расширенной области, так и для точек границы расчетной области трехмерного тела.

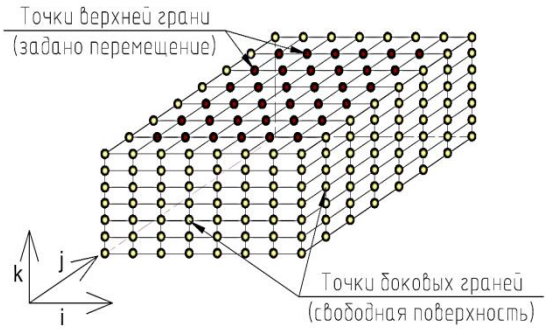


Рисунок 6. Дискретизация трехмерной области

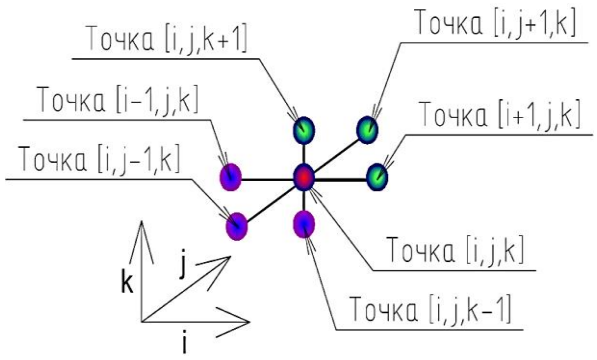
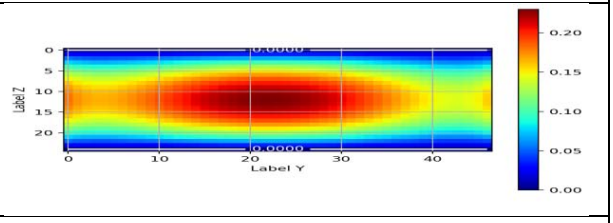
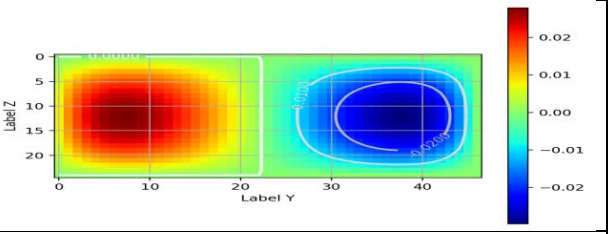
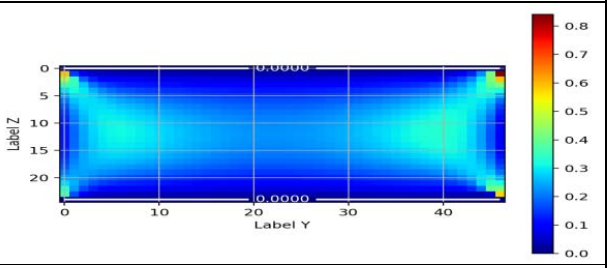
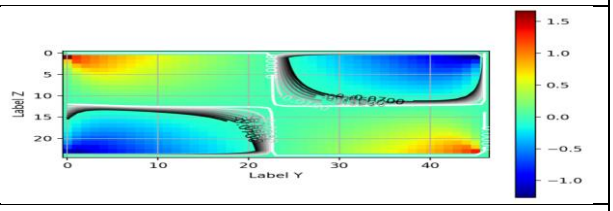
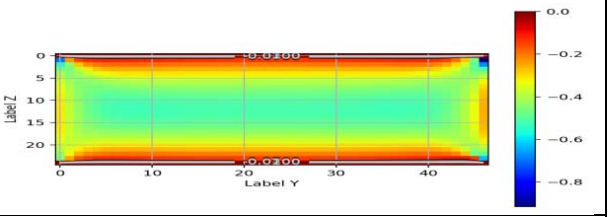
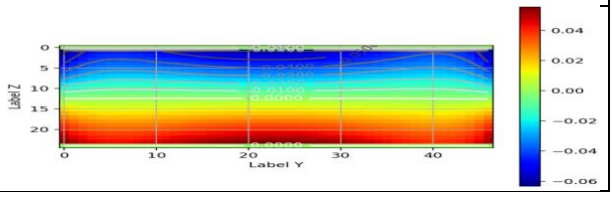


Рисунок 7. Фрагмент сетки вариационно-разностной аппроксимации в окрестности [i,j,k] точки.

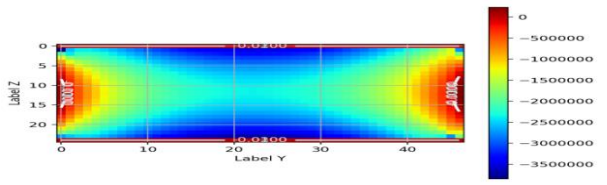
Граничные условия задачи принимаются следующие: нижняя грань закреплена, а верхняя имеет одинаковое для всех точек вертикальное смещение.

Результаты численного решения вариационно-разностным методом трехмерной задачи сжатия трехмерного параллелепипеда представлены в таблице 4. В качестве сечения трехмерного тела рассматривается плоскость перпендикулярная основанию параллелепипеда и проходящая через середину стороны, расположенной вдоль оси X.

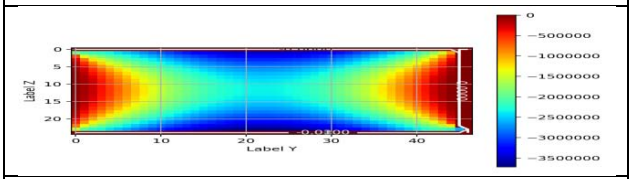
Таблица 4. Результаты численного решения вариационно-разностным методом трехмерной задачи сжатия трехмерного параллелепипеда.

Изополе деформаций ε_{xx}

Изополе деформаций ε_{xy}

Изополе деформаций ε_{yy}

Изополе деформаций ε_{yz}

Изополе деформаций ε_{zz}

Изополе деформаций ε_{zx}


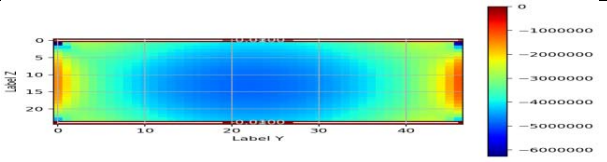
Изополе напряжений σ_{xx}



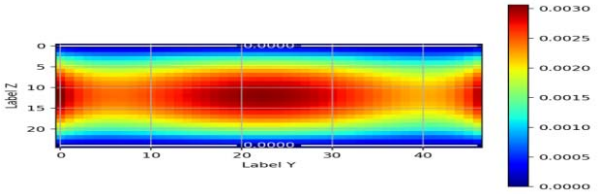
Изополе напряжений σ_{yy}



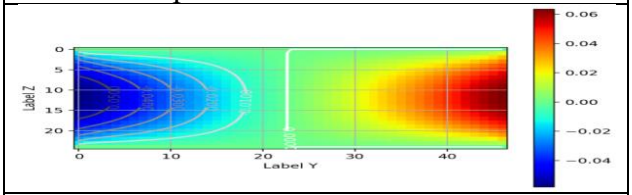
Изополе напряжений σ_{zz}



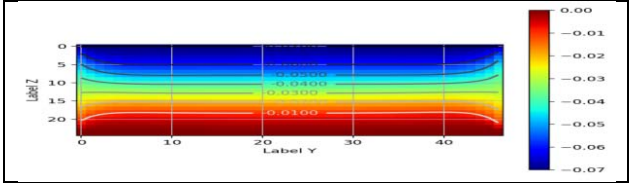
Изополе перемещенийu



Изополе перемещений v



Изополе перемещений w



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. **Годунов С.К**. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.
3. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
4. **Гейтвуд Б.Е.** Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. – М.: Издательство иностранной литературы, 1959. – 349 с.
5. **Маккинли У.** Python и анализ данных. – М.: ДКМ Пресс, 2015. – 482 с.
6. **Панюкова Т.А.** Численные методы. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 224 с.
7. **Прохоренок Н.А.** Python 3 и PyQt5. Разработка приложений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 832 с.
8. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж**. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. **Тимошенко С.П., Гере Дж**. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
10. **Рамальо Л.**. Python. К вершинам мастерства.– М.: ДМК Пресс, 2016. – 768 с.
11. **Седжвик Р., Уэйн К., Дондеро Р.** Программирование на языке Python. – М.: Вильямс, 2017. – 736 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vasidzu K**. Variatsionnye Metody v Teorii Uprugosti i Plastichnosti [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Mir, 1987, 542 pages.
2. **Godunov S.K**. Uravneniya Matematicheskoy Fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979, 392 pages.
3. **Godunov S.K., Riaben'kii V.S**. Raznostnye Skhemy [Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 440 pages.
4. **Geitvud B.E.** Temperaturnye Napriazheniia Primenitel'no k Samoletam, Snariadam, Turbinam i Yadernym Reaktoram [Temperature Stresses Applied to Aircraft, Projectiles, Turbines and Nuclear Reactors]. Moscow, Izdatelstvo Inostrannoi literatury, 1959, 349 pages.

5. **Makkinli U.** Python i Analiz Dannykh [Python and Data Analysis]. Moscow, DMK Press, 2015, 482 pages.
6. **Paniukova T.A.** Chislennye Metody [Numerical Methods]. Moscow, Librokom, 2010, 224 pages.
7. **Prokhorenok N.A.** Python 3 i PyQt5. Razrabotka Prilozhenii [Python 3 and PyQt5. Application Development]. Saint-Petersburg, BKhV-Peterburg, 2016, 832 pages.
8. **Timoshenko S.P., Gud'er Dzh.** Teoriia Uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1975, 576 pages.
9. **Timoshenko S.P., Gere Dzh.** Mekhanika materialov [Mechanics of Materials]. Moscow, Mir, 1976, 669 pages.
10. **Ramal'o L.** Python. K vershinam masterstva [Python. To the heights of skill]. Moscow, DMK Press, 2016, 768 pages.
11. **Sedzhvik R., Uein K., Dondero R.** Programmirovanie na iazyke Python [Programming in Python]. Moscow, Williams, 2017, 736 pages.

Мондрус Владимир Львович, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук; заведующий кафедрой строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел: +7 (495) 781-80-07, факс: +7 (499) 183-44-38; e-mail: mondrus@mail.ru.

Сизов Дмитрий Константинович, кандидат технических наук, начальник отдела ООО «ВИБРОСЕЙСМОЗАЩИТА»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел./факс: 8 (499) 784-78-91;
E-mail: vibroprotect@mail.ru.

Vladimir L. Mondrus, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr.Sc.; Head of Structural and Theoretical Mechanics Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone: +7 (495) 781-80-07, fax: +7 (499) 183-44-38;
E-mail: mondrus@mail.ru.

Dmitry K. Sizov, Ph.D., Head of Department LLD «VIBROSEYSMOZASHCHITA»; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: 8 (499) 784-78-91;
E-mail: vibroprotect@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-137-144

COMPUTER MODELING OF NONLINEAR SYSTEM VIBRATIONS WITH APPLOWANCE FOR NONLOCAL DAMPING

Vadim D. Potapov*, *Elena S. Shepitko
Russian University of Transport (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: The paper is devoted to the analysis of the nonlocal damping consideration influence on the results of computer modeling of nonlinear systems subjected to periodic deterministic and stochastic stationary loads forced vibrations The shallow arc dynamic behavior is examined. The Galerkin method is used for the problem solving.

Keywords: computer modeling, nonlinear systems vibrations, nonlocal damping, Galerkin method, deterministic periodic load, stochastic stationary load

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

В.Д. Потапов*, *Е.С. Шепитько
Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

Abstract: Статья посвящена анализу влияния учёта нелокального демпфирования на результаты компьютерного моделирования вынужденных колебаний нелинейной системы под действием детерминированной периодической и стохастической стационарной нагрузки. Динамическое поведение системы исследуется на примере пологой арки. Для решения задачи используется метод Бубнова-Галёркина.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, колебания нелинейных систем, нелокальное демпфирование, метод Бубнова-Галёркина, детерминированная периодическая нагрузка, стохастическая стационарная нагрузка.

1. INTRODUCTION

The engineering structures are subjected to various external dynamic loads such as seismic loads, wind loads, transport loads, pedestrian loads, etc. It is important to take the vibration energy dissipation into account for the structures design process. The damping model choice is highly correlated to the precision of calculations especially for the structures that are made of modern composite materials. Using the damping models that are closer to reality allows to decrease the risks for such structures

Damping in the certain point of the structure with longitudinal coordinate x_1,, obviously depends not only on local value of motion velocity at this point $v(x_1)$, but also on the values of motion velocity in the neighboring points. The more distance between the two points the lower influence one of them on another [2].

The modern structures often contain geometrically nonlinear elements. Moreover, under external impacts the certain linear elements may change the shape and acquire some nonlinear features. In this research the problem of nonlinear system forced vibrations modeling consider nonlocal damping solved. As an example of the nonlinear system the shallow arc is used. Nonlocal damping modal is assumed consider the time hysteresis effect that was proposed in paper [2].

Shallow arc dynamic process has some specific features such as deflection leap under some loads. [TU] To determine the load range that allows to fully analyze all dynamic regimes of shallow arc the static loading is used.

The numerical solution of the problem and study of the shallow arc vibrations modeling consider nonlocal damping results are given in the paper. Shallow arc motion is modelled under the periodic deterministic and stationary stochastic transverse load.

2. PROBLEM STATEMENT

To describe the damping process the Kelvin-Voigt material model is commonly used in engineering practice:

$$\sigma = E\varepsilon + \gamma E\dot{\varepsilon}\,, \tag{1}$$

where σ, ε - normal stress and axial strain, $\dot{\varepsilon}$ – rate of strain change, E – Young modulus, γ – damping ratio.

In the paper the dot indicates the time derivative.

Consider nonlocal damping equation (1) transforms to [2]:

$$\sigma(x,t) = E[\varepsilon(x,t) + \gamma \int_0^l C_v(|x-\theta|)\dot{\varepsilon}(\theta,t)d\theta] \tag{2}$$

Here $C_v(|x-\theta|)$ – the kernel function, which characterize the nonlocal. The $C_v(|x-\theta|)$ function responds to normalization requirement, that is:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_v(|x-\theta|)d\theta = 1 \tag{3}$$

In the paper the exponential kernel function is used:

$$C_v(|x-\theta|) = \frac{\mu}{2}\cdot e^{-\mu|x-\theta|} \tag{4}$$

Here μ is the parameter that characterize the influence distance of the nonlocal damping model , x, θ are the longitudinal coordinate.

The equilibrium equation for the elementary shallow arc piece is:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - N\left[\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\right] - q(x,t). \tag{5}$$

Here $w(x,t)$ –arc deflection, m – linear mass, $q(x,t)$ – transverse distributed load, R – radius of arc curvature, N – longitudinal internal force.

Neglecting the longitudinal vibrations of arc the longitudinal force could be determined as:

$$N(t,x) = EA\varepsilon^0(x,t), \tag{6}$$

where A –arc cross section area , a $\varepsilon^0(x,t)$ – longitudinal axial strain, which is determined as:

$$\varepsilon^0(x,t) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right]^2 - \frac{w(t,x)}{R}, \tag{7}$$

where $u(t,x)$ – arc axis displacement

The moment expression is:

$$M(x,t) = EI\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \gamma\int_0^l C_v(|x-\theta|)\frac{\partial^3 w(\theta,t)}{\partial\theta^2}\partial t d\theta\right] \tag{8}$$

where EI – arc bending stiffness.
Substitute the second derivative of the moment expression to the left part of the equation (5), and obtain the expression regarding the deflection function $w(\theta, t)$:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{m}\left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^l \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu|x-\theta|}\frac{\partial^3 w(\theta,t)}{\partial\theta^2\,\partial t}\right] - \frac{N}{m}\left[\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\right] = \frac{q(x,t)}{m} \quad (9)$$

Solution of this equation should respond to the boundary conditions for x=0 and x=l.
Function $w(x,t)$ is searched as eigenvalues of arc vibrations:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)V_i(x) \quad (10)$$

Here $f_i(t)$ – generalized displacements, a $V_i(x)$ – base functions.
To obtain the generalized displacements $f_i(\tau)$ the Galerkin method is used. The resulting system of the integral-differential equations:

$$\ddot{f}_j(\tau) + k_j^4\left(\frac{EI}{m}\right)f_j(\tau) + \gamma\frac{EI}{ma_j}\sum_{i=1}^{n}\dot{f}_i(\tau)\int_0^l V_j(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^l C_v(|x-\theta|)V_i``(x`)dx`dx - \frac{N}{m}\left(\int_0^1\sum_{i=1}^{n} f_i(\tau)\frac{1}{l^2}V_i^{II}(z)\,V_j(z)dz + \frac{1}{R}\int_0^1 V_j(z)dz\right) = \frac{1}{ma_j}\sum_{0}^{n} V_j(x)q(x,t)dx \quad (11)$$

where

$$k_j^4 = m\omega_j^2/EI,$$

ω_j – shallow arc vibrations frequency,

$$a_j = \int_0^l V_j^2(x)dx.$$

3. NUMERICAL EXAMPLES

The arc has the following parameters: span length 5 m, radius of curvature 10 m, stiffness 37,5 t/m^2, both ends are fixed. Then the boundary conditions for the both ends are:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

base functions are [8]:

$$V_i(x) = (shk_i l - sink_i l)(chk_i x - cosk_i x) - (chk_i l - cosk_i l)(shk_i x - sink_i x) \quad (13)$$

k_i calculates as the i root of the characteristic equation $ch(kx)cos(kx) = 1$.

To make the calculation process simpler let`s get rid of the second derivative in the third member of the equation (11) using the partial integration. Then the expression (11) will transform to:

$$\ddot{f}_j(\tau) + \frac{k_j^4}{k_1^4} f_j(\tau) + \frac{\gamma\mu l\omega_1}{2a_j k_1^4}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 V_j^{II}(z)\int_0^1 e^{-\mu l|z-y|}V_i^{II}(y)(- \frac{N}{a_j\omega_1^2 m}\left(\int_0^1\sum_{i=1}^{n} f_i(\tau)\frac{1}{l^2}V_i^{II}(z)\,V_j(z)dz + \frac{1}{R}\int_0^1 V_j(z)dz\right) = \frac{q(\tau)l^4}{a_j k_1^4 EI}\int_0^1 V_j(z)dz. \quad (14)$$

Here z and y – dimensionless coordinates –

$$z = x/l,\ y = \theta/l,$$

τ – dimensionless time

$$\tau = \omega_1 t\ ,\ \omega_1^2 = {EIk_1^4}/{m},\quad 2\epsilon = \gamma\omega_1\ ,$$

ω_1 – arc minimum eigen frequency.

The $f_i(\tau)$ values are obtained after solving the system of equation, and arc deflections – after using expression (10).

3.1. Shallow arc deformation under the static load.

Shallow arc dynamics has specific features. Under the certain loads and geometry the shallow arc deflection leaps. [9], This phenomenon could be dangerous for the whole structure.

For the further research let`s determine the external load that will cause the deflection leap.

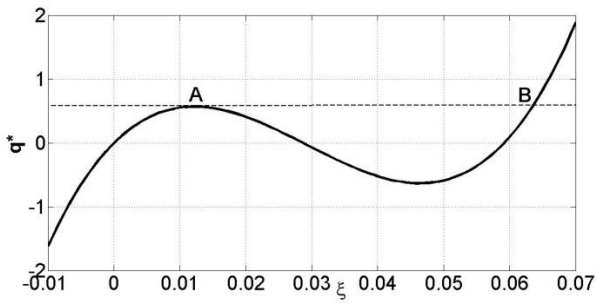


Figure 1. Static deflection curvature for the shallow arc.

In fig. 1 three values of the arc deflection ξ correspond to the one value of parameter q* which characterize the external load. The deflection increases continuously till the point A on the curvature and then leaps to the point B. This happens when the load value is 119 t.

3.2. Shallow arc vibrations under the periodic load.

To study the influence of nonlocal damping on the results of shallow arc vibrations modeling consider it`s dynamics under the periodic deterministic and stochastic load.

All the necessary programs for solving the of system of equations (14) and determining the deflections and motion velocities in any point of the arc were developed in MATLAB. The arc is vibrating under the load $q = A \cdot \sin(\omega t)$. Here A – is the load amplitude, ω – the load frequency, which is assumed $\frac{\omega_1}{2}$.

For illustrative purposes the system vibrations is presented as the phase diagrams. In dynamics arc vibrates next to one (fig 2a) or two (fig 2b) points of equilibrium depending on absence or presence of the deflection leap in statics correspondingly.

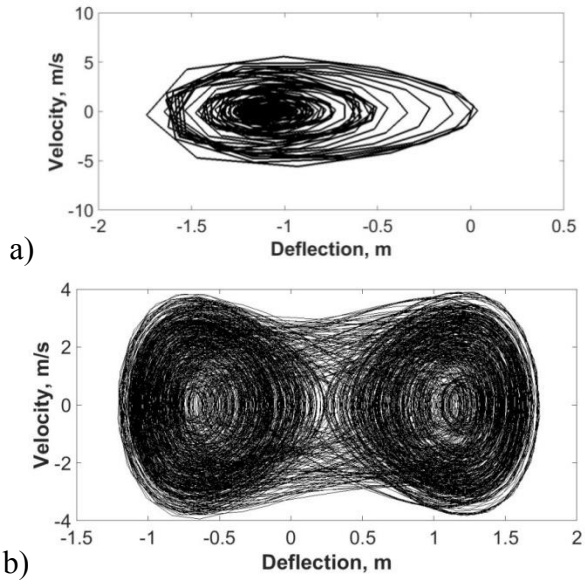


Figure 2. Shallow arc vibrations under the periodic load (phase diagrams) a) from -620 to -380 t, b) амплитудой 350 t.

.

For the computer modeling results comparison two histograms of arc deflections in the middle point are obtained considering and not considering nonlocal damping. (Fig. 3).

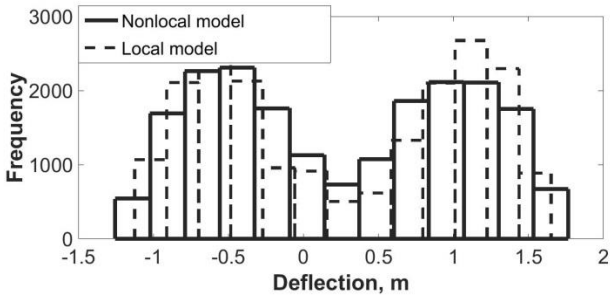


Figure 3. Histograms of deflections for the load amplitude A=465t.

The deflections amplitude decreases when the local model is used. The interesting case is arc vibrations under the load that has an amplitude 140 t (fig. 4). In this case the local model gives a resulting histogram with just one maximum which corresponds to the vibrations next to one point of equilibrium. However the model gives two points of equilibrium when the nonlocal model is used. Hence the regime of shallow arc dynamics totally changes.

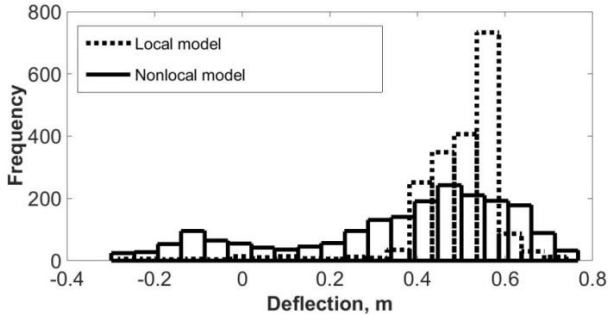


Figure 4. Histograms of deflections for the load amplitude A=140t.

3.3. Shallow arc vibration under the stationary stochastic load.

Let`s consider the influence of nonlocal damping on the arc vibration process under the stochastic distributed loads. The load is the random stationary process with the zero mathematical expectation and spectral density:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2 \cdot \delta(\delta^2 + \theta^2)}{\pi[(\omega^2 - \theta^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega^2]} \quad (15)$$

Here σ^2 – variance of random process, δ and θ parameters, that characterize the correlation scale and latent frequency of the stochastic load. The method of the canonic expansion [4] is used for modeling the random stationary process. For this purpose the random is presented as:

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n} (U_k \cos\omega_k t + V_k \cos\omega_k t) \quad (16)$$

Here U_k, V_k – uncorrelated normally distributed random values with the zero mathematical expectation and equal variances for each pair of random values with equal indices k. To calculate these variances the ω-axis section 2L long is selected. The origin is in the middle of the selected section. When $|\omega| > L$ the spectral density could be assumed zero. The whole selected section is devided by the equal parts $\Delta\omega$ long. Then the variance of the random values U_k, V_k is calculated by the formula:

$$D_k = 2S(\omega_k) \cdot \Delta\omega, \quad (17)$$

The random stationary load is Gaussian and permanent along the arc in each moment The correlation function for the load obtained using 400 realizations of the random process is presented on the fig. 5 The solid line is for the theoretical correlation function which was calculated by the formula:

$$K(\tau_1 - \tau_2) = \sigma^2 e^{-\delta|\tau_1 - \tau_2|} \left[\cos\theta(\tau_1 - \tau_2) + \frac{\delta}{\theta}\sin\theta(\tau_1 - \tau_2)\right] \quad (18)$$

The dash line is corresponded to the correlation function that was obtained using the numerical modeling data.

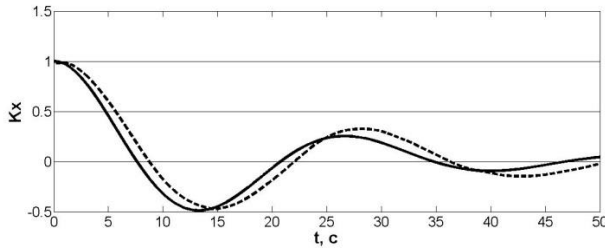


Figure 5. The Correlation Function for the Random Stationary Load.

To compare the local and nonlocal model the arc vibrations modeling results are presented as histograms (fig. 6) 400 realizations of the random process were modelled. The cross section of the procsee is the step #7700 because at this point the process is already stable.

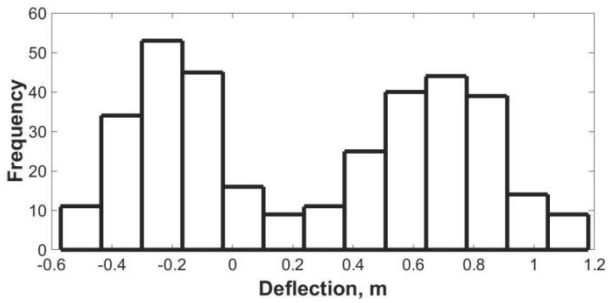
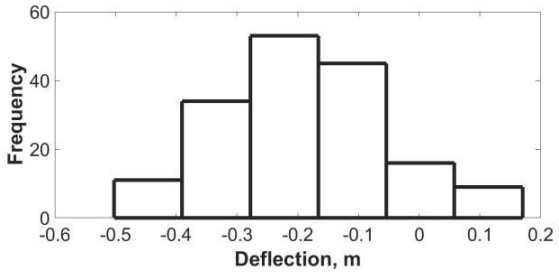
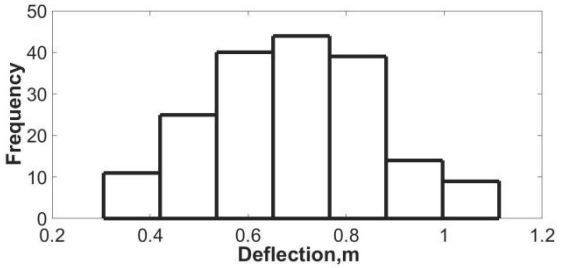


Figure 6. Histograms (Arc Vibrations Modeling Results).

The resulting histogram is bimodal. To analyze the obtained data the histogram was stratified (fig. 7)



a)



b)

Figure 7. Stratification of the shallow arc deflection histogram a) left part, b) right part.

The both parts were assumed normal. This assumption was verified by Pearson fitting criterion. For the significance level 0,05 for the left part $\chi^2 = 5{,}02 < \chi_{cr}{}^2 = 7{,}81$, and for the right part - $\chi^2 = 4{,}98 < \chi_{cr}{}^2 = 9{,}49$, hence the both parts could be treated like if they were normally distributed.

The histograms were obtained to compare the results for the local and nonlocal model. The arc deflection amplitude is less when the local model is used (fig. 8).

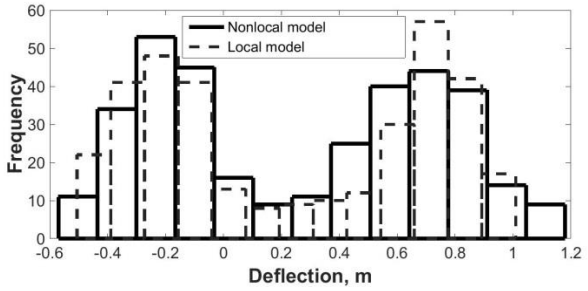


Figure 8. Histograms of arc deflections for the stochastic stationary load.

The confidence intervals are presented in table 1.

4. DISCUSSION

In this paper the nonlocal damping consideration influence on the results of computer modeling of nonlinear systems subjected to periodic deterministic and stochastic stationary loads. The computer model of the arc is developed. Computer modeling consider nonlocal damping in comparison to local model gives increase of shallow arc deflection. In some load cases nonlocal model shows total change of the shallow arc dynamic behavior.

Table 1. The shallow arc deflection confident intervals.

Confidence interval	Intervals` limits , m			
	Nonlocal model		Local model	
68,27% (from –σ to σ)	from 0,3609 to -0,0288	from 0,4848 to 0,8901	from −0,3656 to 0,0342	from 0,4741 to 0,8083
95,45% (from –2σ to 2σ)	from−0,5270 to 0,1373	from 0, 2821 to 1,0928	from −0,5312 to 0,1314	from 0,3069 to 0,9755
99,73% (from –3σ to 3σ)	from −0,6931 to 0,3034	from 0,0794 to 1,2955	from −0,6969 to 0,2971	from 0, 1398 to 1,1427

REFERENCES

1. **Banks H.T., Inman D.J.** On Damping Mechanisms in Beams. // Journal of Applied Mechanics, 1991, 58 (3), pp. 716-723.
2. **Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S.A.** Galerkin Method for Distributed Systems with Non-Local Damping. // International Journal of Solids and Structures, 2006, Volume 43, pp. 3381-3400.
3. **Russell D.L.** On Mathematical Models for the Elastic Beam with Frequency-Proportional Damping. // In: Banks, H.T. (Ed.), Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. SIAM, Philadelphia, PA, 1992, pp. 125-169.
4. **Ventsel E.S.** Teoriya Veroyatnostey [Probability Theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1999, 576 pages.
5. **Kalitkin N.N.** Chislennie Metodi [Numerical methods]. Saint-Petersburg, BHV-Peterburg, 2011, 592 pages.
6. **Potapov V.D.** Stability of Rods Under Stochastic Loadind Considering Nonlocal Damping. // Problems of Machinery and reliability, 2012, Vol. 4, pp. 25-31.
7. **Potapov V.D.** Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems. Chichester, Wiley, 1999.
8. **Filippov A.P.** Kolebaniya Deformiruyemikh System [Dynamics of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyenie, 1970, 734 pages.
9. **Aleksandrov A.V., Potapov V.D.** Osnovi Teorii Uprugosti i Plastichnosti [Basics of the elasticity and plasticity theory.]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1990, 400 pages.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Banks H.T., Inman D.J.** On Damping Mechanisms in Beams. // Journal of Applied Mechanics, 1991, 58 (3), pp. 716-723.
2. **Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S.A.** Galerkin Method for Distributed Systems with Non-Local Damping. // International Journal of Solids and Structures, 2006, Volume 43, pp. 3381-3400.
3. **Russell D.L.** On Mathematical Models for the Elastic Beam with Frequency-Proportional Damping. // In: Banks, H.T. (Ed.), Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. SIAM, Philadelphia, PA, 1992, pp. 125-169.
4. **Ventsel E.S.** Teoriya Veroyatnostey [Probability Theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1999, 576 pages.
5. **Kalitkin N.N.** Chislennie Metodi [Numerical methods]. Saint-Petersburg, BHV-Peterburg, 2011, 592 pages.

6. **Potapov V.D.** Stability of Rods Under Stochastic Loadind Considering Nonlocal Damping. // Problems of Machinery and reliability, 2012, Vol. 4, pp. 25-31.
7. **Potapov V.D.** Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems. Chichester, Wiley, 1999.
8. **Filippov A.P.** Kolebaniya Deformiruyemikh System [Dynamics of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyenie, 1970, 734 pages.
9. **Aleksandrov A.V., Potapov V.D.** Osnovi Teorii Uprugosti i Plastichnosti [Basics of the elasticity and plasticity theory.]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1990, 400 pages.

Vadim D. Potapov, Professor, Dr.Sc.

Elena S. Shepitko, graduate student, Assistant of the Department "Computer Aided Design Systems", Russian university of transport (MIIT); 127994, Russia, Moscow, 9b9 Obrazcova Street; phone +7(905)756-98-05;
E-mail: shepitko-es@mail.ru.

Потапов Вадим Дмитриевич, профессор, доктор технических наук.

Шепитько Елена Сергеевна, аспирант, ассистент кафедры «Системы автоматизированного проектирования», Российский университет транспорта (МИИТ); 127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9;
тел. +7(905)756-98-05;
E-mail: shepitko-es@mail.ru.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-145-154

РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЦЕЛЬНОЙ ДРЕВЕСИНЫ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ ИНФРАСТРУКТУРЫ

К.П. Пятикрестовский[1], В.И. Травуш[2,3,4], А.А. Погорельцев[1], А.А. Клюкин[5]

[1] Научно-исследовательский центр «Строительство», г. Москва, РОССИЯ
[2] Городской проектный институт жилых и общественных зданий, г. Москва, РОССИЯ
[3] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[4] Научно-исследовательский институт строительной физики
Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ
[5] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Предлагаются новые быстровозводимые легкие конструкции из цельной древесины с соединениями сплачивания и наращивания металлическими винтами для дерева. Изготовление и сборка основных элементов-брусьев сечением 15х15 см может выполняться в построечных условиях на простейшем деревообделочном оборудовании. Использование местного материала-древесины имеет ряд преимуществ – экологических, экономических и эксплуатационных. Приводятся описание конструкций с процессе изготовления, примеры зданий со сводчатыми и шатровыми покрытиями, устройство соединений, подготовка экспериментальных образцов на новом оборудовании Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ). Излагается методика расчета с учетом пластических деформаций, обеспечивающего дополнительные экономические преимущества. Расчет выполняется методом интегральных оценок, разработанным В.М. Бондаренко для железобетонных конструкций и приспособленным к деревянным конструкциям К.П. Пятикрестовским. Для расчета настилов, работающих совместно с ребрами и находящихся в сложном напряженном состоянии, используются критерии прочности Г.А. Гениева. Предполагается строительство зданий различного назначения в районах освоения Крайнего Севера России.

Ключевые слова: деревянные составные конструкции, цельная древесина, соединения на винтах, исследование, расчет, пластические деформации, сложное напряженное состояние

DEVELOPMENT OF STRUCTURES FROM SOLID WOOD FOR OBJECTS OF INFRASTRUCTURE

Konstantin P. Pyatikrestovsky[1], Vladimir I. Travush[2,3,4], Alexander A. Pogoreltsev[1], Alexander A. Klushkin[5]

[1] JSC Research Center of Construction, Moscow, RUSSIA
[2] City Design Institute for Residential and Public Buildings, Moscow, RUSSIA
[3] Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[4] Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA
[5] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: New prefabricated lightweight structures made of solid wood with connections for joining and building metal screws for wood are proposed. Manufacture and assembly of basic elements-bars with a cross-section of 15x15 cm can be carried out in line conditions on the simplest woodworking equipment. The use of local timber material has a number of advantages (ecological, economic and operational). The description of structures with manufacturing process, examples of buildings with vaulted and hipped roofing, connection arrangement, preparation of experimental samples with the use of new equipment of the National Research Moscow State University of Civil Engineering are given. The method of analysis with allowance for plastic deformations is under consideration. It provides additional economic advantages. The analysis is carried out by the method of integral estimates developed by Prof. V.M. Bondarenko for reinforced concrete structures and adapted to wooden structures by Prof. K.P. Pyatikrestovsky. Special strength criteria are used for the analysis of decks working to-

gether with the ribs (in a combined stressed state). It is planned to build buildings for various purposes in the areas of development of the Far North of Russia.

Keywords: wooden composite structures, solid wood, screw connections, research, analysis, plastic deformation, combined stress state

На кафедре металлических и деревянных конструкций Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ) и в Центральном научно-исследовательском институте строительных конструкций (ЦНИИСК) им. В.А. Кучеренко Научно-исследовательского центра «Строительство» (АО «НИЦ «Строительство») разработаны конструкции покрытий из цельной древесины для строительства в осваиваемых районах, особенно севера и лесоизбыточных территорий Сибири. Конструкции в виде плоскостных систем, шатровых куполов и сводов отличаются экологической чистотой, легкостью, простотой сборки, повышенной надежностью, мобильностью, сборные элементы допускают быструю доставку вертолетом или легким наземным транспортом в условиях бездорожья, не требуют сложного оборудования и не загрязняют окружающую среду при изготовлении, монтаже и эксплуатации, достаточно дешевы. Отходы производства в виде опилок или небольших остатков досок легко перерабатываются не оставляя вредных веществ

Основными сборными элементами конструкции являются ребра в виде стержней ломаного очертания по длине. Эти стержни объединяются в каркас шатровой или сводчатой оболочки прямолинейными стержнями. Ячейки каркаса заполняются щитами, панелями или настилом. Опирание конструкции может выполняться непосредственно на фундаменты или на колонны и стены.

При высоте сечения элементов ребер 300, 450, 600 мм могут выполняться здания массового применения пролетом до 30 м. Конструкции больших пролетов проектируются специально.

При изготовлении цельные прямые брусья или доски сплачиваются для увеличения сечений болтами по наклонным сечениям. Наращивание брусьев по длине осуществляется накладками, соединяющими болты, ввинченные в древесину.

Конструкции, образуемые указанным способом, могут использоваться в качестве ангаров-укрытий для техники, цехов различного назначения, временного размещения людей. Могут создаваться объекты инфраструктуры поселков строителей и малых городов, торговые и зальные помещения, спортсооружения. Одновременно желательно массовое строительство деревянных домов соответствующей конструкции.

Конструкции зданий в силу обеспечения совместной работы всех элементов способны противостоять восприятию нормальных эксплуатационных нагрузок, а так же и нагрузок, вызванных чрезвычайными ситуациями типа ураганов, сверхнормативных снеговых и сейсмических нагрузок. Производится пропитка деревянных элементов при изготовлении обычными комплексными веществами для защиты от увлажнения, возгорания, биоповреждений.

Схематически некоторые проектные предложения показаны на рис. 1, 2.

Северные районы, подлежащие освоению, характеризуются помимо экстремальных зимних и летних температур, еще и повышенными снеговыми, ветровыми и ураганными нагрузками, большей частью кратковременными.

Проектирование конструкций в этих условиях общепринятыми правилами, предусмотренными нормами, приводит к перерасходу материалов, утяжеляет конструкции и увеличивает трудоемкость изготовления за счет увеличения сечений основных элементов каркаса. Изготовление конструкций большего сечения сопряжено с техническими трудностями устройства соединений.

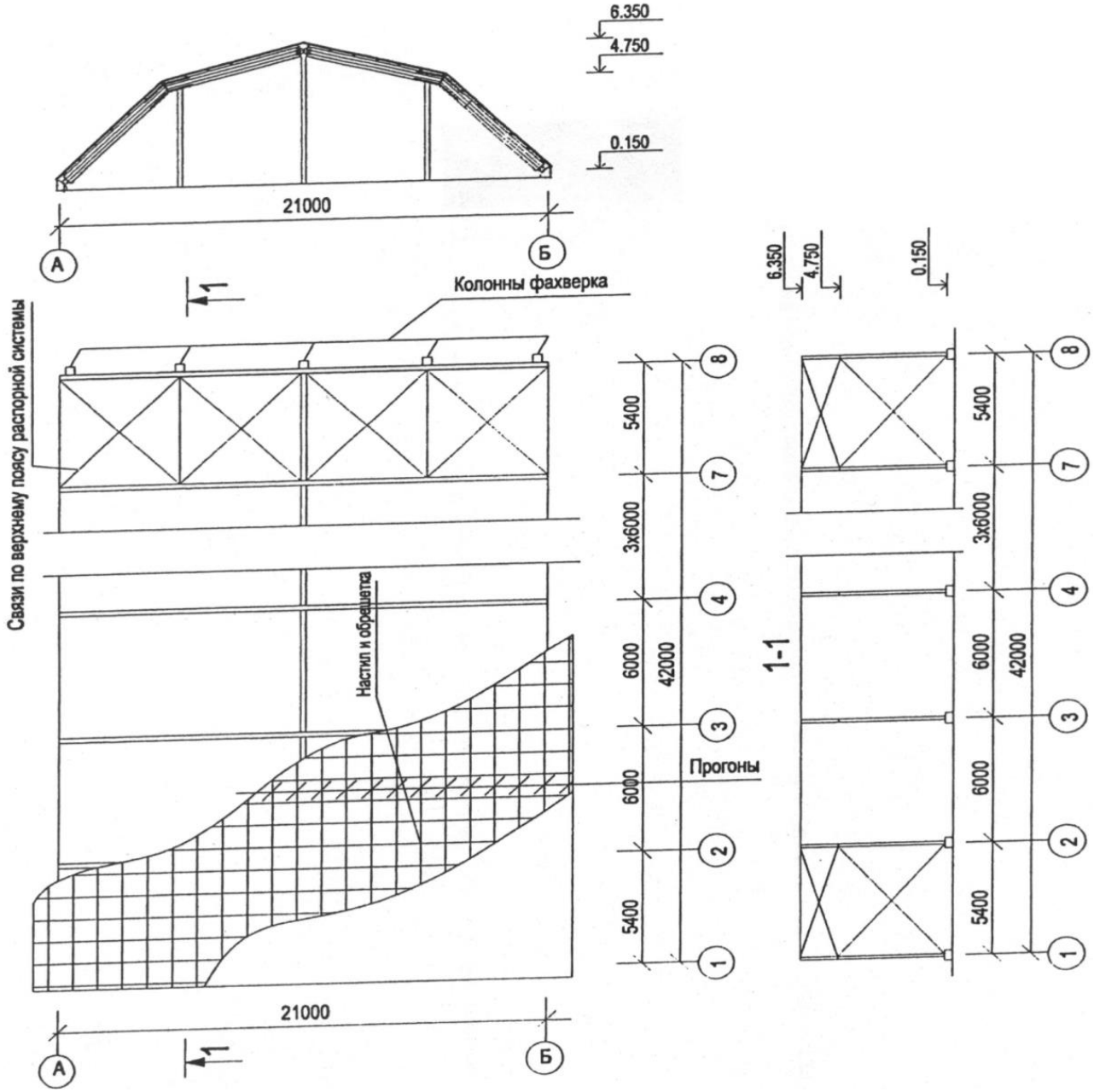


Рисунок 1. Схема сводчатого покрытия.

Представляется целесообразным использовать резервы уменьшения сечений путем обеспечения совместной работы ограждающих элементов покрытий и стен с конструкциями каркаса. Даже очевидное увеличение несущей способности ребер путем включения в работу панелей или щитов покрытия и превращения прямоугольных сечений ребер в тавровые, показывает большие возможности экономии материалов.

Превращение(хотя бы неполное) плоскостных конструкций в пространственные при совместной работе ребер и панелей, обеспечение многократной статической неопределимости, существенно повышает надежность, живучесть и конструктивную безопасность сооружений.

Простейший способ достижения совместной работы несущей и ограждающей частей состоит в замоноличивании угловых зон панелей, блокируя сдвиг.

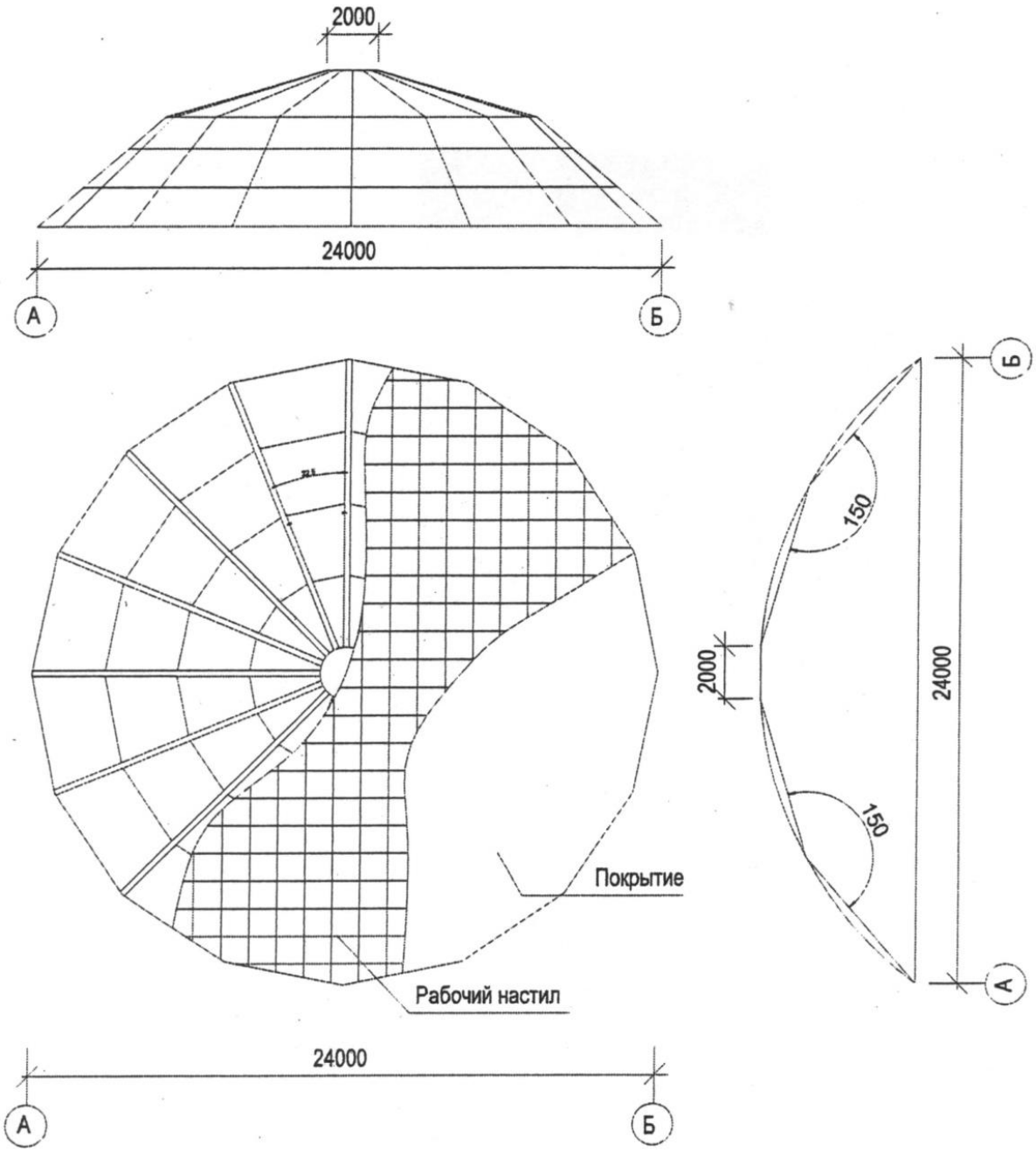


Рисунок 2. Схема шатрового покрытия.

Элементы настила, панели из досок или композиционных материалов, зачастую обладающих повышенной стойкостью к большим колебаниям температур, а также обладающих свойствами пластического деформирования, помещаются в ячейки между ребрами защемляются в углах от сдвига различными быстротвердеющими массами. Эффективный утеплитель располагается поверх полученной конструкции. Обеспечивается, в случае необходимости, его проветривание.

Конструкция успешно противостоит различным кратковременным и длительным статическим и динамическим нагрузкам в том числе несимметричным(односторонним) и даже запроектным (случайным).

На экспериментальном полигоне НИУ МГСУ и в ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко испытаны

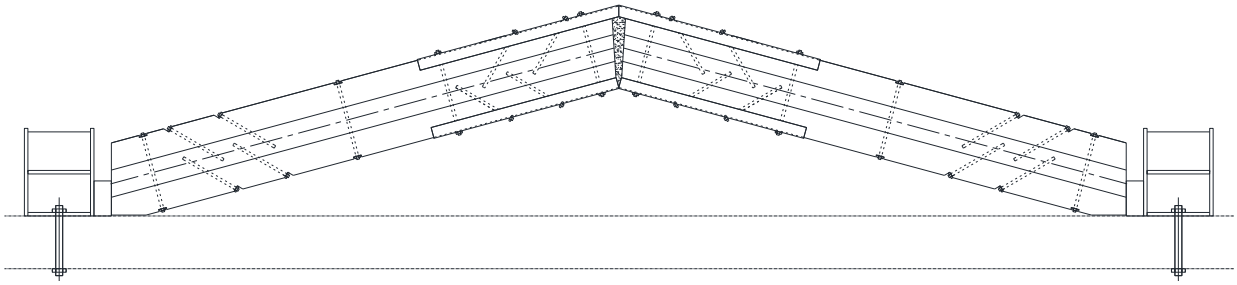


Рисунок 3. Схема экспериментального образца и расположение связей между брусьями.

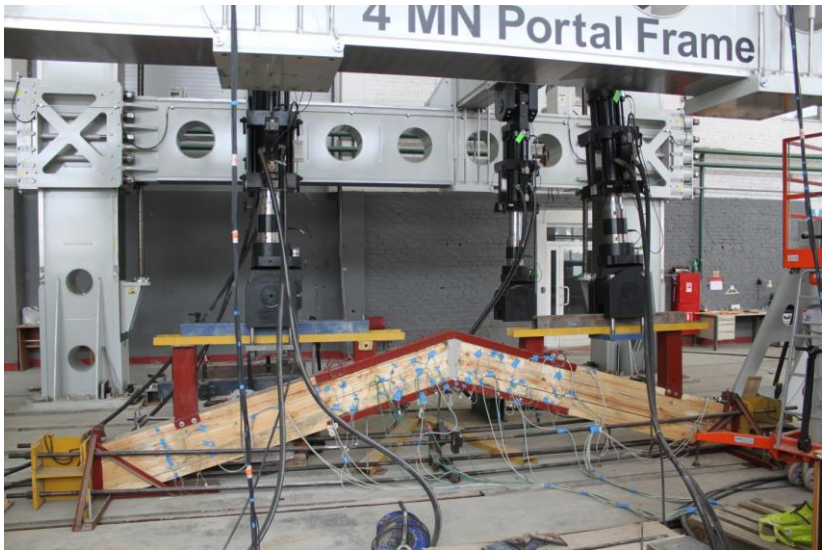


Рисунок 4. Установка образца в силовой раме.

образцы основных ребер с целью уточнения конструкций узлов и влияния отдельных факторов-трещин усушки, изменения влажности, способа приложения нагрузки, формы болтов и т.п.

Экспериментальные образцы представляют собой элементы ребер покрытий в виде призматических сводов или шатровых конструкций. Пролет покрытий составляет от 12 до 30 м. при этом ребро конструкции собирается из 2,4,6 или 8 элементов, стыкуемых между собой по длине при помощи соединения закладных деталей, которые могут быть разъемными для образования сборно-разборных конструкций. Экспериментальные образцы образуются из двух прямолинейных стержней, соединяемых между собой под углом, соответствующим профилю здания. Угол составляет 15^{o} (рис. 3).

Соединение прямолинейных стержней и образуемых из них монтажных элементов производится под углом 15^{o} , тангенс которого равен 0,25 рад. Прямолинейные брусья монтажных элементов образуются сплачиванием двух или трех брусьев сечением 12х15 см (В эксперименте приняты 3х(15х15 см), т.е. 15х45см.

Сплачивание и образование стыков монтажных элементов осуществляется ввинчиваемыми стержнями для древесины. Стержни и болты для древесины выпускаются и продаются в РФ.

Испытания образцов преследуют цель изучить напряженно-деформированное состояние соединения брусьев в узле перелома. Здесь с каждой стороны стыка как по верхней так и по нижней установлены по два наклонных стержня диаметром 16 мм, длиной 350 мм под углом 45^{o} к оси брусьев.

По граням элемента установлены швеллеры № 16 длиной 1200 мм, (рис. 4, 5) которые привариваются в узле друг к другу, а к деревянным элементам швеллеры прикрепляются

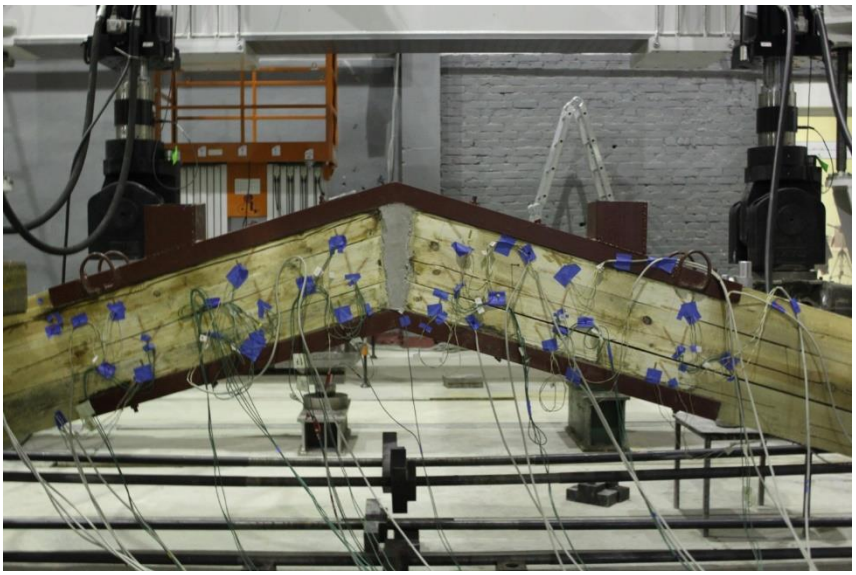


Рисунок 5. Расположение тензометрических датчиков в узле перегиба.

двумя наклонными стержнями с головкой, привариваемой к швеллерам после завинчивания стержней в древесину. Стержни имеют нарезку (резьба для дерева) длиной 230 мм, а часть стержня, примыкающая к головке, не имеет резьбы. При этом максимальное усилие выдергивания стержня (при несущей способности на выдергивание 1,3 МПа) составляет 2990 кгс. Кроме этих стержней в зоне стыка располагаются шпильки сплачивания по 2 шт. В шве стыка выполнено замоноличивание полимербетоном.Элементы соединения выполнены из материалов, наиболее доступных в условиях «кустарного» изготовления на полигоне НИУ МГСУ. Для разработки реальных проектов конструктивные решения будут усовершенствованы.

Нагрузки на образец прикладываются в виде четырех сосредоточенных сил . Условная максимальная суммарная нагрузка, допускаемая имеющимися приспособлениями, составляет 40 тонн. После предварительных этапов и уточнения методики испытаний максимальная нагрузка и этапы нагружения будут уточняться.

При испытаниях нужен контроль напряжений смятия древесины в местах приложения нагрузок к верхнему поясу.

Опоры экспериментальных образцов выполняются на горизонтальные площадки. Вертикальные опорные реакции прикладываются к древесине под углом к волокнам. Горизонтальный распор воспринимается упорными пластинами и затяжками.

Предложены и многократно опробованы расчеты конструкций на указанные нагрузки исходя из принципов учета пластических свойств материалов (ползучести) и определения сопротивления конструкции действующим нагрузкам в любой момент времени. Поэтому мы будем пользоваться вместо термина несущая способность (т.е. предел прочности в конце эксплуатации) понятием «силовое сопротивление» по предложению академика РААСН В.М. Бондаренко [2, 3, 4].

Изложим кратко основные этапы расчета.

1. Метод интегральных оценок. Особенности применения.

При расчете нелинейно и неравновесно деформируемых статически неопределимых деревянных конструктивных систем может быть использован метод интегральных оценок нелинейных и неравновесных свойств деформирования древесины [4].

Диаграммы деформирования сжатых и сжато-изгибаемых элементов из древесины возможно аппроксимировать рядом уравнений, например, принять параболическую зависимость Ф.И. Герстнера

$$\sigma = E_0\varepsilon - \frac{E_0^2}{4\sigma_{ПП}}\varepsilon^2 \qquad (1)$$

Уравнение механического состояния древесины длительное деформирование древесины в условиях, когда

$$\sigma<\sigma_{дл},$$

при ступенчатом изменении напряжений будет:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)(1+b(t-t_0)^{0,21}) + \\ + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta\sigma_i}{E_0 - \frac{E_0^2}{4\sigma_{ПП}}\varepsilon_{i-1}^a}(1+b(t-t_i)^{0,21}), \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon_{i-1}^a = \varepsilon(t_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta\sigma_i}{E_0 - \frac{E_0^2}{4\sigma_{ПП}}(\varepsilon_{i-2}^a + \Delta\varepsilon_{i-1}^a)} \qquad (3)$$

E^a_{i-1}- суммарное значение мгновенных (кратковременных) приращений относительных деформаций.

2. Длительный модуль деформаций

Для составления выражения интегрального модуля деформаций на основании (2) используется длительный модуль деформаций

$$E_{ДЛ}(t_0,t) = \left[\frac{\varepsilon(t_0)\left(1+в(t-t_0)^{0.21}\right)}{\sigma(t)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta\varepsilon_i}{\sigma(t)}\left(1+b(t-t_i)^{0.21}\right)\right]^{-1}. \qquad (4)$$

3. Интегральный модуль деформаций представляется в виде [2,4]

$$E_{ин}(x,t) = \Phi\left(\varepsilon_ф^A, в, a\right)E_{ДЛ}^{ф}\left(\varepsilon_ф, t, t_0\right) \qquad (5)$$

где

$$\Phi\left(\varepsilon_ф^A, в, a\right) = \\ = \frac{1}{1-\frac{E_0}{4\sigma_{ПП}}\varepsilon_ф^A}\cdot\frac{1+\left(\frac{в}{a}\right)^3 - 100\varepsilon_ф^A\left(1-\left(\frac{в}{a}\right)^4\right)}{1+\left(\frac{в}{a}\right)^3 - 50\varepsilon_ф^A\left(1-\left(\frac{в}{a}\right)^4\right)}. \qquad (6)$$

В (5) функция $E^{ф}_{ДЛ}$ принимается в зависимости от режима изменения напряжений в фибровом сжатом волокне, а функция $Ф(E^A_Ф, в,а)$ отражает нелинейность деформирования сжато-изгибаемого элемента, уровень напряжений. Параметры а, в – расстояния верхней и нижней граней от нейтральной оси.

4. Механические (физические) модели анизотропного материала для определения его длительной и динамической прочности.

На рис. 6 представлена механическая модель анизотропного материала, позволяющая дать аналитическое и количественное определение его длительной и динамической прочности с единой физической концепции в широком диапазоне времени действия внешней нагрузки – от многих дней и месяцев, до десятых и сотых долей секунды [5,6].

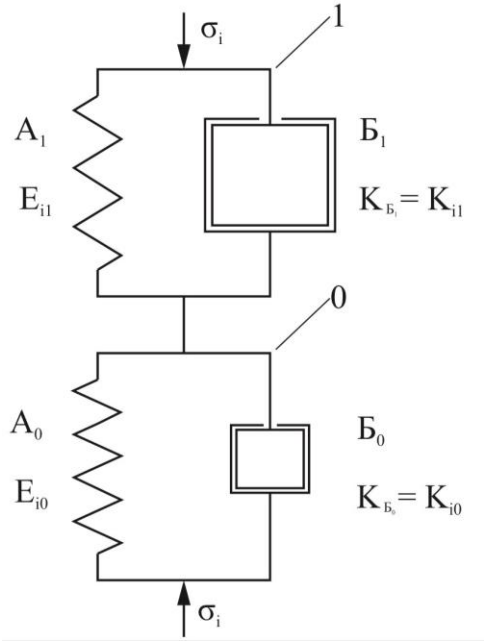


Рисунок 6. Механическая модель анизотропного материала.

Модель состоит из двух последовательно соединенных элементов: элемента 0 и элемента 1, каждый из которых представляет, вообще говоря, модель Кельвина-Фойгта – параллельно соединенные элементы А0 и Б0, А1 и Б1, характеризующиеся различными значениями их прочностных и деформационных параметров.

Элемент 0 предназначен для аналитического описания процесса развития кратковременных деформаций материала; элемент 1 – для описания развития его длительных деформаций, связанных с проявлением явления ползучести.

Эффективное время работы элемента Б1 соизмеримо с большими отрезками времени, соответствующими расчетам длительной прочности материала, учитывающими накопление суммарных обобщенных деформаций элементов 0 и 1 за заданное время t_δ.

5. Критерии длительной прочности анизотропного материала

При приложении к последовательно соединенным элементам 0 (A_0) и 1 (A_1, $Б_1$) обобщенного внешнего долговременного силового воздействия

$$\upsilon_i - (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_{xy})$$

деформации элементов 0 и 1 –

$$\varepsilon_i=\varepsilon_{i0}+\varepsilon_{i1}$$
$$(\varepsilon_x=\varepsilon_{x0}+\varepsilon_{x1},\ \varepsilon_y=\varepsilon_{y0}+\varepsilon_{y1},\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{x\psi}+\varepsilon_{xy}) \qquad (7)$$

Независимые пределы прочности материала в главных осях анизотропии (при отрыве, при смятии и при сдвиге) определяются достижением значениями суммарных деформаций Ei соответствующих предельных значений – $Э_{i0}$ – ($Э_{x0}$, $Э_{y0}$, $Э_{xy0}$), равных предельным деформациям элемента А0 при кратковременном действии внешней нагрузки –

$$Э_{i0}=R_i/E_{i0} \qquad (8)$$

Деформации элемента 1 – ε_{i1} определяются из следующих очевидных зависимостей

$$\sigma_i=\sigma_{iA1}+\sigma_{iБ1};\ \ \sigma_{iA1}=E_{i1}\varepsilon_{i1};\ \sigma_{iБ1}=K_{i1}\frac{d\varepsilon_{i1}}{dt}, \qquad (9)$$

где E_{i1} – обобщенные модули упругости элемента A_1, K_{i1} – модули вязкого сопротивления элемента $Б_1$.

Таким образом, в соответствии с (7)

$$\varepsilon_i=\frac{\sigma_i}{E_{i0}}\left[1+\delta_i\left(1-e^{-\omega_{i1}t}\right)\right]=\frac{\sigma_i}{E_{i0}}\Psi_i(t), \qquad (10)$$

где $\delta_i = E_{i0} / E_{i1},\ \omega_{i1}=\dfrac{E_{i1}}{K_{i1}}$.

На основании (8) и (10), пределы длительной прочности анизотропного материала в направлениях главных осей анизотропии

$$\overline{R}_i=\overline{R}_i\,(\bar{t}_д\ )$$
$$\overline{R}_i=\sigma_i=\frac{E_{i0}\varepsilon_i}{\Psi_i(t_\partial)}=\frac{E_{i0}Э_{i0}}{\Psi_i(t_\partial)}=\frac{R_i}{\Psi_i(t_\partial)}: \qquad (11)$$

где $$\Psi_x(t_\partial)=1+\delta_x\left(1-e^{-\omega_{x1}t_\partial}\right)>1; \qquad (12)$$

а $t=t_\delta$ – заданное предельное время действия внешней долговременной нагрузки.

Окончательные выражения для критериев длительной прочности анизотропного материала в параметрической зависимости от td выражаются так:

Для случая отрыва –

$$\left[\frac{R_{px}}{\Psi_{px}(t_\partial)}-\sigma_x\right]\left[\frac{R_{py}}{\Psi_{py}(t_\partial)}-\sigma_y\right]-\tau_{xy}^2=0, \qquad (13)$$

для случая смятия –

$$\left[\frac{R_{cx}}{\Psi_{cx}(t_д)}+\sigma_x\right]\left[\frac{R_{cy}}{\Psi_{cy}(t_д)}+\sigma_y\right]-\tau_{xy}^2=0, \qquad (14)$$

для случая сдвига –

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 - 4\left[\frac{C_x}{\Psi_{xy}\left(t_\partial\right)} + \tau_{xy}\right]\left[\frac{C_y}{\Psi_{xy}\left(t_\partial\right)} - \tau_{xy}\right] = 0\,. \quad (15)$$

Численные значения и определяются на основании экспериментальных данных. Расчеты и обследования конструкций показывают перспективу повышения надежности сооружений и возможность экономии материалов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны предложения по конструкциям каркаса покрытий общественных, спортивных и производственных зданий, составляющих инфраструктуру населенных пунктов в районах освоения Российского севера.

Предлагаемые конструкции обладают необходимыми качествами для суровых условий изготовления, возведения и эксплуатации зданий: простота устройства, допускающая изготовление деталей на простейшем оборудовании, легкость, допускающая доставку на объекты в условиях бездорожья, надежность в эксплуатации за счет совместной работы со смежными элементами.

Проведены испытания опытных образцов в построечных условиях. Исследование влияния атмосферных условий на качество элементов. Испытаны опытные образцы нагрузками до разрушения. Установлена достаточная несущая способность при сосредоточенных нагрузках наиболее неблагоприятных для исследуемых образцов.

Уточняется новая методика расчета силового сопротивления покрытий с учетом особенностей исследуемых конструкций.

Продолжается обработка полученных результатов всесторонних испытаний и предполагается совместная работа с отделениями Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) и Российской академии наук (РАН) по использованию их фундаментальных разработок применительно к строительным технологиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высотные здания. Tall Buildings, 2015, №1 (журнал высотных технологий).
2. **Пятикрестовский К.П.** Расчет ребристых пространственных конструкций из древесины и фанеры на длительные нагрузки. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2008, с. 42-48.
3. **Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.** О программировании нелинейного метода расчета статически неопределимых деревянных конструкций и связи программных комплексов с совершенствованием норм проектирования. // AKADEMIA. Архитектура и строительство, №3, 2015 с. 115-119.
4. **Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.** Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982 – 287 с.
5. **Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П.** Вопросы длительной и динамической прочности анизотропных конструкционных материалов. – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2000. – 38 с.
6. **Гениев Г.А., Курбатов А.С., Самедов Ф.А.** Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. – М.: Интербук, 1993. – 187 с.

REFERENCES

1. Vysotnyye zdaniya. Tall Buildings, 2015, No. 1 (Zhurnal Vysotnykh Tekhnologiy).
2. **Pyatikrestovskiy K.P.** Raschet Rebristykh Prostranstvennykh Konstruktsiy iz Drevesiny i Fanery na Dlitelnyye Nagruzki [Analysis of Rribbed Spatial Structures from Wood and Plywood for Permanently Acting Loads. // Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy, 2008, No. 5, pp. 42-48.
3. **Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I.** O Programmirovanii Nelineynogo Metoda Rascheta Staticheski Neopredelimykh Derevyannykh Konstruktsiy i Svyazi Pro-

grammnykh Kompleksov s Sovershenstvovaniyem Norm Proyektirovaniya [About Programming of Nonlinear Method of Analysis of Statically Indeterminate Wooden Structures and Connection of Software Complexes with Improvement of Design Codes]. // AKADEMIA. Arkhitektura i Stroitel-stvo, 2015, No. 3, pp. 115-119.

4. **Bondarenko V.M., Bondarenko S.V.** Inzhenernyye Metody Nelineynoy Teorii Zhelezobetona [Engineering methods of the Nonlinear Theory of Reinforced Concrete]. Moscow, Stroyizdat, 1982, 287 pages.
5. **Geniyev G.A., Pyatikrestovskiy K.P.** Voprosy Dlitelnoy i Dinamicheskoy Prochnosti Anizotropnykh Konstruktsionnykh Materialov [Problems of Long-Term and Dynamic Strength of Anisotropic Construction Materials]. Moscow, TsNIISK im. V.A. Kucherenko, 2000, 38 pages.
6. **Geniyev G.A., Kurbatov A.S., Samedov F.A.** Voprosy Prochnosti i Plastichnosti Anizotropnykh Materialov [Problems of Strength and Plasticity of Anisotropic Materials]. Moscow, Interbuk, 1993, 187 pages.

Пятикрестовский Константин Пантелеевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко ОАО «НИЦ «Строительство»; 109428, Россия, г. Москва, 2-я Институтская ул., д.6;
тел. +7(495)602-00-70, +7(499)170-15-48;
E-mail: stroymex@list.ru

Травуш Владимир Ильич, академик РААСН, доктор технических наук, профессор; вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора ЗАО «ГОРПРОЕКТ»; 105064, Россия, г. Москва, Нижний Сусальный переулок, д.5, стр. 5А; тел./факс: +7 (495) 775-75-65, +7(495) 909-39-39; e-mail: travush@mail.ru

Погорельцев Александр Алексеевич, кандидат технических наук, заведующий Лабораторией деревянных конструкций ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко ОАО «НИЦ «Строительство»; 109428, Россия, г. Москва, 2-я Институтская ул., д.6; тел. +7(495)602-00-70, +7(499)170-15-48; e-mail: pogara@yandex.ru

Клюкин Александр Александрович, старший преподаватель кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(495)287-49-14 добав. 3110.

Konstantin P. Pyatikrestovsky, Dr.Sc., Senior Researcher, Executive Researcher of the TsNIISK them. V.A. Kucherenko, JSC Research Center of Construction; 109428, Russia, Moscow, 2-nd Institutional Street., 6;
phone: +7 (495) 602-00-70, +7 (499) 170-15-48;
E-mail: stroymex@list.ru

Vladimir I. Travush, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc., Vice-President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director of City Design Institute for Residential and Public Buildings; 105064, Russia, Moscow, Nizhny Susalny pereulok, 5, building 5A; tel./fax: +7 (495) 775-75-65,
+7 (495) 909-39-39; e-mail: travush@mail.ru.

Alexander A. Pogoreltsev, Ph.D., Head of the Laboratory of Wooden Constructions TsNIISK them. V.A. Kucherenko, JSC Research Center of Construction; 109428, Russia, Moscow, 2-nd Institutional Street., 6;
phone: +7 (495) 602-00-70, +7 (499) 170-15-48;
E-mail: pogara@yandex.ru.

Alexander A. Klyukin, Senior Lecturer of the Department of Steel and Wooden Constructions, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 129337, Russia, Moscow, Yaroslavl highway, house 26;
Tel. +7 (495) 287-49-14 add. 3110.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-155-163

О МЕТОДИКЕ ПОВЫШЕНИЯ ЗАЩИЩЕННОСТИ ОБЪЕКТА ЭКОНОМИКИ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

А.В. Рыбаков[1], Е.В. Иванов[1], Д.С. Седов[1], Л.Е. Иванова[2]

[1] Академия гражданской защиты Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, г. Москва, РОССИЯ

[2] Уральский Учебно-спасательный центр Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, г. Озерск, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассмотрен алгоритм методики, позволяющей на основе значений показателя защищенности осуществлять поиск рационального решения для защиты опасных производственных объектов от воздействия воздушной ударной волны обычных средств поражения. В основе используемой методики выбора рациональных конструктивных параметров лежит задача оптимизации показателя защищенности. Показана программная реализация методики.

Ключевые слова: средства поражения, защищенность, показатель защищенности, конструктивные параметры, воздушная ударная волна

ABOUT METHODS OF IMPROVING SAFETY OF THE FACILITY FROM THE IMPACT OF AIR SHOCK WAVE

Anatoly V. Rybakov[1], Evgeniy V. Ivanov[1], Dmitry S. Sedov[1], Lubov E. Ivanova[2]

[1] The Civil Defense Academy of the Ministry of the Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Moscow, RUSSIA

[2] Ural Training Rescue Center of the Ministry of the Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Ozyorsk, RUSSIA

Abstract: In the article the algorithm of techniques based on the values of the safety level is to search for the rational solution for protection of hazardous production facilities from the effects of air shock waves of conventional weapons. The method of rational design parameters selection is based on the problem of protection index optimization. The program realization of the technique is shown.

Keywords: weapons, protection, safety level, structural parameters of the air shock wave

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с Директивой Министра Российской Федерации МЧС России (от 22 июля 2013 года № 47-22-3) в конце 2013 года в составе ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС России» была создана научно-исследовательская лаборатория. Одной из задач лаборатории является разработка моделей природных, техногенных и информационных процессов, направленных на предупреждение и снижение последствий чрезвычайных ситуаций [1].

Перспективным направлением деятельности лаборатории стало изучение процессов воздействия обычных средств поражения вероятного противника на объекты экономики, объекты жилой застройки и инфраструктуру городов.

Актуальность рассматриваемой тематики обусловлена необходимостью получения количественного критерия оценки последствий применения обычных средств поражения,

учитывающего как конструктивные особенности объекта воздействия, так и условия применения средств поражения. Позволяющего также давать качественную оценку степени повреждения объекта воздействия.

Кроме того существующие методики прогнозирования и оценки состояния объектов воздействия ударно-волновой нагрузки не позволяют оценить эффективность проводимых мероприятий по повышению защищенности объектов от воздушной ударной волны.

Как один из способов оценки эффективности мероприятий повышения защищенности объектов экономики, можно рассмотреть описываемый в [2, 3, 4] подход, основывающийся на оценке значений показателя защищенности.

Значение показателя защищенности находятся исходя из геометрической интерпретации энергетических методов, предложенных группой Британский ученых, и базирующихся на результатах аппроксимации экспериментальных данных, полученных в ходе II мировой войны. Подробное изложение сути энергетических методов приведено в [5].

Значения показателя защищенности зависят от ряда факторов – характеристик конструктивных элементов, на которые непосредственно оказывается воздействие и параметров воздушной ударной волны.

Целью настоящей работы является описание алгоритма работы программы «The calculation of the coefficient of security», позволяющей осуществлять подготовку решений по повышению защищенности объекта экономики к воздействию воздушной ударной волны.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве исходных параметров, влияющих на значения показателя защищенности, рассматриваются:

- количество базовых элементов (плита, колонна, балка, гибкая лента) и их конструктивные параметры (X – половина короткого пролета плиты (м), E – модуль Юнга (Па), h – полная толщина (м), σ_y – предел текучести, напряжение (Па), ρ – плотность материала (кг/м^3), A – площадь поперечного сечения балки (м^2), b – ширина балки (м), I – момент инерции поперечного сечения (м^4), L – длина балки (м); Z – модуль пластического сопротивления (м^3), Φ_p, Φ_i, α_p, α_i, ψ_p, ψ_i – безразмерные коэффициенты.) [5];
- сценарий применения средств поражения (тип применяемого средства поражения, масса тротилового эквивалента взрывчатого вещества, расстояние от эпицентра взрыва до объекта воздействия, вид взрыва, тип подстилающей поверхности в случае контактного подрыва боеприпаса).

Обозначим набор конструктивных параметров базового элемента за

$$X=\{x_1, x_2 \dots x_n\}.$$

При этом количество параметров, которые мы можем варьировать ограничено, как правило, двумя-тремя.

В сценарии применения средств поражения конечными характеристиками представляющими для нас интерес являются значения параметров воздушной ударной волны: избыточное давление (P, Па) и импульс (i, Па·с), определяемые исходя из предлагаемого сценария применения средств поражения по формулам представленным в [6].

По изложенной в [3] методике осуществляется расчет значений показателя защищенности и делается вывод о степени разрушения базового элемента.

Степень разрушения базовых элементов здания, сооружения определяется путем соотнесения полученных значений показателя защищенности со шкалой оценки значений показателя защищенности, пример построения которой, приведен в [3].

В зависимости от отнесения базовых элементов к той или иной степени разрушения на основании СП 165.1325800.2014 Инженерно-технические мероприятия по гражданской обороне делается вывод о степени разрушения всего рассматриваемого объекта.

Повышение защищенности объекта воздействия ударно волновой нагрузки достигается за счет реализации мероприятий по повышению показателя защищенности, за счет изменения набора конструктивных параметров базового элемента *X*.

Автоматизация указанного поиска осуществлена в ходе разработки сотрудниками лаборатории информационного обеспечения населения и технологий информационной поддержки РСЧС программы «The calculation of the coefficient of security» (далее в тексте программа). При этом программой решается следующая задача:

Для заданного сценария применения обычных средств поражения, из исходных данных базовых элементов необходимо среди изменяемых параметров *X* выбрать значения таких, которые доставляют максимум функции защищенности, т.е. повышают защищенность объекта экономики:

$$k=f(X, P, i) \rightarrow max \quad (1)$$

При ограничениях и допущениях:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{1\,min} \le x_1 \le x_{1\,max}} \\ \boldsymbol{x_{2\,min} \le x_2 \le x_{2\,max}} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \boldsymbol{x_{i\,min} \le x_i \le x_{i\,max}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{c_{x_1} + c_{x_2} + \dots + c_{x_i} + c_{y_1} + c_{y_2} \le c_{max}} \quad (2)$$

$$k=f(X, P, i) \rightarrow max \quad (1)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{1\,min} \le x_1 \le x_{1\,max}} \\ \boldsymbol{x_{2\,min} \le x_2 \le x_{2\,max}} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \boldsymbol{x_{i\,min} \le x_i \le x_{i\,max}} \end{cases} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{c_{x_1} + c_{x_2} + \dots + c_{x_i} + c_{y_1} + c_{y_2} \le c_{max}}$$

где $x_{i\ max}$ – максимальные значения изменяемых параметров; $x_{i\ min}$ – минимальные значения изменяемых параметров; c_{xi}, c_{yj} – денежные затраты при оптимизации изменяемых параметров; c_{max} –ограничения финансирования мероприятий повышения защищенности.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В общем виде алгоритм повышения защищенности объекта, реализованный в программе схематично показан на рис. 1.

В качестве примера расчета рассмотрим одноэтажный опасный производственный объект, представленный на рис. 2.

Ранее в работе [3] данный объект уже рассматривался, соответственно значения характеристик базовых элементов принимаем равными уже рассмотренным.

В программе осуществлялся ряд последовательных операций:

1. Запуск программы:
2. Выбор количества базовых элементов, составляющих объект воздействия (рис. 3).
3. Выбор средства поражения, либо ввод тротилового эквивалента взрыва (рис. 4).
4. Выбор типа подстилающей поверхности, на которой происходит взрыв и удаления объекта от эпицентра взрыва (рис. 5).
5. Формирование ограничений по финансовым ресурсам и стоимостей изменения конструктивного параметра (рис. 6).
6. Определение конструктивных параметров базовых элементов (рис. 7).
7. Расчет значений показателя защищенности для базовых элементов (рис. 8).
8. Расчет рациональных значений конструктивных характеристик для базовых элементов (рис. 9).

В качестве применяемого метода решения задачи нелинейного программирования в программе реализован метод обобщенного приведенного градиента, основанный на сокращении размерности задачи с помощью представления всех переменных через множество независимых переменных.

Метод обобщенного приведенного градиента заключается в последовательном выполнении следующих операций:

1. Преобразование ограничений (2) из неравенств в равенства путем ввода базисных переменных.

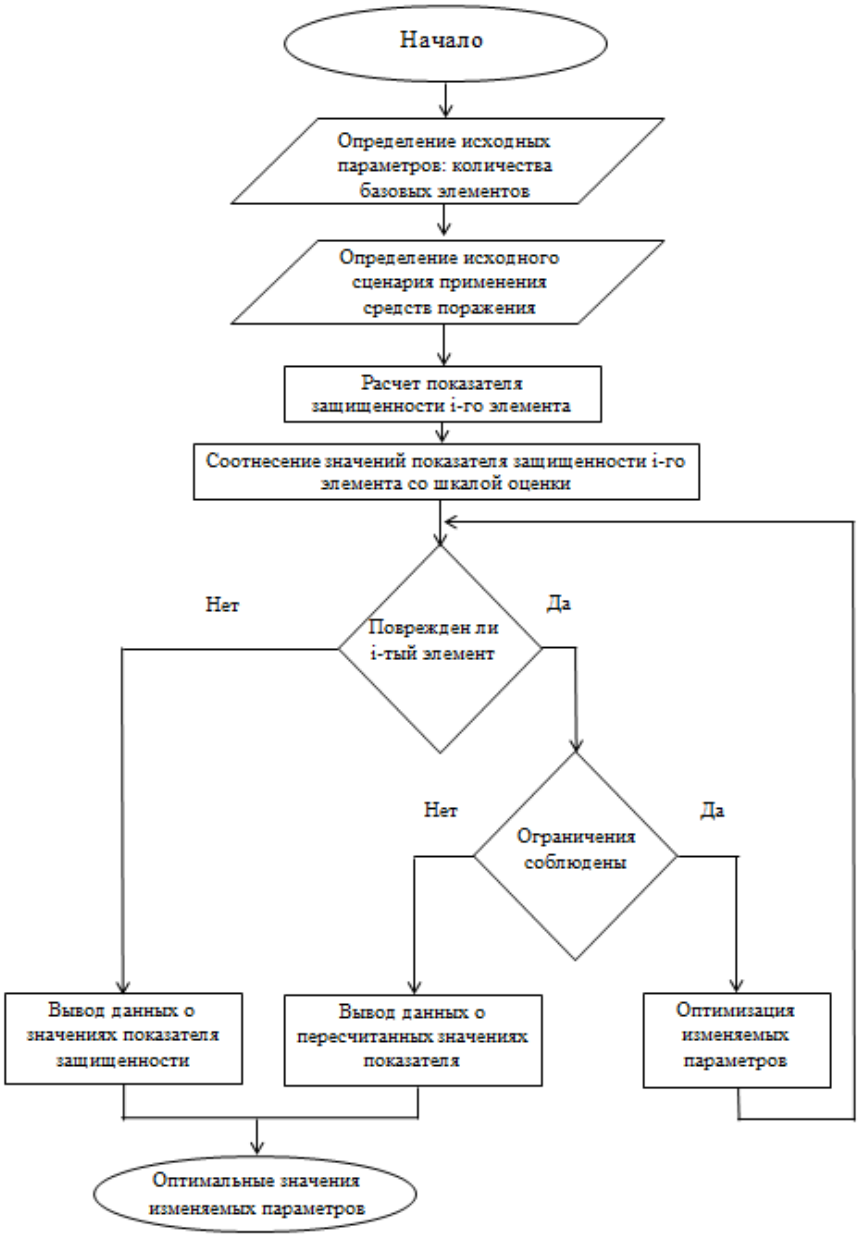


Рисунок 1. Алгоритм повышения защищенности, реализованный в «The calculation of the coefficient of security».



Рисунок 2. Схема опасного производственного объекта.

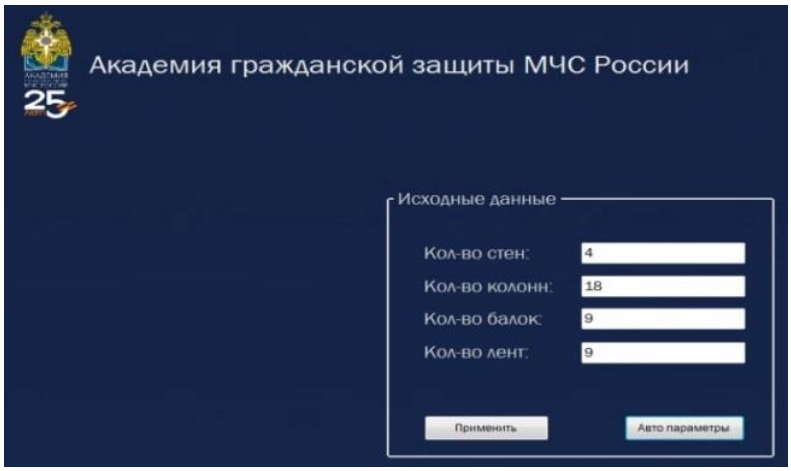


Рисунок 3. Рабочее окно программы с количеством базовых элементов.

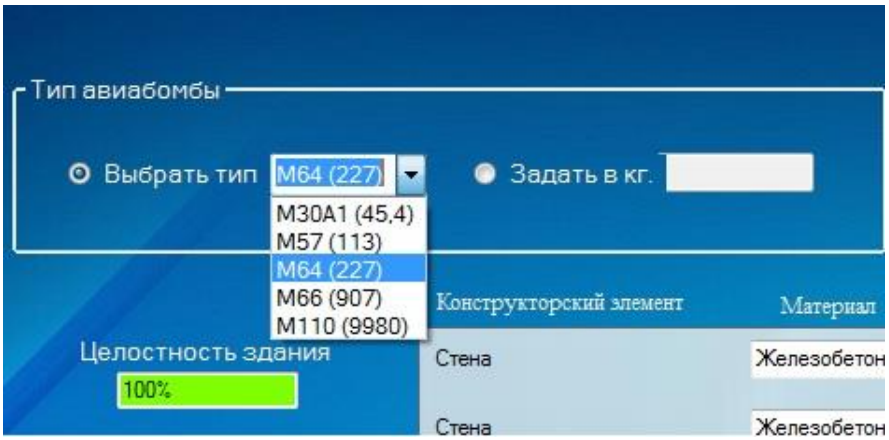


Рисунок 4. Рабочее окно программы с выбором средства поражения.

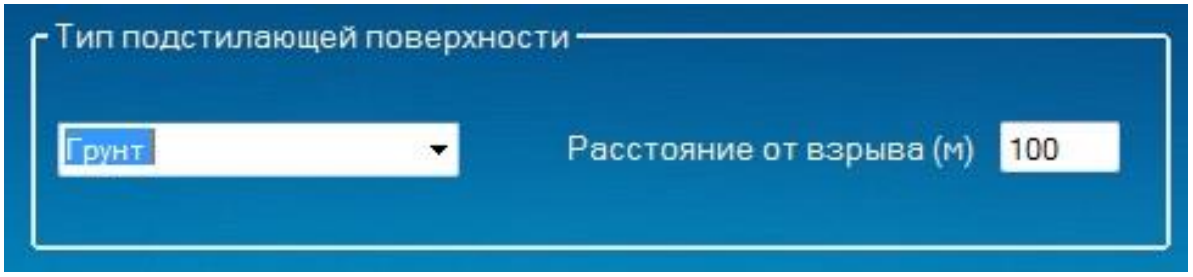
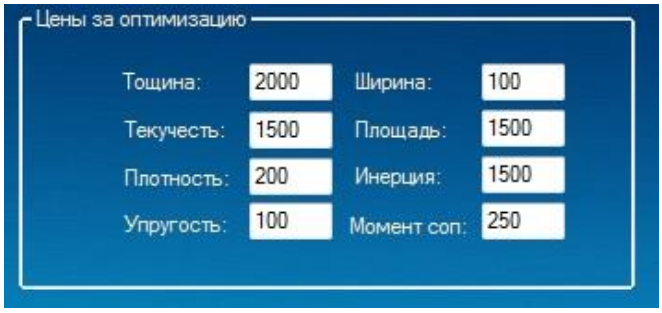


Рисунок 5. Рабочее окно программы с графой выбора расстояния до эпицентра взрыва.





Рисунки 6. Рабочее окно программы с графами стоимости изменения конструктивных параметров и финансовых ограничений.

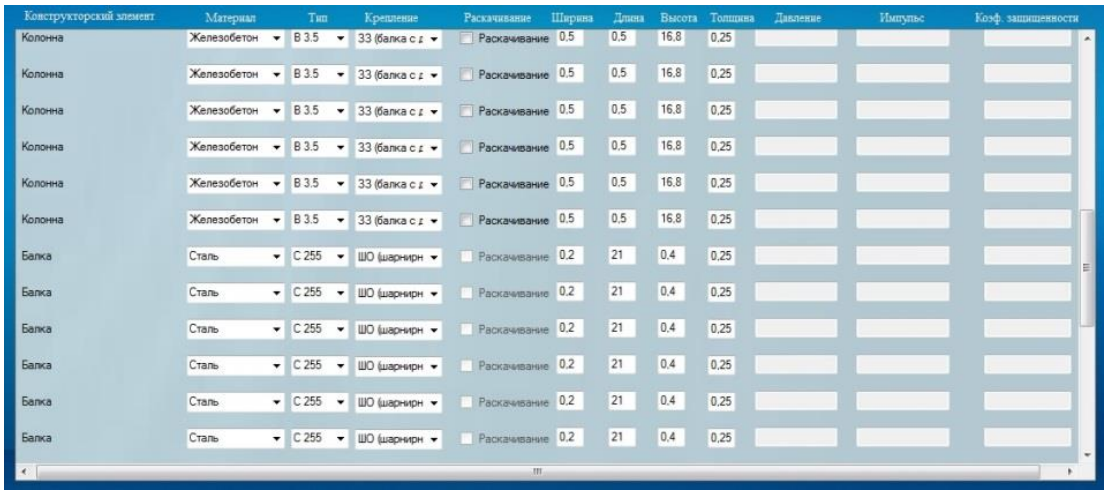


Рисунок 7. Рабочее окно программы с заданными характеристиками базовых элементов.



Рисунок 8. Рабочее окно программы с рассчитанными значениями показателя защищенности базовых элементов.

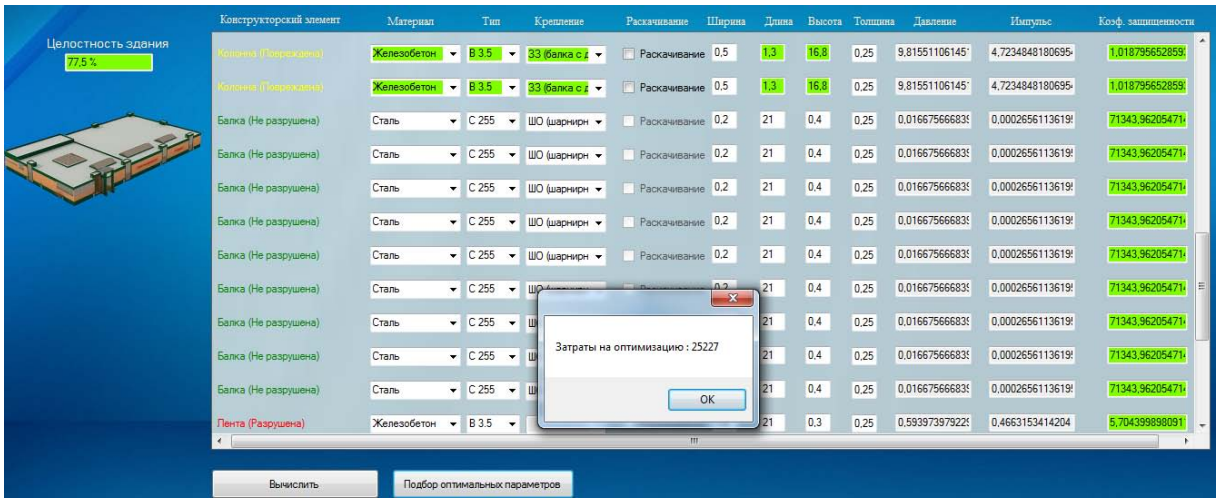


Рисунок 9. Рабочее окно программы с рассчитанными рациональными значениями характеристик базовых элементов.

2. Разделение переменных на 2 группы: базисные переменные x_B и независимые переменные x_N.
3. Нахождение значений градиента в начальной точке (исходные значения конструктивных характеристик базового элемента):

$$\nabla k(\mathrm{x}_k) = (\frac{\partial k}{\partial x_1}; \frac{\partial k}{\partial x_2} \dots \frac{\partial k}{\partial x_k}) \quad (3)$$

4. Нахождение значений приведенного градиента:

$$r^T = \nabla k(x_k)^T - \nabla_B k(\mathrm{x}_k)^T B^{-1} A \quad (4)$$

где $\nabla_B k(\mathrm{x}_k)$ – градиент функции по базисным переменным; A – матрица порядка mxn где m-число строк, а n-число переменных в ограничениях 2; B – неособенная матрица порядка mxm.
5. Нахождение вектора направления спуска при оптимизации:

$$d_k = \begin{cases} -r, & \text{если } r \le 0 \\ -X \cdot r, & \text{если } r > 0 \end{cases} \quad (5)$$

6. Находение значения размера шага оптимизации λ_{max}:

$$\lambda_{l+1} = \min_{1 \le l \le n} \left\{ -\frac{x_{lk}}{d_{lk}} : d_{lk} < 0 \right\} \quad (6)$$

7. Определение следующей точку и значения целевой функции в точке:

$$\mathrm{x}_{k+1} = \mathrm{x}_k - \lambda_{k+1} d_k \quad (7)$$
$$k = f(\mathrm{x}_{k+1}) \quad (8)$$

8. В случае если точка является точкой Куна Такера – то найдено максимальное значение целевой функции при заданных ограничениях, если нет, то итерации повторяются с 6 шага [7].

При этом, исходя из рассчитанных рациональных конструктивных параметров, программой осуществляется подбор мероприятий по их реализации (выбор класса арматуры, марки бетона и т.п.).

Программа по анализу степени разрушения опасно-производственных объектов «The calculation of the coefficient of security» разработана в среде Visual Studio 2017 на языке C#.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показан пример реализации алгоритма поиска рационального решения для защиты опасных производственных объектов от воздействия воздушной ударной волны обычных средств поражения, основанного на использовании показателя защищенности.

Приведен пример программы - «The calculation of the coefficient of security», реализующий указанный алгоритм. Одним из достоинств реализуемого алгоритма является учет сценариев применения различных средств поражения, который позволит осуществлять выбор значений конструктивных параметров, основываясь на анализе применения средств поражения иностранными государствами. Кроме того, существует возможность определять стоимость проведения мероприятий по изменению конструктивных параметров базовых элементов и решения задачи повышения защищенности при ограничении финансовых ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Директива Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий №47-22-3 от 22 июля 2013 года.
2. **Рыбаков А.В., Иванов Е.В., Савинов А.М., Геккель И.Я.** О подходе к определению показателя защищенности зданий и сооружений опасного производственного объекта. // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты, 2017, №2, с. 33-40.

3. **Рыбаков А.В., Иванов Е.В., Седов Д.С., Овсянников Р.Е.** О подходе к определению показателя и построение шкалы оценки защищенности опасного производственного объекта. // Научно-технический вестник Брянского государственного университета, 2017, №3, с. 344-352.
4. **Мухин В.И., Рыбаков А.В., Иванов Е.В., Панин Г.В.** О методике оценки состояния потенциально опасных объектов при воздействии воздушной ударной волной от обычных средств поражения. // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты, 2017, №1, с. 7-15.
5. **Бейкер У., Кокс П., Уэстайн П.** и др. Взрывные явления. Оценка и последствия: В 2-х книгах. – М.: Мир, 1986. – 319 с.
6. **Кочетков К.Е., Котляревский В.А., Забегаев А.В.** Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий. – М.: АСВ, 1996. – 383 с.
7. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. Технологический институт Атланта. Джорджия. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

REFERENCES

1. Federatsii po Delam Grazhdanskoy Oborony, Chrezvychaynym Situatsiyam i Likvidatsii Posledstviy Stikhiynykh Bedstviy №47-22-3 ot 22 iyulya 2013 goda [Directive of the Ministry of the Russian Federation for civil defense, emergencies and elimination of consequences of natural disasters No. 47-22-3 from 22 July 2013].
2. **Rybakov A.V., Ivanov E.V., Savinov A.M., Haeckel I.J.** O Podkhode k Opredeleniyu Pokazatelya Zashchishchennost Zdaniy i Sooruzheniy Opasnogo Proizvodstvennogo Obyekta [On the Approach to the Determination of the Value of the Security of Buildings and Constructions of Hazardous Industrial Objects]. // Nauchnyye i obrazovatelnyye problemy grazhdanskoy zashchity, 2017, No. 2, pp. 33-40.
3. **Rybakov A.V., Ivanov E.V., Sedov D.S., Ovsyannikov R.E.** O Podkhode k Opredeleniyu Pokazatelya i Postroyeniye Shkaly Otsenki Zashchishchennosti Opasnogo Proizvodstvennogo Obyekta [On the Approach to the Definition of the Indicator and the Determination of the Scale of Assessment of Hazardous Production Facilities]. // Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Bryanskogo gosudar-stvennogo universiteta, 2017, No. 3, pp. S344-352.
4. **Mukhin V.I., Rybakov A.V., Ivanov E.V., Panin V.G.** O Metodike Otsenki Sostoyaniya Potentsialno Opasnykh Obyektov pri Vozdeystvii Vozdushnoy Udarnoy Volnoy ot Obychnykh Sredstv Porazheniya [About the Method of Evaluating the Condition of Potentially dangerous Objects Under the Influence of the Air Shock Wave from a Conventional Means of Destruction]. // Nauchnyye i obrazovatelnyye problemy grazhdanskoy zashchity, 2017, No. 1, pp. 7-15.
5. **Baker W., Cox P., Westin P.** Vzryvnyye Yavleniya. Otsenka i Posledstviya [Explosive phenomena. Assessment and Implications]. In two books. Moscow, Mir, 1986, 319 pages.
6. **Kochetkov K.E., Kotlyarevsky V.A., Zabegaev A.V.** Avarii i Katastrofy. Preduprezhdeniye i Likvidatsiya Posledstviy [Accidents and Disasters. Warning and Disaster]. Moscow, ASV, 1996, 383 pages.
7. **Bazaar, M., Shetty K.** Nelineynoye Programmirovaniye. Teoriya i Algoritmy. Tekhnologicheskiy Institut Atlanta. Dzhordzhiya [Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. Atlanta Institute of technology. Georgia]. Moscow, Mir, 1982, 583 pages.

Рыбаков Анатолий Валерьевич, доктор технических наук, доцент, начальник лаборатории Информационного обеспечения населения и технологий информационной поддержки РСЧС Академии гражданской защиты МЧС России; Россия, Московская область, г.о. Химки, мкр. Новогорск;
тел. +7(498)699-07-28; E-mail: anatoll_rubakov@mail.ru

Иванов Евгений Вячеславович, адъюнкт научно-исследовательского центра Академии гражданской защиты МЧС России; Россия, Московская область, г.о. Химки, мкр. Новогорск; Тел. +7(951)126-49-41;
E-mail: linia-zhizni@yandex.ru

Седов Дмитрий Сергеевич оператор лаборатории Информационного обеспечения населения и технологий информационной поддержки РСЧС Академии гражданской защиты МЧС России; Россия, Московская область, г.о. Химки, мкр. Новогорск;
тел.:+7(903)209-46-85; e-mail: agzsedov@yandex.ru

Иванова Любовь Евгеньевна, начальник химико-радиометрической лаборатории ФГКУ «Уральский УСЦ МЧС России»; Россия, Челябинская обл., г.о. Озерск, п. Новогорный; тел. +7(925)679-75-78.

Anatoly V. Ribakov, Dr.Sc., Associate Professor; Head of the Laboratory of Informational Support of the Population and Information Support Technologies of the Emergency Situations Academy of the Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergencies of Russia; Russia, Moscow region, the city of. Khimki, md. Novogorsk;
phone: +7(498)699-07-28;
E-mail: anatoll_rubakov@mail.ru

Evgeniy V. Ivanov, Adjunct of the Research Center of the Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergencies of Russia; Russia, Moscow region, the city of. Khimki, md. Novogorsk; phone +7(951)126-49-41;
E-mail: linia-zhizni@yandex.ru

Dmitry S. Sedov, operator of the Laboratory of Information Support of the Population and Information Support Technologies of the Emergency Situations Academy of the Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergencies of Russia; Russia, Moscow region, the city of. Khimki, md. Novogorsk; phone +7(903)209-46-85;
E-mail: agzsedov@yandex.ru

Lubov E. Ivanova, Head of the Chemical and Radiometric Laboratory of the FGUU “Ural Center of the Ministry of Emergency Measures of Russia”; Russia, Chelyabinsk region. Ozersk, Novorny settlement;
phone +7(925)679-75-78.

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-164-170

ЖЕСТКОЕ И НЕЖЕСТКОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЛЯ МНОГООПОРНОЙ СИСТЕМЫ: ЕЩЕ РАЗ О РОЛИ ДЕМПФИРОВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ ПРИ РАСЧЕТЕ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.Г. Тяпин
Атомэнергопроект, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье обсуждаются вопросы вывода уравнений движения для линейных расчетов сооружений на сейсмические воздействия. Статья продолжает ранее начатую дискуссию: автор не согласен с предложением коллег по включению в правую часть уравнений движения, описывающую динамические нагрузки, матрицы демпфирования. Эти возражения относятся к самому распространенному случаю «жесткого» движения нескольких опор. В настоящей статье автор воспроизводит логику вывода уравнений движения для общего случая «нежесткого» движения опор и указывает момент при выводе уравнений, когда оппонентами нарушается физическая логика перехода к «жесткому» движению опор, как к частному случаю «нежесткого» движения. По мнению автора, ошибка заключается в использовании модели демпфирования Рэлея для правой части уравнения движения. Это противоречит физической логике, поскольку демпфирование в модели Рэлея не является целиком «внутренним»: оно благодаря участию матрицы масс работает на жестких смещениях системы, в отличие от внутреннего демпфирования.

Ключевые слова: сейсмическая реакция, модель демпфирования Рэлея, многоопорные системы

RIGID AND NON-RIGID KINEMATIC EXCITATION FOR MULTIPLY-SUPPORTED SYSTEM: ONCE MORE ABOUT THE CONTRIBUTION OF DAMPING TO THE DYNAMIC LOADS IN SEISMIC ANALYSIS

Alexander G. Tyapin
Atomenergoproject, Moscow, RUSSIA

Abstract: Development of linear equations of motion for seismic analysis is discussed in the paper. The paper continues the discussion: the author does not agree with colleagues putting damping matrix into the right-hand part of the equation of motion describing dynamic loads. This disagreement refers to the most popular case of "rigid" motion of multiple supports. In this paper the author follows the logic of general "non-rigid" support motion and points out a step in the equation development when the transition to "rigid" support motion (as a particular case of "non-rigid" motion) is spoiled by the opponents. In the author's opinion, the mistake is in the implementation of the Rayleigh damping model for the right-hand part of the equation. This is in the contradiction with physical logic, as damping in the Rayleigh model is not really "internal": due to the participation of mass matrix it works on rigid displacements, which is impossible for internal damping.

Keywords: seismic response, Rayleigh damping model, multiply-supported systems

14 февраля 2018 года в Российской Академии Архитектуры и Строительных Наук состоялись VII Золотовские чтения. На них, в частности, обсуждались вопросы, затронутые автором в статье [1]. Прошедшее обсуждение не привело участников дискуссии к согласию, однако позволило, по мнению автора, локализовать и прояснить предмет раз-

ногласий. Это поможет сделать дальнейшее обсуждение более сфокусированным. Поскольку вопрос вызвал интерес и других специалистов, считаю полезным продолжить его публичное обсуждение.

Сначала комментарий о терминологии (обсуждение терминологии не решает вопросов по существу, но способно прояснить предмет спора). В Стандартах (например, [2, 3]) принято говорить об «одноопорных» и «многоопорных» системах. В буквальном смысле слова это разграничение, на мой взгляд, в наши дни устарело: времена одноопорных «шашлычных» консольных моделей сооружений давно ушли в прошлое. С точки зрения количества опор – т.е. узлов моделей, на которые подается кинематическое возбуждение при расчете на сейсмические воздействия в абсолютных перемещениях, – практически все современные модели сооружений являются многоопорными. Автор в [4] предложил термин «платформенные модели», понимая под «платформой» в широком смысле слова как раз множество узлов, движение которых задается в качестве кинематического воздействия на систему. Почему понадобился новый термин, почему просто не оставить термин «многоопорные»? Потому, что множество рассматриваемых опор не обязательно конечное или даже счетное, – это может быть некоторая сплошная поверхность, которую не обязательно дискретизировать конечной сеткой. Определение «много» для точек сплошной поверхности, на мой взгляд, не совсем удачно. Впрочем, чтобы не сбивать фокус дискуссии, автор в данной статье будет говорить не о движении платформы, а о движении некоторого множества опор.

Реальное разграничение расчетных схем проходит сегодня не по количеству опор с заданным их движением, а по характеру этого задаваемого движения. Движение опор, задаваемое расчетчиком, может быть либо «жестким», либо «нежестким». В первом случае движение всех опор определяется движением одной «контрольной» точки (в общем случае по шести степеням свободы), а также положением всех опор в пространстве относительно этой «контрольной» точки. Если движение контрольной точки чисто поступательное, то «жесткое» движение всех опор будет просто повторять движение контрольной точки по всем трем поступательным направлениям. Но «жесткое» движение может быть и вращательным – в этом случае движение опор будет не просто иметь угловые компоненты (одинаковые для всех опор), но поступательные перемещения разных опор будут разными: поступательные движения каждой опоры будут зависеть от координат этой опоры. Ситуация с жестким движением опор близка к одноопорной ситуации: действительно, можно мысленно связать все опоры невесомыми абсолютно жесткими балками с «контрольной точкой» и задавать движение только в ней, как в единственной опоре, – от этого физически ничего не изменится.

Понятно, что у одноопорной системы движение единственной опоры всегда «жесткое». Для многоопорной системы ситуации на практике бывают разными. В сейсмических расчетах большинства сооружений движение опор принимается «жестким» (при этом фундамент сооружения может быть податливым, а опоры системы «сооружение-основание» могут располагаться под грунтовыми пружинами). Однако имеются и исключения – скажем, движение разных опор мостов обычно не задается «жестким». Похожая ситуация у российских атомщиков возникает с т.н. «транспортным порталом» - специальной конструкцией, опирающейся с одной стороны на здание реакторного отделения, а с другой стороны – на П-образную конструкцию (собственно портал), стоящую на отдельном фундаменте. Фундамент портала не связан жестко с фундаментом реакторного отделения, так что движение опор такой конструкции не является жестким. Еще один пример «нежесткого» движения опор – трубопровод, раскрепленный на разных отметках сооружения.

Исторически сложилось так, что когда, к примеру, в Стандартах [2, 3] говорится о «многоопорных системах», в реальности речь идет не о количестве опор, а именно о «многоопорных системах с нежестким движением опор». Этот нюанс терминологии полезно помнить.

Ситуации с жестким и нежестким движением опор различаются по важному признаку. В каждый момент времени можно определить квазистатическое перемещение всей системы «вместе с опорами» - как для жесткого, так и для нежесткого движения опор. Если движение опор жесткое, то принципиально важно, что это перемещение системы в целом тоже будет «жестким». Система получит перемещения (в общем случае включающие и повороты), но не получит деформаций – она будет двигаться как жесткое целое. Внутренние усилия при таких перемещениях будут нулевыми как раз из-за нулевых деформаций. Принципиально важно также отметить, что при нулевых деформациях нулевыми будут не только усилия, порождаемые жесткостью конструкций, но и усилия, порождаемые внутренним демпфированием в системе, независимо от его природы (к примеру, от того, вязкое или гистерезисное демпфирование рассматривается в расчетах).

Если движение опор нежесткое, то в каждый момент времени тоже можно вычислить квазистатическое (определяемое только жесткостью системы и перемещениями опор) движение системы вместе с опорами. Однако в этом движении система будет не только поступательно смещаться и поворачиваться как жестко целое, но еще и деформироваться. В общем случае эти деформации будут зависеть от времени, так что появятся внутренние усилия от внутреннего демпфирования (и от жесткости конструкций, разумеется).

При правильном моделировании должен реализоваться физически очевидный предельный переход: если в качестве специального частного случая «нежесткого» движения опор задать «жесткое» движение тех же опор, то в системе при квазистатических перемещениях вместе с опорами должны исчезнуть внутренние усилия - как от жесткостей конструкций, так и от внутреннего демпфирования.

Эти соображения представляются физически очевидными. Теперь вернемся к сути дискуссии о роли демпфирования в сейсмических нагрузках. Напомним о введенных в [1] обозначениях. Полный столбец абсолютных перемещений узлов системы U^+ состоит из двух частей: столбца U перемещений неопорных узлов и столбца U_b перемещений опорных узлов:

$$\left[U^+(t)\right]=\begin{bmatrix} U(t) \\ U_b(t) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Вводится столбец R^+ квазистатических перемещений системы «вместе с опорами». Этот столбец также состоит из двух частей:

$$\left[R^+(t)\right]=\begin{bmatrix} R(t) \\ R_b(t) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Выражение «вместе с опорами» означает, что $R_b=U_b$. В отличие от [1], будем в данной статье считать перемещение опор «нежестким». Поскольку это квазистатические перемещения, можно записать статическое уравнение равновесия для неопорных узлов в каждый момент времени

$$K\,R=-K_{sb}\,R_b \qquad (3)$$

Здесь K_{sb} – верхний недиагональный блок полной матрицы жесткости K^+, связывающий неопорные узлы с опорными узлами; K – верхний диагональный блок полной матрицы жесткости системы K^+, относящийся к неопорным узлам.

Относительные перемещения X^+ введем как разницу между абсолютными перемещениями U^+ и квазистатическими перемещениями R^+:

$$X^+(t) = U^+(t) - R^+(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(t) - R(t) \\ U_b(t) - R_b(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Из принятого выше условия движения «вместе с опорами» следует, что

$$X_b(t)=0.$$

Повторим вывод уравнений движения из [1], учитывая на этот раз «нежесткость» движения опор. Как и в [1], уравнение движения рассматриваемой линейной системы в неподвижной системе координат и в абсолютных перемещениях имеет вид

$$\left[M^+\right]\left[\ddot{U}^+(t)\right]+\left[C^+\right]\left[\dot{U}^+(t)\right]+\left[K^+\right]\left[U^+(t)\right]=\left[Q^+(t)\right] \quad (5)$$

Нетривиальным здесь является только вектор внешних сил *Q(t)*. Физическая природа его проста: для всех узлов, не относящихся к опорным, его элементы равны нулю (на неопорные узлы внешние силы не действуют), а для опорных узлов внешние силы должны быть такими, чтобы обеспечить ранее заданное движение этих узлов [$U_b(t)$]. Таким образом,

$$\left[Q^+(t)\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ Q_b(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Как мы увидим дальше, определять этот вектор более детально нам и не понадобится, поскольку движение опорных узлов известно до расчета системы (оно задано в качестве кинематического возбуждения).

Теперь начнем преобразовывать уравнение (5). Сначала используем разложение (4) полных перемещений U^+ в сумму квазистатических перемещений R^+ и относительных перемещений X^+. Относительные перемещения и их производные по времени оставим в левой части, а квазистатические перемещения и их производные по времени перенесем в правую часть уравнения:

$$\left[M^+\right]\left[\ddot{X}^+(t)\right]+\left[C^+\right]\left[\dot{X}^+(t)\right]+\left[K^+\right]\left[X^+(t)\right]= \\ =\left[Q^+(t)\right]-\left[M^+\right]\left[\ddot{R}^+(t)\right]-\left[C^+\right]\left[\dot{R}^+(t)\right]-\left[K^+\right]\left[R^+(t)\right] \quad (7)$$

Сразу сделаем следующий шаг – отбросим в матричной системе (7) последние уравнения, относящиеся к движению опорных узлов. Главное для нас – аккуратно учесть все члены в оставшихся уравнениях. В левой части (7) нижняя часть столбца относительных перемещений вместе с их производными по времени тождественно равна нулю – в матричных произведениях она не даст вклада в оставшиеся уравнения. Это означает, что в левой части (7) мы можем просто убрать верхний индекс «+» как во всех трех матрицах, так и в столбцах, на которые они умножаются. Это соответствует уменьшению размера матриц и столбцов. Теперь обратимся к правой части (7). В первом слагаемом верхняя часть столбца внешних сил $[Q^+]$, как указывалось выше в формуле (6), равна нулю (неопорные узлы не нагружены внешними силами). Нижняя ненулевая часть столбца внешних сил Q_b при сокращении размера системы просто выбрасывается вместе с соответствующими уравнениями, так что этот слагаемый в правой части после сокращения системы исчезает. Последний слагаемый в правой части (7) после отбрасывания последних уравнений тоже окажется равен нулю в силу квазистатического уравнения равновесия (3) – читатель может сам расписать это матричное произведение по блокам. Остальные слагаемые в правой части (7) придется просто честно расписать по правилам матричного умножения. В итоге получится новое матричное уравнение движения с уменьшенными размерами всех матриц и столбцов:

$$[M]\left[\ddot{X}(t)\right]+[C]\left[\dot{X}(t)\right]+[K][X(t)]= \\ =-([M]\left[\ddot{R}\right]+[M_{sb}]\left[\ddot{R}_b\right])-([C]\left[\dot{R}\right]+[C_{sb}]\left[\dot{R}_b\right]) \quad (8)$$

Пока преобразования были чисто формальными и потому математически точными. Несложно показать, что они с точностью до обозначений соответствуют формулам, приведенным в статье В.А.Семенова и др. [5]. Для полной аналогии достаточно выразить квазистатические перемещения неопорных узлов R через перемещения опорных узлов R_b с использованием уравнения (3):

$$R = T\,R_b; \quad T = -K^{-1}K_{sb} \tag{9}$$

После этого уравнение движения (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}[M]\left[\ddot{X}(t)\right]+[C]\left[\dot{X}(t)\right]+[K][X(t)]=\\ =-([M][T]+[M_{sb}])\left[\ddot{R}_b\right]-([C][T]+[C_{sb}])\left[\dot{R}_b\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Это уравнение по форме полностью соответствует уравнению из [5].

Но с этого места как раз и начинаются разногласия. Автор этих строк убежден и продолжает настаивать на том, что в случае «жесткого» перемещения опор R_b последний слагаемый в круглых скобках в правой части (8) должен быть равен нулю. В.А.Семенов соглашается с этим для частного случая, когда демпфирование пропорционально жесткости. Но автор уверен, что на самом деле пропорциональность демпфирования жесткости здесь не причем. Дело в принципе: если перемещения опор R_b жесткие, то и перемещения неопорных узлов R, как указывалось в начале статьи, тоже жесткие. В этом случае в последнем слагаемом в круглых скобках в правой части (8) мы видим просто первые строки матричного произведения полной матрицы демпфирования $[C^+]$ на полный столбец жестких скоростей (состоящий из жестких скоростей как неопорных, так и опорных узлов). Это матричное произведение равно нулю по физическим соображениям в силу самого определения внутреннего демпфирования – еще до рассмотрения любых механизмов и моделей демпфирования.

Автор предлагает читателю ввести в любую реальную модель многоопорной системы любое множество вязких демпферов с любыми параметрами (не пропорциональными параметрам жесткости) между любыми узлами, расписать матрицу демпфирования через вязкости введенных демпферов и убедиться в том, что при жестких перемещениях опор второй слагаемый в круглых скобках в правой части (8) всегда равен нулю.

Таким образом, само по себе уравнение (8) при физичных моделях демпфирования, как и положено, обеспечивает тот самый предельный переход от нежесткого движения к жесткому движению опор, о котором говорилось выше. К уравнению (8) (и к уравнению (10) как к его следствию) у автора претензий нет – претензии появляются на следующем шаге. В.А.Семенов после вывода аналога уравнения (10) еще до предельного перехода к жесткому движению опор вводит в правую часть уравнения (10) рэлеевскую модель демпфирования, т.е. известное конкретное выражение для матрицы демпфирования

$$[C^+] = \alpha\,[M^+] + \beta\,[K^+] \tag{11}$$

Именно после этого за счет нефизичности модели Рэлея, о которой автор писал в [1], оказывается, что предельный переход к жесткому движению опор уже «испорчен». Второй слагаемый в круглых скобках в правой части (8) даже после перехода к жесткому движению опор теперь в ноль не обращается из-за работы матрицы масс в (11) на жестких перемещениях (в этом, собственно, и заключается нефизичность модели Рэлея). Как следствие, в наиболее распространенных случаях жесткого движения опор при сейсмических расчетах типичных сооружений возникают дополнительные составляющие сейсмической нагрузки, которые требуют изменения армирования и пр. По мнению автора этих строк, это чисто паразитический эффект, связанный только с нефизичностью модели Рэлея. Его ничего не стоит избежать в случае жесткого движения опор, просто вычеркнув второй слагаемый в круглых

скобках из правой части (8) до конкретизации модели внутреннего демпфирования. Рэлеевскую модель демпфирования при желании можно использовать, но только в левой части уравнения движения (8). Таким образом, отсутствие демпфирования в правых частях уравнений движения в Стандартах [2,3] – вовсе не «наследие старины» (в отличие от отсутствия недиагонального блока матрицы масс в первом слагаемом в правой части (8)); оно физически обосновано для типичного случая, когда движение опор «жесткое».

Но что делать в тех не очень частых случаях, когда движение опор все-таки нежесткое (см. примеры, приведенные выше)? Ведь в этих случаях демпфирование действительно физически влияет на нагрузки в правой части уравнения движения! Автор считает, что использовать модель Рэлея в правой части (8) и в таких случаях тоже некорректно; он в подобных случаях обращается к расчету в частотном диапазоне (это расчет с использованием преобразования Фурье; не путать с линейно-спектральным расчетом!), где материальное демпфирование задается комплексным модулем упругости. Влияние демпфирования на нагрузки в таком случае действительно существует и учитывается в расчетах, но не по модели Рэлея. Но количество таких случаев, повторим, не очень велико – сейчас важнее решить, что мы делаем в массовых типовых расчетах с жестким движением опор. Именно об этом идет дискуссия.

Автор готов свернуть дискуссию и публично извиниться перед оппонентами в том случае, если кто-то продемонстрирует на любом примере ненулевой вклад внутреннего демпфирования в динамические нагрузки в правой части уравнения движения при жестком движении опор, используя любую физичную модель демпфирования (например, некую систему вязких демпферов, пластичных демпферов и т.п.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тяпин А.Г.** О роли демпфирования в динамических нагрузках в расчетах на сейсмические воздействия // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. №1. (В печати),
2. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
3. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE/SEI 4-16. Reston, Virginia, USA. 2017.
4. **Тяпин А.Г.** Платформенные модели в задачах учета взаимодействия сооружений с основанием при расчетах на сейсмические воздействия. – М.: АСВ, 2015. – 208 с.
5. **Семенов В.А., Лебедев В.Л., Солдатов А.Ю.** Об учете демпфирования при расчетах пространственных сооружений на сейсмические воздействия // Справочник. Инженерный журнал, 2013, №5, с. 12-20.

REFERENCES

1. **Tiapin A.G.** O Roli Dempfirovaniia v Dinamicheskikh Nagruzkakh v Raschetakh Na Seismicheskie Vozdeistviia [On the Role of Damping in Dynamic Loads in Seismic Analysis]. // Seismostoikoe stroitel'stvo, Bezopasnost' sooruzhenii, 2018, No. 1 (In press).
2. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
3. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE/SEI 4-16. Reston, Virginia, USA. 2017.
4. **Tiapin A.G.** Platformennye Modeli v Zadachakh Ucheta Vzaimodeistviia Sooruzhenii s Osnovaniem pri Raschetakh na Seismicheskie Vozdeistviia [Platform Models in Problems of Accounting for the Interaction of Structures with a Foundation in

Seismic Analysis]. Moscow, ASV, 2015, 208 pages.

5. **Semenov V.A., Lebedev V.L., Soldatov A.Iu.** Ob Uchete Dempfirovaniia pri Raschetakh Prostranstvennykh Sooruzhenii na Seismicheskie Vozdeistviia [About Allowance for Damping in Seismic Analysis of Spatial Structures]. // Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal, 2013, No. 5, pp. 12-20.

Тяпин Александр Георгиевич, доктор технических наук; главный специалист, АО «Атомэнергопроект»; Россия, 121352, Москва, Славянский бульвар, 1-119, тел.+7(985)998-33-21, e-mail: atyapin@bvcp.ru.

Alexander G. Tyapin, Doctor of Technical Sciences, Chief Specialist, JSC “Atomenergoproject”; 1-119, Slavyanskyi Bulvar, Moscow, 121352, Russia;
phone +7(985)998-33-21, e-mail: atyapin@bvcp.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 171-177 (2018)
DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-171-177

ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В.А. Шабанов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассматривается классическая гидродинамическая теория фильтрации. Рассматриваются модели грунта, жидкости и характер течения жидкости, легшие в основу создания классической теории фильтрации. Также рассматриваются допущения, принятые для линеаризации уравнений. Оценивается область применения классической теории фильтрации. Предложена новая модель фильтрации через пористую среду, основанная на применении законов теоретической механики. В основу положена классическая модель грунта: грунт состоит из капилляров с параллельными осям, по которым движется жидкость. Для задач инфильтрации выведены уравнения движения. Рассмотрены частные случаи нестационарного движения конечного объема жидкости. Приведен численный пример машинного эксперимента.

Ключевые слова: гидромеханическая теория фильтрации, ламинарное движение, закон Дарси, нестационарная фильтрация, модель грунта, конечный объём жидкости

PROBLEMS OF NONSTATIONARY FILTRATION

Vsevolod A. Shabanov
Samara State Technical University, Samara, RUSSIA

Abstract: The article deals with the classical hydrodynamic theory of filtration. Discusses models of soil, fluid and nature of fluid flow that formed the basis for the creation of the classic filtration theory. Also discusses the assumptions made for the linearization of the equations. Evaluated the scope of the classical filtration theory. Proposed a new model of filtration through a porous medium, based on the application of the laws of theoretical mechanics. It is based on the classical model of soil: the soil is composed of capillaries with ..parallel axes, in which the liquid moves. For tasks of infiltration equations of motion. Considered special cases of unsteady motion of a finite volume of liquid. Numerical example a machine experiment.

Keywords: hydro mechanical theory of filtration, laminar movement, Darcy's law, transient filtering, the soil model, finite volume of fluid

В последнее время участились процессы, связанные с затоплением территорий, аварийных разливов жидкостей по поверхности земли и т.п. В связи с нестационарностью этих процессов возникла необходимость разработки новых моделей инфильтрации жидкости в грунт.

Рассмотрим процесс проникновения тяжелой вязкой жидкости в пористую среду, причем сначала рассмотрим этот процесс с позиций классической теории фильтрации, следуя, в частности, [1-5].

Классическая теория фильтрации базируется на моделях теории сплошной среды, считая постоянными свойства жидкости (плотность ρ и вязкость μ) и пористой среды (пористость m и коэффициент фильтрации k). Решение задач сводится решению трех уравнении движения и уравнения неразрывности. Рассмотрим частный случай – движение вдоль оси y. [1].

Возьмем одно уравнение движения в общем случае с инерционными членами (ось y направлена вниз).

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+g-\frac{mg}{k}v_y \qquad (1)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) видно, v_y зависит только от y. А также, учитывая, что истинная скорость движения жидкости в порах равна

$$v_y = \frac{1}{m} v,$$

получим из (1):

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g - \frac{g}{k} v \qquad (3)$$

m – пористость среды.
В левой части уравнения стоит ускорение

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{dt},$$

которым в классической теории пренебрегают.
Вводя понятие – напор

$$h = \frac{p}{\rho g} - y$$

и подставляя в (3) получим закон Дарси

$$v = -k\frac{dh}{dy},$$

т.е. закон Дарси применим и к неустановившемуся движению, если пренебречь ускорением. Предположим теперь, что вода просачивается в грунт под постоянным напором H, причем в момент времени t она просочилась на глубину y_0 от границы водоема.
Скорость фильтрации, при использовании вышеприведенной модели будет

$$\frac{1}{m}\frac{dy_0}{dt} = k\frac{H + h_k + y_0}{y_0} \qquad (4)$$

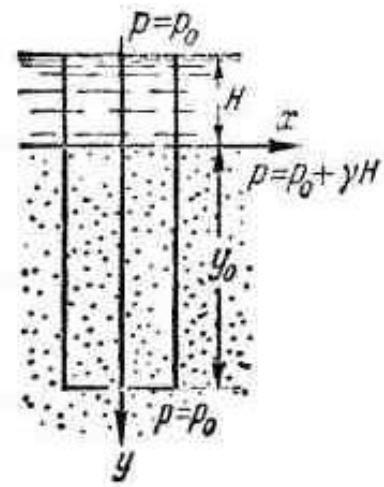


Рисунок 1. Схема фильтрации [1].

Здесь, через h_k ,обозначена высота капиллярного поднятия.
Как видно из этой формулы, скорость фильтрации изменяется по гиперболе и при возрастании y_0 стремится коэффициенту фильтрации. При стремлении y_0 к нулю – скорость неограниченно возрастает.
Данные исследования выполнены для непрерывной среды, в гидромеханическом понимании, при ламинарном течении и без учета сил инерции. Однако, на практике, встречаются случаи пролива конечного объема жидкости на поверхность грунта, и эта жидкость фильтруется в грунт. Процесс имеет начало и конец, а масса жидкости конечна. Для исследования подобных процессов модель сплошной среды не подходит.
Нами разработана иная модель инфильтрации. Основные положения её таковы:
1) В качестве модели грунта принята модель идеального грунта.
Поскольку движение вязкой жидкости достаточно хорошо изучено при определенных допущениях, а именно, для движения с малыми скоростями в прямолинейных призматических каналах, поэтому в качестве модели для изучения законов фильтрации в грунте, принимается грунт, имеющий поры в виде цилиндров с параллельными осями. Такой грунт называют идеальным [5].

2) В качестве модели жидкости принята ньютоновская модель вязкой жидкости.
3) Масса жидкости, участвующей в движении является переменной и конечной.
4) Процесс протекает во времени, имеет начало и конец.
5) При составлении уравнения движения используются модели и основные теоремы теоретической механики.

Пусть на поверхности грунта находится вода (жидкость) слоем толщиной Δ, которая инфильтрует вглубь под действием силы тяжести. Толщина слоя жидкости на поверхности остается постоянной. Эти условия рассмотрены выше.

В качестве модели грунта возьмем, как уже говорилось, модель идеального грунта с вертикальными цилиндрическими круговыми порами диаметром d. Будем исследовать процесс проникновения жидкости в пору.

Ось y направим вниз, а начало отсчета поместим на поверхности грунт.

Будем считать, что часть жидкости над порой движется вместе с жидкостью в поре. Они образуют жидкий цилиндр высотой Δ+ y и диаметром d. По мере проникновения в пору масса цилиндра возрастает за счет присоединения частиц с поверхности. Присоединяющиеся частицы движутся нормально к оси y (рис. 2).

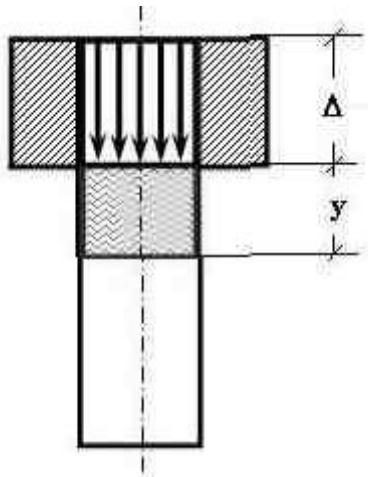


Рисунок 2. Схема движения жидкости.

На жидкий цилиндр, движущийся в поре, действуют силы:

– Сила тяжести

$$Fg = g\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y); \qquad (6)$$

– Силы вязкого трения, которые в общем случае можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых -$T1$- пропорциональна первой степени скорости, а вторая – $T2$ пропорциональна квадрату скорости [7]. Они также пропорциональны площади контакта жидкого цилиндра со стенками поры.

$$T1 = R1\pi dy\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (7)$$

$$T2 = R2\pi dy\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (8)$$

Коэффициенты $R1$ и $R2$ учитывают как свойства жидкости, так и свойства грунта.

На жидкий цилиндр, поскольку движение его не стационарно, действуют и силы инерции. Поскольку масса цилиндра изменяется по мере проникновения жидкости в пору, будем рассматривать её (массу цилиндра) как материальную точку переменной массы [8].

Для определения силы инерции используем второй закон Ньютона в такой формулировке:

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right); \qquad (9)$$

– Масса

$$m = \rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y) \qquad (10)$$

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{dy}{dt}\right); \qquad (11)$$

Дифференцируя уравнение по времени, получим:

$$Fi = \rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2y}{dt^2} + \rho\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (12)$$

Составим уравнение движения жидкого цилиндра переменной массы:

$$Fi + T1 + T2 = Fg \tag{13}$$

Подставив выражения для действующих сил в (1), получим:

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2y}{dt^2} + \rho\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \\ + R1\pi dy\cdot\frac{dy}{dt} + R2\pi dy\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = g\rho\frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y) \tag{14}$$

Разделив правую и левую части уравнения (2) на массу, что можно сделать, поскольку она всегда отлична от нуля, получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\cdot\frac{1}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d}\frac{dy}{dt}\cdot\frac{y}{\Delta + y} + \\ + \frac{4R2}{\rho d}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\cdot\frac{y}{\Delta + y} = g. \tag{15}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. В нем явно не присутствует переменная t и, следовательно, оно допускает понижение порядка [10].
Введем новую переменную

$$p(y) = \frac{dy}{dt}. \tag{16}$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dy}p \tag{17}$$

Подставив в уравнение (12), получим:

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d}\cdot p\cdot\frac{y}{\Delta + y} + \\ + \frac{4R2}{\rho d}\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta + y} = g. \tag{18}$$

Получили уравнение первого порядка, т.н. уравнение Абеля второго порядка класса B. Исследуем решение на границах интервала.
Пусть y достаточно велико и

$$\Delta << y.$$

Тогда силами инерции можно пренебречь и

$$\frac{y}{\Delta + y} \approx 1.$$

Уравнение (18) запишется так:

$$\frac{4R1}{\rho d}\cdot p + \frac{4R2}{\rho d}\cdot p^2 = g \tag{19}$$

Получено общее равнение инфильтрации под действием гравитационных сил.
Предположим, что имеет место линейная фильтрация – закон Дарси, который записывается так

$$v = kI.$$

Здесь $I = 1$, градиент, k – коэффициент фильтрации. Т.е. скорость течения в поре будет равняться истинной скорости течения,

$$p = \frac{k}{m}.$$

m – пористость.
Для рассматриваемого случая уравнение инфильтрации запишется так

$$\frac{4R1}{\rho d}\cdot\frac{k}{m} = g; \tag{20}$$

откуда

$$\frac{4R1}{\rho d} = \frac{mg}{k} \qquad (21)$$

Если же имеет место квадратичная инфильтрация, то скорость инфильтрации определяется законом Краснопольского

$$v = k\sqrt{I}\,, \qquad (22)$$

или

$$v^2 = k^2 I\,,\ p^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \qquad (23)$$

Из уравнения

$$\frac{4R2}{\rho d}\cdot p^2 = g \qquad (24)$$

Найдем

$$\frac{4R2}{\rho d} = g\left(\frac{m}{k}\right)^2 \qquad (25)$$

Подставим найденные значения сил сопротивления в уравнение движения (18)

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + r1\cdot\frac{mg}{k}\cdot p\cdot\frac{y}{\Delta + y} + \\ + r2\cdot\left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta + y} = g. \qquad (26)$$

Теперь исследуем уравнение движения при малых значениях y. Предположим, что

$$y << \Delta$$

и имеет место квадратичная инфильтрация. При этих предположениях уравнение (9) запишется так:

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta} + \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (27)$$

В начальный момент влияние присоединенной массы на движение невелико и им можно пренебречь. Тогда уравнение движения будет:

$$\frac{dp}{dy}p + \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot g\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (28)$$

Обозначим

$$r = \left(\frac{m}{k}\right)^2\cdot\frac{g}{\Delta} \qquad (29)$$

И тогда

$$\frac{dp}{dy}p + r\cdot p^2\cdot\frac{y}{\Delta} = g. \qquad (30)$$

При начальной скорости

$$v(0) = v0\,,$$

или

$$p(0) = v0\,,$$

уравнение (18) имеет решение вида:

$$p^2 = \frac{\dfrac{g\sqrt{\pi} * erf(\sqrt{-r}\cdot y}{\sqrt{-r}} + v0^2}{\exp(ry^2)} \qquad (31)$$

Здесь $erf(\sqrt{-r})$ функция ошибок.

Численный эксперимент показал, что скорости инфильтрации и ускорения быстро меняются. Эпюры скоростей и ускорения представлены на рисунках 3 и 4.

Из рисунков видно, что при глубине проникновения свыше миллиметра влияние ускорения становится малым и им можно пренебречь.

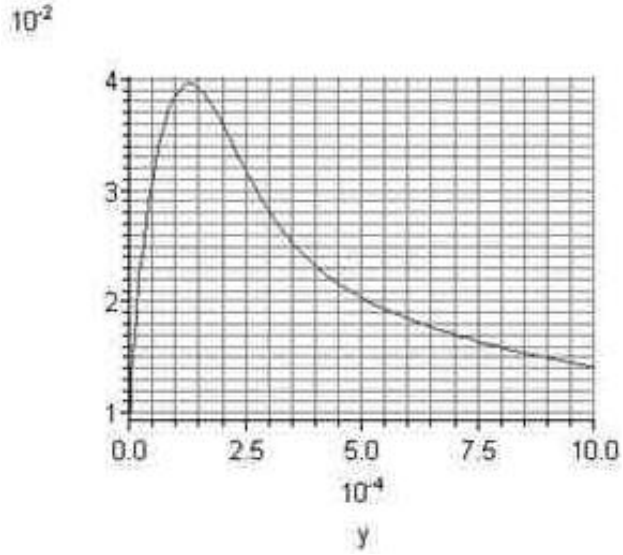


Рисунок 3. Эпюра скоростей.

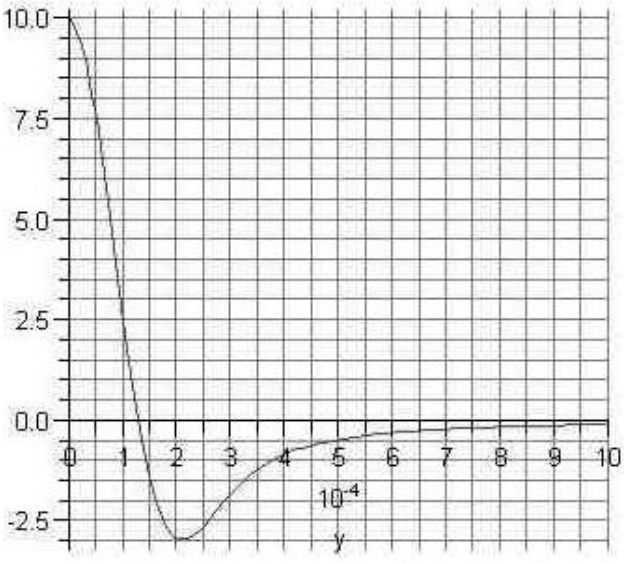


Рисунок 4. Эпюра ускорений.

Соответственно для расчета скоростей можно использовать упрощенное уравнение движения.(13) в общем виде:

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + r1 \cdot \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + \\ + r2 \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \qquad (32)$$

А для ламинарного движения

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + = g \qquad (33)$$

Если же в вышерассмотренных уравнениях заменить Δ на $\Delta - my$, то будет иметь место случай впитывания воды в грунт.

Большие ускорения, большие градиенты могут вызвать уплотнение грунта, изменение его фильтрационных характеристик. Это подтверждено нашими исследованиями [7-9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полубаринова-Кочина П.Я**. Теория движения грунтовых вод. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. – 678 с.
2. Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Расчеты фильтрации. – М.: Стройиздат Наркомстроя, 1941. – 152 с.
3. **Седов Л.Н.** Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
4. **Вебстер А.Г., Маскет М.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1949. – 613 с.
5. **Лейбензон Л.С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: ОГИЗ, 1947. – 244 с.
6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
7. **Шабанов В.А., Пупков Е.А., Каширина Т.В.** Экспериментальное исследование нестационарной фильтрации в песчаных грунтах. // Градостроительство и архитектура, 2015, №3(20), с. 82-86.
8. **Шабанов В.А., Михасек А.А.** Экспериментальное исследование проникновения вязкой жидкости в пористую среду. // Известия высших учебных заведений. Строительство, 2006, №11-12, с. 52-56.
9. **Шабанов В.А.** Исследование фильтрационных характеристик песчаных грунтов при многократном изменении гради-

ентов напоров. // Сборник «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство». – Самара: СГАСУ, 2016, с. 159-161.

REFERENCES

1. **Polubarinova-Kochina P.Ya.** Teoriya Dvizheniya Gruntovykh Vod [Theory of Groundwater Movement]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1952, 678 pages.
2. Tekhnicheskiye Usloviya i Normy Proyektirovaniya Gidrotekhnicheskikh Sooruzheniy. Raschety Filtratsii [Technical Conditions and Design Standards for Hydraulic Structures. Filtering Analysis]. Moscow, Stroyizdat Narkomstroya, 1941, 152 pages.
3. **Sedov L.N.** Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983, 528 pages.
4. **Webster A.G., Masket M.** Dvizheniye Prirodnykh Zhidkostey i Gazov v Poristoy Srede [Movement of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium]. Moscow, Gostekhizdat, 1949, 613 pages.
5. **Leybenzon L.S.** Dvizheniye Prirodnykh Zhidkostey i Gazov v Poristoy Srede [Movement of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium]. Moscow, OGIZ, 1947, 244 pages.
6. **Kamke E.** Spravochnik po Obyknovennym Differentsialnym Uravneniyam [A Handbook of Ordinary Differential Equations]. Saint-Petersburg, Lan, 2003, 576 pages.
7. **Shabanov V.A., Pupkov Ye.A., Kashirina T.V.** Eksperimentalnoye Issledovaniye Nestatsionarnoy Filtratsii v Peschanykh Gruntakh [Experimental Study of Non-Stationary Filtration in Sandy Soils]. // Gradostroitelstvo i Arkhitektura, 2015, No. 3(20), pp. 82-86.
8. **Shabanov V.A., Mikhasek A.A.** Eksperimentalnoye Issledovaniye Proniknoveniya Vyazkoy Zhidkosti v Poristuyu Sredu [Experimental Study of the Penetration of a Viscous Liquid into a Porous Medium]. // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitelstvo, 2006, No. 11-12, pp. 52-56.
9. **Shabanov V.A.** Issledovaniye Filtratsionnykh Kharakteristik Peschanykh Gruntov pri Mnogokratnom Izmenenii Gradiyentov Naporov [Investigation of Filtration Parameters of Sandy Soils with Multiple Changes in Pressure Gradients]. // Sbornik «Traditsii i innovatsii v stroitelstve i arkhitekture. Stroitelstvo». Samara, SGASU, 2016, pp. 159-161.

Шабанов Всеволод Александрович, член-корреспондент РААСН, профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры «Природоохранное и гидротехническое строительство», Самарский государственный технический университет; 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194;
тел.: +7(846) 242-17-84; факс.: +7(846) 332-19-65;
E-mail: shabanov@samgasu.ru.

Vsevilid A. Shabanov, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Ph.D., Professor of the Department “Environmental and Hydraulic Engineering”, Samara State Technical University; 443001, Russia, Samara, ul. Molodogvardeyskaya, 194; phone: +7(846) 242-17-84;
fax: +7(846) 332-19-65; e-mail: shabanov@samgasu.ru.

International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 14(1) 178-184 (2018)
DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-178-184

ВЛИЯНИЕ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУР НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕТОНА

В.И. Андреев, Л.С. Полякова
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассмотрено влияние повышенных температур в интервале от 20°С до 800°С на механические свойства бетонов: термическое расширение, модуль упругости, коэффициент поперечной деформации, прочность. Предложены функции, характеризующие зависимости механических характеристик бетона от температуры, а также функции, аппроксимирующие нелинейную диаграмму деформирования бетона при повышенных температурах.

Ключевые слова: нелинейно упругий материал, неоднородность, бетон, повышенные температуры

INFLUENCE OF ELEVATED TEMPERATURES ON MECHANICAL PROPERTIES OF CONCRETE

Vladimir I. Andreev, Lyudmila S. Polyakova
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The paper considers the influence of elevated temperatures in the range from 20°C to 800°C in the mechanical properties of the concrete the thermal expansion, elastic modulus, shear deformation coefficient, strength. Functions describing the dependences of the mechanical characteristics of concrete on temperature as well as functions approximating the nonlinear diagram deformation of concrete at elevated temperatures are proposed.

Keywords: nonlinearity, inhomogeneity, concrete, elevated temperature

ВВЕДЕНИЕ

В обычных условиях работы бетонные и железобетонные конструкции часто подвергаются воздействиям не силового характера, вызывающим изменения их деформированного состояния. Действие температуры существенно меняет характер работы сооружения. Под влиянием повышенных и отрицательных температур в сооружении возникает неоднородность бетона, обусловленная изменением его свойств.

Проблема расчета железобетонных сооружений с учетом температуры состоит в разработке методов, учитывающих физическую нелинейность деформирования железобетона в условиях существенной неоднородности и анизотропии материала, а также особенности развития температурно-усадочных и упругих деформаций бетона.

В статье приводится описание влияния повышенных температур на механические свойства бетонов. В основном рассматривается диапазон температур от 20°С до 200°С, так как он охватывает широкую область эксплуатационных режимов работы железобетонных конструкций. При более высоких температурах применяются специальные жаростойкие бетоны.

Воздействие повышенных температур на бетон вызывает температурные деформации, изменение упругих характеристик (модуль

упругости, коэффициент поперечной деформации) и прочностных свойств материала, влияет на общую диаграмму деформирования бетона.

1. ВЫНУЖДЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ОТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Воздействие температуры на ненагруженный бетон приводит к возникновению в нем температурных деформаций. Общая величина деформаций ненагруженного бетона при действии повышенных температур включает три вида деформаций – деформации усадки, обратимые и необратимые температурные деформации. Соответственно температурно-усадочные деформации бетона могут быть определены по формуле:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_T^{ir}(T) + \varepsilon_T^{r}(T) - \varepsilon_{shr}(T), \qquad (1)$$

где $\varepsilon_T^{ir}(T)$ и $\varepsilon_T^{r}(T)$ - соответственно необратимые и обратимые температурные деформации при нагреве бетона до температуры T; $\varepsilon_{shr}(T)$ - деформации усадки бетона при повышенной температуре T.

Необратимые температурные деформации определяются по формуле:

$$\varepsilon_T^{ir}(T) = \alpha^{ir}(T)\Delta T, \qquad (2)$$

где $\alpha^{ir}(T)$ – коэффициент линейных необратимых температурных деформаций; $\Delta T = T - T_0$, где $T_0 = 20°$ - значение нормальной температуры.

В общем случае значение коэффициента α^{ir} зависит от температуры, скорости нагрева и влажности бетона к началу нагрева. Однако для бетона, имеющего при нормальной температуре влажность, близкую к равновесной, коэффициент α^{ir} зависит только от температуры (рисунок 1) и аппроксимируется выражением:

$$\alpha^{ir}(T) = 1,35 \cdot 10^{-5} \cdot \exp(-0,027\Delta T), \qquad (3)$$

В расчетах принимается, что необратимые температурные деформации полностью развиваются в процессе первого кратковременного нагрева, за исключением температур нагрева до 90°С. Для этого диапазона условно принимается, что в процессе первого нагрева развивается 50% необратимых деформаций, остальные – в течение последующих 40 часов изотермических испытаний [1].

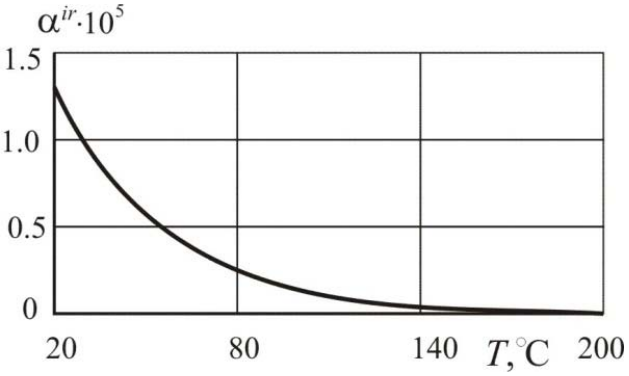


Рисунок 1. Коэффициент линейных необратимых деформаций.

Обратимые температурные деформации характеризуются коэффициентом линейных обратимых температурных деформаций и определяются по формуле:

$$\varepsilon_T^{r}(T) = \alpha^{r}(T)\Delta T, \qquad (4)$$

Коэффициент обратимой линейной температурной деформации бетона, имеющего влажность, равновесную со средой, зависит только от температуры (рис. 2) и аппроксимируется выражением:

$$\alpha^{r}(T) = 0,76 \cdot 10^{-5} + 7,5 \cdot 10^{-8} \cdot \exp(0,02\Delta T) \qquad (5)$$

Деформации усадки бетона определяются по формуле:

$$\varepsilon_{shr} = -\beta\Delta U \qquad (6)$$

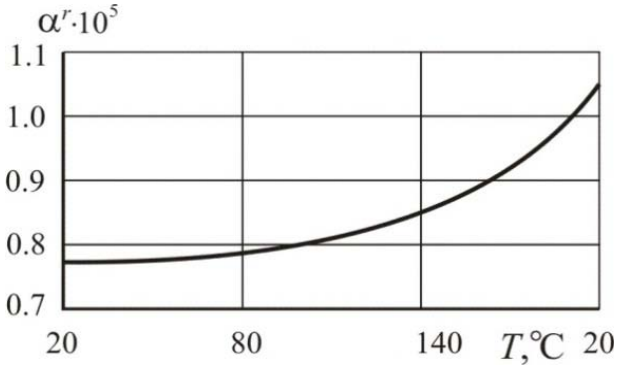


Рисунок 2. Коэффициент линейных обратимых деформаций.

На всем диапазоне повышенных температур зависимость между коэффициентом линейной усадки, температурой и влажностью бетона может быть удовлетворительно аппроксимирована формулой [2]:

$$\beta(T,U) = \beta_0 - 1{,}37 \cdot 10^4 \cdot \Delta T + \\ +5{,}6 \cdot 10^{-2} \exp\left(-2{,}5 \cdot 10^3 \cdot \frac{U}{\Delta T}\right) \qquad (7)$$

где β_0 - коэффициент линейной усадки при нормальной температуре (для тяжелого бетона принимается $3 \cdot 10^{-2}$); U - влажность бетона при повышенной температуре T.
Таким образом формула (6) для повышенных температур примет вид:

$$\varepsilon_{shr} = -\beta(T,U)\Delta U\,, \qquad (8)$$

Для достоверного определения усадочных деформаций бетона при действии повышенных температур требуется достаточно точная исходная информация о полях распределения влажности в бетоне рассчитываемой конструкции при нормальной и повышенной температурах. Если эта информация отсутствует, можно пользоваться упрощенной методикой расчетного определения усадочных деформаций. В этом случае в формуле (8) параметры, являющиеся функциями изменения влажности бетона, заменяют новыми параметрами, являющимися функциями времени действия температуры. Подробно методика изложена в [3].

2. МОДУЛЬ УПРУГОСТИ

Модуль упругости тяжелого бетона зависит в основном от температуры нагрева и практически не зависит от длительности ее действия. При первом кратковременном нагреве отмечается резкое уменьшение модуля упругости, которое в зависимости от температуры составляет 20-42%. Длительное изотермическое действие температуры не вызывает дальнейшего изменения модуля упругости. Изменение начального модуля упругости бетона при повышенных температурах показано на рисунке 3 и описывается соотношением:

$$E(T) = E_0 \cdot \left(T_0 / T\right)^{0{,}24} \qquad (9)$$

где E_0 - модуль упругости при нормальной температуре $T_0 = 20°C$.

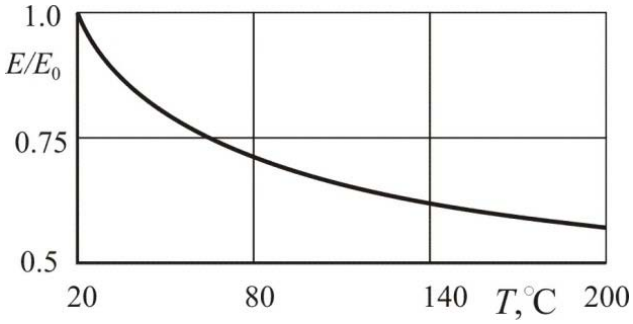


Рисунок 3. Изменение модуля упругости бетона.

3. КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА

Коэффициент поперечных деформаций бетона практически не зависит от температуры и заметно снижается только при температурах, близких к 200°С (рис. 4). Эту зависимость можно описать формулой:

$$\nu(T) = \nu_0 - 2,6 \cdot 10^{-4} \cdot \left(T_0 / T\right)^{-2,5}, \qquad (10)$$

где $\nu_0 = 0,24$ - коэффициент Пуассона при нормальной температуре $T_0 = 20°C$.

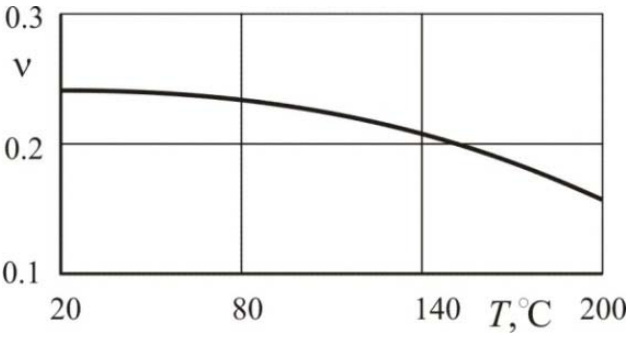


Рисунок 4. Коэффициент поперечных деформаций.

4. ДИАГРАММА ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА

Прочность тяжелого бетона на осевое сжатие при повышенных температурах зависит от температуры нагрева, длительности ее действия и режима испытания. Наибольшее снижение прочности отмечается при первом кратковременном нагреве. Длительное изотермическое действие повышенной температуры по сравнению с кратковременным нагревом приводит к росту прочности бетона. Остывание до нормальной температуры после кратковременного нагрева и длительной изотермической выдержки не вызывает дальнейшего изменения прочности бетона [4].

Для построения методики расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных сооружений с учетом температурных воздействий необходимо иметь аналитические зависимости, описывающие полную диаграмму деформирования бетона при повышенных температурах. Диаграмма напряжений $\sigma - \varepsilon$ определяется из опытов на одноосное сжатие, но в общем случае, для описания объемного напряженного состояния, используется диаграмма $\sigma_i - \varepsilon_i$, связывающая интенсивности напряжений и деформаций. Для преобразования опытных данных деформирования бетона при сжатии в условиях повышенных температур в режиме длительного нагрева, полученных в [1], использовались формулы:

$$\sigma_i = \sigma, \quad \varepsilon_i = \varepsilon - \frac{1-2\nu_0}{3E_0}\sigma, \qquad (11)$$

Для аппроксимации нелинейной диаграммы деформирования удобно использовать зависимость с тремя константами [5]:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i - A\varepsilon_i^{\alpha} \qquad (12)$$

где E - начальный модуль упругости, A - константа, имеющая размерность напряжений, α - показатель степени.

Данная зависимость позволяет достаточно точно аппроксимировать опытные данные и, кроме того, при $\varepsilon_i \to 0$ автоматически переходит в закон Гука для линейно-упругого материала.

Возникающая в результате воздействия повышенных температур неоднородность бетона учитывается заменой констант E, A, и α на функции $E(T)$, $A(T)$ и $\alpha(T)$. Полученные диаграммы деформирования хорошо аппроксимируются с помощью функций:

$$\begin{aligned} E(T) &= E_0 \left(T_0 / T\right)^{k_E} \\ A(T) &= A_0 \left(T_0 / T\right)^{k_A} \\ \alpha(T) &= \alpha_0 \left(T_0 / T\right)^{k_\alpha} \end{aligned} \qquad (13)$$

со следующими значениями коэффициентов:

E_0, МПа	k_E	A_0, МПа	k_A	α_0, МПа	k_α
1199	0,24	115000	1,028	1,821	0,062

На рисунке 5 представлены диаграммы деформирования обычного бетона при повы-

шенных температурах: 1 – кривая деформирования бетона при $T = T_0 = 20°C$, 2 – при $T = 60°C$, 3 – при $T = 120°C$, 4 – при $T = 200°C$.

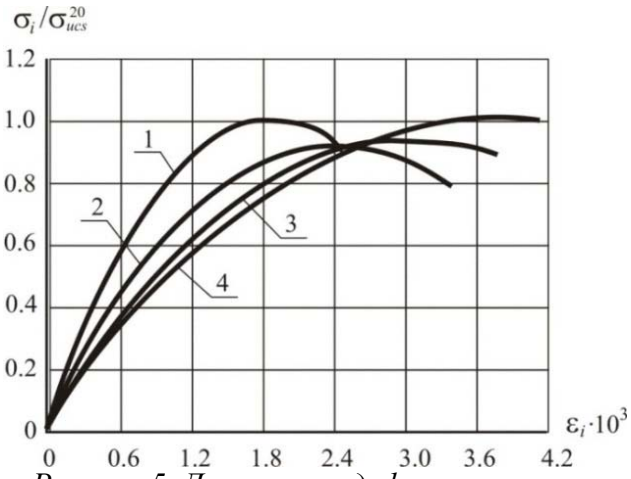


Рисунок 5. Диаграммы деформирования обычного бетона в условиях повышенных температур, σ_{ucs}^{20} - прочность бетона на сжатие при $T = 20°C$.

Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия температур свыше 200 °С, выполняются из жаростойкого бетона. В [6] приведены диаграммы деформирования жаростойких бетонов трех различных составов при температурах до 800 °С в режиме длительного нагрева. Для жаростойкого бетона на портландцементе были получены диаграммы $\sigma_i - \varepsilon_i$, которые аппроксимируются зависимостью (12) с заменой констант E, A, и α на функции:

$$E(T) = E_0 + k_{E1} \cdot \Delta T^{0,5} + k_{E2} \cdot \Delta T^{1,5},$$
$$A(T) = A_0 + k_{A1} \cdot \Delta T^{1,5} + k_{A2} \cdot \Delta T^{1,6} \qquad (14)$$
$$\alpha(T) = \alpha_0 + k_{\alpha 1} \Delta T^{1,2} + + k_{\alpha 2} \Delta T^{1,5}$$

со следующими значениями коэффициентов:

E_0, МПа	117100
k_{E1}	-5911,3
k_{E2}	4,8606
A_0, МПа	1826000
k_{A1}	121792
k_{A2}	-666,95
α_0	1,43
$k_{\alpha 1} \cdot 10^3$	1,395
$k_{\alpha 2} \cdot 10^3$	-2,063

На рисунке 6 представлены диаграммы деформирования жаростойкого бетона при повышенных температурах: 1 – кривая деформирования бетона при $T = T_0 = 20°C$, 2 – при $T = 300°C$, 3 – при $T = 800°C$.

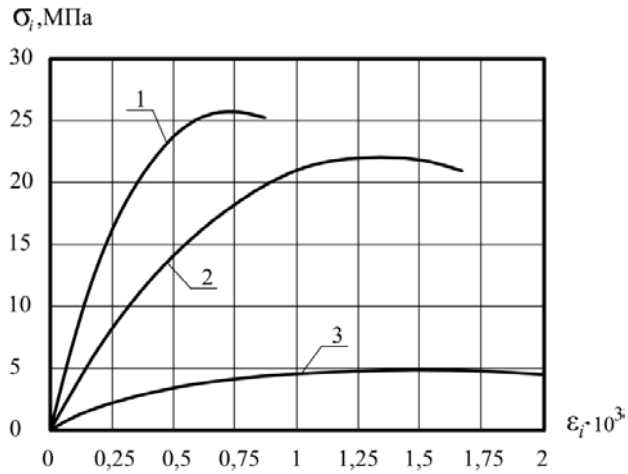


Рисунок 6. Диаграммы деформирования жаростойкого бетона на портландцементе в условиях повышенных температур.

На рисунке 7 представлены диаграммы деформирования обычного и жаростойкого бетонов на одном графике. Для сравнения приведены кривые деформирования бетонов одного класса по прочности на сжатие при температурах $T = 20°C$ и $T = 200°C$. На рисунке 7: 1 – кривая деформирования жаростойкого бетона при $T = T_0 = 20°C$, 2 – то же при $T = 200°C$, 3 – кривая деформирования обычного бетона при $T = T_0 = 20°C$, 4 – то же при $T = 200°C$.

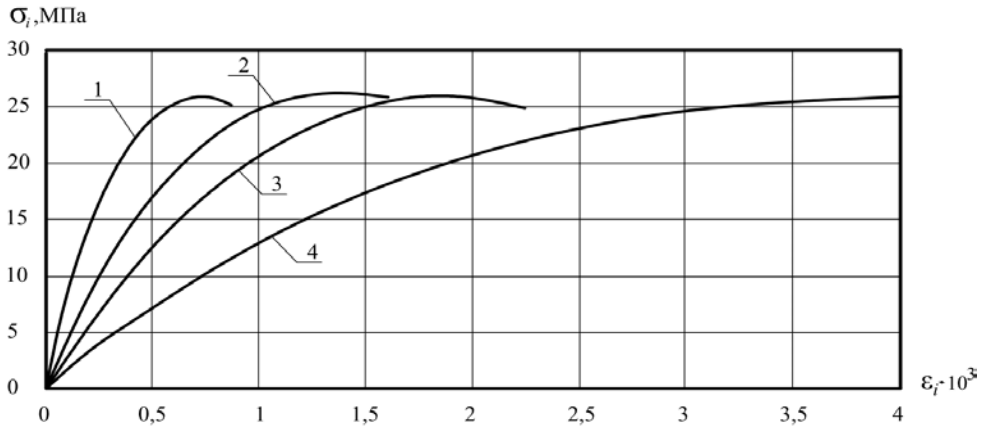


Рисунок 7. Диаграммы деформирования обычного и жаростойкого бетонов.

Из графика видно, что при температурах до 200°С прочность бетонов не снижается, но возрастают предельные деформации, при этом у обычного бетона значения предельных деформаций выше чем у жаростойкого.

При повышении температуры свыше 200°С обычный бетон уже при температуре около 400°С теряет основную часть своей прочности. При нагреве до 300°С несущая способность жаростойкого бетона снижается незначительно. Нагрев жаростойкого бетона в интервале 300-800°С приводит к постепенному снижению прочности и при $T = 800°C$ остается около 20% начальной прочности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные зависимости характеристик бетона от температуры можно использовать для расчета бетонных и железобетонных конструкций. Существует большая группа железобетонных инженерных сооружений, подвергающихся в процессе эксплуатации технологическому нагреву и действию наружных температур. К ним относятся дымовые трубы, силосы для хранения горячих продуктов, резервуары для нефти и нефтепродуктов, грануляционные башни и ряд других сооружений. Жаростойкие бетоны и конструкции из них применяются при строительстве туннельных печей и футеровке вагонеток на предприятиях строительных материалов, фундаментов под промышленные печи и дымовые трубы, боровов и дымовых труб, коксовых батарей, полов горячих цехов промышленных предприятий и т.п. Температурные воздействия для рассматриваемых групп инженерных сооружений часто являются осесимметричными. Постоянные и длительно действующие нагрузки также для многих сооружений носят осесимметричный характер. В [7] предложен численный метод решения осесимметричных задач с учетом физической нелинейности и неоднородности материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кричевский А.П.** Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия. – М.: Стройиздат, 1984. – 149 с.
2. **Карпенко Н.И., Ерышев В.А., Латышева Е.В., Бондаренко А.С.** Деформации железобетонного элемента с учетом усадочных деформаций // Вестник волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: строительство и архитектура, 2013, с. 344-357.
3. **Андреев В.И.** Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: Издательство АСВ. 2002. – 288 с.

4. **Карпенко Н.И.** Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
5. **Лукаш П.А.** Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
6. **Ушаков А.В.** Основные закономерности деформирования обычного и жаростойких бетонов при нагреве. Дисс. канд. технических наук. – Волгоград, 2006. – 212 с.
7. **Андреев В.И., Полякова Л.С.** Физически нелинейные задачи для неоднородных толстостенных оболочек // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 36-40.

REFERENCES

1. **Krichevsky A.P.** Raschet Zhelezobetonnykh Inzhenernykh Sooruzheniy na Temperaturnyye Vozdejstviya [Calculation of Reinforced Concrete Engineering Structures for Temperature Effects]. Moscow, Stroiizdat, 1984, 149 pages.
2. **Karpenko N.I., Eryshev V.A., Latysheva E.V., Bondarenko A.S.** Deformatsii Zhelezobetonnogo Elementa s Uchetom Usadochnykh Deformatsiy [Deformations of a Reinforced Concrete Element with Allowance for Shrinkage Deformations]. Bulletin of the Volgograd State Architectural and Construction University. Series: Construction and Architecture, 2013, pp. 344-357.
3. **Andreyev V.I.** Nekotoryye Zadachi i Metody Mekhaniki Neodnorodnykh Tel [Some Problems and Methods of Mechanics of Inhomogeneous Bodies]. Moscow, Publisher ASV, 2002, 288 pages.
4. **Karpenko N.I.** Obshchiye Modeli Mekhaniki Zhelezobetona [General Models of Mechanics of Reinforced Concrete]. Moscow, Stroyizdat, 1996, 416 pages.
5. **Lukash P.A.** Osnovy Nelineynoy Stroitel'noy Mekhaniki [Fundamentals of Nonlinear Construction Mechanics]. Moscow, Stroiizdat, 1978, 208 pages.
6. **Ushakov A.V.** Osnovnyye Zakonomernosti Deformirivaniya Obychnykh i Zharostoykikh Betonov pri Nagreve [Basic Regularities of Deformation of Ordinary and Heat-resistant Concrete During Heating]. Diss. Cand. Technical Sciences, Volgograd, 2006, 212 pages.
7. **Andreev V.I., Polyakova L.S.** Fizicheski Nelineynyje Zadachi dlya Neodnorodnych Obolochek [Physically Nonlinear Problems for Inhomogeneous Thick-Walled Shells]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 36-40.

Андреев Владимир Игоревич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов, НИУ МГСУ, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26; e-mail: asv@mgsu.ru.

Полякова Людмила Сергеевна, магистр кафедры сопротивление материалов, НИУ МГСУ, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26;
e-mail: l.poliakova@inbox.ru

Vladimir I. Andreev, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr.Sc., Professor, Head of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; e-mail: asv@mgsu.ru.

Lyudmila S. Polyakova, MA student the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; e-mail: l.poliakova@inbox.ru.



УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ ВИТАЛИЙ МИХАЙЛОВИЧ БОНДАРЕНКО

22 февраля 2018 года на 93-м году ушел из жизни крупнейший ученый в области строительных конструкций, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Заслуженный деятель науки и техники РФ, Лауреат премии РФ в области науки и техники, Заслуженный инженер России, Почетный строитель России, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный доктор и профессор ряда высших учебных заведений РФ, действительный член РИА, иностранный член Академии строительства Украины и Британского института гражданских инженеров, член международной ассоциации писателей и публицистов, доктор технических наук, профессор Виталий Михайлович Бондаренко.

Виталий Михайлович – ветеран Великой Отечественной войны. Участвовал в Воронежском прорыве, битве на Курской дуге, в боях за освобождение Украины, Польши, Чехословакии, Германии. Награжден многочисленными орденами и медалями, в том числе орденом Отечественной войны I степени, двумя медалями «За отвагу».

Виталий Михайлович прошел славный жизненный путь: фронтовик – рабочий – инженер – руководитель строительных организаций – ученый – руководитель вуза и научно-проектного института – заведующий кафедрой, академик-секретарь Отделения строительных наук и вице-президент РААСН. Но самое главное в его многогранной жизни и деятельности – это наука. Им были разработаны: прикладная теория режимного и наследственного силового сопротивления строительных конструкций, диссипативная теория силового сопротивления железобетонных конструкций и конструктивной безопасности сооружений.

В.М. Бондаренко – автор более 400 научных трудов, в том числе учебников и учебных пособий для вузов, монографий и книг исторического содержания.

Родина высоко оценила заслуги Виталия Михайловича и в мирное время, отметив его деятельность различными государственными наградами: орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени, персональной благодарностью Президента Российской Федерации «За

большой вклад в развитие отечественной фундаментальной строительной науки», Большой медалью РААСН.

Светлая память о Виталии Михайловиче навсегда сохранится в наших сердцах.

Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”



УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ШАПОШНИКОВ

26 февраля 2018 года ушел из жизни член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, лауреат премии им. Б.Г. Галеркина, Почетный строитель Москвы, Почетный железнодорожник РФ Николай Николаевич ШАПОШНИКОВ.

Николай Николаевич создал школу по применению ЭВМ в строительной механике. Являлся автором первой в СССР публикации по реализации на ЭВМ метода конечных элементов (МКЭ).

Н.Н. Шапошников на кафедре «Строительная механика» МИИТ организовал научную лабораторию, где был разработан ряд программных комплексов (СПРИНТ, СУПЕР и др.), нашедших широкое применение при расчете строительных и машиностроительных конструкций.

Николай Николаевич являлся автором более 100 печатных трудов, 8 книг, подготовил более 40 кандидатов и двух докторов наук.

Н.Н. Шапошников был награжден медалью РААСН, медалями и дипломами ВДНХ.

Светлая память о Николае Николаевиче навсегда сохранится в наших сердцах.

Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”



К ЮБИЛЕЮ ВИТАЛИЯ ИВАНОВИЧА КОЛЧУНОВА

1 января 2018 года исполнилось 70 лет члену редакционного совета Международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”, академику РААСН, доктору технических наук, профессору, Заслуженному деятелю науки РФ, Почетному строителю России, Почетному работнику высшего профессионального образования РФ, заведующему кафедрой уникальных зданий и сооружений Юго-Западного государственного университета Виталию Ивановичу Колчунову.

Виталий Иванович известный ученый в области теории и проектирования строительных конструкций. Его научная деятельность связана с исследованиями и созданием новых энерго – и ресурсосберегающих эффективных пространственных конструкций сплошного и составного сечения из нелинейно – деформируемых анизотропных материалов (типа железобетон), развитием теории, методов их расчета и рационального проектирования, а также исследованиями конструкционной безопасности и живучести строительных систем при проектных и запроектных воздействиях. Результаты его исследований включены в нормативно – инструктивные документы и нашли отражение более чем в 300 научных работах, в том числе 12 книгах. Он автор ряда новых эффективных конструкций, с применением которых построены здания с общей площадью более 300 тыс. кв.м. Работа профессора В.И. Колчунова в строительной науке и подготовке высококвалифицированных специалистов отмечена медалью и дипломом РААСН, медалями ВДНХ СССР и ВВЦ России, благодарностью руководителя Федерального агентства РФ по образованию, Почетными грамотами Губернатора Орловской области, дипломами «Лучший изобретатель Орловской области». Виталий Иванович является экспертом ВАК России, экспертом ГУ РИНКЦ, главным редактором серии «Строительство. Реконструкция», членом многих редколлегий центральных и вузовских научно-технических журналов и сборников, входит в состав нескольких научно технических советов.

Желаем Вам, Виталий Иванович, крепкого здоровья, благополучия, большого счастья и дальнейших творческих успехов!

Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”



К ЮБИЛЕЮ СЕРГЕЯ ВИКТОРОВИЧА ФЕДОСОВА

03 марта 2018 года исполнилось 65 лет члену редакционного совета Международного научного журнала “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”, академику РААСН, доктору технических наук, профессору, заслуженному деятелю науки РФ, почетному работнику высшего профессионального образования РФ, почетному строителю России, лауреату премии Правительства РФ в области науки и техники, лауреату Государственной премии Республики Марий Эл в области архитектуры и строительства, заведующему кафедрой, президенту Ивановского государственного политехнического университета Сергею Викторовичу Федосову.

С.В. Федосов широко известен как ученый, педагог, организатор и общественный деятель. Основные направления научной деятельности Сергея Викторовича – тепломассообменные процессы в технологиях производства строительных материалов и изделий, нанотехнологии в структурообразовании композит-бетонов с использованием импульсных, механических и механохимических методов активации. Результаты его исследований отражены в более 530 опубликованных научных трудов, включая 17 монографий, 21 авторское свидетельство, 13 учебных пособий, 17 патентов на изобретения. Подготовил 22 доктора наук и 67 кандидатов наук.

С 1996–2012 годы С.В. Федосов занимал пост ректора Ивановского государственного архитектурно-строительного университета (ИГАСУ). Он – основатель научных школ Ивановского государственного политехнического университета (ИВГПУ) «Физико-химические и математические аспекты строительного материаловедения и технологий»; «Разработка новых строительных материалов на базе прогрессивных энерго- и ресурсосберегающих технологий с использованием техногенных отходов», «Термическая обработка материалов в технологических процессах», «Процессы коррозионной деструкции строительных материалов и борьба с ними».

С.В. Федосов также является членом президиума комитета Российского Союза НИО по проблемам сушки и термовлажностной обработки материалов, первым заместителем главного

редактора журнала «Известия вузов. Технология текстильной промышленности»; главным редактором журнала «Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии»; членом редакционной коллегии журнала «Вестник гражданских инженеров», членом оргкомитетов: Международной научно-технической конференции, посвященной 105-летию со дня рождения профессора А.Н. Плановского; I Международного конгресса «Косыгинские чтения» и программного комитета Международного научно-практического Форума «Физика волокнистых материалов: структура, свойства, наукоемкие технологии и материалы. SMARTEX».

Желаем Вам, Сергей Викторович, крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов!

Редакционный Совет международного научного журнала
"International Journal for Computational Civil and Structural Engineering"