

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering
Volume 9, Issue 4 **2013**

EXECUTIVE EDITOR

Valery I. Telichenko, Professor, Rector
Moscow State University of Civil Engineering
Moscow, Russia
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor, Vice-Rector
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Research Center STADYO
apt. 412, 34, Ul. Verkhnyaya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Mikhail Belyi, Professor
Abaqus Inc.,
Pawtucket, RI 02860,
1080 Main Street, USA

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.,
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Gregory P. Panasenko, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Boris E. Pobedria, Professor
Department of Mechanics and Mathematics
Moscow State University
MGU. Mech-Math. Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

PUBLICATION COUNCIL

William Begell, President
Begell Publishing House
USA

Nadezhda S. Nikitina, Director
ASV Publishing House
Moscow, Russia

Valery I. Telichenko, Rector
Moscow State University
of Civil Engineering
Moscow, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Vladimir I. Andreev, Professor
Department of Strength of Materials,
Moscow State Univ. of Civil
Engineering, Yaroslavskoe shosse 26,
129337 Moscow, Russia

Nikolaj V. Banichuk, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo
117526, Russia

Klaus-Jürgen Bathe, Professor
Department of Mechanical
Engineering, Massachusetts Institute
of Technology
Cambridge, MA 02139, USA

Zdenek Bittnar, Professor
Department of Structural Mechanics
Czech Technical University
7, Thakurova, 16629 Prague 6
Czech Republic

Alexander S. Bratus, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Evgeny G. D'yakonov, Professor
Dept. of Comp. Math. and
Cybernetics; Moscow State University
MGU, VMK, Vorobjovy Gory
119899 Moscow, Russia

Alexander S. Gorodetsky
The Inst. For Aut. Syst. in Civil Eng.
2a, Ul. M. Krivonosy
252180 Kiev, Ukraine

Vladimir Karpov, Professor
St. Petersburg University
d.4, Ul. 2-Krasnoarmeiskaya,
St. Petersburg, 198005 Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Department of Structural Mechanics
and Computer Technology
Perm State Technical University
29, Komsomolsky Prospekt,
Perm, 614990, Russia

Hartmut Koppler, Professor
Bauhaus-Universität
31a, Windmühlen Str.
99425 Weimar, Germany

Andrey V. Korgin, Professor
Structure Testing Department
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vadim G. Korneev, Professor
Dept. of Math. and Mechanics
St. Petersburg State University
198904, St. Petersburg, Russia

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mech.
Russian Academy of Sciences
101, Prosp. Vernadskogo,
117526, Russia

Pierre Ladeveze, Professor
Lab. de Mécanique et Technologie
E.N.S. de Cachan /C.N.R.C./ Univ.
Paris VI, 61 Av. du Président Wilson
94235 Cachan Cedex, France

Ralf Lindberg, Professor
3, Korkeahoukuntatu,
33101, Tampere, Finland

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building
2, Solyanaya Pl.,
634003 Tomsk, Russia

Herbert Mang, Professor
Inst. für Haustatistik und
Festigkeitslehre
Technische Universität Wien
13, Karlsplatz,
A-1040 Wien, Austria

Vladimir L. Mondrus, Professor
Department of Structural Mechanics
Moscow State Univ. of Civil
Engineering
26, Yaroslavskoe Shosse,
129337 Moscow, Russia

Vladimir I. Myachenkov, Professor
Department of Strength of Materials
Moscow State Tech. Univ. "STANKIN"
3a, Vadkovsky Per.,
104472 Moscow, Russia

L'Eugenio Onate, Professor
E.T.S. Ing. Caminos
Jorge, Girano Salgado, 31-08034
Barcelona, Spain

Vladimir A. Palmov, Professor
Physical-Mechanical faculty
Technical University St. Petersburg
29, Ul. Polytechnicheskaya,
195251 St. Petersburg, Russia

Stan Pietruszczak, Professor
Department of Civil Engineering
McMaster University
Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture
No.1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing

Ekkerhard Ramm, Professor
University of Stuttgart
Institute for Baustatik
7, Pfaffenwaldring, Stuttgart,
Germany

E. Daya Reddy, Professor
University of Cape Town
Department of Applied Mathematics
7700 Rondebosch, South Africa

Sunil Saigal, Professor
National Science Foundation
4201 Wilson Blvd.,
Arlington, VA 22230, USA

Vadim N. Savostyanov, Professor,
Department of Applied Mechanics
and Mathematics, Moscow State
Univ. of Civil Engineering,
Yaroslavskoe shosse 26, 129337
Moscow, Russia

Bernhard A. Schrefler, Professor
Dipart. Di Costruzioni e Trasporti.
Via, Marzolo, 9-35131 Padova, Italy

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Department of Comp. Aided Design
Moscow State Univ. of Railways
MIIT, 15, Ul. Obratsova,
101475 Moscow, Russia

D.V. Singh, Professor
Vice chairman all India council for
Technical Education, New Delhi,
India

Wacław Szcześniak, Professor
15, Al. Armii Ludowej,
Politechnika Warszawska
Warsaw, Poland

Nils-Eric Wiberg, Professor
Department of Structural Mechanics
Chalmers University of Technology
S-41296 Göteborg, Sweden

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wrocław University of Technology
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wrocław, Poland

Peter Wriggers, Professor
Technical School of Department
1, Hochschulstrabe,
D-6100 Darmstadt, Germany

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Jan Buynak, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Sergiy Yu. Fialko, Professor, Dr.Sc.,
Cracow University of Technology
Warszawska 24 St., 31-155 Kraków, Poland

Marek Iwański, Professor, Dr. hab., Ing.,
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

Konstantin I. Khenokh, Ing.
General Dynamics C4 Systems,
8201 E. McDowell Rd. MD H2606, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Markus König, Professor, Dr.-Ing.,
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Amirlan A. Kusainov, Professor, Dr.Sc.,
Kazakh Leading Academy of Architecture and Civil Engineering
29, Toraigyrov str., Almaty, 050043 Almaty, Republic of Kazakhstan

Nikolai P. Osmolovskii, Professor, Dr. hab.
Kazimierz Pulaski University of Technology and Humanities in Radom
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Jerzy Zbigniew Piotrowski, Professor, Dr. hab., Ing.,
Kielce University of Technology,
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖУРНАЛЕ INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

Журнал *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* является международным периодическим изданием, учредителями и издателями которого выступают Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) /Россия, г. Москва/ и Издательство Begell House Inc. /США, г. Нью-Йорк/.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций.

Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles

1. PREPARATION OF MANUSCRIPTS

This document is typed by Microsoft Word 2003 and Times New Roman 12 point size type-face.

The material of the paper should be arranged as follows: Title (16 points), Author(s) (14 point), Affiliation(s), Abstract, key words, Introduction, Main body of paper, Acknowledgements (if any), References (if any, 10 points), Appendices (if any), full authors addresses as endnote (10 points, spacing within endnote=1, style for numbering=numbers, line separating text and endnotes=line – margin to margin in right column).

The title, author's name(s) and affiliation(s) should be given in a style similar to that shown above in this sample and centered. **The headings** should be bold and aligned to left. First-order headings and parts of the text should be separated by one free line from the text. Second-order headings should have capital first letters.

The both columns of each page, including closing page, should be of equal length. At the bottom of the last right column of last page is endnote with author's address(es).

The figures can be embedded in word processor or must be drawn in black ink. **Drawings** can be produced directly on manuscript sheet or may be produced on separate piece of white paper and then stuck at the appropriate position. **Photographs** must be glossy black and white prints and stuck at the appropriate position. This also applies to other items such as **tables**. The best – drawings, photographs and tables should be typed by word processor. **All symbols including equations should be typed.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

However, **sometimes embedding figure files in Microsoft Word is not acceptable for final output**, because of the loss of resolution. In this connection author may save in addition all or selected files with figures separately on diskette or CD. **Acceptable formats for figures** are JPEG, TIFF or EPS files saved from original application at 300-600 dpi.

The Figures, line drawings, photographs, tables may be positioned either within the one column, or large centered exactly across the full width of the page. The equations should be numbered at

the right side of the column. **The references** should be given at the end of the paper. The Figures, Tables and Equations should be separated from the text by minimum one single free line.

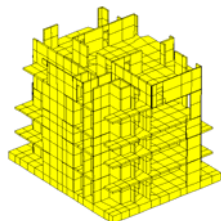


Figure 1

The manuscript is expected to be written in correct and easily readable English. An author who is not proficient in English is advised to take help of linguist before typing. It should be thoroughly checked for spelling mistakes.

2. SUBMISSION FOR PEER REVIEW

Authors in all countries, at their opinion, should send three (3) copies of their manuscript to Editors-in-Chief professor Vladimir N. Sidorov (see chapter 4 Correspondence) or Technical editor associate professor Taymuraz B. Kaytukov. **Electronic submissions are encouraged. Email a PDF or DOC (Microsoft Word) file with manuscript** to the Editor-in-Chief or technical editor. The Editor-in-Chief will seek reviews of the paper from experts and will assure rapid turnaround within six months of submission. **Each manuscript will receive at least 2 reviews. In deciding on acceptance of the paper, experts will examine** originality, quality of contents, neatness of presentation and readability of the submitted text. The Editor-in-Chief will correspond with the author in the light of these reviews. Submission implies that the author will be willing to make any necessary revisions. Retain all original figures until conclusion of the review process.

3. SUBMISSION OF ACCEPTED ARTICLE

After manuscript has been accepted and all required revisions have been incorporated, **mail manuscripts (black & white) and two copies**

to Editor-in-Chief by traditional post. The envelope for A4 sheets with stiffener may be used. **The electronic version of the manuscript on diskette or CD must be mailed to Editor-in-Chief** as well. **Label CD or diskette** with author's last name(s), title of the article, abbreviated journal name and date. Please provide a list of the software programs used for the art and text and the file names on the disk.

4. CORRESPONDENCE

Enquires regarding International Journal for Computational Civil and Structural Engineering and manuscripts should be addressed to the

➤ Editor-in-Chief

Professor Vladimir N. Sidorov
Department of Applied Mathematics
and Computer Science
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Technical Editor

Associate Professor Taymuraz B. Kaytukov
Research & Educational Center
of Computational Simulation
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia
e-mail: niccm@mgsu.ru

REFERENCES

1. Fish J. and Belsky V. Multigrid method for a periodic heterogeneous medium. Part 1: Convergence studies in 1-D case. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 126, 1995, pp. 1-16.
- ¹⁾ Vladimir N. Sidorov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- ²⁾ Pavel A. Akimov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com.
- ³⁾ Taymuraz B. Kaytukov, Research & Educational Center of Computational Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, E-mail: niccm@mgsu.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ ЖУРНАЛА INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATIONAL CIVIL AND STRUCTURAL ENGINEERING

В.Н. Сидоров¹, П.А. Акимов², Т.Б. Кайтуков³

¹Главный редактор журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Заместитель главного редактора журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Технический редактор журнала of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

АННОТАЦИЯ: Каждая статья представляется в электронном и печатном виде (бумага белая, размер А4 (210x297 мм), печать односторонняя – см. настоящий образец). Язык публикации статей – английский (предпочтительно) или русский, при этом в случае публикации статьи на русском языке аннотация статьи, ключевые слова, сведения об авторах и название статьи должны быть представлены авторами на английском языке. Текст должен быть подготовлен в программе Microsoft Word (формат файла – DOC), желательно также предоставление копии статьи в формате PDF. Аннотация печатается в поле шириной 16 см. Текст на первой странице статьи печатается в две колонки, шириной 8.25 см каждая. Поля: верхнее – 32 мм., нижнее – 32 мм., правое – 20 мм., левое – 20 мм. Основной шрифт для набора статьи – Times New Roman, 12 пт., межстрочный интервал – одинарный. Внешний вид статьи по форме оформления должен соответствовать настоящему образцу. Печатные экземпляры статьи (оригинал и две копии) и ее электронная форма (на дискете или компакт-диске) должны пересылаться по почте. Для пересылки электронной формы дополнительно необходимо использовать электронную почту.

Ключевые слова: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE, подготовка статьи, подготовка электронных версий, рецензирование

GUIDELINES FOR PREPARATION OF MANUSCRIPT AND RELATED INFORMATION

Vladimir N. Sidorov¹, Pavel A. Akimov², Taymuraz B. Kaytukov³

¹Editor-in-Chief of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

²Associate Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

³Technical Editor of International Journal for Computational Civil and Structural Engineering

ABSTRACT: Each paper must be typed on snow white paper sheets of A4 (210x297mm) size only on one side in boxes as shown on this sample. The abstract must be typed in 16 cm width box. The text of paper in the first page must be written in two columns 8.25 cm in width. All next pages must also have two columns 8.25 cm in width. Each page should have margins: 32 mm top, 32 mm bottom and 20 mm right and left. The paper should be typed using 12 point size Times New Roman type-face, or very similar, using single spacing between text lines applying word processor and printed on laser printer. It can be here pointed such editors as Word for Windows (preferable), Word Perfect, Tex or LaTeX. The appearance of manuscript of paper should be similar as far as possible to this sample. The paper should be submitted by traditional post: the original with 2 copies for review and the electronic version on diskette or on CD.

Key words: International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, IJCCSE preparation of manuscripts, electronic image preparation, submission of peer reviews and accepted articles.

1. ПОДГОТОВКА СТАТЕЙ

Настоящий образец подготовлен в текстовом процессоре Microsoft Word 2003, используется шрифт Times New Roman, 12 пт.

Материал статьи должен располагаться следующим образом: Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.).

При публикации статьи на русском языке далее располагаются Заголовок (Times New Roman, 16 пт.), авторы (Times New Roman, 14 пт.), сведения об авторах, аннотация, ключевые слова (Times New Roman, 10 пт.) на английском языке). Введение, основной текст статьи, приложения и замечания печатаются с использованием шрифта Times New Roman, 12 пт.; список литературы, развернутые сведения об авторах – Times New Roman, 10 пт. Межстрочный интервал – одинарный. Выравнивание в тексте – по ширине, выравнивание формул – по правому краю, формулы желательно нумеровать.

Заголовок статьи, сведения об авторах представляются в форме, приведенной в настоящем образце, выравнивание по центру. **Подзаголовки в статье** выделяются полужирным шрифтом с выравниванием по левому краю. Подзаголовки первого уровня должны быть отделены от основного текста одной пустой строкой, подзаголовки второго уровня выделяются курсивом.

Обе колонки на каждой странице, включая последнюю, должны иметь одинаковую длину. В конце статьи должны быть приведены развернутые сведения об авторах, содержащие в том числе их контактные данные (на двух языках при публикации статьи на русском языке).

Рисунки (черно-белые) должны быть вставлены в текст статьи или приложены в бумажном виде на отдельных листах, с указанием в каких местах статьи их следует расположить. То же касается и **фотографий**, формат фотографий – черно-белый. Желательно прилагать электронные версии рисунков и фотографий! Аналогичные требования касаются **таблиц**. Наилучший вариант такой, когда рисунки, фотографии и таблицы вставлены в файл, подготовленный в Microsoft Word. **Все символы, в том числе используемые в уравнениях, должны быть печатными.**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Однако, **рисунки и фотографии, вставленные в файл текстового процессора Microsoft Word не всегда имеют приемлемое для печати качество** из-за их низкого разрешения. В этой связи автору настоятельно рекомендуется дополнительно приложить (на дискете или компакт-диске) к статье файлы, содержащие рисунки. **Допустимые форматы для рисунков** – JPEG, TIFF или EPS, разрешение – 300-600 dpi.

Рисунки, фотографии и таблицы, в случае их больших размеров, также могут располагаться в одну колонку с выравниванием по ширине. Формулы в статье нумеруются с выравниванием по правому краю. **Список литературы** должен быть приведен в конце статьи. Рисунки, фотографии и таблицы должны быть отделены от основного текста как минимум одной пустой строкой.

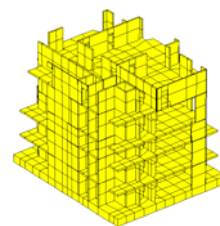


Рисунок 1

Предполагается, что статья написана на грамотном и хорошо читаемом английском или русском языке. При необходимости, перед отправкой статьи авторам следует проконсультироваться у переводчиков. Статья не будет подробно проверяться редакцией на предмет наличия лингвистических ошибок. В тоже время редакция оставляет за собой право отклонить статью, при наличии в последней большого количества ошибок лингвистического характера.

2. ОТПРАВКА СТАТЬИ НА РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Авторы (из России и других стран) должны выслать в адрес редакции три печатных экземпляра статьи на имя главного редактора журнала, профессора Сидорова Вла-

димира Николаевича (контактная информация приведена в разделе «Контактные данные») или техническому редактору журнала, доценту Кайтукову Таймуразу Батразовичу. Электронные версии статей необходимо выслать также по электронной почте главному редактору журнала. Электронные и печатные формы не возвращаются. Каждая приходящая в редакцию журнала статья направляется для рассмотрения экспертам соответствующего профиля. **Как правило, по каждой статье назначаются два эксперта.** Время проведения экспертизы статьи не может превышать 6 месяцев. Свои заключения и оценки по статье эксперты сообщают главному редактору журнала, при этом на каждую статью должно прийти не менее двух заключений. Замечания и предложения экспертов доводятся до сведения автора статьи, после чего он вносит все необходимые изменения.

3. ОТПРАВКА СКОРРЕКТИРОВАННОЙ СТАТЬИ

После одобрения экспертами статьи и внесения авторами всех необходимых изменений, окончательный вариант статьи (бумажный в трех экземплярах и электронной на дискете или компакт-диске) высылается в адрес редакции, например в жестком конверте формата А4 по почте. **Также необходимо послать электронную версию статьи по электронной почте главному редактору.** На дискете или компакт-диске необходимо написать имена авторов, название статьи, название журнала и дату. Также желательно указать список программ, которые использовались при подготовке статьи и список файлов, находящихся на дискете или компакт-диске. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

4. КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

По всем вопросам, касающимся журнала International Journal for Computational Civil and Structural Engineering и подготовке статей необходимо обращаться к следующим лицам:

➤ Главный редактор

профессор, доктор технических наук
Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
кафедра информатики
и прикладной математики,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

➤ Технический редактор

доцент, кандидат технических наук
Кайтуков Таймураз Батразович
ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»,
Научно-образовательный центр
компьютерного моделирования
уникальных зданий, сооружений
и комплексов,
129337, Россия, г. Москва,
Ярославское шоссе, дом 26.
e-mail: niccm@mgsu.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 541 с.

¹⁾ Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* sidorov.vladimir@gmail.com.

²⁾ Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* pavel.akimov2@gmail.com.

³⁾ Кайтуков Таймураз Батразович, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, *e-mail:* niccm@mgsu.ru.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 9, Issue 4

2013

TABLE OF CONTENTS

Dynamic Substructures Synthesis Methods for NPP Systems “Foundation – Structure – Equipment – Pipelines” Analysis <i>Alexander M. Belostotsky, Pavel .A. Akimov, Alexey L. Potapenko, Vladislav V. Vershinin, Sergey V. Scherbina</i>	<u>15</u>
Computational Simulation of External Extreme Impacts on NPP Constructions. Development and Investigations <i>Alexander M. Belostotsky, Sergey I. Dubinsky, Irina N. Afanasyeva, Fedor M. Kotov, Vladislav V. Vershinin, Sergey V. Scherbina, Sergey O. Petryashev, Nicolay O. Petryashev</i>	<u>23</u>
Numerical Analysis of Wind Loadings, Stress – Strain State, Strength and Stability of Concrete Structures of NPP Evaporative Cooling Towers <i>Alexander M. Belostotsky, Sergey I. Dubinsky, Sergey O. Petryashev, Nicolay O. Petryashev, Irina N. Afanasyeva, Fedor M. Kotov</i>	<u>34</u>
Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>44</u>
Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>64</u>
Двухэтапный синтез структурных конструкций с использованием генетического алгоритма и тетраэдризации Делоне <i>А.В. Алексейцев</i>	<u>83</u>
Методы моделирования изменения напряженно-деформированного состояния конструкций во времени <i>М.С. Барабаш</i>	<u>92</u>

Моделирование жизненного цикла конструкций высотных зданий с учетом сопротивляемости прогрессирующему разрушению <i>М.С. Барабаш</i>	<u>101</u>
Идентификация действительных инерционно-жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Состояние проблемы и пути решения. <i>А.М. Белостоцкий, П.И. Новиков</i>	<u>107</u>
Краткосрочный прогноз деформаций земной поверхности и напряженно-деформированное состояние здание в мульде сдвижения <i>А.В. Воробьев, Г.Г. Кашеварова</i>	<u>119</u>
Оптимальное проектирование ферм сложной конфигурации <i>Т.Л. Дмитриева</i>	<u>128</u>
Методика оценки аэродинамической комфортности пешеходных маршрутов в городе Москва с использованием численного моделирования <i>С.И. Дубинский, А.В. Дорошенко</i>	<u>137</u>
Численное моделирование поля скоростей ветра как класса случайных процессов <i>С.И. Дубинский, А.Р. Усманов, И.Н. Афанасьева</i>	<u>143</u>
К оценке эффективности динамического и ударного гасителей колебаний пассивного типа при действии периодических импульсов короткой продолжительности <i>А.В. Дукарт</i>	<u>149</u>
Исследование динамического поведения вантовых конструкций при воздействии торнадо по модели Y.K. Wen <i>В.Б. Зылев, Н.А. Григорьев</i>	<u>158</u>
Общая устойчивость высотного объекта на напряженно-деформируемом основании <i>В.К. Иноземцев</i>	<u>165</u>
Развитие решение Конуэя на задачи изгиба круглых анизотропных пластин переменной толщины на упругом основании <i>Е.Б. Коренева</i>	<u>173</u>
Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб <i>В.В. Лалин, Д.А. Кушова</i>	<u>178</u>
Методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления <i>Р.Л. Лейбов</i>	<u>186</u>

Статический анализ эволюции температурных нагрузок на здания и геоэкологические системы в г. Москве <i>В.И. Прокопьев, М.С. Хлыстунов, Ж.Г. Могилюк</i>	<u>199</u>
Вычислительная программа по расчету напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин: опыт создания, методики и алгоритмы <i>М.П. Саинов</i>	<u>208</u>
Расчет надежности фундаментов машин по критериям прочности грунта основания и амплитудам колебаний при ограниченной статистической информации <i>В.С. Уткин</i>	<u>226</u>
Параметры поглощения энергии бетонов, изготовленных способом нагнетания раствора при циклических нагружениях <i>С.Г. Есаян, В.В. Погосян, Д.Г. Клекчян</i>	<u>238</u>
Рецензия на серию книг А.Б. Золотова, П.А. Акимова, В.Н. Сидорова, М.Л. Мозгалевой, А.Р. Туснина <i>В.В. Петров</i>	<u>243</u>

DYNAMIC SUBSTRUCTURES SYNTHESIS METHODS FOR NPP SYSTEMS "FOUNDATION – STRUCTURE – EQUIPMENT – PIPELINES" ANALYSIS

*Alexander M. Belostotsky¹, Pavel .A. Akimov¹, Alexey L. Potapenko²,
Vladislav V. Vershinin¹, Sergey V. Scherbina¹*

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Research Center StaDyO, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to research and development of methods of advanced static and dynamic analysis of NPP structures, based on application of flexible hierarchical substructure models “foundation – structure – equipment – pipelines”, implemented in certified software application packages, convenient for practical industrial use. Contemporary finite element software application packages (universal – ANSYS, ABAQUS – and self-engineered – STADYO, ASTRA-NOVA products) are used for justification of nuclear power facilities.

Key words: Numerical simulation, dynamic substructures synthesis methods, nuclear power plants (NPP), ANSYS Mechanical, ABAQUS Standard\Explicit, STADYO, ASTRA-NOVA

МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПОДКОНСТРУКЦИЙ. РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ – ОБОРУДОВАНИЕ – ТРУБОПРОВОДЫ» АЭС

*А.М. Белостоцкий¹, П.А. Акимов¹, А.Л. Потапенко²,
В.В. Вершинин¹, С.В. Щербина¹*

¹ Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО НИЦ СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Работа посвящена разработке и исследованию методов статического и динамического расчета сооружений АЭС, основанных на применении гибких иерархических моделей подконструкций "основание – строительные конструкции – оборудование – трубопроводы", реализованных в развитых программных комплексах, удобных для промышленного применения. Для проведения расчетных исследований с целью обоснования надежности конструкций АЭС применялись программные комплексы: универсальные – ANSYS, ABAQUS; исследовательские и объектно-ориентированные – STADYO и ASTRA-NOVA.

Ключевые слова: Численное моделирование, методы динамического синтеза подконструкций, атомные электростанции (АЭС), ANSYS Mechanical, ABAQUS Standard\Explicit, STADYO, ASTRA-NOVA

1. INTRODUCTION

Complexity of designed finite element models of NPP systems has significantly increased. It has become common, when several firms and/or teams, using diverse software, participate in design and numerical investigations of subsystems

of multiple-unit systems (“foundation – structure – equipment – pipelines”, in particular). Dynamic substructure synthesis methods enunciated in the present article and implemented in certain software allow one to correctly solve problems, arising during intuitively engineering coupling of the subsystems models.

2. DYNAMIC SUBSTRUCTURES SYNTHESIS METHODS

In dynamic substructure synthesis methods computational domain is partitioned into “substructures”. For each substructure, uniquely defined by displacement $\{u\}$, stiffness matrix $[K]$, mass matrix $[M]$ and forces $\{f\}$, the system of equations of motion is written as [5, 6, 7]

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

We divide these equations in accordance with coupling (boundary) $\{u_b\}$ and internal $\{u_i\}$ degrees of freedom:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

The basic idea of dynamic substructure synthesis methods is to change from full set of degrees of freedom to reduced set of generalized coordinates, i.e. for substructure displacement presentation Rayleigh-Ritz procedure, in which displacement is represented as superposition of basic vectors (forms), is used:

$$\{u\} = [\Psi]\{q\} \quad (3)$$

where $[\Psi]$ – a set of basic vectors for substructure, and $\{q\}$ is corresponding generalized modal coordinates.

Therefore, equation (2) can be written as

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] \{\ddot{q}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{q\} = [\Psi]^T \{f\} \quad (4)$$

or

$$[\hat{M}]\{\ddot{q}\} + [\hat{K}]\{q\} = \{\hat{f}\} \quad (5)$$

where

$$[\hat{M}] = [\Psi]^T [M] [\Psi]$$

$$[\hat{K}] = [\Psi]^T [K] [\Psi]$$

$$\{\hat{f}\} = [\Psi]^T \{f\}$$

Eventually after coupling of substructures, defined by reduced stiffness and mass matrices, we receive the full model of significantly smaller dimensionality.

It should be stated, which way coupling degrees of freedom will be constrained during computation (or measurement) of substructure eigenmodes.

Three ways of coupling are possible:

- 1) all coupling degrees of freedom are constrained;
- 2) all coupling degrees of freedom are unconstrained;
- 3) some coupling degrees of freedom are unconstrained, while others are constrained.

Depending on coupling degrees of freedom constraining technique dynamic substructure synthesis methods can be divided into:

- 1) fixed boundary methods (Hurty/Craig-Bampton method);
- 2) free boundary methods (Rubin method, Hintz free-boundary method);
- 3) mixed-boundary method (residual flexibility mixed-boundary method, Hintz mixed-boundary method).

Degrees of freedom sets definition. Let us denote general set of physical degrees of freedom as $\bar{P}$. Set of internal degrees of freedom will be denoted as $\bar{I}$, full set of coupling coordinates – as $\bar{T}$. These coordinates sets include, respectively, p, i, and t degrees of freedom. For mixed-boundary use let the set $\bar{T}$ be composed as sum of sets $\bar{B}$ and $\bar{C}$. During eigenfrequencies and eigenmodes calculation degrees of freedom from the set $\bar{B}$ are fixed, and degrees of freedom from the set $\bar{C}$ are unconstrained.

Basic forms sets definition. Normal modes are eigenmodes corresponding to non-zero eigenfre-

quencies during partial eigenvalue problem solution $[K][\phi_k^N] = [\Omega^2][M][\phi_k^N]$. Reduced set of the normal modes is denoted as $[\phi_k^N]$ and include k normal modes.

Constraint modes are defined as displacements of substructure internal degrees of freedom due to unit displacements of each boundary degree of freedom from the set $\bar{B}$ when all other degrees of freedom from the set $\bar{B}$ are fixed. Constraint modes computation technique is equivalent to Guyan reduction (static condensation) for internal degrees of freedom:

$$[\psi_b^C] = \begin{bmatrix} I_{bb} \\ -K_{ii}^{-1}K_{ib} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Constraint modes set is denoted as $[\psi_b^C]$ and include b vectors; C index means constraint modes.

Rigid body modes. If substructure is not sufficiently constrained, rigid body modes, when the substructure moves as rigid body, exist:

$$[K]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (7)$$

Rigid body modes can be defined in different ways:

1) geometrically as set of linearly independent displacements of the form $\{r\} = \{d\} + [R]\{r_0\}$, where $\{r\}$ – new position of the substructure; $\{d\}$ – general linear displacement; $[R]$ – rotation matrix; $\{r_0\}$ – initial coordinates of the substructure.

2) as eigenmodes corresponding to zero eigen frequencies during partial eigenvalue problem solution:

$$[K][\Psi] = [\Omega^2][M][\Psi] \quad (8)$$

3) through Guyan static condensation.

3. DYNAMIC SUBSTRUCTURES SYNTHESIS METHODS IMPLEMENTATION

Residual flexibility mixed-boundary (RFMB) method. RFMB method uses three sets of eigenmodes:

- 1) constraint modes $[\Psi_b^C]$, defined in the set $\bar{B}$;
- 2) residual flexibility modes $[g_c^R]$, defined in the set $\bar{C}$;
- 3) reduced set of normal modes $[\phi_k^N]$.

As in Hurty/Craig-Bampton method the set $\bar{B}$ is at least sufficient to eliminate rigid body displacement components. For free boundary case, i.e. when all boundary coordinates are contained in the $\bar{C}$, calculation of residual flexibility requires inertial compensation procedure as in Rubin method [3], [1] and [4].

Coordinates conversion derivation. When Rayleigh-Ritz approximation is used physical coordinates components $\{x\}$ can be written as linear superposition of components of the three mode sets as

$$\{x\} = [\psi_b^C]\{q^C\} + [g_c^R]\{q^R\} + [\phi_k^N]\{q^N\} \quad (9)$$

where generalized coordinates, coupled with each mode set, are denoted as $\{q\}$. Equation (9) can be divided into three equations the following way:

$$\begin{aligned} \{x_b\} &= \{q^C\} \\ \{x_c\} &= [\psi_{cb}^C]\{q^C\} + [g_{cc}^R]\{q^R\} + [\phi_{ck}^N]\{q^N\} \\ \{x_c\} &= [\psi_{ib}^C]\{q^C\} + [g_{ic}^R]\{q^R\} + [\phi_{ik}^N]\{q^N\} \end{aligned} \quad (10)$$

or in more compact form

$$\{x\} = [T_1]\{q_1\} \quad (11)$$

where $\{q_1\} = \{x_b \quad q^R \quad q^N\}^T$ is a vector in generalized coordinate space. It is evident from the first equation (10), that boundary modes provide

physical coordinates for the set $\bar{B}$; however, the second and the third equations (10) do not provide physical coordinates for the set $\bar{C}$. This problem can be solved as $[g_{cc}^R]$ is not singular, that allows one to write other generalized coordinates in terms of the set $\bar{C}$, leading to

$$\begin{aligned} \{x_b\} &= \{x_b\} \\ \{q^R\} &= -[g_{cc}^R]^{-1} ([\psi_{cb}^C] \{x_b\} - \{x_c\} + [\varphi_{ck}^N] \{q^N\}) \\ \{q^N\} &= \{q^N\} \end{aligned} \quad (12)$$

or in more compact form

$$\{q_1\} = [T_2] \{q_2\} \quad (13)$$

where $\{q_2\} = \{x_b \ x_c \ q_k\}^T$ is representation of components in mixed-boundary space.

Hence, coordinates conversion of the presented method from physical to mixed-boundary can be written as

$$\{x\} = [T_1][T_2] \{q_2\} \quad (14)$$

or in expanded form

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 \\ 0 & I_c & 0 \\ \psi_{ib}^C - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \psi_{cb}^C & g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (15)$$

The sets $\bar{B}$ and $\bar{C}$ of degrees of freedom are statically complete in physical terms.

Fixed boundary: exact reduction to Hurty/Craig-Bampton method. For fixed boundary, i.e. when there are no degrees of freedom in the set $\bar{C}$, coordinates conversion in the RFMB method directly leads to Hurty/Craig-Bampton method:

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ \psi_{ib}^C & \varphi_{ik}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Free boundary: exact reduction to Rubin method. For free boundary, i.e. when there are no degrees of freedom in the set $\bar{B}$, coordinates conversion in the RFMB method directly leads to Rubin method:

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Hence, conversion (15) represents generalization of reliable and widely used Hurty/Craig-Bampton and Rubin methods.

Hintz mixed-boundary method [2]. Set of boundary modes of the HMB method includes rigid body modes, extra boundary constraint modes and inertia compensation modes. Then, this statically complete boundary modes set is added to normal modes with any boundary conditions. Although HMB method requires specific assembling procedure, this difficulty can be overcome through the same technique, as described in RFMB method. Combining rigid body modes with extra boundary constraint modes in a unique set of constraint modes, we can write HMB method coordinates conversion as

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_c & 0 & 0 \\ \psi_{ib}^C & \psi_{ic}^C & \psi_{ir}^I & \varphi_{ik}^N - \psi_{ic}^C \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ q_r \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (18)$$

where $[\psi_r^I]$ – set of inertia compensation modes, composed of r columns corresponding to number of rigid body modes.

4. DYNAMIC SUBSTRUCTURES SYNTHESIS METHODS VERIFICATION

Within set of test problems verification of dynamic substructures synthesis methods, presented above and implemented in certain software, was performed. Laws of definition and consideration of meaningful parameters of substructures were obtained numerically.

Thus, the neglect of a sufficient number of internal degrees of freedom of the subsystem leads to predictable errors in determining the dynamic characteristics of the system. These results again show the real cost of forced simplified approaches to the dynamic synthesis of sub-structures, which do not normally take full account of their dynamic performance. It is necessary to note that oscillations of the system is not sensitive to missing forms of partial subsystems, bearing distinct local character (it is physically tangible numerical result).

5. DYNAMIC SUBSTRUCTURES SYNTHESIS METHODS APPROBATION ON THE NPP SYSTEM "FOUNDATION - STRUCTURE - EQUIPMENT - PIPELINES".

Dynamic characteristics of the NPP system "foundation – structure – equipment – pipelines" were determined in ANSYS FEA software through two various techniques:

- 1) on joint FE-model of the system;
- 2) on the model of the system with substructures. Physical and mechanical properties of materials are presented in Table 1, and data about types of finite elements used – in Table 2.

For the model with substructures the following substructures were used: Sub 1 – pipelines, Sub 2 – reactor, Sub 3 – structure (confinement with auxiliary building), Sub 4 – foundation. Sub-structures characteristics are presented in Table 3. Comparison of joint FE-model eigenfrequency spectrum and corresponding spectrum of model with substructures is represented in Table 4. For meaningful part of the spectrum equality of eigenmodes and eigenfrequencies is obtained.

6. CONCLUSIONS

The distinctive paper is devoted to research and development of methods of advanced dynamic analysis of NPP structures, based on application of flexible hierarchical substructure models

"foundation – structure – equipment – pipelines", implemented in certified software application packages, convenient for practical industrial use.

Contemporary finite element software application packages are used for justification of nuclear power facilities. These software application packages contain the special options for imports and exports of the reduced influence matrices (stiffness matrix, mass matrix, damping matrix and load matrix) in text formats and in compact binary files as well in order to provide possibilities, in particular, for joint development and advanced analysis of complex multifactor dynamically loaded engineering structures and buildings.

Recommendations for the formation and application of the matrix substructure are based on the results of solutions of various verification samples and fits results of other authors, in particular, obtained with the use of popular software application packages.

Special pilot analysis of reactor building of a new generation of nuclear power plants will be done in order to demonstrate capabilities and features of the proposed method and corresponding technologies of substructure simulation of system "foundation – structure – equipment – pipelines".

Creation, research, development and application of substructures "database" (stiffness matrix, mass matrix, damping matrix and load matrix, "individual" loads of standard elements, details and assemblies) are rather effective for large-scale construction projects, objects of mechanical engineering and quiet natural in the spirit of integration with CAD.

REFERENCE

1. **Craig R.R. Jr., Bampton, M.C.** (1968). "Coupling of Structures for Dynamic Analyses". AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, pp. 1313-1319.

Table 1. Physical and mechanical material proerties.

Material	Young's modulus, MPa	Pois-son's ratio	Density, kg/m3
Concrete	31 000	0,2	2 500
Soil	30	0,3	0
Steel	210 000	0,3	7 850
Steel for upstanding tanks	210 000	0,3	1 950*

* conventionally taken for approbation

Table 2. Types of finite elements used.

Element type	Number of elements
Shell281	1 724
Pipe289	5 120
Pipe288	354
Solid185	165 304
Solid186	4 864

Table 3. Characteristics of the substructures.

	Number of FE	Num-ber of nodes	Number of DOFs	Number of cou-pling DOFs
Sub 1	5 000	9 948	59 688	768
Sub 2	1 724	5 110	30 660	720
Sub 3	88 374	135 232	407 838	14 832
Sub 4	82 268	92 595	258 504	13 440

Table 4. Comparison of eigen frequency spectrums (Hz).

No.	Joint FE-model	Model with substructures	Error, %
1	0.542331605	0.542358154	0.005
2	0.542546109	0.542567804	0.004
3	0.909263966	0.909529696	0.029
4	1.013468619	1.013581681	0.011
5	1.192671665	1.193069917	0.033
6	1.194033323	1.194412834	0.032
...	...	...	...
27	4.804192569	4.808042313	0.080
28	4.813404347	4.817033808	0.075
29	5.273983639	5.274055675	0.001
30	5.364038351	5.364760011	0.013

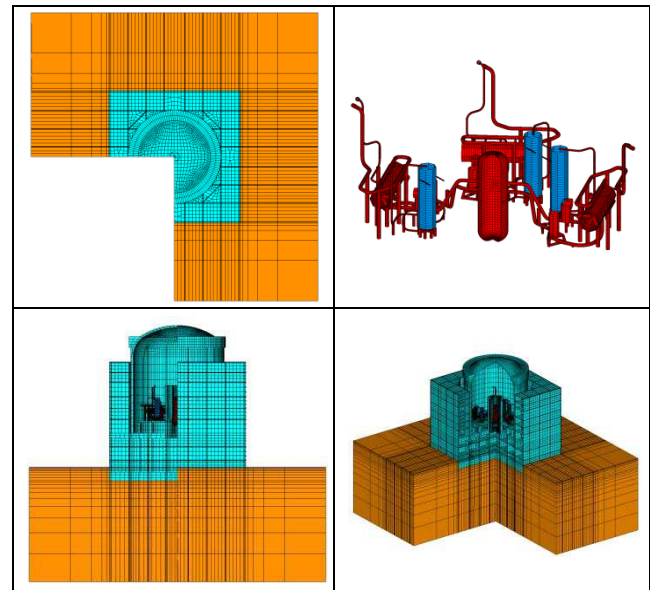


Figure 1. Joint FE-model of the system (quarter of the model is cut off for better visualization).

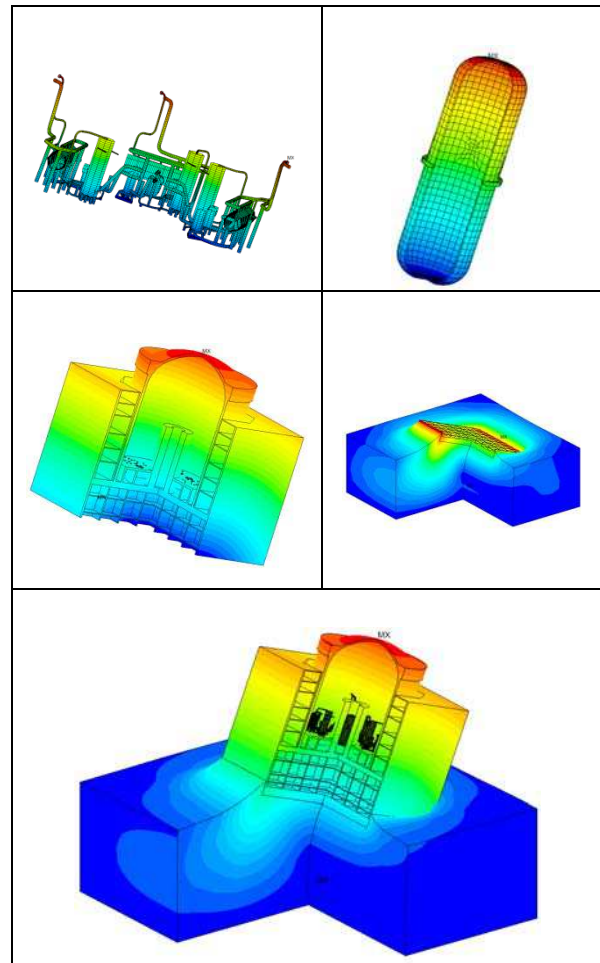


Figure 2. Model of the system with substructures. 1st eigenmodes. $f_1=0.5424$ Hz.

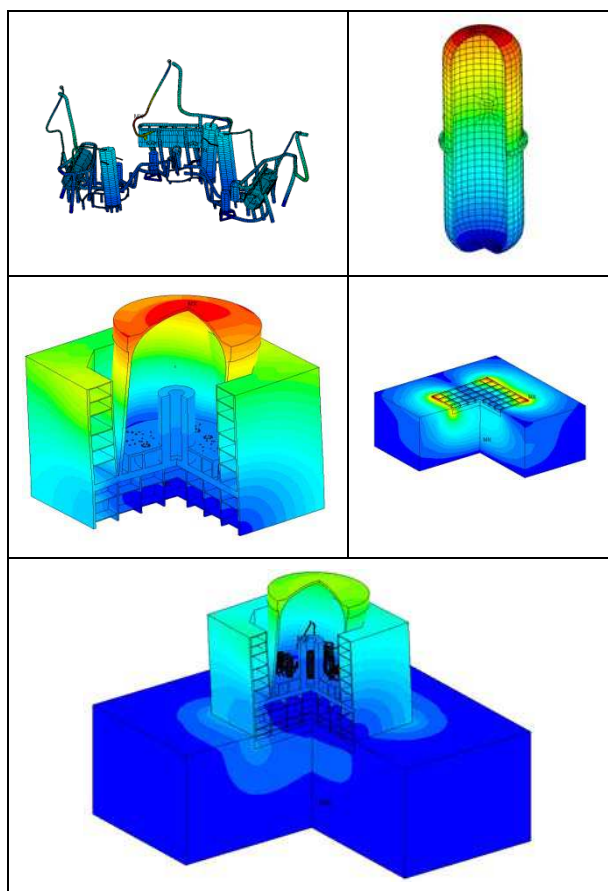


Figure 3. Model of the system with substructures. 27th eigenmodes. $f_{27}=4.808$ Hz.

2. **Hintz R.M.** (1975). "Analytical Methods in Component Modal Synthesis". AIAA Journal, Vol. 13, No. 8, pp. 1007-1016.
3. **Hurty W.C.** (1965). "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes". AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, pp. 678-685.
4. **Rubin S.** (1975). "An Improved Component-Mode Representation". AIAA Journal, Vol. 13, No. 8, pp. 995-1006.
5. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
6. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.

7. **Berkowski P., Dmochowski G., Grosel J., Schabowicz K., Wojcicki Z.** Analysis of Failure Conditions for a Dynamically Loaded Composite Floor System of an Industrial Building. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, Volume 19(4), pp. 529-541.

Белостоцкий Александр Михайлович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Потапенко Алексей Леонидович, ЗАО НИЦ СтаДиО, ведущий инженер-программист, 129337, Россия, г. Москва, ул. Верхняя, дом 34, офис 412, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Вершинин Владислав Владимирович, Московский государственный строительный университет, кафедра строительной механики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, Московский государственный строительный университет, кафедра механического оборудования, деталей машин и технологии металлов, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sci-

ence, Professor, Dr.Sc., 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Pavel A. Akimov, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Science, Professor, Dr.Sc., 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: pavel.akimov@gmail.com

Alexey L. Potapenko, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research Center StaDyO, ul. Verhnyaya, Lead Software Engineer, 34, office 412, Moscow, RUSSIA, e-mail: stadyo@stadyo.ru

Vladislav V. Vershinin, Department of Structural mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey V. Scherbina, Department of Mechanical equipment, machinery details and metals processing technologies, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

COMPUTATIONAL SIMULATION OF EXTERNAL EXTREME IMPACTS ON NPP CONSTRUCTIONS. DEVELOPMENTS AND INVESTIGATIONS

*Alexander M. Belostotsky, Sergey I. Dubinsky, Irina N. Afanasyeva,
Fedor M. Kotov, Vladislav V. Vershinin, Sergey V. Scherbina,
Sergey O. Petryashev, Nicolay O. Petryashev*
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: In accordance with results of analysis of state-of-the-art theoretical and experimental research works, analysis and synthesis of data on the impact of extreme impacts on structures of existing nuclear power plants (including NPP "Fukushima-1", Japan), and other unique objects, the existing regulations, corresponding design codes and procedures do not fully take into account the specific definition of extreme (special) external loads and impacts on the main building of NPP, and, therefore, require clarification and development. The distinctive paper is devoted to advanced methods of analysis, choice of appropriate and correct methods and software application packages for numerical simulation of external loads and impacts on the basic structures of nuclear power plants (wind hurricane, tornado, plane crash, the impact of the shock wave, seismic and tsunami effect). Results of development, adaptation and verification (with the use of universal software application packages) within representative number of sample problems, dealing with advanced methods of analysis, definition of loads and impacts on the basic structures of nuclear power plants are presented. The results of analysis showed correctness and effectiveness of the developed numerical methods of advanced analysis and definition of extreme external loads and impacts on NPP structures of a new generation.

Key words: Numerical simulation, external extreme loads and impacts, nuclear power plants (NPP), wind hurricane, tornado, plane crash, the impact of the shock wave, seismic loads, tsunami, ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, ANSYS AUTODYN, ABAQUS Standard/Explicit, LS-DYNA

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СООРУЖЕНИЯ АЭС РАЗРАБОТКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

*А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский, И.Н. Афанасьева, Ф.М. Котов,
В.В. Вершинин, С.В. Щербина, С.О. Петряшев, Н.О. Петряшев*
Московский государственный строительный университет, Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: По результатам анализа современных теоретических и экспериментальных исследований, данных по экстремальным нагрузкам и воздействиям на сооружения существующих АЭС (в том числе АЭС "Фукусима-1", Япония) сделан вывод о том, что существующие нормативные методики не в полной мере учитывают специфику определения внешних экстремальных (особых) нагрузок и воздействий на основные сооружения АЭС. Настоящая статья посвящена развитым методам численного моделирования экстремальных нагрузок и воздействий на основные сооружения АЭС (ураганный ветер, торнадо, крушение самолета, воздействие ударной волны, сейсмические воздействия и цунами) и выбору соответствующего программного обеспечения. Представлены разработанные методики, результаты их верификации на представительном количестве тестовых задач и апробации на объектах АЭС. Результаты анализа показали адекватность и эффективность разработанных методик численного моделирования внешних экстремальных нагрузок и воздействий на основные сооружения АЭС.

Ключевые слова: численное моделирование, внешние экстремальные нагрузки и воздействия, атомные электростанции (АЭС), ураган, торнадо, крушение самолета, воздействие взрывной волны, сейсмические нагрузки, цунами, ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, ANSYS AUTODYN, ABAQUS Standard/Explicit, LS-DYNA

1. INTRODUCTION

Significant numbers of actual theoretical and experimental research works and data devoted to the influence of extreme impacts on structures of existing nuclear power plants (including NPP "Fukushima-1", Japan) and other unique objects were studied. Analyze showed that the existing regulations, corresponding design codes and procedures require clarification and development, because they do not fully take into account the specific definition of extreme (special) external loads and impacts on the main building of NPP.

The present paper is devoted to advanced analysis methods, choice of appropriate and correct methods and software application packages for the numerical simulation of external loads and impacts (wind hurricane, snow loads, tornado, plane crash, the impact of the shock wave, seismic and tsunami effect) on the basic structures of nuclear power plants. The results of the development of appropriate methodic of definition of loads and impacts on the basic structures of nuclear power plants, its approbation and verification (with the use of universal software application packages) are presented below.

2. NUMERICAL METHODS

The implementation of the finite element method (FEM) in the form of displacements

For most structural dynamics problems of a mechanical system, the spatial discretization for the principle of virtual work using the finite element method gives the finite element semi-discrete equation of motion as follows [2]:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + ([K] + [K_G])\{u(t)\} = \{F(t)\} + \{R(u, \dot{u})\} \quad (1)$$

Linear structural static analysis

The overall equilibrium equations for linear structural static analysis are:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \text{ or } [K] \cdot \{u\} = \{F^a\} + \{F^r\} \quad (2)$$

where: $[K] = \sum_{m=1}^N [K_e]$ – total stiffness matrix; $[K_e]$ – element stiffness matrix; $\{F^r\}$ – reaction load vector; $\{F^a\} = \{F^{nd}\} + \{F^{ac}\} + \sum_{m=1}^N (\{F_e^{th}\} + \{F_e^{pr}\})$ – the total applied load vector; $\{F^{nd}\}$ – applied nodal load vector; $\{F^{ac}\} = [M] \cdot \{a_c\}$ – acceleration load vector; $[M] = \sum_{m=1}^N [M_e]$ – total mass matrix; $[M_e]$ – element mass matrix; $\{a_c\}$ – total acceleration vector; $\{F_e^{th}\}$ – element thermal load vector; $\{F_e^{pr}\}$ – element pressure load vector.

Mode-Frequency Analysis

The equation of motion for an undamped system, expressed in matrix notation using the above assumptions is:

$$[M] \cdot \{u\} + [K] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (3)$$

For a linear system, free vibrations will be harmonic of the form:

$$\{u\} = \{\phi\}_i \cdot \cos \omega_i t \quad (4)$$

where: $\{\phi\}_i$ – eigenvector representing the mode shape of the i^{th} natural frequency; ω_i – i^{th} natural circular frequency (radians per unit time); t – time.

Thus, (3) becomes:

$$(-\omega_i^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \{\phi\}_i = \{0\} \quad (5)$$

The not trivial solution is [10, 11, 12]:

$$|[K] - \omega^2 \cdot [M]| = 0 \quad (6)$$

Rather than outputting the natural circular frequencies $\{\omega\}$, the natural frequencies (f) are output; where: $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ – i^{th} natural frequency (cycles per unit time).

Thermal analysis

The governing equation of interest is as follows:

$$[C]\{T\} + [K]\{T\} = \{Q\} \quad (7)$$

where: $[C]$ – damping matrix; $[K]$ – coefficient matrix; $\{T\}$ – temperature; $\{\dot{T}\}$ – time rate of the temperature; $\{Q\}$ – heat flow.

The mathematical formulation of the fluid dynamics

To calculate the velocity and pressure fields of fluid flow the nonlinear systems of second order partial differential equations – Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS) (8) and continuity equations (9) are solved [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

where: ρ – the fluid density ($\rho = \text{const}$ for an incompressible fluid or gas); μ – dynamic viscosity; p – the average pressure, the indices $i = 1, 2, 3$ and $j = 1, 2, 3$ correspond to the coordinates x, y, z . Shear (Reynolds) stress $\overline{\rho u'_i u'_j}$ are additional six unknowns ($\bar{u}_i, \bar{p}$) which are approximated as a rule by the Boussinesq's assumption:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (10)$$

where: μ_t – additional viscosity caused by fluctuations; k – averaged turbulent kinetic energy (TKE). The system of equations (8, 9, 10) is not closed. To close this system semi-empirical relations (turbulence models) connecting additional unknowns (Reynolds stress) with time-averaged velocity components are imposed.

3. BASIC SOFTWARE FOR RESEARCH PURPOSES

For the purposes of this research the following universal software application packages for nu-

merical simulation of continuum mechanics were used:

- ANSYS Mechanical, ABAQUS Standard\Explicit – solving of temperature field, static, thermal and dynamic stress-strain state, dynamics and stability of arbitrary constructions and structures based on advanced finite element models and techniques.
- ANSYS CFD – the numerical simulation of three-dimensional steady and unsteady fluid dynamics problems of high computational dimension.
- ANSYS AUTODYN and LS-DYNA – simulation of the non-linear high-speed processes, including non-linear dynamic analysis on the explicit integration scheme, which allows to analyze the physical processes: the impact and penetration, explosions, destruction, aerohydroelasticity – with an extensive library of models and materials properties.

4. DEVELOPED TECHNIQUES

Numerical modeling technique of the wind loads and effects

Numerical modeling technique of the wind loads and effects on the basic structures of nuclear power plants was developed. It is based on numerical solution of steady and unsteady three-dimensional equations of fluid dynamics and devoted to the definition and analysis of extreme wind loads (average and fluctuating components of the loads on structures, peak pressures on the building envelope, evaluation of resonance phenomena). Verification of this technique on representative number of verification tests were carried out. Approbation of this developed technique on sample problems, dealing with advanced methods of analysis, definition of loads and impacts on the basic structures of nuclear power plants was done as well.

Numerical simulation technique of snow loads

Numerical modeling technique of the snow loads (the height of the snow cover after a snowfall with specified intensity and duration) on the basic structures of nuclear power plants was developed. It is based on the Euler-Eulerian approach

to modeling of multiphase flows. Unsteady three-dimensional equations of fluid dynamics for each of the phases ("snow" and "air") and the multiphase equations are solved numerically with the dynamic changes in the computational grid depending on the height of the snow cover. That allows adequately take into account important factors - the direction and profile of wind flow, topography, existing buildings and sequence of constructions erection. Verification and approbation of this technique were carried out.

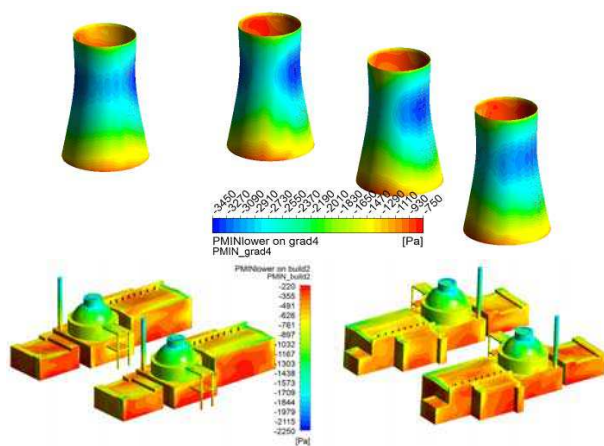


Figure 1. Lower envelope of the minimum values of wind pressure on the cooling tower (from the bottom) and on the main building NPP (from the bottom) [Pa]

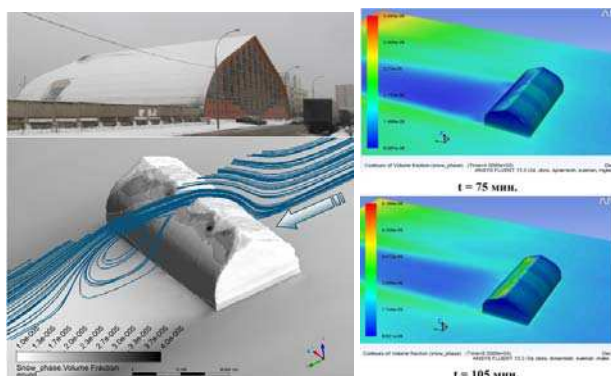


Figure 2. The form of snow cover and snow concentration on the roof

Numerical simulation technique of the plane crash loads and impacts

Numerical modeling technique of plane crash loads and impacts on NPP structures was developed. It is based on numerical solutions of three-dimensional equations of solid mechanics with

the use of finite element method or smoothed particle hydrodynamics method /SPH-method/ (nonlinear properties of reinforced concrete structures, soil foundations, equipment, plane properties (including the analysis of engines behavior, fuel spillage and fire caused by these factors) can be taken into account within coupled design model). Verification of this technique on representative number of verification tests were carried out. Approbation of this developed technique was done as well.

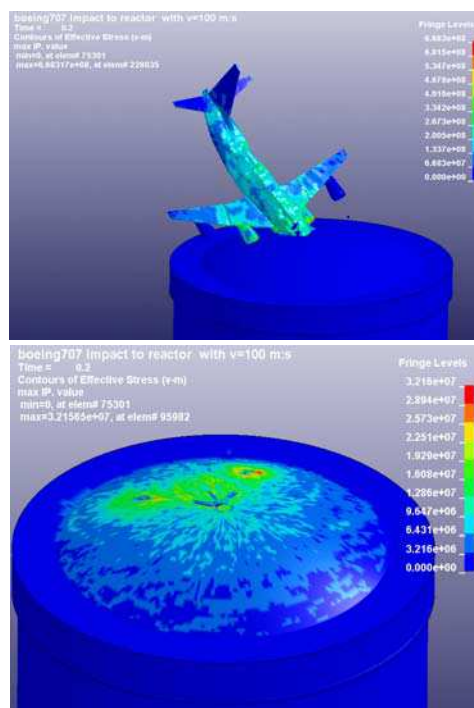


Figure 3. Contour plots of equivalent stresses [Pa] at time $t = 0.2$ s

Numerical modeling technique of the impact of the shock wave

Numerical modeling technique of the impact of the shock wave on NPP structures was developed. It is based on three-dimensional numerical solutions of equations of fluid dynamics and solid mechanics with the use of finite element method and the particle hydrodynamics method /SPH-method/ in terms of Lagrangian and Eulerian formulations (nonlinear properties of reinforced concrete structures, soil foundations, equipment, screening or amplifying effects from surrounding structures and the behavior of the shock waves in the air can be taken into account). Verification of this tech-

nique on representative number of verification tests were carried out. Approbation of this developed technique was done as well.

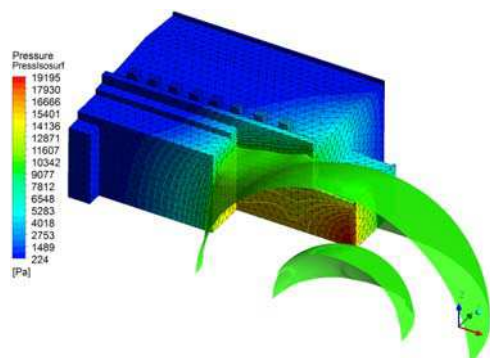


Figure 4. Distribution of pressure [Pa] from the source of the explosion (Novovoronezh NPP-2) at $t = 0.378$ sec. Green hemisphere – pressure iso-surfaces 10 [kPa]

Numerical modeling technique of seismic loads

Numerical modeling technique of seismic loads and impacts described by accelerograms on NPP structures was developed. It is based on the finite element solutions of three-dimensional dynamical equations of solid mechanics (dynamic and dissipative properties of foundations can be taken into account within coupled design model "foundation – building"). Verification and approbation of this developed technique was carried out.

Numerical modeling technique of tsunamis and loads of it

Numerical modeling technique of tsunami loads and impacts on NPP structures was developed. It is based on numerical solutions of three-dimensional steady and unsteady fluid dynamics equations within multiphase formulation, (bottom topography and terrain can be adequately taken into account). Verification and approbation of this developed technique was carried out.

Numerical modeling technique of tornado and loads of it

Numerical modeling technique of the tornado impact on NPP structures. It is based on numerical solutions of steady and unsteady three-dimensional equations of fluid dynamics (such important factors as the direction of the class tornado relief can be taken into account). Veri-

fication and approbation of this developed technique was carried out and showed below.

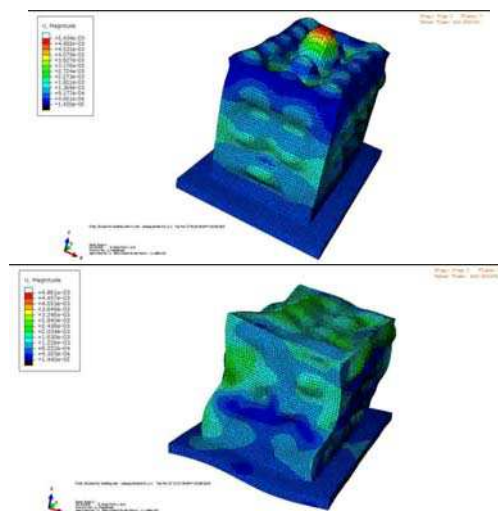


Figure 5. Building reactions on two types of loads: top - the harmonic load in accordance with SNIP, bottom - wave impacts

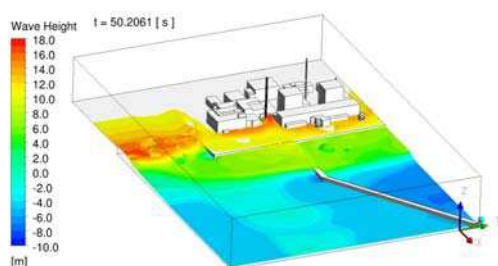


Figure 6. NPP "Fukushima-1" (Japan). Wave height [m] at $t = 50.3$ s

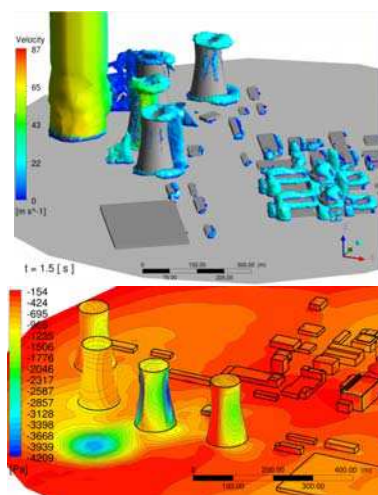


Figure 7. Top - velocities on the vorticity isosurfaces at time $t = 13.5$ s; bottom - lower envelope of pressure from a tornado

Table 1. Verification matrix of the numerical modeling technique of the wind loads and effects.

Name of task	Reference [1]	Turbulence model	Number of cells, thousand of cells	Controlled parameters	Time, hours	Error, %
Square prism, two-dimensional simulation	Experiment. Lyn	DES	20	Mean Cx, Cy, Cp, St, Vx, Vy	10	5-20%
Two square prisms interference, two-dimensional simulation	Experiment. S.G. Kuznetsov	DES	50	Mean Cx and fluctuations of Cy	20	5% for mean; 15% for fluct.
Cylinder, two-dimensional simulation (Re=3900)	Simulations. Liaw Experiment. Norberg	DES	40	Mean Cx, Cy, Cp, St, Vx, Vy,	20	5-10% (for Cp 5-20%)
Prism 2:1:1	Experiment. Tamura	SST	220	Vped, TKE Cp	0.5	3-5% (for V) 10-30% (for TKE)
Cube	Measurements. Silsoe Experiment. Castro	DES	120	Cp	40...80	10-30% (mesur.) 10-20% (exp.)
The high-rise building in low-rise buildings	Experiment. AIJ	SST	200 450	Vped (mean and peak values)	1 2	5-10%, for mean 10-20%, for peak
Shinjuku, Tokyo	Measurements. Ex- periment. AIJ	SST	19 700	Vped (peak values)	15	10-50% (mesur.) 10-30% (exp.)
MFC «City-Palas» ММДЦ «Москва-Сити»	Experiment . BMT	SST DES	3 200	Cp (mean), CX, CY (mean and peak values)	6 - SST 200 - DES	5-10% for mean 10-30% for fluct.
МФК «Федерация» MIBC «Moscow-City»	Experiment. RWDI	SST DES	2 400	Cp (mean and std.)	4 - SST 160- DES	5-10% for mean 10-30% for fluct.

Table 2. Verification matrix of the numerical modeling technique of the snow loads.

Name of task	Reference [1]	Software	Method	Criterion	Error, %
Shape of snow drifts under flow around the cube	Measurements	ANSYS FLUENT	FVM, Euler-Euler model of multiphase flow	Snow cover topology	< 50%

Table 3. Part of the Verification matrix of the numerical modeling technique of the plane crash loads and impacts.

Name of task	Reference [9]	Software	Method	Criterion	Error, %
Collision of non-deformable shell with a reinforced concrete wall	Experiment VTT and empiric formulas	LS-DYNA, ABAQUS/Explicit ANSYS AUTODYN	explicit	Penetration	10-30%
Wall penetration by the rigid projectile	Measurements	LS-DYNA	explicit	Penetration	< 50%
Collision of F4 with rigid wall.	Riera technique	LS-DYNA	explicit	Overall reaction	< 15%
Stability of spatial geodesic dome	Hangai, Jagannathan, Papadrakakis	LS-DYNA	explicit	Critical loads	0.22–0.5%
Temperature field in reinforced concrete column at a fire	МДС 21-2.2000	ANSYS Mechanical	Newton-Raphson	Temperature	< 9,0%

Table 4. Part of the Verification matrix of the numerical modeling technique of the plane crash loads and impacts

Name of task	Reference [1]	Software	Method	Criterion	Error, %
Spherical explosion of blast waves	Kingery\ Bulmash] CONWEP Sadowski	AUTODYN	Euler multimaterial	Peak pressure at different radius	For R <10 m up to 40%, For R >10 m, less than 5%
Shock-explosive impact on the sphere	Experiment	FLUENT	Model Shear Stress Transport (SST) with wall functions, VOF	Full resistance force FX; sensor pressure	< 15%
The explosion in the model of typical building	Experiments	AUTODYN	Euler's method	The peak value of the overpressure	< 15%
The supersonic air flow air in the shock tube	Analytical solution	FLUENT	Navier-Stokes equations	The pressure and temperature along the central line of the pipe	Up to 1%

Table 5. Part of the Verification matrix of the numerical modeling technique of seismic loads.

Name of task	Reference [1]	Method	Elements	Number of elements	Controlled parameters	Error, %
External Lamb problem	Verification example from ANSYS Mechanical	Abaqus/Standard: Hilbert-Hughes-Taylor method; Abaqus/Explicit: explicit integration scheme	CAX4R	750000	Stresses and displacements in the monitoring points	5.3 - for peak values, 4.7 - for mean values
Internal Lamb problem	Verification example from ANSYS Mechanical	Abaqus/Explicit: explicit integration scheme	CAX4R	999792	Stresses and displacements in the monitoring points	< 7 - for peak values, < 4 - for mean values
Seismic analysis of concrete gravity dam	[1]	Abaqus/Standard: 1) Newton-Raphson method; 2) Lanczos method; 3) Hilbert-Hughes-Taylor method; Abaqus/Explicit: explicit integration scheme	CPS4R	760	Stresses, displacements, eigenfrequencies	< 3

Table 6. Part of the Verification matrix of the numerical modeling technique of tsunami loads.

Name of task	Reference [1]	Software	Method	Criterion	Error, %
Landwash on the obstacle	Experiment	ANSYS FLUENT	RNG k-e VOF	Water level	Up to 40% Averaged – less than 10%
Dam break	Experiment]	LS-DYNA, CFX	SPH	Water level	Up to 15%
Load on the prism at the dam break	Experiment]	ANSYS FLUENT	RNG k-e VOF	Sensors pres- sure	Up to 15%
Surface waves caused by landslides in the Gulf of Lituya, Alaska	Experiment]	ANSYS FLUENT	RNG k-e DES VOF	Water level	Up to 40%

Table 7. Part of the Verification matrix of the numerical modeling technique of tornado loads.

Name of task	Reference [1]	Software	Method	Criterion	Error, %
Tornado creation experiment	Measurements Experiment	ANSYS FLUENT	URANS RNG k-e	Wind velocityties	Up to 30% Averaged - < 15%
Project «Shelter»	Expert estimates	ANSYS CFX	URANS SST	The peak pressure	Up to 30%
Impact of the car into the wall	Experiment	LS-DYNA	Explicit	Displacement in points	Up to 10%
Multiphase flow in the pipe	Analytical solution	Fluent	Stationary flow. Inlet flow is fully developed and laminar. The equations of phase transfer are solved.	Comparison of mass fractions of phases A along the axis of the tube	< 0.01%
Impact of metal cylinder in the concrete wall	Experiment	AUTODYN	Explicit	Penetration depth	< 2 %

4. CONCLUSIONS

Considerable number of verification samples, specific to the nuclear industry (Russian nuclear power plants, NPP "Fukushima-1") were used for multistage testing of developed methods and software application packages. The results of analysis showed correctness and effectiveness of the developed numerical methods of advanced analysis and definition of extreme external loads and impacts on NPP structures of a new generation.

REFERENCE

1. **Belostotsky A.M.** (2011), "Development, software and algorithmic implementation, verification and approbation of Numerical modeling techniques of extreme impacts on NPP structures (wind hurricane, snow loads, tornado, plane crash, the impact of the shock wave, seismic and tsunami effect)", Scientific-technical report, Moscow State University of Civil Engineering, № H/41/11/54 (K.477-11).
2. ANSYS, Inc. (2013), "ANSYS 14.5 Help".
3. Dassault Systèmes (2010), "ABAQUS Documentation".
4. The Ministry of Regional Development (2011), "Loads and effects: SP 20.13330.2011". Codes and standards. Updated edition of SNIP 2.01.07-85 *.
5. CEN (2003), "N 1991-1-3 Eurocode 1 - Actions on structures - Part 1-3: General actions - Snow loads", Brussels.
6. Federal Service for Ecological, Technological and Nuclear Supervision (2006), "The incorporation of external impacts of natural and anthropogenic origin on nuclear facilities: NP-064-05".
7. IAEA Safety Standards Series (1983), "The incorporation of extreme weather events in siting nuclear power plants. (Excluding tropical cyclones). Security Guide number 50-SG-S11A, Vienna.
8. IAEA Safety Standards Series (2003), "External Events Excluding Earthquakes in the Design of Nuclear Power Plant", Safety Guide No. NS-G-1.5, IAEA. Vienna.
9. **Riera J. D.** (1968), "On the Stress Analysis of Structures Subjected to Aircraft Impact Forces", Nucl. Engng. and Des.. Vol. 8. p. 415–426.
10. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
11. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.
12. **Berkowski P., Dmochowski G., Grosel J., Schabowicz K., Wojcicki Z.** Analysis of Failure Conditions for a Dynamically Loaded Composite Floor System of an Industrial Building. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, Volume 19(4), pp. 529-541.

Белостоцкий Александр Михайлович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Дубинский Сергей Иванович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), доцент, кандидат технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Котов Федор Михайлович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Вершинин Владислав Владимирович, Московский государственный строительный университет, кафедра строительной механики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Щербина Сергей Викторович, Московский государственный строительный университет, кафедра механического оборудования, деталей машин и технологии металлов, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Петряшев Сергей Олегович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Петряшев Николай Олегович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Science, Professor, Dr.Sc., 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey I. Dubinsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Associate Professor, Ph.D, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Irina N. Afanasyeva, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Fedor M. Kotov, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Vladislav V. Vershinin, Department of Structural mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey V. Scherbina, Department of Mechanical equipment, machinery details and metals processing technologies, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey O. Petryashev, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Nicolay O. Petryashev, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

NUMERICAL ANALYSIS OF WIND LOADING, STRESS-STRAIN STATE, STRENGTH AND STABILITY OF CONCRETE STRUCTURES OF NPP EVAPORATIVE COOLING TOWERS

*Alexander M. Belostotsky, Sergey I. Dubinsky, Sergey O. Petryashev,
Nicolay O. Petryashev, Irina N. Afanasyeva, Fedor M. Kotov*
Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This paper describes the methodology and the some results of computational studies of stress-strain state, dynamics, strength and stability of the load-bearing reinforced concrete (RC) evaporative cooling towers Novovoronezh NPP-2 with standard regulated combinations of basic and special loads and impacts using advanced technologies of finite element (FE) method. To determine the wind, hurricane and tornado loads (in addition to standard approaches) three-dimensional technologies of numerical simulation of steady and unsteady fluid dynamics problems were used. The spatial shell and solid finite element models of the combined system "soil foundation – RC structures of evaporative cooling towers" and its sub-systems, which describes geometric stiffness, inertia and load characteristics and the resulting stress-strain state, parameters of the dynamics, strength and stability adequately, were developed and verified. Also performed validation calculations required reinforcement.

Key words: numerical simulation, external extreme loads and impacts, nuclear power plants (NPP), stress-strain state, dynamics, strength, stability, evaporative cooling towers, ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, OM SNiP RC

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЕТРОВОГО НАГРУЖЕНИЯ, НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ Ж/Б КОНСТРУКЦИЙ ИСПАРИТЕЛЬНЫХ ГРАДИРЕН АЭС

*А.М. Белостоцкий, С.И. Дубинский, С.О. Петряшев,
Н.О. Петряшев, И.Н. Афанасьева, Ф.М. Котов*

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье описаны методика и некоторые результаты расчетных исследований напряженно-деформированного состояния, динамики, прочности и устойчивости несущих железобетонных конструкций башенных испарительных градирен Нововоронежской АЭС–2 при нормативно регламентированных сочетаниях основных и особых нагрузок и воздействий с использованием современных технологий метода конечных элементов. Для определения ветровых, ураганных и смерчевых нагрузок использовались (помимо нормативных подходов) технологии численного моделирования трехмерных стационарных и нестационарных задач гидрогазодинамики. Разработаны и верифицированы пространственные оболочечные и объемные конечно-элементные модели комбинированной системы “грунтовое основание – ж/б конструкции градирни” и ее подсистем, адекватно отражающие их геометрию-жесткостные, инерционные и нагрузочные характеристики и результирующее напряженно-деформированное состояние, параметры динамики, прочности и устойчивости. Выполнены также проверочные расчеты необходимого армирования.

Ключевые слова: численное моделирование, внешние экстремальные нагрузки и воздействия, атомные электростанции (АЭС), напряженно-деформированное состояние, динамика, прочность, устойчивость, испарительные градирни, ANSYS Mechanical, ANSYS CFD, OM СНиП Железобетон

1. INTRODUCTION

Evaporative cooling tower Novovoronezh NPP-2 (the NV NPP-2) are the highest in Russia. Top mark of the stack is +171.00 m, the radius of the tower at the level +171.00 m equal to 37.65 m, at the level +9.70m - 61.10 m. The project provides two towers, one for each power block. Currently, the construction of the first tower is completed, work is underway on the construction of a second one.

Evaporative cooling tower stack consist of an inclined support colonnade (44 columns), support ring, reinforced concrete shell of variable thickness and internal structures. The columns based on the strip foundation via a special support base.

In the design phase loads and impacts were determined according to standard procedures. It was necessary to perform the calculations for validation of refined loads determined with the use of modern technologies of computational modeling.

One of the most important impacts on the structure of such height are wind and tornado. In relation to the NV NPP-2 calculations for the basic and specific (extreme) wind loads and impacts (including the tornado) based on three-dimensional numerical simulation of fluid dynamics problems without relief for three variants: an isolated tower, two twin cooling towers with buildings and without buildings,- were performed using the software package ANSYS CFD.

For the design version of evaporative cooling towers estimation of the strength and sufficiency of reinforcement at the design combinations of loads and impacts, as well as dynamic parameters and critical loads / modes of buckling was performed with using of finite element application package ANSYS Mechanical [8, 9, 10]. Seismic calculations were carried out in the spectral formulation and on the impact given by the accelerograms (taking into account the non-linearity of the contact of soil foundation and the support ring). To perform verification calculations of reinforcement was required.

2. AERODYNAMIC CALCULATIONS

Calculation method of basic and specific (extreme) wind loads and impacts based on the numerical simulation of three-dimensional steady and unsteady fluid dynamics problems (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations RANS, URANS) has been implemented and verified by authors earlier. As a spatial discretization finite volume method was used. This methodic allows to adequately estimate important factors: the direction and profile of wind flow, topography, building site and sequence of construction works.

Three-dimensional geometric model of evaporative cooling tower with support colonnade, but without the internal equipment and the direct simulation of surface roughness on the outer surface of the cooling tower, was developed by authors.

Evaluation of equivalent roughness was made on a two-dimensional model of the tower sections, selected at height 120 m (where radius is 36.2 m). Wind velocity 32 m/s, the turbulence intensity 1% were imposed as the "inlet" boundary conditions. The calculations were carried out for three models: a) smooth cylinder, b) cylinder with a specified roughness (0.04 m) on the outer surface, c) section of the cooling tower with direct modeling ribs (roughness). If the specified equivalent roughness (parameter "Wall roughness") equal to 0.04 m (case b)), then the results for this case with the practical accuracy consistent with the results for the case c). Mismatching of results does not exceed 10% (see Fig.1).

Steady and unsteady three-dimensional calculations of one and two cooling towers at the standard wind and hurricane wind were carried out using SST and DES turbulence models. As a "inlet" boundary conditions wind velocity, turbulence kinetic energy and dissipation energy, varying in height and corresponding to the 2nd wind region and type area A ("open area") according to the Russian design codes [3], were set. Mean velocity at height of 10 m for the standard wind is 25.9 m/s, for the hurricane wind - 40.95 m/s. The physical time equal 500 s. For the transient simulations the time step equal 0.05 s.

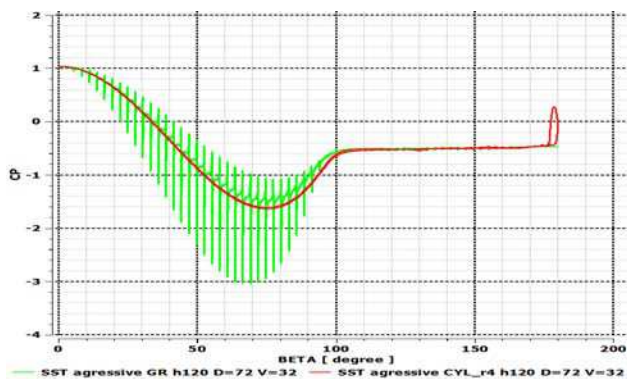


Figure 1. Average C_p on the angular coordinates for the model: with a specified roughness - the red line, modeled ribs - the green line. SST turbulence model

Average wind loads on the cooling tower (in case of twin towers) due to cross interference at certain wind angles of attack may as increase by 14%, so decrease by 18%, compared with a single cooling tower. As a result of the cross interference between twin towers transient simulations showed the increasing of the fluctuating component of wind load in the time compared to a single cooling tower.

Numerical experiments showed that the effect of "development" (buildings of reactor compartment and turbine hall) and topography on the distribution of the wind pressure on the tower surface is negligible and affects only at the lower elevations (up to 50 m). Positive average pressure varies by no more than 2%, and a negative - no more than 7% in the most "sensitive" wind direction for the case without building site.

Comparison of the results of numerical simulation and design calculation of aerodynamic pressure (the pressure coefficient C_p) showed enough "good" matching (error is not exceeding 5%) at height of 20 m and 160 m. Minimum value of the coefficient C_p according to standards is -1.1 and implemented with the angular coordinate 70°. Calculated minimum value of the coefficient C_p ranges from -2.4 (at height of 100 m) to -1.0 (at height of 20 m and 160 m) and implemented with the angular coordinate 80-85°. Diagrams of aerodynamic pressure coefficient C_p for hurricane wind are identical to

those obtained for the standard wind. For the ease of comparison the aerodynamic pressure coefficient C_p is defined with respect to the velocity at the infinity for the appropriate height.

As a result of aerodynamic calculations for standard wind maximum positive values of mean wind pressure on the surface of the cooling tower does not exceed 1200 Pa, local negative pressure (vacuum-gauge pressure) up to -2700 Pa, for hurricane wind maximum positive values of mean pressure on the surface of the cooling tower does not exceed 3000 Pa, local negative pressure (vacuum-gauge pressure) up to -6250 Pa.

Three-dimensional unsteady calculations of one and two cooling towers at the tornado class 3.16 by Fujita scale were carried out. Tornado center "moved" with speed about 21.2 m/s, the radius of the "wall" (the region of maximum tangential velocity $V_{max} = 84.8$ m/s) was 45 m. Length of tornado straight-line trajectory is assumed to be 300 m.

Transient simulations were performed using the turbulence model SAS-SST. The physical time equal 25 s. For the transient simulations the time step equal 0.05 s.

Overall aerodynamic loads (vector sum of F_x and F_y) up to 6000 tnf. Maximum positive pressure on the surface of the cooling tower does not exceed 3000 Pa, local negative pressure (vacuum-gauge pressure) up to 7200 Pa. The greatest influence is realized for the one of the considered scenarios when tornado is moving along the line connecting the two towers.

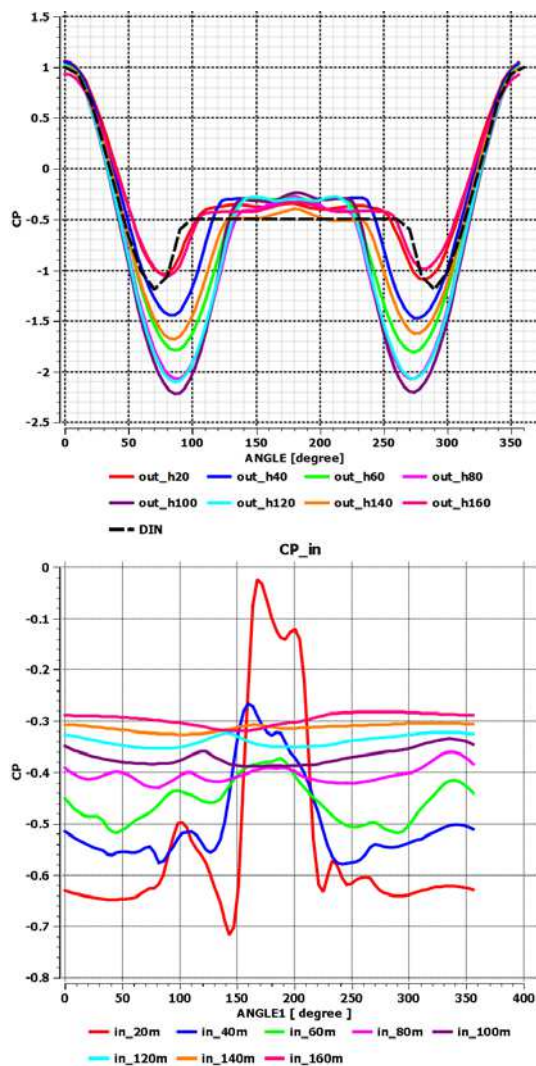


Figure 2. Aerodynamic pressure coefficient C_p at the outer (top) and the inner (bottom) of the tower at various heights (from 20 m to 160 m).

3. CALCULATION MODELS FOR DETERMINING THE STRAIN-STRESS STATE, THE STRENGTH AND STABILITY

FE models cooling tower NV NPP-2 were developed based on the design and space-planning solutions (see table 1).

Shell model. For the multivariate resource-intensive calculations (seismic, exhaustive search of wind and tornado impacts) and evaluation of the design reinforcement cooling tower shell models were developed.

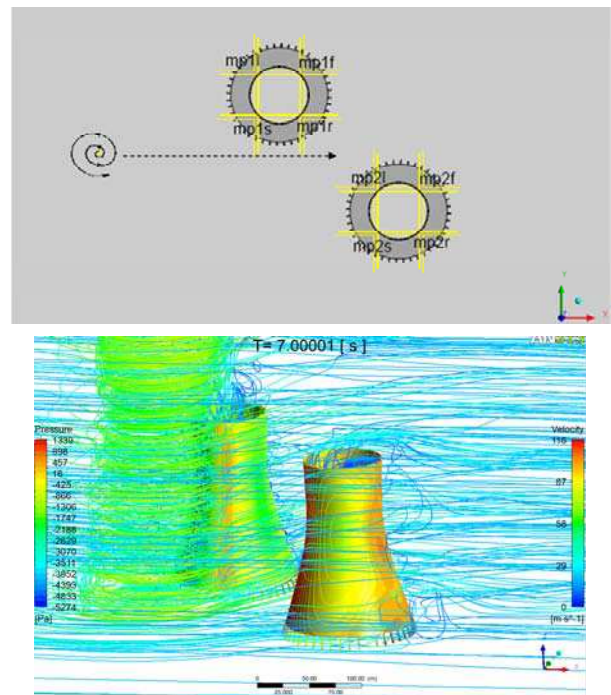


Figure 3. Pressure (Pa) on the surface of the cooling tower and the streamlines. Physical time $T = 7$ s.

Shell finite elements with variable thickness SHELL181 (4-node) and SHELL281 (8-node) were used referred to as Mindlin-Reissner shell theory. FE shell corresponds to the tier height (1.5 m) and along the arc it does not exceed 1/88 of the circumference. Columns are modeled by shell finite element with varying cross-sectional dimensions (constant thickness and the width varies according to the section of the column). Element SURF154 were used to model the bottom surface of the base plate taking into account the coefficient of soil reaction.

Solid model. 1/88 part of the model was designed due to of the symmetry of the structure. The input data are the thickness and radius of curvature of the shell with a step height of 1.5 m. The linear approximation was used for the construction of geometry at the intermediate points.

Reinforcement was taken into account by the "spread" schemes setting the percentage of reinforcement in material for each of the orthogonal directions. Zone thickness of 70-100 mm have been "cut off" in the three-dimensional model

near the outer surfaces. At least three finite elements were entered along the shell thickness (two "outside" layers with specified reinforcement).

When design solid finite element model of evaporative cooling tower (non-linear analysis on wind, tornado, "emergency" situation) were creating, the model of typical sector were copied many times as necessary.

The case of a complete failure of the support structure considers, in this case - the removal of one of 44-inclined columns from the calculation model. Preliminary calculations showed that the inclusion of the three sectors around the column allows to determine the resultant "emergency" strain-stress state of cooling tower with the lower computational cost. Removal of columns was performed by a tenfold decreasing of the stiffness of the removed column in 8 steps to improve the convergence of nonlinear numerical calculations.

4. COMPUTATIONAL ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE

The calculation of the cooling tower model sector (1/88 part) taking into account the foundation soil (Table 1. Model number 2) was carried out at a preliminary stage to determine the coefficient of soil reaction. The calculation was performed taking into account stage erection. Soil properties were averaged and ranged for the better reproduction of the results of geotechnical monitoring of settlement. The coefficient of soil reaction was determined as a calculation result (Fig. 4). In further calculations the averaged coefficient of soil reaction is assumed as 10 MN/m³

Next research calculations were performed for weight, temperature, wind, hurricane, tornado and seismic loads and impacts.

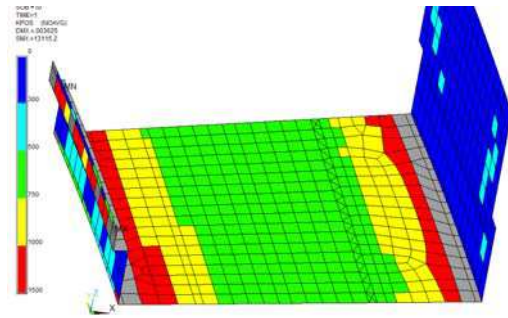


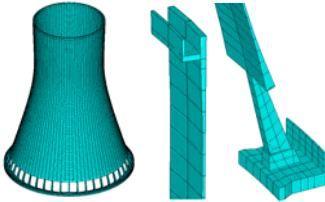
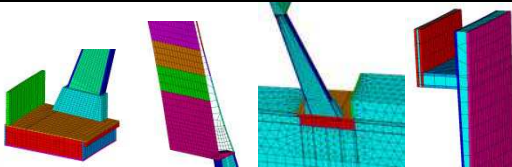
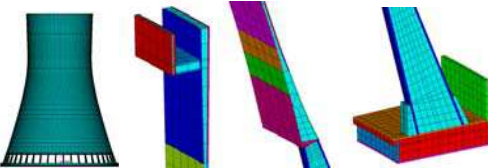
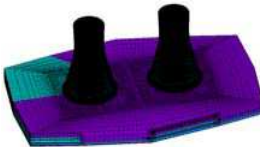
Figure 4. The coefficient of soil reaction (tnf/m³) by solving the contact problem. Permanent loads. (Scale of 0, 300, 500, 750, 1000, 1500 tnf/m³).

Analysis of the results of computational research showed the overall picture of the expected distribution of the stress-strain parameters of cooling tower. In particular, the following facts were found out: the absence of significant effects of geometric nonlinearity in the deformation of the cooling tower shell; noticeable effect of support contour compliances (base plate and columns - the "weak link") on the static state, dynamics and stability of the system; significant eigenmodes for the wind and seismic loads (total offset deformable shell on the columns) are characterized by low frequencies and bend (bent fracture) in the area of the lower support ring; sufficient strength and stability of the shell.

As a result of calculations of alternative finite element models the following facts were found out (for initial geometry, material properties, size and mix of core and special loads and impacts) that radial displacements of the shell for standard wind at 72-directions (using the results of numerical simulation of aerodynamics) are 54 mm (Fig. 5) and characterized by low dynamics.

The load-carrying ability of the structure under wind action according to design hurricane winds as a result of physically and geometrically nonlinear analysis is provided conservative of 1.6.

Table 1. Developed design FE models of the evaporative cooling tower NV NPP-2.

№	FE models of the system/subsystem	Figure	Number of nodes	Number of elements	Types FE (ANSYS)	Calculations type
1	shell finite element model of the cooling tower		14 000 (40 000)	14 000	SHELL181 SHELL281 SURF154	The calculation of frequencies and modes of vibration; Calculation of the constant load; Calculation of the temperature of strain-stress state; Calculation of strain-stress state on wind impacts; Calculation of strain-stress state on the impacts of tornado loads ; Calculation for the seismic action; The calculation of the overall stability, "according to Euler"
2	solid finite element model of the sector (1/88 part) "soil foundation – RC evaporative cooling towers" in the contact setting		36 000	27 000	SOLID65 SOLID45 CONTA173 TARGET170	Calculation taking into account the nonlinear behavior of the soil base in the contact formulation to determine the effective coefficient of soil reaction
3	simplified combined finite element model of system "dynamic foundation soil - RC evaporative cooling towers" in the formulation of the contact		35 000	33 000	SHELL181 SOLID45 CONTA173 TARGET170	Calculation for the seismic action, taking into account the interaction with the subsoil
4	solid finite element model of the cooling towers		724 000	598 000	SOLID65 SURF154	The calculation of frequencies and modes of vibration; the calculation for a given project reinforcement on: the weight and wind load (at SPX) or action of load weight and the tornado in a physically and geometrically nonlinear formulation with the cracking of concrete; the calculation of an emergency situation - resistance against the "progressive collapse"
5	solid finite element model of system "soil foundation – RC evaporative cooling towers"		1 310 000	2 700 000	SOLID65 SOLID45 CONTA173 TARGET170	Calculation of contact pressure, the rationale for the mutual influence of cooling towers through the soil

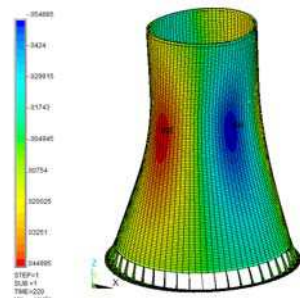


Figure 5. Cooling tower NV NPP-2 on elastic foundation. The basic load combinations. Radial displacement (m). The maximum value of 4.5 (cm). Minimum value -5.4 (cm). The angle of attack of the wind 220°.

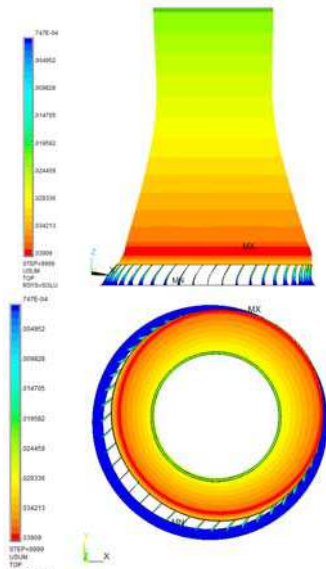


Figure 6. Summary seismic displacement (m) upon exposure in all directions simultaneously. The spectral method. Maximum value 0.039 (m), the minimum value of $0.747 \cdot 10^{-4}$ (m)

The most dangerous variant of tornado moving (the intensity of 3.16 on a scale of Fujita) is the scenario of impact on an isolated tower. Results of physically linear analysis and verification of the design of reinforcement showed that the required safety is provided. Additional physical and geometric nonlinear analysis in a quasi-static setting for this scenario of tornado demonstrated a significant cracking, plastic deformation of the reinforcement and destruction in the "right" (relative to the direction of motion of a tornado) area of the shell on the positive pressure in the "tightening" of the vortex (Fig. 9).

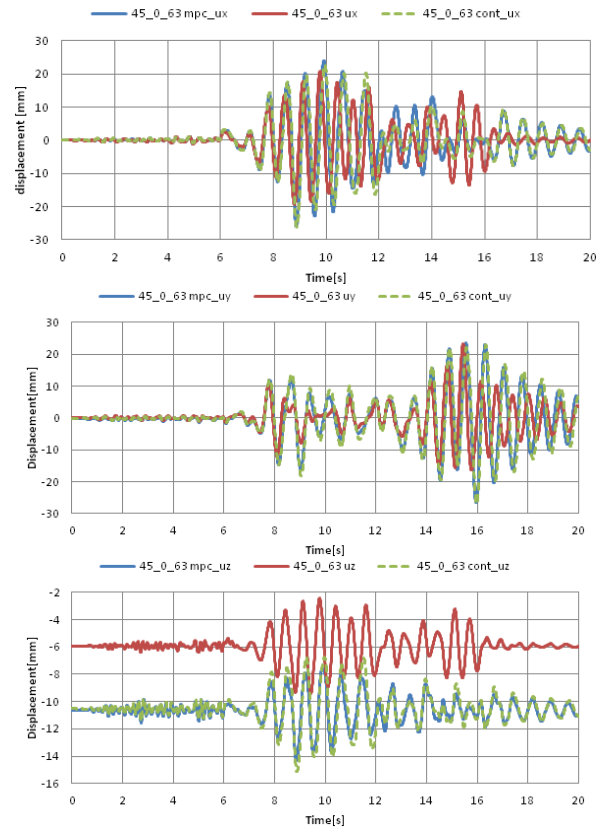


Figure 7. Displacement UX, UY, UZ (mm) for nodes at a height of 63 m relative to the foundation for three cases. Blue line – "indissociable" MPC contact, the red line - on a rigid foundation, the green dotted line – a standard contact. A special combination of loads.

Analysis for a specified 6-intensity earthquake [4, 7] impact with the using of linear-spectral method for the more than 2000 eigen modes in the frequency range up to 33 Hz showed a maximum total seismic movement up to 39 mm, which were defined by the dominant modes of frequencies 1,517 Hz and 2,526 Hz.

Figure 7 shows comparison graphs of dependence of displacement on time in monitoring points. The largest amplitude of displacement UX, UY in monitoring points is achieved in the case of account "indissociable" contact between the cooling tower and the soil foundation. The largest amplitude of displacement UZ is achieved when taking into account the standard of contact between the cooling tower and the soil foundation. Analysis for a specified 6-

intensity earthquake [4, 7] impact, described by three-component accelerograms, wave and platform (including the behavior of the soil foundation) schemes showed the maximum total displacement of nodes 30 mm and 27 mm, respectively.

The overall Euler's structure stability for the current loads and impacts (weight, temperature, wind, hurricane, tornado, seismic) is provided with sufficient supplies (5 and above).

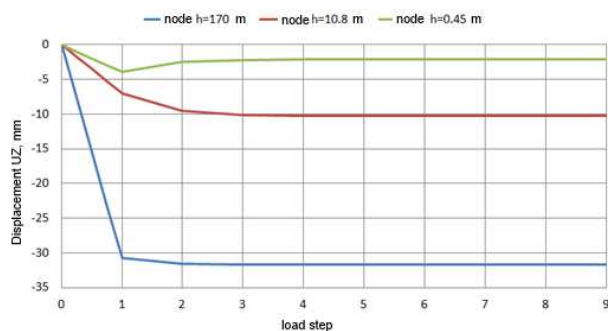


Figure 8. Displacement UZ (mm) of nodes at a height of 0.45 m (under the deleted column in base of column), 10.8 m (above the deleted column in the lower support ring), 170 m (above the deleted column in the upper support ring). Load step: 1 corresponds to the displacement of its own weight in the whole column, 2 column leaving stiffness reduction of 10, 3 – 10^2 times, 9 – 10^8 .

Results showed that for the emergency situation ("progressive collapse") after removal of the column structure movements stabilized (Fig. 8). This indicates the necessity to ensure the level of the bearing capacity at the considered emergency. Analysis for an emergency situation in the nonlinear formulation for the considered scenario with initiation of local failure substantiated the stability of the support structure to progressive collapse when one of the columns is removed.

5. VERIFICATION CALCULATION OF REINFORCEMENT

Analysis of reinforcement in accordance with Russian design codes, performed by a certified

program "OM SNiP RC" shows that specifications of the ring and meridian reinforcement shell adopted in the project, and the parameters of radial and ring reinforcement of the foundation plate are enough (Fig. 10). The columns and wall of cooling pond strength at design reinforcement are confirmed by non-linear calculations in a three-dimensional finite element formulation.

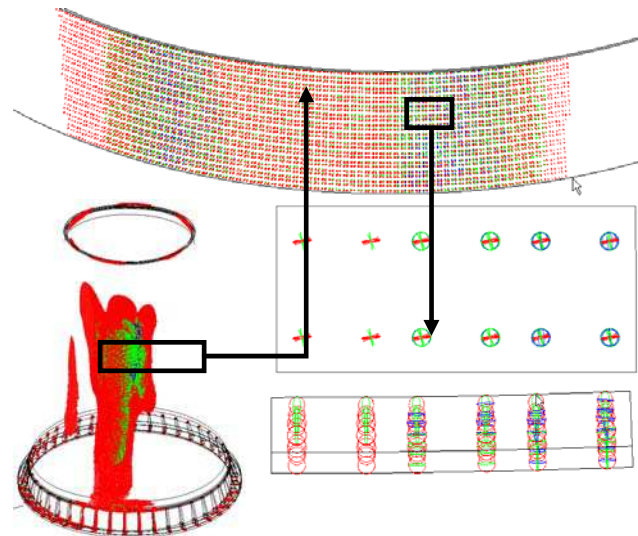


Figure 9. The scheme of cracks formation. Tornado impacts.

6. CONCLUSIONS

The complex method of calculating the external loads, strength, dynamics and stability of the evaporative cooling towers was developed and verified. The calculations of the strength and stability of the structure at the calculated combinations loads were carry out with using ANSYS CFD and ANSYS Mechanical packages. Parameters of the reinforcement shell, columns and foundation plate were confirmed. It is necessary to develop and implement a program to monitor the status of supporting structures for the evaporative cooling tower construction and operational phases, based both on the results of the analysis, as well as a specially developed adaptive forward-looking monitoring of mathematical models.

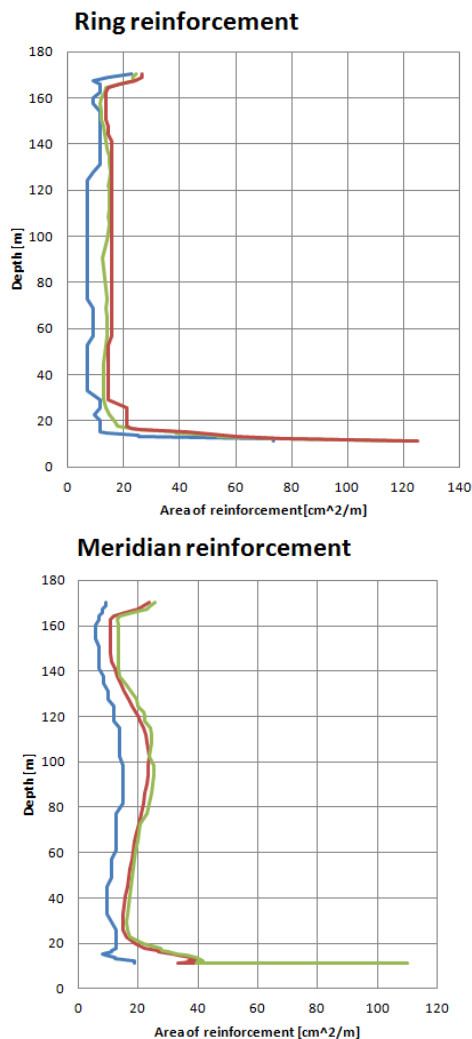


Figure 10. The required total ring and meridian reinforcement for the basic load combination and the total project reinforcement. The blue line - a necessary, green-final according to SPX, red - design reinforcement.

REFERENCE

1. **Belostotsky A.M.** (2011) "Development, software and algorithmic implementation, verification and approbation of Numerical modeling techniques of extreme impacts on NPP structures (wind hurricane, snow loads, tornado, plane crash, the impact of the shock wave, seismic and tsunami effect)", Scientific-technical report, Moscow State Univer-

- sity of Civil Engineering, № H/41/11/54 (K.477-11).
2. **ANSYS, Inc.** (2013), "ANSYS 14.5 Help".
3. The Ministry of Regional Development (2011), "Loads and effects: SP 20.13330.2011". Codes and standards. Updated edition of SNIP 2.01.07-85 *.
4. The Ministry of Regional Development (2011), "Seismic Building Design Code", SP 14.13330.2011". Codes and standards. Updated edition of SNIP II-7-81*.
5. **VGB. BTR-Guideline. Structural Design of Cooling Towers.** (2005) Essen: VGB PowerTech e.V. Technical Association of Large Power Plant Operators.
6. Verification Report on the software package ANSYS Mechanical (2009). - Moscow State University of Civil Engineering, SIC Stadyo.
7. **Majcher K., Wojcicki Z.** Parametric vibration of TMD installed in tall building during seismic excitation, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2010, vol. 10, nr 1, p. 189-190.
8. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
9. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.
10. **Berkowski P., Dmochowski G., Grosel J., Schabowicz K., Wojcicki Z.** Analysis of Failure Conditions for a Dynamically Loaded Composite Floor System of an Industrial Building. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, Volume 19(4), pp. 529-541.

Белостоцкий Александр Михайлович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-

образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Дубинский Сергей Иванович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), доцент, кандидат технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Петряшев Сергей Олегович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Петряшев Николай Олегович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Котов Федор Михайлович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Alexander M. Belostotsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Science, Professor, Dr.Sc., 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey I. Dubinsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil

Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Associate Professor, Ph.D, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Sergey O. Petryashev, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Nicolay O. Petryashev, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Irina N. Afanasyeva, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Fedor M. Kotov, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

**НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ,
СВЯЗАННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРЕГУЛЯРНЫХ
АППРОКСИМИРУЮЩИХ СЕТОК ПРИ ЧИСЛЕННОМ
РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ЧАСТЬ 1: ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА
ЗАДАЧИ**

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

Московский государственный строительный университета, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья открывает серию работ, посвященную вопросам численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения трехмерных задач расчета конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками) в случаях использования нерегулярных (различных на различных участках постоянства физико-геометрических параметров конструкции) аппроксимирующих сеток. Ниже описывается переход от континуальной операторной постановки задачи к соответствующей дискретно-континуальной, представляющей собой набор двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (обобщенная многоточечная краевая задача).

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, трехмерные задачи, нерегулярные аппроксимирующие сетки, расчеты конструкций, дискретно-континуальная постановка задачи

**SEVERAL ALGORITHMIC PROPERTIES ASSOCIATED
WITH THE USE OF IRREGULAR MESHES WITHIN
DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD
FOR THREE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS
PART 1: DISCRETE-CONTINUAL FORMULATION
OF THE PROBLEM**

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to numerical implementation of discrete-continual finite element method for analysis of three-dimensional structures with piecewise-constant physical and geometrical parameters with the use of irregular meshes. Discrete-continual formulation of the corresponding problem (so-called multi-point boundary problem) is presented.

Key words: discrete-continual finite element method, three-dimensional problems, irregular meshes, structural analysis, discrete-continual formulation

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

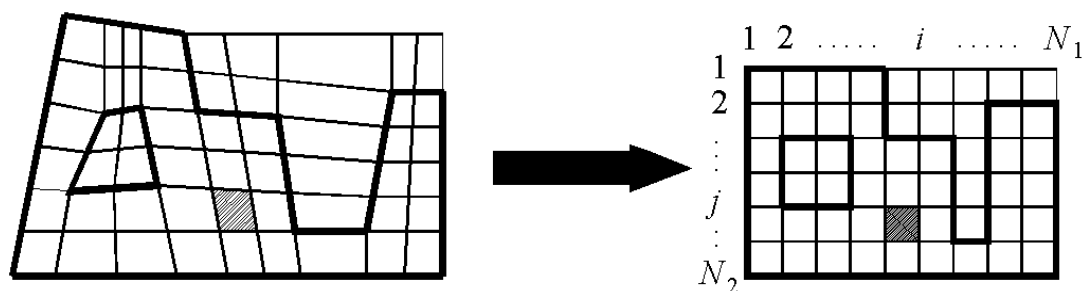


Рисунок 1.1. Пример выбора сетки, аппроксимирующей «поперечное» по отношению к основному направлению сечение конструкции.

1. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ. ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ (ДККЭ)

Пусть x_3 – переменная, соответствующая основному направлению (т.е. направлению вдоль которого физико-геометрические параметры конструкции изменяются кусочно-постоянно (заметим, что по переменным x_1 и x_2 физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно)); S_{Ω_k} – область, занимаемая «поперечным» по отношению к основному направлению сечением конструкции (в общем случае кусочно-постоянна вдоль x_3); $x_{3,k}^b$, $k=1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение параметров конструкции); Ω_k , $k=1, \dots, n_k-1$ – соответствующие фрагменты, на которые разделяется конструкция,

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_{\Omega_k}, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}, \quad k=1, \dots, n_k; \quad (1.1)$$

Γ_k , $k=1, \dots, n_k-1$ – соответствующие границы перечисленных фрагментов.

Для постановки и решения задачи каждая исходная область Ω_k , $k=1, \dots, n_k-1$ окаймляется соответствующей расширенной обла-

стью ω_k , $k=1, \dots, n_k-1$ [1,2]. Принимается следующая дискретно-континуальная модель: по основному направлению (вдоль оси Ox_3) решается континуальная задача, а по другим направлениям (вдоль осей Ox_1 и Ox_2) производится конечноэлементная аппроксимация. Заметим, что аппроксимация поперечного по отношению к основному направлению сечения стандартной области состоит в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной так, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям поперечного сечения конструкции (рис. 1.1).

Понятие топологической эквивалентности в данном случае означает, что она может быть получена из прямоугольной сетки в результате некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания». Выбор такого класса сеток, с одной стороны, дает возможность аппроксимировать большое количество разнообразных конструкций, а с другой – позволяет использовать простую регулярную нумерацию узлов, что приводит в дальнейшем к удобным математическим формулам, эффективным вычислительным схемам и алгоритмам, а также существенно упрощает сбор исходной информации и вывод результатов. Переход к прямоугольной сетке с единичным шагом легко осуществляется локальной заменой координат внутри сеточной ячейки. При «выпрямлении» сетки общий вид уравнений сохраняется – меняются лишь элементы матрицы коэффициентов исходной системы. Во многих случаях эффективно непосредственное применение прямоугольных сеток, поскольку это значи-

тельно упрощает и ускоряет алгоритмы, а следовательно, позволяет использовать большое количество узлов, что в результате приводит к увеличению точности. Допускается несогласованность сетки и очертания «поперечного» сечения конструкции (рис. 1.1). Заметим, что схема разбиения на дискретно-континуальные конечные элементы в общем случае может быть различной для различных подобластей ω_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$).

Итак, каждую область ω_k разбиваем на подобласти – дискретно-континуальные конечные элементы (ДККЭ) $\omega_{k,i,j}$ (рис. 1.2, 1.3):

$$\omega_k = \bigcup_{i=1}^{N_{1,k}} \bigcup_{j=1}^{N_{2,k}} \omega_{k,i,j}; \quad (1.2)$$

$$\omega_{k,i,j} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

где $S_{\omega_k}^{(i,j)}$ – область, описанная дискретно-континуальным конечным элементом $\omega_{k,i,j}$ в поперечном направлении конструкции; $N_{1,k}, N_{2,k}$ – принятое количество узлов по направлению осей Ox_1, Ox_2 на участке ω_k ; $(x_1^{k,i,j}, x_2^{k,i,j}, x_3)$, $i = 1, \dots, N_{1,k}$; $j = 1, \dots, N_{2,k}$ – координаты узлов сетки; $N_k = N_{1,k} \cdot N_{2,k}$.

Далее определяем характеристическую функцию элемента и сеточные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i,j} \not\subset \Omega_k; \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (1.5)$$

Рассмотрим произвольный элемент модели $\omega_{k,i,j}$ (рис. 1.4).

Произведем локальную замену переменных внутри элемента, введя в произвольном «поперечном» (по отношению к основному направлению) сечении рассматриваемого эле-

мента локальную систему координат Ot_1 и Ot_2 (рис. 1.4), при этом $t_1 \in [0, 1]$; $t_2 \in [0, 1]$.

Для «поперечного» (по отношению к основному направлению) сечения конструкции векторы координат произвольной точки ДККЭ в элементной и исходной системах имеют вид:

$$\bar{t} = [t_1 \ t_2]^T; \quad \bar{x} = [x_1 \ x_2]^T. \quad (1.6)$$

Соответствующая формула преобразования координат:

$$\bar{x} = \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x}^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 \bar{x}^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}, \quad (1.7)$$

$$\text{где } \Delta_1 \bar{x} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)};$$

$$\Delta_2 \bar{x} = \bar{x}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)};$$

$$\Delta_{12} \bar{x} = \bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}. \quad (1.8)$$

Здесь $\bar{x}_n^{(k,i,j)}, \bar{t}_n^{(i,j)}$ – векторы координат узла элемента в исходной и элементной системах координат соответственно, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$; $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

В результате замены переменных вычисление производных по x_1 и x_2 производится согласно формулам дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2. \quad (1.9)$$

Величины $\partial t_k / \partial x_s$ из (1.9) образуют якобиан системы.

Матрица Якоби на элементе $\omega_{k,i,j}$ определяется следующим образом:

$$\alpha^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{1,2}^{(k,i,j)} \\ \alpha_{2,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{2,2}^{(k,i,j)} \end{bmatrix} = \quad (1.10)$$

$$= \frac{D\bar{t}}{D\bar{x}} = \begin{bmatrix} \partial t_1 / \partial x_1 & \partial t_1 / \partial x_2 \\ \partial t_2 / \partial x_1 & \partial t_2 / \partial x_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \alpha_{p,q}^{(k,i,j)} = \frac{\partial t_p}{\partial x_q}. \quad (1.11)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

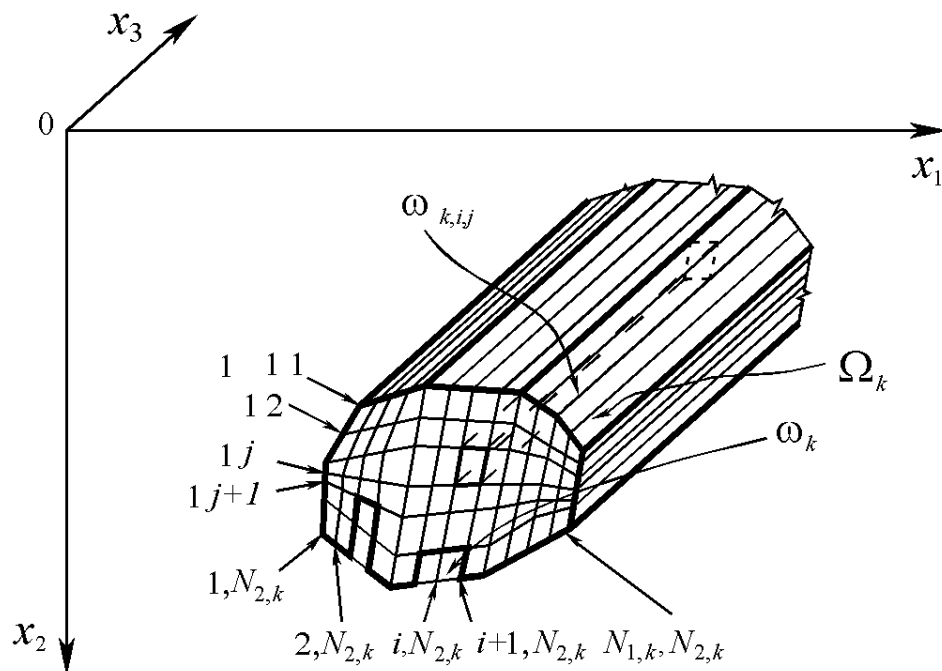


Рисунок 1.2. Схема дискретизации конструкции.

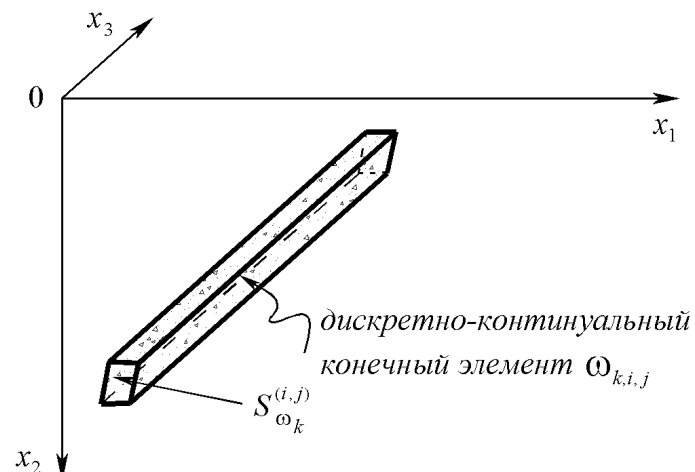


Рисунок 1.3. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

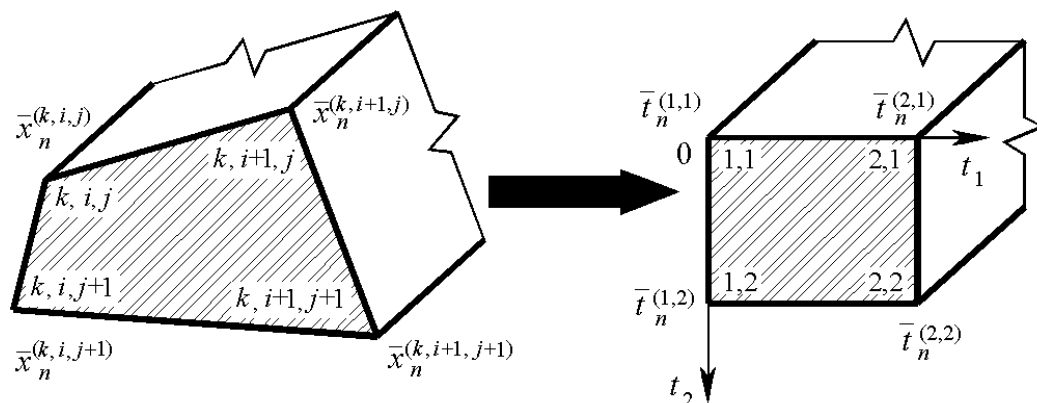


Рисунок 1.4. Переход к локальной системе координат на ДККЭ.

Элементы матрицы соответствующего функционального определителя $\beta^{(k,i,j)} = D\bar{x} / D\bar{t}$ находятся как

$$\begin{aligned}\beta_{p,q}^{(k,i,j)} &= \partial x_p / \partial t_q = \\ &= \Delta_q x_p^{(k,i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(k,i,j)}, \quad (1.12) \\ p &= 1, 2; \quad q = 1, 2.\end{aligned}$$

Матрицы функциональных определителей $D\bar{x} / D\bar{t}$ и $D\bar{t} / D\bar{x}$ взаимосвязаны:

$$\frac{D(\bar{t})}{D(\bar{x})} = \left[\frac{D(\bar{x})}{D(\bar{t})} \right]^{-1} \quad \text{или} \quad \alpha^{(k,i,j)} = (\beta^{(k,i,j)})^{-1}, \quad (1.13)$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{1,2}^{(k,i,j)} \\ \alpha_{2,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{2,2}^{(k,i,j)} \end{bmatrix} = \frac{1}{J^{(k,i,j)}} \begin{bmatrix} \beta_{2,2}^{(k,i,j)} & -\beta_{1,2}^{(k,i,j)} \\ -\beta_{2,1}^{(k,i,j)} & \beta_{1,1}^{(k,i,j)} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned}J^{(k,i,j)} &= \det[\beta_{p,q}^{(k,i,j)}] = \\ &= \beta_{1,1}^{(k,i,j)} \beta_{2,2}^{(k,i,j)} - \beta_{1,2}^{(k,i,j)} \beta_{2,1}^{(k,i,j)}. \quad (1.15)\end{aligned}$$

или в поэлементном представлении имеем:

$$\alpha_{1,1}^{(k,i,j)} = \alpha_{1,1}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}; \quad (1.16)$$

$$\alpha_{1,2}^{(k,i,j)} = \alpha_{1,2}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}; \quad (1.17)$$

$$\alpha_{2,1}^{(k,i,j)} = \alpha_{2,1}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}; \quad (1.18)$$

$$\alpha_{2,2}^{(k,i,j)} = \alpha_{2,2}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}. \quad (1.19)$$

2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В качестве основных неизвестных в узлах принимаются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$

по переменной x_3 , т.е. для (p, q) -го узла это $u_{1,n}^{(k,p,q)}, u_{2,n}^{(k,p,q)}, u_{3,n}^{(k,p,q)}, v_{1,n}^{(k,p,q)}, v_{2,n}^{(k,p,q)}, v_{3,n}^{(k,p,q)}$ и соответственно вектор неизвестных

$$\bar{U}_n^{(k,p,q)} = \bar{U}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,p,q)} \\ \bar{v}_n^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\text{где} \quad \bar{u}_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_{1,n}^{(k,p,q)} \\ u_{2,n}^{(k,p,q)} \\ u_{3,n}^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_n^{(k,p,q)} = \bar{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_{1,n}^{(k,p,q)} \\ v_{2,n}^{(k,p,q)} \\ v_{3,n}^{(k,p,q)} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

а вектор неизвестных во всех узлах элемента

$$\bar{U}^{(k,i,j)} = \bar{U}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k,i,j)} \\ \bar{v}_n^{(k,i,j)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\text{где} \quad \bar{u}_n^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,n}^{(k,i,j)} \\ \bar{u}_{2,n}^{(k,i,j)} \\ \bar{u}_{3,n}^{(k,i,j)} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\bar{v}_n^{(k,i,j)} = \bar{v}_n^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,n}^{(k,i,j)} \\ \bar{v}_{2,n}^{(k,i,j)} \\ \bar{v}_{3,n}^{(k,i,j)} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)} = \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_{p,n}^{(k,i,j)} \\ u_{p,n}^{(k,i+1,j)} \\ u_{p,n}^{(k,i,j+1)} \\ u_{p,n}^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3; \quad (2.7)$$

$$\bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)} = \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_{p,n}^{(k,i,j)} \\ v_{p,n}^{(k,i+1,j)} \\ v_{p,n}^{(k,i,j+1)} \\ v_{p,n}^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

В простейшем случае поля $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ и $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$ по сечению ДККЭ аппроксими-

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

руются полиномами первого порядка, зависящими от двух аргументов (билинейная аппроксимация), т.е. имеем:

$$\begin{aligned} u_p^{(k,i,j)} &= u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = u_p^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \alpha_{0,0,p}^{(k,i,j)} + \alpha_{1,0,p}^{(k,i,j)} t_1 + \alpha_{0,1,p}^{(k,i,j)} t_2 + \alpha_{1,1,p}^{(k,i,j)} t_1 t_2, \\ &p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} v_p^{(k,i,j)} &= v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = v_p^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \beta_{0,0,p}^{(k,i,j)} + \beta_{1,0,p}^{(k,i,j)} t_1 + \beta_{0,1,p}^{(k,i,j)} t_2 + \beta_{1,1,p}^{(k,i,j)} t_1 t_2, \\ &p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j} \end{aligned} \quad (2.10)$$

или иначе в матрично-векторной форме

$$u_p^{(k,i,j)} = \tilde{t}^T \bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}; \quad (2.11)$$

$$v_p^{(k,i,j)} = \tilde{t}^T \bar{\beta}_p^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } \bar{\alpha}_p^{(k,i,j)} = [\alpha_{0,0,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{1,0,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{0,1,p}^{(k,i,j)} \quad \alpha_{1,1,p}^{(k,i,j)}]^T; \quad (2.13)$$

$$\bar{\beta}_p^{(k,i,j)} = [\beta_{0,0,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{1,0,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{0,1,p}^{(k,i,j)} \quad \beta_{1,1,p}^{(k,i,j)}]^T; \quad (2.14)$$

$$\tilde{t} = [1 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_1 t_2]^T; \quad (2.15)$$

$\bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}$ и $\bar{\beta}_p^{(k,i,j)}$ – векторы коэффициентов.

Очевидно, имеют место соотношения:

$$\bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)} = C \bar{\alpha}_p^{(k,i,j)}, \quad \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)} = C \bar{\beta}_p^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

$$\text{где } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$u_p^{(k,i,j)} = \tilde{t}^T C^{-1} \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}; \quad (2.14)$$

$$v_p^{(k,i,j)} = \tilde{t}^T C^{-1} \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j} \quad (2.15)$$

или

$$u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3), \quad p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}; \quad (2.16)$$

$$v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3), \quad p = 1, 2, 3, (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}; \quad (2.17)$$

где

$$N = N(t_1, t_2) = \tilde{t}^T C^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.18)$$

– матрица функций формы («поперечных» по отношению к основному направлению) по сечению ДККЭ с элементами

$$\begin{aligned} N_1(t_1, t_2) &= 1 - t_1 - t_2 + t_1 t_2; \quad N_2(t_1, t_2) = t_1 - t_1 t_2; \\ N_3(t_1, t_2) &= t_2 - t_1 t_2; \quad N_4(t_1, t_2) = t_1 t_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Матрица (2.18) после переобозначений также представима в виде

$$N = N(t_1, t_2) = \tilde{t}^T N_0, \quad \text{где } N_0 = C^{-1}. \quad (2.20)$$

Формулы (2.16)-(2.17) можно иначе переписать следующим образом:

$$u_p^{(k,i,j)} = u_{p,n}^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 u_p^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 u_p^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} u_p^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3; \quad (2.21)$$

$$v_p^{(k,i,j)} = v_{p,n}^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 v_p^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 v_p^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} v_p^{(k,i,j)}, \quad p = 1, 2, 3; \quad (2.22)$$

где $\Delta_1 u_p^{(k,i,j)} = u_p^{(k,i,j+1)} - u_p^{(k,i,j)}$;

$\Delta_2 u_p^{(k,i,j)} = u_p^{(k,i,j+1)} - u_p^{(k,i,j)}$;

$$\Delta_{12} u_p^{(k,i,j)} = u_p^{(k,i+1,j+1)} - u_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 u_p^{(k,i,j)}; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 v_p^{(k,i,j)} &= v_p^{(k,i+1,j)} - v_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_2 v_p^{(k,i,j)} &= v_p^{(k,i,j+1)} - v_p^{(k,i,j)}; \\ \Delta_{12} v_p^{(k,i,j)} &= v_p^{(k,i+1,j+1)} - v_p^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 v_p^{(k,i,j)}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Также можно обосновать справедливость важных для последующего изложения соотношений (ниже $(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}$):

$$\bar{u}^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N_n(t_1, t_2) \bar{u}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.25)$$

$$\bar{v}^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N_n(t_1, t_2) \bar{v}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned}N_n(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N(t_1, t_2) = \\ &= \begin{bmatrix} N(t_1, t_2) & 0 & 0 \\ 0 & N(t_1, t_2) & 0 \\ 0 & 0 & N(t_1, t_2) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.27)$$

$\otimes$ – символ, обозначающий операцию прямого произведения матриц;

$$\bar{u}^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \\ u_2^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \\ u_3^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

$$\bar{v}^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \\ v_2^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \\ v_3^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Руководствуясь (2.18) и (2.27) можем записать:

$$N_n = N_n(t_1, t_2) = T(t_1, t_2) N_{0,n}, \quad (2.30)$$

где

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \bar{t}^T = \begin{bmatrix} \bar{t}^T & 0 & 0 \\ 0 & \bar{t}^T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{t}^T \end{bmatrix}; \quad (2.31)$$

$$N_{0,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes N_0 = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Введем обозначения:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

На основании формул (1.9), (1.12) и (2.16)-(2.17) выражения для частных производных первого порядка от неизвестных функций по переменным x_1 , x_2 и x_3 записываются следующим образом (ниже $(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}$):

$$\begin{aligned}\partial_1 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\partial_2 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\partial_1 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}\partial_2 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3), \end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\text{где} \quad N^{(p,q)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^p}{\partial t_1^p} \frac{\partial^q}{\partial t_2^q} N(t_1, t_2). \quad (3.7)$$

Производные (3.7) от (2.19) находятся поэлементно:

$$\begin{aligned}N_1^{(1,0)}(t_1, t_2) &= -1 + t_2; \quad N_2^{(1,0)}(t_1, t_2) = 1 - t_2; \\ N_3^{(1,0)}(t_1, t_2) &= -t_2; \quad N_4^{(1,0)}(t_1, t_2) = t_2; \end{aligned}\quad (3.8)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

$$\begin{aligned} N_1^{(0,1)}(t_1, t_2) &= -1 + t_1; \quad N_2^{(0,1)}(t_1, t_2) = -t_1; \\ N_3^{(0,1)}(t_1, t_2) &= 1 - t_1; \quad N_4^{(0,1)}(t_1, t_2) = t_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)]; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} F_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2) &= (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times \\ &\times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) - \\ &- N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С учетом (3.9)-(3.10) можем переписать (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6) в виде

$$\partial_1 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.12)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = F_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.13)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (3.14)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = F_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3). \quad (3.15)$$

Соответствующие узловые функции определяются с учетом операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (3.4), (3.12)-(3.14):

– «срединные» элементы сетки
($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_p^{(k,i,j)} &= \tilde{F}_1^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 u_p^{(k,i,j)} &= \tilde{F}_2^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,i,j)} = v_p^{(k,i,j)}; \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 v_p^{(k,i,j)} &= \tilde{F}_1^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i,j)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 v_p^{(k,i,j)} &= \tilde{F}_2^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i,j)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,i,j} \theta_{k,i,j} F_q^{(k,i,j)}(t_1, t_2), \quad q = 1, 2, \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.21)$$

$$\varpi_{k,i,j} = \vartheta_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1}, \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.22)$$

$$\vartheta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1; \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{cases} \quad (3.23)$$

– элементы «левой вертикальной границы»
($i = 1; j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_p^{(k,1,j)} &= \tilde{F}_1^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,1,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 u_p^{(k,1,j)} &= \tilde{F}_2^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,1,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,1,j)} = v_p^{(k,1,j)}; \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 v_p^{(k,1,j)} &= \tilde{F}_1^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,1,j)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,1,j)} = \tilde{F}_2^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,1,j)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \quad (3.28)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,1,j)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,1,j} \theta_{k,1,j} F_q^{(k,1,j)}(t_1, t_2), \quad q = 1, 2, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.29)$$

$$\varpi_{k,1,j} = \vartheta_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.30)$$

$$\vartheta_{k,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} = 0 \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.31)$$

– элементы «правой вертикальной границы» ($i = N_{1,k}; j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\partial_1 u_p^{(k,N_{1,k},j)} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j-1)}(x_3) + \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j)}(x_3); \quad (3.32)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,N_{1,k},j)} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j-1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j)}(x_3); \quad (3.33)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,N_{1,k},j)} = v_p^{(k,N_{1,k},j)}; \quad (3.34)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,N_{1,k},j)} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j-1)}(x_3) + \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j)}(x_3); \quad (3.35)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,N_{1,k},j)} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j-1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,j)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},j)}(x_3), \quad (3.36)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,N_{1,k}-1,j)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,N_{1,k}-1,j} \theta_{k,N_{1,k}-1,j} F_q^{(k,N_{1,k}-1,j)}(t_1, t_2), \quad q = 1, 2, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.37)$$

$$\varpi_{k,N_{1,k}-1,j} = \vartheta_{k,N_{1,k}-1,j} (\theta_{k,N_{1,k}-1,j-1} + \theta_{k,N_{1,k}-1,j})^{-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (3.38)$$

$$\vartheta_{k,N_{1,k}-1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,N_{1,k}-1,j-1} + \theta_{k,N_{1,k}-1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,N_{1,k}-1,j-1} + \theta_{k,N_{1,k}-1,j} = 0 \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1, \quad (3.39)$$

– элементы «нижней горизонтальной границы» ($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; j = 1$):

$$\partial_1 u_p^{(k,i,1)} = \tilde{F}_1^{(k,i-1,1)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,1)}(x_3) + \tilde{F}_1^{(k,i,1)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,1)}(x_3); \quad (3.40)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,i,1)} = \tilde{F}_2^{(k,i-1,1)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,i,1)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,1)}(x_3); \quad (3.41)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,i,1)} = v_p^{(k,i,1)}; \quad (3.42)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,i,1)} = \tilde{F}_1^{(k,i-1,1)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,1)}(x_3) + \tilde{F}_1^{(k,i,1)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,1)}(x_3); \quad (3.43)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,i,1)} = \tilde{F}_2^{(k,i-1,1)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,i,1)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,1)}(x_3); \quad (3.44)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,i,1)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,i,1} \theta_{k,i,1} F_q^{(k,i,1)}(t_1, t_2), \quad q = 1, 2, \quad i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad (3.45)$$

$$\varpi_{k,i,1} = \vartheta_{k,i,1} (\theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1, \quad (3.46)$$

$$\vartheta_{k,i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,1} + \theta_{k,i,1} = 0 \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad (3.47)$$

– элементы «верхней горизонтальной границы» ($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; j = N_{2,k}$):

$$\partial_1 u_p^{(k,i,N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(x_3) + \tilde{F}_1^{(k,i,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,N_{2,k})}(x_3); \quad (3.48)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,i,N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(x_3) + \tilde{F}_2^{(k,i,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,N_{2,k})}(x_3); \quad (3.49)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

$$\begin{aligned} \partial_3 u_p^{(k,i,N_{2,k})} &= v_p^{(k,i,N_{2,k})}; \quad (3.50) \\ \partial_1 v_p^{(k,i,N_{2,k})} &= \tilde{F}_1^{(k,i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_1^{(k,i,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,N_2)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 v_p^{(k,i,N_{2,k})} &= \tilde{F}_2^{(k,i-1,N_2-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i-1,N_{2,k}-1)}(x_3) + \\ &+ \tilde{F}_2^{(k,i,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,N_2)}(x_3); \end{aligned} \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2^{(k,i,N_{2,k}-1)}(t_1, t_2) &= \\ &= \varpi_{k,i,N_{2,k}-1} \theta_{k,i,N_{2,k}-1} F_2^{(k,i,N_{2,k}-1)}(t_1, t_2), \quad (3.53) \\ i &= 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \\ \varpi_{k,i,N_{2,k}-1} &= \vartheta_{k,i,N_{2,k}-1} (\theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1})^{-1}, \\ i &= 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\vartheta_{k,i,N_{2,k}-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k,i-1,N_{2,k}-1} + \theta_{k,i,N_{2,k}-1} = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

– «угловая точка границы» $i = 1$; $j = 1$:

$$\partial_1 u_p^{(k,1,1)} = \tilde{F}_1^{(k,1,1)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.56)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,1,1)} = \tilde{F}_2^{(k,1,1)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.57)$$

$$[\partial_3 u_p^{(k)}]^{(1,1)} = v_p^{(k,1,1)}; \quad (3.58)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,1,1)} = \tilde{F}_1^{(k,1,1)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,1)}(x_3); \quad (3.59)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,1,1)} = \tilde{F}_2^{(k,1,1)}(0,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,1)}(x_3), \quad (3.60)$$

$$\text{где } \tilde{F}_1^{(k,1,1)}(0,0) = \theta_{k,1,1} F_1^{(k,1,1)}(0,0), \quad q = 1, 2; \quad (3.61)$$

– «угловая точка границы» $i = 1$; $j = N_{2,k}$:

$$\partial_1 u_p^{(k,1,N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_3); \quad (3.62)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,1,N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_3); \quad (3.63)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,1,N_{2,k})} = v_p^{(k,1,N_{2,k})}; \quad (3.64)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,1,N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_3); \quad (3.65)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,1,N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_3), \quad (3.66)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1) = \theta_{k,1,N_{2,k}-1} F_q^{(k,1,N_{2,k}-1)}(0,1), \quad q = 1, 2; \quad (3.67)$$

– «угловая точка границы» $i = N_{1,k}$; $j = 1$:

$$\partial_1 u_p^{(k,N_{1,k},1)} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_3); \quad (3.68)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,N_{1,k},1)} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_3); \quad (3.69)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,N_{1,k},1)} = v_p^{(k,N_{1,k},1)}; \quad (3.70)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,N_{1,k},1)} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_3); \quad (3.71)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,N_{1,k},1)} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_3), \quad (3.72)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0) = \theta_{k,N_{1,k}-1,1} F_q^{(k,N_{1,k}-1,1)}(1,0), \quad q = 1, 2; \quad (3.73)$$

– «угловая точка границы» $i = N_{1,k}$; $j = N_{2,k}$:

$$\partial_1 u_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_3); \quad (3.74)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_3); \quad (3.75)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})} = v_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}; \quad (3.76)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_3); \quad (3.77)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,N_{1,k},N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{v}_{p,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_3), \quad (3.78)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_q^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1) &= \\ &= \theta_{k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1} F_q^{(k,N_{1,k}-1,N_{2,k}-1)}(1,1), \quad q = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

4. АППРОКСИМАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

Выражения для деформаций и напряжений на элементе $\omega_{k,i,j}$ на основании известных соотношений [9-15] записываются следующим образом:

– деформации

$$\varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = [\partial_1 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3); \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = [\partial_2 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3); \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = v_3^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3); \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \varepsilon_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + [\partial_2 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \varepsilon_{3,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + v_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \varepsilon_{3,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= 0.5 \cdot ([\partial_2 u_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + v_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)); \end{aligned} \quad (4.6)$$

– напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j})[\partial_1 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ [\partial_2 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + v_3^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j})[\partial_2 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ [\partial_1 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + v_3^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &+ (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j})v_3^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ [\partial_1 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + [\partial_2 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \{ [\partial_2 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + \\ &\quad + [\partial_1 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{3,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \{ v_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + [\partial_1 u_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) \}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{3,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \{ v_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + [\partial_2 u_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Приведенные к узлам деформации $\varepsilon_{p,q,n}^{(k,i,j)}$, $p=1, 2, 3$; $q=1, 2, 3$ и напряжения $\sigma_{p,q,n}^{(k,i,j)}$, $p=1, 2, 3$; $q=1, 2, 3$ определяются аналогично частным производным от искомым функций (см. формулы пункта 3) с учетом соответствующих операций осреднения.

5. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВЕКТОРА УЗЛОВЫХ НАГРУЗОК ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим произвольный элемент модели $\omega_{k,i,j}$.

Вектор нагрузок (сосредоточенные силы) в (p, q) -ом узле имеет вид:

$$\bar{R}_n^{(k,p,q)} = \bar{R}_n^{(k,p,q)}(x_3) = [(\bar{R}_{u,n}^{(k,p,q)})^T (\bar{R}_{v,n}^{(k,p,q)})^T]^T, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_{u,n}^{(k,p,q)} &= \bar{R}_{u,n}^{(k,p,q)}(x_3) = \\ &= [R_{u,1}^{(k,p,q)} R_{u,2}^{(k,p,q)} R_{u,3}^{(k,p,q)}]^T; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{v,n}^{(k,p,q)} &= \bar{R}_{v,n}^{(k,p,q)}(x_3) = \\ &= [R_{v,1}^{(k,p,q)} R_{v,2}^{(k,p,q)} R_{v,3}^{(k,p,q)}]^T, \end{aligned} \quad (5.3)$$

причем

$$R_{v,1}^{(k,p,q)} = 0; \quad R_{v,2}^{(k,p,q)} = 0; \quad R_{v,3}^{(k,p,q)} = 0; \quad (5.4)$$

$R_{u,1}^{(k,p,q)}$, $R_{u,2}^{(k,p,q)}$ и $R_{u,3}^{(k,p,q)}$ – значения сосредоточенных нагрузок, приложенных в (p, q) -ом узле по направлению осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 соответственно.

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

Вектор нагрузок во всех узлах ДККЭ определяется в следующей форме:

$$\bar{R}^{(k,p,q)} = \bar{R}^{(k,p,q)}(x_3) = [(\bar{R}_u^{(k,p,q)})^T (\bar{R}_v^{(k,p,q)})^T]^T, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_u^{(k,p,q)} = \bar{R}_u^{(k,p,q)}(x_3) = \\ = [R_{u,1}^{(k,p,q)} R_{u,2}^{(k,p,q)} R_{u,3}^{(k,p,q)} \\ R_{u,1}^{(k,p+1,q)} R_{u,2}^{(k,p+1,q)} R_{u,3}^{(k,p+1,q)} \\ R_{u,1}^{(k,p,q+1)} R_{u,2}^{(k,p,q+1)} R_{u,3}^{(k,p,q+1)} \\ R_{u,1}^{(k,p+1,q+1)} R_{u,2}^{(k,p+1,q+1)} R_{u,3}^{(k,p+1,q+1)}]^T; \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\bar{R}_v^{(k,p,q)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (5.7)$$

6. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Прежде всего, отметим, что методика построения матриц жесткости для ДККЭ в частном случае прямоугольного поперечного (по отношению к основному направлению) сечения достаточно подробно описана в [2]. Ниже будет рассматриваться более общий случай, когда поперечное сечение ДККЭ представляет собой произвольный четырехугольник.

Исходный функционал Лагранжа [9-13] можно представить в виде суммы функционалов, определенных на полученных дискретно-континуальных конечных элементах на соответствующих фрагментах конструкции:

$$\Phi(\bar{U}_n) = \sum_{k=1}^{n_k-1} \Phi^{(k)}(\bar{U}_n^{(k)}), \quad (6.1)$$

$$\text{где } \Phi^{(k)}(\bar{U}_n^{(k)}) = \sum_{i=1}^{N_{1,k}} \sum_{j=1}^{N_{2,k}} \Phi^{(k,i,j)}(\bar{U}_n^{(k,i,j)}), \quad (6.2)$$

$$\bar{U}_n = [(\bar{U}_n^{(1)})^T (\bar{U}_n^{(2)})^T (\bar{U}_n^{(n_k-1)})^T]^T; \quad (6.3)$$

$$\bar{U}_n^{(k)} = \bar{U}_n^{(k)}(x_3) = [(\bar{u}_n^{(k)})^T (\bar{v}_n^{(k)})^T]^T, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^{(k)} = \bar{u}_n^{(k)}(x_3) = \\ = [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \dots (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},1)})^T \dots \\ \dots (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \dots (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},2)})^T \dots \\ \dots (\bar{u}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T (\bar{u}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \dots \\ (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},N_{2,k})})^T]^T; \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_n^{(k)} = \bar{v}_n^{(k)}(x_3) = \\ = [(\bar{v}_n^{(k,1,1)})^T (\bar{v}_n^{(k,2,1)})^T \dots (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},1)})^T \dots \\ \dots (\bar{v}_n^{(k,1,2)})^T (\bar{v}_n^{(k,2,2)})^T \dots (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},2)})^T \dots \\ \dots (\bar{v}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T (\bar{v}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \dots \\ (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},N_{2,k})})^T]^T; \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(k,i,j)}(\bar{U}_n^{(k,i,j)}) = \\ = 0.5 \cdot (K^{(k,i,j)} \bar{U}_n^{(k,i,j)}, \bar{U}_n^{(k,i,j)}) - (\bar{R}_n^{(k,i,j)}, \bar{U}_n^{(k,i,j)}); \end{aligned} \quad (6.7)$$

$K^{(k,i,j)}$ – (локальная) матрица жесткости дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k,i,j}$.

Формулу (6.3) для дальнейшего изложения удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(k,i,j)}(\bar{U}_n^{(k,i,j)}) = \\ = \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{U}_n^{(k,i,j)}) - (\bar{R}_n^{(k,i,j)}, \bar{U}_n^{(k,i,j)}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где

$$\tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{U}_n^{(k,i,j)}) = 0.5 \cdot (K^{(k,i,j)} \bar{U}_n^{(k,i,j)}, \bar{U}_n^{(k,i,j)}) \quad (6.9)$$

– соответствующая квадратичная часть.

Формирование указанной матрицы жесткости ДККЭ производится методом базисных вариаций. Формула для определения ее элементов:

$$\begin{aligned} (K^{(k,i,j)})_{p,q} = \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_p + \bar{e}_q) - \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_p) - \\ - \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_q) + \tilde{\Phi}^{(k,i,j)}(\bar{e}_0), \\ p = 1, 2, \dots, 24; \quad q = 1, 2, \dots, 24, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$K_k^{(i,j)} = \begin{bmatrix} K_{uu}^{k,1,1} & K_{uv}^{k,1,1} & K_{uu}^{k,1,2} & K_{uv}^{k,1,2} & K_{uu}^{k,1,3} & K_{uv}^{k,1,3} & K_{uu}^{k,1,4} & K_{uv}^{k,1,4} \\ K_{vu}^{k,1,1} & K_{vv}^{k,1,1} & K_{vu}^{k,1,2} & K_{vv}^{k,1,2} & K_{vu}^{k,1,3} & K_{vv}^{k,1,3} & K_{vu}^{k,1,4} & K_{vv}^{k,1,4} \\ K_{uu}^{k,2,1} & K_{uv}^{k,2,1} & K_{uu}^{k,2,2} & K_{uv}^{k,2,2} & K_{uu}^{k,2,3} & K_{uv}^{k,2,3} & K_{uu}^{k,2,4} & K_{uv}^{k,2,4} \\ K_{vu}^{k,2,1} & K_{vv}^{k,2,1} & K_{vu}^{k,2,2} & K_{vv}^{k,2,2} & K_{vu}^{k,2,3} & K_{vv}^{k,2,3} & K_{vu}^{k,2,4} & K_{vv}^{k,2,4} \\ K_{uu}^{k,3,1} & K_{uv}^{k,3,1} & K_{uu}^{k,3,2} & K_{uv}^{k,3,2} & K_{uu}^{k,3,3} & K_{uv}^{k,3,3} & K_{uu}^{k,3,4} & K_{uv}^{k,3,4} \\ K_{vu}^{k,3,1} & K_{vv}^{k,3,1} & K_{vu}^{k,3,2} & K_{vv}^{k,3,2} & K_{vu}^{k,3,3} & K_{vv}^{k,3,3} & K_{vu}^{k,3,4} & K_{vv}^{k,3,4} \\ K_{uu}^{k,4,1} & K_{uv}^{k,4,1} & K_{uu}^{k,4,2} & K_{uv}^{k,4,2} & K_{uu}^{k,4,3} & K_{uv}^{k,4,3} & K_{uu}^{k,4,4} & K_{uv}^{k,4,4} \\ K_{vu}^{k,4,1} & K_{vv}^{k,4,1} & K_{vu}^{k,4,2} & K_{vv}^{k,4,2} & K_{vu}^{k,4,3} & K_{vv}^{k,4,3} & K_{vu}^{k,4,4} & K_{vv}^{k,4,4} \end{bmatrix}$$

Рисунок 6.1. Структура матрицы жесткости $K_k^{(i,j)}$ ДККЭ.

где $\bar{e}_j, \bar{e}_0$ – 24-х мерные векторы, элементы которых определяются по формуле

$$(e_j)_l = \delta_{j,l}; (e_0)_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 24; \quad (6.11)$$

$\delta_{j,l}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = l \\ 0, & \text{если } j \neq l. \end{cases}$$

$$K_{vu}^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} K_{vu}^{k,1,1} & K_{vu}^{k,1,2} & K_{vu}^{k,1,3} & K_{vu}^{k,1,4} \\ K_{vu}^{k,2,1} & K_{vu}^{k,2,2} & K_{vu}^{k,2,3} & K_{vu}^{k,2,4} \\ K_{vu}^{k,3,1} & K_{vu}^{k,3,2} & K_{vu}^{k,3,3} & K_{vu}^{k,3,4} \\ K_{vu}^{k,4,1} & K_{vu}^{k,4,2} & K_{vu}^{k,4,3} & K_{vu}^{k,4,4} \end{bmatrix}; \quad (6.15)$$

$$K_{vv}^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} K_{vv}^{k,1,1} & K_{vv}^{k,1,2} & K_{vv}^{k,1,3} & K_{vv}^{k,1,4} \\ K_{vv}^{k,2,1} & K_{vv}^{k,2,2} & K_{vv}^{k,2,3} & K_{vv}^{k,2,4} \\ K_{vv}^{k,3,1} & K_{vv}^{k,3,2} & K_{vv}^{k,3,3} & K_{vv}^{k,3,4} \\ K_{vv}^{k,4,1} & K_{vv}^{k,4,2} & K_{vv}^{k,4,3} & K_{vv}^{k,4,4} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Структура матрицы жесткости $K_k^{(i,j)}$ ДККЭ показана на рис. 6.1, где $K_{uu}^{k,l,m}, K_{uv}^{k,l,m}, K_{vu}^{k,l,m}, K_{vv}^{k,l,m}, \quad l, m = 1, 2, 3, 4$ – матрицы третьего порядка.

На основе матрицы жесткости ДККЭ (6.12) формируются соответствующие поэлементные матрицы $K_{uu}^{(k,i,j)}, K_{uv}^{(k,i,j)}, K_{vu}^{(k,i,j)}, K_{vv}^{(k,i,j)}$ 12-го порядка:

$$K_{uu}^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} K_{uu}^{k,1,1} & K_{uu}^{k,1,2} & K_{uu}^{k,1,3} & K_{uu}^{k,1,4} \\ K_{uu}^{k,2,1} & K_{uu}^{k,2,2} & K_{uu}^{k,2,3} & K_{uu}^{k,2,4} \\ K_{uu}^{k,3,1} & K_{uu}^{k,3,2} & K_{uu}^{k,3,3} & K_{uu}^{k,3,4} \\ K_{uu}^{k,4,1} & K_{uu}^{k,4,2} & K_{uu}^{k,4,3} & K_{uu}^{k,4,4} \end{bmatrix}; \quad (6.13)$$

$$K_{uv}^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} K_{uv}^{k,1,1} & K_{uv}^{k,1,2} & K_{uv}^{k,1,3} & K_{uv}^{k,1,4} \\ K_{uv}^{k,2,1} & K_{uv}^{k,2,2} & K_{uv}^{k,2,3} & K_{uv}^{k,2,4} \\ K_{uv}^{k,3,1} & K_{uv}^{k,3,2} & K_{uv}^{k,3,3} & K_{uv}^{k,3,4} \\ K_{uv}^{k,4,1} & K_{uv}^{k,4,2} & K_{uv}^{k,4,3} & K_{uv}^{k,4,4} \end{bmatrix}; \quad (6.14)$$

7. ФОРМИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ВЕКТОРОВ

Формирование глобальных матриц $K_{uu}^{(k)}, K_{uv}^{(k)}, K_{vu}^{(k)}$ и $K_{vv}^{(k)}$ $3N_{1,k}N_{2,k}$ -го порядка ($k = 1, 2, \dots, n_k - 1$) всей системы дискретно-континуальных элементов, аппроксимирующих конструкцию осуществляется аналогично стандартной методике формирования глобальной матрицы жесткости (метод конечных вкладов – суммирование с накоплением [6-8, 13]).

Заметим, что при наличии в рассматриваемой конструкции «пустот» (т.е. дискретно-континуальных элементов с нулевыми значениями характеристической функции) матрица $K_{vv}^{(k)}$ будет вырожденной, что, очевидно, приведет к невозможности вычисления $(K_{vv}^{(k)})^{-1}$. В этой связи необходима коррекция матрицы $K_{vv}^{(k)}$. Алгоритм этой коррекции следующий:

1. Последовательно перебираем

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

$$i = 1, 2, \dots, 3N_{1,k}N_{2,k}.$$

2. Для каждого значения i следующее: если все элементы i -й строки матрицы $K_{vv}^{(k)}$ нулевые и все элементы i -го столбца матрицы $K_{vv}^{(k)}$ также нулевые, то следует положить $(K_{vv}^{(k)})_{i,i} = 1$, где $(K_{vv}^{(k)})_{i,i}$ – элемент матрицы $K_{vv}^{(k)}$, расположенный в i -й строке и i -м столбце.

Континуальные операторы [3-5] и матрицы сопоставлены так:

$$\mathcal{L}_{k,uu} \Rightarrow K_{uu}^{(k)}; \quad \mathcal{L}_{k,uv} \Rightarrow K_{uv}^{(k)}; \quad \mathcal{L}_{k,vu} \Rightarrow K_{vu}^{(k)}; \\ \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \Rightarrow \tilde{K}_{uv}^{(k)}; \quad \mathcal{L}_{k,vv} \Rightarrow K_{vv}^{(k)}; \quad (7.1)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \mathcal{L}_{k,uu} & \mathcal{L}_{k,vv}^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_{k,uv} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} K_{uu}^{(k)} & (K_{vv}^{(k)})^{-1} \tilde{K}_{uv}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

где E – тождественный оператор и единичная матрица соответствующего порядка;

$$\tilde{K}_{uv}^{(k)} = K_{uv}^{(k)} - K_{vu}^{(k)}. \quad (7.3)$$

Глобальный вектор узловых нагрузок формируется по формуле

$$\bar{R}_n^{(k)} = \bar{R}_n^{(k)}(x_3) = [(\bar{R}_{u,n}^{(k)})^T \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k)})^T]^T, \quad (7.4)$$

$$\bar{R}_{u,n}^{(k)} = \bar{R}_{u,n}^{(k)}(x_3) = \\ = [(\bar{R}_{u,n}^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,1)})^T \\ (\bar{R}_{u,n}^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,N_2)})^T]^T; \quad (7.5)$$

$$\bar{R}_{v,n}^{(k)} = \bar{R}_{v,n}^{(k)}(x_3) = \\ = [(\bar{R}_{v,n}^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,N_1,1)})^T \\ (\bar{R}_{v,n}^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ \dots \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{v,n}^{(k,N_1,N_2)})^T]^T, \quad (7.6)$$

$$\text{т.е.} \quad \bar{R}_{v,n}^{(k)} = 0. \quad (7.7)$$

Пусть $x_{3,q,k}^f$, $q = 1, 2, \dots, n_q^{(k)}$ – координаты нагруженных поперечных сечений рассматриваемой конструкции. Следовательно, можем записать:

$$\bar{R}_{u,n}^{(k)} = \bar{R}_{u,n}^{(k)}(x_3) = \sum_{q=1}^{n_q^{(k)}} \bar{R}_{q,u,n}^{(k)} \delta(x_3 - x_{3,q,k}^f), \quad (7.8)$$

где $\bar{R}_{q,u,n}^{(k)}$ – вектор значений узловых нагрузок, приложенных в сечении с координатой $x_{3,q,k}^f$, структура которого аналогична вектору $\bar{R}_{u,n}^{(k)}$.

8. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Статические граничные условия на части границы, расположенной вдоль основного направления конструкции, учитываются, как правило, в векторе узловых нагрузок. Для решения задачи также должны быть приняты во внимание статические граничные условия на остальных элементах границы (если заданы) и кинематические граничные условия.

Пусть $x_{3,k}^b$, $k = 1, 2, \dots, n_k$ – координаты граничных поперечных сечений конструкции. Граничные условия в них записываются в виде

$$B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (8.1)$$

$$B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (8.2)$$

где B_k^- , B_k^+ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий при $k = 2, \dots, n_k - 1$ имеющие размер $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k}) \times 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}$ и $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k}) \times 6N_{1,k}N_{2,k}$ соответственно; $\bar{g}_k^-$, $\bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$ – заданные векторы правых частей граничных условий длиной $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k})$; B_1^+ , $B_{n_k}^-$ –

заданные матрицы коэффициентов граничных условий, имеющие размеры $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}) \times 6N_{1,1}N_{2,1}$ и $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}) \times 6N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}$; $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные векторы правых частей граничных условий длиной $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1})$.

9. ФОРМИРОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Итак, согласно (7.1)-(7.3) континуальной постановке соответствует дискретно-континуальная постановка в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (\bar{u}_n^{(k)})' = \bar{v}_n^{(k)} \\ K_{vv}^{(k)} (\bar{v}_n^{(k)})' = K_{uu}^{(k)} \bar{u}_n^{(k)} + \tilde{K}_{uv}^{(k)} \bar{v}_n^{(k)} - \bar{R}_{u,n}^{(k)}, \\ k = 1, \dots, n_k - 1, \end{cases} \quad (9.1)$$

$$\text{где } \tilde{K}_{uv}^{(k)} = K_{uv}^{(k)} - \tilde{K}_{vu}^{(k)}; \quad K_{vu}^{(k)} = (K_{uv}^{(k)})^*; \quad (9.2)$$

$$(\bar{u}_n^{(k)})' = \partial_3 \bar{u}_n^{(k)}; \quad (\bar{v}_n^{(k)})' = \partial_3 \bar{v}_n^{(k)}. \quad (9.3)$$

Системы (9.1) могут быть записаны иначе в более удобной форме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\bar{u}_n^{(k)})' \\ (\bar{v}_n^{(k)})' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & E \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} K_{uu}^{(k)} & (K_{vv}^{(k)})^{-1} \tilde{K}_{uv}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_n^{(k)} \\ \bar{v}_n^{(k)} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} \bar{R}_{u,n}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n_k - 1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Вводя обозначения

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} K_{uu}^{(k)} & (K_{vv}^{(k)})^{-1} \tilde{K}_{uv}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (9.5)$$

$$\bar{R}_n^{(k)} = \bar{R}_n^{(k)}(x_3) = - \begin{bmatrix} 0 \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} \bar{R}_{u,n}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (9.6)$$

$$(\bar{U}_n^{(k)})' = \partial_3 \bar{U}_n^{(k)}. \quad (9.7)$$

и рассматривая соотношения (9.4) совместно с граничными условиями (8.1)-(8.2), заключаем, что расчет трехмерной конструкции в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов сводится к решению набора $(k = 1, \dots, n_k - 1)$ многоточечных краевых задач для систем $6N_{1,k}N_{2,k}$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} (\bar{U}_n^{(k)})'(x_3) = A_k \bar{U}_n^{(k)}(x_3) + \bar{R}_n^{(k)}(x_3), \\ k = 1, 2, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,n_k}^b - 0) = \\ = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (9.8)$$

10. ОБ УЧЕТЕ УПРУГОПОДАТЛИВЫХ ОПОР

Пусть $C_{k,i,j}$ – матрица характеристик упругоподатливых опор для (i, j) -го узла модели на подобласти Ω_k ,

$$C_{k,i,j} = \text{diag}\{c_{1,k,i,j}, c_{2,k,i,j}, c_{3,k,i,j}\}. \quad (10.1)$$

Модифицированная матрица коэффициентов разрешающей многоточечной краевой задачи и глобальная матрица C_k^G характеристик упругоподатливых опор всей элементной модели на подобласти Ω_k формируются следующим образом (см. также рис. 10.1):

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ (K_{vv}^{(k)})^{-1} (K_{uu}^{(k)} + C_k^G) & (K_{vv}^{(k)})^{-1} \tilde{K}_{uv}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

$$C_k^G = \begin{bmatrix} C_{k,1,1} & & & & & \\ & C_{k,2,1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & C_{k,N_1,1} & & \\ & & & & C_{k,1,2} & \\ & & & & & C_{k,2,2} & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & C_{k,N_1,2} & \\ & & & & & & & & C_{k,1,N_2} & \\ & & & & & & & & & C_{k,2,N_2} & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & C_{k,N_1,N_2} \end{bmatrix}$$

Рисунок 10.1. Структура матрицы C_k^G .

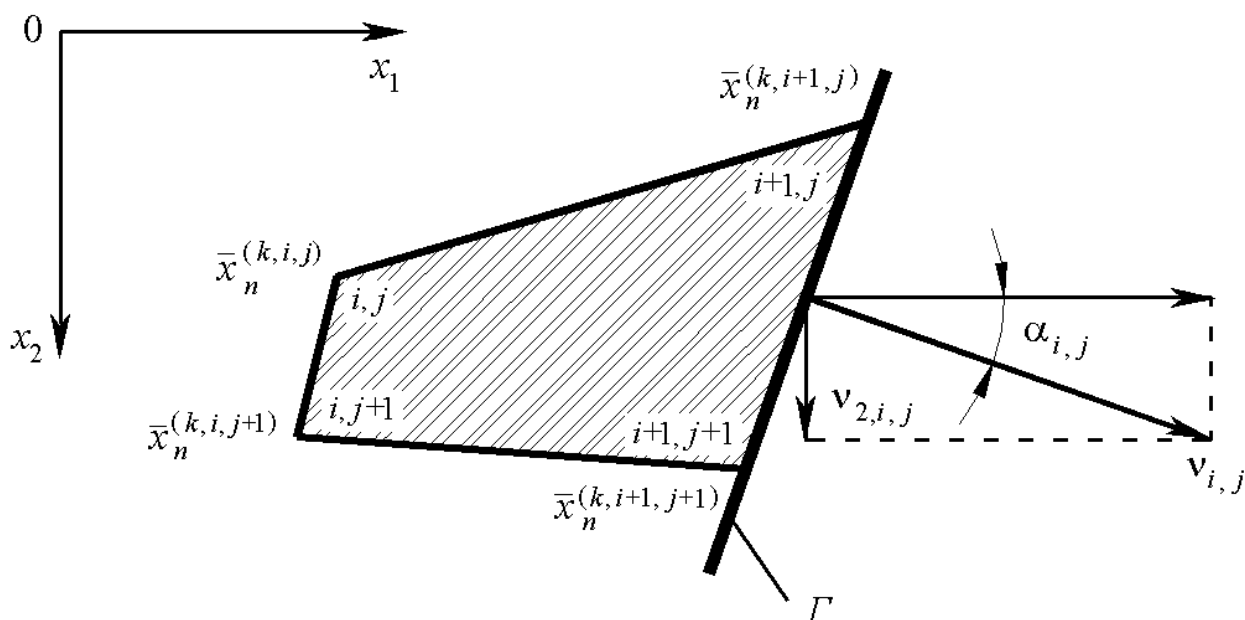


Рисунок 11.1. К заданию граничных условий на свободном крае.

11. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ВДОЛЬ ОСНОВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. ЗАДАНИЕ СТАНДАРТНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Опишем вопросы учета граничных условий вдоль основного направления с позиций указания корректировок, которые вносятся в приведенную ранее постановку (9.7). Описание будем вести на примерах двух простейших типовых случаев: шарнирное закрепле-

ние и свободный край. Пусть для определенности $x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b$.

Свободный край.

Имеем континуальные граничные условия (рис. 11.1):

$$\sigma_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) \cdot l_{1,i,j} + \sigma_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) \cdot l_{2,i,j} = 0; \quad (11.1)$$

$$\sigma_{2,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) \cdot l_{1,i,j} + \sigma_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) \cdot l_{2,i,j} = 0, \quad (11.2)$$

где $l_{1,i,j} = \cos(v_{i,j}, x_1) = \cos \alpha_{i,j}$;

$$l_{2,i,j} = \cos(v_{i,j}, x_2) = \sin \alpha_{i,j}; \quad (11.3)$$

$\nu_{i,j}$ – внешняя нормаль к границе Γ , проходящей через соответствующую грань рассматриваемого дискретно-континуального конечного элемента; $\nu_{1,i,j}$ и $\nu_{2,i,j}$ – соответствующие составляющие этой нормали; $l_{1,i,j}$ и $l_{2,i,j}$ – направляющие косинусы нормали $\nu_{i,j}$. Данный тип граничных условий вдоль основного направления является простейшим с точки зрения учета, а именно, никаких модификаций в постановку (9.7) вносить не требуется, такие граничные условия вдоль основного направления будут учтены автоматически.

Шарнирное закрепление.

Континуальные граничные условия, во всех соответствующих точках границы (т.е. во всех узлах $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ дискретно-континуальной модели таких, что $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)}) \in \Gamma$), очевидно, записываются в следующем виде:

$$u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = 0; \quad u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = 0; \\ u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = 0, \quad x_{3,k}^b \leq x_3 \leq x_{3,k+1}^b. \quad (11.4)$$

В данном случае вместо (9.7) следует использовать постановку

$$\begin{cases} (\bar{U}_n^{(k)})'(x_3) = \chi_k A_k \bar{U}_n^{(k)}(x_3) + \bar{R}_n^{(k)}(x_3), \\ \quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1 \\ B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ \quad = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,n_k}^b - 0) = \\ \quad = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-. \end{cases} \quad (11.5)$$

где χ_k – матрица $6N_{1,k}N_{2,k}$ -го порядка, элементы которой определяются по следующей формуле (ниже (i, j) – номера упомянутых выше узлов):

$$(\chi_k)_{p,q} = \delta_{p,q} - \delta_{p,3N_{1,k}(j-1)+3(i-1)+1} - \\ - \delta_{p,3N_{1,k}(j-1)+3(i-1)+2} - \delta_{p,3N_{1,k}(j-1)+3(i-1)+3}, \\ i = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad j = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}. \quad (11.6)$$

Из соображений совместности неизвестных при задании граничных условий в сечениях, поперечных по отношению к основному направлению, перемещения соответствующих узлов следует задать нулевыми, т.е.

$$u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b) = u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k+1}^b) = 0; \\ u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b) = u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k+1}^b) = 0; \\ u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b) = u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k+1}^b) = 0. \quad (11.7)$$

12. ПЕРЕХОД К НАБОРУ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Матрицы коэффициентов A_k , $k = 1, \dots, n_k - 1$ можно привести к блочно-диагональному виду, выполнив следующую перестановку неизвестных:

$$\bar{U}_n^{(k)}(x_3) \Rightarrow \bar{\tilde{U}}_n^{(k)}(x_3); \quad (12.1)$$

$$\bar{\tilde{U}}_n^{(k)} = \bar{\tilde{U}}_n^{(k)}(x_3) = \\ = [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T (\bar{v}_n^{(k,1,1)})^T \\ (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T (\bar{v}_n^{(k,2,1)})^T \dots \\ (\bar{u}_n^{(k,N_1,1)})^T (\bar{v}_n^{(k,N_1,1)})^T \dots \\ \dots (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T (\bar{v}_n^{(k,1,2)})^T \\ (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T (\bar{v}_n^{(k,2,2)})^T \dots \\ (\bar{u}_n^{(k,N_1,2)})^T (\bar{v}_n^{(k,N_1,2)})^T \dots \\ (\bar{u}_n^{(k,1,N_2)})^T (\bar{v}_n^{(k,1,N_2)})^T \\ (\bar{u}_n^{(k,2,N_2)})^T (\bar{v}_n^{(k,2,N_2)})^T \dots \\ (\bar{u}_n^{(k,N_1,N_2)})^T (\bar{v}_n^{(k,N_1,N_2)})^T]^T. \quad (12.2)$$

Тогда преобразованный набор многоточечных краевых задач имеет вид:

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

$$\left\{ \begin{aligned} (\widetilde{U}_n^{(k)})'(x_3) &= \widetilde{A}_k \widetilde{U}_n^{(k)}(x_3) + \widetilde{R}_n^{(k)}(x_3), \\ &\quad k = 1, 2, \dots, n_k - 1 \\ \widetilde{B}_k^- \widetilde{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + \widetilde{B}_k^+ \widetilde{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) &= \\ &= \widetilde{g}_k^- + \widetilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1 \\ \widetilde{B}_1^+ \widetilde{U}_n^{(1)}(x_{3,1}^b + 0) + \widetilde{B}_{n_k}^- \widetilde{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,n_k}^b - 0) &= \\ &= \widetilde{g}_1^+ + \widetilde{g}_{n_k}^-. \end{aligned} \right. \quad (12.3)$$

где I_G – матрица перестановок, элементы которой определяются таблицей 12.1.

$$\widetilde{A}_k = I_G^T A_k I_G, \quad \widetilde{R}_n^{(k)}(x_3) = I_G \widetilde{R}_n^{(k)}(x_3), \quad (12.4)$$

$$\widetilde{U}_n^{(k)}(x_3) = I_G^T \widetilde{U}_n^{(k)}(x_3), \quad k = 1, \dots, n_k - 1;$$

$$\widetilde{B}_k^- = I_G^T \widetilde{B}_k^- I_G, \quad \widetilde{B}_k^+ = I_G^T \widetilde{B}_k^+ I_G,$$

$$\widetilde{g}_k^- = I_G^T \widetilde{g}_k^-, \quad \widetilde{g}_k^+ = I_G^T \widetilde{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1; \quad (12.5)$$

$$\widetilde{B}_1^+ = I_G^T \widetilde{B}_1^+ I_G, \quad \widetilde{B}_{n_k}^- = I_G^T \widetilde{B}_{n_k}^- I_G,$$

$$\widetilde{g}_1^+ = I_G^T \widetilde{g}_1^+, \quad \widetilde{g}_{n_k}^- = I_G^T \widetilde{g}_{n_k}^-. \quad (12.6)$$

Матрицы коэффициентов $\widetilde{A}_k$, $k = 1, \dots, n_k - 1$ в системах (12.3) по аналогии с матрицами жесткости в традиционном методе конечных элементов имеют блочно-диагональную структуру.

13. О КОРРЕКТНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Корректное аналитическое решение многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами производится по методу, описанному в [7-8]. После определения узловых перемещений и их

производных по переменной x_3 по формулам (4.1)-(4.12) вычисляются деформации и напряжения.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по

Таблица 12.1. Алгоритм заполнения матрицы перестановок I_G .

№ п/п	Номера заполняемых элементов матриц	Значение элемента матрицы	Эквивалентное условие
1.	$(6p-5, 3p-2),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $u_1^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$
2.	$(6p-4, 3p-1),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $u_2^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$
3.	$(6p-3, 3p),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $u_3^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$
4.	$(6p-2, 3(N_{1,k}N_{2,k} + p)-2),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $v_1^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$
5.	$(6p-1, 3(N_{1,k}N_{2,k} + p)-1),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $v_2^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$
6.	$(6p, 3(N_{1,k}N_{2,k} + p)),$ $p = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}$	1	перестановка элементов $v_3^{(k,i,j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$

Примечание: Все элементы матрицы I_G не указанные в таблице равны нулю.

- основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 42-63.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с прямоугольным поперечным сечением. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 64-75.
 3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об операторной и вариационной постановках краевой задачи о статическом расчете трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 97-106.

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи.

4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи о статическом расчете трехмерной конструкции с кусочно-постоянными характеристиками по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // Вестник Отделения строительных наук РААСН, Выпуск 15, 2011, с. 6-11.
 5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Герман А.Ю.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи расчета трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // Вестник МГСУ, №4, 2011, с. 36-44.
 6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
 7. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
 8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
 9. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
 10. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
 11. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
 12. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
 13. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
 14. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
 15. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.
-
- Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavlshoshe, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com
- Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavlshoshe, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com
- Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavlshoshe, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРЕГУЛЯРНЫХ АППРОКСИМИРУЮЩИХ СЕТОК ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 2: АЛГОРИТМ ЗАДАНИЯ СТАНДАРТНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Настоящая статья продолжает серию работ, посвященную вопросам численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения трехмерных задач расчета конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами (характеристиками) в случаях использования нерегулярных (различных на различных участках постоянства физико-геометрических параметров конструкции) аппроксимирующих сеток. Ниже описывается алгоритм задания некоторых стандартных типов граничных условий.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, трехмерные задачи, нерегулярные аппроксимирующие сетки, расчеты конструкций, алгоритм задания граничных условий

SEVERAL ALGORITHMIC PROPERTIES ASSOCIATED WITH THE USE OF IRREGULAR MESHES WITHIN DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS PART 2: BOUNDARY CONDITIONS

Pavel A. Akimov, Marina L. Mozgaleva, Vladimir N. Sidorov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to numerical implementation of discrete-continual finite element method for analysis of three-dimensional structures with piecewise-constant physical and geometrical parameters with the use of irregular meshes. Typical boundary conditions are presented.

Key words: discrete-continual finite element method, three-dimensional problems, irregular meshes, structural analysis, boundary conditions

1. ОБЩИЙ ВИД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть $x_{3,k}^b$, $k=1, 2, \dots, n_k$ – координаты граничных поперечных сечений конструкции.

Граничные условия в этих сечениях записываются в виде [1-7, 8, 9]

$$B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, \dots, n_k - 1, \quad (1.1)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

$$B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{3,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (1.2)$$

где B_k^-, B_k^+ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий при $k = 2, \dots, n_k - 1$ размера $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k}) \times 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}$ и $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k}) \times 6N_{1,k}N_{2,k}$ соответственно; $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+$, $k = 2, \dots, n_k - 1$ – заданные векторы правых частей граничных условий длиной $3(N_{1,k-1}N_{2,k-1} + N_{1,k}N_{2,k})$; $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, имеющие размеры $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}) \times 6N_{1,1}N_{2,1}$ и $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}) \times 6N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1}$; $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные векторы правых частей граничных условий длиной $3(N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,n_k-1}N_{2,n_k-1})$.

$$\begin{aligned} \bar{U}_n^{(k)} &= \bar{U}_n^{(k)}(x_3) = [(\bar{u}_n^{(k)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k)})^T]^T, \quad (1.3) \\ \bar{u}_n^{(k)} &= \bar{u}_n^{(k)}(x_3) = \\ &= [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},1)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},2)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \quad \dots \\ &\quad (\bar{u}_n^{(k,N_{1,k},N_{2,k})})^T]^T; \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_n^{(k)} &= \bar{v}_n^{(k)}(x_3) = \\ &= [(\bar{v}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},1)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},2)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \quad \dots \\ &\quad (\bar{v}_n^{(k,N_{1,k},N_{2,k})})^T]^T; \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_{1,n}^{(k,p,q)} \\ u_{2,n}^{(k,p,q)} \\ u_{3,n}^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad (1.6)$$

$$\bar{v}_n^{(k,p,q)} = \bar{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_{1,n}^{(k,p,q)} \\ v_{2,n}^{(k,p,q)} \\ v_{3,n}^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad (1.7)$$

$u_{1,n}^{(k,i,j)}, u_{2,n}^{(k,i,j)}, u_{3,n}^{(k,i,j)}$ и $v_{1,n}^{(k,i,j)}, v_{2,n}^{(k,i,j)}, v_{3,n}^{(k,i,j)}$ – составляющие перемещений и их производные по переменной x_3 для (k,i,j) -го узла дискретно-континуального конечного элемента.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЕДЕЛАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

2.1. Некоторые замечания.

Рассмотрим произвольный дискретно-континуальный конечный элемент (ДККЭ) $\omega_{k,i,j}$ (рис. 2.1). Произведем локальную замену переменных внутри элемента, введя в произвольном «поперечном» (по отношению к основному направлению) сечении рассматриваемого элемента локальную систему координат Ot_1 и Ot_2 (рис. 2.2), при этом $t_1 \in [0, 1]$; $t_2 \in [0, 1]$.

Для «поперечного» (по отношению к основному направлению) сечения конструкции векторы координат произвольной точки ДККЭ в элементной и исходной системах имеют вид:

$$\bar{t} = [t_1 \quad t_2]^T; \quad \bar{x} = [x_1 \quad x_2]^T. \quad (2.1)$$

Соответствующая формула преобразования координат:

$$\bar{x} = \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_1 \Delta_1 \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_2 \Delta_2 \bar{x}_n^{(k,i,j)} + t_1 t_2 \Delta_{12} \bar{x}_n, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta_1 \bar{x} &= \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \\ \Delta_2 \bar{x} &= \bar{x}_n^{(k,i,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i,j)}; \\ \Delta_{12} \bar{x} &= \bar{x}_n^{(k,i+1,j+1)} - \bar{x}_n^{(k,i+1,j)} - \Delta_2 \bar{x}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{x}_n^{(k,i,j)}$ – вектор координат узла элемента в исходной системе координат, $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$; $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$, т.е.

$$\bar{x}_n^{(k,i,j)} = [x_1^{(k,i,j)} \quad x_2^{(k,i,j)}]^T. \quad (2.4)$$

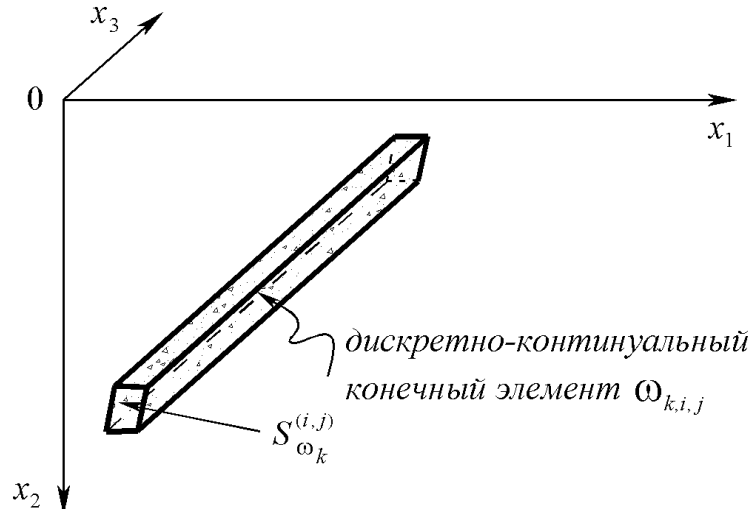


Рисунок 2.1. Типовой дискретно-континуальный конечный элемент.

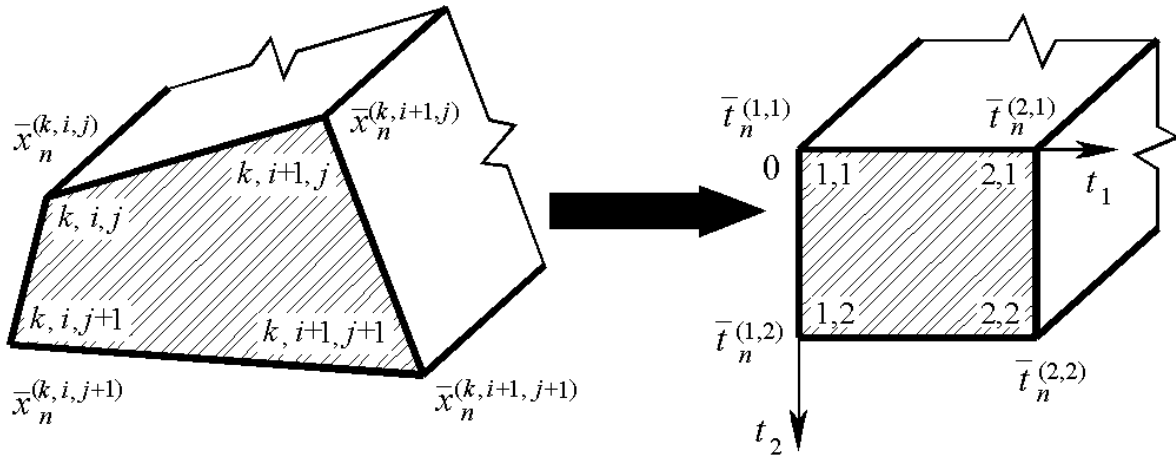


Рисунок 2.2. Переход к локальной системе координат на ДККЭ.

Определяем характеристическую функцию элемента и сеточные функции, характеризующие свойства материала конструкции:

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j} \subset \Omega_k \\ 0, & \omega_{k,i,j} \not\subset \Omega_k; \end{cases} \quad \bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (2.5)$$

В результате замены переменных вычисление производных по x_1 и x_2 производится согласно формулам дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2. \quad (2.6)$$

Величины $\partial t_k / \partial x_s$ из (2.6) образуют якобиан системы. Матрица Якоби на элементе $\omega_{k,i,j}$ определяется следующим образом:

$$\alpha^{(k,i,j)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{1,2}^{(k,i,j)} \\ \alpha_{2,1}^{(k,i,j)} & \alpha_{2,2}^{(k,i,j)} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\alpha_{1,1}^{(k,i,j)} = \alpha_{1,1}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)};$$

$$\alpha_{1,2}^{(k,i,j)} = \alpha_{1,2}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}; \quad (2.8)$$

$$\alpha_{2,1}^{(k,i,j)} = \alpha_{2,1}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = -\frac{\beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)};$$

$$\alpha_{2,2}^{(k,i,j)} = \alpha_{2,2}^{(k,i,j)}(x_1, x_2) = \frac{\beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}{J^{(k,i,j)}(t_1, t_2)}; \quad (2.9)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

$$\beta_{p,q}^{(k,i,j)} = \Delta_q x_p^{(k,i,j)} + t_{3-q} \Delta_{12} x_p^{(k,i,j)}, \quad (2.10)$$

$$p = 1, 2; \quad q = 1, 2.$$

2.2. Аппроксимация перемещений и частных производных от перемещений.

Поля $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ и $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$ по «поперечному» (по отношению к основному направлению) сечению (k, i, j) -го дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются линейно (ниже $(x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}$, $t_1 \in [0, 1]; t_2 \in [0, 1]$):

$$u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3),$$

$$v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3),$$

$$p = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \omega_{k,i,j}, \quad (2.11)$$

где $N = N(t_1, t_2) = \bar{t}^T C^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$

$$(2.12)$$

– матрица функций формы («поперечных» по отношению к основному направлению) по сечению ДККЭ с элементами

$$N_1(t_1, t_2) = 1 - t_1 - t_2 + t_1 t_2; \quad N_2(t_1, t_2) = t_1 - t_1 t_2;$$

$$N_3(t_1, t_2) = t_2 - t_1 t_2; \quad N_4(t_1, t_2) = t_1 t_2; \quad (2.13)$$

$$\bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)} = \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_{p,n}^{(k,i,j)} \\ u_{p,n}^{(k,i+1,j)} \\ u_{p,n}^{(k,i,j+1)} \\ u_{p,n}^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)} = \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_{p,n}^{(k,i,j)} \\ v_{p,n}^{(k,i+1,j)} \\ v_{p,n}^{(k,i,j+1)} \\ v_{p,n}^{(k,i+1,j+1)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Поясним, что здесь $u_{p,n}^{(k,p,q)} = u_{p,n}^{(k,p,q)}(x_3)$ и $v_{p,n}^{(k,p,q)} = v_{p,n}^{(k,p,q)}(x_3)$ – соответственно функции $u_p^{(k)} = u_p^{(k)}(x_3)$ и $v_p^{(k,p,q)} = v_p^{(k,p,q)}(x_3)$ для (k, p, q) -го узла дискретно-континуального конечного элемента (узловые функции).

2.3. Аппроксимация деформаций.

На основании известных соотношений теории упругости [7-14] имеем следующие выражения для деформаций в пределах рассматриваемого (k, i, j) -го ДККЭ:

$$\varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = [\partial_1 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3); \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = [\partial_2 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3); \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = v_3^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3); \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \varepsilon_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) =$$

$$= 0.5 \cdot ([\partial_1 u_2^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + [\partial_2 u_1^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3)); \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \varepsilon_{3,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) =$$

$$= 0.5 \cdot ([\partial_1 v_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + v_1^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)); \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \varepsilon_{3,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) =$$

$$= 0.5 \cdot ([\partial_2 v_3^{(k,i,j)}](t_1, t_2, x_3) + v_2^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)), \quad (2.20)$$

где

$$\partial_1 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times$$

$$\times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) -$$

$$- N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.21)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times$$

$$\times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) -$$

$$- N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.22)$$

$$\partial_3 u_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = N(t_1, t_2) \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.23)$$

$$\partial_1 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times$$

$$\times [N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) -$$

$$- N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.24)$$

$$\partial_2 v_p^{(k,i,j)}(x_1, x_2, x_3) = (J^{(k,i,j)}(t_1, t_2))^{-1} \times$$

$$\times [N^{(0,1)}(t_1, t_2) \beta_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2) -$$

$$- N^{(1,0)}(t_1, t_2) \beta_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2)] \bar{v}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.25)$$

$$N^{(p,q)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^p}{\partial t_1^p} \frac{\partial^q}{\partial t_2^q} N(t_1, t_2) =$$

$$= [N_1^{(p,q)} \quad N_2^{(p,q)} \quad N_3^{(p,q)} \quad N_4^{(p,q)}], \quad (2.26)$$

$$N_1^{(1,0)}(t_1, t_2) = -1 + t_2; \quad N_2^{(1,0)}(t_1, t_2) = 1 - t_2; \\ N_3^{(1,0)}(t_1, t_2) = -t_2; \quad N_4^{(1,0)}(t_1, t_2) = t_2; \quad (2.27)$$

$$N_1^{(0,1)}(t_1, t_2) = -1 + t_1; \quad N_2^{(0,1)}(t_1, t_2) = -t_1; \\ N_3^{(0,1)}(t_1, t_2) = 1 - t_1; \quad N_4^{(0,1)}(t_1, t_2) = t_1. \quad (2.28)$$

Обозначим через $\varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ и $\varepsilon_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ (здесь $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$), отнесенные к узлу (k, i, j) соответствующие функции деформаций (2.15)-(2.20), т.е.

$$\varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \partial_1 u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \partial_2 u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = v_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \varepsilon_{2,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \\ = 0.5 \cdot (\partial_1 u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \partial_2 u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3)); \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \varepsilon_{3,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \\ = 0.5 \cdot (\partial_1 u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3) + v_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3)); \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \varepsilon_{3,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \\ = 0.5 \cdot (\partial_2 u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3) + v_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3)), \quad (2.34)$$

причем соответствующие узловые функции $\partial_1 u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\partial_2 u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\partial_1 u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\partial_2 u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\partial_1 u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ и $\partial_2 u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ определяются с учетом соответствующих операций осреднения по формулам, являющимся частными случаями (2.21)-(2.22):
– «срединные» элементы сетки ($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\partial_1 u_{p,n}^{(k,i,j)} = \tilde{F}_1^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_1^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_1^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_1^{(k,i,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.35)$$

$$\partial_2 u_{p,n}^{(k,i,j)} = \tilde{F}_2^{(k,i-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_2^{(k,i-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i-1,j)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_2^{(k,i,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_2^{(k,i,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,i,j)}(x_3), \quad (2.36)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,i,j)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,i,j} \theta_{k,i,j} F_q^{(k,i,j)}(t_1, t_2), \quad q = 1, 2, \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.37)$$

$$\varpi_{k,i,j} = \vartheta_{k,i,j} (\theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j})^{-1}, \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.38)$$

$$\vartheta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ \theta_{k,i-1,j-1} + \theta_{k,i-1,j} + \theta_{k,i,j-1} + \theta_{k,i,j} = 0, \end{cases} \\ i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.39)$$

– элементы «левой вертикальной границы» ($i = 1$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\partial_1 u_p^{(k,1,j)} = \tilde{F}_1^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_1^{(k,1,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \quad (2.40)$$

$$\partial_2 u_p^{(k,1,j)} = \tilde{F}_2^{(k,1,j-1)}(0,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_2^{(k,1,j)}(0,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,1,j)}(x_3); \quad (2.41)$$

где

$$\tilde{F}_q^{(k,1,j)}(t_1, t_2) = \varpi_{k,1,j} \theta_{k,1,j} F_q^{(k,1,j)}(t_1, t_2), \\ q = 1, 2, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.42)$$

$$\varpi_{k,1,j} = \vartheta_{k,1,j} (\theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j})^{-1}, \\ j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.43)$$

$$\vartheta_{k,1,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \quad \theta_{k,1,j-1} + \theta_{k,1,j} = 0 \end{cases} \\ j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \quad (2.44)$$

– элементы «правой вертикальной границы» ($i = N_{1,k}$; $j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1$):

$$\partial_1 u_p^{(k,N_{1,k},j)} = \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k}-1,j-1)}(x_3) + \\ + \tilde{F}_1^{(k,N_{1,k}-1,j)}(1,0) \bar{u}_{p,n}^{(k,N_{1,k}-1,j)}(x_3); \quad (2.45)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

$$\begin{aligned} \partial_2 u_p^{(k, N_{1,k}, j)} &= \widetilde{F}_2^{(k, N_{1,k}-1, j-1)}(1, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}, j-1)}(x_3) + \\ &+ \widetilde{F}_2^{(k, N_{1,k}-1, j)}(1, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}, j)}(x_3); \end{aligned} \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_q^{(k, N_{1,k}-1, j)}(t_1, t_2) &= \\ &= \varpi_{k, N_{1,k}-1, j} \theta_{k, N_{1,k}-1, j} F_q^{(k, N_{1,k}-1, j)}(t_1, t_2), \\ q &= 1, 2, \quad j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \varpi_{k, N_{1,k}-1, j} &= \mathcal{G}_{k, N_{1,k}-1, j} (\theta_{k, N_{1,k}-1, j-1} + \theta_{k, N_{1,k}-1, j})^{-1}, \\ j &= 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{G}_{k, N_{1,k}-1, j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{k, N_{1,k}-1, j-1} + \theta_{k, N_{1,k}-1, j} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{k, N_{1,k}-1, j-1} + \theta_{k, N_{1,k}-1, j} = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

$$j = 2, 3, \dots, N_{2,k} - 1;$$

– элементы «нижней горизонтальной границы» ($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; j = 1$):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_p^{(k, i, 1)} &= \widetilde{F}_1^{(k, i-1, 1)}(1, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, i-1, 1)}(x_3) + \\ &+ \widetilde{F}_1^{(k, i, 1)}(0, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, i, 1)}(x_3); \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 u_p^{(k, i, 1)} &= \widetilde{F}_2^{(k, i-1, 1)}(1, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, i-1, 1)}(x_3) + \\ &+ \widetilde{F}_2^{(k, i, 1)}(0, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, i, 1)}(x_3); \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \widetilde{F}_q^{(k, i, 1)}(t_1, t_2) &= \varpi_{k, i, 1} \theta_{k, i, 1} F_q^{(k, i, 1)}(t_1, t_2), \\ q &= 1, 2, \quad i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \varpi_{k, i, 1} &= \mathcal{G}_{k, i, 1} (\theta_{k, i-1, 1} + \theta_{k, i, 1})^{-1}, \\ i &= 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\mathcal{G}_{k, i, 1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{k, i-1, 1} + \theta_{k, i, 1} \geq 1 \\ 0, & \text{если } \theta_{k, i-1, 1} + \theta_{k, i, 1} = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1;$$

– элементы «верхней горизонтальной границы» ($i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; j = N_{2,k}$):

$$\begin{aligned} \partial_1 u_p^{(k, i, N_{2,k})} &= \widetilde{F}_1^{(k, i-1, N_{2,k}-1)}(1, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, i-1, N_{2,k}-1)}(x_3) + \\ &+ \widetilde{F}_1^{(k, i, N_{2,k}-1)}(0, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, i, N_{2,k}-1)}(x_3); \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\partial_2 u_p^{(k, i, N_{2,k})} = \widetilde{F}_2^{(k, i-1, N_{2,k}-1)}(1, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, i-1, N_{2,k}-1)}(x_3) + \widetilde{F}_2^{(k, i, N_{2,k}-1)}(0, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, i, N_{2,k}-1)}(x_3), \quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_2^{(k, i, N_{2,k}-1)}(t_1, t_2) &= \\ &= \varpi_{k, i, N_{2,k}-1} \theta_{k, i, N_{2,k}-1} F_2^{(k, i, N_{2,k}-1)}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1;$$

$$\begin{aligned} \varpi_{k, i, N_{2,k}-1} &= \mathcal{G}_{k, i, N_{2,k}-1} (\theta_{k, i-1, N_{2,k}-1} + \theta_{k, i, N_{2,k}-1})^{-1}, \\ i &= 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\mathcal{G}_{k, i, N_{2,k}-1} = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ & \theta_{k, i-1, N_{2,k}-1} + \theta_{k, i, N_{2,k}-1} \geq 1 \\ 0, & \text{если} \\ & \theta_{k, i-1, N_{2,k}-1} + \theta_{k, i, N_{2,k}-1} = 0 \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots, N_{1,k} - 1; \quad (2.58)$$

– «угловая точка границы» $i = 1; j = 1$:

$$\partial_1 u_p^{(k, 1, 1)} = \widetilde{F}_1^{(k, 1, 1)}(0, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, 1, 1)}(x_3); \quad (2.59)$$

$$\partial_2 u_p^{(k, 1, 1)} = \widetilde{F}_2^{(k, 1, 1)}(0, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, 1, 1)}(x_3), \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \widetilde{F}_1^{(k, 1, 1)}(0, 0) &= \theta_{k, 1, 1} F_1^{(k, 1, 1)}(0, 0), \quad q = 1, 2; \\ & \quad (2.61) \end{aligned}$$

– «угловая точка границы» $i = 1; j = N_{2,k}$:

$$\partial_1 u_p^{(k, 1, N_{2,k})} = \widetilde{F}_1^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(0, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(x_3); \quad (2.62)$$

$$\partial_2 u_p^{(k, 1, N_{2,k})} = \widetilde{F}_2^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(0, 1) \bar{u}_{p,n}^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(x_3), \quad (2.63)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_q^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(0, 1) &= \theta_{k, 1, N_{2,k}-1} F_q^{(k, 1, N_{2,k}-1)}(0, 1), \\ q &= 1, 2; \end{aligned} \quad (2.64)$$

– «угловая точка границы» $i = N_{1,k}; j = 1$:

$$\partial_1 u_p^{(k, N_{1,k}, 1)} = \widetilde{F}_1^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(1, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(x_3); \quad (2.65)$$

$$\partial_2 u_p^{(k, N_{1,k}, 1)} = \widetilde{F}_2^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(1, 0) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(x_3), \quad (2.66)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_q^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(1, 0) &= \theta_{k, N_{1,k}-1, 1} F_q^{(k, N_{1,k}-1, 1)}(1, 0), \\ q &= 1, 2; \end{aligned} \quad (2.67)$$

– «угловая точка границы» $i = N_{1,k}$; $j = N_{2,k}$:

$$\partial_1 u_p^{(k, N_{1,k}, N_{2,k})} = \tilde{F}_1^{(k, N_{1,k}-1, N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}, N_{2,k})}(x_3); \quad (2.68)$$

$$\partial_2 u_p^{(k, N_{1,k}, N_{2,k})} = \tilde{F}_2^{(k, N_{1,k}-1, N_{2,k}-1)}(1,1) \bar{u}_{p,n}^{(k, N_{1,k}, N_{2,k})}(x_3), \quad (2.69)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_q^{(k, N_{1,k}-1, N_{2,k}-1)}(1,1) &= \\ &= \theta_{k, N_{1,k}-1, N_{2,k}-1} F_q^{(k, N_{1,k}-1, N_{2,k}-1)}(1,1), \quad (2.70) \\ q &= 1, 2. \end{aligned}$$

2.4. Аппроксимация напряжений.

На основании известных соотношений теории упругости [7-17] имеем следующие выражения для напряжений в пределах рассматриваемого (k, i, j) -го ДККЭ:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) \}; \quad (2.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) \}; \quad (2.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \\ &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) + \varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) \}; \quad (2.73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{2,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3); \quad (2.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{3,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3); \quad (2.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) &= \sigma_{3,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3) = \\ &= \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3), \quad (2.76) \end{aligned}$$

где компоненты деформаций $\varepsilon_{1,1}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$, $\varepsilon_{2,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$, $\varepsilon_{3,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$, $\varepsilon_{1,2}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$,

$\varepsilon_{1,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$ и $\varepsilon_{2,3}^{(k,i,j)}(t_1, t_2, x_3)$ определяются по формулам (2.14)-(2.27).

Обозначим через $\sigma_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\sigma_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\sigma_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\sigma_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\sigma_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ и $\sigma_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ (здесь $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$), отнесенные к узлу (k, i, j) соответствующие функции деформаций (2.71)-(2.76), т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) \}; \quad (2.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) \}; \quad (2.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) &= (\bar{\lambda}_{k,i,j} + 2\bar{\mu}_{k,i,j}) \varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_{k,i,j} \{ \varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) + \varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) \}; \quad (2.79) \end{aligned}$$

$$\sigma_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \sigma_{2,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.80)$$

$$\sigma_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \sigma_{3,1,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3); \quad (2.81)$$

$$\sigma_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \sigma_{3,2,n}^{(k,i,j)}(x_3) = \bar{\mu}_{k,i,j} \varepsilon_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3), \quad (2.82)$$

где компоненты $\varepsilon_{1,1,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{2,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{1,2,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$, $\varepsilon_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_3)$ определяются по формулам (2.28)-(2.70).

3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

3.1. Переход от глобальной индексации неизвестных к локальной индексации.

Очевидно, что можем представить глобальный вектор неизвестных (1.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}_n^{(k)} &= \bar{U}_n^{(k)}(x_2) = \\ &= [U_1^{(k)} \quad U_2^{(k)} \quad \dots \quad U_l^{(k)} \quad \dots \quad U_{N_{gl}^{(k)}}^{(k)}]^T, \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $l = 1, 2, \dots, N_{gl}^{(k)}$ – глобальный индекс;

$$N_{gl}^{(k)} = 6N_{1,k}N_{2,k}.$$

Сопоставляя (3.1) и (1.3) можно отметить, что каждому элементу $U_l^{(k)}$ вектора (3.1) соответствует какой-либо элемент $u_{p,n}^{(k,i,j)}$ или $v_{p,n}^{(k,i,j)}$ вектора (1.3). Ниже приводятся формулы перехода от глобальной индексации (k, l) к локальной (k, s, i, j, p) , где s – идентификатор типа переменной (для $u_{p,n}^{(k,i,j)}$ имеем $s = 1$, а для $v_{p,n}^{(k,i,j)}$ имеем $s = 2$).

$$s = \left\lfloor \frac{l-1}{3N_{1,k}N_{2,k}} \right\rfloor; \quad (3.2)$$

$$j = \left\lfloor \frac{l-3(s-1)N_{1,k}N_{2,k}+1}{3N_{1,k}} \right\rfloor; \quad (3.3)$$

$$i = \left\lfloor \frac{l-3(s-1)N_{1,k}N_{2,k}-3(j-1)N_{1,k}+1}{3} \right\rfloor; \quad (3.4)$$

$$p = l - 3(s-1)N_{1,k}N_{2,k} - 3(j-1)N_{1,k} - 3(i-1), \quad (3.5)$$

где запись типа $[a/b]$ обозначает целую часть частного от деления a на b .

3.2. Переход от локальной индексации неизвестных к глобальной индексации.

Формула перехода от локальной индексации (k, s, i, j, p) к глобальной индексации (k, l) (т.е. перехода обратного тому, что был описан в пункте 3.1 настоящего раздела) имеет вид:

$$l = p + 3(i-1) + 3(j-1)N_{1,k} + 3(s-1)N_{1,k}N_{2,k}. \quad (3.6)$$

4. АЛГОРИТМ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА «ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ»

4.1. Некоторые предварительные замечания и обозначения.

Случаи $k=1$ и $k=n_k$ здесь, очевидно, неактуальны.

Рассмотрим общий случай стыковки по сечению $x_3 = x_{3,k}^b$ аппроксимирующих сеток на двух соседних $(1 < k < n_k)$ по основному направлению участков. По аналогии с [3] здесь, очевидно, существует два основных вида стыковки «узел – элемент» (стандартный вид стыковки) и «узел – узел» (особый случай стыковки).

Будем полагать, что справедливы следующие равенства

$$x_1^{(k-1,1,1)} = x_1^{(k,1,1)}; \quad x_2^{(k-1,1,1)} = x_2^{(k,1,1)}; \quad (4.1)$$

$$x_1^{(k-1,1,N_{2,k-1})} = x_1^{(k,1,N_{2,k})}; \quad x_2^{(k-1,1,N_{2,k-1})} = x_2^{(k,1,N_{2,k})}; \quad (4.2)$$

$$x_1^{(k-1,N_{1,k-1},1)} = x_1^{(k,N_{1,k},1)}; \quad x_2^{(k-1,N_{1,k-1},1)} = x_2^{(k,N_{1,k},1)}; \quad (4.3)$$

$$x_1^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})} = x_1^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}; \quad x_2^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})} = x_2^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}, \quad (4.4)$$

т.е. для крайних граничных точек соответствующего поперечного по отношению к основному направлению сечения имеем особые случаи стыковки.

Введем в рассмотрение перечисленные ниже функции.

1) $q_k^-(i, j) = (q_{k,1}^-(i, j), q_{k,2}^-(i, j))$ – функция, ставящая в соответствие каждому узлу $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ аппроксимирующей сетки на участке ω_{k-1} номер стыкуемого с ним по сечению $x_3 = x_{3,k}^b$ дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k,i,j}$ аппроксимирующей сетки на участке ω_k , т.е. $q_k^-(i, j) = (m, n)$ (стандартный случай стыковки). К особым случаям стыковки относятся ситуации, когда узел $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ стыкуется с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$.

2) $q_k^+(i, j) = (q_{k,1}^+(i, j), q_{k,2}^+(i, j))$ – функция, ставящая в соответствие каждому узлу $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ аппроксимирующей сетки на участке ω_k номер стыкуемого с ним по сечению

чению $x_3 = x_{3,k}^b$ дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k-1,i,j}$ аппроксимирующей сетки на участке ω_{k-1} , т.е. $q_k^+(i, j) = (m, n)$ (стандартный случай стыковки). К особым случаям стыковки относятся ситуации, когда узел $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ стыкуется с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$.

3) $t_k^-(i, j) = (t_{k,1}^-(i, j), t_{k,2}^-(i, j))$ – функция, ставящая в соответствие каждому узлу $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ аппроксимирующей сетки на участке ω_{k-1} локальные координаты (t_1, t_2) стыкуемого с ним по сечению $x_3 = x_{3,k}^b$ дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k,m,n}$ аппроксимирующей сетки на участке ω_k , т.е. $t_k^-(i, j) = (t_1, t_2)$ (стандартный случай стыковки). К особым случаям стыковки относятся ситуации, когда узел $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ стыкуется с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$.

4) $t_k^+(i, j) = (t_{k,1}^+(i, j), t_{k,2}^+(i, j))$ – функция, ставящая в соответствие каждому узлу $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ аппроксимирующей сетки на участке ω_k локальные координаты (t_1, t_2) стыкуемого с ним по сечению $x_3 = x_{3,k}^b$ дискретно-континуального конечного элемента $\omega_{k-1,m,n}$ аппроксимирующей сетки на участке ω_{k-1} , т.е. $t_k^+(i, j) = (t_1, t_2)$ (стандартный случай стыковки). К особым случаям стыковки относятся ситуации, когда узел $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ стыкуется с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$.

4.2. Континуальная форма граничных условий типа «идеальный контакт».

Для случая $1 < k < n_k$ имеем следующие граничные условия:

$$u_1^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) - u_1^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.5)$$

$$u_2^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) - u_2^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.6)$$

$$u_3^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) - u_3^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0) = 0, \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.7)$$

$$\sigma_{1,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{1,3}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0), \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.8)$$

$$\sigma_{2,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{2,3}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0), \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.9)$$

$$\sigma_{3,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{3,3}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_{3,k}^b - 0), \\ (x_1, x_2) \in S_{\omega_k}^{(i,j)}; \quad (4.10)$$

где $\sigma_{1,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$, $\sigma_{2,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$, $\sigma_{3,3}^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$ – соответственно компоненты напряжений $\sigma_{1,3}$, $\sigma_{2,3}$, и $\sigma_{3,3}$ в точке с координатами (x_1, x_2, x_3) , принадлежащей области ω_k .

4.3. Дискретно-континуальная форма граничных условий типа «идеальный контакт».

4.3.1. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.5).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$u_{1,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = u_{1,n}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i, j), t_{k,2}^-(i, j), x_{3,k}^b + 0). \quad (4.11)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{1,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{1,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.12)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$u_{1,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{1,n}^{(k,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.13)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

$$u_{1,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{1,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.14)$$

$$u_{1,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{1,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.15)$$

$$u_{1,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{1,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.16)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = u_1^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{1,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = u_{1,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.18)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.13)-(4.16).

4.3.2. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.6).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} u_{2,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = u_2^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{2,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{2,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.20)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$u_{2,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{2,n}^{(k,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.21)$$

$$u_{2,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{2,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.22)$$

$$u_{2,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{2,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.23)$$

$$u_{2,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{2,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.24)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = u_2^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{2,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = u_{2,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.26)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.21)-(4.24).

4.3.3. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.7).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} u_{3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = u_3^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при сты-

ковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.28)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$u_{3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{3,n}^{(k,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.29)$$

$$u_{3,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{3,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.30)$$

$$u_{3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = u_{3,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.31)$$

$$u_{3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = u_{3,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.32)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = u_{3,n}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$u_{3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = u_{3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.34)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.29)-(4.32).

4.3.4. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.8).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = \sigma_{1,3,n}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{1,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.36)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$\sigma_{1,3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.37)$$

$$\sigma_{1,3,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.38)$$

$$\sigma_{1,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.39)$$

$$\sigma_{1,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.40)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = \sigma_{1,3,n}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{1,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.42)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.37)-(4.40).

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

4.3.5. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.9).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = \sigma_{2,3}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{2,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.44)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$\sigma_{2,3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.45)$$

$$\sigma_{2,3,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k-1,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.46)$$

$$\sigma_{2,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k-1,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.47)$$

$$\sigma_{2,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k-1,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.48)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = \sigma_{2,3}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{2,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.50)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.45)-(4.48).

4.3.6. Алгоритм аппроксимации граничного условия типа (4.9).

1) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \\ = \sigma_{3,3}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{3,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0). \quad (4.52)$$

В частности, очевидно, что на основании (4.1)-(4.4) получим:

$$\sigma_{3,3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k-1,1,1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.53)$$

$$\sigma_{3,3,n}^{(k-1,1,N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k-1,1,N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.54)$$

$$\sigma_{3,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},1)}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k-1,N_{1,k},1)}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.55)$$

$$\sigma_{3,3,n}^{(k-1,N_{1,k-1},N_{2,k-1})}(x_{3,k}^b - 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k-1,N_{1,k},N_{2,k})}(x_{3,k}^b + 0); \quad (4.56)$$

2) Последовательно перебираем значения $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$.

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем стандартный случай стыковки, то

$$\begin{aligned} \sigma_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \\ = \sigma_{3,3}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Если для рассматриваемого значения (i, j) имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ будем иметь:

$$\sigma_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0) = \sigma_{3,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0). \quad (4.58)$$

Очевидно, что, следуя (4.1)-(4.4), здесь также можно получить равенства (4.53)-(4.56).

4.3.7. Универсальный алгоритм формирования матриц коэффициентов и векторов правых частей граничных условий типа (1.1)-(1.2).

Итак, пусть рассматриваются граничные условия в некоторой граничной точке $x_{2,k}^b$, $1 < k < n_k$. Будем использовать далее следующую систему обозначений: $\{B_k^-\}_{l,m}$ и $\{B_k^+\}_{l,m}$ – соответственно элементы матриц B_k^- и B_k^+ , расположенные на l -й строке и m -м столбце; $\{\bar{g}_k^-\}_l$ и $\{\bar{g}_k^+\}_l$ – соответственно l -е элементы векторов $\bar{g}_k^-$ и $\bar{g}_k^+$.

1) Начальное задание:

$$B_k^- = 0; \quad B_k^+ = 0; \quad \bar{g}_k^- = 0; \quad \bar{g}_k^+ = 0. \quad (4.59)$$

2) Аппроксимация граничного условия (4.5).

2.1) Последовательно задаем:

$$\{B_k^-\}_{i+(j-1)N_{1,k-1}, 3i-2+3(j-1)N_{1,k-1}} = -1, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}. \quad (4.60)$$

2.2) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.11)), то вычисляем:

$$\{B_k^+\}_{i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \\ = u_1^{(k, q_{k,1}^-(i,j), q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0) \\ \text{при} \\ U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.61)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.12)):

$$\{B_k^+\}_{i+(j-1)N_{1,k-1}, 3p-2+3(q-1)N_{1,k}} = 1. \quad (4.62)$$

2.3) Последовательно задаем:

$$\{B_k^+\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+i+(j-1)N_{1,k}, 3i-2+3(j-1)N_{1,k}} = 1, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}. \quad (4.63)$$

2.4) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.17)), то вычисляем:

$$\{B_k^-\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+i+(j-1)N_{1,k}, r} = \\ = -u_1^{(k, q_{k,1}^+(i,j), q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0) \\ \text{при} \\ U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.64)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.18)):

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

$$\{B_k^-\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+i+(j-1)N_{1,k}, 3p-2+3(q-1)N_{1,k-1}} = -1. \quad (4.65)$$

3) Аппроксимация граничного условия (4.6).

3.1) Последовательно задаем:

$$\{B_k^-\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3i-1+3(j-1)N_{1,k-1}} = -1, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}. \quad (4.66)$$

3.2) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$,

$j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.17)), то вычисляем:

$$\{B_k^+\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \\ = u_2^{(k, q_{k,1}^-(i,j), q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.67)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.18)):

$$\{B_k^+\}_{N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3p-1+3(q-1)N_{1,k}} = 1. \quad (4.68)$$

3.3) Последовательно задаем:

$$\{B_k^+\}_{2N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3i-1+3(j-1)N_{1,k-1}} = 1, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}. \quad (4.69)$$

3.4) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$,

$j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай сты-

ковки (см. формулы (3.1), (4.25)), то вычисляем:

$$\{B_k^-\}_{2N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \\ = -u_2^{(k, q_{k,1}^+(i,j), q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0) \\ \text{при} \\ U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.70)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.26)):

$$\{B_k^-\}_{2N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3p-1+3(q-1)N_{1,k-1}} = -1. \quad (4.71)$$

4) Аппроксимация граничного условия (4.7).

4.1) Последовательно задаем:

$$\{B_k^-\}_{2(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3i+3(j-1)N_{1,k-1}} = -1, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}. \quad (4.72)$$

4.2) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$,

$j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.27)), то вычисляем:

$$\{B_k^+\}_{2(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \\ = u_3^{(k, q_{k,1}^-(i,j), q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.73)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки,

то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.28)):

$$\{B_k^+\}_{2(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, 3p+3(q-1)N_{1,k}} = 1. \quad (4.74)$$

4.3) Последовательно задаем:

$$\{B_k^+\}_{3N_{1,k-1}N_{2,k-1}+2N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k}, 3i+3(j-1)N_{1,k}} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_{1,k}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}. \quad (4.75)$$

4.4) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.33)), то вычисляем:

$$\{B_k^-\}_{3N_{1,k-1}N_{2,k-1}+2N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k}, r} = -u_3^{(k, q_{k,1}^+(i,j), q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.76)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.34)):

$$\{B_k^-\}_{3N_{1,k-1}N_{2,k-1}+2N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k}, 3p+3(q-1)N_{1,k-1}} = -1. \quad (4.77)$$

5) Аппроксимация граничного условия (4.8).

5.1) Последовательно задаем (см. формулу (4.35))

$$\{B_k^-\}_{3(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = -\sigma_{1,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}. \quad (4.78)$$

5.2) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.35)), то вычисляем:

$$\{B_k^+\}_{3(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \sigma_{1,3}^{(k, q_{k,1}^-(i,j), q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.79)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.36)):

$$\{B_k^+\}_{3(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1}, r} = \sigma_{1,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.80)$$

5.3) Последовательно задаем (см. формулу (4.41))

$$\{B_k^+\}_{4N_{1,k-1}N_{2,k-1}+3N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k}, r} = \sigma_{1,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0),$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.81)$$

5.4) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$ и далее

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.41)), то вычисляем:

$$\begin{aligned} \{B_k^-\}_{4N_{1,k-1}N_{2,k-1}+3N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = \\ = -\sigma_{1,3}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j),t_{k,2}^+(i,j),x_{3,k}^b-0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b-0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.82)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.42)):

$$\begin{aligned} \{B_k^-\}_{4N_{1,k-1}N_{2,k-1}+3N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = \\ = -\sigma_{1,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b-0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b-0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.83)$$

6) Аппроксимация граничного условия (4.9).

6.1) Последовательно задаем (см. формулу (4.43))

$$\begin{aligned} \{B_k^-\}_{4(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k},r} = \\ = -\sigma_{2,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b-0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b-0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k-1}N_{2,k-1},$$

$$i=1,2,\dots,N_{1,k-1}, \quad j=1,2,\dots,N_{2,k-1}. \quad (4.84)$$

6.2) Последовательно задаем $i=1,2,\dots,N_{1,k-1}$, $j=1,2,\dots,N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.43)), то вычисляем:

$$\begin{aligned} \{B_k^+\}_{4(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1},r} = \\ = \sigma_{2,3}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j),t_{k,2}^-(i,j),x_{3,k}^b+0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b+0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.85)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.44)):

$$\begin{aligned} \{B_k^+\}_{4(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k-1},r} = \\ = \sigma_{2,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b+0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b+0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.86)$$

6.3) Последовательно задаем (см. формулу (4.49))

$$\begin{aligned} \{B_k^+\}_{5N_{1,k-1}N_{2,k-1}+4N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = \sigma_{2,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b+0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b+0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.87)$$

6.4) Последовательно задаем $i=1,2,\dots,N_{1,k}$, $j=1,2,\dots,N_{2,k}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.49)), то вычисляем:

$$\begin{aligned} \{B_k^-\}_{5N_{1,k-1}N_{2,k-1}+4N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = \\ = -\sigma_{2,3}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j),t_{k,2}^+(i,j),x_{3,k}^b-0) \end{aligned}$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b-0) = \delta_{s,r}, \quad s=1,2,\dots,6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.88)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.50)):

$$\{B_k^-\}_{5N_{1,k-1}N_{2,k-1}+4N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = -\sigma_{2,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.89)$$

7) Аппроксимация граничного условия (4.10).

7.1) Последовательно задаем (см. формулу (4.51))

$$\{B_k^-\}_{5(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k},r} = -\sigma_{3,3,n}^{(k-1,i,j)}(x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}. \quad (4.90)$$

7.2) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k-1}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.51)), то вычисляем:

$$\{B_k^+\}_{5(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k},r} = \sigma_{3,3}^{(k,q_{k,1}^-(i,j),q_{k,2}^-(i,j))}(t_{k,1}^-(i,j), t_{k,2}^-(i,j), x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.91)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k-1}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k-1}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k-1,i,j)}, x_2^{(k-1,i,j)})$ с ка-

ким-либо узлом $(x_1^{(k,p,q)}, x_2^{(k,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.52)):

$$\{B_k^+\}_{5(N_{1,k-1}N_{2,k-1}+N_{1,k}N_{2,k})+i+(j-1)N_{1,k},r} = \sigma_{3,3,n}^{(k,p,q)}(x_{3,k}^b + 0)$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.92)$$

7.3) Последовательно задаем (см. формулу (4.57))

$$\{B_k^+\}_{6N_{1,k-1}N_{2,k-1}+5N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = \sigma_{3,3,n}^{(k,i,j)}(x_{3,k}^b + 0),$$

при

$$U_s^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k}N_{2,k}, \quad (4.93)$$

7.4) Последовательно задаем $i = 1, 2, \dots, N_{1,k}$, $j = 1, 2, \dots, N_{2,k}$ и далее

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем стандартный случай стыковки (см. формулы (3.1), (4.57)), вычисляем:

$$\{B_k^-\}_{6N_{1,k-1}N_{2,k-1}+5N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = -\sigma_{3,3}^{(k-1,q_{k,1}^+(i,j),q_{k,2}^+(i,j))}(t_{k,1}^+(i,j), t_{k,2}^+(i,j), x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.94)$$

– если для рассматриваемого $1 \leq i \leq N_{1,k}$ и $1 \leq j \leq N_{2,k}$ имеем особый случай стыковки, то при стыковке узла $(x_1^{(k,i,j)}, x_2^{(k,i,j)})$ с каким-либо узлом $(x_1^{(k-1,p,q)}, x_2^{(k-1,p,q)})$ получаем (см. формулу (4.58)):

$$\{B_k^-\}_{6N_{1,k-1}N_{2,k-1}+5N_{1,k}N_{2,k}+i+(j-1)N_{1,k},r} = -\sigma_{3,3,n}^{(k-1,p,q)}(x_{3,k}^b - 0)$$

при

$$U_s^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \delta_{s,r}, \quad s = 1, 2, \dots, 6N_{1,k-1}N_{2,k-1}, \quad (4.95)$$

Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий.

ЗАМЕЧАНИЯ

Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 3.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
2. Грант 3.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.
3. НИР «Разработка, исследование, программно-алгоритмическая реализация и верификация многоуровневых методов прогнозного математического моделирования состояния и техногенной безопасности ответственных объектов и комплексов мегаполиса», выполняемая в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации на оказание услуг (выполнение работ) на 2013 год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Численная реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета трехмерных конструкций с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 42-63.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О построении матриц жесткости трехмерного дискретно-континуального конечного элемента с прямоугольным поперечным сечением. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 64-75.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. Статья в настоящем журнале.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об операторной и вариационной постановках краевой задачи о статическом расчете трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». Сб. науч. тр. №14, Часть 1. – М.: МГСУ, 2011, с. 97-106.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи о статическом расчете трехмерной конструкции с кусочно-постоянными характеристиками по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // Вестник Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук, Выпуск 15, 2011, с. 6-11.
6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Герман А.Ю.** Операторная и вариационная постановки краевой задачи расчета трехмерной конструкции с кусочно-постоянными физико-

геометрическими параметрами по основному направлению в рамках дискретно-континуального подхода. // Вестник МГСУ, №4, 2011, с. 36-44.

7. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
10. **Новацкий В.** Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
11. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
12. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
13. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
14. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
15. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
16. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. Journal of Sound and Vibration, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.
17. **Berkowski P., Dmochowski G., Grosel J., Schabowicz K., Wojcicki Z.** Analysis of Failure Conditions for a Dynamically Loaded Composite Floor System of an Industrial Building. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, Volume 19(4), pp. 529-541.

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: pavel.akimov2@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Vladimir N. Sidorov, Adviser of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

ДВУХЭТАПНЫЙ СИНТЕЗ СТРУКТУРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА И ТЕТРАЭДРИЗАЦИИ ДЕЛОНЕ

А.В. Алексейцев

ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия», г. Брянск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Разработана двухэтапная вычислительная схема оптимизации структурных конструкций, базирующаяся на использовании алгоритмов тетраэдризации Делоне с ограничениями и эволюционного моделирования. На первом этапе строится топология несущей системы с помощью алгоритма тетраэдризации точек в объеме, задаваемом системой пересекающихся плоскостей, ограничивающих предельные контуры конструкции. Процедура разбивки этого объема на тетраэдры реализуется на множестве узлов деформируемого объекта. При выборе положений узлов, отвечающих условиям тетраэдризации, на основе генетического алгоритма решается задача минимизации суммарной длины стержней конструкции. На втором этапе сформированные топологические схемы несущих систем подвергаются параметрической оптимизации по критерию минимума массы, в ходе которой подбираются профили в сечениях стержней, при необходимости исключаются отдельные элементы и варьируются координаты узлов с учетом ограничений по прочности, жесткости и устойчивости. Приведены примеры синтеза прямоугольной в плане структурной плиты.

Ключевые слова: тетраэдризация Делоне, генетические алгоритмы, структурные плиты, оптимизация, структурно-параметрический синтез, формообразование стержневых систем.

TWO-STAGE SYNTHESIS OF STRUCTURAL DESIGN USING GENETIC ALGORITHMS AND DELAUNAY TETRAEDRALIZATION

Anatoliy V. Alekseytsev

Bryansk State Academy of Engineering and Technology, Bryansk, RUSSIA

ABSTRACT: The two-stage calculation circuit for structural optimization of structures, using of tetrahedralization algorithms with Delaunay constraints and evolutionary modeling is developed. At the first stage topology of the bearing system created with use a tetrahedralization of a point set algorithm, which is implemented in the volume, defined by the system of intersecting planes, bounding limit contours of the construction. The procedure of splitting the volume into tetrahedrons is implemented on multiple joints of a deformable object. When you select the nodes, that match the Delaunay tetrahedralization condition, solved the problem of minimizing the total length of rod for design, based on genetic algorithm. In the second phase formed topologies carrying systems subject to parametric optimization of the criterion of minimum mass, in which the setting cross-section profile, may exclude certain members and vary the coordinates of joints with the constraints on the strength, stiffness and stability. The example of the synthesis of rectangular structural slab is considered.

Key words: Delaunay tetrahedralization, genetic algorithms, structural slabs, optimization, structurally-parametric synthesis, forming of bearing system.

ВВЕДЕНИЕ

Для оптимизации достаточно сложных пространственных стержневых систем могут ус-

пешно использоваться генетические алгоритмы [1-5]. В большинстве этих итерационных схем выполняется преимущественно параметрическая оптимизация. Структурный

синтез конструкции обычно сводится к формированию некоторой базовой избыточной топологии, предусматривающей введение дополнительных элементов, которые могут исключаться в процессе поиска решения. При этом возможности выбора рациональной топологии деформируемого объекта весьма ограничены, что может приводить к неоправданному исключению из рассмотрения возможных рациональных вариантов конструкций. В настоящее время известны подходы к структурно-параметрическому синтезу плоских ферм [8], где синтез топологии выполняется на основе алгоритмов двумерной триангуляции. Формообразование структурных конструкций рассматривалось в работе [9], но решению комплексной задачи оптимального структурно-параметрического синтеза пространственных стержневых конструкций уделено недостаточно внимания как в отечественных [1-4, 8, 9, 12], так и зарубежных исследованиях [5, 7]. В настоящей статье предлагается вычислительная схема двухэтапного оптимального синтеза структурных плит. На первом этапе для формообразования вариантов конструкции используется генетический алгоритм и процедура тетраэдризации Делоне [6], описанная в работе [9]. На втором этапе полученная структура конструкции подвергается параметрической оптимизации на основе эволюционного моделирования с использованием многоточечных операторов [11].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим синтез стержневой системы в виде структурной плиты по критерию минимума ее массы.

На первом этапе выполняется синтез топологии несущей системы. При этом минимизируется функция

$$L(X, Y, Z, N) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где L – общая длина стержней конструкции; $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ – координаты узлов U_1 в декартовой системе осей $Oxyz$, положение которых выбирается в процессе оптимизации; N – число узлов U_1 .

Учитываются следующие ограничения:

1.1 Положение плоскостей, отсекающих часть объема, определяющего наибольшие возможные габаритные размеры стержневой системы.

1.2 Положение узлов U_2 , принадлежащих конструкции, координаты которых не изменяются.

1.3 Формирование топологии конструкции выполняется с помощью алгоритма тетраэдризации Делоне с ограничением [12], заключающимся в том, что шар, описанный вокруг каждого тетраэдра, не содержит внутри себя вершин тетраэдризации, видимых из какой-либо внутренней точки тетраэдра. Две точки называются видимыми, если соединяющий их отрезок не пересекает какую-либо грань тетраэдра. Если две точки лежат на одной грани, то они также являются видимыми. Образование топологии конструкции с использованием этого типа тетраэдризации позволяет исключать из рассмотрения варианты объектов с пересечениями стержней или их сопряжениями под малыми углами.

1.4 Геометрическая неизменяемость системы. Условие геометрической неизменяемости для несущей системы можно получить, используя для синтеза структуры пространственные группы стержней в виде тетраэдров, каждый из которых шарнирно присоединяется к образованным группам минимум в трех узлах.

На втором этапе для полученной топологии структурной конструкции выполняется минимизация ее массы M :

$$M(\{\tilde{X}\}, \{\tilde{Y}\}, \{\tilde{Z}\}, T) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $\{\tilde{X}\}, \{\tilde{Y}\}, \{\tilde{Z}\}$ – координаты узлов U_1 , варьируемые при параметрическом синтезе

несущей системы; $T = \{T_1, T_2 \dots T_K\}$ – множество допустимых для выбора профилей постоянного по длине поперечного сечения каждого из стержней конструкции; K – число рассматриваемых типоразмеров профилей стержней. Допускается задание стержней с малым значением модуля упругости материала, что моделирует их отсутствие в структуре объекта.

Учитываются следующие ограничения:

2.1 Условие равновесия узлов конечно-элементной модели стержневой системы.

2.2 Условие геометрической неизменяемости объекта. Конструкция считается геометрически неизменяемой, если выполняется условие [13]:

$$\det[K] > 0,$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости конечно-элементной модели.

2.3 Условия прочности и устойчивости стержней в соответствии с нормами [14].

2.4 Применение сортаментов металлопроката, унификация по параметрам.

2.5 Условие жесткости конструкции по рекомендациям [15].

2.6 Общая устойчивость объекта.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ДВУХЭТАПНОГО ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

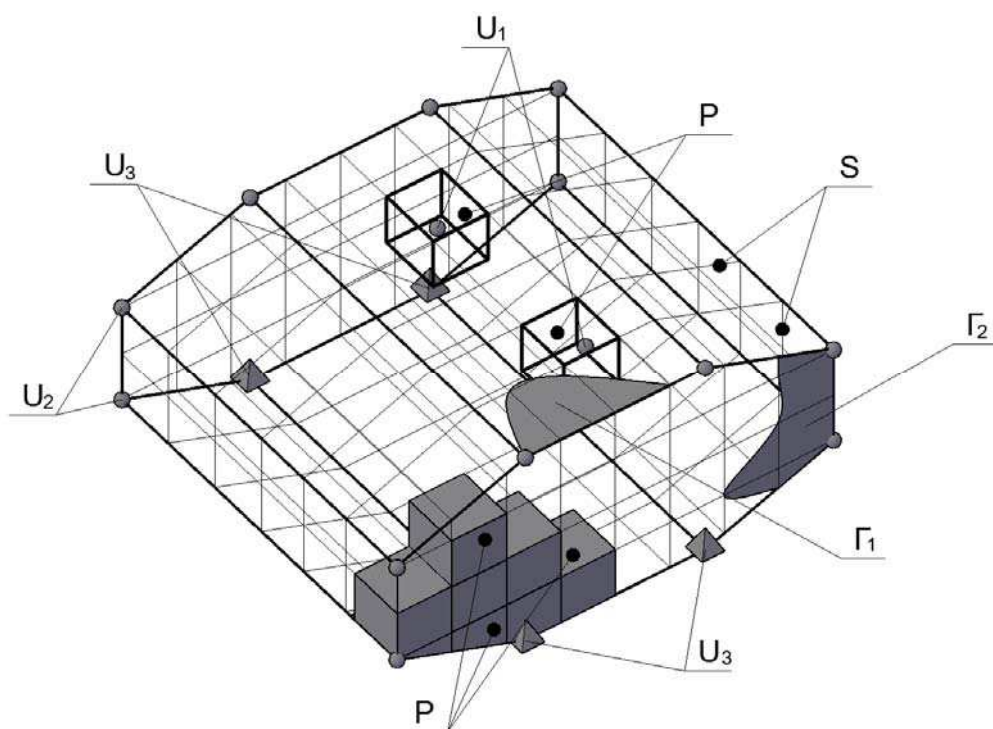
Первый этап.

Задаем фиксированное число N . Для каждого N в результате решения экстремальной задачи (1) можно выбрать вариант стержневой системы с наименьшей величиной L . Каждый вариант деформируемого объекта представляется как особь с варьируемыми параметрами X, Y, Z . Топология конструкции с учетом ограничения 1.3 однозначно определяется расположением узлов U_1, U_2 и построенных на этих узлах стержней. В основу вычислительного аппарата процедуры тетра-

эдризации был положен алгоритм, реализованный в свободно распространяемой библиотеке CGAL [16], и отдельные положения работ [6, 9, 12]. При минимизации (1) используется генетический алгоритм, в котором в качестве критерия выживаемости рассматривается значение L . Чем меньше L , тем выживаемость для особей (объектов), удовлетворяющих поставленным ограничениям, считается более высокой. Для построения структуры конструкции предусматривается выполнение следующих процедур.

1. *Задание исходной информации.* Формируются данные об узлах U_1 и U_2 в виде массивов изменяемых и неизменяемых координат; на данном этапе задаются стержни по узлам множества U_2 с учетом соблюдения условия Делоне для плоской триангуляции [8]. Эти стержни при построении топологии деформируемого объекта будут считаться включенными в тетраэдризацию в качестве ребер тетраэдров.

2. *Синтез структуры конструкции путем тетраэдризации Делоне с ограничениями.* Топологическая схема стержневой системы представляется в виде неориентированного графа $G(U, R)$, заданного множеством вершин $U = U_1 + U_2$ и множеством ребер R . Внутренними областями графа являются тетраэдры. Ребра определяют положение стержней несущей системы. Введем вспомогательный объем V_0 , называемый суперструктурой [6], в которой будут располагаться узлы U_1 и U_2 . Задаем грани Γ_1 только по узлам U_2 и грани Γ_2 по узлам U_2 и U_3 как показано на рисунке 1. Величина V_0 определяется отсечением части пространства этими гранями. Узлы U_3 не принадлежат конструкции, а определяют допустимые размеры ее габаритов при образовании структуры. Узлы, в которых предполагаются опорные связи, включаются во множество U_2 . Объем V_0 разбивается сеткой S на систему P прямоугольных параллелепипедов и треугольных призм. В каждом таком объеме может

Рисунок 1. Суперструктура V_0

располагаться по одному из узлов U_1 . В объеме P , занятые узлами множества U_2 , узлы множества U_1 попадать не могут. Рассмотрим процесс построения тетраэдризации. Считаем V_0 объемом выпуклого тела, тогда тетраэдризацией этого тела будет являться построение тетраэдров на узлах U_1 , U_2 , U_3 и дополнительно введенных узлах на гранях Γ_1 и Γ_2 тела. Узлы на гранях Γ_1 задаются в соответствии с конструктивными требованиями к объекту (горизонтальность или наклонность покрытия, опирание других конструкций и т.п.). Эти узлы принадлежат графу G конструкции. На гранях Γ_2 узлы могут формироваться путем ручного ввода или в результате реализации алгоритма отдельной двумерной триангуляции [6, 8]. Синтез топологической схемы объекта осуществляем с учетом следующих этапов:

1. Задание множеств узлов U_2 и U_3 , задание граней Γ_1 и Γ_2 , формирование узлов на этих гранях.
2. Задание стержней на узлах граней Γ_1 или

их формирование путем плоской триангуляции, включение этих стержней в тетраэдризацию в качестве ребер тетраэдров.

3. Идентификация системы объемов P (см. рис.1), формирование массивов координат $\{X_p\}_i, \{Y_p\}_i, \{Z_p\}_i$ внутри каждого такого объема. При этом $\{X_p\}_i \subset \{X\}$, $\{Y_p\}_i \subset \{Y\}$, $\{Z_p\}_i \subset \{Z\}$. Здесь i – номер объема.

4. Формируется начальное поколение. Каждая особь в поколении строится путем случайного выбора допустимых значений параметров из множеств X, Y, Z . Выбор этих координат в системе объемов P выполняется следующим образом:

- случайно для размещения узла назначается какой-либо объем с номером i ;
- проверяется условие пустоты этого объема от какого-либо из узлов U_1, U_2 ;
- если объем пуст, то случайно выбираются координаты $\{X_p\}_i, \{Y_p\}_i, \{Z_p\}_i$. Если нет – случайным образом выбирается другой пустой объем.

5. Для каждой особи в поколении делается построение ребер тетраэдризации [6, 12].

Организуется цикл по узлам U_1 и U_2 . Для каждого узла строятся отрезки, соединяющие узел со всеми другими узлами. Наличие диаметрального шара, в котором или на границе которого нет других узлов, кроме узлов концов отрезка (условия пустоты диаметрального шара с допущениями ограничения 1.3), гарантирует присутствие этого отрезка в тетраэдризации в виде ребра какого-либо тетраэдра. Если диаметральный шар отрезка не пуст, отрезок исключается из дальнейшего рассмотрения. Построения отрезков продолжаются до тех пор, пока все диаметрально-шары всех отрезков не будут удовлетворять условию пустоты. По построенным ребрам восстанавливаются грани тетраэдров. Восстановление граней необходимо для идентификации отдельных тетраэдров, которые используются на следующем этапе процедуры построения.

6. Для всех построенных тетраэдров каждой особи проверяется условие Делоне с ограничениями. Если данное условие выполняется, то вариант конструкции помещается в базу данных синтезированных конструкций и используется для дальнейшего анализа. Если нет – в текущем поколении создается новая особь путем повторения для нее этапов 4-6. Далее реализуется итерационный процесс, включающий редактирование базы данных синтезированных конструкций в соответствии с критерием выживаемости (значение L) и принципом «элитизма», описанным в работе [4]. Для особей, выбираемых из базы данных синтезированных конструкций методом рулетки [4], при помощи модифицированных генетических операторов [11] выполняется выбор положений узлов множества U_1 . Эти операторы следующие:

1) *Инверсия*. Выполняется перестановка параметров относительно выбранных случайным образом точек инверсии по известной схеме, применяемой в генетических алгоритмах [2].

2) *Многоточечная мутация*. Случайно для каждого выбранного варианта конструкции могут изменяться несколько параметров.

3) *Многоточечный кроссинговер*. По стохастической схеме в каждой выбранной паре особей определяются несколько точек разреза. Далее осуществляется обмен параметрами в соответствии с классической схемой кроссинговера [4]. После применения генетических операторов для вновь сформированного расположения узлов повторяются этапы 5-6.

Построения тетраэдризации оканчиваются тогда, когда на протяжении 150-250 итераций в базе данных синтезированных конструкций не происходит изменений. Если для какого-либо объекта тетраэдризацию построить не удастся – реализуется новое редактирование базы данных синтезированных конструкций.

Следует отметить, что построение тетраэдризации точек в общем случае не гарантирует выбора оптимальной топологии стержневой системы, поэтому считаем полученную структуру избыточной и приступаем к реализации второго этапа – параметрического синтеза конструкции.

Второй этап.

Для полученной топологии строится конечно-элементная модель. При этом узлы графа G конструкции отождествляются с узлами метода конечных элементов, а ребра тетраэдров – со стержнями. Решаем экстремальную задачу (2). Предусматриваются следующие процедуры.

1. Задание исходной информации. Вводится информация о закреплениях, множествах допустимых значений типоразмеров профилей стержней, вариантах нагружения, ограничениях по прочности и устойчивости стержней, ограничениях по жесткости конструкции.

2. Параметрическая оптимизация конструкции. Для структуры конструкции рассмотрим возможность группировки конструктивных элементов с учетом характера их работы и симметрии объекта. С учетом этих условий формируется дискретное множество допустимых для выбора параметров T . Ис-

пользуем известный прием введения «нулевых» (отсутствующих) стержней, имеющих относительно малый модуль упругости материала. Нулевые стержни учитываются во множестве T . Ограничения 2.1-2.3 считаем активными. Проверка общей устойчивости конструкции выносится за пределы процедуры оптимального синтеза.

Каждый вариант деформируемого объекта представляется как особь с варьируемыми параметрами $\{\tilde{X}\}, \{\tilde{Y}\}, \{\tilde{Z}\}, \{T\}$. Координаты $\{\tilde{X}\}, \{\tilde{Y}\}, \{\tilde{Z}\}$ задаются с учетом незначительных отклонений от полученных на первом этапе координат узлов U_1 . При этом дискретные множества координат составляем так, чтобы в конструкции при варьировании не образовывалось слишком острых углов между стержнями.

Далее реализуется эволюционный алгоритм оптимизации, подробно описанный в работе [11]. После выполнения синтеза конструкций на основе метода конечных элементов анализируется общая устойчивость для всех полученных вариантов стержневых систем. Объект или несколько объектов, для которых условие удовлетворено, можно считать решением задачи.

3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим синтез топологии пространственной стержневой системы в виде прямоугольной в плане структурной плиты. Сформируем объем V_0 с максимальными размерами, показанными на рисунке 2. На верхней грани вводилось 25 узлов множества U_2 . По этим узлам задавалось 44 стержня, выделенных на рис. 3 утолщенной линией и включаемых в тетраэдризацию в качестве ребер тетраэдров. На нижней грани вводилось 4 узла U_2 , в которых предусматривались шарнирно-неподвижные опоры. Суперструктура V_0 разбивалась при помощи равномерной

сетки S с шагом 3 м по оси x и 2,8 м по оси y на прямоугольные параллелепипеды. В направлении оси z деление не выполнялось. В каждом параллелепипеде учитывалось по 27 возможных положения узла U_1 .

Все узлы множества U_2 , исключая опорные, загружались сосредоточенными силами. При этом в узлы, не лежащие на контурах верхней грани V_0 , вводилась сила величиной P , а в узлы, лежащие на контурах этой грани, кроме крайних узлов – $P/2$. В крайние узлы вводилась сила $P/4$.

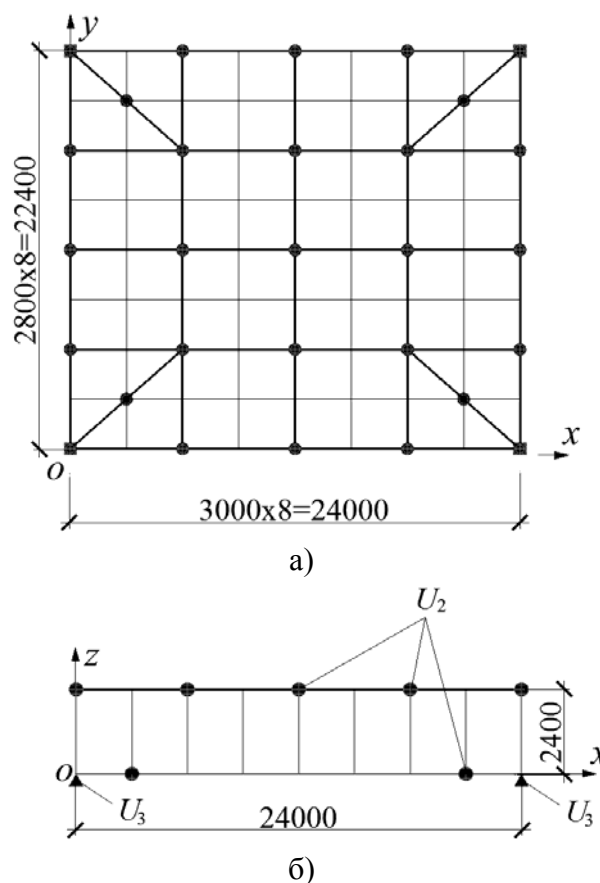


Рисунок 2. Объем V_0 и его разбиение:
а – вид в плане; б – вид сбоку

Задавалось: $P=90$ кН; материал стержней – сталь С325; модуль упругости материала $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа. Считаем сопряжения узлов шарнирными. Рассматривалось два варианта решения задачи с разными исходными

значениями N . В первом случае предусматривалось введение четырех узлов U_1 ($N=4$), а во втором – двенадцати узлов U_1 ($N=12$). Каждый итерационный процесс проходил в два этапа. На первом этапе по критерию минимума длины стержней синтезировалась конструкция, для которой выполнялись условия Делоне с ограничениями. Данный этап прекращался при отсутствии изменений в базе данных лучших вариантов на протяжении 200 итераций. На втором этапе выполнялась параметрическая оптимизация с учетом группировки конструктивных элементов в зависимости от формы синтезированной структуры. Варьировались координаты узлов U_1 , допустимые значения которых формировались с учетом полученных на первом этапе величин. Вводилась следующая группировка конструктивных элементов. Заданные заранее стержни объединялись в три группы. Первая объединяет все вертикальные элементы, вторая – горизонтальные, третья – наклонные. Для остальных элементов группировка выполнялась с учетом симметрии конструкции. Предусматривалась возможность исключения стержней из структуры конструкции, и варьировались типоразмеры профилей в виде круглых труб по ГОСТ 10704-91: 40х3, 60х3,5, 83х5, 102х5, 108х5, 133х4, 152х5, 168х8, 219х8, 273х9, 325х9, 377х8. Профили нумеровались в указанном порядке от 2 до 13. Во множество T вводились площади поперечных сечений:

$$T = \{10^{-5}; 3,49; 6,21; 12,25; 15,24; 16,18; 16,21; 23,09; 40,21; 53,03; 74,64; 89,34; 92,74\}.$$

Вертикальное перемещение каждого из узлов по требованиям [15] не допускалось более 80 мм. Ограничения по устойчивости стержней учитывались в соответствии с [14]. При $N=4$ синтез топологии был выполнен с образованием ста, а при $N=12$ – ста тридцати двух стержневых элементов.

В результате структурно-параметрического синтеза получилось несколько конструкций, наиболее рациональные из которых приведены на рисунках 3, 4. Цифрами на рисунках

3,а и 4,а показаны номера профилей в сечениях стержней в принятой системе нумерации. Кругками очерчены найденные положения узлов U_1 . Масса несущей системы, показанной на рисунке 3 – 13,659 т, на рисунке 4 – 18,918 т. Все решения найдены не более чем за 600 итераций генетического алгоритма, реализуемых на втором этапе оптимизации.

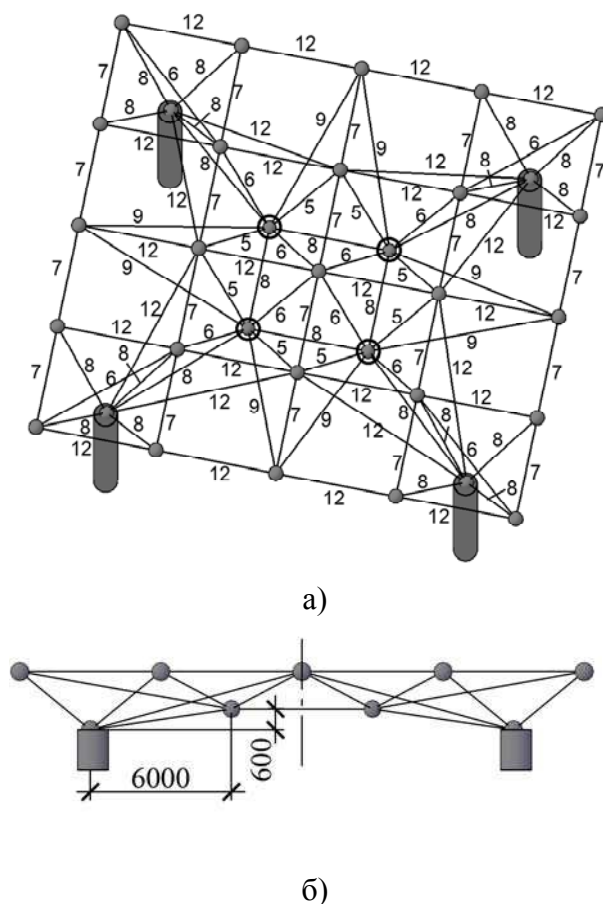


Рисунок 3. Результат решения задачи при $N=4$: а – аксонометрия; б – вид сбоку

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана вычислительная схема оптимального синтеза структурных плит, предусматривающая два уровня поиска рациональных решений. Предложенный подход значительно расширяет возможности поиска

рациональных решений при проектировании стержневых систем такого типа. Алгоритмы

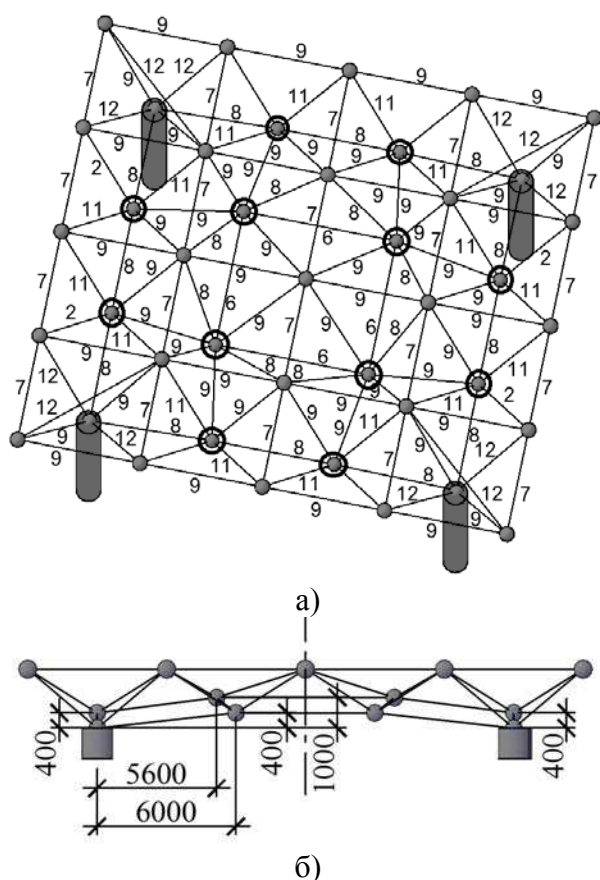


Рисунок 4. Результат решения задачи при $N=12$: а – аксонометрия; б – вид сбоку

можно рекомендовать к использованию в системах автоматизированного проектирования строительных конструкций.

ЗАМЕЧАНИЕ

Работа выполнена при поддержке грантов Губернатора Брянской области молодым ученым региона (свид. № 01 от 25.06.2010 г., свид. № 03 от 26.08.2012), а также при поддержке гранта РФФИ 13-08-00457

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алёхин В.Н., Ханина А.Б. Разработка модели генетического алгоритма для оп-

тимизации стальных многоэтажных рам // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2008. – Vol. 80. – P. 16–18.

2. Юрьев А.Г., Ключев С.В. Эволюционные и генетические алгоритмы оптимизации строительных конструкций. – Белгород: БГТУ им. В.Г. Шухова, 2006. – 134 с.
3. Ольков Я.И., Андронников А.В. Автоматизированное оптимальное проектирование пространственных металлических стержневых конструкций с использованием алгоритмов структурной оптимизации [Текст] // Известия вузов. Строительство. – 2003. – №12. – С. 8-13.
4. Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. – М.: Издательство АСВ, 2012. – 240 с.
5. Balling R., Briggs R., Gillman K. Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm // Journal of Structural Engineering. ASCE. – 2006. – Vol. 132. – P. 1158 -1165.
6. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
7. Lee K.S., Geem Z.W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm // Computers and Structures. – 2004. – Vol. 82. – P. 781–798.
8. Алексейцев А.В., Серпик И.Н. Оптимизация плоских ферм на основе генетического поиска и итеративной процедуры триангуляции // Строительство и реконструкция. – 2011. – № 2 (34). – С. 3-8.
9. Алексейцев А.В., Серпик И.Н., Курченко Н.С. Формообразование структурных конструкций с использованием генетических алгоритмов и тетраэдризации Делоне // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №1. – С. 41-49.
10. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем //

Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 2. – С. 60–63.

11. **Алексейцев А.В., Курченко Н.С.** Поиск рациональных параметров стержневых металлоконструкций на основе адаптивной эволюционной модели // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 3. – С. 7-15.
12. **Borovikov S.N., Kryukov I.E., Ivanov I.A.** Constrained Delaunay tetrahedralization for bodies with curved boundaries // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 45. – P. 1358-1373.
13. **Себешев В.Г.** Кинематический анализ сооружений. – Новосибирск: НГА-СУ(Сибстрин), 2006. – 58 с.
14. СП 16.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП II–23–81*. Стальные конструкции / М.: ГУП ЦПП, 2011. – 96 с.
15. СП 20.13330.2011. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07–85*. Нагрузки и воздействия / М.: ГУП ЦПП, 2011. – 36 с.
16. Computational Geometry Algorithms Library [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.cgal.org/>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения: 04.03.2013).

Алексейцев Анатолий Викторович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры механики ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия», 241037, Россия, г. Брянск, пр-т Станке-Димитрова, 3, тел.: 8(4832) 62-32-54, +7 960-564-33-58, e-mail: aalexw@mail.ru.

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ВО ВРЕМЕНИ

М.С. Барабаш

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается влияние реологических свойств бетона на усилия, возникающие в несущих конструктивных элементах строительного объекта. Цель теоретических исследований состоит в установлении влияния процесса ползучести бетона на напряженно-деформированное состояние несущих конструкций.

Ключевые слова: моделирование, жизненный цикл, ползучесть бетона, несущие конструкции, информационная технология

THE SIMULATION METHODS OF STRESS-DEFORMED STATE OF STRUCTURES IN TIME

Maria S. Barabash

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: In given article is considered the influence the rheological properties of the concrete forces occurring in the bearing structural elements of building object. The aim of theoretical research was concluded in determination of influence creep of concrete on bearing systems' stress-strain state.

Key words: modeling, life cycle, creep of concrete, information technology

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежность и долговечность бетонных и железобетонных конструкций и сооружений не может быть обеспечена без учета важных особенностей деформирования бетона. Реологические свойства бетона, обусловленные, в основном, его свойством ползучести, оказывают большое влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции во времени. Так, с течением времени происходит перераспределение усилий между сильно и слабо нагруженными элементами, между арматурой и бетоном. Нарастание перемещений во времени также оказывает существенное влияние на НДС конструкции, изменяющееся с течением времени.

Особенно это сказывается для таких конструкций, как пологие железобетонные оболочки, для которых уменьшение стрелы подъема может сказаться на увеличении усилий в несколько раз и привести к аварии. Прогнозирование длительного деформирования бетона во времени является актуальным, т.к. от правильного учета этих особенностей бетона и железобетона при проектировании зависит надежность и долговечность сооружений, а также соответствие сооружения предъявляемым к нему требованиям.

Необходимо отметить, что проектируемое сооружение кроме надежности, безопасности и экономической целесообразности должно обеспечить функциональную пригодность. Определение функциональной пригодности

сооружений невозможно без правильного прогнозирования перераспределения напряжений между бетоном и арматурой происходящего вследствие ползучести бетона.

Ползучесть бетона может быть определена как увеличение деформации при постоянной нагрузке. Деформации ползучести могут в несколько раз превосходить деформации от кратковременной нагрузки, поэтому изучение и учет ползучести имеет большое значение в строительстве.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Действующие нормы проектирования практически не учитывают фактор времени и срок службы в расчетах несущих конструкций. Однако, с течением времени железобетонные конструкции изменяют свои жесткостные характеристики, в частности снижаются прочность и модуль упругости бетона.

Напряжения в арматуре и бетоне следует определять по расчетным диаграммам состояния материалов исходя из суммарных относительных деформаций от всех воздействий, включая начальные и развивающиеся в процессе эксплуатации конструкции (усадка, ползучесть, набухание, предварительное напряжение, самонапряжение и т. п.).

Развивающийся во времени процесс разрушения связывают с явлением ползучести, вследствие чего происходит накопление повреждений. Кривую длительной прочности строят в координатах напряжение-время до разрушения для данного напряжения. В двойных логарифмических координатах часто получают два отрезка прямых. Первый участок соответствует вязкому разрушению при высоких уровнях нагрузок, второй участок соответствует хрупкому разрушению в результате накопления микротрещин в межзеренных образованиях.

Несущая способность эксплуатируемой конструкции может быть точно установлена лишь при ее разрушении, что неприемлемо с практической точки зрения, а неразрушающие методы контроля дают лишь косвенную информацию о состоянии объекта. Поэтому важным моментом становится проведение численного эксперимента по определению действительного напряженно-деформированного состояния.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Методы расчёта, основанные на классических аналитических методах, не всегда позволяют полностью обеспечить выполнение данных требований. В связи с этим создаются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Поэтому большое значение приобретает выбор математических моделей адекватно описывающих работу конструкции при учете изменяющихся со временем жесткостных характеристик.

Значение длительной прочности бетона получают экстраполяцией опытных данных:

$$\eta_u = \sigma_u / R_b - 0,041gt, \quad (1)$$

где η_u длительная прочность бетона

σ_u - напряжение

R_b –нормативное сопротивление бетона.

t - время выдержки старого бетона под действием длительной нагрузки;

Длительное ступенчатое нагружение приводит к повышению длительной прочности. Причиной этого является приспособляемость материала и снижение концентрации (релаксация) напряжений за счет ползучести, создаются условия для более синхронного разрушения отдельных объемов материала, вследствие этого рекомендуется постепенное нагружение конструкции в течение нескольких месяцев.

Программный комплекс ЛИРА-САПР предоставляет возможность проведения численных экспериментов такого рода. В этом комплексе учет ползучести реализован на основе модифицированной теории старения [4,5] согласно которой касательный (тангенциальный) модуль упругости зависит от начального модуля упругости E_{cm} , относительной влажности среды RH , времени эксплуатации t и напряжения в бетоне σ :

$$E_c = f(E_{cm}, RH, t, \sigma). \quad (2)$$

Эту зависимость можно выразить с помощью коэффициента ползучести $\varphi(t, t_0)$:

$$E_c = \frac{E_{cm}}{\varphi(t, t_0)} \quad (3)$$

Ползучесть и усадка бетона зависят, в основном, от относительной влажности окружающей среды. На ползучесть и усадку бетона также оказывает влияние геометрические размеры конструктивного элемента и состав бетона, степень зрелости бетона (начальная прочность) при первоначальном приложении нагрузки, а также продолжительность нагружения и величина нагрузки.

Коэффициент ползучести $\varphi(t, t_0)$ связан с касательным (тангенциальным) модулем упругости E_c , который может быть принят равным $1,05E_{cm}$. ($E_c = 1,05 E_{cm}$), где E_{cm} - модуль деформации.

Если особая точность не требуется, то в качестве предельной характеристики ползучести $\varphi(\infty, t_0)$ может быть принято значение от 0,95, при условии, что бетон в момент времени, соответствующий приложению нагрузки, $t = t_0$, не подвергается сжимающим напряжениям, большим, чем $0,45f_{ck}(t_0)$.

Где f_{ck} — характеристическая цилиндрическая прочность бетона на сжатие в возрасте 28 сут.

Зависимость коэффициента ползучести от времени может быть выражена формулой:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0), \quad (4)$$

где φ_0 — условный начальный коэффициент ползучести бетона, $\beta_c(t, t_0)$ — коэффициент учета ползучести во времени.

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0). \quad (5)$$

Если расчетное сопротивление бетона сжатию $f_{cm} > 35$ МПа, то для дальнейшего расчета необходимо ввести поправочные коэффициенты, которые в остальных случаях равны 1:

$$\alpha_1 = [35/f_{cm}]^{0,7}; \quad (6)$$

$$\alpha_2 = [35/f_{cm}]^{0,2}; \quad (7)$$

$$\alpha_3 = [35/f_{cm}]^{0,5}. \quad (8)$$

Фактор влияния относительной влажности RH на коэффициент ползучести:

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0,1 \sqrt[3]{h_0}} \alpha_1 \right] \alpha_2, \quad (9)$$

где h_0 - условный размер элемента, в мм:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}, \quad (10)$$

где A_c – площадь бетонного сечения, u – часть периметра сечения, которая подвержена атмосферному воздействию. Фактор, учитывающий прочность бетона:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{10,8}{\sqrt[3]{f_{cm}}}. \quad (11)$$

Фактор, разрешающий влияние условного возраста бетона на коэффициент ползучести:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}}, \quad (12)$$

где t_0 – условный возраст бетона:

$$t_0 = \sum_{i=1}^n e^{\left(\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13,65\right)} \Delta t_i, \quad (13)$$

где $T(\Delta t_i)$ – превалирующая температура периода, Δt_i – количество дней с этой температурой.

Коэффициент учета развития ползучести во времени:

$$\beta_c(t, t_0) = [(t - t_0) / (\beta_H + t + t_0)]^{0,3}, \quad (14)$$

где β_H – коэффициент влияния влажности и условного размера элемента:

$$\beta_H = 1,5[1 + (0,012RH)^{1,8}]h_0 + 250\alpha_3 \leq 1500\alpha_3. \quad (15)$$

Если напряжения сжатия бетона в возрасте t_0 превышает значение $0,45f_{ck}(t_0)$, то, как правило, следует учитывать нелинейную ползучесть. Такой высокий уровень напряжений может появиться в результате предварительного напряжения, например, в сборных преднапряженных элементах на уровне напрягаемой арматуры. В этих случаях нелинейный условный коэффициент ползучести определяется по формуле

$$\varphi_{nl}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot e^{(1,5(k_\sigma - 0,45))}, \quad (16)$$

При этом $\varphi_{nl}(\infty, t_0)$ – нелинейный условный коэффициент ползучести, вводимый взамен $\varphi(\infty, t_0)$;

k_σ — отношение «напряжение — прочность» $\sigma_c/f_{ck}(t_0)$,

где σ_c — напряжение сжатия, а $f_{ck}(t_0)$ — характеристическая прочность бетона в момент времени, соответствующий нагружению.

Деформация ползучести бетона $\varepsilon_{cc}(\infty, t_0)$ в возрасте $t = \infty$, при постоянном напряжении сжатия σ_c , приложенном во время $t = t_0$, рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon_{cc}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \frac{\sigma_c}{E_{c0}}; \quad (17)$$

Где E_{c0} — модуль упругости для нормального бетона при напряжении $\sigma_c = 0$ в возрасте 0 сут;

Описанная методика реализована в программном комплексе ЛИРА-САПР.

Технология расчета конструкций с учетом ползучести бетона выглядит следующим образом:

- выполняется расчет в линейной постановке на все виды нагружений (статические, силовые, статические деформационные, динамические);
- определяются расчетные сочетания усилий или расчетные сочетания нагружений;
- выполняется подбор арматуры в сечениях стержневых или пластинчатых элементов;
- производится унификация армирования элементов;
- по результатам армирования формируются новые жесткостные характеристики конструктивных элементов для последующего нелинейного расчета;
- задаются параметры ползучести бетона, учитывающие влажность и усадку бетона;
- назначается нагружение, на которое будет производиться расчет с учетом ползучести бетона;
- выполняется расчет для заданных промежутков времени. На каждом этапе расчета для каждого элемента определяется новая жесткость, которая зависит от напряжения бетона в этом элементе и заданных параметров ползучести. Новые переменные жесткости получаются в точках интегрирования как по сечению, так и по конечному элементу, в соответствии с заданной диаграммой деформирования. На каждом этапе определяются усилия, перемещения и новые жесткости по касательному модулю деформации для заданного промежутка времени.

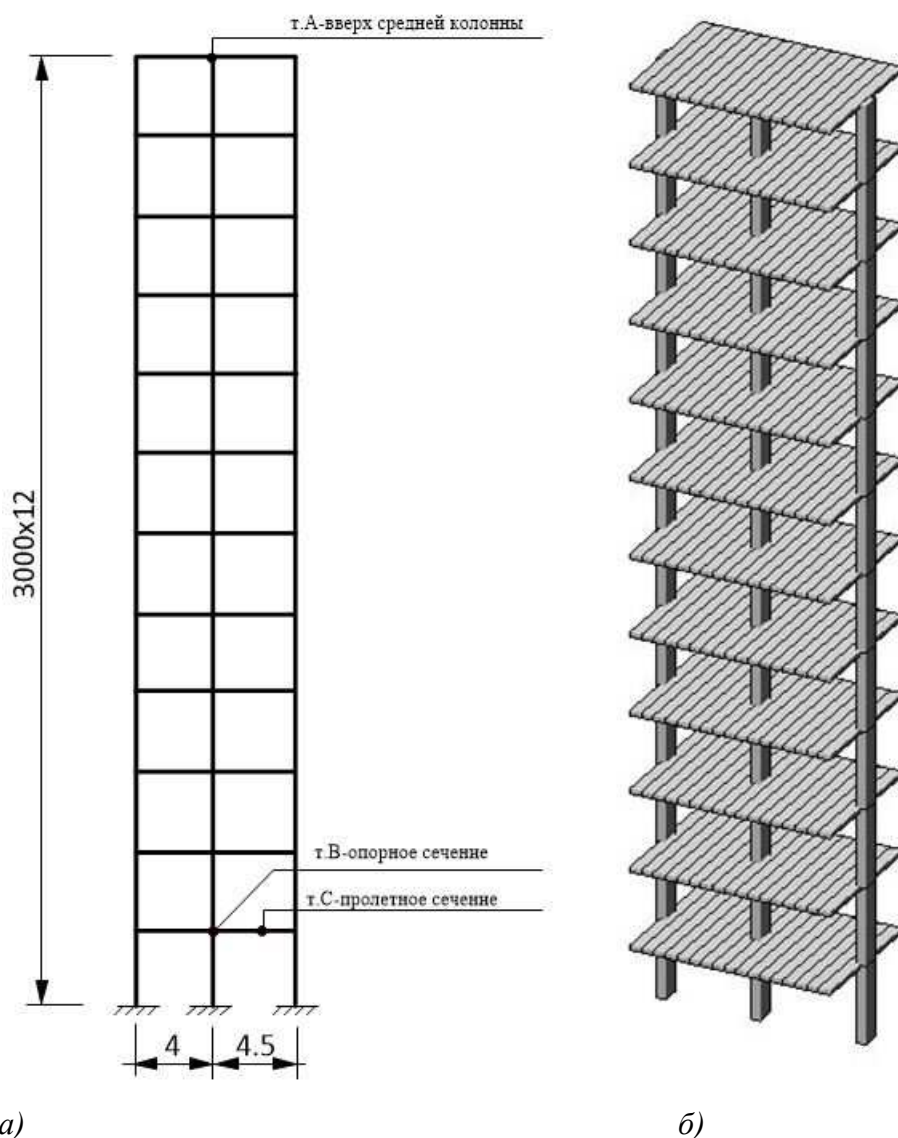


Рисунок 1. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) многоэтажной рамы.

ПРИМЕР 1. ДВУХПРОЛЕТНАЯ МНОГОЭТАЖНАЯ РАМА

Приведем примеры численного эксперимента по моделированию изменения напряженно-деформированного состояния во времени для многоэтажной рамы и пологой железобетонной оболочки.

На рисунке 1 приведена расчетная схема и компьютерная модель железобетонной многоэтажной двухпролетной рамы.

Условно раму можно рассматривать как

фрагмент пространственного железобетонного монолитного каркаса здания. Ригели представляют собой вырезанные полосы перекрытий шириной 6 м и толщиной 0,2 м. Колонны имеют прямоугольное сечение - 40х60см. Длительная нагрузка на ригель составляет 180кН/п.м. Бетон марки В40, относительная влажность составляет 80%.

В таблице 1 представлены усилия и перемещения элементов многоэтажной рамы при упругом и физически нелинейном расчетах с учетом ползучести. Анализ результата, при-

веденного в таблице 1, свидетельствует о некотором перераспределении усилий и значительном увеличении деформаций при учете ползучести, по сравнению с упругим расчетом. Так нормальная сила в средней наиболее нагруженной колонне -1024,83 кН с течением времени уменьшается до -970,44 кН, перераспределяясь на менее на-

груженные крайние колонны. Опорный момент в ригеле (сечение В) -24,84 кН также уменьшается до -20.76 кН, перераспределяясь на пролетное сечение С. В ряде случаев значительное увеличение перемещений, может оказаться решающим фактором в обеспечении живучести конструкций.

Таблица 1

	Упругий расчет	Нелинейный расчет с ползучестью			
		28 суток	365 суток	1100 суток	1500 суток
Нормальная сила N в средней колонне I этажа	-679,43	-1024,83	-988,96	-973,65	-970,44
Нормальная сила N в крайней колонне I этажа	-458,66	-669,55	-686,87	-694,27	-695,82
Момент M в ригеле (опорное сечение, В), кН	-24,57	-24,84	-26,17	-29,28	-20.76
Момент M в ригеле (пролетное сечение, С), кН	21	22,92	24,03	24,50	24,59
Перемещение верха средней колонны (z), мм	-19,69	-51,94	-63,21	-67,99	-68,99

ПРИМЕР 2. ПОЛОГАЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННАЯ АРКА

На рисунке 2 представлена расчетная схема и компьютерная модель пологой арки. Пролет арки составляет 20 м, стрела подъема принимается 0.5 м, поперечное сечение 600x20 см. Арка загружена, кроме собственного веса, равномерно распределенной нагрузкой $q=8\text{ т/м}$. Бетон принимается марки В40, относительная влажность 50%. В таблице 2 приведены результаты расчетов в упругой постановке и в нелинейной постановке с учетом ползучести бетона при армировании нижнего слоя $F_a=50\text{ см}^2$ и верхнего слоя $F_a=30\text{ см}^2$. При моделировании пологой арки необходимо одновременно учитывать и физическую, и геометрическую нелинейность, в связи с тем, что одновременно необходимо учесть совместную работу бетона и арматуры и изменение формы арки при действии постоянно действующей равномерно-

распределенной нагрузки.

Приведенный пример показывает насколько важно моделировать работу конструкций в эксплуатационный период.

Учет ползучести может обнаружить значительный рост перемещений и усилий.

Приведенные в таблице 2. результаты показывают, что перемещения через 5 лет эксплуатации более чем в 5 раз превысили перемещения, полученные на основании упругого расчета.

Нормальные усилия в оболочке в связи с тем, что она стала более полой, увеличились в 1.2 раза, а изгибающий момент в середине пролета в 6.5 раз.

Для пологих железобетонных оболочек увеличение перемещений уменьшает пологость оболочки, что может привести к значительному росту усилий. В этом смысле моделирование работы конструкций во времени и учет ползучести может выявить важные факторы, влияющие на живучесть конструкций.

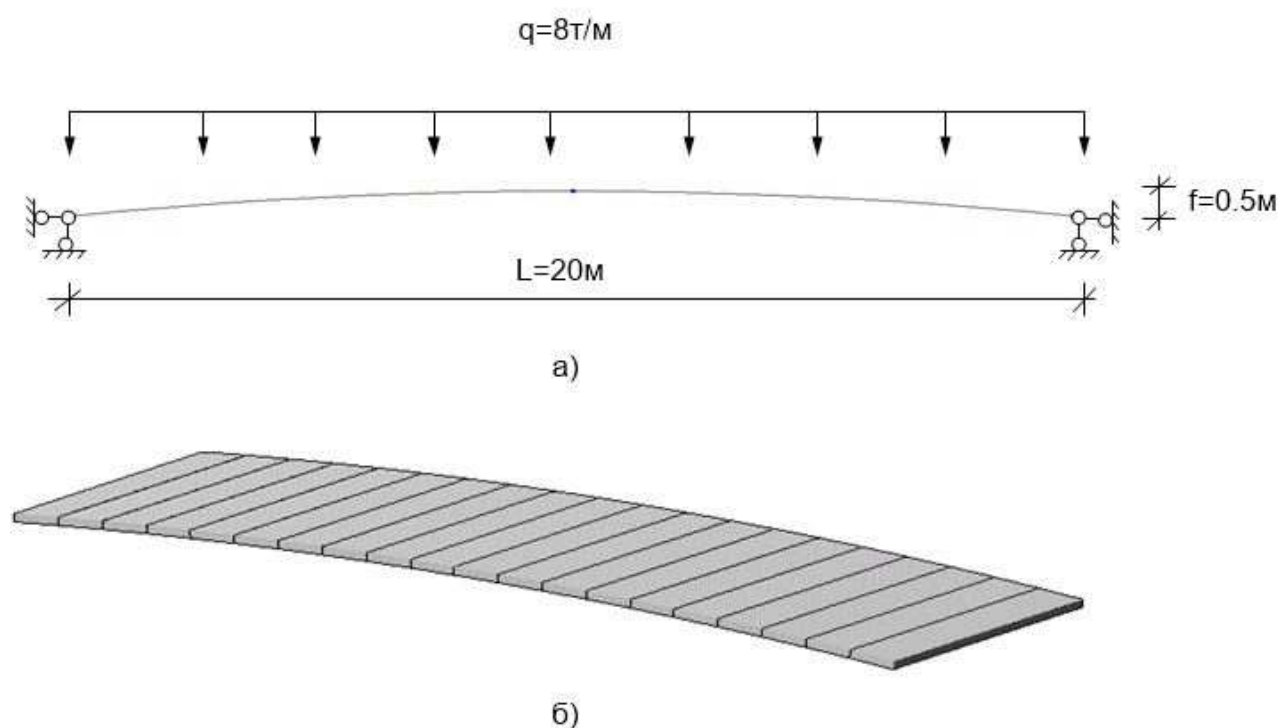


Рисунок 2. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) пологой арки

Таблица 2

Параметры напряженно- деформированного со- стояния	Упругий расчет	Нелинейный расчет с учетом ползучести				
		0 суток	28 суток	365 су- ток	1100 суток	1500 суток
Максимальные перемещения по оси x ,мм	$\pm 0,99$	$\pm 1,67$	$\pm 1,65$	$\pm 1,65$	$\pm 1,65$	$\pm 1,65$
Максимальные перемещения по оси z в середине пролета,мм	-43,5	-193	-205	-222	-230	-232
Nmax, т	-1111,4	-1281,9	-1298,99	-1323,16	-1335,57	-1338,3
Mmax, т*м	14	68	75,5	85,8	91	92,1

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ

Для современных сложных сооружений (мосты, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только упругим расчетом, но и процессом изменения напряженно-деформированного состояния во времени. В процессе эксплуатации конструк-

тивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения перераспределяться, значительно повышая вероятность трещинообразования.

Для изучения физической системы методами математического моделирования ее заменяют абстрактной системой - математической моделью.

Реализация математической модели на компьютере дает возможность многократно и в широком диапазоне изменять входные параметры и условия функционирования сложных систем, заменяя, таким образом, экспериментальные исследования численным экспериментом. Кроме того, при решении ряда сложных конструкторских задач возможно и необходимо применение вариантного проектирования.

На современном этапе развития компьютерной техники разработано множество программных комплексов (ЛИРА-САПР, MOHOMAX-САПР, SCAD, STARK, COSMOS, ANSYS, NASTRAN и др.), реализующих метод конечных элементов и позволяющих производить расчеты сложных систем.

Программный комплекс ЛИРА-САПР предназначен для расчета и проектирования строительных конструкций различного назначения, производит расчеты геометрически и физически нелинейных сложных систем. Учет особенностей изменения напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций высотных зданий во времени реализован в программном комплексе ЛИРА-САПР.. Моделирование процесса старения бетона, по сути, является нелинейной задачей, обусловленной учетом свойств материала (физическая нелинейность). Решение этой задачи в ПК ЛИРА САПР основана на основных методах теории прочности бетона, которые в физическом смысле представляют собой реализацию законов нелинейного деформирования материалов по различным теориям.

ВЫВОДЫ

Моделирование учета реологических свойств материала имеет большое значение для конструкций строительных объектов из монолитного железобетона, так как в этом случае необходимо учитывать такие эффекты:

- при длительном действии нагрузки происходит перераспределение усилий между сильно нагруженными элементами (усилия в них уменьшаются) и менее нагруженными (усилия в них увеличиваются);
- ползучесть бетона обуславливает рост перемещений, что, помимо увеличения деформативности, может вызвать увеличение усилий (случай пологой оболочки)
- в железобетонном элементе при длительном действии нагрузки в результате ползучести бетона происходит перераспределение усилий между бетоном и арматурой;
- в центрально-сжатых железобетонных колоннах усадка и ползучесть действуют в одном направлении, уменьшая напряжения в бетоне и увеличивая их в продольной арматуре, так как бетон, деформируясь, разгружается. Однако при увеличении нагрузки на колонну деформации арматуры возрастают, в то время как в бетоне предельные деформации ограничиваются сравнительно небольшими значениями. Это приводит к обратному перераспределению усилий – нагружению бетона и нагрузке арматуры. Ползучесть бетона, вызывая увеличение напряжений в арматуре колонн при эксплуатационной нагрузке, не уменьшает конечной несущей способности элемента.
- неравномерная осадка вертикальных элементов (колонны и пилоны имеют большие деформации, чем стены и диафрагмы);
- конструкции, как правило, включаются в работу до набора бетоном расчетной прочности (как правило, распалубка производится значительно раньше, чем бетон наберет расчетную 28-дневную прочность);

и многие другие эффекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – М: Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.
2. **Верюжский Ю.В., Колчунов В.И., Барабаш М.С., Гензерский Ю.В.** Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. – Учебное пособие. – К.: Книжное издательство НАУ, 2006. – 808 с.
3. **Яценко Е.А.** Влияние длительных нагрузок и ползучести бетона на предельные состояния железобетонных конструкций // Бетон и железобетон. - 1990. - № 8. -С.21-22.
4. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings (p.30)
5. Eurocode 2: Design of concrete structures. Annex B (p.202)

Барабаш Мария Сергеевна, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, докторант, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, дом 1
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, Department of Computer Technology Construction, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА КОНСТРУКЦИЙ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ПРОГРЕССИРУЮЩЕМУ РАЗРУШЕНИЮ

М.С. Барабаш

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются вопросы обеспечения безопасности при эксплуатации высотных зданий и сохранения проектных показателей при возникновении аварийных ситуаций и локальных обрушений строительного объекта. Цель теоретических исследований состоит в разработке методики проектирования высотных зданий с учетом конструктивных мероприятий, обеспечивающих устойчивость здания к «прогрессирующему» разрушению.

Ключевые слова: моделирование, жизненный цикл, прогрессирующее обрушение, несущие конструкции, информационная технология, оценка устойчивости

MODELING THE LIFE CYCLE HIGH-RISE BUILDINGS STRUCTURES IN VIEW RESISTANCE PROGRESSIVE DESTRUCTION

Maria S. Barabash

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: The article is considered the safe operation of high-rise buildings and conservation design parameters in case emergency situation and local collapses. The goal of theoretical research is to develop a methodology of designing high-rise buildings to meet design measures to ensure the sustainability of the building to the "progressive" collapse.

Keywords: modeling, life cycle, progressive collapse, structural engineering, information technology, sustainability assessment

1. ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе в строительном проектировании происходит переход от основополагающего критерия несущей способности конструкций к критерию безопасности строительных объектов для людей и окружающей среды на протяжении всего жизненного цикла строительного объекта. Обеспечение безаварийной эксплуатации существующих зданий и сооружений предполагает умение прогнозировать их поведение при изменении условий эксплуатации и в аварийных ситуациях при частичной потере несущей способности, а для этого требу-

ются высокопроизводительные программные комплексы.

Каждое здание, сооружение или отдельная конструкция имеет определенное назначение, эксплуатируется в определенных условиях и обязательно должно удовлетворять требованиям безопасности. Требования безопасности включают в себя требования предотвращения аварий и обрушений строительного объекта в целом или составляющих его частей, которые могут представлять опасность для здоровья и жизни людей, либо нанести ущерб окружающей среде или послужить причиной других аварийных ситуаций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При эксплуатации высотных зданий, как объектов с повышенными требованиями к безопасности, надежности и социальной значимости, должны быть четко представлены три стратегии:

- мониторинг технического состояния конструктивных элементов, инженерных систем, помещений и прилегающей территории;
- комплекс мероприятий по предупреждению преждевременного износа и оперативного управления параметрами среды обитания;
- стратегии, предусматривающие устранение (ликвидацию) физического и морального износа.

Высотные здания, проектируемые в современных условиях, имеют ряд принципиальных отличий, от зданий, которые проектировались десять лет назад. Таким образом, не накоплено достаточно опыта эксплуатации таких зданий. Это касается большей высоты проектируемых зданий, а также принципиально новых конструктивных решений и инженерных систем. По нагрузкам и воздействиям, учитываемым при проектировании, новые высотные здания можно рассматривать как аналоги существующих. Однако, реакция проектируемых зданий на случайные агрессивные воздействия со стороны окружающей среды, пользователей и др. в настоящее время изучена недостаточно и, следовательно, труднопредсказуема.

Важнейшим условием обеспечения безопасности при эксплуатации высотных зданий и сохранения проектных показателей качества среды обитания в них является научно обоснованное использование стратегии назначения условий (или моментов времени) проведения плановых капитальных ремонтов, обеспечивающих полное восстановление первоначальных свойств конструкций и инженерного оборудования. Поэтому на стадии проектирования высотного здания, выполнив системный анализ проектных реше-

ний, используемых материалов, оборудования и технологий и, опираясь на существующий математический аппарат необходимо рассчитывать перспективные планы ремонтов, которые являются основой проекта технической эксплуатации высотных зданий.

Немаловажным условием для надежной и безопасной работы является проведение мониторинга зданий и сооружений в процессе их строительства и эксплуатации. Общей целью мониторинга объектов является проведение долговременного контроля нагрузок, усилий, перемещений, деформаций конструкций, напряжений в контрольных сечениях для установления соответствия фактического напряженно-деформированного состояния конструкций расчетным данным и рабочему проекту. Кроме того, в результате мониторинга могут быть обнаружены критические и предаварийные состояния наблюдаемых сооружений. При проведении мониторинга решаются следующие основные задачи:

- выбор объектов контроля, определение в них основных сечений и назначение контрольных точек на объектах наблюдения;
- разработка методов определения контролируемых параметров, выбор серийных или разработка индивидуальных технических средств контроля, изготовление и установка их на объекте;
- проведение визуальных, инструментальных наблюдений и определение фактических перемещений, деформаций, напряжений, усилий в контролируемых конструктивных элементах;
- оценка технического состояния конструкций по данным натурных наблюдений и результатам расчетов.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Для оценки устойчивости здания против прогрессирующего обрушения необходимо

рассматривать лишь наиболее опасные расчетные схемы разрушения [2].

Расчет пространственной модели здания рекомендуется проводить с учетом физической и геометрической нелинейности. Рекомендуется использовать пространственную расчетную модель. В модели могут учитываться элементы, которые при нормальных эксплуатационных условиях являются несущими (например, навесные наружные стеновые панели, железобетонные ограждения балконов и т.п.), а при наличии локальных воздействий активно участвуют в перераспределении усилий в элементах конструктивной системы. Расчетная модель здания должна учитывать возможность удаления (разрушения) отдельных вертикальных конструктивных элементов. Расчетная модель здания должна быть рассчитана отдельно с учетом каждого (одного) из локальных разрушений.

Расчет здания рекомендуется выполнять с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР имеющего возможность учета физической и геометрической нелинейности, что обеспечивает наибольшую достоверность результатов расчета и снижение дополнительных материало затрат [3,4].

Рекомендуется проводить расчет по следующей схеме:

- производится расчет всей схемы в физически нелинейной постановке на постоянные и временные нагрузки, входящие в особое сочетание;
- полученное напряженно деформируемое состояние является стартовым для расчета на нагрузку от удаляемых элементов;
- расчет на дополнительную нагрузку от удаляемых элементов производится в физически и геометрически нелинейной постановке. Нагрузка от удаляемых элементов соответствует усилиям в них, полученным на первом этапе расчета и увеличенных на коэффициент динамичности 1.1. Проверка на прочность оставшихся элементов выполняется без учета продольного изгиба.

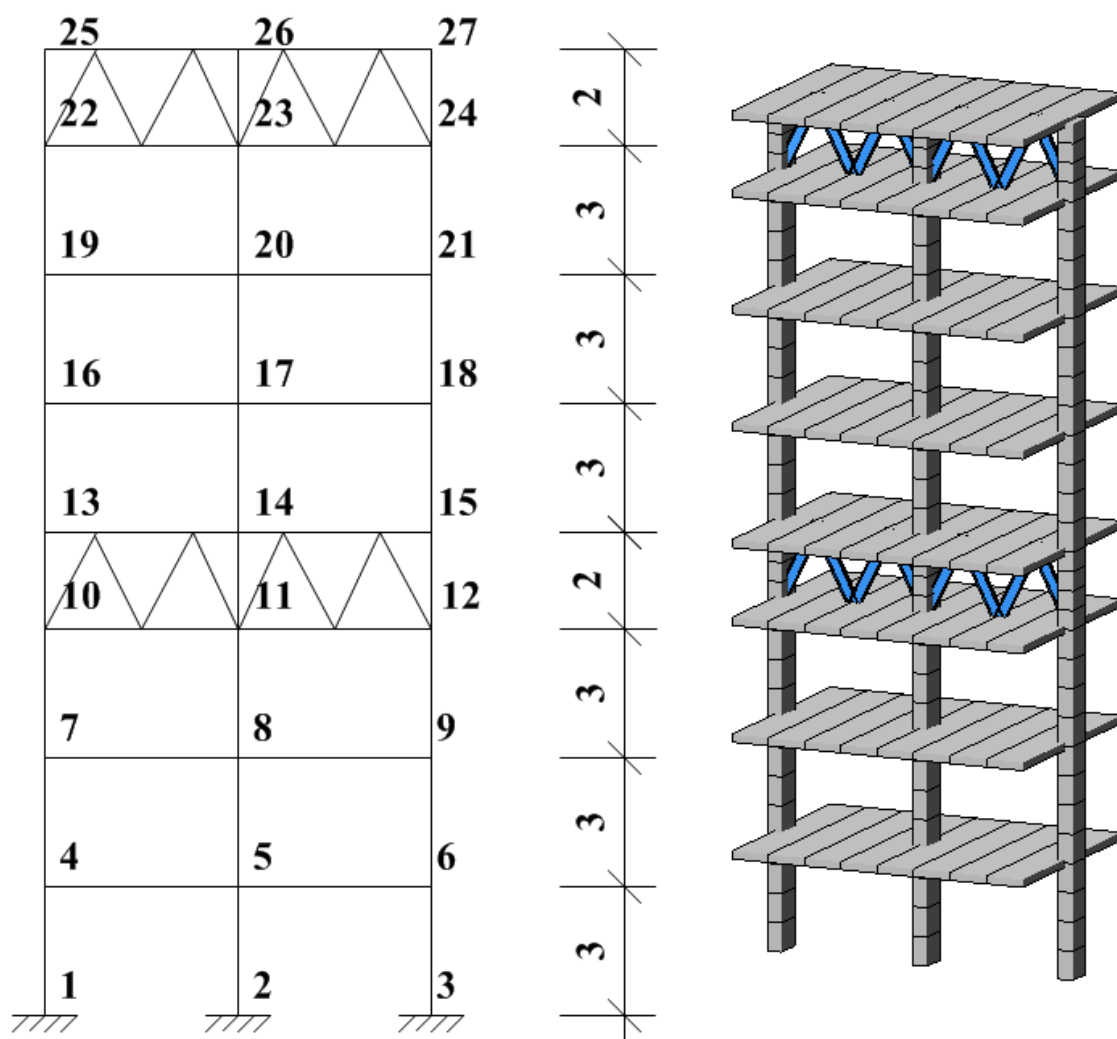
- В некоторых случаях целесообразно рассматривать работу перекрытий над удаленной колонной (пилоном, стеной) при больших прогибах как висячей железобетонной оболочки с учетом мембранных эффектов обусловленных физической и геометрической нелинейностью ее работы.
- Каждое перекрытие высотного здания должно быть рассчитано на восприятие веса участка перекрытия вышележащего этажа (постоянная и длительная нагрузки с коэффициентом динамичности $k_f = 1,5$) на площади 80 м².

В зданиях следует отдавать предпочтение монолитным и сборно-монолитным перекрытиям, которые должны быть надежно соединены с вертикальными несущими конструкциями здания стальными связями.

Соединения сборных элементов с монолитными конструкциями, препятствующие прогрессирующему обрушению зданий, должны проектироваться не равнопрочными. При этом, элемент, предельное состояние которого обеспечивает наибольшие пластические деформации соединения, должен быть наименее прочным.

4. ПРИМЕР

На рис.1 представлена многопролетная восьмиэтажная рама, четвертый и восьмой этаж рамы — технический, усиленный металлической фермой. Условно раму можно рассматривать как фрагмент пространственного каркаса здания. Ригели представляют собой вырезанные полосы перекрытий шириной 6м и толщиной 0.2м, раскосы фермы выполнены из металлического прокатного профиля 30Б1. Сечение колонн 0.4х0.6м. Кроме собственного веса, на ригель приложена равномерно распределенная вертикальная нагрузка $q=20$ т. Закрепление колонн в фундамент обеспечивается закреплением от горизонтальных и вертикальных перемещений, а также углов поворота.



а) б)
Рисунок 1. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) многоэтажной рамы.

На рисунке 2 показаны эпюры продольных сил N в проектном состоянии рамы (1) и в запроектном состоянии с учетом аварийного выхода из строя крайней колонны, расположенной между узлами 18-21. Аварийный выход из строя крайней колонны моделировался в две стадии: на первой стадии рассчитывалась вся рама; на второй стадии расчет выполнялся без крайней колонны 18-21. Напряженно-деформированное состояние конструкции, полученное на первой стадии, является стартовым для второй стадии расчета. Анализируя результаты расчетов, можно констатировать, что в запроектном состоя-

нии, при выходе из строя крайней колонны 18-21, в колоннах 16-19, 21-24, 22-25, 24-27 возникают усилия растяжения, а в колоннах среднего ряда возрастают усилия сжатия. Таким образом, тщательный расчетный анализ несущей системы здания позволяет вскрыть дополнительные резервы несущей способности, и при определенных конструктивных мероприятиях, требующих некоторого увеличения материалоемкости, можно обеспечить устойчивость здания к «прогрессирующему» разрушению.

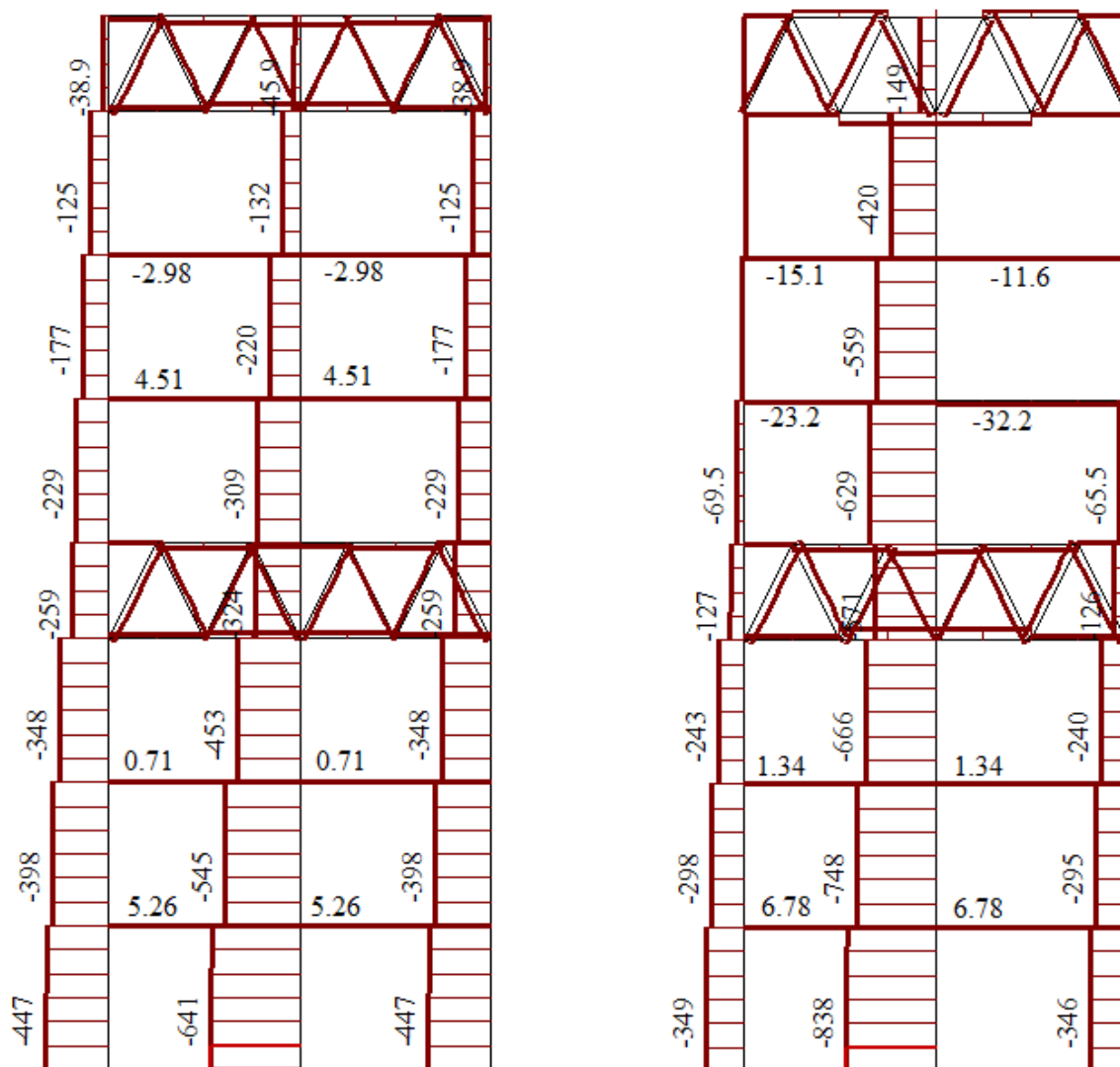


Рисунок 2. Этюры продольных сил N , m .

ВЫВОДЫ

При проектировании конструкций с учетом сопротивления прогрессирующему обрушению принятие продуманных решений не должно приводить к значительному увеличению материалоемкости. Исследования американских ученых [1,5] показывают, что такое увеличение не должно превышать 5%. В основе такого утверждения лежит концепция о принятии таких конструктивных решений, которые создают условия для приспособления конструкций к новым форс-

мажорным ситуациям иногда даже за счет потери некоторых эксплуатационных качеств (большие перемещения, трещины и др.).

Такая концепция, безусловно, более плодотворна, чем, к сожалению, достаточно распространенные подходы о прямолинейном увеличении сечений оставшихся несущих элементов для восприятия, возникших в результате форс-мажорной ситуации усилий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Report of the Inquiry into the Collapse of Flats at Roman Point, Caning Town; MSO, 1968.
2. **Карпенко Н.И.** Теория деформирования железобетона с трещинами. –М.: Стройиздат, 1976.
3. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – К.:2007.
4. **Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В.** Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы, опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологии). – К.: ФАКТ, 2004.
5. **Kirk A. Marchand** 'Blast and Progressive Collapse', AISC, 2005.

Барабаш Мария Сергеевна, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, докторант, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, дом 1
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, Department of Computer Technology Construction, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИНЕРЦИОННО-ЖЕСТКОСТНЫХ СВОЙСТВ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АДАПТИРУЕМЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ РЕШЕНИЯ

А.М. Белостоцкий, П.И. Новиков

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена обзору проблемы идентификации динамических характеристик математических моделей на основе измеренных динамических характеристик реальных строительных объектов. Показано, что проблема несоответствия динамических характеристик носит системный характер. Аппарат построения и верификации математических моделей эксплуатируемых зданий на основе используемых в процессе проектирования математических моделей требует доработки и корректировки. Для достоверного анализа состояния строительного объекта предлагаются пути преодоления выявленных несоответствий с помощью адаптивных процедур. Предложены пути развития математически формализованных адаптивных процедур, основанных на решении обратных некорректно поставленных задач. В качестве метода решения выступает метод регуляризации А.Н. Тихонова. Описаны основные этапы построения решения. Выделены преимущества применения математически формализованных процедур для восстановления действительных инерционно-жесткостных характеристик математических моделей.

Ключевые слова: математическое моделирование, частоты и формы собственных колебаний, динамические характеристики зданий, адаптивные процедуры, метод стоячих волн, методы регуляризации, мониторинг динамических характеристик

IDENTIFICATION THE REAL INERTIA AND INERTIAL-RIGID PROPERTIES FOR STRUCTURAL ELEMENT OF ADAPTIVE FINITE ELEMENT MODELS. STATE OF PROBLEMS AND SOLUTIONS

Alexander M. Belostotsky, Pavel I. Novikov

¹Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article provides an overview of the problem of identification the dynamic characteristics of mathematical models based on the measured dynamic characteristics of real-world building objects. It is shown that the problem is systemic. The creation and verification processes of mathematical (finite element) models used in the design constructions need some work and adjustments. For a reliable analysis of the construction ways are suggested to overcome the identified gaps using adaptive procedures. The ways of mathematically formalized adaptive procedures based on the solution of ill-posed inverse problems. The method of solutions is a regularization method by A. Tikhonov. The basic points of building solutions are describe. The advantages of using mathematically formalized procedures for the recovery of actual inertial-rigid characteristics of mathematical models are highlighted.

Key words: mathematical modeling, modal frequencies and mode shapes, real dynamic characteristics of buildings, adaptive procedures, the "standing waves" method, regularization methods, monitoring of the dynamic characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Частоты и формы собственных колебаний (далее собственные пары) механической системы являются едва ли не самой информативной интегральной характеристикой рассматриваемой системы, т.е. по их значениям можно достоверно оценивать её состояние. К самым распространенным интегральным характеристикам зданий и сооружений также относят результирующее перемещение, энергию деформирования, коэффициенты демпфирования, передаточные функции 1. Ряд работ 2, 3, 9 указывает на несоответствие собственных пар реальных строительных объектов (далее объектов моделирования) и математических моделей, которые, как правило, создаются на основании проектной документации рассматриваемых сооружений. Опыт проведения натурных исследований 2 позволяет говорить о том, что обнаруженные несоответствия носят систематический характер.

1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Отсутствие соответствия собственных пар математической модели и объекта моделирования позволяет заключить, что математическая модель, создаваемая при разработке, доработке или обосновании проектного решения, мало пригодна для оценки текущего состояния объекта моделирования. Для подобного анализа требуется, чтобы значения интегральных динамических характеристик объекта моделирования соответствовали значениям, получаемым на математической модели. В этом случае наблюдаемые на объекте моделирования изменения, такие как появление значимых дефектов конструкции, увеличение массы объекта и т.д., можно успешно интерпретировать и идентифицировать. Однако для таких исследований необходима математическая модель, которая бы с заявленной точностью описывала интегральные характеристики объекта моделирования.

Попытки разработки подобной математической модели предприняты Д.К. Каличава в соавторстве с А.М. Белостоцким 9, 11.

Метод конечных элементов, занимающий лидирующее положение в расчетах сложных строительных объектов, является мощным инструментом для проведения расчетно-конструкторских и научных исследований 13. Данный метод применяется в большом количестве расчетных комплексов: от универсальных (Ansys, Abaqus, Nastran и др.) до специализированных (SCAD, Лира, MicroFE и др.). Метод позволяет разрабатывать расчетные модели строительных объектов, которые адекватно отражают их геометрико-жесткостные и инерционные свойства (1, 2).

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

$$[M]\{u''(t)\} + [C]\{u'(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

где $\{u\}$ – вектор перемещений механической системы, $\{F\}$ – вектор нагрузок механической системы, $\{u(t)\}$ – вектор обобщенных динамических перемещений, $[M]$, $[C]$, $[K]$ – глобальные матрицы масс, демпфирования, жесткости механической системы.

Поиск значимой «порции» собственных частот λ_i и форм $\{\varphi\}_i$ колебаний динамической системы проводится с помощью решения частной (частичной) проблемы собственных значений (3).

$$\begin{aligned} [K][\Phi] &= [\Lambda][M][\Phi] \\ [\Phi] &= [\{\varphi\}_1 \dots \{\varphi\}_n] \\ [\Lambda] &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned} \quad (3)$$

Применение расчетных моделей рассматривается в ряде работ 3, 9, 12, 13 как обязательная составляющая часть системы мониторинга несущих конструкций здания. Центральное место здесь занимает адекватная математическая модель, интегральные характеристики которой с заданной точностью

должны соответствовать интегральным характеристикам объекта моделирования.

$$\{\lambda\}_{\text{модели}} \rightarrow \{\lambda\}_{\text{объекта}} \quad (4)$$

$$[\{\varphi\}_1 \dots \{\varphi\}_n]_{\text{модели}} \rightarrow [\{\varphi\}_1 \dots \{\varphi\}_n]_{\text{объекта}} \quad (5)$$

Полное отсутствие аппарата математического моделирования при построении и эксплуатации системы мониторинга несущих конструкций во многих случаях превращает подобную систему в большое хранилище информации о локальных показателях тех или иных конструкций, оперирование которыми может вводить в заблуждение при принятии ответственных решений. Использование собственных пар объекта моделирования в качестве основных динамических интегральных характеристик позволяет достоверно оценивать общее состояние несущих конструкций строительного объекта, отслеживать изменения состояния и, с помощью соответствующей математической модели, интерпретировать наблюдаемые изменения. Решение проблемы собственных колебаний динамической системы применяются не только при построении и эксплуатации систем мониторинга. Частоты и формы собственных колебаний также используется 4 при решении задач устойчивости (6) (оценке устойчивости низших критических нагрузок λ_i и форм потери устойчивости $\{\varphi\}_i$) и при расчете сооружений на сейсмическое воздействие (7) 15. Точность найденных собственных пар для данных задач является существенной.

$$[K][\Phi] = [\Lambda][K_G][\Phi] \quad (6)$$

где $[K]$ и $[K_G]$ – матрицы линейной (начальной) и геометрической жесткости механической системы.

$$[M]\{u''(t)\} + [C]\{u'(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} + \{R(u)\} \quad (7)$$

где $\{F(t)\}$ – вектор внешних нагрузок механической системы, включающий в общем случае статическую, силовую динамическую составляющие, а также динамические усилия от акселерограмм, велосиграм и сейсмограмм; $\{R(u)\}$ – вектор псевдонагрузок, позволяющий учитывать нелинейные связи динамической системы.

Вычисленные собственные пары сооружения должны адекватно отображать динамические характеристики проектируемого объекта. Однако опыт работы над проектными решениями сооружений, опыт натурных динамических испытаний и опыт научно-технического сопровождения систем мониторинга несущих конструкций говорит о несоответствии между собственными парами объектов моделирования и собственными парами, которые вычисляются с помощью математических моделей, адекватно отображающих "проектные" свойства.

Подобные выводы невозможны без оценки реальных динамических свойств объектов строительства, которые возможно отыскивать сейсмологическими методами.

Для изучения реакции сооружений на сейсмическое воздействие применяют несколько типов испытаний: испытания ударом, испытания оттягиванием, испытания мощными вибрационными динамическими нагрузками (в самом здании или вне здания), испытания при искусственных воздействиях (например, при взрыве) и исследования микросейсмических колебаний сооружения. До недавнего времени при проведении микросейсмических исследований не удавалось добиться приемлемой точности и детальности измерений. По этой причине исследования такого типа относили к неэффективным методам исследования реакции сооружения на сейсмическое воздействие 2. Однако в настоящее время разработан и успешно применяется метод детального инженерно-сейсмологического изучения зданий и сооружений – метод стоячих волн. Основой метода является восстановление когерентных составляющих естественных микро-

сейсмических шумов сооружения. Метод позволяет изучать сейсмостойкость строительных объектов, выявлять дефекты инженерных сооружений, минуя одновременную установку большого количества измерительной аппаратуры.

Метод стоячих волн разработан А.Ф. Емановым. Наиболее общее, систематическое изложение основ метода приведено в докторской диссертации автора 2. Исключительная эффективность предложенной методики подтверждена исследованиями реальных инженерных сооружений, таких как Саяно-Шушенская ГЭС, Красноярская ГЭС, объекты атомной промышленности, гражданские здания и др. Значительный объем проведенных исследований показывает, что несоответствия между ожидаемой сейсмостойкостью здания и сейсмостойкостью, которая заявлена проектом, носят системный характер: «Детальные исследования стоячих волн в инженерных сооружениях убедительно показали, что модели инженерных сооружений, используемые для расчета их сейсмических колебаний, несовершенны» 2. Это позволяет утверждать, что с позиции сопоставления собственных пар математические (конечно-элементные) модели объектов, используемые в проектировании, в должной мере не соответствуют возведенным зданиям и сооружениям, а значит, требуют значительной доработки и корректировки.

2. ПУТИ РЕШЕНИЯ

Наиболее общая формулировка подхода к решению проблемы может быть описана согласно схеме, приведенной на рисунке 1.

С одной стороны существует математическая модель строительного объекта, с помощью которой возможно получить спектр значимых собственных частот и форм колебаний. Сегодня количество собственных пар, получаемых с помощью современных программных комплексов, может измеряться несколькими сотнями даже на персональных

компьютерах. Таким образом, можно составить детальную картину, описывающую динамические характеристики математической модели как единого целого (интегральные собственные пары), так и отдельных его частей (локальные собственные пары).

С другой стороны существует реальный строительный объект, динамические характеристики которого могут быть измерены способами сейсмологии, описанными выше. Количественными оценками здесь выступают карты амплитуд собственных колебаний, определяющие амплитудные соотношения перемещений узлов формы, совместно с картами фаз колебаний. При достаточно плотном шаге измерений, а также при введении в натурный эксперимент дополнительных опорных точек, с помощью метода стоячих волн удастся добиться необходимой подробности форм собственных колебаний, причем методика пересчета и выявления собственных пар позволяет строить формы достаточно высоких порядков 10. Таким образом, можно составить детальную картину, описывающую динамические характеристики реального объекта, который спроектирован, возведен и эксплуатируется в настоящий момент.

Для интерпретации расчетных и инструментальных собственных пар применяются различные методики – процедуры адаптации математической модели, называемые *адаптивными процедурами*. Выделяют 2 типа подобных процедур: математически формализованные и интуитивно инженерные 3.

Интуитивно инженерные адаптивные процедуры предусматривают достаточно широкий набор «инструментов» (θ_i), с помощью которых «проектная» математическая модель дорабатывается до адаптивной математической модели. Причем динамические характеристики адаптивной модели в конце процесса должны с определенной точностью соответствовать динамическим характеристикам объекта моделирования (8).

$$[K(\theta_i)][\Phi] = [\Lambda][M(\theta_i)][\Phi] \quad (8)$$

Идентификация действительных инерционно-жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечноэлементных моделей зданий и сооружений. Состояние проблемы и пути решения.



Рисунок 1. Общий путь решения проблемы несоответствия математической модели возведенным зданиям и сооружениям.

где $[K(\theta_i)]$ – матрица жесткости динамической системы, для корректирования которой применяется набор инструментов (θ_i) ; $[M(\theta_i)]$ – матрица масс динамической системы, для корректирования которой применяется набор инструментов (θ_i) .

К таким инструментам относят 13: учет динамических характеристик основания (θ_1) ; реализацию фактических физикомеханических свойств строительных материалов (θ_2) ; учет фактических измеренных нагрузок и воздействий (θ_3) ; анализ работы ряда узлов и соединений по схемам, отличным от принятых в проекте (например, упругая заделка вместо шарнира) (θ_4) ; включение в динамическую работу номинально несущих конструкций (например, перегородок или фасадных конструкций) (θ_5) и др. Характерной особенностью подобного типа процедур является отсутствие точной интерпретации расчетных и измеренных динамических характеристик, их характерных отличий.

Математически формализованные адаптивные процедуры сводятся к решению задачи оптимизации – минимизации целевой функции по параметру механической системы, в качестве которого может выступать, например, модуль упругости 16.

Подобная функция должна выявлять различия между собственными парами математической модели и собственными парами объекта моделирования, найденными экспериментально (9).

$$P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\phi_i(x) - \hat{\phi}_i\|^2 \quad (9)$$

где x – параметр системы; N – количество анализируемых собственных пар; α_i – весовой коэффициент формы i -ой собственной пары, зависящий от значений вычисленной и измеренной собственной частоты; $\phi_i(x), \hat{\phi}_i$ – вычисляемый и измеряемый вектор формы собственных колебаний.

Поскольку поиск решения задачи оптимизации выполняется на основе экспериментальных данных (измеренных собственных пар объекта моделирования) задача оптимизации в большинстве случаев обладает рядом «неприятных» в вычислительном плане свойств, присущим обратным некорректно поставленным задачам.

$$Au = f \quad (10)$$

где $A: U \rightarrow F$ – линейный оператор, осуществляющий отображение элементов u на f ; U, F – гильбертовы пространства, где элемент $u \in U$ является активным воздействием, из-

менением объекта исследования, а элемент $f \in F$ является откликом объекта исследования на вводимое изменение.

Задача (10) называется *корректной по Адамару*, если:

- 1) область значений оператора A (10) совпадает с множеством F (условие разрешимости);
- 2) равенство $Au_1 = Au_2$ для некоторых u_1, u_2 , принадлежащих области определения оператора A , влечет равенство $u_1 = u_2$ (условие единственности);
- 3) обратный оператор A^{-1} непрерывен на F (условие устойчивости).

Задача (10) называется *некорректной*, если нарушается хотя бы одно из условий 1-3 корректной задачи: условия 1, 2 отвечают за математическую определенность, условие 3 – за физическую детерминированность (устойчивость). В силу того, что правая часть задачи (10) известна приближенно (данные наблюдений, эксперимента), вопросы построения устойчивого решения для некорректных задач приобретают первостепенное значение при решении практических задач 6.

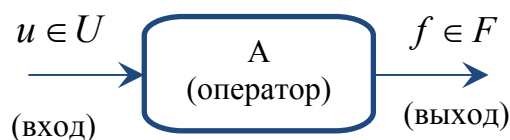


Рисунок 2. Общая схема математической модели объекта исследования для прямой задачи.

Для преодоления некорректности задачи используется методология решения обратных некорректных задач, предложенная в середине XX века академиком А.Н. Тихоновым 5. Теория решения подобных задач получила развитие в работах М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, В.П. Танана, А.О. Ватульяна 6. Основными способами преодоления некорректности являются 5, 6:

Метод квазирешений.

Пусть результаты экспериментов приближенно описывают правую часть f уравнения (10). При выполнении соответствующих условий 6, метод квазирешений позволяет находить приближенное решение u_δ по приближенному значению правой части f_δ уравнения (10) и величине погрешности δ :

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta$$

которое стремилось бы к точному решению u при $\delta \rightarrow 0$.

Задача поиска решения сводится к задаче поиска минимума функционала невязки $J[u]$ (11).

$$J[u] = \|Au - f\|_F^2 \quad (11)$$

В свою очередь элемент u_k , минимизирующий функционал невязки (11), называется квазирешением уравнения (10). Для построения процедуры квазирешения необходимо сузить пространство U до компакта $M \subset U$.

Метод регуляризации на компактных множествах.

Метод предполагает использование априорной информации для сужения области определения U до компактного множества M (компакта) с использованием различных критериев (например, критерия Арцела). В качестве априорной информации может выступать ограниченность, положительность, монотонность, выпуклость и другие особенности рассматриваемого компакта.

Для отыскивания решений на компактах обычно прибегают к дискретизации. Для построения приближенных решений достаточно найти последовательность $u^{(n)}$, которая минимизировала бы функционал невязки $J[u]$ (11) на $M \subset U$.

Метод итерационной регуляризации.

Данный метод предусматривает замену некорректной задачи задачей отыскивания минимума функционала невязки (11). Задача поиска минимума функционала в большинстве случаев решается итерационно. Начальные итерации такой процедуры хорошо приближают точное решение, однако затем итерационный процесс начинает «рассыпаться» б, проявляется неустойчивость решения. Данное свойство обуславливается тем, что в случае незамкнутого образа оператора $R(A)$ не всякая минимизирующая последовательность будет сходящейся, т.к. обратный оператор A^{-1} неограничен.

Метод итерационной регуляризации состоит в том, чтобы по имеющейся априорной информации о погрешности входных данных выбрать некоторое приближение, близкое к точному решению, а основной проблемой метода выступает определение количества итераций, необходимого для получения такого решения.

Существует несколько типов итерационных методов для квадратичного функционала $J[u]$ (11), в основе которых используется соотношение (12).

$$u_{n+1} = u_n - \gamma_n J'[u_n] \quad (12)$$

где $J'[u_n]$ – производная функционала (11) по Фреше (для линейного оператора A имеет вид $J'[u_n] = 2A^*(Au - f)$); γ_n – параметр, определяемый в зависимости от итерационной схемы. Выделяют 3 вида итерационных схем:

1) Простая итерация. Параметр $\gamma_n = \gamma = \text{const}$ выбирается из условия

$$0 < \gamma < \frac{2}{\|A\|^2}$$

2) Метод минимальных невязок. Параметр γ_n находится из условия минимума функционала $\|u_{n+1} - \bar{u}\|^2$ согласно зависимости

$$\gamma_n = \frac{\|Au_n - f\|^2}{\|J'[u_n]\|^2}$$

3) Метод наискорейшего спуска. Параметр γ_n выбирается из условия минимума функционала невязки $\|Au_{n+1} - f\|^2$.

$$\gamma_n = \frac{\|J'[u_n]\|^2}{\|AJ'[u_n]\|^2}$$

Метод усеченных сингулярных выражений.

Метод связан с ортогональными разложениями, предусматривает использование сингулярное разложение оператора A (13).

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(u, u_k) f_k \quad (13)$$

где u_k, f_k – нормированные ортогональные системы в пространствах U и F соответственно, σ_k – сингулярные числа оператора A . Если считать последовательность $\{\sigma_k\}$ ограниченной, тогда A представляет собой непрерывный линейный оператор из U в F с сопряженным оператором

$$A^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, f_k) u_k$$

Спектр оператора $B = A^* A$ содержит собственные значения σ_k^2 , которым соответствуют собственные элементы u_k .

Если оператор A допускает сингулярное разложение (13), то оператор, замещающий обратный строится по правилу

$$A^+ f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, f_k) u_k \quad (14)$$

Оператор A^+ неограничен в том и только том случае, если $\sigma_k \rightarrow 0$. В этом случае оператор

A^+ можно регуляризовать с помощью усеченного сингулярного разложения, если сохранить конечное число членов ряда в (14) и отбросить растущие слагаемые.

$$u = Rf = \sum_{k=1}^N \sigma_k^{-1}(f, f_k) u_k \quad (15)$$

В этом случае параметром регуляризации служит число N , зависящее от погрешности δ .

Анализируя структуру сингулярного выражения можно установить природу некорректности конкретной задачи. Зная сингулярные числа и соответствующие им собственные элементы можно судить о том, какие компоненты решения уравнения (13) вычисляются по приближению элемента f_δ , которое используется для поиска решения.

Проекционный метод.

В данном методе решение операторного уравнения отыскивается в виде линейной комбинации линейно независимой системы функций φ_k (16), именуемых базисными.

Рассматривая операторное уравнение (10), где A – линейный непрерывный оператор $A: U \rightarrow F$, причем U, F – сепарабельные гильбертовы пространства, $\ker A = \{0\}$. Решение ищется в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \quad (16)$$

Подобные методы применяются при решении дифференциальных уравнений (методы Бубнова-Галеркина, Петрова и др).

Представление (16) обладает существенными особенностями:

- представление дает существенную априорную информацию о точном решении u ;
- требуется определить не только коэффициенты $\{a_k\}$, но и размерность представления N ;

- для некорректной задачи с приближенно заданной правой частью f увеличение размерности представления N не повышает точность решения задачи;

- сходимость приближенных решений к точному имеет место лишь при специальном выборе системы $\{\varphi_k\}$.

Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Метод предусматривает использование стабилизирующего функционала (17) при решении задачи минимизации. Построение функционала осуществляется на основе (11), путем добавления вспомогательного неотрицательного (сглаживающего) функционала, который определен на некоторой части $U_0 \subseteq D_A$ и обеспечивает непрерывность и единственность решения задачи минимизации.

$$M^\beta[u] = \|Au - f\|_F^2 + \beta \|u\|_U^2 \quad (17)$$

$$M^\beta[u] \rightarrow \inf, \quad u \in U$$

где β – коэффициента регуляризации, A – вполне непрерывный оператор, осуществляющий отображение элементов $u \in U$ на $f \in F$, D_A – область определения оператора A . Вид сглаживающего функционала может быть различным в зависимости от типа задачи. Подмножество $U_0 \subseteq D_A$ может являться самостоятельным метрическим пространством.

Для сглаживающего функционала доказаны теоремы единственности решения и соотношения корректности 6 (18).

$$\|u^\beta\|_U \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \|f\|_F \quad (18)$$

где u^β – решение, найденное по методу регуляризации Тихонова.

Метод регуляризации может применяться в тех случаях, когда априорная информация о решении отсутствует или не может быть уч-

тена при поиске решения. Метод не требует фактического задания компакта M на множестве U . Такое требование к построению решения используется, например, в методе квазирешений. Для применения метода регуляризации достаточно, чтобы задача формулировалась для вполне непрерывного оператора A , действующего на гильбертовых пространствах U, F .

Метод регуляризации широко применяется для решения линейных и нелинейных операторных уравнений 1-го рода (10). В качестве наиболее известного и распространенного объекта приложения аппарата регуляризации выступают интегральные уравнения Фредгольма.

Эффект регуляризации зависит от коэффициента регуляризации β . Выбор оптимального параметра регуляризации β – наиболее важная проблема при реализации метода. Заниженное значение коэффициента ($0 < \beta < \beta^{opt}$) не всегда обеспечивает единственность и непрерывность решения. Завышенное значение ($\beta > \beta^{opt}$) приводит к потере точности искомого решения ввиду преобладания значений сглаживающего функционала над значением функционала невязки. Существует достаточно широкий набор способов выбора коэффициента регуляризации [5, 7].

Построение стабилизирующего функционала на основе целевой функции (9) выполняется на основе неотрицательного функционала, значения которого зависят от параметра системы, в качестве которого в данном случае выступает модуль упругости. Данным условиям удовлетворяет квадратичный функционал разности матриц жесткости: расчетной $[K(x)]$, изменение членов которой происходит в процессе оптимизации, и начальной $[K(x_0)]$, предусмотренной проектом (19).

$$\Pi(x) = \frac{\beta}{2} \|K(x) - K(x_0)\|_{Fr}^2 \quad (19)$$

В качестве матричной нормы в данном случае может выступать матричная норма Фробениуса (20).

$$\|K(x) - K(x_0)\|_{Fr} = \sqrt{\sum_{i,j} |k(x)_{ij} - k(x_0)_{ij}|^2} \quad (20)$$

Общий вид стабилизирующего функционала на основе предложенной целевой функции и сглаживающего функционала будет выглядеть следующим образом (21).

$$\Pi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\phi_i(x) - \hat{\phi}_i\|^2 + \frac{\beta}{2} \|K(x) - K(x_0)\|_{Fr}^2 \quad (21)$$

minimize $\Pi(x)$ *при* $R(x) \leq 0$

где $R(x)$ – множество допустимых значений параметра x .

Задача состоит в том, чтобы из стартовой (проектной) математической модели получить модель близкую к реальному объекту, другими словами на основании стартовой матрицы жесткости математической модели необходимо найти матрицу жесткости объекта, которая бы приводила в соответствие инерционно-жесткостные характеристики математической модели и исследуемого объекта. Общая схема описанной обратной задачи показана на рисунке 3.

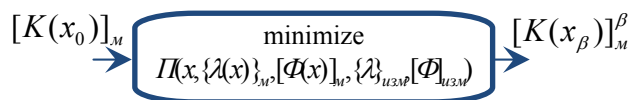


Рисунок 3. Общая схема модели обратной задачи.

Исходными данными для процедуры адаптации (21) выступает стартовая математическая модель объекта, адекватно отражающая "проектные" свойства (матрица жесткости $[K(x_0)]_M$, матрица масс $[M]_M$) и вычисляемые на её основе динамические характеристики – собственные пары модели $\{\lambda\}_M$, $[\Phi]_M$. Процедура минимизации функционала $\Pi(x)$ производится по параметру системы, в качестве которого выступает модуль упругости материала. В результате минимизации определяются оптимальные значения собст-

венные пары модели и соответствующая им регуляризованная матрица жесткости $[K(x^\beta)]$, значения которой зависят от параметра регуляризации β .

Для согласования параметра регуляризации β с погрешностью экспериментально найденных динамических характеристик применяется алгоритм, изложенный в работе 16. Согласно представленному методу для предотвращения преобладания функции регуляризации над функцией оценки применяется процедура пошагового ограничения параметра регуляризации (22).

$$\sum_{i=1}^{nmd} \|\phi_i(x^k) - \hat{\phi}_i\|^2 \geq \beta^k \|K(x^k) - K(x_0)\|_{Fr}^2 \quad (22)$$

где k – шаг процедуры минимизации.

В том случае, если в результате k -ой итерации функция оценки меньше функции регуляризации, последняя уменьшается путем умножения на понижающий коэффициент γ ($0 < \gamma < 1$) на следующем шаге итерации (13).

$$\beta^{k+1} = \gamma \beta^k \quad (23)$$

После окончания поиска решения задачи оптимизации полученные результаты можно оценить на основе проектных данных – произвести оценку изменений жесткости различных конструктивных элементов (24).

$$S = \frac{x_{\Pi} - \bar{x}}{x_{\Pi}} \cdot 100\% \quad (24)$$

где S – оценка обнаруженных изменений; x_{Π} – проектное значение параметра; $\bar{x}$ – среднее значение параметра для конструктивного элемента (области элемента).

К преимуществам математически формализованных адаптивных процедур по сравнению с интуитивно инженерными можно отнести:

1) точную интерпретацию результатов измерения динамических характеристик строительного объекта;

2) преодоление (за счет регуляризации) различного рода погрешностей и неточностей, связанных с использованием экспериментально измеренных величин;

3) выявление массивов элементов математической модели объекта (конструкций и их элементов), для которых выявлено изменение жесткости и несущей способности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методика мониторинга состояния несущих конструкций зданий и сооружений. Общие положения. – М.: ФЦ ВНИИ ГОЧС, 2008. – 36 с.
2. Восстановление когерентных составляющих волновых полей в сейсмике [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук : 25.00.10 / Еманов Александр Федорович ; Новосибирск, 2004. – 279 с.
3. Адаптивные динамические конечноэлементные модели в основе мониторинга несущих конструкций высотных зданий [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / Каличава Дмитрий Котэвич ; науч. рук. А. М. Белостоцкий ; Моск. гос. строит. ун-т. – Москва, 2012. – 149 с.
4. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев, Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.: ил.
5. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
6. **Ватульян А.О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
7. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
8. СП 14.13330.2011. Строительство в сейсмических районах. Актуальная редакция

- СНиП II-7-81*. М., 2011. 83 с. (Мин. регион. разв. РФ).
9. **Белостоцкий А.М.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* – 2012. – Volume 8. – Issue 3. – с.19-27.
 10. **Белостоцкий А.М.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава, А.И. Нагибович [и др.] // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* – 2012. – Volume 8. – Issue 3. – с.28-42.
 11. **Белостоцкий А.М.** Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 3. Аprobация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава, А.А. Аул [и др.] // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* – 2012. – Volume 8. – Issue 3. – с.43-52.
 12. **Белостоцкий А.М.** Математическое моделирование как основа и в составе системы мониторинга несущих конструкций зданий и сооружений / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава // *Вестник МГСУ* – 2010. – No4. – с.191-197.
 13. **Белостоцкий А.М.** Математические модели в основе инструментального мониторинга несущих конструкций высотных зданий-комплексов / А.М. Белостоцкий, Д.К. Каличава // *Труды IV международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений»*, Челябинск, 2012.
 14. **Белостоцкий А.М.** Математическое моделирование техногенной безопасности ответственных строительных объектов и комплексов мегаполисов. Часть 2: современные методы моделирования. Некоторые сведения и рекомендации / А.М. Белостоцкий, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов // *Международный форум строительной индустрии «Строительный сезон». Конгресс «Строительная наука, техника и технологии: перспективы и пути развития»*. Труды. 1-3 ноября 2010 года. МВЦ Крокус Экспо. – М.: МГСУ, 2010. – с.285-289.
 15. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных конечноэлементных моделей для динамического расчета систем «Сооружение-основание» // *Сборник трудов «Методы расчета и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ»*. – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1990. – с.175-190.
 16. **Joo Sung Kang, Inho Yeo, Hae Sung Lee, Soobong Shin.** "Structural damage detection using modal data with regularization technique", *Proceedings of KSCE Conference (Kyongju TEMF Hotel)*, Vol. 1, pp. 283-286, 1999.
 17. **Rut P., Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis Applied to Dynamic Railroad Model. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, Vol. 266, Nr. 1, pp. 1-13.
 18. **Wojcicki Z.** Sensitivity Analysis as Method of Absorber Tuning for reduction of Steady State Response of Linear Parametric System. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, Vol. 253, Nr. 4, pp. 755-772.
 19. **Berkowski P., Dmochowski G., Grosel J., Schabowicz K., Wojcicki Z.** Analysis of Failure Conditions for a Dynamically Loaded Composite Floor System of an Industrial Building. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2013, Volume 19(4), pp. 529-541.

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», директор Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплек-

сов (НОЦ КМ) ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26;
тел/факс: +7 (495) 737-40-81; +7 (499) 929-50-17;
e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Новиков Павел Игоревич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26.
тел/факс: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Director of Research & Education Center of Computation Simulation, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia
phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru

Pavel I. Novikov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia
phone/fax: +7 (499) 929-50-17;
e-mail: novikov.mgsu@gmail.com

КРАТКОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗДАНИЯ В МУЛЬДЕ СДВИЖЕНИЯ

А.В. Воробьев, Г.Г. Кашеварова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье проведены результаты прогнозирования величины оседания земной поверхности на подработанной территории. Выполнено численное моделирование НДС пятиэтажного панельного дома находящегося в различных зонах мульды сдвижения. Определено наиболее неблагоприятное положение здания в мульде сдвижения.

Ключевые слова: адаптивная модель прогнозирования, подработанная территория, оседания поверхности, мульда сдвижения, метод конечных элементов.

SHORT-TERM FORECASTS OF SURFACE DEFORMATION AND STRESS-STRAIN STATE OF THE BUILDING IN THE DISPLACEMENT TROUGH

Alexandr V. Vorobev, Galina G. Kashevarova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

ABSTRACT: Forecast results of surface settlement subsided by mining are described in this article. Numerical modeling of stress strain behavior of five storey bearing-wall building/house/block of flats located in different zones of displacement basin/trough is carried out. The most unfavorable building/house/block of flats location in the displacement basin/trough is chosen.

Key words: adaptive forecast model, subsided area, surface settlement, displacement trough, finite-element method

ВВЕДЕНИЕ

На подработанной территории Пермского края в потенциально опасной зоне оказались производственные, жилые и административные здания города. Для оценки безопасности и возможности дальнейшей эксплуатации застройки необходим прогноз процесса деформирования грунтового массива и сроков введения мер охраны для каждого из этих зданий.

При сдвижении земной поверхности основными показателями, позволяющими прогнозировать и оценивать состояние зданий и сооружений, являются: оседание земной поверхности η , радиус кривизны R и горизон-

тальные деформации земной поверхности ε в основаниях зданий.

Механическая безопасность и эксплуатационная пригодность отдельного здания на подработанной территории, зависит как от деформаций земной поверхности, так и от расположения здания относительно мульды сдвижения и его конструктивного решения [1, 2].

На сегодняшний день имеются: результаты мониторинга с 1982 года и прогноз ожидаемых деформаций земной поверхности до 2028 года, выполненный ОАО «Уралкалий» с использованием аналитических методов изложенных в Указаниях и СП [3, 4], а также результаты экспертизы технического состоя-

ния более 40 зданий, проведенной ОАО «Галургия» и расчетов отдельных зданий [5 - 8]. К сожалению, как показывает практика, долгосрочный прогноз не всегда адекватен реальности, и существует необходимость в альтернативном подходе. В данной работе предлагается использовать для статистических прогнозов адаптивные модели краткосрочных прогнозов, применяемые обычно в экономике [9, 10].

1. АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Адаптивные методы прогнозирования временных рядов [11 - 14] представляют собой методы, цель которых заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) математических моделей, которые способны отражать изменяющиеся во времени условия, учитывать информационную ценность различных членов временной последовательности и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда. Такие модели предназначаются, прежде всего, для краткосрочного прогнозирования. Процесс прогнозирования, опирающийся на статистические методы, распадается на два этапа. Первый, индуктивный, заключается в обобщении данных, наблюдаемых за более или менее продолжительный период времени, и в представлении соответствующих статистических закономерностей в виде модели. Второй этап, собственно прогноз, является дедуктивным. На этом этапе на основе найденных статистических закономерностей определяют ожидаемое значение прогнозируемого признака.

Под прогнозированием мы понимаем научное (т.е. основанное на системе фактов и доказательств, установленных причинно-следственных связей) выявление вероятностных путей и результатов предстоящего развития явлений и процессов, оценку показателей, характеризующих эти явления и

процессы для более или менее отдаленного будущего. Таким образом, прогнозирование – это научная деятельность, направленная на выявление и изучение возможных альтернатив будущего развития и структуры его вероятных траекторий. Каждая альтернативная траектория развития связывается с наличием комплекса внешних относительно исследуемой системы (явлений) условий.

Особенностью адаптивных моделей является то, что они способны приспосабливать свою структуру и параметры к изменению внешних условий.

К простейшим адаптивным моделям относятся: *экспоненциальное сглаживание* - модель Брауна; *модели линейного роста*: модель Хольта, модель линейного роста Брауна – частный случай модели Хольта, модель прогнозирования Дж. Бокса и Г.Дженкинса, в которой в модель Хольта включается разность ошибок, прогностическая модель Хольта-Уинтерса и др.

Примем к рассмотрению в качестве базовых две модели: модель Брауна и модель Хольта.

Модель Брауна: Главное достоинство этой прогнозной модели состоит в том, что она способна последовательно адаптироваться к новому уровню процесса без значительного реагирования на случайные отклонения.

Недостатком модели является то, что экспоненциальная средняя дает систематическую ошибку, когда временной ряд имеет тенденцию линейного роста.

Модель Хольта: Важным моментом при использовании модели Хольта является выбор коэффициентов, которые определяют чувствительность модели. Чувствительная модель быстро реагирует на реальные изменения, а нечувствительная не реагирует на шум и случайные отклонения. Недостатком модели является то, что учитываются лишь линейные тренды и не учитывается сезонность.

Прогностическая модель Хольта-Уинтерса: учитывает экспоненциальный тренд и аддитивную сезонность. Учёт сезонности крайне важен в рассматриваемой задаче о деформациях земной поверхности, так как увеличение скорости деформаций связано с затоплением

подземных выработок, но на данном этапе моделирование натуральных данных при помощи комбинированной модели Хольта-Уинтерса представляется возможным, так как в представленной выборке интервал значений не учитывает сезонность. Натурные данные представлены с шагом в один год, тогда как, для реализации модели Хольта-Уинтерса требуются поквартальные либо помесечные данные. Анализ адекватности адаптивных моделей осуществляется методом скользящего контрольного сигнала.

При использовании модели прогнозирования временного ряда встает проблема адекватности этой модели. Пусть $\epsilon_t = y_t - \hat{y}_t$, где y_t – натурные данные, которые уже известны, $\hat{y}_t$ – прогноз на момент t , полученный с помощью некоторой адаптивной модели. Если ошибка ϵ_t невелика, то есть разница между реальными данными и прогнозом мала, то использование данной модели оправдано.

Для выбора наиболее адекватной модели проведены прогнозные расчеты по данным мониторинга оседаний на подработанной территории Пермского края (рисунок 1.1). Изолинии суммарных оседаний и горизонтальных деформаций на рассматриваемом участке приведены на рисунках 1.2 и 1.3. Построим по натурным данным линейную модель Брауна и Хольта.

Все адаптивные модели делятся на два класса: модели скользящего среднего (СС-модели) и авторегрессии (АР-модели).

Согласно схеме скользящего среднего оценка текущего уровня (наблюдения) является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причем вес (множитель), который отражает информационную ценность наблюдения, тем больше, чем ближе оно находится к текущему уровню. Такие модели хорошо отражают тенденцию, но не позволяют отражать колебания, например, сезонные.



Рисунок 1.1. График перемещений контрольного репера.

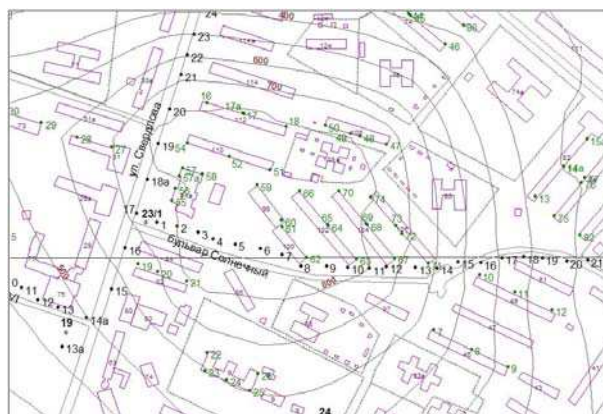


Рисунок 1.2. План поверхности с изолиниями суммарных оседаний (мм).

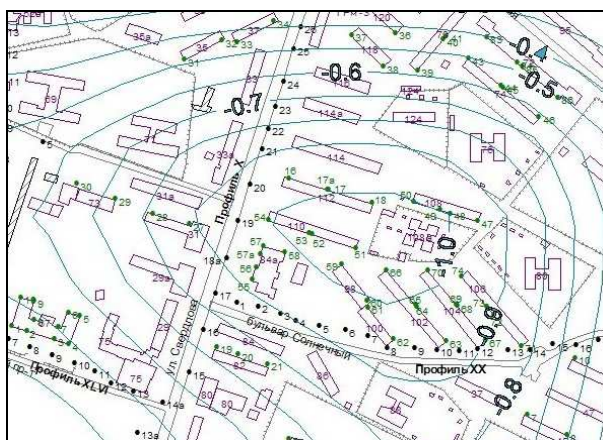


Рисунок 1.3. План поверхности с изолиниями горизонтальных деформаций (мм/м).

В СС-моделях сглаживание производится с помощью параметра сглаживания, который принимает значения в интервале от 0 до 1. Параметр сглаживания принимает значение больше 0,5 для быстроизменяющихся процессов и меньше 0,5 для относительно стабильных процессов.

Параметр сглаживания α для метода Брауна определён методом подбора и принят равным $\alpha = 0,57$. В качестве критерия подбора параметра α принято условие минимума суммарной погрешности результатов проверочного прогноза.

Графики натуральных и модельных значений оседания земной поверхности за период с 1982 по 2008 годы приведены на рисунках 1.4.

Для оценки точности построения модели приведён график погрешности модельных значений относительно натуральных данных. Погрешность, полученная в результате моделирования, представлена на рис. 1.5.

На графике наглядно представлен механизм самонастройки модели. При достаточно обширной выборке погрешность моделирования находится в пределах 5-7%. Модель Хольта более точно описывает натурные данные.

Проверим точность краткосрочных (до пяти лет) прогнозов, выполненных при помощи созданных моделей Брауна и Хольта. Для этого выполним прогноз уже реализованных оседаний по данным 2005-2008 г.г.

Результаты прогнозирования представлены на рисунке 1.6. Погрешность результатов прогноза относительно натуральных представлена на рисунке 1.7.

Из полученных результатов следует, что модель Хольта более точно аппроксимирует натурные значения, при несущественной потере точности прогнозирования в сравнении с методом Брауна. Погрешность четырёхлетнего прогноза не превышает 5%.

Выполним сравнение результатов прогнозирования полученных с применением адаптивных моделей Брауна и Хольта, а так же вычисленных аналитическим путём, со зна-

чениями фактически реализовавшихся оседаний для рассматриваемого репера.

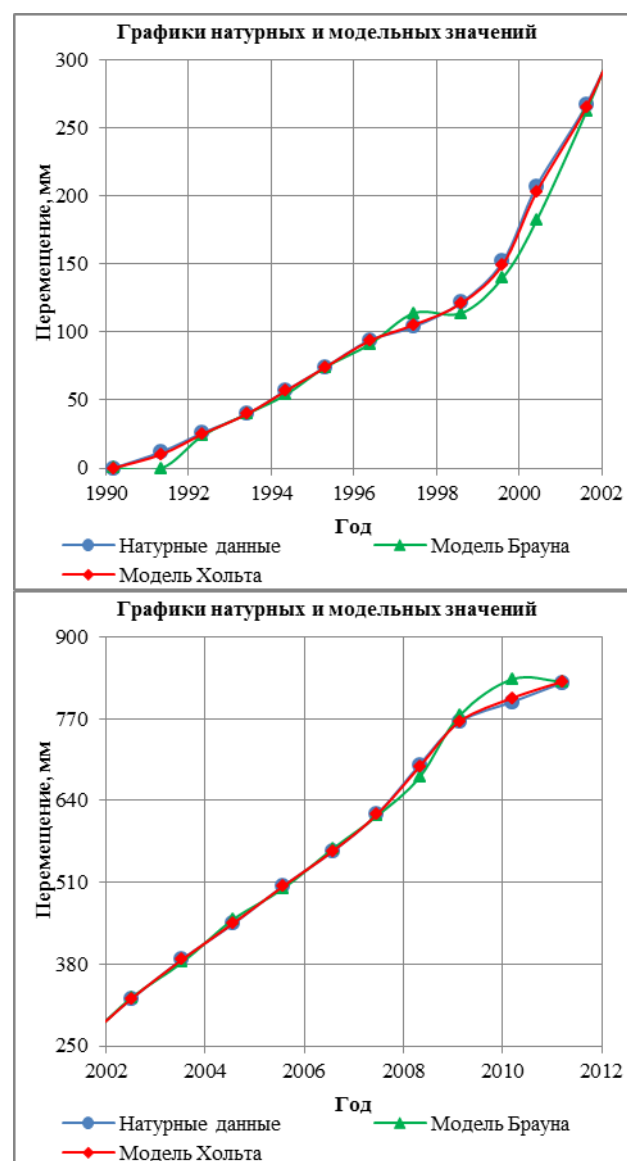


Рисунок 1.4. Графики натуральных и смоделированных значений.

Из анализа полученных графиков видно, что наиболее близким по значению к фактической величине оседания является результат прогноза с использованием модели Хольта. На рисунке 1.9 приведена диаграмма, отражающая количественное значение погрешностей использованных методов прогнозирования.



Графики погрешности модельных значений



Рисунок 1.5. Погрешности модельных значений.

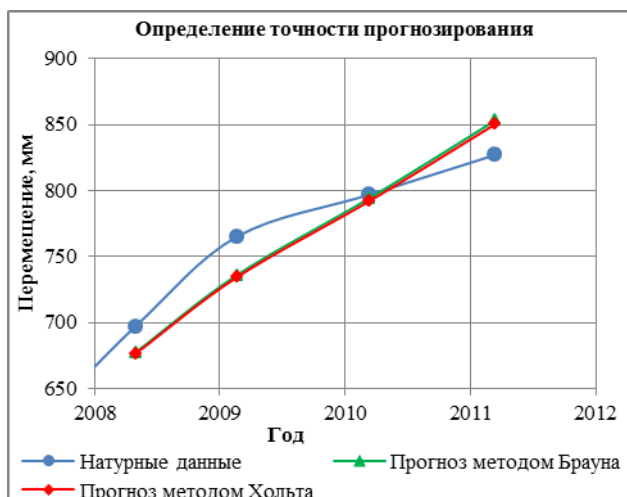


Рисунок 1.6. Проверочный прогноз реализованных оседаний.

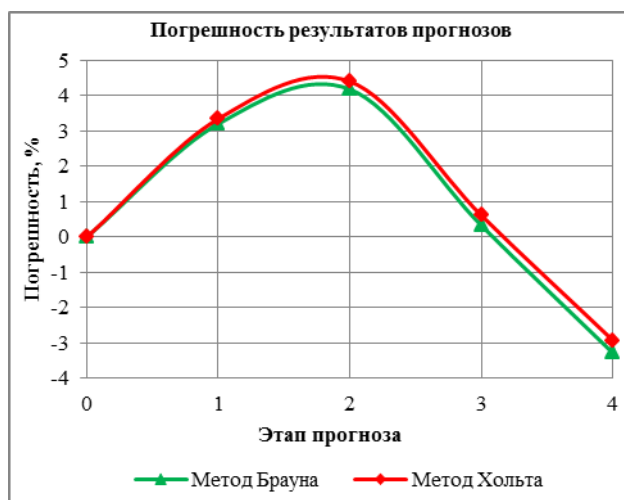


Рисунок 1.7. Погрешность результатов прогноза.

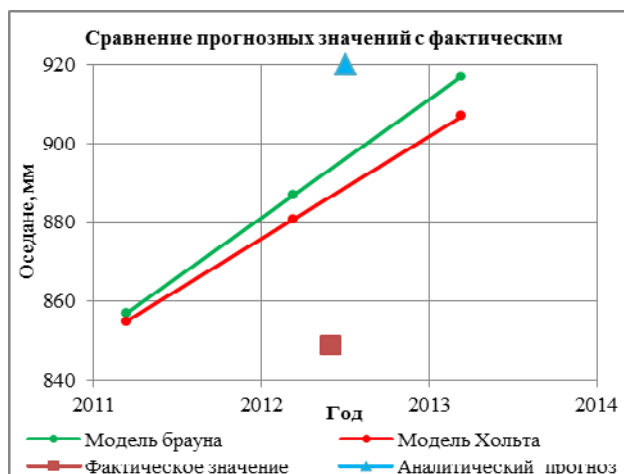


Рисунок 1.8. Сравнение результатов прогноза с фактическим значением.



Рисунок 1.9. Погрешность результатов прогноза.

На основании полученных результатов заключаем, что использование адаптивных моделей прогнозирования на краткосрочных прогнозах имеет преимущество в точности перед аналитическими методами прогнозирования.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПАНЕЛЬНОГО ЗДАНИЯ В МУЛЬДЕ СДВИЖЕНИЯ

В ходе многолетнего мониторинга состояния жилого фонда установлено, что наиболее «чувствительными» к деформациям земной поверхности являются панельные здания. Определение напряженно-деформированного состояния и наименее благоприятного положения здания в мульде сдвижения произведено на примере жилого пятиэтажного панельного здания.

Общая характеристика объекта. Здание относится к типовой серии 1-468А. Жилой дом имеет пять этажей. Количество подъездов – 8. Подвал расположен под всем зданием. Здание крупнопанельное, прямоугольное в плане. Длина здания в крайних осях 120 м, ширина в осях 11 м. Здание поделено деформационным швом на два отсека длиной 60 м. Высота этажей 2,8 м. Высота подвала в среднем составляет 2,2 м. Отметка здания по карнизу крыши составляет +14,500 м. За отметку 0,000 принят уровень чистого пола 1 этажа.

Модель здания выполнена из оболочечных конечных элементов и включает в себя наружные стены и перекрытия. Модель представлена на рисунке 2.1. Стеновые панели с одной из сторон здания условно не показаны.

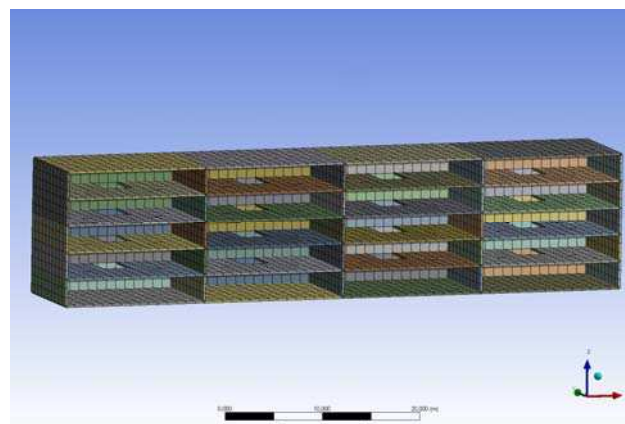


Рисунок 2.1. Конечно-элементная модель панельного здания.

К модели прикладываются кинематические граничные условия, величина перемещений каждого узла в основании модели определяется исходя из выбранного положения здания в мульде сдвижения.

Для качественной оценки мульды сдвижения условно представим поверхность вращения образованной полупериодом функции косинуса:

$$f(x) = -\frac{h}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + 1 \right] \quad (1)$$

где h – максимальная величина осадки (в середине мульды); L – ширина мульды.

В программном комплексе ANSYS выполнен ряд расчётов, моделирующих различное положение здания в мульде оседания. Рассмотрено пять вариантов положения здания. Расположение характеризуется положением центра здания в плане (см. рисунок 2.2) от центра мульды до её края с равными интервалами.

В процессе моделирования варьировались следующие параметры: положение здания в мульде оседания и угол поворота продольной оси здания относительно оси X.

Краткосрочный прогноз деформаций земной поверхности и напряженно-деформированное состояние здание в мульде сдвижения



Рисунок 2.2. Положения здания в мульде оседания.

По результатам расчётов составлена таблица 1. На основании данных таблицы 1 для каждого положения здания относительно плоского дна мульды построены графики изменения интенсивности напряжений в зависимости от поворота здания относительно оси мульды сдвижения (рис. 2.3) и скоростей изменения значений интенсивности напряжений (рис. 2.4).

Таблица 1. Максимальные значения интенсивности напряжений, МПа.

		Угол поворота продольной оси здания, относительно оси X					
		0°	10°	20°	30°	40°	45°
Положение здания	1	12,17	12,15	12,16	12,16	12,16	12,17
	2	9,54	9,78	10,08	10,40	10,66	10,77
	3	2,02	2,97	4,11	5,32	6,40	6,87
	4	8,20	8,97	9,32	8,96	7,93	7,20
	5	8,83	9,29	9,75	9,55	8,72	8,09

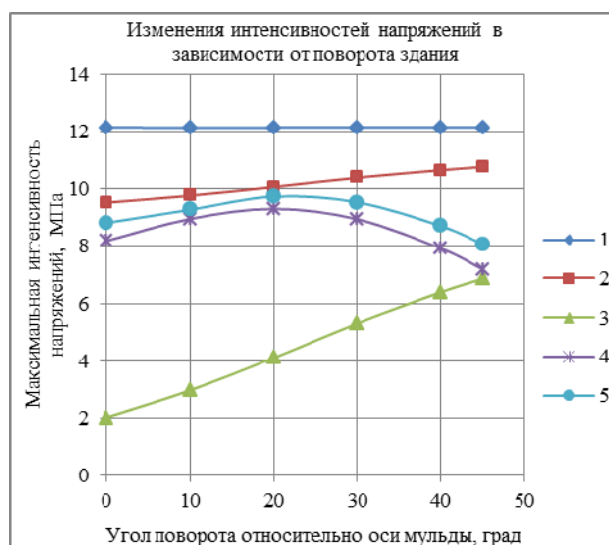


Рисунок 2.3. Изменение интенсивности напряжений в зависимости от поворота здания.

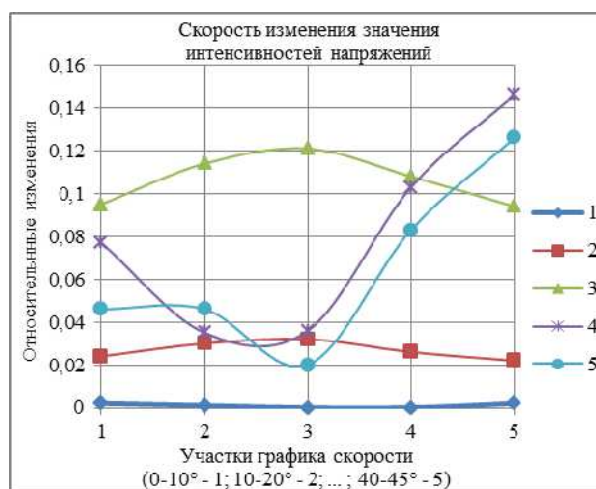


Рисунок 2.4. Скорости изменения значений интенсивности напряжений.

Исходя из анализа значений напряженно-деформированного состояния конструкций здания, полученных в результате численного моделирования, можно сделать вывод, что наиболее неблагоприятным является положение здания в центре мульды оседания. При таком положении здание подвергается изгибным деформациям, проседая в середине. На рисунках 2.5 – 2.7 представлены изополя перемещений и интенсивности напряжений, для здания в таком положении.

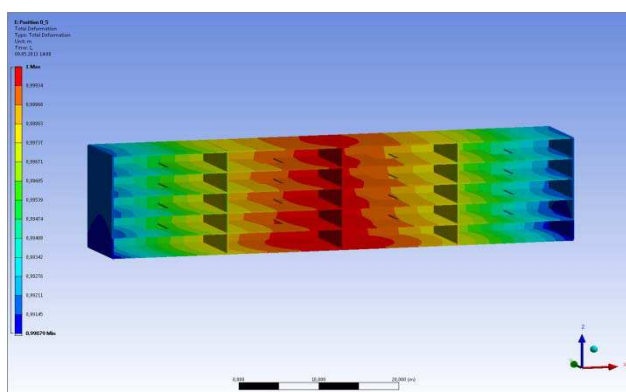


Рисунок 2.5. Суммарные перемещения, м.

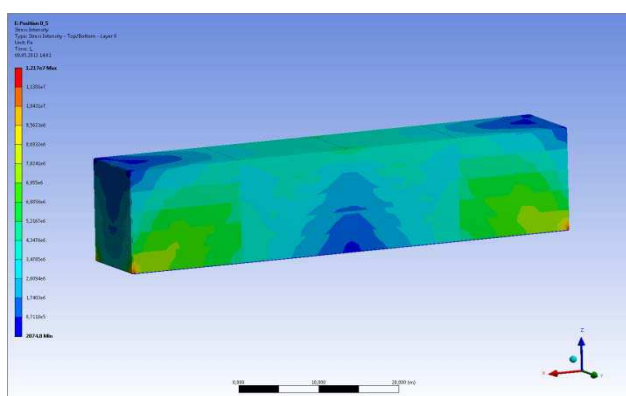


Рисунок 2.6. Интенсивность напряжений в стеновых панелях, МПа.

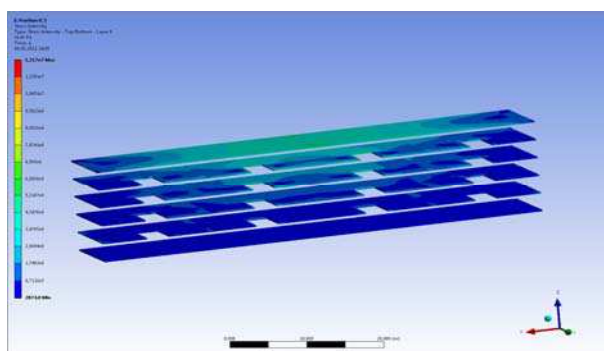


Рисунок 2.7. Интенсивность напряжений в перекрытиях, МПа.

ВЫВОДЫ

1. Из выбранных моделей краткосрочного прогнозирования лучшие результаты показала модель Хольта. Погрешность тестового краткосрочного четырёхлетнего прогноза выполненного при помощи модели Хольта в первые три года не превышает 3%. Погрешность второго шага прогнозирования при сравнении с фактическими данными оседания поверхности составляет 7,07%.
2. Рисунок 2.3 позволяет оценить динамику нарастания напряжений при изменении угла поворота здания относительно мульды оседания. Следует отметить, что поворот здания относительно оси мульды эквивалентен смещению плоского дна мульды относительно здания. Положение здания «3» (рисунок 2.2) характеризуется наиболее быстрым изменением напряжений. Положения «4» и «5» превосходят по скорости изменения напряжений положение «3» лишь в узком диапазоне углов от 40° до 45°. Положения «1» и «2», располагающиеся в области плоского дна наименее чувствительны к изменению ориентации в пространстве.
3. Опасным с точки зрения эксплуатации здания является положение «3». При таком положении деформации здания постоянно нарастают и реализуются с максимальной скоростью, что может привести к аварийной ситуации при относительно невысоком уровне напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашеварова Г.Г., Фаизов И.Н., Зобачева А.Ю. Конструктивные меры защиты зданий и сооружений на подработанной территории. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2010. № 1. С. 72-77.

2. **Kashevarova G., Zobacheva A., Leschev I.** Experimental and Numerical Modeling of the Destroying of Brick Masonry for the Analysis of Buildings Accident. *Advanced Materials Research*. 2011. Т. 250-253. С. 3670-3673.
3. Указания по защите рудников от затопления и охране подрабатываемых объектов в условиях Верхнекамского месторождения калийных солей (технологический регламент).
4. СП 21.13330.2012 «Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах».
5. **Кашеварова Г.Г., Сон М.П., Воробьев А.В.** Определение предельно допустимых деформаций панельных зданий, эксплуатируемых на подработанной территории. Материалы Российской конференции с международным участием «Геотехнические проблемы проектирования зданий и сооружений на карстоопасных территориях». 22-23 мая 2012г. Уфа. С. 51-55.
6. **Кашеварова Г.Г., Воробьев А.В.** Численный анализ возможности сохранения жилых панельных зданий на подработанной территории (Тезисы докладов IV международного симпозиума «Актуальные проблемы комплексного моделирования конструкций и сооружений».) Россия, г. Челябинск, издательский центр ЮУрГУ, 2012. с. 77-79.
7. **Баклашов И.В., Скворцов А.А.** Разработка метода расчета деформированного состояния грунтового массива при подработке.
8. **Малинин А.Г., Малинин П.А., Чернопазов С.А., Гладков И.Л., Воробьев А.В.** Программные средства для геотехнических расчетов. Основания, фундаменты и механика грунтов. 2008 №1, с. 11-14
9. **Четыркин Е.М.** Статистические методы прогнозирования. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Статистика», 1977.-200 с.
10. **Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Орлова И.В.** Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2012. – 328 с.
11. **Лукашин Ю.П.** Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 416 с.
12. **Theil H., Wage S.** Some observations on adaptive forecasting // *Management Science*. - 1964. - Vol. 10. - Mb 2
13. **Winters P.R.** Forecasting sales by exponentially weighted moving averages // *Management Science*. - 1960. - Vol. 6. - №3.
14. **Holt C.C.** Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages // *O.N.R. Memorandum, Carnegie Inst. of Technology*. - 1957. - № 2.

Воробьев Александр Владимирович, аспирант Пермского национального исследовательского политехнического университета, 614010, Россия, г. Пермь, ул. Куйбышева, дом 109, e- mail: km02@yandex.ru.

Кашеварова Галина Геннадьевна, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Строительные конструкции и вычислительная механика» Пермского национального исследовательского политехнического университета. 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр. 29. e- mail: ggkash@mail.ru.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФЕРМ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Т.Л. Дмитриева

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный технический университет», г. Иркутск, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Разработан алгоритм оптимального проектирования стержневых систем, основанный на совместном использовании метода конечных элементов и методов нелинейного математического программирования. Рассмотрена особенность реализации алгоритма на примере оптимизации ферм с большим количеством узлов. Решены прикладные задачи.

Ключевые слова: оптимальное проектирование конструкций, нелинейное программирование, метод конечных элементов, ферма

OPTIMAL DESIGN OF TRUSSES WITH COMPLICATED CONFIGURATION

Tatyana L. Dmitrieva

Irkutsk state technical university, Irkutsk, RUSSIA

ABSTRACT: Developed the algorithm of optimal design of bar systems, based on the joint use of the finite element method and the methods of nonlinear mathematical programming. Consider the features of the implementation of the algorithm on example of trusses with large number of nodes. Solved applied problems.

Key words: optimum design of structures, nonlinear programming, the final element method, truss.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим алгоритм решения задачи оптимального проектирования стержневых конструкций, где задача статического и динамического анализа реализована методом конечных элементов в перемещениях, а задача оптимизации решается методами нелинейного математического программирования [1-4]. Приведём общую постановку этой задачи:

$$\text{найти} \quad \min f(x), \quad X \in E^n \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В качестве минимизируемой функции $f(x)$ используется, как правило, объём (вес) конструкций. X – вектор варьируемых парамет-

ров на интервале $X^L - X^U$. Варьироваться могут параметры поперечных сечений элементов конструкций, а также координаты узлов расчётной схемы. Функции ограничений $g_j(x)$ представляют собой конструктивные ограничения, ограничения по прочности и местной устойчивости, принятые в соответствии с нормативным документом *СП 16.13330.2011*. Предусмотрены также ограничения на перемещения узлов [5].

2. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ

Блок-схема алгоритма решения этой задачи показана на рис. 1. Описание каждого блока алгоритма приведено в табл. 1. Следует отметить, что обращение к функциям ограничений $g(x)$ требует решение задачи конечноэлементного анализа фермы в линейной постановке.

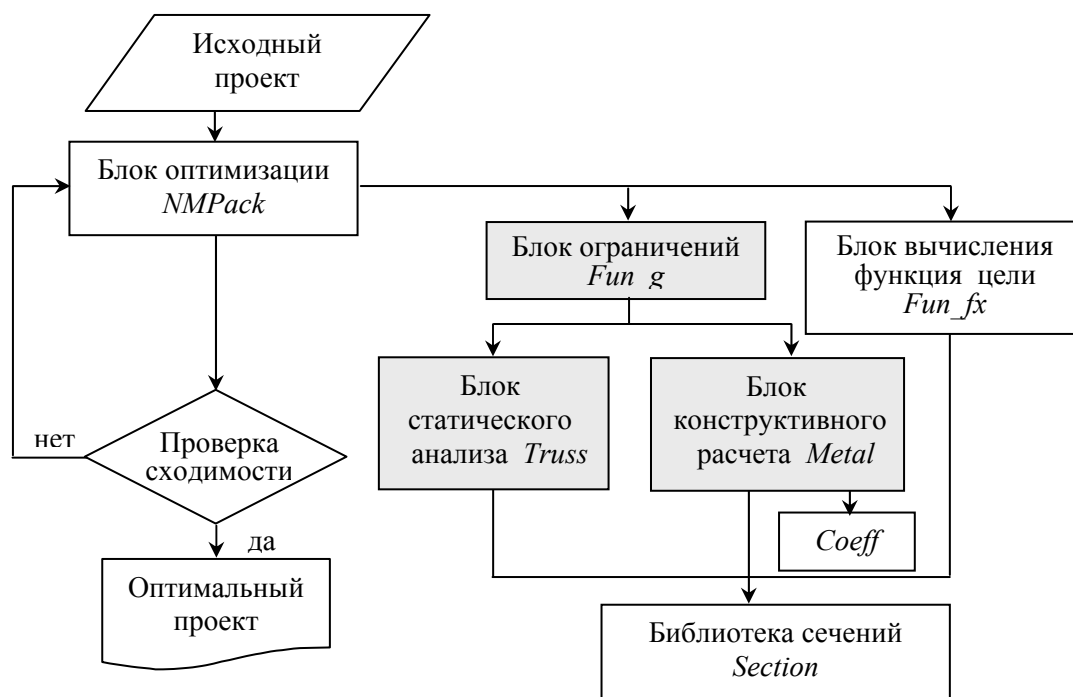


Рисунок 1. Алгоритм оптимизации

Таблица 1

Наименование блока	Описание
<i>NMPack</i>	Блок решения стандартной задачи нелинейного математического программирования
<i>Metal</i>	Блок конструктивного расчета, где выполняются проверки согласно СП 16.13330.2011
<i>Section</i>	Библиотека сечений, которая включает геометрические характеристики простых и составных сечений.
<i>Truss</i>	Блок конечно-элементного анализа фермы
<i>Fun_g</i>	Блок вычисления ограничений по прочности, жесткости и местной устойчивости
<i>Fun_fx</i>	Блок вычисления целевой функции
<i>Coeff</i>	Блок вычисления табличных коэффициентов, согласно СП 16.13330.2011

В [6, 7] приведены решения примеров оптимизации ферм с небольшим числом узлов. Исследование результатов этих решений выявило особенности настройки алгоритма оптимизации на ту или иную задачу. Здесь же было отслежено влияние параметров используемых методов на сходимость алгоритма. Полученный опыт позволил решать задачи оптимального проектирования ферм более сложной конфигурации. При проектировании таких конструкций учитывалось, прежде всего, использование определённого числа типов сечений.

Блок-схема вычисления функций ограничений, входящих в задачу (1-3) показана на рис. 2. Вектор ограничений всей системы содержит вклады по отдельным элементам, которые объединены в группы по типоразмерам и материалу (число групп – n_{typ}). Такой подход позволил независимо задавать физические и геометрические свойства каждой группы. Вектор ограничений для каждой группы $\{g_{el}\}$ размерностью m_{el} формируется в блоке *Metal*. Для обращения к этому блоку необходима соответствующая настройка, а именно – формирование вектора

варьируемых параметров для данной группы – $\{X_{el}(n_{x_{el}})\}$. Для этого из вектора усилий всей системы вычленяется массив расчетных усилий группы $[S_{el}]$ размерностью n_{case} , что соответствует числу случаев загрузки.

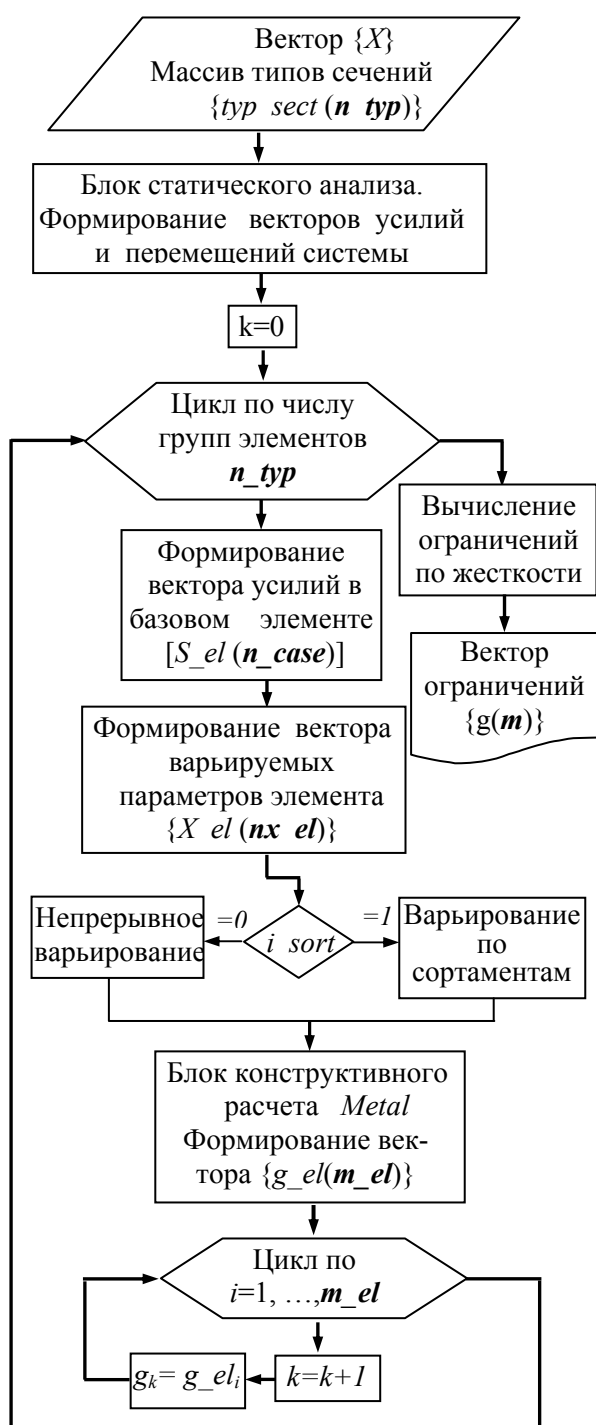


Рисунок 2. Алгоритм формирования вектора

Для практической реализации алгоритма на его основе разработан программный комплекс *РОСК*, ориентированный на расчёт и оптимизацию стальных конструкций [8]. Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим два примера оптимального проектирования ферм.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1. Задача оптимального проектирования статически определимой фермы (31 элемент), где предусмотрено 2 случая загрузки (рис. 3).

Минимизируется объём фермы.

Заданы следующие значения нагрузок:

- постоянная нагрузка 0,805 кПа;
- временная нагрузка 2,354 кПа.

Шаг ферм 12 м. В первом случае загрузки задана постоянная и временная нагрузки, приведённые к узлам верхнего пояса по всей ферме, во втором – постоянная нагрузка в сочетании с временной на левой полуферме. *Варьировались* параметры поперечных сечений и угол наклона элементов верхнего пояса (α). Высота $h1$ при этом оставалась фиксированной (155 см). Была предусмотрена возможность задавать разные типы сечений, а также различные марки стали для каждой группы элементов:

- для поясов была принята марка 09Г2С-6 ($R_y=330$ МПа);
- для раскосов № 20-27, как наименее нагруженных, использовалась сталь ВСт3пс6 ($R_y=225$ МПа), для остальных раскосов – 09Г2С-6.

Модуль упругости $E=21000$ кН/см², коэффициент приведения длины $\mu=1$, коэффициент условия работы $\gamma=1$.

Геометрия сечений в элементах была принята также различной:

- в элементах поясов назначено сечение в виде квадратного короба;
- раскосы № 16, 18, 29, 31 имели сечение в виде квадратного короба;
- сечения остальных раскосов – прямоугольный короб.

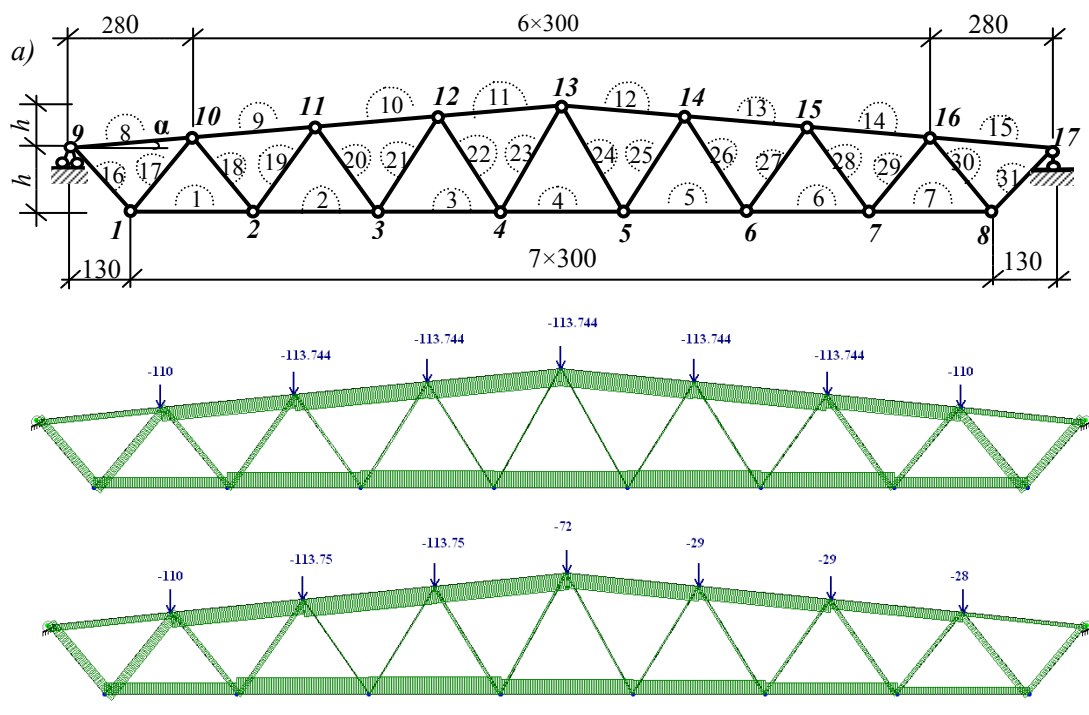


Рисунок 3. Расчетная схема фермы (а); результаты расчета при начальной геометрии в первом и втором нагружении (б)

Таблица 2

Группы элементов по типу сечений											
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
2	10	16	17	18	19	20	21	26	22	23	24
4	8	31	30	29	28	27			25		
3	9										
1	11										
5	12										
6	13										
7	14										
8	15										

Предусмотрены ограничения по прочности и устойчивости согласно СП 16.13330.201 «Стальные конструкции», а также ограничение на перемещение узлов 3, 4, 5. Предельное значение перемещения $[\Delta] = 3,2$ см, что составляло $1/750$ расстояния между осями (2400 см).

Элементы одного типа, объединённые в группы, приведены в таблице 2. Расчёт

производился в пространстве тех параметров, которые указаны в верхней строке таблицы как наиболее нагруженные в своей группе (базовые параметры). Подбор этих параметров был произведён из расчёта конструкции при высотах $h_1=155$ см; $h_2=119$ см (рис. 3, б). Для проверки правильности подбора базовых параметров после получения оптимального проекта выполнялась вычис-

ление ограничений по всем элементам. Если при этом все ограничения не выходили за пределы допустимых значений, то считалось, что решение найдено. Если же невязка в каком-либо ограничении была больше допустимой, то выполнялась смена базового элемента, либо разделение элементов, входящих в группу.

Задача оптимизации фермы решалась в двух вариантах: в первом сечения элементов менялось непрерывно, во втором – дискретно по сортаментам.

Вариант 1. При непрерывном изменении параметров типы сечений принимались следующие:

а) в сечениях с равносторонним коробом варьировался внешний размер короба (H_k), а толщина принималась как часть высоты: $t_k = H_k/25$;

б) в сечениях с неравносторонним коробом варьировалась высота H_k и ширина B_k , а толщина бралась как часть высоты: $t = H_k/25$. С учётом типоразмеров число варьируемых параметров определялось следующим образом: для типов сечений № 1, 2, 3, 5 назначен 1 параметр (всего – 4), а для типов сечений № 4, 6-12 назначено 2 параметра (всего 16). Ещё один варьируемый параметр соответствовал тангенсу угла наклона линии верхнего пояса полуфермы. Общее число варьируемых параметров, таким образом, было равно 21.

Параметры задачи оптимизации:

- Начальные параметры равностороннего короба (см): $H_{k0} = B_{k0} = 9,0$.
- Границы изменения параметров (см): $7,00 \leq H_k \leq 70,0$.
- Начальные параметры неравностороннего короба (см): $H_{k0} = 9,0$; $B_{k0} = 9,0$.
- Границы изменения параметров (см): $6,0 \leq H_k \leq 70,0$; $4,0 \leq B_k \leq 70,0$.

Результаты задачи оптимизации фермы

Число итераций = 4.

Число обращений к функции цели = 94533.

Параметры сечений меняются непрерывно:

Группа 1 (эл. 1-7)

$H_k = 17,73$ см; $A = 48,309$ см².

Группа 2 (эл. 8-15)

$H_k = 17,50$ см; $A = 47,040$ см².

Группа 3 (эл. 16, 31)

$H_k = 14,04$ см; $A = 30,292$ см².

Группа 4 (эл. 17, 30)

$H_k = 11,00$ см; $A = 27,895$ см².

Группа 5 (эл. 18, 29)

$H_k = 10,00$ см; $A = 15,369$ см².

Группа 6 (эл. 19, 28)

$H_k = 9,22$ см; $B_k = 10,89$ см; $A = 14,298$ см².

Группа 7 (эл. 20, 27)

$H_k = 6,27$ см; $B_k = 4,00$ см; $A = 4,904$ см².

Группа 8 (эл. 21)

$H_k = 6,00$ см; $B_k = 4,00$ см; $A = 4,570$ см².

Группа 9 (эл. 26)

$H_k = 7,45$ см; $B_k = 4,00$ см; $A = 6,476$ см².

Группа 10 (эл. 22, 25)

$H_k = 10,84$ см; $B_k = 4,00$ см; $A = 12,121$ см².

Группа 11 (эл. 23)

$H_k = 9,80$ см; $B_k = 5,88$ см; $A = 11,670$ см².

Группа 12 (эл. 24)

$H_k = 7,53$ см; $B_k = 12,39$ см; $A = 11,636$ см².

Наклон линии верхнего пояса 25%.

Объём фермы = 289722,735 см³.

Потенциально активные ограничения

$g_{14} = -0,81 \cdot 10^{-5}$; $g_{18} = -0,53 \cdot 10^{-5}$; $g_{20} = 0,7 \cdot 10^{-7}$;
 $g_{26} = -0,87 \cdot 10^{-5}$; $g_{27} = -0,40 \cdot 10^{-5}$.

Ограничения с 1 по 24 включали проверки по прочности и устойчивости в элементах. Ограничения 25-30 включали допуски на перемещения узлов. Таким образом, последние два потенциально активные ограничения (№ 26, 27) это ограничения на перемещения узлов 3, 4. Для подтверждения правильности полученного оптимального решения были выполнены проверки по прочности (либо устойчивости) для всех элементов фермы. В полном списке эти ограничения имели номера 40, 44, 52, 64, 65.

Проверка полученного оптимального проекта на единственность выполнялась путём решения при разных значениях начальных параметров сечений. Анализ результатов выявил следующий эффект: задача имела множество решений при близких значениях целевой функции (плато целевой функции). В элементах верхнего и нижнего пояса фермы, где имел место 1 варьируемый параметр,

во всех решениях были получены высоты сечений, совпадающие до второго знака после запятой. Это привело к отличию в площадях, составляющему 0,004%. В раскосах, где варьировалось два параметра, там, где ширина сечения B_k выходила на нижнюю границу, высоты сечений совпадали. В других случаях параметры сечений имели существенные отличия при близких значениях площадей. Объем фермы во всех решениях имел отличие в пятом знаке, т.е. практически совпадал.

Потенциально активные ограничения во всех решениях были одинаковы. Таким образом, можно считать, что полученные значения площадей соответствуют единственному (глобальному) оптимуму. При этом имеют место отличия в параметрах сечений в случае, если варьируется избыточное количество этих параметров (например, независимо варьируется высота и ширина сечения).

Вариант 2. Параметры сечений менялись дискретно. Для элементов нижнего и верхнего пояса и раскосов № 16, 18, 29, 31 приняты квадратные коробчатые сечения согласно сортаменту гнутых профилей по ТУ 36-2287-80. Для остальных раскосов – прямоугольные коробчатые сечения согласно сортаменту гнутых профилей по ТУ 67-2287-80. Для каждого типа сечений назначен один варьируемый параметр, который менялся в пределах от 1 до N_{sort} , где N_{sort} – число заданных позиций сортамента. В этом списке были заданы выборочные значения сортамента, обеспечивающие монотонное возрастание площадей. Таким образом, в данном варианте варьировались 12 параметров сечений и угол наклона верхнего пояса полуфермы (всего 13 параметров).

Параметры задачи оптимизации:

- Начальные параметры равностороннего короба (см): $H_{k0} = 14.00$; $t_{k0} = 7.0$.
- Начальные параметры прямоугольного короба (см): $H_{k0} = 10.00$; $t_{k0} = 7.0$.

Результаты задачи оптимизации фермы

Число итераций = 5.

Число обращений к функции цели = 4823.

Наклон линии узлов 25 %.

Объем фермы = 296614,627 см³.

Потенциально активные ограничения

$g_{20} = 0,12 \cdot 10^{-3}$; $g_{26} = -0,35 \cdot 10^{-3}$; $g_{27} = 0,35 \cdot 10^{-3}$.

Для проверки полученного решения были вычислены ограничения для всех элементов фермы. Потенциально активные ограничения при этом были те же, но имели номера 44, 64, 65.

Задача решалась при разных стартовых проектах. При этом разница в объеме была незначительна (0,041%). Значения же площадей в элементах имели существенные отличия. Потенциально активные ограничения везде были одинаковы. Оптимальный наклон верхнего пояса составлял максимально возможное значение – 25%. Таким образом, в случае дискретных изменений параметров было получено несколько локальных оптимумов, дающих практически равные значения объема фермы, но имеющих отличия в параметрах сечений. В этом случае возможен выбор оптимального проекта из всех полученных локальных решений.

Пример 2. Рассмотрена задача оптимального проектирования статически неопределимой фермы (91 элемент). Предусмотрено два случая загрузки ($q_{ном} = 76,5$ Н/см; $q_{вр} = 210$ Н/см). Для разделения элементов по группам был произведен расчёт фермы при заданных начальных значениях сечений и высоте $h = 300$ см. Далее были выделены группы элементов по материалу и типу сечений. Элементы одной группы отмечены одним типом линии на рис. 4. Элементы, имеющие тип 1-3 (пояса и стойки) приняты из материала сталь 09Г2С-6 ($R_y = 330$ МПа). Для типов 4, 5 (раскосы) была принята сталь ВСт3пс6 ($R_y = 225$ МПа). Модуль упругости $E = 21000$ кН/см². Коэффициент приведения длины для всех элементов равнялся 1. Коэффициент условия работы – 1.

Геометрия сечений в элементах была принята также различной:

- Для поясов и стоек (тип 1, 2, 3) приняты квадратные коробчатые сечения согласно сортаменту гнутых профилей квадратного

сечения по ТУ 36-2287-80 (высота короба обозначена H_k , толщина – t_k);

– раскосы (тип 3, 4) имели сечение в виде двух неравнополочных уголков по ГОСТ 8510-86*, отстоящих друг от друга на величину равную толщине (высота уголков обозначена H_L , толщина – t_L).

Варьировался один параметр для каждой группы элементов (номер позиции сорта-

мента) и высота фермы h , которая менялась дискретно с шагом 10 см в пределах от 100 до 600 см. Таким образом, число варьируемых параметров равнялось 7-ми.

Предусмотрены ограничения по прочности и устойчивости. Задано также предельное значение на вертикальное перемещение средних узлов первого и второго пролета (2,4 см).

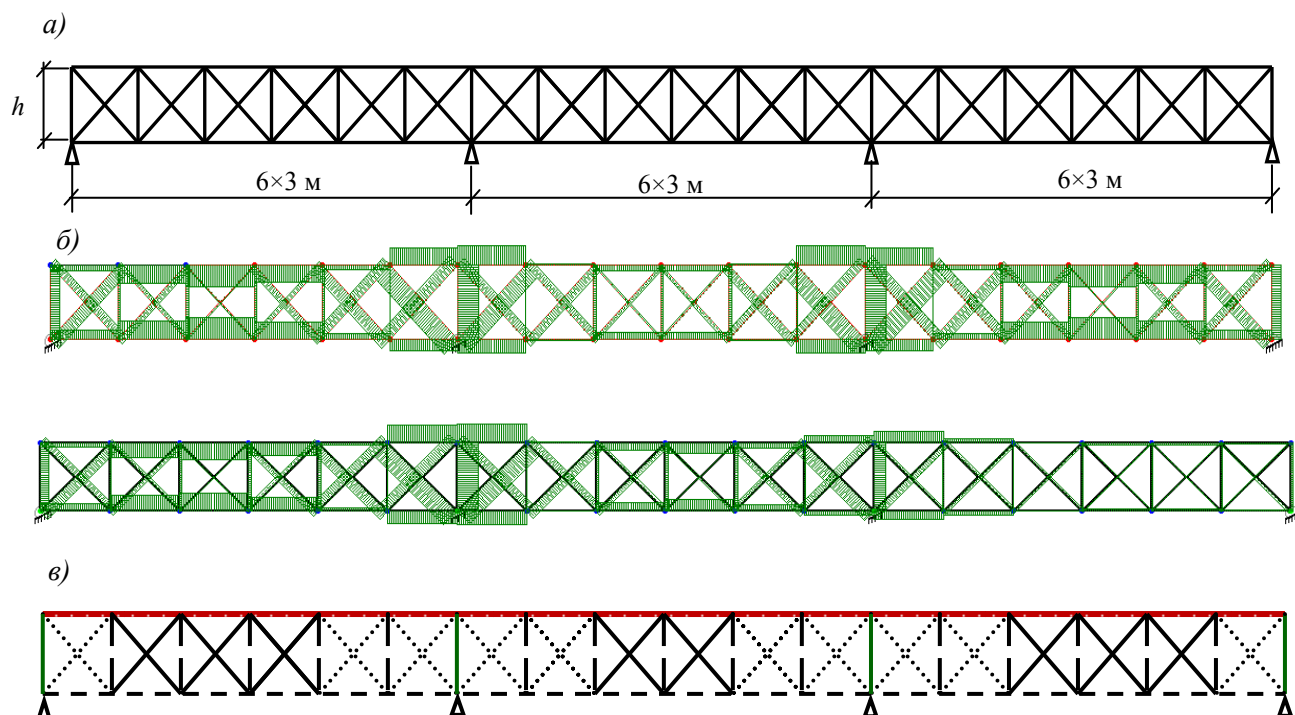


Рисунок 4. Расчетная схема фермы (а); распределение усилий в ферме с начальной геометрией в первом и втором случаях загрузки (б); выделение групп элементов по типам сечений и материалу (в)

Приведём два решения с разных начальных проектов.

Решение 1

Начальные параметры короба (см):

$H_{k0} = 10,00$ см; $t_{k0} = 0,40$ см.

Начальные параметры сечения из уголков

$H_{L0} = 9,0$ см; $B_{L0} = 5,6$ см; $t_{L0} = 0,60$ см.

Результаты задачи оптимизации фермы

Число итераций = 12.

Число обращений к функции цели = 9696.

Сечения, принятые по сортаментам:

Группа 1 (нижний пояс)

$H_k = 10,0$ см; $t_k = 0,40$ см; $A = 15,360$ см².

Группа 2 (верхний пояс)

$H_k = 10,0$ см; $t_k = 0,4$ см; $A = 15,360$ см².

Группа 3 (стойки над опорами)

$H_k = 10,0$ см; $t_k = 0,5$ см; $A = 19,00$ см².

Группа 4 (стойки в пролетах)

$H_L = 7,5$ см; $B_L = 5,0$ см;

$t_L = 0,5$ см; $A = 6,11$ см².

Группа 5 (раскосы 1 ...)

$H_L = 16,0$ см; $B_L = 10,0$ см;

$t_L = 0,90$ см; $A = 22,90$ см²

Группа 6 (раскосы 2 ...)

$H_L = 11,0$ см; $B_L = 7,0$ см;

$t_L = 0,8$ см; $A = 13,9$ см².

Высота фермы = 290,00 см.

Объём фермы = 498405,387 см³.

Потенциально активное ограничение

$$g_{20} = -0,15 \cdot 10^{-2}.$$

Ограничения с 1 по 18 включали проверки по прочности и устойчивости в элементах. Ограничения 19-26 – допуски на перемещения узлов. Таким образом, потенциально активное ограничение g_{20} это ограничения на перемещения среднего узла первого пролета в первом случае загрузки. Как уже отмечалось, после получения оптимального решения выполнялись проверки по прочности (либо устойчивости) для всех элементов фермы. В полном списке потенциально-активное ограничение имело номер 251. Других потенциально активных ограничений выявлено не было. Таким образом, полученное решение можно принять как оптимальное.

Решение 2.

Начальные параметры короба (см):

$$H_{k0} = 14,00 \text{ см}; \quad t_{k0} = 0,60 \text{ см};$$

Начальные параметры сечений из уголков

$$H_{L0} = 10,0 \text{ см}; \quad B_{L0} = 6,3 \text{ см}; \quad t_{L0} = 0,8 \text{ см}.$$

Результаты задачи оптимизации фермы

Число итераций = 5.

Число обращений к функции цели = 12150.

Высота фермы = 290,0 см.

Объём фермы = 497203,846 см³.

Потенциально активные ограничения

$$g_{13} = -0,73 \cdot 10^{-2}; \quad g_{20} = -0,23 \cdot 10^{-2}.$$

В этом решении появилось еще одно потенциально-активное ограничение, входящее в группу ограничений по прочности. Объем фермы при этом уменьшился на 0,24 %.

При решениях этой же задачи с других начальных точек максимальная разница в объеме составляла 0,27%.

4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Решение практических задач продемонстрировало устойчивую работу алгоритма оптимизации. Группировка элементов по типу сечений и материалу позволила сократить

число варьируемых параметров, и, в конечном итоге, повысила сходимость алгоритма (число итераций во всех примерах от 4 до 12). Все оптимальные результаты были проверены на единственность путем выполнения нескольких расчётов с разных начальных проектов. При непрерывном изменении параметров сечений все решения практически совпали (разница в объеме до 0,0012 %). В случае дискретных изменений сечений по сортаментам было получено несколько локальных оптимумов, имеющих отличия в параметрах сечений и незначительную разницу в объеме (до 0,3 %). Оптимальное решение здесь может быть выбрано из определённого числа вариантов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные примеры оптимизации ферм позволили выявить общий подход к решению задач оптимизации конструкций большой размерности. В силу того, что число типоразмеров, как правило, не велико по сравнению с общим числом элементов таких конструкций, задача синтеза (поиск оптимальных параметров) сама по себе не является трудоемкой. Однако эта задача требует многократного обращения к блоку конечно-элементного анализа, что занимает основное время в процессе вычислений. В таком случае алгоритм оптимизации на основе прямого обращения к блоку анализа становится неэффективен. Сокращения объема вычислений можно добиться путем использования алгоритмов оптимизации на основе аппроксимаций [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хог Э., Арора Я.С. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
2. Новые направления оптимизации в

- строительном проектировании / под ред. **Атрека Э. М.**: Строй-издат, 1989. 592 с.
3. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука, 1982. 432 с.
 4. **Безделев В.В., Дмитриева Т.Л.** Использование многометодной стратегии оптимизации в проектировании строительных конструкций. Известия вузов. Строительство, № 2, 2010, с. 90-95.
 5. **Дмитриева Т.Л., Соболев В.И.** Концепция многоуровневой оптимизации в выборе вариантов конструктивных решений металлических сооружений // Вестник Иркутского государственного технического университета, 2011, № 10 (57), с. 89-92.
 6. **Дмитриева Т.Л.** Алгоритм автоматизированного проектирования ферм минимального веса. Известия вузов. Строительство, № 3, 2010, с. 98-105
 7. **Дмитриева Т.Л.** Оптимизация ферм с дискретными параметрами. Известия вузов. Строительство, № 8, 2010, с. 86-94.
 8. **Дмитриева Т.Л.** Программный комплекс расчета и оптимизации строительных конструкций «РОСК» // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2011, № 1(1), с. 31-38.
 9. **Шмит Л., Фарши Б.** Некоторые концепции аппроксимации для синтеза конструкций // Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 5, с. 145-155.
 10. **Дмитриева Т.Л., Ле Чан Минь Дат.** Алгоритм оптимизации на основе аппроксимаций. Вестник Иркутского государственного технического университета, 2012, № 12 (71), с. 134-140.

Тел.: 8 (395- 2) 40-51-44 (раб);
e-mail: dmital@istu.edu

Dmitrieva Tatiyana Livovna, Irkutsk state technical university, Irkutsk, Russia; Doctor of the technical sciences. 664074, Irkutsk, Lermontova str, 83.
Phones: (8-395-2) 40-51-44 (work);
e-mail: dmital@istu.edu

Дмитриева Татьяна Львовна, ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный технический университет», доцент кафедры сопротивления материалов и строительной механики, доктор технических наук. 664074, Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ КОМФОРТНОСТИ ПЕШЕХОДНЫХ МАРШРУТОВ В ГОРОДЕ МОСКВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С.И. Дубинский, А.В. Дорошенко

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящее время в г. Москва проводится работа по обустройству и формированию пешеходных маршрутов. При планировании данных маршрутов не учитывается аэродинамическая пешеходная комфортность. В статье описаны основные положения методики оценки аэродинамической комфортности пешеходных маршрутов с использованием современных технологий численного моделирования. Представлен опыт численного моделирования аэродинамики пешеходных зон для различных комплексов и объектов. Приведено описание аэродинамической модели города Москвы с прилегающими территориями, с учетом рельефа местности и существующей застройки.

Ключевые слова: Пешеходная зона, вычислительная аэродинамика, пешеходная комфортность, численное моделирование.

METHODOLOGIES FOR ESTIMATING WIND COMFORT OF WALKING ROUTES IN MOSCOW USING A NUMERICAL SIMULATION

Sergey I. Dubinsky, Anna V. Doroshenko

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Currently the pedestrian walking zones are equipped and formed. The aerodynamic walking comfort is not considered during this planning. The article describes the basic methodology for assessing the situation of pedestrian zones wind comfort using advanced numerical simulation technology. An experience of a numerical simulation of aerodynamics pedestrian zones for the various complexes and facilities is described. The aerodynamic model of the city of Moscow with the surrounding territories, taking into account the terrain and existing buildings is shown .

Key words: pedestrian zone, computational aerodynamics, pedestrian comfort, numerical simulation.

В настоящее время Департаментом капитального ремонта города Москвы [1] проработаны предложения по дополнительным участкам для пешеходных маршрутов в историческом центре города, общая протяженность которых составит около 16 км (рис.1). Местоположение пешеходных маршрутов определяется исходя из наличия особо значимых объектов культуры и исторического наследия (музеи, театры, памятники); наличия объектов рекреации (скверы, бульвары, парки); обеспечения связи между основными пунктами тяготения в составе общественных

зон с максимальной интенсивностью пешеходного движения и туристических маршрутов.

При обустройстве пешеходных маршрутов предусматриваются следующие виды работ:

- единые: колористическое решение фасадов и концепция архитектурно-художественной подсветки зданий, расположенных вдоль пешеходного маршрута;
- приведение в порядок фасадов зданий;

- обеспечение условий для беспрепятственного пользования маломобильных групп населения (устройство пандусов, тактильных покрытий, ширина, продольный и поперечный уклон тротуаров и др.);
- мощение пешеходных пространств;
- установка малых архитектурных форм (лавки, урны, туристические и информационные стенды);
- упорядочивание нестационарных объектов;
- ремонт и создание объектов озеленения и цветочного оформления;
- вывод, перенос и упорядочивание наружной рекламы;
- обновление и упорядочивание адресных указателей.

При формировании пешеходных маршрутов предусматриваются создание пешеходных зон с режимом ограничения или полного запрещения движения транспорта и создание условий комфортного и безопасного пешеходного движения по улично-дорожной сети (приспособление существующих тротуаров и переходов).



Рисунок 1. Схема пешеходных зон Москвы, предлагаемых для обустройства в 2013 году.

Следует отметить, что в зарубежной практике проводят анализ аэродинамической "пе-

шеходной комфортности" при строительстве новых объектов и при планировании пешеходных зон и зон рекреации. В последние годы такая практика начинает применяться и в нашей стране.

Поскольку натурные замеры весьма трудоемки и не всегда реализуемы, анализ пешеходной комфортности принято проводить двумя методами: при помощи физического моделирования (при таком методе используются специальные аэродинамические трубы метеорологического типа с длинной рабочей частью, в которых структура потока соответствует так называемой пристеночной турбулентности и формируется аналогично натуре) [2,3] и с помощью численного моделирования.

В данной статье будут описаны основные положения методики оценки аэродинамической комфортности пешеходных маршрутов с использованием численного моделирования.

Расчеты ветровых потоков и воздействий сводятся к численному решению трехмерных нестационарных нелинейных уравнений гидрогазодинамики в постановке Навье-Стокса. Кроме того, должны удовлетворяться уравнения неразрывности (сохранения массы) и состояния. Для упрощения моделирования ветровые потоки предполагаются несжимаемыми и изотермическими, массовые силы не учитываются.

Прямое решение уравнений с учетом вихрей всех масштабов (DNS, Direct Numerical Simulation) при современных возможностях ЭВМ практически реализуемо только для очень малых скоростей потока и чисто исследовательских задач.

Подход LES сформировался в начале 80-х годов. Идея LES состоит в том, что в отличие от «глобального» осреднения уравнений Навье-Стокса производится их «фильтрация» только от коротковолновых (с длинами волн порядка и меньше размеров используемой расчетной сетки) турбулентных неоднородностей. Естественной платой за указанные важные преимущества LES яв-

ляется значительное увеличение вычислительных затрат, связанное с необходимостью, как и в случае DNS, проведения трехмерных нестационарных расчетов на достаточно мелких сетках даже в тех случаях, когда представляющее непосредственный интерес для практики осредненное течение является двумерным и стационарным [4].

Поэтому, в современной расчетной практике доминирует полуэмпирический подход, основанный на разложении скорости на осредненную во времени и пульсационную составляющие

$$u_i(t) = \overline{u_i} + u'_i(t)$$

и переходе к решению т.н. "осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса" (Reynolds averaged Navier-Stokes Method, RANS). Система является незамкнутой и требует дополнительных соглашений ("моделей турбулентности").

Решение уравнений может проводиться как в стационарной, так и в нестационарной постановке. Стационарная задача сводится к итерационному решению редкозаполненной системы линейных алгебраических уравнений, с узловыми давлениями, компонентами скоростей и мерами локальной турбулентности (в частности, ТКЕ) в качестве неизвестных. Определяются осредненные во времени величины, число которых для рассматриваемых объектов/задач может достигать сотен миллионов. Итерационный процесс решения системы проводится по связанной многосеточной схеме (coupled multigrid) и считается сошедшимся при малых относительных невязках решения системы. Для улучшения сходимости в качестве предобуславливателя используется неполное треугольное (ILU) разложение матрицы.

К сожалению, точность (и даже практическая сходимость) стационарных расчетов RANS в ситуациях с развитым вихреобразованием не всегда удовлетворительна. Проведенное представительное тестирование на широком круге практических задач (включая

сравнение с данными испытаний в аэродинамических трубах) позволило определить наиболее пригодную для данного класса задач модель турбулентности. Модель SST (Shear Stress Transport, перенос сдвиговых напряжений, F.Menter, 1993), комбинируя достоинства классических моделей "k-ε" и "k-ω", обеспечивает достаточную точность результатов и эффективную сходимость итерационного процесса даже при относительно грубых сетках и умеренном разрешении пограничного слоя.

Основные положения описанной выше методики приведены в диссертации [5].

В настоящее время авторами проводится тестирование применительно к рассматриваемому классу задач подхода DES (DES метод отсоединения), эффективно объединяющему технологии LES RANS.

Важным аспектом решения уравнений Навье-Стокса является схема дискретизации. Наиболее эффективным в настоящее время признан "метод конечных объемов" (МКО), не требующий столь детального моделирования пограничного слоя, как метод конечных элементов (МКЭ), и более удобный при описании сложных расчетных областей реальных застроек, чем метод конечных разностей. Современные подходы (схемы адвекции второго порядка, применение пристеночных функций и увеличение числа точек интегрирования в ячейке) значительно снижают требования к расчетной сетке и ресурсам ЭВМ.

Рекомендуемые размеры расчетной области не менее одного км радиусом вокруг интересующей зоны.

В качестве характеристик набегающего потока используются профили скорости ветра и характеристик турбулентности (интенсивность и масштаб вихря), отвечающие заданным ветровым районам и типам местности по СНиП. В качестве "внешних" граничных условий для расчетной области используются "мягкие" условия по Нейману (равенство нулю производных).

Для учета шероховатости стенок рекомендуется вместо подбора пристеночных функций или коррекции их стандартных параметров применять по возможности "натуральное" моделирование (учет в модели рельефа местности, балконов и оконных проемов и т.п.). В качестве основного расчетного инструмента выбран лицензионный универсальный программный комплекс (ПК) ANSYS. Пакет программ ANSYS [6,7] достаточно распространен в России и мире и имеет более 400 тысяч коммерческих и исследовательских инсталляций и более миллиона легальных пользователей, являясь наиболее популярным в мире расчетным (CAE) ПК. Пакет сертифицирован по основным зарубежным стандартам (ISO-9001, ISO 9000-3, British standard BS 5750, Lloyd's Register's software certification, NAFEMS QA certification, The TickIT initiative и многим другим). Имеется сертификат Госатомнадзора России (Регистрационный номер ПС в ЦОЭП при РНЦ КИ №490 от 10.09.2002, Регистрационный номер паспорта аттестации ПС №145 от 31.10.2002) и сертификат Морского Регистра России.

Расчеты аэродинамики выполнялись с использованием программного модуля ANSYS CFX (далее CFX). Модуль ANSYS CFX позволяет моделировать ламинарный и турбулентный потоки, сжимаемую и несжимаемую жидкости, связанные задачи теплообмена, многофазные потоки, процессы кипения, горения, конденсации, фильтрации, химические реакции и многое другое. Поддерживаются более двадцати различных моделей турбулентности. CFX не включает генераторов сеток, но позволяет импортировать сетки, подготовленные различными программами, в частности и в препроцессоре ANSYS с использованием параметризуемых макросов ANSYS APDL.

Важными аспектами при численном моделировании аэродинамики пешеходных зон является эффективное построение конечно-элементной сетки (так, например, для данного класса задач, необходимо правильно по-

добрать размеры ячеек в приземном слое) и оптимальный выбор модели турбулентности. Для создания конечно-элементной сетки был разработан макрос, с помощью которого для поставленной задачи строится неструктурированная сетка. Макрос позволяет пользователю самостоятельно задавать количество и размеры элементов на разных участках модели, элементы сетки ниже уровня 2,5 метра - призмы.

Разработана программа (на платформе Microsoft .NetFramework и языке программирования C#), позволяющая проводить критериальную оценку аэродинамической комфортности в пешеходных зонах, учитывать пульсационную составляющую ветра и розу ветров (с учетом ее сезонности) [8].

Были проведены численные расчеты аэродинамики пешеходных зон для следующих объектов: кампуса Технического университета г. Эйндховен; территории Московского государственного строительного университета; территории района Синдзюку (часть Токио); проектируемого торгового комплекса "Пулково аутлет" (г. Санкт-Петербург); проектируемый ЖК "Аквамарин" (г. Владивосток); ЖК "Газойл-Сити" (г. Москва); ЖК "Зодиак" (г. Москва); ЖК "Скайфорт" (г. Москва) и т.д. (рис.2,3) [9,10].

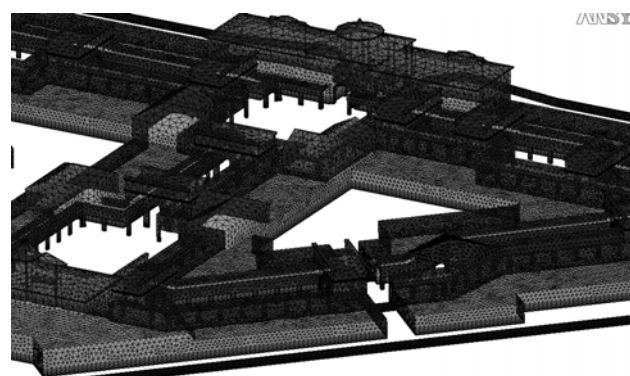


Рисунок 2. Торговый комплекс «Пулково аутлет». Модель. Расчетная сетка на поверхностях зданий.



Рисунок 3. Распределение скоростей ветра в пешеходных зонах кампуса Технического университета г. Эйндховен для западного направления.

Также проводится работа по созданию ветровой аэродинамической модели города Москвы с прилегающими территориями, с учетом рельефа местности и существующей застройки (рис.4). Модель (100-300 миллионов ячеек) будет включать в себя районы Новой Москвы и предполагает использование мощных многопроцессорных технологий и кластера МГСУ.

Совместно с Гидрометцентром (Г.С. Ривин, И.А.Розинкина) разрабатывается методика преобразования краткосрочных метеопрогнозов по мезомасштабной модели COSMO-RU [11] в граничные и начальные условия для модели ветровой аэродинамики городской территории ("downscaling").

При планировании объектов озеленения и цветочного оформления может быть применена разработанная методика численного моделирования зеленых насаждений, позволяющая выбирать оптимальные варианты их размещения в целях улучшения комфортности [12,13].

Разработанную методику оценки аэродинамической комфортности пешеходных маршрутов с использованием численного моделирования возможно применить и для оценки проектируемых пешеходных маршрутов города Москвы. Такое моделирование помогло бы выявить зоны сильных приземных ветров и причины их появления. Анализ полученных результатов позволил бы разрабо-

тать рекомендации по снижению ветровых воздействий в зонах сильных ветров.

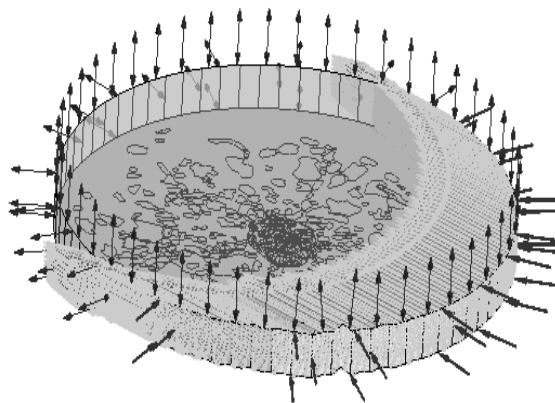


Рисунок 4. Модель аэродинамики московского региона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <http://www.moskr.ru/dkr/ru/>
2. **Дорошенко С.А., Дорошенко А.В., Орехов Г.В.** Определение ветровой нагрузки на трехмерные конструкции с помощью моделирования в аэродинамической трубе // Вестник МГСУ. 2012. № 7. С. 69-74.
3. **Дорошенко С.А.** Проработка конструкции аэродинамической трубы для проведения аэродинамических и аэроакустических испытаний строительных конструкций // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2011. № 4. С. 25.
4. **Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л.** Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Учебное пособие. // Санкт-Петербург. Издательство Политехнического университета. 2012г. 88 стр.
5. **Дубинский С.И.** Численное моделирование ветровых воздействий на высотные здания и комплексы. Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. М., МГСУ, 2010.
6. ANSYS Workbench User's Guide 2012.

7. **Дубинский С.И.** ANSYS И ANSYS/CIVILFEM в строительстве // САПР и графика. 2004. № 12. С. 75.
8. **Дорошенко А.В.** Программа оценки аэродинамической комфортности в пешеходных зонах // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2013. № 5. С. 100-103.
9. **Серебrenникова А.В., Дубинский С.И.** Численное моделирование аэродинамической комфортности пешеходных зон // Вестник МГСУ. 2009. Т. 1. № С. 485.
10. **Дубинский С.И., Дорошенко А.В.** Численное моделирование скоростей ветра в реальной застройке на примере района г. Токио // Приволжский научный журнал. 2012. № 4. С. 70-75.
11. **Блинов Д.В., Ривин Г.С., Розинкина И.А.** Система краткосрочного прогноза погоды COSMO-RU: технологические аспекты визуализации и распространения прогнозов // Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. 2011. № 346. С. 47-54.
12. **Дорошенко А.В., Дубинский С.И.** Влияние посадки деревьев на структуру приземного воздушного потока внутри городской застройки Вестник МГСУ. 2011. № 4. С. 45.
13. **Дорошенко А.В.** Численное моделирование ветровых потоков вокруг живой изгороди. // Научно-технический вестник Поволжья. 2012. № 4. С. 91-95.

Sergey I. Dubinsky, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, Associate Professor, Ph.D, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru.

Anna V. Doroshenko, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, Postgraduate, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: pochta.avd@gmail.com.

Дубинский Сергей Иванович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, доцент, кандидат технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru.

Дорошенко Анна Валерьевна, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: pochta.avd@gmail.com.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВЕТРА КАК КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

С.И. Дубинский, А.Р. Усманов, И.Н. Афанасьева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Статья посвящена методу задания граничных условий на входе в расчетную область при проведении численных нестационарных аэродинамических расчетов с использованием группы моделей турбулентности LES - моделированию поля скоростей ветра как класса случайных процессов с применением метода канонических разложений. Составлена библиотека профилей средних скоростей ветра и его спектральных характеристик на основе изученной отечественной и зарубежной литературы. Разработанная методика программно реализована на языке MATLAB в виде приложения с графическим интерфейсом, которое позволяет с использованием собранной библиотеки профилей средних скоростей ветра и его спектральных характеристик генерировать независимые случайные реализации "реальных" скоростей ветра.

Ключевые слова: Граничные условия, LES, поле скоростей ветра, случайные процессы, спектральная плотность, профиль средних скоростей

NUMERICAL SIMULATION OF A WIND VELOCITY FIELD AS A CLASS OF STOCHASTIC PROCESSES

Sergey I. Dubinsky, Anton R. Usmanov, Irina N. Afanasyeva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The paper deals with the method of the inlet boundary condition definition during numerical transient aerodynamic calculations using LES turbulence model. This method is called as the method of numerical simulation of a wind velocity field as a class of stochastic processes. The collection of mean wind velocity profiles and wind spectrums was put together on basis of the investigated domestic and foreign literature. The developed method was implemented in the form of MATLAB graphic application, which allows generation of "real" wind velocity realizations using the above-mentioned collection.

Key words: Inlet Boundary Conditions, LES, a wind velocity field, stochastic processes, spectral density, wind velocity profile

1. ВВЕДЕНИЕ

Увеличение числа уникальных зданий и сооружений, чувствительных к ветровым воздействиям, приводит к необходимости обоснования безопасности и комфортности проектируемых и уже эксплуатируемых зданий, для которых фактор ветрового воздействия является значимым.

Современные строительные нормы не учитывают в полной мере пространственно-временные характеристики набегающего потока. Поэтому, исследователи и проекти-

ровщики обращаются к следующим методам определения ветровых нагрузок на здания и сооружения:

- 1) натурные испытания;
- 2) проведение экспериментов в аэродинамической трубе (АДТ);
- 3) численное моделирование.

Численное моделирование ветровых воздействий сводится к решению основных уравнений гидрогазодинамики – уравнений Навье-Стокса, неизвестными которых, в частности, являются скорости ветра и давление (актуальные или осредненные). Для численного

моделирования турбулентных течений существуют несколько подходов преобразования уравнений Навье-Стокса - RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), LES (Large Eddy Simulation) и DES (Detached Eddy Simulation). Для решения поставленной задачи необходимо задание граничных и начальных условий. В данной работе рассмотрен вопрос о задании граничных условий на входе в расчетную область.

В группе моделей турбулентности RANS в качестве входного потока задается профиль средних скоростей и турбулентные характеристики потока. Однако в модели LES необходимо задание актуальных (не осредненных) скоростей, изменяющихся во времени и пространстве. Для решения этой задачи принимается гипотеза о случайности полей скоростей ветра, которые моделируются методами теории случайных процессов.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайным процессом называется семейство случайных величин, индексированных некоторым параметром $t \in T \subseteq R$, который интерпретируется как время: $\xi(t) : t \in T$.

Сечением случайного процесса называется случайная величина $\xi(t)$, соответствующая фиксированному t .

Реализацией случайного процесса называется функция при фиксированном элементарном событии: $x(t) = \xi(t) |_{\omega=\omega_0}$

Случайный процесс называется процессом с непрерывным временем, если T - прямая, полупрямая, отрезок, интервал или полуинтервал в R , в частности, если $T = \{t | t \in [0, \infty)\}$.

Случайный процесс называется процессом с непрерывными состояниями, если значением случайного процесса является непрерывная случайная величина.

Под исследуемыми процессами подразумеваются процессы с непрерывными состоянием и временем, причем $T = \{t | t \in [0, \infty)\}$.

Математическим ожиданием случайного процесса называется функция:

$$m_{\xi}(t) = M(\xi(t)) \quad (1)$$

Корреляционной функцией случайного процесса называется функция:

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))] \quad (2)$$

Пусть дан класс случайных процессов:

$$\xi_i(t) : t \in T \quad (3)$$

Взаимной корреляционной функцией случайных процессов ξ_i, ξ_j называется функция:

$$R_{\xi_i\xi_j}(t_1, t_2) = M[\xi_i(t_1)\xi_j(t_2)] - m_{\xi_i}(t_1)m_{\xi_j}(t_2) \quad (4)$$

Класс случайных процессов называется гауссовским, если любые его конечномерные распределения являются нормальными.

Класс случайных процессов называется стационарным, если всевозможные многомерные законы распределения зависят только от взаимного расположения моментов времени $t_1, t_2, \dots$, но не от самих значений этих величин.

Класс случайных процессов называется стационарным в широком смысле, если математические ожидания любого входящего случайного процесса не зависят от времени - $m_{\xi_i}(t) = m_{\xi_i}$ - а корреляционные функции и взаимные корреляционные функции зависят только от разности моментов времени, для которых взяты ординаты случайной функции: $R_{\xi_i\xi_j}(t_1, t_2) = R_{\xi_i\xi_j}(t_1 - t_2)$.

Для гауссовских процессов понятие стационарности в широком и узком смыслах совпадают.

Спектральной плотностью стационарного в широком смысле случайного процесса называется преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_{\xi\xi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (5)$$

Взаимной спектральной плотностью случайных процессов, принадлежащих некоторому стационарному в широком смысле классу случайных процессов, называется преобразование Фурье взаимной корреляционной функции:

$$S_{\xi_1\xi_2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_1\xi_2}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (6)$$

Можно показать, что выражение для спектральной плотности может быть записано в виде:

$$S_{\xi_1\xi_2}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[M \left(\int_0^T x(t) e^{-2\pi i f t} dt \right) \left(\int_0^T y(t) e^{-2\pi i f t} dt \right)^* \right] \quad (7)$$

Коспектром случайных процессов называется действительная часть взаимной спектральной плотности:

$$S_{\xi_1\xi_2}^C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_1\xi_2}(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \quad (8)$$

Квадратурным спектром случайных процессов называется, соответственно, мнимая часть взаимной спектральной плотности, умноженная на -1:

$$S_{\xi_1\xi_2}^Q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_1\xi_2}(\tau) \sin(2\pi f \tau) d\tau \quad (9)$$

Когеренцией случайных процессов называется функция:

$$coh_{\xi_1\xi_2}(f) = \frac{|S_{\xi_1\xi_2}(f)|}{\sqrt{S_{\xi_1\xi_1}^C(f)} \sqrt{S_{\xi_2\xi_2}^C(f)}} \quad (10)$$

Знак * обозначает знак комплексного сопряжения. $x(t), y(t)$ -реализации процессов, соответственно ξ_1 и ξ_2

Важным определением при изучении ветровых воздействий является интегральный продольный масштаб турбулентности. Пусть $z(t)$ - пульсации продольных скоростей ветра, U - средняя скорость ветра (ветер предполагается стационарным). Тогда интегральный продольный масштаб турбулентности определяется как:

$$L = \frac{U}{2\sigma_z^2} S_{zz}(0) = U \int_0^{\infty} \frac{R_{\xi\xi}(\tau)}{\sigma_z^2} d\tau \quad (11)$$

Эта величина является характеристикой среднего размера турбулентных вихрей в направлении среднего течения. Поперечный и вертикальный масштабы турбулентности определяются подобным же образом.

3. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для моделирования скоростей применяется метод канонических разложений – каждый процесс (соответствующий проекции скорости ветра) представляется в виде суммы гармоник, коэффициенты которых являются случайными величинами с характеристиками: математические ожидания и спектральные плотности процессов:

$$y_i^n(t) = \sum_{k=0}^n v_k^i \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) + u_k^i \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right); 0 \leq t \leq T_p; \quad (12)$$

$i = 1..P$

u_k^i, v_k^j - случайные величины, такие что:

$$\begin{aligned}
 M(u_k^i) &= M(v_k^j) = 0 \forall i, k; \\
 M(u_{k1}^i u_{k2}^j) &= 0 \forall k1 \neq k2 \\
 M(v_{k1}^i v_{k2}^j) &= 0 \forall k1 \neq k2 \\
 M(u_{k1}^i v_{k2}^j) &= 0 \forall k1 \neq k2 \\
 M(v_k^i v_k^j) &= M(u_k^i u_k^j) = \frac{2}{T_p} \operatorname{Re} \left(S_{\xi^i \xi^j} \left(\frac{k}{T_p} \right) \right) \forall k \neq 0 \\
 M(v_0^i v_0^j) &= M(u_0^i u_0^j) = \frac{1}{T_p} S_{\xi^i \xi^j} \left(\frac{k}{T_p} \right) \\
 M(u_k^i v_k^j) &= -M(u_k^j v_k^i) = \frac{2}{T_p} \operatorname{Im} \left(S_{\xi^i \xi^j} \left(\frac{k}{T_p} \right) \right) \forall k \neq 0 \\
 M(u_0^i v_0^j) &= M(u_0^j v_0^i) = 0 \\
 \forall i, j
 \end{aligned} \tag{13}$$

Данный метод реализует стационарный гауссовский класс случайных процессов.

4. БИБЛИОТЕКА ПРОФИЛЕЙ СРЕДНИХ СКОРОСТЕЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕТРА

В ходе анализа отечественных и зарубежных источников для определения характеристик ветра как класса случайных процессов составлена библиотека профилей *средних продольных скоростей ветра*:

- Логарифмический профиль [1]
- Степенной профиль [1]
- Профиль СНиП 2.01.07-85 [8]

и его *спектральных характеристик*:

- Спектральные плотности и взаимные спектральные плотности трех компонент скорости [1]
- Спектральные плотности и взаимные спектральные плотности продольной составляющей скорости [2]

- Спектральные плотности и взаимные спектральные плотности продольной компоненты скорости [3]
- Спектральные плотности продольной составляющей скорости [4]
- Спектральные плотности продольной и вертикальной составляющих скорости [5]
- Взаимные спектральные плотности продольной составляющей скорости и взаимные спектральные плотности продольной и вертикальной составляющей скорости [6]
- Спектральные плотности трех компонент скорости [7]
- Спектральные плотности продольной составляющей скорости [9]

5. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ВЕТРА КАК КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Методика (п.3) моделирования полей скоростей ветра реализована с использованием программного продукта MATLAB. Генерируются реализации (временные зависимости) трех компонент скорости ветра с учетом вышеуказанных пространственно-временных характеристик потока.

В качестве примера на рисунках 2-4 приведены реализации скоростей со случайными характеристиками:

- Профиль средней продольной скорости ветра по СНиП 2.01.07-85 [11]:

$$U(z) = c_r(z) c_0(z) U(10) \tag{14}$$

- Спектральные плотности трех компонент скорости и взаимная спектральная плотность продольной скорости [1]:

$$\begin{aligned}
 S_U(f, z) &= \frac{\sigma^2}{f} \frac{6.8 \hat{X}(f, z)}{(1 + 10.2 \hat{X}(f, z))^{\frac{5}{3}}} \\
 S_V(f, z) &= \frac{u_*^2}{f} \frac{15 \tilde{X}(f, z)}{(1 + 9.5 \tilde{X}(f, z))^{\frac{5}{3}}} \\
 S_W(f, z) &= \frac{u_*^2}{f} \frac{3.36 \tilde{X}(f, z)}{1 + 10 \tilde{X}(f, z)^{\frac{5}{3}}} \\
 S_{U_1 U_2}(f) &= \sqrt{S_U(f, z_1)} \sqrt{S_U(f, z_2)} e^{-i(f)}
 \end{aligned} \quad (15)$$

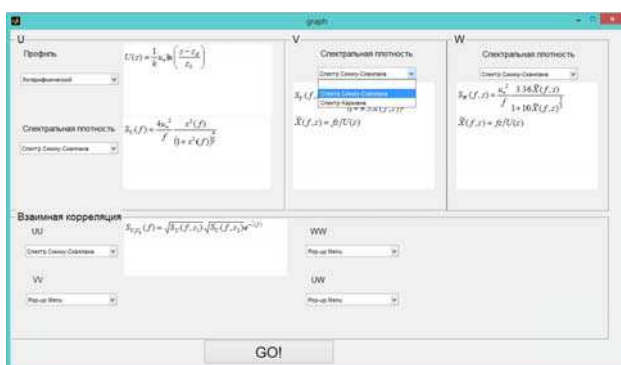


Рисунок 1. Интерфейс разработанного приложения (MATLAB).

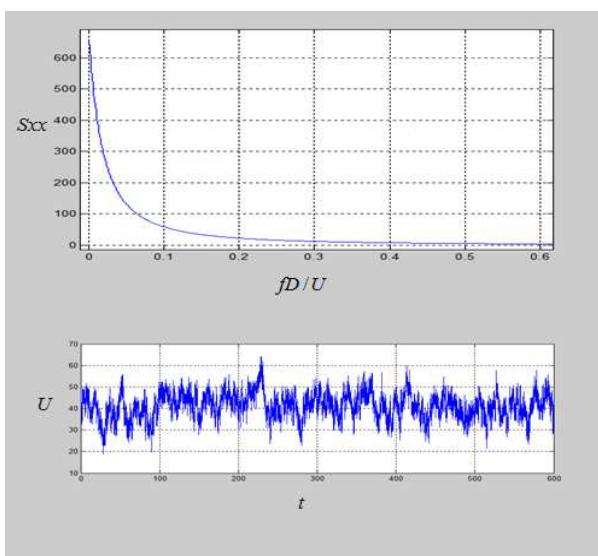


Рисунок 2. Спектральная плотность и реализация продольной составляющей скорости (м/с).

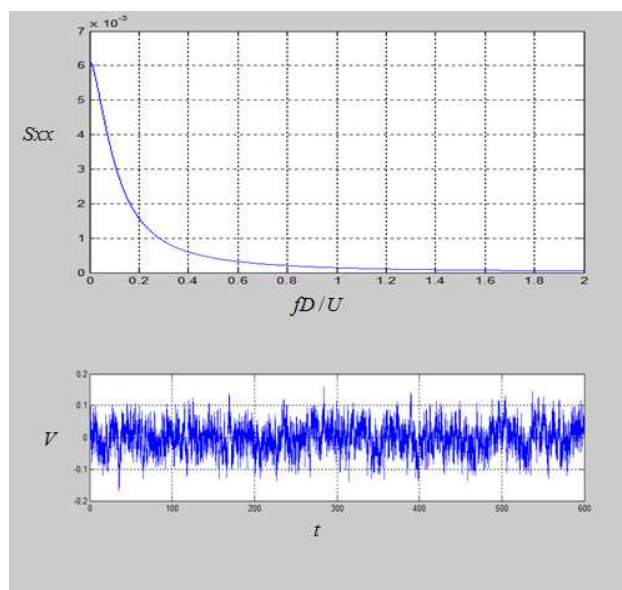


Рисунок 3. Спектральная плотность и реализация поперечной составляющей скорости (м/с).

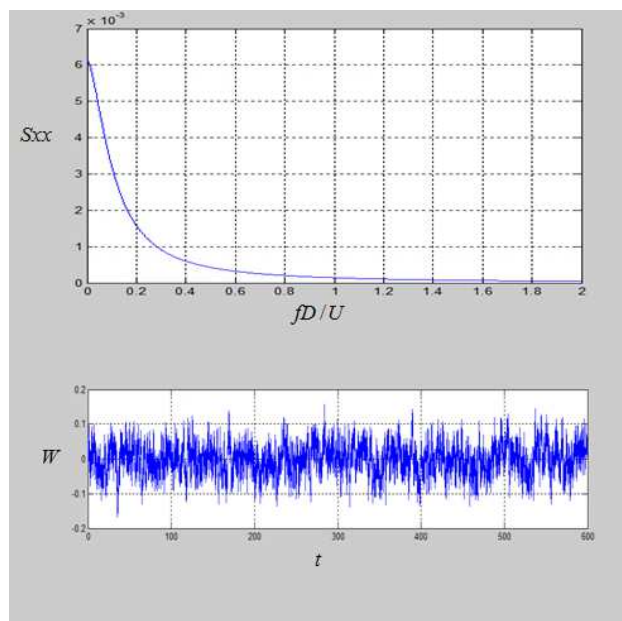


Рисунок 4. Спектральная плотность и реализация вертикальной составляющей скорости (м/с).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для определения характеристик ветра как класса случайных процессов составлена библиотека профилей **средних скоростей ветра** и его **спектральных характеристик**.

Разработана и программно реализована методика моделирования полей скоростей ветра как класса случайных процессов с применением метода канонических разложений на базе вышеупомянутой библиотеки.

Полученные реализации ("реальные" скорости) ветра планируется применять:

- 1) В качестве граничного условия на входе расчетной области при проведении численного аэродинамического расчета с использованием модели турбулентности LES.
- 2) Для определения ветровой нагрузки по формулам из [1] с использованием этих реализаций для проведения полного динамического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Emil Simiu, Robert H. Scanlan.** Wind effects on Structures, New york, 1984
2. **Dr.-Ing. Casimir Katz.** Computational Mechanics Enhanced Civil Engineering, Madrid, 2008
3. **Joaquín Mur Amada.** Wind Power Variability in the Grid, Zaragoza, 2009
4. **Dan Lungu, Pieter van Gelder.** Characteristics of wind turbulence with applications to wind codes, 2008
5. **Hao Wang, Zhou-hong Zong, Ai-qun Li, Teng Tong, Jie Niu, Wen-ping DENG,** Digital simulation of 3D turbulence wind field of Sutong Bridge based on measured wind spectra, 2012
6. **Mayumi Fujimura, Junji Maeda.** Cross-correlation of fluctuating Ccomponents of wind speed based on strong wind measurement,
7. **H.S. Rutten, J.A.Wisse.** Wind-induce pressure fluctuations on building facades, Nijmegen, 1997
8. **Dorian JANJIC, Heinz Pircher.** Consistent Numerical Model for Wind Buffeting Analysis of Long-Span Bridges, 2004
9. СНиП 2.01.07-85

Дубинский Сергей Иванович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), доцент, кандидат технических наук, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Усманов Антон Равильевич, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Афанасьева Ирина Николаевна, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, Научно-образовательный центр компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов (НОЦ КМ), аспирант, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: niccm@mgsu.ru

Sergey I. Dubinsky, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Associate Professor, Ph.D, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: sergdubpodlipki@mail.ru

Anton R. Usmanov, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

Irina N. Afanasyeva, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Research-Educational Center of Computational Simulation, Postgraduate, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: niccm@mgsu.ru

К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО И УДАРНОГО ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ ПАССИВНОГО ТИПА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

А.В. Дукарт

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматриваются установившиеся колебания неавтономной двухмассовой механической системы с последовательным соединением звеньев, вызванные кратковременными периодическими импульсами, при отсутствии (система с динамическим гасителем) и наличии (система с ударным гасителем одностороннего действия) соударений между массами. Демпфирование в звеньях системы учитывается по гипотезе частотно-независимого трения Е.С. Сорокина, причем для исходной системы оно принимается непропорциональным. В системе с ударным гасителем соударения масс предполагаются мгновенными и оцениваются коэффициентом восстановления при ударе. Для определения стационарных колебаний системы используются известные аналитические решения [1,5]. С их помощью найдены оптимальные параметры и дана оценка эффективности динамического и ударного гасителей при действии периодических импульсов прямоугольной формы различной длительности с нестабильной частотой их приложения.

Ключевые слова: периодические импульсы, длительность и форма импульса, динамический гаситель, ударный гаситель, частотно-независимое трение, импульсно-частотная характеристика, эффективность виброзащиты

ON ASSESSMENT OF EFFICIENCY OF DYNAMIC AND IMPACT ABSORBERS OF PASSIVE TYPE UNDER PERIODIC IMPULSES OF FINITE DURATION

Adam V. Dukart

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Steady oscillations in non-autonomous two-mass system, caused by short-term periodic impulses, are considered; in the case of impact absorber, the masses collide while in the dynamic absorber, the collisions are absent. Damping in the parts of the system is taken into account according to the hypothesis of frequency-independent friction due to E.S.Sorokin, and for the main mass, it is accepted disproportionate. The collisions in the system with impact absorber are assumed instantaneous and are determined using the restitution coefficient. To find the steady-state oscillation of the system, well known analytical solutions [1,5] are used. Finally, the optimal values of the parameters of the dynamic and impact absorbers are found and their efficiency depending the duration of periodic rectangular pulses of unstable frequency is evaluated.

Key words: periodic impulses, duration and form of impulses, dynamic absorber, impact absorber, frequency-independent friction, impulse-frequency characteristics, damper efficiency

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений развития теории динамических и ударных гасителей колебаний является оценка их эффективности при различных возмущающих нагрузках. К настоящему времени наиболее полно изучены возможности гасителей колебаний пассивного типа при гармонических воздействиях с различной степенью неустойчивости их частоты [1, 2]. Значительно меньше в литературе освещены вопросы гашения колебаний объектов виброзащиты (строительные конструкции, машины, приборы и другие) при импульсивных воздействиях, которые составляют важный класс эксплуатационных нагрузок [3]. В ряде случаев импульсивные нагрузки представляют собой возмущающие воздействия в виде многократно повторяющихся сил и ударов, которые при определенных соотношениях между параметрами объекта и нагрузки могут приниматься периодическими [3]. Такие нагрузки создаются штамповочными автоматами, формовочными машинами, гидравлическими и механическими молотами и другими механизмами. Во многих расчетных ситуациях замена импульсов конечной продолжительности мгновенными недопустима и для получения удовлетворительных результатов исследование поведения объектов должно производиться с учетом влияния формы и длительности действия импульсов [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследуется эффективность одномассовых динамического и ударного гасителей в режиме основного импульсного резонанса, характеризующегося резким увеличением внутренних усилий и перемещений защищаемого объекта. Предполагается, что защищаемый объект обладает разреженным спектром частот собственных колебаний и поэтому моделируется системой с одной степенью свободы. Для любого

го цикла $[0, T]$ заданная периодическая нагрузка в виде односторонних импульсов конечной продолжительности описывается во времени t аналитическим выражением:

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 f(t) \text{ при } 0 \leq t \leq t_0, \\ P(t) &= 0 \text{ при } t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t = 0$ – начало и t_0 – продолжительность действия импульсов; P_0 – максимум импульсивной нагрузки; T – период приложения импульсов; $f(t)$ – функция, характеризующая форму импульсов, причем при всех t она положительна и удовлетворяет условию $f(t) \leq 1$.

При решении прикладных задач теории колебаний и динамики сооружений наиболее часто встречаются импульсы в форме прямоугольника, треугольника, трапеции, полуволны синусоиды и других [3]. В данной работе ограничимся рассмотрением колебаний системы с динамическим (ДГК) или ударным (УГК) гасителями при действии периодических импульсов прямоугольной формы. В этом случае функция формы импульсов постоянна

$$f(0^+ \leq t \leq t_0^-) = 1, \quad (2)$$

где знаками « $-$ » и « $+$ » обозначены моменты времени непосредственно до и после скачкообразного изменения импульса при $t = 0$ и $t = t_0$, а также при $t = T$. Демпфирование в звеньях исходной системы учтем по гипотезе частотно-независимого трения [3], причем предполагается, что исходная система в целом обладает непропорциональным трением. Расчетные схемы защищаемого объекта с динамическим и ударным гасителями приведены на рис. 1,а и рис. 1,б соответственно, где обозначено: m_j , c_j , γ_j и x_j – масса, квазиупругий коэффициент, коэффициент неупругого сопротивления и абсолютная координата защищаемого объекта ($j = 1$) и гасителя ($j = 2$). Кроме того, на рис. 1,б через D

К оценке эффективности динамического и ударного гасителей колебаний пассивного типа при действии периодических импульсов короткой продолжительности

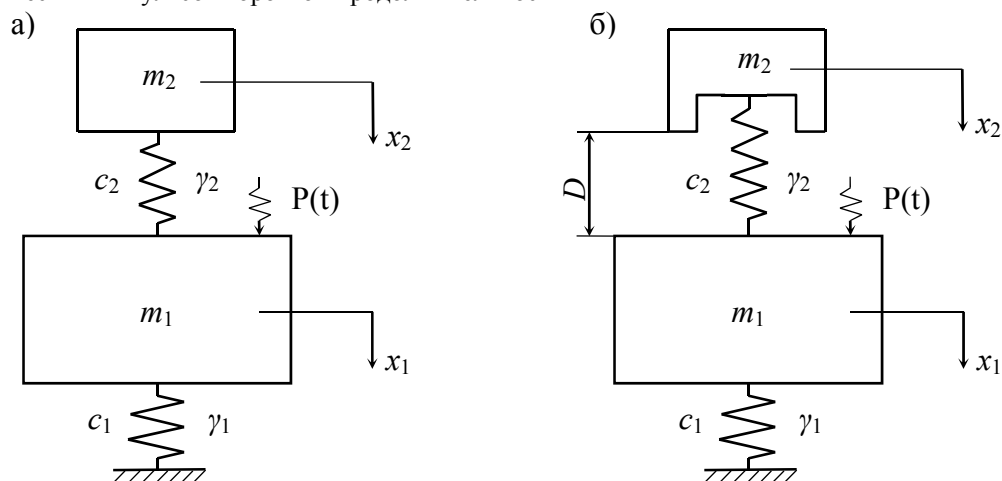


Рисунок 1. Расчетные схемы защищаемого объекта с динамическим (а) и ударным (б) гасителями колебаний

обозначен начальный зазор между массами. В системе с ударным гасителем соударения масс принимаются мгновенными и учитываются коэффициентом восстановления при ударе $0 < R < 1$ [4].

2. СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДГК

Рассмотрим сначала стационарные колебания с периодом T приложения импульсов конечной продолжительности (1) системы с динамическим гасителем (рис. 1,а). Будем считать, что колебания системы описываются линейными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1^p + c_1(u_1 + i\nu_1)x_1^p + \\ c_2(u_2 + i\nu_2)(x_1^p - x_2^p) = P(t); \\ m_2 \ddot{x}_2^p + c_2(u_2 + i\nu_2)(x_2^p - x_1^p) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} u_j &= (4 - \gamma_j^2)/(4 + \gamma_j^2); \quad \nu_j = 4\gamma_j/(4 + \gamma_j^2); \\ i &= \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая прерывистый характер заданной нагрузки $P(t)$, движение системы в проме-

жутках времени $[0, t_0^-]$ и $[t_0^+, T]$ описывается разными уравнениями. Используя соответствующее (1) и (2) периодическое решение уравнений (3) статьи [5], представим функции абсолютных отклонений $x_j^p(t)$ и скоростей $\dot{x}_j^p(t)$ масс системы для интервала времени $0^+ \leq t \leq t_0^-$ в виде

$$\begin{aligned} x_j^p(t) = \frac{P_0}{m_1 \Delta_s} \sum_{\nu=1}^2 \frac{e^{-0,5h_\nu t}}{(\omega_\nu^2 + 0,25h_\nu^2)} \times \\ \times \left[\frac{1}{(\text{ch} 0,5h_\nu T - \cos \omega_\nu T)} \psi_{j\nu}(t) + \varphi_{j\nu}(t) \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^p(t) = \frac{P_0}{m_1 \Delta_s} \sum_{\nu=1}^2 e^{-0,5h_\nu t} \times \\ \times \left[\frac{1}{(\text{ch} 0,5h_\nu T - \cos \omega_\nu T)} \alpha_{j\nu}(t) + \beta_{j\nu}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_{j\nu}(t) &= (0,5h_\nu u_{j\nu}^p - \omega_\nu \nu_{j\nu}^p)[a_\nu(t)e^{0,5h_\nu t_0} - \\ &\quad - b_\nu(t)] + (\omega_\nu u_{j\nu}^p + 0,5h_\nu \nu_{j\nu}^p) \times \\ &\quad \times [d_\nu(t)e^{0,5h_\nu t_0} + r_\nu(t)]; \\ \varphi_{j\nu}(t) &= 2[(0,5h_\nu u_{j\nu}^p - \omega_\nu \nu_{j\nu}^p)(e^{0,5h_\nu t} - \\ &\quad - \cos \omega_\nu t) + (\omega_\nu u_{j\nu}^p + 0,5h_\nu \nu_{j\nu}^p) \sin \omega_\nu t]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{j\nu}(t) &= u_{j\nu}^p [b_\nu(t) - a_\nu(t)e^{0,5h_\nu t_0}] - \\ &- \nu_{j\nu}^p [d_\nu(t)e^{0,5h_\nu t_0} + r_\nu(t)]; \\ \beta_{j\nu}(t) &= 2(u_{j\nu}^p \cos \omega_\nu t - \nu_{j\nu}^p \sin \omega_\nu t),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_\nu(t) &= \cos \omega_\nu(t + T - t_0) - e^{-0,5h_\nu t} \cos \omega_\nu(t - t_0); \\ b_\nu(t) &= \cos \omega_\nu(t + T) - e^{-0,5h_\nu t} \cos \omega_\nu t; \\ d_\nu(t) &= (1/\omega_\nu)\dot{a}_\nu(t); r_\nu(t) = -(1/\omega_\nu)\dot{b}_\nu(t).\end{aligned}\quad (7)$$

Для промежутка времени $t_0^+ \leq t \leq T^-$ уравнения движения (4), (5) сохраняются, как и входящие в них функции (6), (7), кроме функции $\varphi_{j\nu}(t)$, для которой следует принять

$$\begin{aligned}\varphi_{j\nu}(t) &= 2[(0,5h_\nu u_{j\nu}^p - \omega_\nu \nu_{j\nu}^p)g_\nu(t) - \\ &- (\omega_\nu u_{j\nu}^p + 0,5h_\nu \nu_{j\nu}^p)q_\nu(t)].\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned}g_\nu(t) &= e^{0,5h_\nu t} \cos \omega_\nu(t - t_0) - \cos \omega_\nu t; \\ q_\nu(t) &= -(1/\omega_\nu)\dot{g}_\nu(t).\end{aligned}$$

В (6) и (8) величины $u_{j\nu}^p$, $\nu_{j\nu}^p$ и Δ_s вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}u_{11}^p &= -u_{12}^p = 2(\omega_2 \beta_2 \beta_3 - \omega_1 \beta_1 \beta_4) - \\ &- \beta_2 \beta_4 (h_2 - h_1); \\ \nu_{11}^p &= 2[\omega_2 (\beta_1 \beta_3 - \beta_3^2 - \beta_4^2) + \omega_1 \beta_2 \beta_4] - \\ &- \beta_1 \beta_4 (h_2 - h_1); \\ \nu_{12}^p &= 2[\omega_1 (\beta_1 \beta_3 - \beta_1^2 - \beta_2^2) + \omega_2 \beta_2 \beta_4] - \\ &- \beta_2 \beta_3 (h_2 - h_1); \\ u_{2\nu}^p &= u_{1\nu}^p \beta_{2\nu-1} - \nu_{1\nu}^p \beta_{2\nu}; \\ \nu_{2\nu}^p &= u_{1\nu}^p \beta_{2\nu} + \nu_{1\nu}^p \beta_{2\nu-1}; \\ \Delta_s &= 4\{\omega_1 \omega_2 [(\beta_1 - \beta_3)^2 + \beta_2^2 + \beta_4^2] - \\ &- \beta_2 \beta_4 [0,25(h_1 - h_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2]\}.\end{aligned}\quad (9)$$

Коэффициенты распределения амплитуд определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\beta_{2\nu-1} &= \omega_\Gamma^2 [(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2 \omega_\Gamma^2)u_2 + \\ &+ (\nu_2 \omega_\Gamma^2 - h_\nu \omega_\nu)\nu_2] / \sigma_\nu; \\ \beta_{2\nu} &= \omega_\Gamma^2 [(0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2 \omega_\Gamma^2)\nu_2 - \\ &- (\nu_2 \omega_\Gamma^2 - h_\nu \omega_\nu)u_2] / \sigma_\nu; \\ \sigma_\nu &= (0,25h_\nu^2 - \omega_\nu^2 + u_2 \omega_\Gamma^2)^2 + (\nu_2 \omega_\Gamma^2 - h_\nu \omega_\nu)^2,\end{aligned}\quad (10)$$

где $\omega_\Gamma = \sqrt{c_2/m_2}$ – парциальная частота колебаний гасителя.

Частоты ω_ν и коэффициенты демпфирования h_ν свободных колебаний системы «защищаемый объект – динамический гаситель» являются комплексно-сопряженными корнями $\lambda_{2\nu-1,2\nu} = -0,5h_\nu \pm i\omega_\nu$ характеристического уравнения

$$\begin{aligned}m_1 \lambda_i^4 &+ [m_1 \omega_0^2 (u_1 + i\nu_1) + \omega_\Gamma^2 (m_1 + m_2) \times \\ &\times (u_2 + i\nu_2)] \lambda_i^2 + m_1 \omega_0^2 \omega_\Gamma^2 [(u_1 u_2 - \nu_1 \nu_2) + \\ &+ i(u_1 \nu_2 + u_2 \nu_1)] = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где $\omega_0 = \sqrt{c_1/m_1}$ – частота собственных колебаний защищаемого объекта без гасителя.

3. УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С УГК

Рассмотрим далее установившиеся колебания защищаемого объекта с ударным гасителем одностороннего действия (рис. 1,б). Будем считать, что в исходной системе «защищаемый объект – ударный гаситель» реализуется основной режим движения системы с одним соударением между защищаемым объектом и гасителем за период приложения внешних импульсов (1), который принимается устойчивым.

В соответствии с принятыми предположениями полное движение исходной системы в промежутке времени $[0, T]$ можно рассмат-

К оценке эффективности динамического и ударного гасителей колебаний пассивного типа при действии периодических импульсов короткой продолжительности ривать [1] как колебания безударной системы, к которой наряду с заданным воздействием $P(t)$ к каждой из масс приложена бесконечная последовательность внутренних мгновенных импульсов одностороннего направления

$$S(t) = S_* \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - t_*). \quad (12)$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; t_* – момент возникновения и S_* – величина импульса, вызванного соударением. Тогда

$$x_j(t) = x_j^p(t) + x_j^s(t), \quad (13)$$

где $x_j^p(t)$ – установившиеся колебания j -ой массы, определяемые заданным воздействием (1) и описываемые функцией (4); $x_j^s(t)$ – периодические колебания j -ой массы, отвечающие внутренним импульсам (12). Движение гасителя относительно защищаемого объекта ограничено начальным зазором D (рис. 1,б)

$$x(t) = x_2(t) - x_1(t) \leq D. \quad (14)$$

Соударения масс m_1 и m_2 происходят, когда в (14) выполняется равенство и относительная скорость $\dot{x}(t)$ в момент времени, непосредственно предшествующий соударению, положительна.

Искомое установившееся движение системы можно считать найденным, если известны величина импульса S_* и момент соударения масс t_* . Для их определения необходимо найти полное движение системы (13).

Колебания системы, определяемые действием односторонних мгновенных импульсов (12), приложенных к массам m_1 и m_2 в противоположных направлениях, в интервале времени $t_*^+ \leq t \leq t_*^- + T$ запишем в виде [1]

$$x_j^s(t) = \frac{S_*}{m_1 \Delta_s} \sum_{v=1}^2 \frac{e^{-0,5h_v(t-t_0)}}{(\text{ch} 0,5h_v T - \cos \omega_v T)} \times \\ \times \{ [u_{jv}^s (e^{0,5h_v T} - \cos \omega_v T) - v_{jv}^s \sin \omega_v T] \times \\ \times \cos \omega_v(t - t_*) - [v_{jv}^s (e^{0,5h_v T} - \cos \omega_v T) + \\ + u_{jv}^s \sin \omega_v T] \sin \omega_v(t - t_*) \}. \quad (15)$$

При $-T + t_*^+ \leq t \leq t_*^-$ необходимо в (15) заменить t на $t + T$. С учетом (9) для определения u_{jv}^s и v_{jv}^s имеем

$$u_{11}^s = -u_{12}^s = u_{11}^p + \frac{2m_1}{m_2} (\beta_2 \omega_2 - \beta_4 \omega_1);$$

$$v_{11}^s = v_{11}^p + \frac{m_1}{m_2} [(\beta_4(h_1 - h_2) + 2\omega_2(\beta_1 - \beta_3))];$$

$$v_{12}^s = v_{12}^p + \frac{m_1}{m_2} [(\beta_2(h_2 - h_1) - 2\omega_1(\beta_1 - \beta_3))];$$

$$u_{2v}^s = u_{1v}^s \beta_{2v-1} - v_{1v}^s \beta_{2v}; \quad v_{2v}^s = u_{1v}^s \beta_{2v-1} + v_{1v}^s \beta_{2v-1}.$$

Вычисление остальных величин, входящих в (15), производится по ранее приведенным формулам.

Для определения величины ударного импульса S_* и момента его возникновения t_* воспользуемся геометрическим условием соударения (14) $x(t_*) = D$ и теоремой импульсов [4]. Они приводят [1] к трансцендентному уравнению относительно t_*

$$x^p(t_*) + N \dot{x}^p(t_*) = D \quad (16)$$

и дают формулу для вычисления величины ударного импульса

$$S_* = \frac{m_1 m_2 (R + 1) \dot{x}^p(t_*)}{(m_1 + m_2)[1 + (R + 1)\Phi]}, \quad (17)$$

где

$$N = - \frac{m_2(R + 1)}{\Delta_s(m_1 + m_2)[1 + (R + 1)\Phi]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{v=1}^2 \frac{1}{(\operatorname{ch} 0,5 h_v T - \cos \omega_v T)} \left[(v_{2v}^s - v_{1v}^s) \sin \omega_v T + \right. \\ & \left. + (u_{2v}^s - u_{1v}^s)(\cos \omega_v T - e^{-0,5 h_v T}) \right]; \\ \Phi = & - \frac{m_2}{(m_1 + m_2) \Delta_s} \sum_{v=1}^2 \frac{1}{(\operatorname{ch} 0,5 h_v T - \cos \omega_v T)} \times \\ & \times \{ [0,5 h_v \sin \omega_v T - \omega_v (\cos \omega_v T - e^{-0,5 h_v T})] \times \\ & \times (v_{2v}^s - v_{1v}^s) - [0,5 h_v (\cos \omega_v T - e^{-0,5 h_v T}) + \\ & + \omega_v \sin \omega_v T] - (u_{2v}^s - u_{1v}^s) \}. \end{aligned}$$

Для отыскания корней уравнений (11) и (16) могут быть использованы различные численные методы [6]. Корень t_* уравнения (16) должен удовлетворять условию положительности импульса S_* , определяемого по формуле (17).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Полученные периодические решения могут быть использованы для определения оптимальных параметров динамического и ударного гасителей колебаний. Отметим, что они применимы также и при учете демпфирования в звеньях системы по гипотезе линейно-вязкого трения. В этом случае характеристическое уравнение (11) и формулы для вычисления коэффициентов распределения амплитуд (10) следует принять в соответствии с [1].

Решение задачи выбора параметров динамических и ударных гасителей колебаний при периодических нагрузках основано [1, 2] на анализе зависимости наибольшего отклонения защищаемого объекта (главной массы m_1) от частоты возмущения, в данном случае от частоты приложения импульсов. Эта зависимость при импульсных нагрузках называется импульсно-частотной характеристикой (ИЧХ). Влияние параметров защищаемого объекта и гасителей на ИЧХ колебаний массы m_1 при действии периодиче-

ских мгновенных импульсов подробно изучено [1, 2], поэтому здесь остановимся только на влиянии, оказываемом длительностью импульсов. При этом ограничимся рассмотрением расчета объекта на действие периодических импульсов конечной продолжительности, основанном [3] на предположении о постоянной величине внешних импульсов S_0 при изменении величин нагрузки P_0 и продолжительности t_0 . Для импульса прямоугольной формы $S_0 = P_0 t_0$, поэтому величины P_0 и t_0 обратно пропорциональны. Некоторые результаты вычислений в виде ИЧХ колебаний главной массы для ряда значений длительности действия импульсов при параметрах гасителей, являющихся оптимальными в случае действия периодических мгновенных импульсов, приведены на рис. 2 и рис. 3 соответственно для систем с динамическим и ударным гасителями. Резонансные кривые $Y_1(\lambda)$ получены в интервале $0,8 \leq \lambda \leq 1,2$ в безразмерных параметрах:

$$\begin{aligned} \mu &= m_2 / m_1; \quad s = \omega_r / \omega_0; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \tau_0 = \omega_0 t_0; \\ \lambda &= 2\pi / (\omega_0 T); \quad d = D / x_0; \quad y_j(\tau) = x_j(t) / x_0; \\ Y_1 &= \max |y_1(\tau)|; \quad Y = \max |y_2(\tau) - y_1(\tau)|, \end{aligned}$$

где $x_0 = P_0 t_0 / (m_1 \omega_0)$.

Величины безразмерных параметров даны на рисунках. ИЧХ колебаний массы m_1 в зависимости от значений параметров защищаемого объекта и гасителей имеют в окрестности основного импульсного резонанса один (при $\theta = \omega_0$) или два максимума, расположенные слева и справа от резонансной частоты воздействия ($\theta = \omega_0$); $\theta = 2\pi / T$. При этом, в первом случае оптимальные значения настройки ($s = s_{\text{опт}}$) и демпфирования ($\gamma_2 = \gamma_{2,\text{опт}}$) минимизируют наибольшую ординату кривой $Y_1(\lambda)$, а во втором – выравнивают максимумы ИЧХ при одновременной их минимизации.

К оценке эффективности динамического и ударного гасителей колебаний пассивного типа при действии периодических импульсов короткой продолжительности

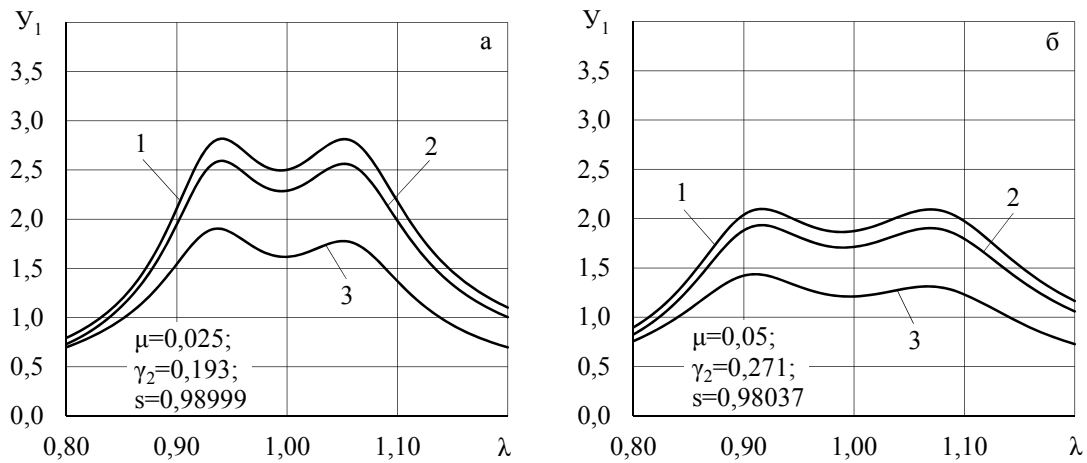


Рисунок 2. ИЧХ колебаний главной массы в системе с динамическим гасителем колебаний при $\gamma_1=0,01$: 1 – $\tau_0 = \pi/5$; 2 – $\tau_0 = \pi/2$; 3 – $\tau_0 = \pi$

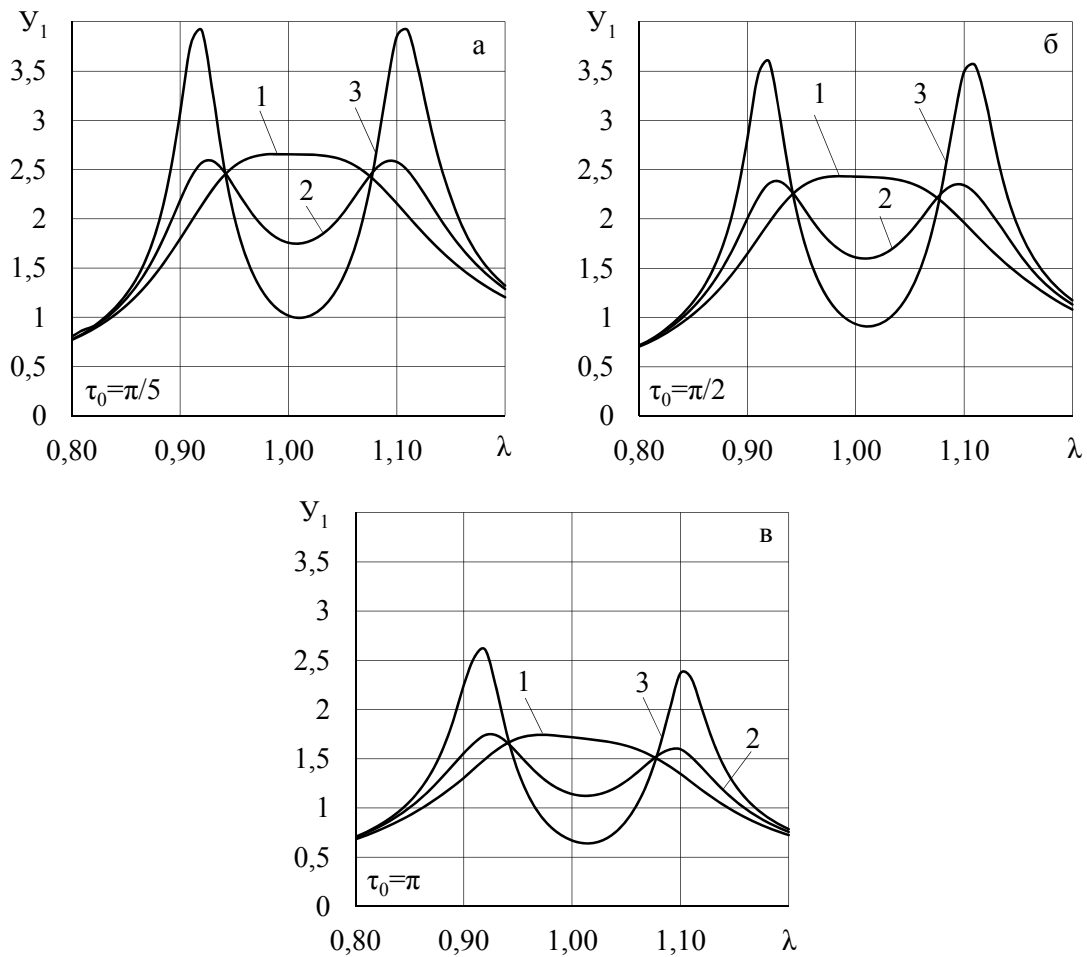


Рисунок 3. ИЧХ колебаний главной массы в системе с ударным гасителем колебаний при $\mu = 0,05$; $\gamma_1 = 0,01$; $\gamma_2 = 0,01$; $d = 0$; 1 – $R = 0,4$; $s = 0,50135$; 2 – $R = 0,6$; $s = 0,50011$; 3 – $R = 0,8$; $s = 0,50065$

Таблица 1. Оптимальные параметры, эффективность ДГК, наибольшие отклонения главной массы и ход гасителя при действии периодических импульсов различной длительности ($\gamma_1 = 0,01$)

μ	τ_0	$s_{\text{ОПТ}}$	$\gamma_{2,\text{ОПТ}}$	$Y_{1,\text{max}}$	K_Γ	Y_{max}
0,025	$\pi/100$	0,99000	0,1930	2,862	11,209	12,56
	$\pi/10$	0,98997	0,1930	2,851	11,208	12,50
	$\pi/5$	0,98988	0,1930	2,816	11,208	12,34
	$\pi/2$	0,98925	0,1935	2,578	11,203	11,19
	π	0,98548	0,1940	1,844	11,074	7,74
0,05	$\pi/100$	0,98045	0,2700	2,130	15,060	6,70
	$\pi/10$	0,98034	0,2710	2,122	15,060	6,66
	$\pi/5$	0,98014	0,2720	2,096	15,059	6,55
	$\pi/2$	0,97898	0,2720	1,920	15,047	5,93
	π	0,97226	0,2720	1,378	14,818	4,07

Таблица 2. Оптимальная настройка, эффективность УГК, наибольшие отклонения главной массы и ход гасителя при действии периодических импульсов различной длительности ($\gamma_1 = 0,01$; $\gamma_2 = 0,01$; $d = 0$; $\mu = 0,05$)

R	τ_0	$s_{\text{ОПТ}}$	$Y_{1,\text{max}}$	K_Γ	Y_{max}
0,4	$\pi/100$	0,50135	2,699	11,884	15,26
	$\pi/10$	0,50128	2,688	11,885	15,21
	$\pi/5$	0,50127	2,655	11,885	15,00
	$\pi/2$	0,50077	2,429	11,890	13,71
	π	0,49830	1,717	11,898	9,71
0,8	$\pi/100$	0,50065	4,034	7,953	37,51
	$\pi/10$	0,50063	4,017	7,954	37,35
	$\pi/5$	0,50059	3,967	7,956	36,88
	$\pi/2$	0,50024	3,627	7,964	33,70
	π	0,49798	2,540	8,041	23,59

Результаты выбора параметров динамического и ударного гасителей представлены в табл. 1 и табл. 2 соответственно, где кроме оптимальных значений настройки ($s_{\text{ОПТ}}$) и коэффициента неупругого сопротивления ($\gamma_{2,\text{ОПТ}}$) гасителей приведены также величины наибольших отклонений главной массы $Y_{1,\text{max}}$ и относительных отклонений (хода) гасителя Y_{max} . Эффективность гашения оценивается отношением K_Γ максимумов ИЧХ колебаний массы m_1 без гасителя к соответствующей величине при наличии оптимально настроенного гасителя. Отметим, что оп-

тимальные параметры ДГК ($s_{\text{ОПТ}}, \gamma_{2,\text{ОПТ}}$) определялись при фиксированных значениях относительной массы гасителя μ и длительности действия импульсов τ_0 , исходя из последовательного решения задачи неполной оптимизации [2]; для ударного гасителя определялась только оптимальная величина настройки ($s_{\text{ОПТ}}$) при заданных значениях остальных параметров (μ, γ_2, R, d). Значение коэффициента неупругого сопротивления защищаемого объекта во всех расчетных ситуациях принято одинаковым ($\gamma_1 = 0,01$).

5. ВЫВОДЫ

К оценке эффективности динамического и ударного гасителей колебаний пассивного типа при действии периодических импульсов короткой продолжительности

Полученные результаты свидетельствуют о том, что от длительности действия внешних импульсов существенно зависят величины наибольших отклонений защищаемого объекта и хода (размаха) гасителей, причем с увеличением τ_0 они заметно уменьшаются. Вместе с тем, длительность внешних импульсов оказывает весьма незначительное влияние на эффективность работы гасителей и значения их оптимальных параметров. Отметим также, что эффективность динамического и ударного гасителей колебаний при периодической нагрузке в виде импульсов конечной продолжительности в режиме основного резонанса достаточно высока (см. табл. 1 и табл. 2), хотя и немного ниже, чем при гармоническом воздействии [1,2].

строительный университет»; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26;
e-mail: dukart-av@mail.ru

Adam V. Dukart, PhD, Professor, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, e-mail: dukart-av@mail.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дукарт А.В.** Задачи теории ударных гасителей колебаний. – М.: АСВ, 2006. – 208 с.
2. **Корнев Б.Г. Резников Л.М.** Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
3. Динамический расчет зданий и сооружений: Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Корнева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984. – 303 с.
4. **Гольдсмит В.** Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 449 с.
5. **Дукарт А. В.** К определению установившихся колебаний системы с двумя степенями свободы при действии периодических импульсов конечной продолжительности. // Известия вузов. Строительство. – 2012. – № 1. – С. 3-13.
6. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.

Дукарт Адам Вилебальдович, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВАНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТОРНАДО ПО МОДЕЛИ Y.K. WEN

В.Б. Зылев, Н.А. Григорьев

Московский государственный университет путей сообщения, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье рассматриваются вопросы расчета вантово-стержневых конструкций на ветровое воздействие торнадо. Для моделирования поведения конструкций использовался численный шаговый метод интегрирования уравнений движения, реализованный в программном комплексе, разработанном авторами. В качестве модели распределения скоростей в воронке торнадо принята модель, предложенная Y.K.Wen. Она описывает трехмерное распределение скоростей в вихре. Был рассмотрен пример нелинейного расчета вантовой большепролетной антенны.

Ключевые слова: торнадо, вантово-стержневые системы, модель Y.K.Wen, численный шаговый метод интегрирования уравнений движения, прогрессирующие обрушения.

RESEARCH OF DYNAMIC BEHAVIOR OF CABLE CONSTRUCTIONS UNDER TORNADO INFLUENCE BY Y.K. WEN'S MODEL

Vladimir B. Zylev, Nikita A. Grigoryev

Moscow State University of Railway Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Questions of analyzing cable structures on the tornado influence are being considered in the article. Authors used step method of numerical integration of the equations of movement for modeling the behavior of constructions. This method is implemented in the software complex which was developed by authors. As a model of the velocity distribution in the vortex was adopted model, which was proposed by Y.K.Wen. It describes a three-dimensional velocity distribution in a tornado. The example of non-linear analysis of long-span cable-stayed antenna was considered.

Key words: tornado, cable-rod systems, Y.K. Wen's model, step method of numerical integration of the equations of movement, progressive collapse

В последние годы наблюдается тенденция к увеличению числа зафиксированных случаев появления на Земле различных стихийных природных явлений. Среди таких явлений выделяются торнадо, или смерчи (данные термины являются синонимами). Огромные скорости ветра, которые могут достигать 100 м/с и более, при довольно небольших размерах (по сравнению с другими атмосферными вихрями) могут причинить серьезный ущерб конструкциям, встретившимся на его пути. В современных инженерных расчетах данный вид воздействия практически не учиты-

вается. Единственными конструкциями, для которых расчет на воздействие торнадо является обязательным (в России) - объекты атомной энергетики[1]. Причиной отсутствия данного вида нагрузок в большинстве нормативных документов объясняется довольно низкой вероятностью прохождения торнадо через какую-либо конкретную точку, тем самым экономически выгоднее, чтобы какая-то часть конструкций разрушились, чем проектировать все с учетом данной нагрузки. Однако для уникальных сооружений эту нагрузку видимо следует учитывать на-

ряду с другими, поэтому возникает необходимость в разработке новых и подробном анализе существующих расчетных моделей, позволяющих наиболее полным образом учесть эту нагрузку.

Несмотря на достаточно большое количество моделей вихрей, применительно к торнадо обычно используют достаточно упрощенную модель - вихрь Ренкина [2]. Она подразумевает наличие только вращательной составляющей скорости самого вихря, которая постоянна по высоте. Данная модель рекомендована в большинстве нормативных документах разных стран. Ряд динамических нелинейных расчетов с использованием данной модели и соответствующие выводы по ним для различных видов вантово-стержневых систем были даны нами в работах [3,4,5].

Однако достоверно известно о наличии и вертикальной составляющей ветрового воздействия в воронке торнадо. Вертикальная скорость может достигать довольно больших значений и благодаря ей торнадо может поднимать и переносить на значительные расстояния автомобили, осколки разрушенных конструкций, крыши домов и другие предметы. Однажды даже был зафиксирован случай подъема целого металлического моста весом 108 т [6]. Поэтому учет вертикальной составляющей ветрового потока в торнадо для некоторых типов конструкций может быть необходим.

В данной работе рассмотрим модель пространственного трехкомпонентного вихря, учитывающую в том числе и вертикальную составляющую. Данная модель основана на решении дифференциального уравнения, полученного H.L. Кюо [7] и впоследствии упрощенном для удобства инженерных расчетов ученым из университета в г. Иллинойс Y.K. Wen [8].

Модель дает формулы для окружной скорости V_θ , вертикальной скорости V_z , и скорости, направленной по радиусу воронки V_r . Параметрами этой модели будут служить радиус воронки, где достигается максимальная вращательная скорость над граничной

поверхностью - R_m , максимальная скорость вращения над граничной поверхностью V_m , высота граничной поверхности на большом удалении от центра смерча δ_0 .

Модель Y.K. Wen предполагает наличие некоторой разделительной поверхности (рис.1) В точках пространства над разделительной поверхностью ненулевыми являются только вращательная V_θ и вертикальная скорость V_z . Под разделительной поверхностью имеются все три компоненты скорости.

Высота разделительной поверхности является функцией расстояния от центра вихря и задается формулой:

$$\delta(\bar{r}) = \delta_0 [1 - \exp(-0,5\bar{r}^2)]. \quad (1)$$

Где $\bar{r} = r/R_m$ - безразмерное расстояние от оси смерча.

Над разделительной поверхностью окружная скорость определяется по формуле (2):

$$V_\theta(\bar{r}) = f(\bar{r}) = 1,4 \frac{V_m}{\bar{r}} [1 - \exp(-1,255\bar{r}^2)].$$

Вертикальная скорость над разделительной поверхностью определяется по формуле:

$$V_z(\bar{r}) = g(\bar{r}) = 93,0 V_m \bar{r}^3 \exp(-5,0\bar{r}). \quad (3)$$

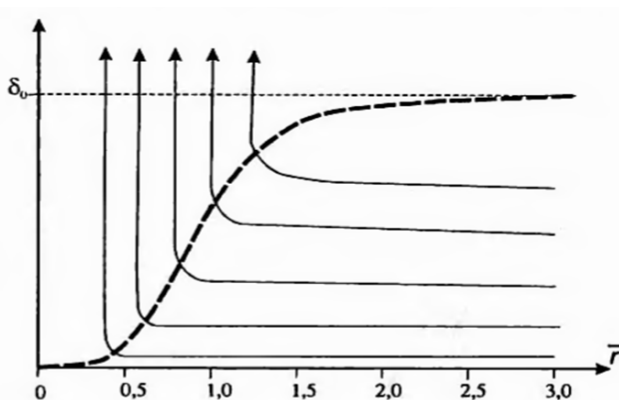


Рисунок 1. Разделительная поверхность и линии тока в модели.

Скорости под разделительной поверхностью определяются формулами (4):

$$\begin{aligned} V_z(\bar{r}) &= f(\bar{r})[1,0 - \exp(-\pi\eta) \cos(2b\pi\eta)], \\ V_n(\bar{r}) &= f(\bar{r})\{0,672 \exp(-\pi\eta) \sin[(b+1)\pi\eta]\}, \\ V_x(\bar{r}) &= g(\bar{r})[1,0 - \exp(-\pi\eta) \cos(2b\pi\eta)]. \end{aligned}$$

Здесь $b = 1,2 \exp(-0,8\bar{r}^4)$, η - есть безразмерная высота, представляющая отношение z/δ . К скоростям, связанным с вращением воздуха, следует добавить скорости от поступательного перемещения воздушной среды. Поступательное перемещение принимается происходящим с постоянной скоростью вдоль горизонтальной линии.

В рамках настоящей работы мы ориентируемся на собственный алгоритм [10] и пакет программ, реализующих явную вычислительную схему интегрирования уравнений движения. Подробное описание алгоритма содержится в [11] и [12]. Несмотря на определенные ограничения используемого алгоритма (они связаны с возможностью использования лишь стержневого элемента, работающего на растяжение), используемый нами подход обладает рядом существенных преимуществ, которые делают его эффективным для решения задач о воздействии торнадо на вантово-стержневые системы. Перечислим эти преимущества.

1. Алгоритм рассматривает задачу в геометрически нелинейной постановке, то есть с точным учетом геометрических соотношений. Это соответствует точному учету внутренних усилий в каждом элементе системы. От этих усилий зависит мгновенная жесткость системы. Последнее обстоятельство крайне важно для систем, содержащих венты, струнная жесткость которых полностью определяется их натяжением.
2. Возможность рассматривать задачу статики и динамики в рамках одной компьютерной программы. Надо иметь в виду, что прежде чем прикладывать динамическое воздействие торнадо, к вантово-стержневой системе, необходимо иметь ее равновесное состояние при действии собственного веса.
3. Возможность вычисления ветровой нагрузки на каждом временном шаге по отно-

сительной скорости воздуха и движущейся точки конструкции.

4. Возможность учета диссипативных сил по различным вариантам. Следует отметить, что учет внутреннего трения путем введения индивидуальных коэффициентов демпфирования для каждой собственной формы колебаний здесь в принципе не применим, по той простой причине, что в рассматриваемых задачах не применимо само понятие собственной формы колебаний, так как рассматривается существенно нелинейная система.

5. Возможность рассмотрения частичного разрушения системы.

6. Задача устойчивости рассматривается совместно с задачей определения перемещений и внутренних усилий системы с учетом конкретного временного промежутка, в течение которого действует атмосферный вихрь.

Рассмотрим пример расчета нелинейной стержневой системы. Большепролетная тросовая антенна (рис.2) представляет собой пространственную систему нитей. Мачты крепления антенного полотна приняты неподвижными. Разброс жесткостей элементов системы на растяжение составляет от 13350кН до 1000000кН, диаметры стержней варьируются от 0.0192м до 0.24м. Разрывные усилия составляют от 104кН до 7793кН. Длины заготовок каждого элемента были известны заранее. Высота конструкции более 350м, длины тросов достигают 700м.

Для рассматриваемой конструкции, как и для всех систем, обладающих существенной нелинейностью, достаточно сложной и трудоёмкой задачей является определение равновесного положения, то есть положения системы при воздействии собственного веса, к которому в дальнейшем будет приложена нагрузка от торнадо. В рамках используемого нами расчетного метода, данная статическая задача решается как частный случай динамической. Задав длины заготовок элементов, их прочностные, геометрические характеристики и расположение мест креплений, можно не заботиться о расположении промежуточных узлов и задать их практиче-

ски в одной точке. Под действием внезапно приложенной силы тяжести, внутренних сил и сил демпфирования после затухания колебаний узлы системы займут искомое равновесное положение.

Подробнее это описано в [4]. Полученное равновесное положение системы показано на рис.2. Следует отметить, что оно очень точно совпало с аналогичным, полученным другим статическим методом, что в частности может служить дополнительной проверкой правильности полученной расчетной схемы. Получив равновесное положение системы, необходимо задать характеристики торнадо, в соответствии с моделью Y.K.Wen. Все параметры в принципе между собой должны быть увязаны на основании наблюдений за реальными вихрями. Такие данные можно найти во многих книжных источниках, посвященных торнадо[13,14], а также в нормативных документах, например в [1]. В [13] приведены некоторые (нестрогие) соотношения параметров вихрей, используемые при проектировании в США.

При проектировании новых конструкций, а также при определении грузоподъемности существующих в качестве воздействий на которые рассматривается нагрузка от торнадо полезно знать предельные характеристики вихрей, способные привести к частичному или полному разрушению.

В данной работе приведем пример определения минимальных значений скоростей V_m в торнадо, приводящих к разрушению антенны. В качестве известных параметров примем: скорость поступательного движения центра воронки $V_t=20$ м/с, радиус воронки – $R_m=100$ м, высота граничного слоя вдали от вихря $h_0=460$ м. Направление вращения частиц воздуха в воронке торнадо - против часовой стрелки, что характерно для большинства реальных вихрей.

Для определения минимального значения скорости в торнадо, при котором произойдет разрушение конструкции необходимо провести ряд расчетов при различных заданных скоростях в воронке (время одного такого

расчета при моделировании 100 секунд воздействия вихря на конструкцию составляет

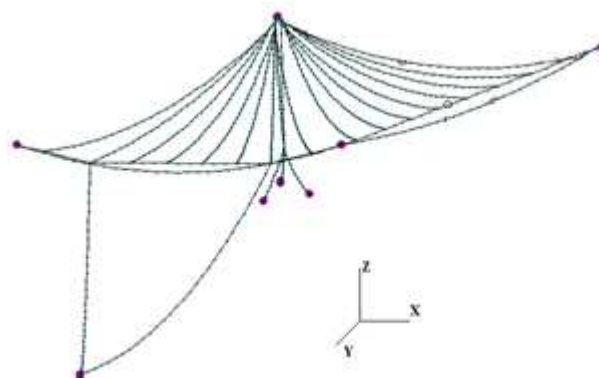


Рисунок 2. Расчетная схема антенны (аксонометрия).

21,7 минут для компьютера с процессором i7 2.93ГГц). На каждом расчетном шаге усилие в каждом элементе расчетной схемы сравнивается с заданным предельным значением, и в случае его превышения происходит обрыв данного элемента, что эквивалентно внезапно приложенной силе с обратным знаком. В случае обрыва одного или нескольких элементов расчетной схемы задача продолжает решаться, что позволяет наблюдать за процессом разрушения конструкции и проводить расчеты на прогрессирующие обрушения в динамике.

Направление движения торнадо заранее не известно, поэтому возникает необходимость рассмотрения множества вариантов траектории движения вихря. Строго говоря, для каждого элемента конструкции траектория движения торнадо, вызывающая наибольшее усилие, будет своя, что создает дополнительную сложность для правильного учета рассматриваемого воздействия при проектировании конструкций.

Вернемся к нашему примеру. Примем направление движения воронки под углом 45° к оси X (см. рис.3) из правого верхнего угла в левый нижний. Смещая начальное положение воронки (с шагом 20-40м) перпендикулярно направлению движения, для каждой траектории будем находить минимальную

скорость движения частиц в вихре V_m , при которой происходит разрушение конструкции. Полученные результаты представим в виде графика (см.рис.3). По графику можно определить траекторию движения воронки, которая будет наиболее опасна для всего сооружения (при прочих заданных параметрах торнадо). Наименьшая разрушающая скорость для рассмотренных траекторий составила 88м/с. Естественно, при различных траекториях движения нагрузки разрушаться конструкция будет по-разному. Вид конст-

ты поезда; разорваны конструкции со стальной оболочкой типа ангаров или пакгаузов; автомобили отрывались от земли и подбрасывались в воздух; большинство деревьев в лесу вырваны с корнем, унесены или повалены на землю[1]).

Используемые в работе численные методы, в сочетании с моделью трехкомпонентного распределения скорости ветра в воронке торнадо позволяют получить картину динамического распределения внутренних усилий и перемещений вантово-стержневых си-

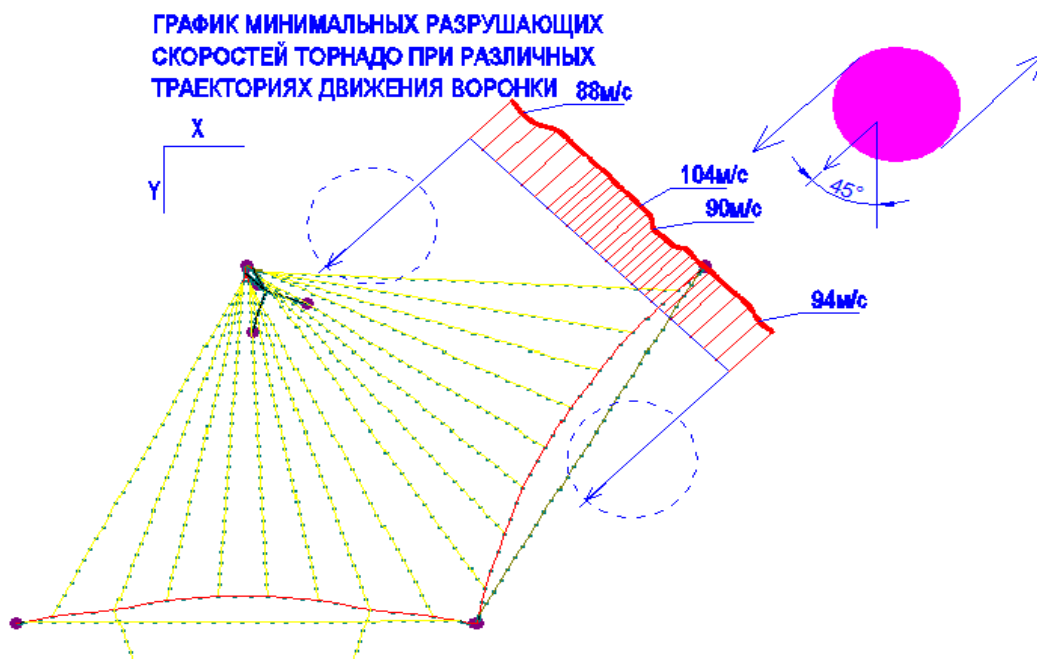


Рисунок 3. График изменения наименьшей разрушающей скорости торнадо в зависимости от траектории движения воронки (конструкция показана в плане).

рукции в момент разрушения при 4-х различных траекториях показан на рис.4.

Интенсивность торнадо принято классифицировать по шкале Фуджиты [14] (F-шкала). Она позволяет сопоставить скорости движения частиц в воронке с наносимыми разрушениями. В нашем случае, скорость 88м/с характеризует класс вихря F3, разрушения от которого описываются как серьезные (Сорваны крыши с каркасов домов и разрушена часть вертикальных стен; здания в сельской местности полностью разрушены; опрокину-

стем при воздействии торнадо с различными характеристиками в каждый момент времени. Получаемые значения предельных характеристик торнадо позволяют оценить несущую способность конструкции по отношению к рассматриваемому воздействию. Места разрушений выявляют слабые места конструкции, которые следует усилить.

Данная работа выполнена в рамках гранта, полученного в фонде «ОСНОВАНИЕ». Учредители фонда: ОАО «Институт Гипростроймост», Группа компаний «СК МОСТ».

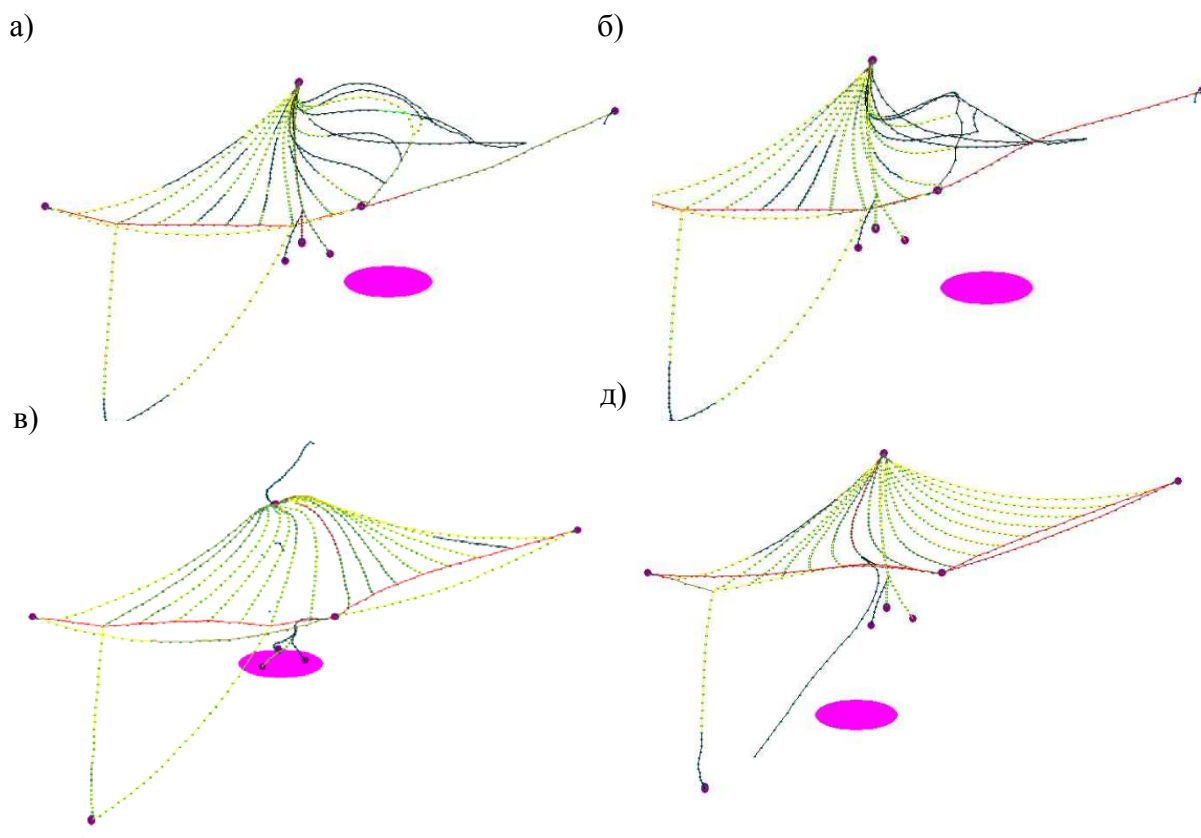


Рисунок 4. Разрушение конструкции при воздействиях торнадо с минимальными разрушающими скоростями движения частиц в воронке при различных траекториях движения вихря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рекомендации для оценки характеристик смерча для объектов использования атомной энергии.: РБ-022-01.-М.: НТЦ ЯБР Госатомнадзора России. - М.-2001.-36с.
2. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения / Пер. с англ.Б.Е. Маслова, А.В. Швецов; Под ред. Б.Е. Маслова. – М: Стройиздат, 1984. - 360 с., ил. – Перевод. Изд.: Wind Effects on Structures / E. Simiu, R. Scanlan (1978).
3. Зылев В.Б., Штейн А.В., Григорьев Н.А. Динамика и квазистатика в расчетах на воздействие торнадо. /В.Б.Зылев, А.В.Штейн,Н.А.Григорьев// Сборник докладов Международной конференции по проблемам теоретического анализа поведения зданий и сооружений при различных видах «Актуальные проблемы исследований по теории сооружений». «Сборник научных статей в двух частях. Часть 1/ ЦНИИСК им. Кучеренко – М.: ОАО «ЦПП», 2009.-С.223-227.
4. Зылев В.Б., Штейн А. В. ,Григорьев Н.А. Воздействие торнадо на крупногабаритную тросовую систему. /В.Б.Зылев, А.В.Штейн, Н.А.Григорьев// «Вестник отделения строительных наук» РААСН Выпуск 14. Том 1 –М. 2010 - С.72-74.
5. Зылев В.Б., Штейн А.В., Григорьев Н.А. Расчет конструкций на воздействие торнадо с использованием вихря Ренкина //Строительная механика и расчет сооружений.- 2009г.-№6.-с.27-30.

6. **Наливкин Д.В.** Ураганы, бури и смерчи. - Лен.: Наука, 1969. - 488 с.
7. **Kuo H.L.** Axisymmetric Flows in the boundary Layer of a Maintained Vortex // Journal of the Atmospheric sciences. – Vol 28(1). – p.20-41.
8. **Wen Y.K., A. H.-S. Ang.** Tornado risk and wind effect on structures.// Proceedings of International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures. -Heathrow, 1975 Cambridge University Press, 1977 – pp.63-74.
9. **Гордеев В.Н., Лантух-Лященко А.И., Пашинский В.А., Перельмутер А.В., Пичугин С.Ф.** Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. - М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. - 482с.
10. **Зылев В.Б., Штейн А.В.** Численное решение задачи о нелинейных колебаниях системы нитей //Строительная механика и расчет сооружений.-1986.-№6.- с.58-61.
11. **Зылев В.Б.** Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций..- М.: НИЦ*Инженер*.-144 с.
12. **Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б.** Строительная механика. Книга. Динамика и устойчивость упругих систем. - М.: Высшая школа, 2008.-384 с.
13. **Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю.** Экстремальные воздействия на сооружения. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009. -581с.
14. **Fujita T.** Workbook of tornadoes and high winds for engineering applications // SMRP Research Paper. – 1978. - v.165. – 105 pp.

Григорьев Никита Алексеевич, кандидат технических наук, Московский государственный строительный университет, ФГБОУ «Московский государственный университет путей сообщения», кафедра строительной механики; 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; e-mail: Gr_Nik2003@mail.ru

Vladimir B. Zylev, professor, Moscow State University of Railway Engineering, Department of Structure Mechanics, 9, Obraztsova Street, 127994, Moscow, Russia. e-mail: Zylevvb@yandex.ru

Grigoryev Nikita A., Moscow State University of Railway Engineering, Department of Structure Mechanics, 9, Obraztsova Street, 127994, Moscow, Russia. e-mail: Gr_Nik2003@mail.ru

Зылев Владимир Борисович, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ «Московский государственный университет путей сообщения», кафедра строительной механики, 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; e-mail: Zylevvb@yandex.ru

ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОТНОГО ОБЪЕКТА, НА НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

В.К. Иноземцев

Саратовский государственный технический университет, г. Саратов, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Любое высотное здание или сооружение уникально в силу исключительности своей формы, высоты, природного и техногенного окружения, а также возможных физических и технических отклонений от общепринятых строительных нормативов. Уникально и взаимодействие высотного здания и его основания в связи с исключительно большим давлением на основание, и, как следствие, большими нелинейными деформациями основания.

Задачи о потере устойчивости «являются более «тонкими», чем рассмотренные прежде». Под задачами, рассмотренными прежде, подразумеваются естественно задачи о прочности. Важным здесь является установление критерия устойчивости. Именно в вопросах выбора критерия устойчивости (особенно для сложных сред) мнения специалистов часто бывают прямо противоположными. Исключением из этого является статический критерий. Оказалось что в области механики проблема устойчивости и проблема собственных значений для дифференциальных уравнений неразрывно связаны.

Ключевые слова: общая устойчивость высотного объекта, на нелинейно-деформируемом основании

TOTAL RESISTANCE OF A HIGH-RISE OBJECT NONLINEAR DEFORMED BASIS

Vyacheslav K. Inozemtsev

Saratov State Technical University, Saratov, RUSSIA

ABSTRACT: Any high-rise building or structure is unique because of its exceptional shape, height, natural and technogenic environment, as well as the possible physical and technical deviations from accepted construction standards. Unique and interaction of a high-rise building and its Foundation in connection with extremely high pressure on the basis, and, as a consequence, large nonlinear deformations of the base. Of the problem of the loss of stability «are more thin, than considered before.» Under objectives discussed above, refers to naturally tasks of strength. Important here is the establishment of sustainability criteria. It is in the selection of sustainability criteria (especially for complex environments) opinions of the experts are often the opposite. The exception to this is the static test. It turned out that in the field of mechanics of the problem of stability and the problem of eigenvalues for differential equations are inextricably linked.

Key words: Total resistance of a high-rise object nonlinear deformed basis

Любое высотное здание или сооружение уникально в силу исключительности своей формы, высоты, природного и техногенного окружения, а также возможных физических и технических отклонений от общепринятых строительных нормативов. Уникально и взаимодействие высотного здания и его основания в связи с исключительно большим давлением на основание, и, как следствие,

большими нелинейными деформациями основания.

Важнейшим для высотных зданий и сооружений является требование сохранения устойчивости основания и, как следствие, общей устойчивости, и прочности конструкций фундамента, подземной и наземной частей здания или сооружения. Здесь под общей пространственной устойчивостью высотного здания будем понимать его устойчивость на

деформируемом основании. Следует помнить, что проблема устойчивости высотных зданий связана как с исследованием устойчивости отдельных конструктивных элементов и частей здания, так и с общей устойчивостью высотных зданий на нелинейно-деформируемом основании, как системы «высотный объект - основание». При этом для высотного сооружения проблема общей устойчивости имеет гораздо большее значение по сравнению с обычным сооружением. Так большинство высотных зданий представляют собой сооружения башенного типа. В связи с этим удельное давление на основание под фундаментной конструкцией высотных зданий составляет 500-800 кПа [1]. Это обстоятельство представляет серьезную опасность при возникновении эксцентриситета центра сил. Опасность возникновения такого эксцентриситета обусловлена тем, что в сложной системе конструктивных элементов любого сооружения основание обычно наиболее деформируемый нелинейный элемент, а фундаменты и подземная часть высотного здания, наиболее нагруженные элементы конструктивной схемы. В результате система «высотный объект – основание» испытывает значительные осадки, сопровождающиеся кренами. В этих условиях расчет на устойчивость системы «высотный объект – основание» приобретает особую важность. Устойчивость явлений, состояний и процессов это то, что так желанно для любого инженера-строителя. Неустойчивость обычно проявляется вопреки его желанию. Поиск границы между желательным и нежелательным в данной дилемме ведется практических во всех областях науки и техники (а в последнее время в политике, экономических и гуманитарных областях).

Задачи о потере устойчивости по выражению автора [2] «являются более «тонкими», чем рассмотренные прежде». Под задачами, рассмотренными прежде, автор подразумевает естественно задачи о прочности. Важным здесь является установление критерия устойчивости. Именно в вопросах выбора кри-

терия устойчивости (особенно для сложных сред) мнения специалистов часто бывают прямо противоположными. Исключением из этого является статический критерий. Оказалось что в области механики проблема устойчивости и проблема собственных значений для дифференциальных уравнений неразрывно связаны.

Применительно к задачам устойчивости в механике область приложений проблемы собственных значений ограничена почти исключительно упругими задачами. Вместе с тем, в последние десятилетия теория бифуркаций (обобщенная задача на собственные значения), представленная Рене Тома как «теория катастроф», нашла приложение не только в механике и классической физике, но и оптике, химии, биологии, психологии и социологии.

Расширилась область применения теории бифуркаций в механике, где, как выяснилось, проблема устойчивости упругопластических систем также связана с проблемой собственных значений. Одной из первых работ, показавших наличие такой связи, стала известная работа Шенли [3], положившая начало понятию о бифуркации исходного процесса деформирования конструкции, склонной к явлению потери устойчивости. Затем в работах В.Д.Клюшников [4, 5, 6] было введено понятие «упругого эквивалента» конструкции, позволяющего использовать бифуркационный критерий устойчивости при пошаговом процессе нагружения в упругопластической области деформирования. Другим объектом приложения исследований в области устойчивости являются сооружения с высокорасположенным центром тяжести на деформируемом основании, так же проявляющие склонность к потере устойчивости исходного (строго вертикального) состояния равновесия.

Классический подход к исследованию устойчивости – это бифуркационный подход. С теорией бифуркаций инженер-строитель встречается при определении критической нагрузки Эйлера для сжатой стойки, а также

при знакомстве с концепцией Шенли в отношении устойчивости стойки в условиях упруго-пластического деформирования. Можно быть уверенным в том, что инженер-строитель не часто встретит в настоящее время бифуркационные методы исследования устойчивости процессов деформирования оснований фундаментов зданий и сооружений, рассматриваемых как единую систему «высотный объект – деформируемое основание». Одной из причин этого является не столь очевидная для инженера-строителя склонность грунтового массива к явлениям классической неустойчивости процессов нелинейного деформирования по сравнению с наземными пространственными стержневыми и тонкостенными конструкциями. Однако бифуркационный подход к исследованию устойчивости применим и в этой области. Обобщенная задача на собственные значения представляется в форме

$$M(x) = \lambda N(x). \quad (1)$$

Здесь z – неизвестная собственная функция, λ – собственное значение, M и N – линейные дифференциальные операторы с соответствующими граничными условиями. Применительно к задачам устойчивости в механике область приложений проблемы собственных значений ограничена почти исключительно упругими задачами. Вместе с тем проблема устойчивости упругопластических систем также связана с проблемой собственных значений. Одной из первых работ, показавших наличие такой связи, стала известная работа Шенли [3], положившая начало понятию о бифуркации исходного процесса деформирования системы, склонной к явлению потери устойчивости. В дальнейшем в работах В.Д.Клюшниковой [4] было введено понятие «упругого эквивалента» конструкции, позволяющего использовать бифуркационный критерий устойчивости при пошаговом процессе нагружения системы в упругопластической области деформирования. Физические соотношения записы-

ваются при этом в скоростях или в инкрементальной форме в приращениях. Продолжая рассматривать проблему устойчивости с позиций теории бифуркаций процессов, покажем, что этот подход применим к оценке устойчивости сооружения с высокорасположенным центром тяжести на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей с упругопластическим слоем основания.

Рассмотрим систему «высотный объект – основание» (рис. 1), объединяющую абсолютно жесткое сооружение с высоко расположенным центром тяжести и физически нелинейный слой основания, описываемый моделью Власова-Леонтьева [5].

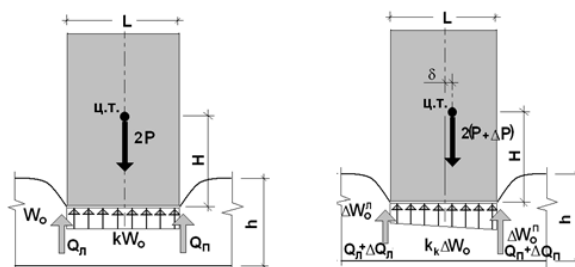


Рисунок 1. Система «сооружение – основание», объединяющая абсолютно жесткое сооружение и физически нелинейный слой основания.

На рисунке 1 показаны: W – осадка слоя основания, k – коэффициент жесткости основания, характеризующего работу неупругого основания на обжатие $k = E_c / (h(1 - \nu^2))$, h – толщина слоя основания, ν – коэффициент Пуассона, E_c – секущий модуль обобщенной диаграммы деформирования, принимаемой в виде экспоненциальной зависимости:

$$\sigma_i = \alpha \left(1 - \exp \left(-\frac{e_i}{\beta} \right) \right), \quad (2)$$

где σ_i, e_i – интенсивности напряжений и деформаций. Реактивные сосредоточенные силы Q_L, Q_P выражают собой концентрацию реактивного давления грунта в угловых зонах.

Учет реактивных сосредоточенных сил Q_L , Q_Π возможен с привлечением дополнительных упрощающих предположений, позволяющих получить двустороннюю оценку решения сверху и снизу. Оценка решения снизу может быть получена при предположении о том, что коэффициент

$$r = E_c h / (6(1 + \nu)),$$

характеризующий работу неупругого основания на сдвиг за пределами штампа, определяется величиной секущего модуля диаграммы деформирования E_c , соответствующей его значению под подошвой штампа. Тогда зависимость между безразмерным параметром $\bar{P}$,

$$\bar{P} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\alpha L \sqrt{3}} P$$

и безразмерной осадкой $\bar{W}$,

$$\bar{W} = W / h$$

имеет вид:

$$\bar{P} = \left(1 + \frac{\alpha_0 h}{3L} \right) \left(1 - \exp \left(\frac{-2\bar{W}}{\sqrt{3}\beta} \right) \right); \quad \alpha_0 = \sqrt{6(1 - \nu)}; \quad (3)$$

Оценка решения сверху может быть получена при предположении о том, что этот коэффициент определяется величиной модуля деформаций в упругой области E . Это соответствует гипотезе об упругой работе слоя основания за пределами штампа. Тогда зависимость между безразмерным параметром $\bar{P}$ и $\bar{W}$ имеет вид:

$$\bar{P} = \left(1 - \exp \left(\frac{-2\bar{W}}{\sqrt{3}\beta} \right) \right) + \frac{2h}{3L} \frac{\alpha_0}{\sqrt{3}} \frac{E}{\alpha} \bar{W} \quad (4)$$

В качестве критерия устойчивости принят бифуркационный критерий устойчивости процесса деформирования упругопластических систем. Составляя условие равновесия системы в возмущенном состоянии, для оценки устойчивости снизу, получим:

$$\bar{P}^{\text{э}}_{kp} = \frac{L}{H} \frac{1}{6\beta\sqrt{3}} \left(\frac{L}{h} + \alpha_0 \right) \exp \left(\frac{-2\bar{W}}{\beta\sqrt{3}} \right) \quad (5)$$

Для оценки устойчивости сверху, полагая, что справедлива гипотеза об упругой работе слоя основания за пределами сооружения, получим:

$$\bar{P}^{\text{э}}_{kp} = \frac{L^2}{Hh} \frac{1}{6\beta\sqrt{3}} \exp \left(\frac{-2\bar{W}}{\beta\sqrt{3}} \right) + \frac{L}{6H} \frac{\alpha_0}{\sqrt{3}} \frac{E}{\alpha} \quad (6)$$

Здесь, с позиций концепции устойчивости упругопластических систем [2], $P^{\text{э}}_{kp}$ выражение для критической нагрузки некоторого упругого эквивалента данной системы. Бифуркационная критическая нагрузка будет найдена из условия равенства

$$P_{kp}(W) = P(W),$$

которое выполняется для некоторого критического уровня нагружения.

В качестве численного примера используем следующие значения параметров: $L/h = 3$; $L/H = 1/5$; $\nu = 0.5$; $E/\alpha = 20$; $\beta = 0.05$.

Результаты расчета приведены на рисунке 2, где можно видеть значение критической нагрузки при ее оценке сверху и снизу. Графики 1,2 построены по (3), (4), графики 3,4 – по (5), (6).

Рассматривая абсолютно жесткое сооружение с высокорасположенным центром тяжести на слое нелинейно-деформируемого основания, будем полагать, что передача давления от сооружения на слой основания осуществляется через фундаментную плиту

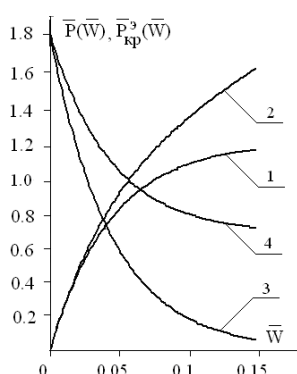


Рисунок 2. Результаты расчета критической нагрузки при ее оценке сверху и снизу.

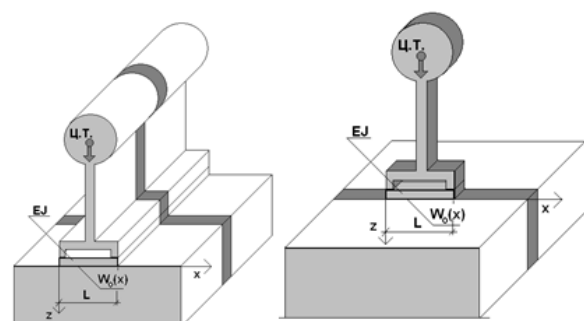


Рисунок 3. Расчетная схема системы «жесткое сооружение – деформируемая фундаментная плита – слой основания».

конечной жесткости. Задача об устойчивости модельной схемы такого сооружения на однослойном нелинейном основании может быть сформулирована в рамках задачи о плоской деформации или о плоском напряженном состоянии (Рисунок 3).

Тогда уравнения в инкрементальной форме для системы «плита-слой основания» на базе модели основания В.З.Власова [4], могут быть представлены в виде системы уравнений в приращениях:

$$\frac{1+(-1)^j}{2} EJ \frac{d^4 \Delta W_k}{dx^4} - \left(\frac{dS_1}{dx} - S_2 \right) \Delta W_k - \frac{dS_3}{dx} \frac{d\Delta W_k}{dx} - S_3 \frac{d^2 \Delta W_k}{dx^2} = 0; \quad (7)$$

Здесь J – номер области интегрирования основания при $x < 0$ и $x > L$ номер $j = 1$, при $0 < x < L$ номер $j = 2$, EJ – изгибная жесткость плиты, ΔW_k – приращение вертикального перемещения поверхности основания на k -том шаге нагружения, S_i – жесткостные коэффициенты слоя основания:

$$S_1 = \int_0^H E' \frac{\sigma_{zz} \tau}{\sigma_i^2} \frac{d\Psi}{dz} \Psi b dz, \\ S_2 = \int_0^H \left(\frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} + E' \frac{\sigma_{zz}^2}{\sigma_i^2} \right) \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 b dz, \\ S_3 = \int_0^H \left(\frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} + E' \frac{\tau_{xz}^2}{\sigma_i^2} \right) \Psi^2 b dz, \\ E' = \frac{d\sigma_i}{de_i} - \frac{\sigma_i}{e_i}, \quad \Psi = \left(1 - \frac{z}{H} \right).$$

Неоднородность в уравнении (параметр нагрузки от высотного сооружения) содержится в граничных условиях задачи. Так естественным условием для свободных краев плиты является равенство нулю момента $M = 0$. Учет неразрывности функции $\Delta W_k(x)$ на свободных краях плиты позволяет записать еще два условия:

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_k^{\text{плиты}} &= \Delta W_k^{\text{основания}} \\ \Delta S_k^{\text{плиты}} &= \Delta S_k^{\text{основания}} - \Delta P_k^{0,L} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = 0; L \quad (8)$$

где $\Delta S_k^{\text{плиты}}$, $\Delta S_k^{\text{основания}}$ – приращения обобщенных поперечных сил [3]:

$$\Delta S_k^{плиты} = -EJ \frac{\partial^3 \Delta W_k^{плиты}}{\partial x^3} + S_1 \Delta W_k^{плиты} + S_3 \frac{\partial \Delta W_k^{плиты}}{\partial x};$$

$$\Delta S_k^{основания} = \int_0^H \Delta \tau_{xz} \Psi b dz = S_1 \Delta W_k^{основания} + S_3 \frac{\partial \Delta W_k^{основания}}{\partial x};$$

где $\Delta P_k^{0,L}$ - приращение левой (ΔP_k^0) и правой (ΔP_k^L) опорных реакций сооружения на k -том шаге нагружения:

$$\Delta P_k^{0,L} = \frac{\Delta P_k}{2} \left(1 - \frac{2H}{L^2} \sum_{n=0}^{k-1} (\Delta W_n^L - \Delta W_n^0) \right) \mp;$$

$$\frac{2H}{L^2} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\Delta P_n}{2} \right) (\Delta W_k^L - \Delta W_k^0);$$

Система инкрементальных уравнений (7) с граничными условиями (8), описывающая пошаговый процесс нагружения упругопластического основания деформируемой фундаментной плиты сооружения с высокорасположенным центром тяжести, позволяет на основе дискретизации уравнений свести проблему устойчивости сооружения к алгебраической проблеме о собственных значениях в форме (1). Для этого на текущем k -том шаге нагружения следует по терминологии, принятой в литературе [3], «заморозить» параметр шага нагружения, то есть считать приращение ΔP_k равным нулю. Поиск критической нагрузки как собственного значения задачи в форме (1) можно осуществлять методом «прослеживанием» равновесных состояний системы с малыми начальными возмущениями [6]. В качестве малого начального возмущения здесь выступает начальный эксцентриситет высотного сооружения. При приближении нагрузки, действующей на систему, к критическому значе-

нию «крен» сооружения быстро возрастает и в части объема упругопластического слоя основания возникают зоны разгрузки, развитие которых определяет картину заkritического деформирования сооружения. Получаемые при этом критические нагрузки соответствуют критической нагрузке на систему по критерию бифуркационной устойчивости (концепция Шенли) и критической предельной нагрузке (концепция Энгессера-Кармана).

В качестве примера рассмотрим систему «сооружение-основание» со следующими параметрами (рисунок 3): $L/h = 3$; $L/H = 1/5$; экспериментальные коэффициенты в (2): $\alpha = 900 \text{ кН/м}^2$, $\beta = 0,05$; изгибная жесткость фундаментной конструкции – $EJ = 1,75 \cdot 10^6 \text{ кН*м}^2$, начальный эксцентриситет сооружения – $H/(1,5 \cdot 10^4)$, шаг по задаваемой величине перемещения под правой опорой примем $h/1000$.

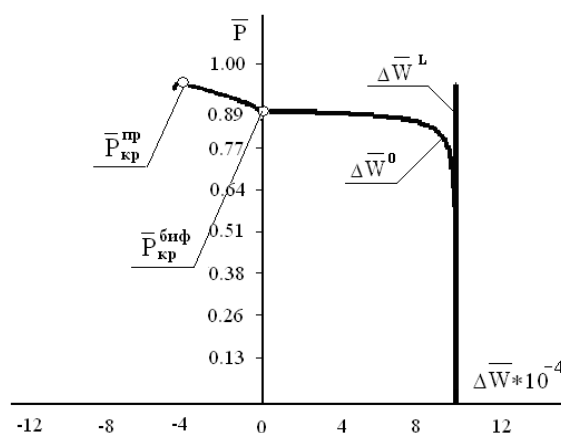


Рисунок 4. График приращения осадок основания под опорами сооружения.

На рисунке 4 приведены зависимости приращения перемещений под левой опорой сооружения,

$$\Delta \bar{W}^0 = \Delta W^0 / h$$

от безразмерного параметра нагрузки $\bar{P}$,

$$\bar{P} = \frac{4(1-\nu^2)}{\alpha L \sqrt{3}} P$$

при заданном постоянном шаге по приращению перемещения под правой опорой,

$$\Delta \bar{W}^L = \Delta W^L / h.$$

Очевидно, что после смены знака график приращения перемещений под левой опорой меняет характер своего изменения в связи с началом разгрузки основания в окрестности левой опоры. Проследить явление разгрузки основания в окрестности левой опоры можно по графику зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций на поверхности основания под левой опорой (рисунок 5).

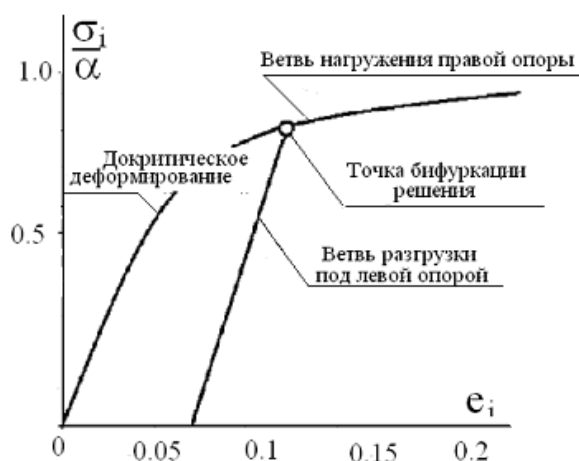


Рисунок 5. График траектории нагружения под опорами сооружения в окрестности критического уровня нагрузки.

При заданном уровне перемещения основания под правой опорой, под левой опорой возможна полная разгрузка основания, после которой начинается отрыв фундаментной конструкции от поверхности основания в окрестности левой опоры. Рассмотрим начальное закритическое поведение функций перемещений основания под левой и правой опорами сооружения.

На рисунке 6 приведены зависимости перемещений основания под опорами сооружения от нагрузки. Ввиду малости начального несовершенства системы (начального эксцентриситета) решения до критической бифуркационной нагрузки практически совпадают.

После бифуркационного критического значения нагрузки $\bar{P}_{кр}^{биф}$ в области начального закритического деформирования решения расходятся, и имеет место предельная нагрузка $\bar{P}_{кр}^{пр}$, соответствующая «приведенно-модульной» концепции исследования устойчивости согласно теории Энгессера-Кармана. Бифуркационная критическая нагрузка является по терминологии [3,6] «наиранней» в истории процесса деформирования системы особой точкой процесса, в которой наблюдается «неединственность» скоростей деформирования.

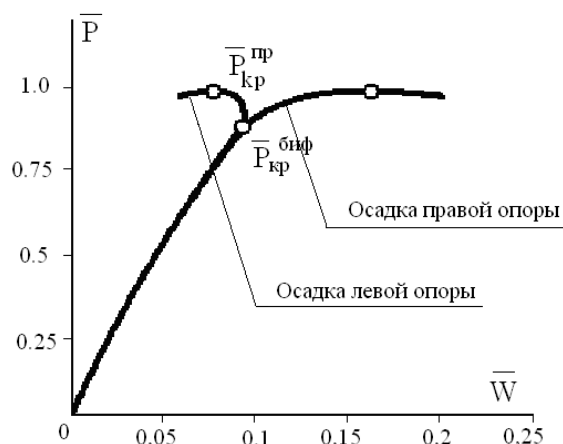


Рисунок 6. Графики зависимости перемещений основания под опорами сооружения от нагрузки.

После этой особой точки в истории процесса деформирования исходный невозмущенный процесс перестает быть устойчивым. Устойчивым становится возмущенный процесс деформирования, характеризующийся наличием «крена» сооружения. При превышении предельной нагрузки $\bar{P}_{кр}^{пр}$, соответствующей

щей «приведенно-модульной» концепции, положения равновесия в окрестности возмущенного процесса деформирования исчезают. Для идеализированной схемы сооружения с высокорасположенным центром тяжести на деформируемой фундаментной плите или при малых начальных несовершенствах в геометрии такого сооружения в качестве условия устойчивости можно принимать значение нагрузки соответствующее смене знака у приращения перемещения в основании под опорной частью сооружения. Данная нагрузка будет являться критической в смысле нарушения процесса монотонного сжатия основания под фундаментом сооружения в процессе монотонного нагружения системы. Эта нагрузка будет так же соответствовать предельной нагрузке графика «интенсивность напряжений – параметр нагрузки» (рисунок 7).

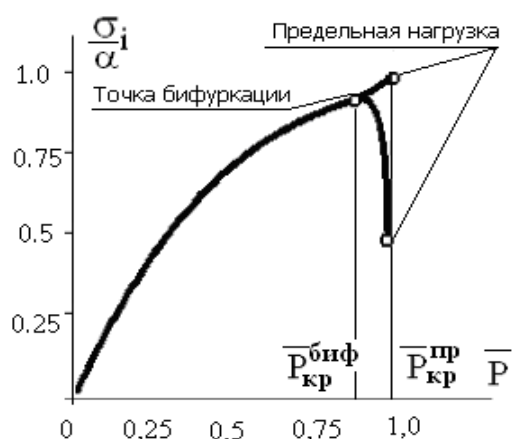


Рисунок 7. Графики «интенсивность напряжений – параметр нагрузки» под опорами сооружения.

Оценка устойчивости при этом будет иметь критериальную основу, связанную с теорией устойчивости процессов, теорией бифуркаций и классической проблемой собственных значений для дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высотные здания / Tall buildings 1/06 .
2. **Масленников А.М, Егоян А.Г.** Основы строительной механики для архитекторов: Учеб. Пособие.-Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1988. 284 с. ISBN 5-288-00079-4.
3. **Шенли Ф.** Теория колонны за пределом упругости. – В кн.: Механика, Сб. перев., 1951, №2 (6), с. 88-98.
4. **Клюшников В.Д.** Устойчивость упруго-пластических систем. – М.: Наука, 1980.
5. **Власов В.З.** Избранные труды: В 3 т. – М: Наука. 1964. – Т. 3. – 407с.
6. **Иноземцев В.К.** Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно-деформируемом основании: монография/ В.К.Иноземцев, Н.Ф.Синева, О.В.Иноземцева. Саратов: Сарат. Гос. Техн. Ун-т, 2008. 242 с.
7. **Иноземцев В.К., Синева Н.Ф.** Бифуркационный критерий устойчивости сооружений на деформируемом грунтовом основании. //Известия ВУЗов. Строительство, 2002, № 8, стр.18-25
8. **Иноземцев В.К., Синева Н.Ф.** Устойчивость стержня Шенли в условиях наведенной неоднородности свойств материала во времени. //Известия ВУЗов. Строительство, 2002, №10, стр. 34-40
9. **Иноземцев В.К., Редков В.И.** Математическая модель деформирования геомассивов применительно к деформационным процессам в основаниях сооружений / В.К. Иноземцев, В.И. Редков. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2005. 412 с.

Иноземцев Вячеслав Константинович, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций». Заведующий кафедрой «Промышленное и гражданское строительство». Руководитель НППЦ «Стройкомплекс» Саратовского государственного технического университета; 410054, Российская Федерация, Саратов, ул. Политехническая, д. 77; e-mail: rectorat@sstu.ru

РАЗВИТИЕ РЕШЕНИЯ КОНУЭЯ НА ЗАДАЧИ ИЗГИБА КРУГЛЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Е.Б. Коренева

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В работе существенное обобщение получает решение американского профессора Г. Конуэя об осесимметричном изгибе круглой изотропной пластины радиально-переменной толщины, лежащей на упругом винклеровском основании. Рассмотрен важный частный случай изменения толщины пластины, при котором решение однородного дифференциального уравнения представлено в замкнутом виде. Производится учёт анизотропии материала. Изучается действие на пластину нагрузок разрывного типа, представляющих собой силы и моменты, распределенные по длинам концентрических окружностей, а также по площади кольца.

Ключевые слова: круглая пластина, переменная толщина, анизотропия материала, упругое основание

DEVELOPMENT BY CONWAY'S SOLUTION ON THE FLEXURE PROBLEM OF CIRCULAR ORTHOTROPIC PLATE OF VARIABLE THICKNESS RESTING ON AN ELASTIC FOUNDATION

Elena B. Koreneva

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The solution by american professor H. Conway, concerning the case of symmetric flexure of circular isotropic plate of radially varying thickness resting on an elastic foundation is significantly generalized. The important particular case by thickness variation is under study. For this case the solution is given in the closed form. The anisotropy of plate's material is under examination. The work considers an action of discontinuous loads, represented by forces and moments, distributed along circumferences non-coinciding with the contour and over ring surfaces.

Key words: circular plate, variable thickness, anisotropy, elastic foundation

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопросам расчета круглых пластин переменной толщины посвящено достаточно большое число публикаций; в частности, следует назвать цикл работ А. Д. Коваленко, например [1]. В некоторых работах производится учёт влияния отпора упругого основания. Приведём дифференциальное уравнение, описывающее осесимметричную деформацию круглой изотропной пластины радиально-переменной толщины, лежащей

на основании, свойства которого описываются моделью Винклера [2]:

$$D \left[\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] + \frac{dD}{dr} \left[2 \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{(2 + \sigma)}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] + \frac{d^2 D}{dr^2} \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right] = q - kw, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость, σ – коэффициент Пуассона, k – коэффициент пласти.

Примем, что цилиндрическая жесткость изменяется вдоль радиуса по степенному закону:

$$D = D_0 r^m, \quad (2)$$

где D_0 – постоянная.

Тогда разрешающее дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} r^4 \frac{d^4 w}{dr^4} + r^3 (2m+2) \frac{d^3 w}{dr^3} + \\ + r^2 (m(1+\sigma) - 1 + m^2) \frac{d^2 w}{dr^2} + \\ + r(1 + \sigma m^2 - \sigma m - m) \frac{dw}{dr} + \\ + \frac{k}{D_0} r^{(4-m)} w = \frac{q}{D_0} r^{(4-m)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Американским профессором Г. Конуэем было получено решение вышеприведенного уравнения в функциях Бесселя, при этом им были использованы результаты Нильсена [3]; приведём указанное решение

$$\begin{aligned} w = r^{-m/4} [B_1 ber_\mu(br^\alpha) + B_2 bei_\mu(br^\alpha) + \\ + B_3 \ker_\mu(br^\epsilon) + B_4 kei_\mu(br^\alpha)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $b^4 = 256k/D_0(4-m)^4$; отношение Пуассона

$$\sigma = \frac{m}{4}.$$

Данное решение действительно для весьма узкого закона изменения жесткости, когда $0 \leq m \leq 2$.

В работе [4] рассматривается аналогичная задача для пластины, сделанной из ортотропного материала.

Было указано, что при $m = 4$, что соответствует толщине пластины

$$h = h_0 r^{4/3}, \quad (5)$$

однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (3), при помощи подстановки $r = e^z$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dz^4} + 4 \frac{d^3 w}{dz^3} + 4\sigma \frac{d^2 w}{dz^2} - \\ - 8(1-\sigma) \frac{dw}{dz} + \frac{k}{D_0} w = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) интегрируется в элементарных функциях, однако этот вопрос не получил дальнейшего развития, и даже не было приведено решение однородного дифференциального уравнения.

2. ОРТОТРОПНАЯ КРУГЛАЯ ПЛАСТИНА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины с цилиндрической жесткостью

$$D = D_0 x^4, x = \frac{r}{r_0}, \quad (7)$$

лежащей на винклеровском упругом основании. Подобная жёсткость соответствует толщине (5), которая близка к толщине, изменяющейся по линейному закону.

Используя результаты, приведенные в [2], запишем следующее дифференциальное уравнение, описывающее изгиб подобной пластины:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{10}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{(20 + 4\sigma - n^2)}{x^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \\ + \frac{(12\sigma - 3n^2)}{x^3} \frac{dw}{dx} + \frac{\beta^4}{x^4} w = \frac{qr_0^4}{D_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\beta^4 = \frac{k r_0^4}{D_0};$$

параметр

$$n^2 = n_1 n_2$$

определяется из следующих отношений

$$E_r = \frac{E}{n_1}, \quad E_\theta = E n_2, \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{n^2}, \quad \sigma_\theta = \sigma;$$

для изотропной пластины $n_1 = n_2 = 1$.

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (8), является уравнением Эйлера. После подстановок $z = e^x$ и $w = ue$ оно приводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (8), имеет вид

$$w = x^{-1} [A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + A_4 x^{\alpha_4}], \quad (9)$$

где

$$\alpha_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{A \pm B}; \quad (10)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2} (5 + n^2 - 4\sigma),$$

$$B = \sqrt{9 + 6n^2 + n^4 - 8n^2\sigma - 24\sigma^2 - 16\sigma^3 - 4\beta^4}.$$

Отметим, что $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_4$.

Учтём действие на пластину разрывных нагрузок. Для этого введём в рассмотрение функции Коши $Z_1(x_1; x)$, $Z_2(x_1; x)$, $Z_3(x_1; x)$, $Z_4(x_1; x)$ решений дифференциального уравнения четвертого порядка, которые обладают следующими свойствами при $x = x_1$:

$$\begin{aligned} Z_1(x_1; x_1) &= 1, Z_1'(x_1; x_1) = Z_1''(x_1; x_1) = \\ &= Z_1'''(x_1; x_1) = 0; \\ Z_2(x_1; x_1) &= 0, Z_2'(x_1; x_1) = 1, \\ Z_2''(x_1; x_1) &= Z_2'''(x_1; x_1) = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Z_3(x_1; x_1) &= 0, Z_3'(x_1; x_1) = 0, \\ Z_3''(x_1; x_1) &= 1, Z_3'''(x_1; x_1) = 0; \\ Z_4(x_1; x_1) &= 0, Z_4'(x_1; x_1) = Z_4''(x_1; x_1) = 0, \\ Z_4'''(x_1; x_1) &= 1. \end{aligned}$$

Для получения функций (11) следует вычислить определитель Вронского решений (9); обозначим

$$w_1 = x^{\alpha_1-1}, \quad w_2 = x^{-\alpha_1-1}, \quad w_3 = x^{\alpha_3-1}, \quad w_4 = x^{-\alpha_3-1}$$

В данном случае вронскиан (9) сводится к вычислению определителя Вандермонда [5]:

$$W(x_1) = 4\alpha_1\alpha_3(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)x_1^{-10} \quad (12)$$

Определим функции Коши (11). Используя формулы Крамера, получим:

$$\begin{aligned} Z_1(x_1; x) &= \frac{x_1}{2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)} \left\{ \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1} [(\alpha_1 + 1)x_1^{-\alpha_1} x^{\alpha_1-1} + \right. \\ &+ (\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha_1} x^{-\alpha_1-1}] - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3} [(\alpha_3 + 1)x_1^{-\alpha_3} x^{\alpha_3-1} + \\ &+ (\alpha_3 - 1)x_1^{\alpha_3} x^{-\alpha_3-1}] \Big\}; \\ Z_2(x_1; x) &= \frac{x_1^2}{2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)} \left\{ \frac{(\alpha_3^2 - 3\alpha_1)}{\alpha_1} x_1^{-\alpha_1} x^{\alpha_1-1} - \right. \\ &- \frac{(\alpha_3^2 - 3\alpha_1)}{\alpha_1} x_1^{-\alpha_1} x^{-\alpha_1-1} - \frac{(\alpha_3^2 - 3\alpha_1)}{\alpha_3} x_1^{-\alpha_3} x^{\alpha_3-1} + \\ &+ \frac{(\alpha_3^2 - 3\alpha_1)}{\alpha_3} x_1^{-\alpha_3} x^{-\alpha_3-1} \Big\}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$Z_3(x_1; x) = \frac{x_1^3}{2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)} \left\{ -\frac{x_1^{-\alpha_1}(6 + \alpha_1)}{\alpha_1} x^{-\alpha_1-1} + \right. \\ \left. + \frac{x_1^{-\alpha_1}(6 - \alpha_1)}{\alpha_1} x^{-\alpha_1-1} + \frac{x_1^{-\alpha_3}(6 + \alpha_3)}{\alpha_3} x^{\alpha_3-1} - \right. \\ \left. - \frac{x_1^{-\alpha_3}(6 - \alpha_3)}{\alpha_3} x^{\alpha_3-1} \right\}; \\ Z_4(x_1; x) = \frac{x_1^4}{2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)} \left\{ \frac{x_1^{-\alpha_1} x_1^{-\alpha_1-1}}{\alpha_1} + \right. \\ \left. + \frac{x_1^{\alpha_1} x^{-\alpha_1-1}}{\alpha_1} + \frac{x_1^{-\alpha_3} x_1^{-\alpha_3-1}}{\alpha_3} - \frac{x_1^{\alpha_3} x^{-\alpha_3-1}}{\alpha_3} \right\}.$$

Если величина β^4 достаточно велика, то $\alpha_{1,2,3,4}$ могут являться попарно комплексно-сопряженными. Тогда, вводя обозначения

$$\alpha_{1,2} = \varepsilon \pm \delta i, \quad \alpha_{3,4} = -\varepsilon \pm \delta i,$$

запишем общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (8), в виде

$$w(x) = x^\varepsilon [B_1 \sin(\delta \ln x) + B_2 \cos(\delta \ln x)] + \\ + x^{-\varepsilon} [B_3 \sin(\delta \ln x) + B_4 \cos(\delta \ln x)]. \quad (14)$$

Обозначим

$$\sin(\delta \ln x) = \alpha(x), \quad \cos(\delta \ln x) = \gamma(x).$$

В качестве примера приведем одну из функций Коши в этой форме

$$Z_4(x_1; x) = \frac{x_1^4}{4\varepsilon\delta(\varepsilon^2 + \delta^2)} \{ x_1^{-\varepsilon} x^\varepsilon \{ -[\gamma(x_1)\delta + \\ + \varepsilon\alpha(x_1)]\gamma(x) + [\gamma(x_1)\varepsilon - \delta\alpha(x_1)]\alpha(x) \} - \\ - x_1^\varepsilon x^{-\varepsilon} \{ [-\gamma(x_1)\delta + \varepsilon\alpha(x_1)]\gamma(x) - \\ - [\varepsilon\gamma(x_1) + \delta\alpha(x_1)]\alpha(x) \} \}. \quad (15)$$

Перейдем к определению фундаментальных функций $w_i(x_1; x)$ ($i = 1, \dots, 4$), которые позво-

ляют учесть действие разрывных нагрузок и обладают при $x=x_l$ следующими свойствами:

i \ j	1	2	3	4
w_1	1	0	0	0
$\frac{dw_i}{dx}$	0	1	0	0
$M_r(w_i)$	0	0	1	0
$Q_r(w_i)$	0	0	0	1

где

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (17)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) - \\ - \frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (18)$$

В результате получим

$$w_1(x_1; x) = Z_1(x_1; x); \\ w_2(x_1; x) = Z_2(x_1; x) - \frac{\sigma}{x_1} Z_3(x_1; x) + \\ + \frac{(1 + \sigma)}{x_1^2} Z_4(x_1; x); \\ w_3(x_1; x) = -\frac{1}{D(x_1)} \left\{ Z_3(x_1; x) - \left[\frac{1}{x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{D(x_1)} \frac{dD(x_1)}{dx} \right] Z_4(x_1; x) \right\}; \\ w_4(x_1; x) = -\frac{1}{D(x_1)} Z_4(x_1; x). \quad (19)$$

Уравнение изогнутой серединой поверхности пластины, лежащей на упругом винклеровском основании с жёсткостью (7), при её загрузении моментами M_i , равномерно распределёнными по окружности радиуса x_i , и

силами Q_j , равномерно распределёнными по окружности радиуса x_j , имеет вид

$$w = w_1 + M_i r_0^2 w_3(x_i; x) + Q_j r_0^3 w_4(x_j; x), \quad (20)$$

где

$$w_1 = w_0 w_1(x_0; x) + \mathcal{G}_0 r_0 w_2(x_0; x) - M_0 r_0^2 w_3(x_0; x) - Q_0 r_0^3 w_4(x_0; x), \quad (21)$$

а $w_0, \mathcal{G}_0, M_0, Q_0$ - соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат (на внутреннем контуре при $x=x_0$).

Если на изучаемую пластину действуют нагрузки, распределенные по площади кольца или по ступенчатому закону, то решение находится путем интегрирования последнего слагаемого в (21). Возможно рассмотрение неравномерно распределённых нагрузок и нагрузок, распределённых по ступенчатому закону.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе в замкнутом виде получено решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины, находящейся под действием нагрузок, представляющих собой силы и моменты, распределённые по окружностям, не совпадающим с контуром, а также нагрузок, распределённых по площади кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коваленко А.Д.** Круглые пластины переменной толщины. – М.: Физматгиз. 1959. – 294с.
2. **Коренева Е.Б.** Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и

их практические приложения. – М.: АСВ 2011. – 238с.

3. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. 1965. – 703с.
4. **Коренева Е.Б., Гросман В.Р.** Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины, лежащей на упругом основании. Научно-технический журнал «Вестник МГСУ» №8, 2012г., с.156-159;
5. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. М.Гостехиздат. 1946. – 431с.

Коренева Елена Борисовна, Московский государственный строительный университет - Национальный исследовательский университет; кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru

Elena B.Koreneva, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ

В.В. Лалин, Д.А. Кушова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, г. Санкт-Петербург, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматривается нелинейная плоская задача теории упругих стержней Коссера - Тимошенко в материальном (Лагранжевом) описании. Используются энергетически сопряженные векторы усилий и деформаций. Для функционала Лагранжа доказывается эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач для гладких решений. Выводится выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены дифференциальные уравнения задачи устойчивости. Для ряда задач получено точное значение критической нагрузки с учетом деформаций изгиба, сдвига и растяжения-сжатия.

Ключевые слова: большие перемещения и повороты, энергетически сопряженные усилия и деформации, функционал вариационной постановки, уравнения устойчивости.

GEOMETRICALLY NONLINEAR DEFORMATION AND STABILITY PROBLEMS OF PLANE ELASTIC RODS WITH TENSION-COMPRESSION, SHEAR AND BENDING STIFFNESS TAKEN INTO ACCOUNT

Vladimir V. Lalin, Daria A. Kushova

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, RUSSIA

ABSTRACT: This article is about a nonlinear plane problem of the theory of elastic Cosserat – Timoshenko's rods in the material (Lagrangian) description with energy conjugated vectors of forces, moments and strains. Equivalence of the differential and variational formulations for the Lagrangian functional was proved for smooth solutions. The differential equations of the problem of stability were obtained from the second variation of the Lagrangian functional. Exact solution of some stability problems with the deformations of bending, shear and tension-compression was obtained.

Keywords: large displacements and rotations, energy conjugated forces, moments and strains, the functional of variational formulation, the equations of stability

ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход в вариационной постановке задачи нелинейного деформирования стержней заключается в использовании вариационного уравнения в виде принципа возможных перемещений [1-15]. В настоящей работе, на примере плоской задачи, показывается, что, с использованием энергетически

сопряженных векторов усилий и деформаций [16], вариационную задачу можно сформулировать в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. При этом появляется возможность двумя способами получить уравнения устойчивости: как уравнения в вариациях для исходной дифференциальной постановки и как урав-

нения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается общая геометрически нелинейная теория упругих стержней, в которой учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения-сжатия, а на величины перемещений и поворотов не накладывается никаких ограничений. В плоской задаче каждая точка такого стержня обладает тремя степенями свободы – двумя поступательными и одной вращательной.

Выберем в качестве отсчетной ненапряженной конфигурации (ОК) первоначально прямолинейного стержня его расположение вдоль оси X правой декартовой системы координат X, Y, Z (рис.1а) с ортами i, j, k , соответственно. В ОК положение каждой точки стержня задается координатой x_0 , $0 \leq x_0 \leq L$,

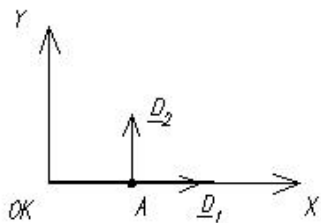


Рисунок 1а. Отсчетная ненапряженная конфигурация (ОК) стержня

где L – исходная длина стержня. Далее будет использоваться материальное (лагранжево) описание, в котором все характеристики напряженно-деформированного состояния зависят от переменной x_0 , причем $(\dots)'$ будет обозначать производную по x_0 .

В теории Коссера-Тимошенко с каждой точкой стержня связан репер (правая ортонормированная тройка векторов), векторы которого в ОК обозначим D_i . Для первоначально прямолинейного без естественного закручивания стержня можно принять, что вектор D_1 направлен по оси стержня, векторы D_2, D_3 –

по главным центральным осям инерции сечения (рис.1а), причем $D_i = \text{const}(x_0)$, $D_1 = i$, $D_2 = j$.

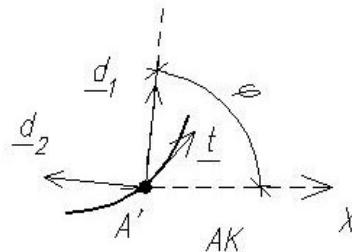


Рисунок 1б. Актуальная (деформированная) конфигурация (АК) стержня

На рис. 1б изображена актуальная (деформированная) конфигурация стержня (АК). Положение каждой точки стержня в АК задается вектором $r(x_0) = x(x_0)i + y(x_0)j$.

Векторы репера в повернутом положении обозначены $d_i = d_i(x_0)$, причем вектор d_1 не обязан совпадать с вектором t – единичным вектором, касательным к оси стержня в АК. В плоской задаче поворот репера определяется вектором $\Phi(x_0) = \varphi(x_0)k$. Функции $x(x_0)$, $y(x_0)$, $\varphi(x_0)$ представляют собой три степени свободы в плоской задаче геометрически нелинейного деформирования стержня.

Истинные векторы усилий в АК в плоской задаче:

$$f(x_0) = N(x_0)d_1 + Q(x_0)d_2, \quad \mu(x_0) = M(x_0)k,$$

соответствующие им векторы деформаций [2,5]:

$$e(x_0) = r' - P \cdot r_0', \quad \psi(x_0) = \varphi' k,$$

где N – продольная сила, Q – поперечная сила, M – изгибающий момент, $r_0 = x_0 i$ – радиус-вектор точек стержня в ОК, точкой обозначается скалярное произведение, $P(x_0)$ – тензор поворота, задающий поворот отсчетного репера D_i в актуальный репер d_i : $d_i = P \cdot D_i$, матричное представление тензора поворота в плоской задаче:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

обратный поворот из АК в ОК задается транспонированным тензором P^T .

В работе [18] показано, что при использовании лагранжева описания удобнее использовать повернутые из АК в ОК векторы усилий и деформаций: $F = P^T \cdot f$, $E = P^T \cdot e$ (повернутые векторы моментов и изгибных деформаций в плоской задаче совпадают с истинными). Повернутые векторы усилий и деформаций являются энергетически сопряженными в смысле следующего определения [18]:

$$W = F \cdot E + \mu \cdot \psi$$

где $W = W(E, \psi)$ – погонная плотность энергии деформации упругого (в том числе, и нелинейно-упругого) стержня, точкой сверху обозначена производная по времени.

Повернутые векторы усилий и деформаций в плоской задаче:

$$F(x_0) = N(x_0) i + Q(x_0) j, \quad \mu(x_0) = M(x_0) k, \\ E(x_0) = \varepsilon i + \Gamma j, \quad \psi(x_0) = \varphi' k,$$

Выражения для компонент деформаций ε , Γ через функции $x(x_0)$, $y(x_0)$, $\varphi(x_0)$ приведены далее.

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня состоит из трех групп уравнений (1) – (3).

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x = 0 \\ (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y = 0 \\ M' + x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \\ + y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где q_x , q_y , m – распределенная силовая и моментная нагрузки, соответственно.

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1 \\ \Gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ \psi = \varphi' \end{cases} \quad (2)$$

Физические уравнения:

$$N = k_1 \varepsilon, \quad Q = k_2 \Gamma, \quad M = k_3 \psi \quad (3)$$

где k_1 , k_2 , k_3 – жесткости стержня на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб, соответственно.

Граничные условия:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, M(0) = 0 \quad (4)$$

$$y(L) = 0, M(L) = 0, N(L) = -T \quad (5)$$

Граничные условия (4) и (5) соответствуют схеме, приведенной на рисунке 2.

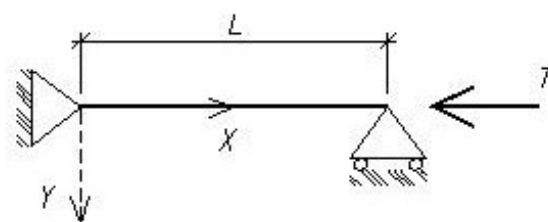


Рисунок 2. Расчетная схема стержня.

Подразумеваем, что в уравнениях (4) – (5) внутренние усилия выражены через x , y , φ с помощью уравнений (2), (3).

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Функционал Лагранжа:

$$\Pi(x, y, \varphi) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \Gamma^2 + k_3 \psi^2) \right] dx_0 + T(x(L) - L) \quad (6)$$

Несложно показать, что из условия $\delta\Pi=0$, где $\delta\Pi$ – вариация функционала Лагранжа, вытекают уравнения (1), в которых внутренние усилия выражены через функции x , y , φ . Тем самым для гладких решений дифференциальная постановка задачи (1)-(5) эквивалентна вариационной задаче $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$ поиска точки стационарности функционала (6).

Вариационная формулировка задачи устойчивости

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи $\delta^2\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$ [17], где $\delta^2\Pi$ – вторая вариация функционала (6).

Вторая вариация функционала:

$$\delta^2\Pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1, h_2, f) = \int_0^L (N\varepsilon + Q\Gamma + \bar{N}f\Gamma + \bar{N}f(h'_2 \cos \bar{\varphi} - h'_1 \sin \bar{\varphi}) + \bar{Q}f(-h'_2 \sin \bar{\varphi} - h'_1 \cos \bar{\varphi}) + \bar{Q}f\varepsilon + Mf')dx_0 \quad (7)$$

В выражении (7): h_1 , h_2 , f – вариации функций $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{\varphi}$, соответственно; N , Q , M , ε , Γ , ψ – соответствующие h_1 , h_2 , f вариации внутренних усилий и деформаций.

Величинами с чертой в (7) и в дальнейшем обозначаются характеристики напряженно-деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1) – (5). То есть это характеристики того равновесного напряженно-деформированного состояния, устойчивость которого исследуется.

Обозначим

$$\delta^2\Pi \equiv \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1, h_2, f)$$

Найдем первую вариацию функционала $\delta\Phi$.

$$\delta\Phi = - \int_0^L \{ [(N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi})' - f'(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi}) - f(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi})'] d_1 + [(N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi})' + f'(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi}) + f(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi})'] d_2 + [M' + \bar{Q}\varepsilon - \bar{N}\Gamma + Q(\varepsilon + 1) - \bar{N}\Gamma] g \} dx_0 + [(N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi} - \bar{N}f \sin \bar{\varphi} - \bar{Q}f \cos \bar{\varphi}) d_1 + (N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi} + \bar{N}f \cos \bar{\varphi} - \bar{Q}f \sin \bar{\varphi}) d_2 + Mg]_0^L \quad (8)$$

где d_1 , d_2 , g – вариации функций h_1 , h_2 и f , соответственно;

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия $\delta\Phi=0$ при любых функциях d_1 , d_2 , g , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи (1)–(5), являются следующие:

$$\begin{cases} (N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi})' - f'(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi}) - f(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi})' = 0 \\ - (N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi})' + f'(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi}) + f(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi})' = 0 \\ M' + \bar{Q}\varepsilon - \bar{N}\Gamma + Q(\varepsilon + 1) - \bar{N}\Gamma = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (9) являются точными уравнениями задачи устойчивости равновесия стержня для плоской задачи.

Подчеркнем, что полученная система уравнений устойчивости является точной. При ее выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

Примеры решения задач устойчивости равновесия.

Рассмотрим в качестве примера стержень, представленный на рисунке 2.

Исходная равновесная конфигурация – прямолинейная, действует только сжимающая сила T .

В обозначении известных нам величин заменим черту на индекс 0, лагранжеву координату будем обозначать x .

Для данного примера:

$$M_0 = 0, Q_0 = 0, \varphi_0 = 0, \Gamma_0 = 0, q_y = 0,$$

$$y_0 = 0, q_x = 0.$$

$$N_0 = -T, \quad \varepsilon_0 = x_0' - 1 = \frac{N_0}{k_1}.$$

$$\cos \varphi_0 = 1, \quad \sin \varphi_0 = 0.$$

Таким образом, уравнения устойчивости запишутся в виде:

$$\begin{cases} N' = 0 \\ -Tf' + Q' = 0 \\ M' + Q\left(1 - \frac{T}{k_1}\right) + T(-x_0'f + h_2') = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = h_1' \\ \Gamma = -x_0'f + h_2' \\ \psi = f' \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = k_1 h_1' \\ Q = k_2 (-x_0'f + h_2') \\ M = k_3 f' \end{cases}$$

Для удобства применим стандартные обозначения для вариаций:

$$h_1 = u, \quad h_2 = v, \quad f = \theta$$

Тогда, для однородного стержня, жесткости которого не зависят от x , получим

$$\begin{cases} k_1 u_1'' = 0 \\ -T\theta' + k_2 \left[v' - \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta \right]' = 0 \\ k_3 \theta'' + k_2 \left[v' - \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta \right] \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) + \\ + T \left(- \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta + v' \right) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

В полученной системе (11) первое уравнение описывает продольные деформации и не зависит от второго и третьего уравнений. Следовательно, устойчивость проверяется только из второго и третьего уравнений.

Общее решение второго и третьего уравнений системы (11), содержащее четыре произвольных постоянных $C_1 - C_4$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v(s) &= -C_1 \frac{A}{\lambda} \cos \lambda s + C_2 \frac{A}{\lambda} \sin \lambda s + C_3 \left(1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_2 A}{T} \right) s + C_4 \\ \theta(s) &= C_1 \sin \lambda s + C_2 \cos \lambda s - C_3 \frac{k_2}{T}, \end{aligned} \quad (12)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A = 1 + T \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right), \quad \lambda^2 = \frac{TA}{k_3}.$$

Определим произвольные постоянные, используя граничные условия. Для шарнирно опертого стержня они имеют вид:

$$\begin{aligned} v(0) &= v(L) = 0 \\ \text{т.к. } M &= k_3 \theta', \quad M(0) = M(L) = 0, \\ \text{то } \theta'(0) &= \theta'(L) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Используя условия (13), получим:

$$c_1 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$$

$$\theta(x) = c_2 \cos \lambda x; \theta'(L) = -c_2 \sin \lambda L = 0$$

$$\frac{1}{k_2} \rightarrow 0.$$

Рассматриваем решение уравнения $\sin \lambda L = 0$

$$\lambda L = \pi n, \text{ где } n=1,2,3\dots$$

Критическое (наименьшее) значение силы T достигается при $n=1$ и находится из квадратного уравнения [18]:

$$T^2 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (14)$$

где T_3 - сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [19], равная $T_3 = \pi^2 k_3 / L^2$.

Отсюда получим единственное положительное значение T :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \quad (15)$$

Решение (15) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб. Далее рассмотрим частные случаи.

Рассмотрим случай большой жесткости на растяжение – сжатие: $1/k_1 = 0$. Тогда

$$T = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4T_3}{k_2}} - 1 \right), \quad (16)$$

Решение (16) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на изгиб и сдвиг.

Рассмотрим случай большой жесткости на сдвиг:

Раскладывая подкоренное выражение в (16) в ряд и учитывая слагаемые первого и второго порядка малости, получим:

$$T = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4T_3}{k_2}} - 1 \right) = \frac{k_2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4T_3}{k_2} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \left(\frac{4T_3}{k_2} \right)^2 - 1 \right) = T_3 \left(1 - \frac{T_3}{k_2} \right)$$

Окончательно,

$$T = T_3 (1 - T_3 / k_2) \quad (17)$$

Решение (17) с точностью до малых второго порядка совпадает с известным приближенным решением Энгессера [19]:

$$T = T_3 (1 + T_3 / k_2)^{-1} \quad (18)$$

Раскладывая подкоренное выражение в (16) в ряд и учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим:

$$T = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4T_3}{k_2}} - 1 \right) = \frac{k_2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4T_3}{k_2} - 1 \right) = T_3. \quad (19)$$

Таким образом, если $1/k_1 = 0$ и $1/k_2 = 0$, то из решения (15), согласно формуле (19), получим классическое решение Эйлера.

Чтобы оценить погрешность формулы Энгессера (18), выразим (16) и (18) в безразмерных коэффициентах T_3 / k_2 и построим графики для обеих формул. В качестве примера (рисунок 3) приведены графики для стойки, длиной 3м, выполненной из колонного двутавра 20К1. Вертикальная линия соответствует пятипроцентной разнице между точным значением (16) и значением, полу-

ченным по формуле Энгессера (18). Значения, расположенные левее линии, соответствуют разнице менее пяти процентов, правее, соответственно, более. Таким образом, можно сделать вывод, что формула Энгессера дает заниженное значение критической нагрузки, что наглядно отображено на графике.

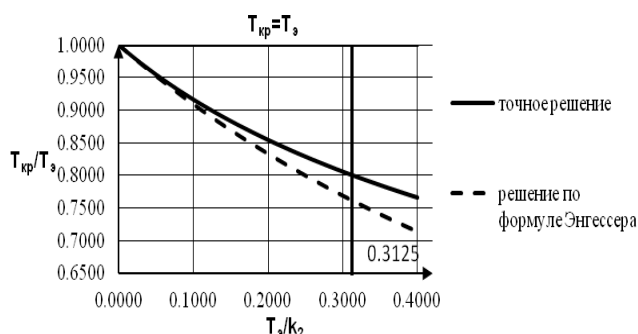


Рисунок 3. – Влияние жесткости на сдвиг на величину критической нагрузки для точного решения и решения по формуле Энгессера

Аналогично были получены точные решения задач устойчивости для консольного стержня и стержня со скользящей заделкой. Используя граничные условия для консольного стержня (20) и стержня со скользящей заделкой (21)

$$v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0; \quad \theta'(L) = 0$$

$$\left[k_2 \left[v' - \theta \left(1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right]_{S=L} = 0 \quad (20)$$

$$v(0) = v(L) = 0$$

$$\theta(0) = \theta(L) = 0 \quad (21)$$

в решении (12), получаем квадратное уравнение и решение полностью совпадающие по виду с формулами (14), (15), отличающиеся лишь значениями силы Эйлера для консольного стержня

$$T_3 = \pi^2 k_3 / (4L^2) \text{ и } T_3 = 4\pi^2 k_3 / L^2$$

для стержня со скользящей заделкой.

ВЫВОДЫ

1. С использованием энергетически сопряженных векторов внутренних усилий и деформаций приведена постановка статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских упругих стержней в виде системы дифференциальных уравнений.
2. Приведено выражение функционала типа Лагранжа вариационной постановки статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских стержней.
3. Для гладких решений доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач.
4. Получены уравнения плоских задач устойчивости равновесия как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.
5. Для шарнирно опертого, консольного стержней и стержня со скользящей заделкой получены точные решения задач устойчивости равновесия с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие.
6. Проведено исследование погрешности известной формулы Энгессера, позволяющей приближенно учесть влияние сдвиговой жесткости на величину критической силы. Показано, что формула Энгессера дает заниженное значение критической силы по сравнению с точным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Голоскоков Д.П., Жилин П.А.** Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ №1912-B87 Деп., 20 с.
2. **Елисеев В.В.** Механика упругих стержней. СПб, Изд-во СПбГПУ, 1994. 88 с

3. **Жилин П.А., Сергеев А.Д.** Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. № 448. С.47-56.
4. **Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П.** Нелинейная теория стержней и ее приложения// Труды XXIV летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем», Санкт-Петербург, 1997. С. 313 – 337.
5. **Жилин П.А.** Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб, Изд-во СПбГПУ. 2007. 102 с.
6. **Елисеев В.В., Зиновьева Т.В.** Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. СПб, Изд-во СПбГПУ. 2008. 96 с.
7. **Jelenic G, Crisfield M.A.** (1999) Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for static and dynamics. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.* 171: 141-171
8. **Shabana A.A., Yakoub R.Y.** Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory. *ASME Journal of Mechanical Design*, 123(4):606–613, 2001.
9. **Reddy J.N.** An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press, 2004.482 p.
10. **Antman S.S.** (2005) Nonlinear problems of elasticity, Springer, Berlin Heidelberg New York 835 p.
11. **Gerstmayr J., Shabana A.A.** Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dyn.* 45(1-2), 109-130 (2006)
12. **Shabana A.A.** Computational continuum mechanics. Cambridge University Press. 2008. 349 p.
13. **Wriggers P.** Nonlinear finite element methods. 2008. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 566 p.
14. **Krenk S.** Non-linear modelling and analysis of solids and structures. Cambridge University Press.2009.361p.
15. **Ibrahimbegovic A.** Nonlinear Solid Mechanics. Springer Science+Business Media B.V. 2009.585 p.
16. **Лалин В.В.** Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней//Труды СПбГПУ. 2004. №489. С. 121-128.
17. **Гельфанд И.М., Фомин С.В.** Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961, 228 с.
18. **Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А.** Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней//Инженерно-строительный журнал. 2013. №1 (36). С. 87-96.
19. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том1. М.: Издательство СКАД СОФТ, 2010 - 704 с.

Лалин Владимир Владимирович, д.т.н., проф., заведующий кафедрой «Строительная механика и строительные конструкции» ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
e-mail: vllalin@yandex.ru

Кушова Дарья Александровна, аспирант кафедры «Строительная механика и строительные конструкции» ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,
e-mail: dasha_kushova@mail.ru

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Р.Л. Лейбов

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В статье представлена методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. Матрицы статических и динамических линейных моделей оцениваются по переходным процессам координат состояния и первых производных координат состояния нелинейной модели. При этом переходные процессы для оценивания с помощью нелинейного программирования матриц динамических линейных моделей пересекают границы областей действия разных линейных моделей. Приведены результаты применения предлагаемой методики для построения кусочно-линейной модели авиационного газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: нелинейный объект, методика построения кусочно-линейной модели, переходные процессы координат состояния и первых производных координат состояния нелинейной модели, оценивание матриц динамических линейных моделей с помощью нелинейного программирования

NONLINEAR PLANT PIECE-WISE LINEAR MODEL FORMATION TECHNIQUE

Roman L. Leibov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: This paper presents a nonlinear plant piecewise-linear model formation technique. The matrices of static and dynamic linear models are estimated using nonlinear model state variable and first derivative state variable time responses. The time responses for dynamic linear model matrix estimation using nonlinear programming cross the bounds between different linear model domains. The results of proposed piecewise-linear model formation technique application for aircraft turbofan engine are presented.

Key words: Nonlinear plant, piecewise-linear model formation technique, nonlinear model state variable and first derivative state variable time responses, dynamic linear model matrix estimation using nonlinear programming

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценивание матриц статических и динамических линейных моделей, совокупность которых представляет собой кусочно-линейную модель нелинейного объекта управления, например авиационного газотурбинного двигателя (ГТД), необходимо для разработки алгоритмов оптимального оценивания состояния и оптимального управления, обнаружения, локализации, конкретизации, парирования и уменьшения влияния отказов датчиков и исполнительных устройств цифровых систем автоматического управления (САУ).

Целью данной работы является создание методики построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. В отличие от работы [1], в которой для оценивания матриц динамических линейных моделей использовались переходные процессы переменных управления и состояния нелинейной модели объекта управления, пересекающие границы областей действия разных линейных моделей, здесь, как правило, используются аналогичные переходные процессы переменных управления и первых производных переменных состояния. В работе [1] матрицы многих динамических линейных моделей кусочно-линейной модели были по-

лучены после нескольких неудачных попыток, а здесь использование переходных процессов первых производных переменных состояния позволяет этого избежать. Рассмотренный в работе пример, в котором высота и скорость полета летательного аппарата (ЛА) равны нулю, позволяет убедиться, что в этом случае расхождение между кусочно-линейной и нелинейной моделями увеличивается незначительно.

2. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЕЙ

Нелинейная модель объекта управления, например авиационного ГТД, в замкнутой САУ имеет вид [2]

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\text{НЛ}}, \mathbf{u}^{\text{НЛ}}, \mathbf{w}^{\text{НЛ}}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}^{\text{НЛ}}$ — вектор состояния, $\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$ — вектор управления, $\mathbf{w}^{\text{НЛ}}$ — вектор внешних воздействий, а $\mathbf{f}$ — нелинейная вещественная векторная функция. Координаты вектора состояния (переменные состояния) это частоты вращения роторов, температуры и давления в различных сечениях проточной части двигателя. Координаты вектора управления (переменные управления) это расход топлива, изменяемые геометрические характеристики проточной части двигателя, в частности, площадь критического сечения реактивного сопла и углы поворота направляющих аппаратов вентилятора и компрессора. Координаты вектора внешних воздействий (переменные внешних воздействий) это угол отклонения рычага управления двигателем (управляющее воздействие), а также высота и скорость полета (переменные внешних условий, входящие в вектор внешних условий вектор $\mathbf{v}^{\text{НЛ}}$). Постоянные управляющее воздействие и внешние условия, входящие в вектор $\mathbf{w}^{\text{НЛ}}$, определяют установившийся режим работы двигателя в замкнутой САУ (рабочую точку), которому соответствуют вектор установившихся значений перемен-

ных управления $\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$ и вектор установившихся значений переменных состояния $\mathbf{x}^{\text{НЛ}}$. Нелинейная модель объекта управления в разомкнутой САУ имеет вид [2]

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{НЛ}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\text{НЛ}}, \mathbf{u}^{\text{НЛ}}, \mathbf{v}^{\text{НЛ}}). \quad (2)$$

Постоянные внешние условия $\mathbf{v}^{\text{НЛ}}$ и постоянные значения переменных управления $\mathbf{u}^{\text{НЛ}}$ определяют установившийся режим работы двигателя в разомкнутой САУ.

Нелинейные модели используются для исследования установившихся и переходных процессов ГТД в широком диапазоне режимов работы и условий полета и для создания линейных и кусочно-линейных моделей.

В небольшой окрестности произвольного установившегося режима нелинейный объект управления можно [2] приближенно описать с помощью линейной модели

$${}^{p_1 \dots p_m} \dot{\mathbf{x}}^{\text{Л}} = {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{Л}} + {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{Л}}. \quad (3)$$

Здесь ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{Л}}$ — n -мерный нормированный вектор состояния в отклонениях от установившихся значений, а ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{Л}}$ — m -мерный нормированный вектор управления в отклонениях от установившихся значений, которые соответствуют выбранному $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму. Если обозначить $P_1, \dots, P_m$ — количество выбранных установившихся значений каждой из переменных управления, то $p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$.

Нормированные переменные состояния и управления в отклонениях вычисляются по формулам

$$\frac{{}^{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{Л}}}{\max_s |x_i^{\text{НЛ}}|} = \frac{x_i^{\text{КЛ}} - {}^{p_1 \dots p_m} x_i^{\text{НЛ}}}{\max_s |x_i^{\text{НЛ}}|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\frac{{}^{p_1 \dots p_m} u_j^{\text{Л}}}{\max_s |u_j^{\text{НЛ}}|} = \frac{u_j^{\text{КЛ}} - {}^{p_1 \dots p_m} u_j^{\text{НЛ}}}{\max_s |u_j^{\text{НЛ}}|}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Для установившихся значений отклонений нормированных переменных состояния и управления справедливы соотношения

$${}_s \mathbf{x}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}} = {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} ({}_s \mathbf{u}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}), \quad (6)$$

$$\mathbf{0} = {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} ({}_s \mathbf{x}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}}) + {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} ({}_s \mathbf{u}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}). \quad (7)$$

Отсюда

$${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} = - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A}^{-1} {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{B}, \quad (8)$$

$${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{B} = - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S}, \quad (9)$$

где ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S}$ матрица статической линейной модели для $p_1 \dots p_m$ -ого установившегося режима.

Набор линейных моделей для выбранных установившихся режимов представляет собой кусочно-линейную модель. Среди выбранных установившихся режимов должны быть режимы, соответствующие выбранным установившимся режимам в замкнутой системе управления, а также установившиеся режимы, для которых значения переменных управления близки к значениям этих переменных при переходных процессах в замкнутой системе управления.

Статическая кусочно-линейная модель объекта управления представляет собой набор векторов нормированных установившихся значений управления и состояния ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}$, ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}}$, $p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$, и набор матриц статических линейных моделей ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S}$, $p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$ для выбранных установившихся режимов.

Динамическая кусочно-линейная модель объекта управления включает в себя статическую кусочно-линейную модель и соответствующий набор матриц динамических линейных моделей ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A}$, $p_1 \in (1, \dots, P_1), \dots, p_m \in (1, \dots, P_m)$.

Описание статической кусочно-линейной модели имеет вид

$${}_s \mathbf{x}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}} = {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} ({}_s \mathbf{u}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}). \quad (10)$$

Описание динамической кусочно-линейной модели, построенной на основе статической кусочно-линейной модели, имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}} = {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left[({}_s \mathbf{x}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}}) - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} ({}_s \mathbf{u}^{\text{КЛн}} - {}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}) \right]. \quad (11)$$

Здесь

$$p_j = 1 : \begin{cases} u_j^{\text{КЛн}} \leq {}_s^1 u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} > {}_s^1 u_j^{\text{НЛн}} \\ u_j^{\text{КЛн}} \geq {}_s^1 u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} < {}_s^1 u_j^{\text{НЛн}} \end{cases},$$

$$p_j = 2, \dots, P_j : \begin{cases} {}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}} \geq u_j^{\text{КЛн}} > {}_s^{p_j-1} u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} > {}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}} \\ {}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}} \leq u_j^{\text{КЛн}} < {}_s^{p_j-1} u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} < {}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}} \end{cases},$$

$$p_j = P_j : \begin{cases} u_j^{\text{КЛн}} > {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} > {}_s^{P_j-1} u_j^{\text{НЛн}} \\ u_j^{\text{КЛн}} < {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} \mid {}_s^{P_j} u_j^{\text{НЛн}} < {}_s^{P_j-1} u_j^{\text{НЛн}} \end{cases},$$

$${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}} = \begin{bmatrix} {}_s^{p_1} u_1^{\text{НЛн}} \\ \vdots \\ {}_s^{p_m} u_m^{\text{НЛн}} \end{bmatrix},$$

$${}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}} = \min({}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}}) + \frac{[\max({}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}}) - \min({}_s^{p_j} u_j^{\text{НЛн}})]}{(P_j - 1)} (p_j - 1),$$

$$j = 1, \dots, m.$$

Векторы соответствующих установившихся значений переменных состояния ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{НЛн}}$ определяются с помощью нелинейной модели объекта управления.

3. ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Для оценивания матриц линейной модели, соответствующей выбранному $p_1 \dots p_m$ -ому установившемуся режиму, используются переходные процессы нелинейной модели объекта в разомкнутой системе управления, то есть наборы значений нормированного вектора управления ${}_{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^{\text{НЛн}}(t_k)$, $k=0, \dots, N-1$,

нормированного вектора состояния ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_k)$, $k=0, \dots, N$, а также его первой производной.

При определении матрицы статической линейной модели переходный процесс для переменных управления состоит из разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из m переменных. При этом отклонение каждой переменной управления равно разности установившихся значений этой переменной для двух соседних установившихся режимов.

В этом случае элементы соответствующих столбцов матрицы статической линейной модели ${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}$ могут быть определены с помощью деления установившихся значений отклонений переменных состояния на значение соответствующего отличного от нуля отклонения переменной управления

$${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}_{ij} = \frac{{}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}_i^{\text{HJ}n}[(2j-1)T] - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}_{i, \text{ста}}^n}{{}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}_j^{\text{HJ}n}[(2j-1)T] - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}_j^n}, \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь T — продолжительность каждого прямоугольного импульса и такого же промежутка между импульсами.

При оценивании матрицы динамической линейной модели переходные процессы для переменных управления представляют собой m линейных функций времени, наклоны которых соответствуют переходным процессам в замкнутой системе управления. Эти линейные функции могут соединять установившиеся значения для двух соседних установившихся режимов или для двух режимов, которые разделяет одна или несколько границ областей действия разных линейных моделей.

Если шаг дискретности достаточно мал, то в дискретные моменты времени можно приближенно считать, что

$$\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_{k+1}) = \mathbf{x}^{\text{J}n}(t_k) + \Delta t {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left\{ \left[\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_k) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^n \right] - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} \left[\mathbf{u}^{\text{HJ}n}(t_k) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^n \right] \right\}, \quad (13)$$

Здесь $k=0, 1, 2, \dots$ соответствуют дискретным моментам времени $t_0, t_1, t_2, \dots$, причем $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, где Δt это шаг дискретности.

Оценивание матрицы динамической линейной модели в окрестности $p_1 \dots p_m$ -ого установившегося режима может быть сведено к одной из двух задач нелинейного программирования [3]

$${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} : \min \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_k)]^T \mathbf{x} \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N [\mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_0)]^T \mathbf{x} \mathbf{W}(t_k)}}}, \right. \\ \left. \frac{[\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_k)]}{[\mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_k) - \mathbf{x}^{\text{HJ}n}(t_0)]} \right\}, \quad (14)$$

$$\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_k) = \mathbf{x}^{\text{J}n}(t_{k-1}) + \Delta t {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left\{ \left[\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_{k-1}) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^n \right] - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} \left[\mathbf{u}^{\text{HJ}n}(t_{k-1}) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^n \right] \right\}, \quad k = 1, \dots, N$$

$${}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} : \min \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{J}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_k)]^T \mathbf{x} \mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_N)]^T \mathbf{x} \mathbf{W}(t_k)}}}, \right. \\ \left. \frac{[\dot{\mathbf{x}}^{\text{J}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_k)]}{[\dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{HJ}n}(t_N)]} \right\}, \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{J}n}(t_k) = {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{A} \left\{ \left[\mathbf{x}^{\text{J}n}(t_{k-1}) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{x}^n \right] - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{S} \left[\mathbf{u}^{\text{HJ}n}(t_{k-1}) - {}^{p_1 \dots p_m} \mathbf{u}^n \right] \right\}, \quad k = 1, \dots, N$$

Здесь ${}_x\mathbf{W}(t_k)$, $k=1, \dots, N$ положительно определенные диагональные весовые матрицы. Начальные значения элементов матрицы ${}^{P_1 \dots P_m}\mathbf{A}$ равны значениям элементов матрицы линейной модели для соседней области. Начальные значения координат вектора состояния линейной модели $\mathbf{x}^{Jln}(t_0) = \mathbf{x}^{HJln}(t_0)$.

Отметим, что именно использование переходных процессов первых производных переменных состояния, пересекающих границы областей действия разных линейных моделей, является главной отличительной особенностью предлагаемой методики построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ МАТРИЦ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для определения матриц статической и динамической кусочно-линейных моделей по переходным процессам нелинейной модели современного авиационного ГТД в разомкнутой системе управления.

В рассматриваемом примере высота и скорость (число Маха) полета ЛА (переменные внешних условий) равны нулю ($ALT=0$, $MN=0$), значения угла отклонения рычага управления двигателем (управляющего воздействия) соответствуют режимам работы ГТД в замкнутой САУ от максимального ($\alpha_{руд}=68^\circ$) до минимального ($\alpha_{руд}=15^\circ$). Четыре переменные управления ($m=4$) соответствуют расходу топлива в основной камере сгорания $G_{то}$, площади критического сечения реактивного сопла $F_{кр}$, углу поворота направляющих аппаратов вентилятора $\varphi_{нав}$ и углу поворота направляющих аппаратов компрессора $\varphi_{нак}$. Пять переменных состояния объекта управления ($n=5$) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя n_v , частоте вращения компрессора двигателя n_k , давлению торможения за компрессором P_k^* ,

давлению торможения за турбиной P_t^* и температуре торможения за турбиной T_t^* .

Будем считать, что если переменные управления u_3^n и u_4^n изменяются, то они изменяются согласованно с переменной управления u_1^n , то есть примерно одновременно эти переменные оказываются на границах (по каждой из них) соседних областей действия разных линейных моделей. При этом любую пару соседних рабочих точек (выбранных установившихся режимов работы ГТД) разделяет (по каждой из этих переменных) не более одной границы соседних областей действия разных линейных моделей. Поэтому для всех этих трех переменных ограничимся рассмотрением только $P_1=9$ выбранных установившихся значений для переменной u_1^n . При этом количество рассматриваемых установившихся значений для переменных u_3^n и u_4^n будет равно соответственно 5 и 7 (в остальных точках они остаются неизменными).

Будем считать также, что переменная управления u_2^n изменяется так, что хотя бы одну пару соседних рабочих точек разделяет (по этой переменной) не одна, а несколько границ соседних областей действия разных линейных моделей, и поэтому для нее также количество выбранных установившихся значений $P_2=9$.

Таким образом, максимально возможное количество установившихся режимов работы в разомкнутой САУ, которые мы могли бы рассматривать при создании кусочно-линейной модели, $P_1 P_2 = 81$. Однако на практике можно ограничиться рассмотрением меньшего числа установившихся режимов.

Рассмотрим 9 установившихся режимов, соответствующих режимам работы в замкнутой САУ: $p_1 p_2 = 98$ ($p_1 p_2 p_3 p_4 = 9899$) максимальный режим при $\alpha_{руд}=68^\circ$, 89 (8989) при $\alpha_{руд}=60^\circ$, 79 (7979) при $\alpha_{руд}=50^\circ$, 69 (6966) при $\alpha_{руд}=40^\circ$, 59 (5915) при $\alpha_{руд}=30^\circ$, 49 (4914) при $\alpha_{руд}=25^\circ$, 39 (3913) при $\alpha_{руд}=20^\circ$, 29 (2912) при $\alpha_{руд}=17^\circ$, 11 (1111) минимальный режим при $\alpha_{руд}=15^\circ$.

Рассмотрим также еще 23 установившихся режима, для которых значения переменных управления близки к значениям этих переменных при переходных процессах в замкнутой САУ: 99 (9999), 19 (1911), 18 (1811), 17 (1711), 16 (1611), 15 (1511), 14 (1411), 13 (1311), 12 (1211), 21 (2112), 31 (3113), 41 (4114), 51 (5115), 52 (5215), 53 (5315), 63 (6366), 64 (6466), 65 (6566), 66 (6666), 67 (6766), 68 (6866), 78 (7879), 88 (8889).

Описание динамической кусочно-линейной модели в данном случае будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{КЛн}} = p_1 p_2 \mathbf{A} \left[\left(\mathbf{x}^{\text{КЛн}} - p_1 p_2 \mathbf{x}^{\text{НЛн}} \right) - p_1 p_2 \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{\text{КЛн}} - p_1 p_2 \mathbf{u}^{\text{НЛн}} \right) \right], \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 : u_1^{\text{КЛн}} \leq_s^1 u_1^{\text{НЛн}}, \\ p_1 &= 2, \dots, 9 : p_1 u_1^{\text{КЛн}} \geq u_1^{\text{КЛн}} > p_1^{-1} u_1^{\text{НЛн}}, \\ p_1 &= 9 : u_1^{\text{КЛн}} >_s^9 u_1^{\text{НЛн}}, \\ p_2 &= 1 : u_2^{\text{КЛн}} \geq_s^1 u_2^{\text{НЛн}}, \\ p_2 &= 2, \dots, 9 : p_2 u_2^{\text{КЛн}} \leq u_2^{\text{КЛн}} < p_2^{-1} u_2^{\text{НЛн}}, \\ p_2 &= 9 : u_2^{\text{КЛн}} <_s^9 u_2^{\text{НЛн}}. \end{aligned}$$

Если в какой-то момент переходного процесса переменные управления оказываются за пределами областей действия выбранных динамических линейных моделей, то используется та модель, которая использовалась до этого момента.

Переходные процессы для определения матриц статической и динамической кусочно-линейных моделей рассчитываются с помощью нелинейной модели ГТД в разомкнутой системе управления для выбранных установившихся режимов.

Переходные процессы для вычисления элементов матриц статической кусочно-линейной модели представляют собой последовательность разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из переменных управления $u_1^{\text{НЛн}}$, $u_2^{\text{НЛн}}$, $u_3^{\text{НЛн}}$, $u_4^{\text{НЛн}}$ и соответствующие отклики перемен-

ных состояния $x_1^{\text{НЛн}}$, $x_2^{\text{НЛн}}$, $x_3^{\text{НЛн}}$, $x_4^{\text{НЛн}}$, $x_5^{\text{НЛн}}$. Ступенчатая функция соединяет установившиеся значения, соответствующие соседним выбранным установившимся режимам. Если переменная управления в пределах области действия данной линейной модели остается неизменной, то используется установившееся значение ближайшей из соседних областей, где переменная управления изменяется. Длительность прямоугольных импульсов и промежутков между импульсами составляет $T=3.75\text{с}$, шаг дискретности $\Delta t=0.025\text{с}$, общее число точек переходных процессов при определении матриц статических линейных моделей равно $N=1201$.

Переходные процессы для оценивания матриц динамической кусочно-линейной модели представляют собой линейные функции по каждой из переменных управления $u_1^{\text{НЛн}}$, $u_2^{\text{НЛн}}$, $u_3^{\text{НЛн}}$, $u_4^{\text{НЛн}}$, которые соединяют их установившиеся значения, соответствующие выбранным установившимся режимам, и отклики переменных состояния $x_1^{\text{НЛн}}$, $x_2^{\text{НЛн}}$, $x_3^{\text{НЛн}}$, $x_4^{\text{НЛн}}$, $x_5^{\text{НЛн}}$. Длительность линейных участков $T=2.5\text{с}$, шаг дискретности $\Delta t=0.025\text{с}$, а общее число точек переходных процессов при оценивании матриц динамических линейных моделей $N=401$. Эти переходные процессы между двумя выбранными установившимися режимами близки к переходным процессам в замкнутой системе.

При оценивании матриц $^{98}\mathbf{A}$, $^{11}\mathbf{A}=^{21}\mathbf{A}$ с помощью (14) выбранные установившиеся режимы, соответственно, 98 и 89, 11 и 21.

При оценивании матриц $^{89}\mathbf{A}$, $^{79}\mathbf{A}$, $^{69}\mathbf{A}$, $^{59}\mathbf{A}$, $^{49}\mathbf{A}$, $^{39}\mathbf{A}=^{29}\mathbf{A}=^{19}\mathbf{A}$, $^{31}\mathbf{A}$, $^{41}\mathbf{A}$, $^{51}\mathbf{A}$, $^{63}\mathbf{A}$, $^{78}\mathbf{A}$ с помощью (15) выбранные установившиеся режимы, соответственно, 99 и 79, 89 и 69, 79 и 59, 69 и 49, 59 и 39, 49 и 19, 11 и 31, 21 и 41, 31 и 51, 43 и 63, 58 и 88.

Так, например, при оценивании матрицы $^{89}\mathbf{A}$ выражение (15) принимает вид

$${}^{89}\mathbf{A} : \min \left\{ \frac{\sum_{k=M+1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k)]^T {}_x\mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=M+1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_N)]^T {}_x\mathbf{W}(t_k)} \right. \\ \left. \frac{[\dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k)]}{[\dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_N)]} \right\}, \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) &= {}^{99}\mathbf{A} \left\{ [\mathbf{x}^{JLn}(t_{k-1}) - {}^{99}_s\mathbf{x}^n] - \right. \\ &\quad \left. {}^{99}_x\mathbf{S}[\mathbf{u}^{HJLn}(t_{k-1}) - {}^{99}_s\mathbf{u}^n] \right\}, \quad k = 1, \dots, M, \\ \dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) &= {}^{89}\mathbf{A} \left\{ [\mathbf{x}^{JLn}(t_{k-1}) - {}^{89}_s\mathbf{x}^n] - \right. \\ &\quad \left. {}^{89}_x\mathbf{S}[\mathbf{u}^{HJLn}(t_{k-1}) - {}^{89}_s\mathbf{u}^n] \right\}, \quad k = M+1, \dots, N \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где ${}^{68}\mathbf{A} = {}^{63}\mathbf{A}$, ${}^{99}\mathbf{A} = {}^{98}\mathbf{A}$,

$$k = 1, \dots, M : {}^9u_1^{HJLn} \geq u_1^{HJLn} > {}^8u_1^{HJLn},$$

$$k = M+1, \dots, N : {}^8u_1^{HJLn} \geq u_1^{HJLn} > {}^7u_1^{HJLn}.$$

Начальные значения элементов матрицы ${}^{89}\mathbf{A}$ равны значениям элементов матрицы ${}^{99}\mathbf{A}$.

Соответственно, при оценивании матрицы ${}^{78}\mathbf{A}$ выражение (15) принимает вид

$${}^{78}\mathbf{A} : \min \left\{ \frac{\sum_{k=M+1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k)]^T {}_x\mathbf{W}(t_k)}{\sum_{k=M+1}^N [\dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_N)]^T {}_x\mathbf{W}(t_k)} \right. \\ \left. \frac{[\dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k)]}{[\dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_k) - \dot{\mathbf{x}}^{HJLn}(t_N)]} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) &= {}^{68}\mathbf{A} \left\{ [\mathbf{x}^{JLn}(t_{k-1}) - {}^{68}_s\mathbf{x}^n] - \right. \\ &\quad \left. {}^{68}_x\mathbf{S}[\mathbf{u}^{HJLn}(t_{k-1}) - {}^{68}_s\mathbf{u}^n] \right\}, \quad k = 1, \dots, M, \\ \dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) &= {}^{78}\mathbf{A} \left\{ [\mathbf{x}^{JLn}(t_{k-1}) - {}^{78}_s\mathbf{x}^n] - \right. \\ &\quad \left. {}^{78}_x\mathbf{S}[\mathbf{u}^{HJLn}(t_{k-1}) - {}^{78}_s\mathbf{u}^n] \right\}, \quad k = M+1, \dots, N, \\ \dot{\mathbf{x}}^{JLn}(t_k) &= {}^{88}\mathbf{A} \left\{ [\mathbf{x}^{JLn}(t_{k-1}) - {}^{88}_s\mathbf{x}^n] - \right. \\ &\quad \left. {}^{88}_x\mathbf{S}[\mathbf{u}^{HJLn}(t_{k-1}) - {}^{88}_s\mathbf{u}^n] \right\}, \quad k = N+1, \dots, L \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

где ${}^{88}\mathbf{A} = {}^{89}\mathbf{A}$,

$$k = 1, \dots, M : {}^6u_1^{HJLn} \geq u_1^{HJLn} > {}^5u_1^{HJLn},$$

$$k = M+1, \dots, N : {}^7u_1^{HJLn} \geq u_1^{HJLn} > {}^6u_1^{HJLn},$$

$$k = N+1, \dots, L : {}^8u_1^{HJLn} \geq u_1^{HJLn} > {}^7u_1^{HJLn}.$$

Начальные значения элементов матрицы ${}^{78}\mathbf{A}$ равны значениям элементов матрицы ${}^{88}\mathbf{A}$.

Кроме того, что в кусочно-линейной модели ${}^{99}\mathbf{A} = {}^{98}\mathbf{A}$, ${}^{68}\mathbf{A} = {}^{63}\mathbf{A}$, ${}^{88}\mathbf{A} = {}^{89}\mathbf{A}$, считается также, что ${}^{12}\mathbf{A} = {}^{13}\mathbf{A} = {}^{14}\mathbf{A} = {}^{15}\mathbf{A} = {}^{16}\mathbf{A} = {}^{17}\mathbf{A} = {}^{18}\mathbf{A} = {}^{19}\mathbf{A}$ и ${}^{53}\mathbf{A} = {}^{52}\mathbf{A} = {}^{51}\mathbf{A}$, ${}^{67}\mathbf{A} = {}^{66}\mathbf{A} = {}^{65}\mathbf{A} = {}^{64}\mathbf{A} = {}^{63}\mathbf{A}$.

Рассмотрим для примера оценивание элементов матрицы ${}^{89}\mathbf{A}$. Линейные функции для оценивания этой матрицы по переходным процессам пересекают границы областей действия линейных моделей ${}^{99}\mathbf{A}$ и ${}^{89}\mathbf{A}$.

Вначале оцениваются элементы ${}^{89}a_{11}$, ${}^{89}a_{12}$, ${}^{89}a_{21}$, ${}^{89}a_{22}$. При этом остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а постоянная весовая матрица ${}_x\mathbf{W} = \text{diag}\{1, 1, 0, 0, 0\}$. Затем оцениваются элементы ${}^{89}a_{31}$, ${}^{89}a_{32}$, ${}^{89}a_{33}$, ${}^{89}a_{34}$, ${}^{89}a_{41}$, ${}^{89}a_{42}$, ${}^{89}a_{43}$, ${}^{89}a_{44}$. При этом элементы ${}^{89}a_{11}$, ${}^{89}a_{12}$, ${}^{89}a_{21}$, ${}^{89}a_{22}$ считаются известными, остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а ${}_x\mathbf{W} = \text{diag}\{0, 0, 1, 1, 0\}$. Наконец, оцениваются элементы ${}^{89}a_{51}$, ${}^{89}a_{52}$, ${}^{89}a_{53}$, ${}^{89}a_{54}$, ${}^{89}a_{55}$. При этом элементы ${}^{89}a_{11}$, ${}^{89}a_{12}$, ${}^{89}a_{21}$, ${}^{89}a_{22}$, ${}^{89}a_{31}$, ${}^{89}a_{32}$, ${}^{89}a_{33}$, ${}^{89}a_{34}$, ${}^{89}a_{41}$, ${}^{89}a_{42}$, ${}^{89}a_{43}$, ${}^{89}a_{44}$ считаются известными, остальные элементы матрицы считаются нулевыми, а ${}_x\mathbf{W} = \text{diag}\{0, 0, 0, 0, 1\}$.

На границе областей действия разных линейных моделей можно уменьшить резкое

изменение первых производных переменных состояния с помощью переменных весовых матриц.

Матрицы динамических линейных моделей для соседних областей совпадают, если не удастся получить приемлемую оценку для одной из этих областей.

Для того, чтобы собственные значения матриц были вещественными и отрицательными, при оценивании используются соответствующие ограничения.

Каждый раз задача нелинейного программирования (15) решается до тех пор, пока целевая функция не перестанет уменьшаться. При этом количество вычислений целевой функции $100 \div 1000$.

На рис. 1÷5 представлены результаты проверки полученной кусочно-линейной модели на примере переходных процессов, соответствующих ступенчатому изменению угла отклонения рычага управления двигателем $\alpha_{руд}$ от значения, соответствующего максимальному режиму работы ($\alpha_{руд}=68^\circ$) до значения, соответствующего минимальному режиму работы ($\alpha_{руд}=15^\circ$) и обратно, то есть на примере сброса и разгона в замкнутой системе управления. При этом число точек переходных процессов нормированных переменных состояния $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n$ (соответствуют $n_b, n_k, P_k^*, P_t^*, T_t^*$) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели $N=601$. Ошибки кусочно-линейной модели, рассчитанные по каждой из переменных состояния в соответствии с (14), не превышают 4%.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика построения кусочно-линейной модели нелинейного объекта управления. В качестве исходных данных для оценивания матриц статических и динамических линейных моделей используются переходные процессы нелинейной модели объекта в разомкнутой системе управления.

Переходные процессы переменных управления и первых производных переменных состояния, используемые для оценивания, пересекают границы областей действия разных линейных моделей.

Разработанный метод основан на применении вычислительных алгоритмов нелинейного программирования, которые позволяют накладывать ограничения на собственные значения линейных моделей, чтобы обеспечить их устойчивость и исключить кратные собственные значения.

Результаты данной работы могут быть применены при разработке систем управления ГТД, а также другими нелинейными объектами, которые в широком диапазоне режимов работы приближенно описываются с помощью кусочно-линейных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лейбов Р.Л.** Кусочно-линейная модель нелинейного объекта // International Journal for Computational and Structural Engineering. 2012. Vol. 8, Issue 1. P. 96–107.
2. **Лейбов Р.Л.** Системы с неопределенными собственными значениями. – М.: АСВ, 2006. – 184 с.
3. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Лейбов Роман Львович, Московский государственный строительный университет, кафедра информатики и прикладной математики, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26, e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

Roman L. Leibov, Department of Applied Mathematics and Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Highway, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: r_leibov@mtu-net.ru.

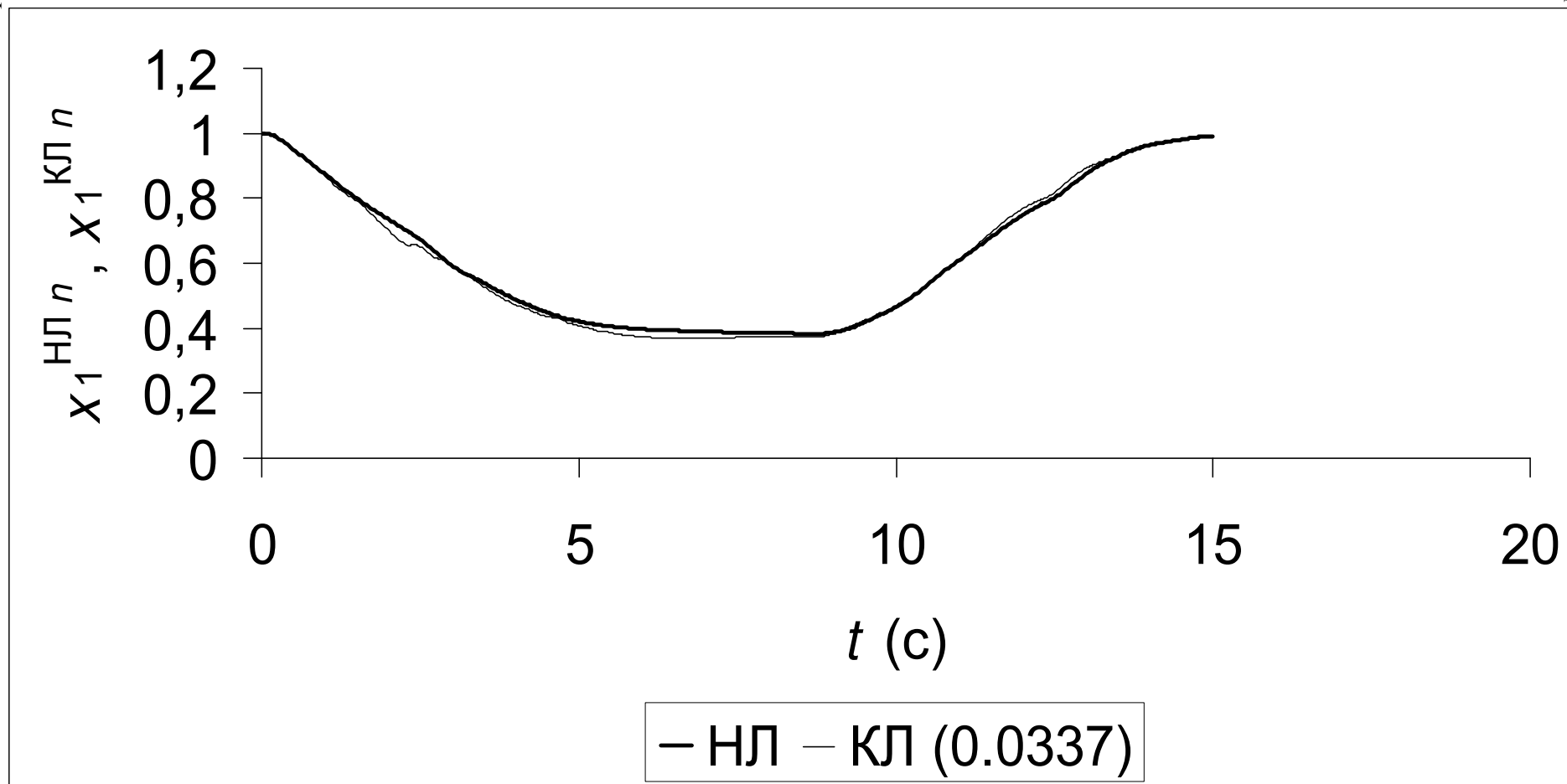


Рисунок 1. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_1^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

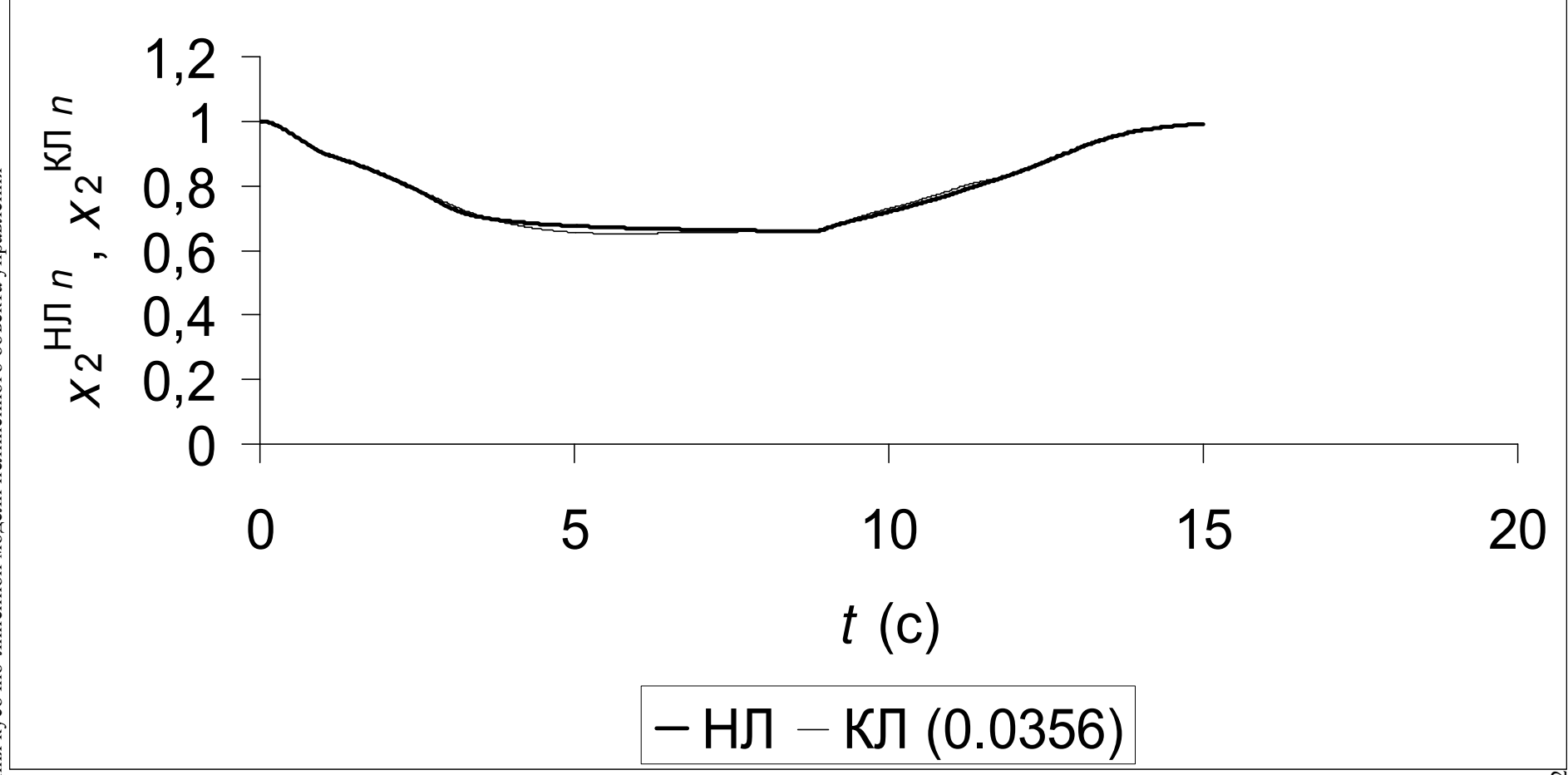


Рисунок 2. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_2^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

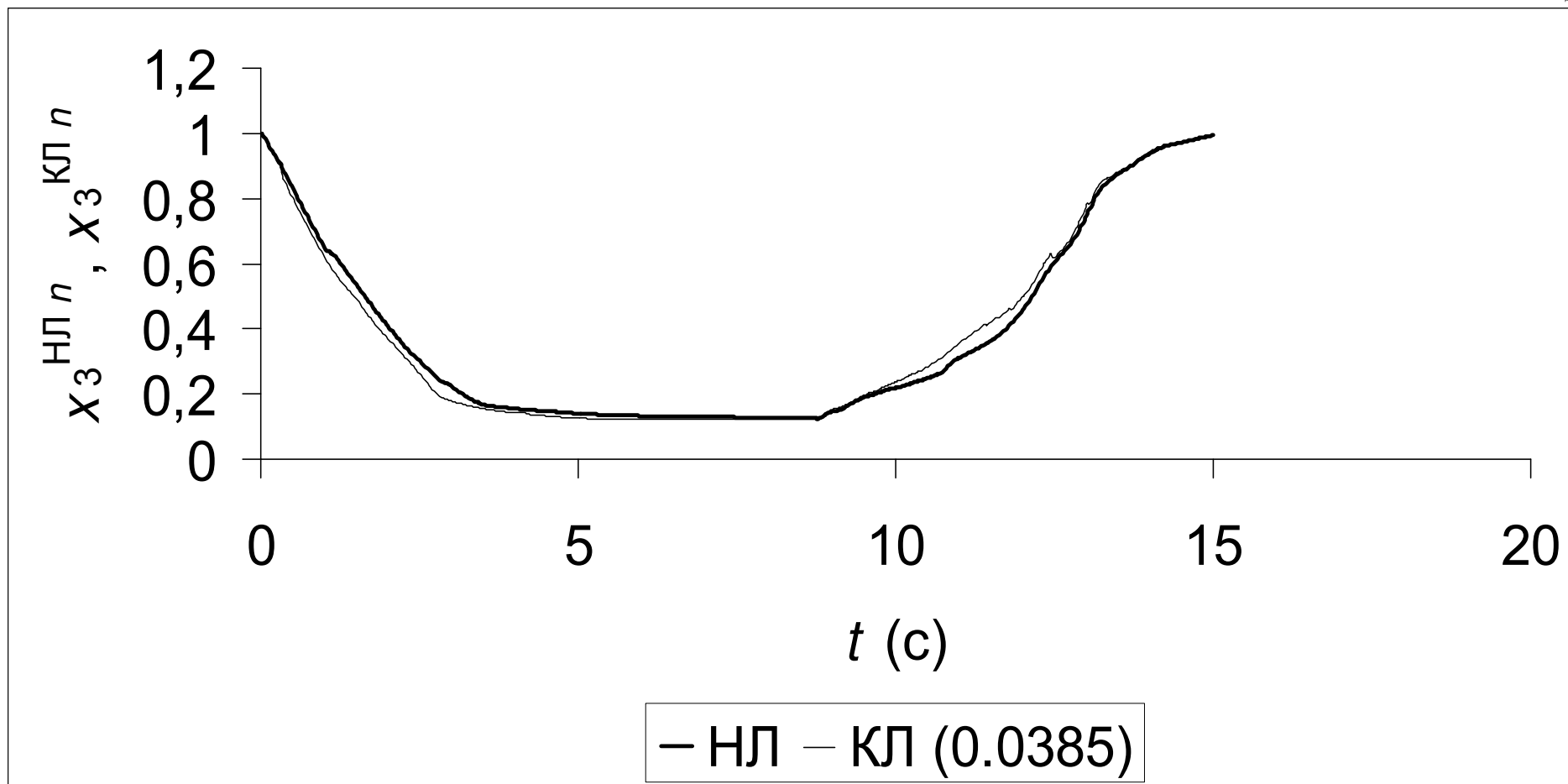


Рисунок 3. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_3^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

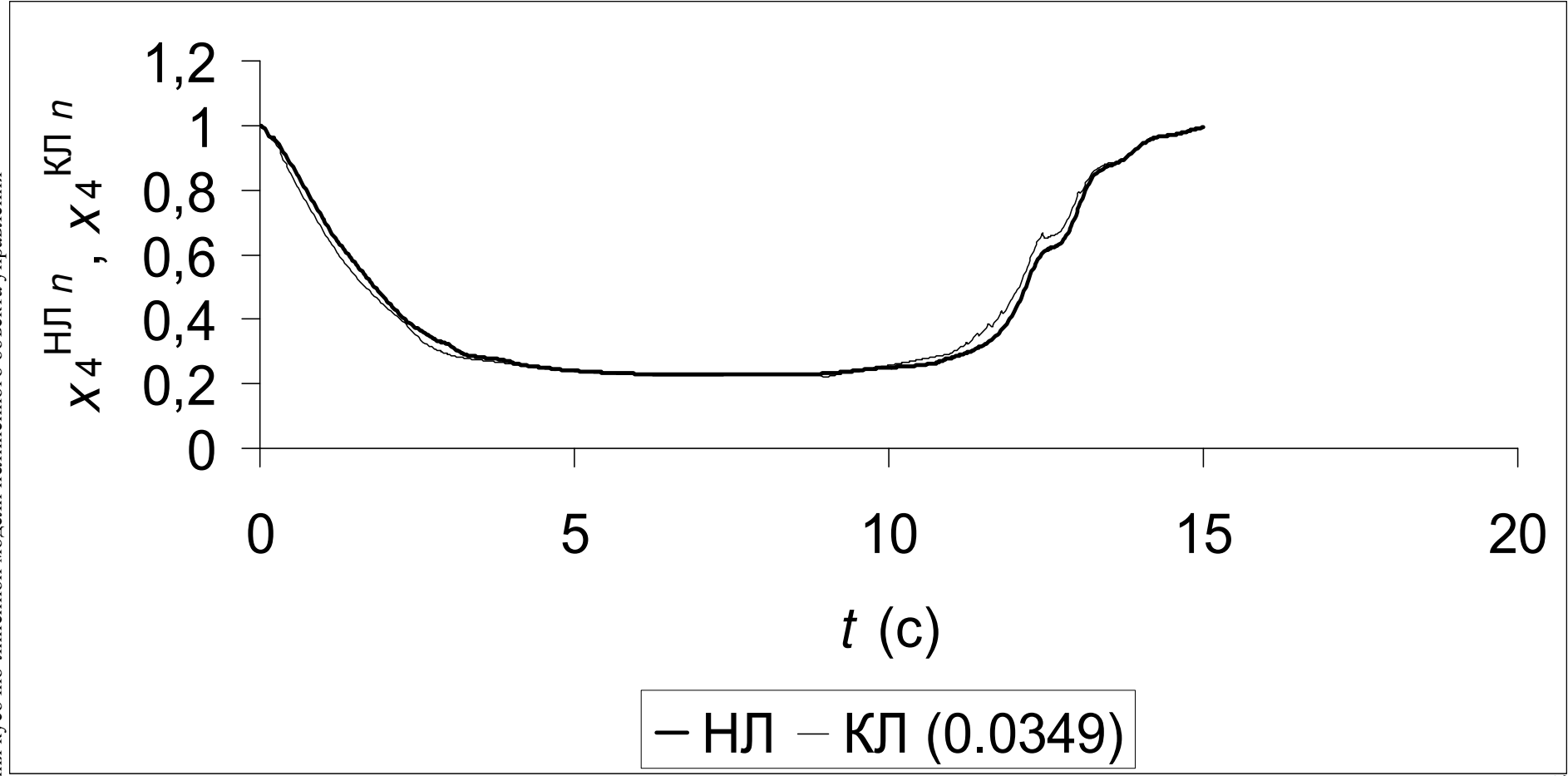


Рисунок 4. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_4^n (соответствует P_m^) нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.*

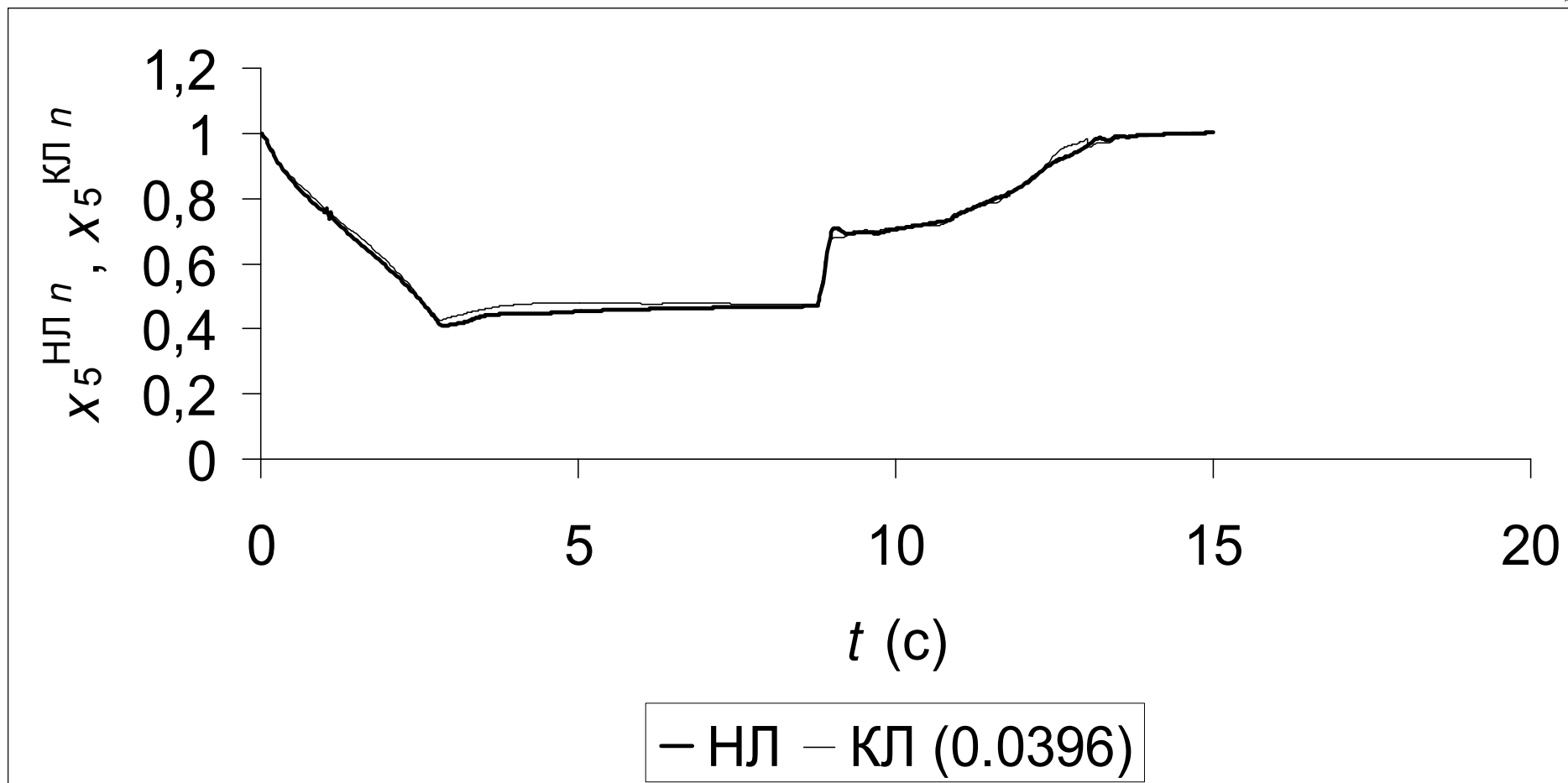


Рисунок 5. Переходные процессы нормированной переменной состояния x_5^n нелинейной (НЛ) модели и кусочно-линейной (КЛ) модели в замкнутой системе.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗОК НА ЗДАНИЯ И ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В Г. МОСКВЕ

В.И. Прокопьев, М.С. Хлыстунов, Ж.Г. Могилюк

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Рассматриваются результаты статистического анализа эволюции температурных процессов на территории Москвы в течении последних 35 лет. Показан статистический рост проявлений глобального потепления как в области низких так и высоких температур. В статье приведены статистические закономерности роста рисков сверхнормативных отклонений максимальной, минимальной и средней суточной температуры от ее средних многолетних значений.

Ключевые слова: здания и сооружения, климатические нагрузки, минимальная температура, максимальная температура, средняя суточная температура, статистический анализ

STATISTICAL ANALYSIS OF THE THERMAL LOADS EVOLUTION ON BUILDINGS AND GEOECOLOGICAL SYSTEMS IN MOSCOW

Valery I. Prokopjev, Mikhail S. Hlystunov, Zhanna G. Mogiljuk

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: Discusses the statistical analysis results of the thermal processes evolution in the Moscow territory within the last 35 years. Shows a statistical increase in the global warming manifestations as in the area of low and high temperatures. The article presents the excessive deviations risks growth statistical regularities of the maximum, minimum and average daily temperature from its multiyear averages.

Key words: buildings, constructions, climatic loads, minimum temperature, maximum temperature, the average daily temperature, statistical analysis

ВВЕДЕНИЕ

Глобальные климатические изменения на урбанизированных территориях Земли в последнее десятилетие находятся под пристальным вниманием мирового научного сообщества, международных и правительственных организаций. Ведущие научные центры США, России, ЕС, Японии, Китая, Индии и других государств и специальные комиссии ООН в настоящее время ведут комплексные исследования и поиски причинно-следственных связей, закономерностей и механизмов, ответственных за глобальное по-

тепление на планете.

Последние результаты таких исследований, выполненных учеными Питтсбургского, Мадридского и Потсдамского университетов, позволили им прийти к выводу, что жара, подобная той, что наблюдалась в России летом 2010 года, через 30 лет охватит площади в четыре раза большие. А к концу XXI века от нее будет страдать уже 85% суши. Если не принимать никаких мер сейчас, то во второй половине XXI века площадь суши, подверженной аномально высоким температурам, будет возрастать примерно на 1% в год. Еще более экстремальные температуры,

которые сейчас практически не наблюдаются, к этому же моменту будут отмечаться на 60% суши.

Глобальное потепление создает не менее глобальные проблемы не только в плане продовольственной безопасности населения Земли, но также и в плане жизнеобеспечения городского населения и адаптации строительной деятельности к новым климатическим реалиям на глубокую перспективу градостроительного планирования.

Важность учета этих климатических процессов в строительной деятельности также усиливается целым рядом процессов и тенденций в природе и техносфере, в отечественной и мировой строительной индустрии [1,2].

Во-первых, к таким процессам необходимо отнести опасную эволюцию интенсивности колебаний средних, максимальных и минимальных температур практически на всех урбанизированных территориях планеты. В ряде исследований эти колебания и новые температурные рекорды объясняются техногенным ростом концентрации в атмосфере парниковых газов в результате интенсивного роста мощности мировой индустрии. Оппонентами этой теории выдвигаются на первый план естественные эндогенные механизмы изменения климата на Земле, связанные с не менее грозными глобальными геолого-геофизическими и океаническими процессами.

В последнее время получила определенное статистическое подтверждение и теория экзогенных механизмов глобальных климатических изменений на планете космогенного происхождения, основанная на гравитационном, в том числе резонансном, механизме взаимодействия объектов солнечной системы между собой и с Солнцем [3-7]. Другая космогенная теория базируется на орбитальном перемещении солнечной системы в область космического пространства с более высокой плотностью, например, в результате её вхождения в очередное облако межгалактической космической пыли.

Во-вторых, в последнее десятилетие одной из наиболее острых проблем промышленного и гражданского строительства и ЖКХ РФ является значительный износ строительных конструкций и инженерных коммуникаций, включая деградацию геотехнической надежности их оснований. Наряду с этим в строительной индустрии России происходит освоение широкого спектра новых строительных материалов, технологий проектирования и новых уникальных архитектурных проектов, разработка которых велась для других климатических зон планеты, а также была начата и завершена в девяностые годы XX века, когда проблема глобального изменения климата не стояла так остро и актуально.

Ситуация критического роста актуальности нашла свое отражение и в длительных сроках действия предшествующей нормативной документации и ее вынужденной модернизации в связи с глобальными изменениями климата. Например, СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» без существенных изменений и дополнений применялся с 1985 года в течение 26 лет, вплоть до 2011 года, пока не вступил в действие свод правил СП 20.13330.2011 [8], учитывающий текущие климатические реалии.

Температурные воздействия на строительные конструкции зданий и сооружений относятся к числу важных климатических нагрузок, учитываемых при проектировании зданий и сооружений [8]. В частности, в картах температурного зонирования России в своде правил [8] даются среднемесячные температуры в самом холодном месяце (январь) и в самом теплом месяце (июле), а также их максимальные отклонения в январе. Например, для города Москвы эти данные имеют следующие значения:

- в январе -10°C (Карта 5. Районирование территории Российской Федерации по средней месячной температуре воздуха [8]);
- в июле $+20^{\circ}\text{C}$ (Карта 6. Районирование территории Российской Федера-

ции по средней месячной температуре воздуха [8]);

- отклонения в январе 20°C Карта (7. Районирование территории Российской Федерации по отклонениям средней температуры воздуха наиболее холодных суток от средней месячной температуры [8]).

Однако данные этих карт, обладая определенной конкретностью в качестве исходных данных для проектных работ, несколько отличаются от перечней температурных параметров, приведенных в нормативных документах по строительной климатологии, например, в СНиП 23-01-99* "Строительная климатология" [9]. Вместе с тем даже в этом документе [9], несмотря на существенно расширенный перечень приведенных температурных параметров, отсутствуют данные, учитывающие эволюцию температурных нагрузок на строительных конструкции в течение жизненного цикла зданий в связи с продолжающимся глобальным потеплением, включая изменение частоты или количества переходов температуры воздуха через ноль. Этот параметр является важным с точки зрения оценки рисков сверхпроектного износа строительных конструкций и деградации геоэкологической системы оснований в течение жизненного цикла зданий за счет накопления дефектов в результате многоцикловых размораживаний.

Согласно действующему своду правил температурные воздействия отнесены к кратковременным климатическим нагрузкам на строительные конструкции, наряду с ветровыми, снеговыми и гололедными. Вместе с тем такие длительные нагрузки, как воздействия, обусловленные деформациями основания, не сопровождающимися коренным изменением структуры грунта и оттаиванием вечномёрзлых грунтов, а также воздействия, обусловленные изменением влажности, усадкой и ползучестью материалов, обладают заметной и требующей учета параметрической зависимостью от колебаний температуры, влияющих на интенсивность процес-

сов тепломассопереноса, конвекционных и термодиффузионных процессов.

Учет температурных нагрузок при проектировании зданий и сооружений в свode правил рекомендуется проводить с использованием карт районирования территории Российской Федерации по средней месячной температуре воздуха в январе и в июле, а также по отклонениям средней температуры воздуха наиболее холодных суток от средней месячной температуры в январе (карты 5,6 и 7 Приложения Ж СП 20.13330.2011). Коэффициент надежности по нагрузке γ_f для температурных климатических воздействий рекомендуется принимать равным 1,1. Этот коэффициент также можно интерпретировать, как необходимость учитывать существование рисков превышения уровня статистических температурных нагрузок на 10%.

В связи с этим в настоящей статье приведены результаты статистического анализа эволюции температурных процессов на примере г. Москвы за последние 35 лет, который в дальнейшем будут использоваться авторами для моделирования эволюции температурных рисков ускоренного циклического износа строительных конструкций на глубину градостроительного планирования (до 100 лет и более) и будут представлены в следующей серии статей по данной проблеме.

Учитывая, что глобальные изменения климата и связанные с ним эволюционные вариации температуры проявляются в виде новых рекордов по температурным максимумам и минимумам температуры с некоторым сезонным смещением относительно января и июля в настоящей статье авторы приводят результаты статистического анализа вариаций температуры в различных географических точках планеты с целью оценки эволюции уровня рисков достижения ими новых экстремальных значений и применения, в дальнейшем, этих оценок при проектировании или оценке рисков сверхнормативного износа строительных конструкций.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ

В соответствии с п.п.13.2 и 13.4 свода правил СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия» [8] при проектировании зданий и сооружений должны учитываться средние суточные температуры наружного воздуха в теплое и холодное время года и их отклонения от средних месячных температур согласно картам 5,6 и 7 Приложения Ж.

Однако в своде правил не подлежат учету и не отражены в картах температурного районирования территории РФ риски реализации экстремальных значений этих температур в связи с глобальными изменениями климата, например, на проектный период эксплуатации зданий (более 25 лет) или на период градостроительного планирования (до 100 лет и более).

В связи с этим возмещение возможного ущерба при аварийной реализации таких рисков полностью ложится на собственника здания и на страховую компанию. Наряду с этим ни в нормативной, ни в научно-технической литературе до настоящего времени не приводится результатов исследований, иных сведений и методических предложений по решению рассматриваемой проблемы в практическом плане.

В настоящее время используется несколько различных подходов к определению меры риска. В экономике за меру риска, как правило, принимается произведение вероятности реализации «нежелательного» события на сумму ущерба от его последствий.

При таком подходе мера риска, в том числе природного, например температурного, для отдельного класса событий, например, увеличение расходов на отопление или кондиционирование внутренних помещений зданий, определяется по формуле:

$$R=P \times C,$$

где P — вероятность события, а C — сумма ущерба от определенного вида его последст-

вий. Полный риск определяется как сумма рисков по каждому виду последствий.

Учитывая, что при сверхпроектных температурных нагрузках ущерб может проявляться не только в дополнительных затратах на кондиционирование, но и в виде ускоренного износа строительных конструкций и инженерных сетей, снижения эксплуатационных и технических характеристик здания, в общем случае удобнее применять меру, используемую в техническом анализе риска, которая, как правило, сводится к оценке вероятности реализации нежелательного или опасного события. При техническом подходе мерой риска R является безразмерная количественная характеристика опасности (от 0 до 1), определяемая частотой реализации опасностей, то есть это отношение фактического числа случаев реализации опасных событий n к максимально возможному числу таких событий N за учитываемый период времени:

$$R = \frac{n}{N}. \quad (1)$$

Используя определение меры согласно выражению (1), техническая оценка температурных рисков для зданий и сооружений может быть, например произведена по формуле:

$$R(t) = R_{кр} + R_o = \frac{n(\Delta t_{кр})}{N} + \frac{n(t_o)}{N}, \quad (2)$$

где $R_{кр}$, $n(\Delta t_{кр})$, R_o , $n(t_o)$ — соответственно, вероятность и фактическое число событий сверхпроектного отклонения температуры ($\Delta t_{кр}$) от средних многолетних значений, вероятность и число событий сверхпроектного числа переходов температуры через нулевое значение (t_o) при максимально возможном за учитываемый период времени суммарном числе таких событий N .

Первый показатель $R_{кр}$, можно интерпретировать, например, как риск переохлаждения или перегрева здания, второй как риск раз-

морозивания систем водоснабжения или ускоренного износа инженерных сетей и материалов строительных конструкций.

В настоящей статье мы не будем оценивать, непосредственно, сами риски и оставим решение этой задачи специалистам, собственно, в области рисков, а проведем статистический анализ эволюции температурных процессов на территории г.Москвы за период с 1972 по 2009 годы. В качестве базового массива данных используем данные метеонаблюдений максимальных, минимальных и среднесуточных температур за период с 01.01.1973 по 31.08.1987 (5355 суток), а в качестве массива данных о текущем состоянии эволюции климатических процессов – данные аналогичных метеонаблюдений за период с 01.01.1995 по 31.08.2009 (5355 суток), после падения кометы Шумейкера-Леви на Юпитер. Таким образом длительность анализируемого эволюционного периода в данном случае будет составлять 23 года.

На рис.1 представлены результаты статистического анализа эволюции средней суточной температуры в Москве за период 01.01.1973 по 31.08.2009.

Сравнительный анализ эволюции среднесуточных температур в г.Москве за 23 года на рис.1а) подтверждает круглогодичное проявление процесса глобального потепления, как в зимний или холодный (выделено синей заливкой), так и в летний или теплый периоды (выделено красной заливкой).

Вероятность или технический риск положительного отклонения температуры от многолетних базовых за 23 года вырос практически на 3%. Наряду с этим на рис.1а) наблюдается эволюционное смещение максимума вероятности отклонений среднесуточных температур на 1,2°C в область более высоких ее значений.

Результаты статистического анализа эволюции минимальной суточной температуры в Москве за период 01.01.1973 по 31.08.2009 представлены на рис.2.

Аналогичная тенденция в течение 23 лет наблюдается (рис.2а) и для эволюции минимальных суточных температур в г.Москве. Согласно графикам рис.2а и рис.2в наблюдается проявление потепления в результате повышения минимальных суточных температур в диапазоне ниже -8°C и выше +12,5 °C. Также подтверждается круглогодичное проявление процесса глобального потепления, как в зимний или холодный (выделено синей заливкой), так и в летний или теплый периоды (выделено красной заливкой).

Вероятность или технический риск положительного отклонения минимальных температур от многолетних базовых за 23 года вырос практически на 1,5%. Наряду с этим наблюдается эволюционное смещение максимума вероятности отклонений минимальных температур (рис.2а) более чем на 1°C в область более высоких ее значений.

Результаты статистического анализа эволюции максимальной суточной температуры в Москве за период 01.01.1973 по 31.08.2009, представленные на рис.3, подтверждают наличие проявлений глобального потепления в эволюции минимальных и среднесуточных температур. Причем максимум вероятности отклонений (рис.3б,г) практически вырос до 1% и сместился с -1°C до +2°C в сторону положительных, что в сочетании с положением максимума для среднесуточных (около 0°C на рис. 1а,в) и минимальных (менее 0°C на рис. 2а,в) температур позволяет утверждать о повышении риска роста частоты обледенений и циклических размораживаний, как внешней поверхности стеновых ограждений, так и геоэкологических систем приповерхностного слоя оснований зданий, сооружений и транспортных коммуникаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема износа инженерных коммуникаций, строительных конструкций зданий и сооружений, как в России, так и за рубежом,

существенно обостряется не прогнозируемым ранее ростом интенсивности малоизученных ранее аварийно опасных климатических процессов и, как следствие, ненормированных сверхпроектных нагрузок и воздействий на здания, сооружения. Особое место среди таких нагрузок занимают колебания температуры окружающей строительные конструкции атмосферы, а также приповерхностного слоя геозкологической системы оснований.

Обобщенные результаты статистического анализа температурных проявлений глобального изменения климата показывают, что наибольшую угрозу для строительных конструкций и геозкологических систем оснований представляют не только глобальное потепление и, собственно, связанное с ним общее повышение температуры, но и рост колебательности суточных и межсезонных температурных процессов. Например, интенсивность отклонений минимальных суточных температур за 23 года изменилось на $1,25^{\circ}\text{C}$, а максимальных - на $2,6^{\circ}\text{C}$, то есть размах колебаний вырос практически на $1,3^{\circ}\text{C}$. При сохранении такой тенденции на текущий период градостроительного планирования (например, 100 лет) вполне реален риск роста интенсивности этих колебаний вплоть до 6°C , а также рост вероятности реализации событий превышения максимальными температурами многолетнего уровня на 10°C .

Такое и вполне вероятное развитие процесса глобального потепления не может оставаться без внимания инвесторов, саморегулируемых организаций, собственников строительных объектов, управляющих и энергетических компаний, страховщиков и, в первую очередь, муниципальных, региональных и федеральных служб регулирования и планирования градостроительной деятельности. Эта проблема, как в России, так и за рубежом, существенно обостряется не прогнозируемым ранее ростом интенсивности и иных, аварийно опасных техногенных и природных климатических и геолого-геофизических процессов и факторов, которые являются причиной реализации новых и, как следст-

вие, ненормированных сверхпроектных нагрузок и воздействий на здания, сооружения и геозкологические системы урбанизированных территорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Метод и алгоритм оценки снижения остаточного ресурса надежности элементов строительных конструкций зданий и сооружений. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.196-201
2. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Анализ рисков геодеформационных проявлений вибросейсмических процессов в основании турбинного корпуса АС. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.215-219
3. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. Явление космогенной эволюции интенсивности глобальных вариаций максимальных и среднесуточных температур на урбанизированных территориях. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.68-73
4. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Метод и алгоритм оценки снижения остаточного ресурса надежности элементов строительных конструкций зданий и сооружений. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.196-201.
5. **Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г.** Анализ рисков геодеформационных проявлений вибросейсмических процессов в основании турбинного корпуса АС. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с.215-219.
6. **Теличенко В.И., Хлыстунов М.С., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г.** Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. Явление космогенной эволюции интенсивности глобальных вариаций максимальных и среднесуточных температур на урбанизированных территориях. – М.: АСВ, Вестник МГСУ, №2, том 2, с. 68-73.

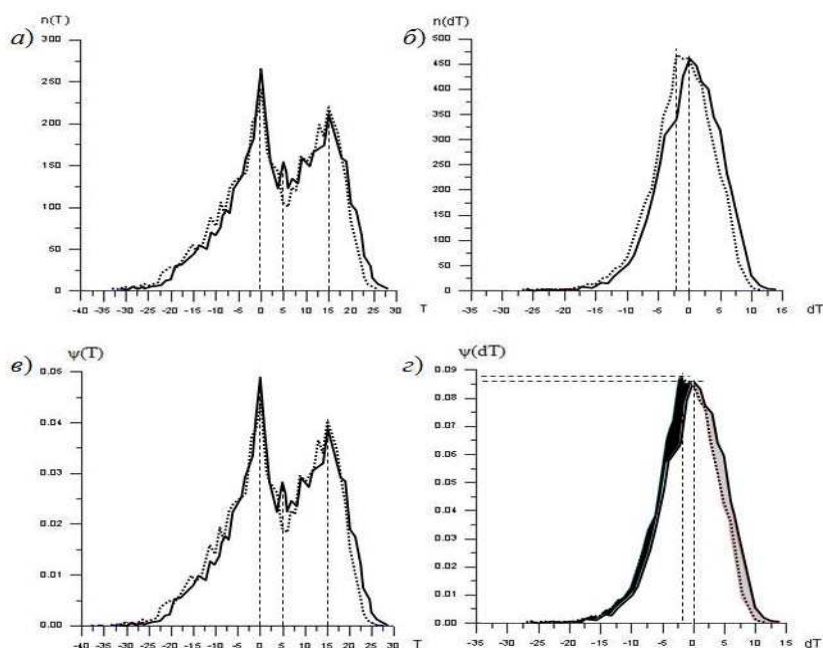


Рисунок 1. Кривые распределения (а) и плотно плотности вероятности (в) событий реализации среднесуточных температур, и их отклонений (б,г) для многолетних значений в г. Москве: пунктиром выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1973 по 31.08.1987; непрерывной линией выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1995 – 31.08.2009

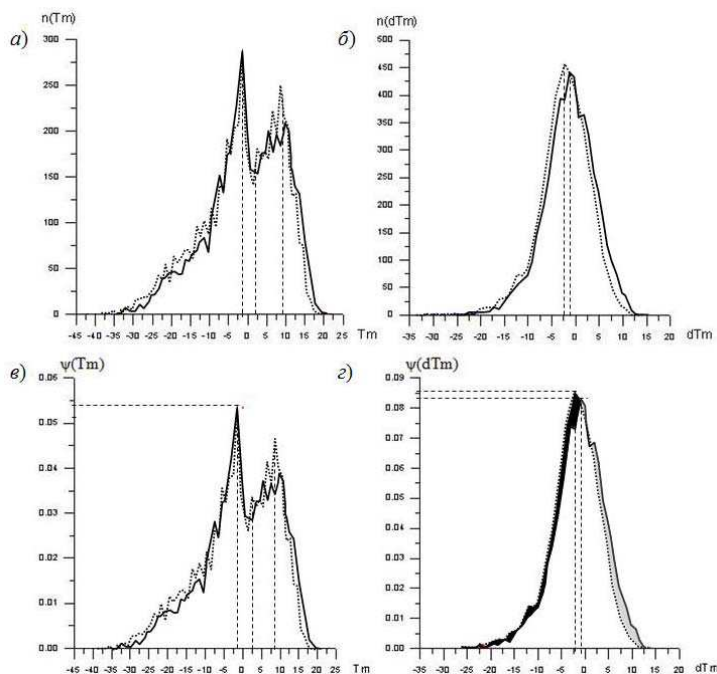


Рисунок 2. Кривые распределения (а) и плотности вероятности (б) событий реализации минимальных температур, и их отклонений (в,г) для многолетних значений в г. Москве: пунктиром выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1973 по 31.08.1987; непрерывной линией выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1995 – 31.08.2009

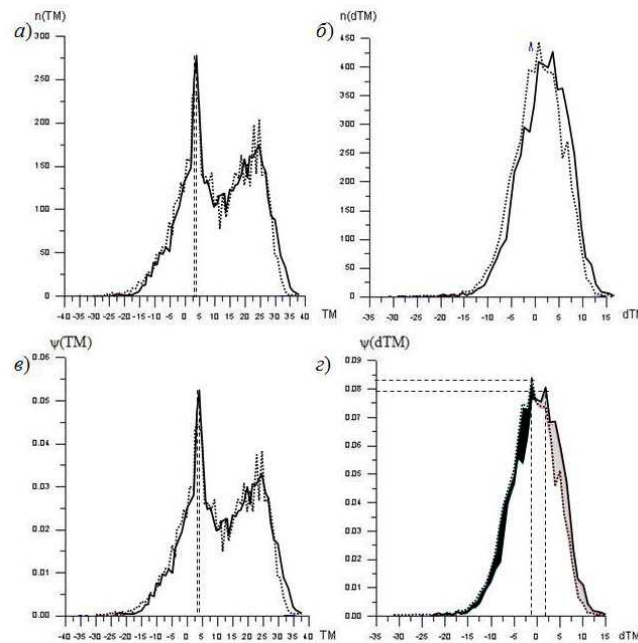


Рисунок 3. Кривые распределения (а) и плотности вероятности (б) событий реализации максимальных температур, и их отклонений (в,г) для многолетних значений в г. Москве: пунктиром выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1973 по 31.08.1987; непрерывной линией выделены кривые по данным за 5355 суток с 01.01.1995 – 31.08.2009

7. Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Могилюк Ж.Г. Спектральные закономерности космогенной эволюции интенсивности глобальных колебаний сейсмической активности на Земле. – М.: Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 11. С. 30-30.
8. Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г. Спектральные закономерности глобальных аэродинамических проявлений космогенных процессов. –М.: Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 12. С. 52-52.
9. Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г. Спектральные закономерности космогенной эволюции интенсивности глобальных колебаний максимальных и среднесуточных температур. – М.: Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 12. С. 53-53.
10. Хлыстунов М.С., Подувальцев В.В., Прокопьев В.И., Могилюк Ж.Г. Спектральные закономерности космогенной эволюции интенсивности глобальных колебаний ежедневного количества осадков. –М.: Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 12. С. 54-54.
11. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: Минрегион РФ, 2011.

Прокопьев Валерий Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(499) 183-59-94, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Хлыстунов Михаил Сергеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной механики и математики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, тел..факс: +7(495) 583-07-65, e-mail: mcxmgusu@mail.ru.

Могилюк Жанна Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики и математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,
e-mail: ghanna-2008@bk.ru

Valery I. Prokopiev, Department of Applied Mathematics Information Technology, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: viprokopiev@mail.ru.

Michail S. Hlystunov, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA, e-mail: mcxmgusu@mail.ru.

Zhanna G. Mogiljuk, Department of Applied Mechanics and Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yroslavskoe Shosse, 129337, Moscow,
e-mail: zhanna-2008@bk.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА ПО РАСЧЕТУ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВЫХ ПЛОТИН: ОПЫТ СОЗДАНИЯ, МЕТОДИКИ И АЛГОРИТМЫ

М.П. Саинов

Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Статья посвящена особенностям расчётов напряжённо-деформированного состояния (НДС) плотин и их оснований, в ней описаны проблемы, возникающие при численном решении подобных задач, а также апробированные пути их решения.

В статье описана методика расчётов НДС плотин, которая реализована автором в вычислительной программе «NDS-N», созданной и используемой на кафедре гидротехнических сооружений Московского государственного строительного университета. В основе программы лежит метод конечных элементов. Программа предназначена для ведения расчётов НДС с учётом нелинейного характера деформирования материалов плотины, а также с учётом нелинейных эффектов взаимодействия жёстких негрунтовых конструкций между собой и с грунтовым массивом. Нелинейность деформирования грунта может описываться моделью профессора Рассказова Л.Н. и моделью Кулона-Мора. Модель Кулона используется и для описания работы швов (трещин) на сдвиг. Программа позволяет вести расчёты НДС с учётом истории его формирования, т.е. учитывать последовательность возведения и нагружения сооружения.

Значительная часть статьи посвящена проблемам использования численных методов для решения нелинейных задач НДС – проблеме сходимости получаемых решений к точным, проблеме сходимости итерационных процессов, а также путям решения этих проблем. Проблема сходимости решения возникает именно в нелинейных задачах, она состоит в том, что при решении возможны случаи, когда последовательность итерационного процесса (ход решения) влияет на получаемый результат. Такой эффект получается при применении метода локальных вариаций для поиска неизвестных перемещений конструкции, а также при использовании граничных условий в перемещениях. Рекомендуется не изменять деформативные характеристики в процессе решения, а учёт нелинейности производить путём деления этапа нагружения на ряд подэтапов, на каждом из которых следует изменять деформативные свойства материалов.

Проанализирована сходимость итерационного процесса метода переменного вектора сил при различном характере изменения деформативных свойств грунта в процессе нагружения. Показано, что расходимость может иметь место, если при изменении НДС происходит резкое снижение деформируемости материала. Для сходимости необходимо, чтобы итерационный процесс приближения к решению шёл монотонно, в одном направлении - от текущего напряжённого состояния к требуемому, без скачков. Это особенно важно в случаях, если помимо нелинейности изменения деформативных свойств учитывается нелинейность, вызванная хрупким разрушением материала. Хрупкое разрушение происходит в виде резкого скачка и необратимо, что неблагоприятно сказывается на ход итерационного процесса и на его сходимость к точному решению.

Кроме того, автором предложен оригинальный способ разграничения области упругого и упруго-пластического деформирования грунта (условие разгрузки) – путём сравнения эллипсов напряжений в точке.

Сложность и неоднозначность решения нелинейных задач о НДС плотин оправдывает усилия по созданию собственных вычислительных программ, т.к. позволяет вести интересные научные исследования, а также апробировать новые методики и алгоритмы.

Ключевые слова: грунтовая плотина, модели грунта, напряжённо-деформированное состояние, метод конечных элементов, вычислительная программа, метод локальных вариаций, нарушение прочности, активное нагружение и разгрузка, условие разгрузки, пластические деформации, контактные конечные элементы, итерационный процесс, сходимость, эллипс напряжений

COMPUTER PROGRAM ON STRESS-STRAIN STATE ANALYSIS OF EMBANKMENT AND CONCRETE DAMS: BACKGROUND, METHODOLOGIES AND ALGORITHMS

Michail P. Sainov

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

ABSTRACT: The article deals with peculiarities of stress-strain state (SSS) analysis of dams and their foundations; it describes the problems arising at numerical solving of such tasks as well as the approved ways of their solving.

The article describes the methodology of dams SSS analysis, which was realized by the author in computer program «NDS-N», created and used at the Chair of Hydraulic Structures in Moscow State Civil Engineering University. The basis of the program is finite element method. The program is intended for SSS analysis with consideration of the character of dam materials deformation, as well as with consideration of non-linear effects of interaction of non-soil structures among themselves and with soil mass. Non-linearity of soil deformation may be described by the model of Professor L.N. Rasskazov and by Mohr-Coulomb model. Coulomb model is also used for description of joints (fissures) shear strength. The program permits conducting SSS analysis with consideration of the history of its formation, i.e. considering the sequence of construction and loading of the structure.

A considerable part of the article is devoted to the problems of using numerical methods for solving non-linear problems of SSS: the problem of matching the obtained results to real values, the problem of convergence of iteration processes, as well as by solving these problems. The problem of right solution arises just in non-linear problems; its peculiarity is in the fact that at their solving there may be cases, when sequence of iteration process (solution sequence) affects the obtained result. Such effect appears at using the method of local variations in search of unknown displacements of the structure, as well as at use of boundary conditions in displacements. It is recommended not to change deformation characteristics in solution process, and non-linearity should be taken into account by dividing the step of loading in a number of sub-steps and at each of the sub-step the deformation properties of materials should be changed.

Convergence of iteration process of the variable force vector method was analyzed at different characters of soil deformation properties variation in the loading process. It is shown that divergence may take place, if at variation of SSS the sharp decrease of material deformation occurs. For convergence it is necessary that the iteration process of approximation to the solution should run steadily, in the same direction from the current stress state to the required one, without any jumps. This is especially important in cases, when, beside non-linearity of deformation properties variation, consideration is made of non-linearity caused by brittle fracture of the material. Brittle fracture takes place in the form of an abrupt jump and it is irreversible, which affects the iteration process and its approximation to exact solution.

Besides, the author suggested an ingenious method in distinguishing between the domains of elastic and elastic-plastic deformation of soil (loosening conditions) – by comparing stress ellipses in the point.

Complexity and ambiguity of solutions of non-linear problems on dam SSS justify the efforts on creation of own programs, because this permits conducting interesting scientific researches, as well as testing new methodologies and algorithms.

Key words: embankment dam, soil models, stress-strain state, finite element method, computer program, method of local variations, structural failure, active loading and loosening, loosening condition, plastic deformations, contact finite elements, iteration process, convergence, stress ellipse

Расчёты напряжённо-деформированного состояния (НДС) грунтовых плотин – важная область инженерных расчётов при проектировании крупных гидроузлов. Эти расчёты должны ответить проектировщикам на следующие вопросы:

- какой величины ожидаются перемещения грунтовой плотины в процессе строительства и эксплуатации, какой нужно назначить строительную отметку гребня плотины, чтобы после строительных и эксплуатационных

осадок она соответствовала проектной,

- будет ли обеспечена прочность грунтов тела плотины, не возможна ли потеря её устойчивости,
- какой величины ожидается поровое давление внутри тела плотины из глинистого грунта, не произойдет ли его гидравлический разрыв,
- каковы будут напряжения в негрунтовых элементах конструкции грунтовой плотины, будет ли обеспечена их прочность.

Однако ответить на эти вопросы оказывается сложно. Это прежде всего, связано с тем, что грунты обладают ярко выраженным нелинейным характером деформирования. В отличие от многих других строительных материалов (бетон, сталь и т.д.) в грунтах частицы слабо связаны между собой, поэтому деформируемость грунтов во многом определяется количеством и качеством этих связей. Большую роль в деформируемости грунтов также играет содержащаяся в порах вода. Грунты могут быть как двухфазные, так и трёхфазные.

Нелинейный характер деформирования у грунтов проявляется в следующих явлениях (рис. 1):

- наличие практически во всех случаях пластических деформаций,
- резкое различие характера деформирования при так называемом активном нагружении (при котором проявляются пластические свойства) и при разгрузке (когда чаще всего грунт деформируется линейно),
- очень малая величина прочности на растяжение, по достижении её растягивающими напряжениями грунт разрушается,
- ползучесть грунтов, т.е. появление с течением времени дополнительных деформаций без дополнительных нагрузок,
- явление дилатансии, т.е. изменение объёма грунта при сдвиге, происхо-

дящее даже при неизменном всестороннем обжатии,

- связь характера деформирования с прочностным состоянием,
- зависимость характера деформирования от степени водонасыщения.

Все эти особенности делают процесс деформирования грунтов сложным. Рассматривая паспорт грунта (рис.1) можно заметить, что даже в условиях простого нагружения, которому подвергается грунт в стабилометрических испытаниях, параллельно развиваются два процесса – увеличение и уменьшение количества связей между частицами. Увеличение количества связей происходит при всестороннем обжатии грунта при нагружении и вызывает снижение его сжимаемости. Уменьшение количества связей происходит при росте сдвиговых деформаций и ведёт к постепенному переходу грунта к предельному состоянию и к увеличению его деформируемости.

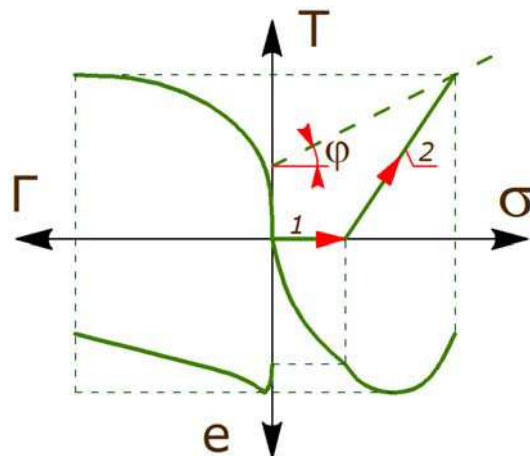


Рисунок 1. Схема паспорта грунта, построенного для стандартного стабилометрического испытания при трёхосном сжатии.

σ – среднее напряжение, τ – интенсивность касательных напряжений, e – объёмная деформация, γ – интенсивность касательных деформаций, φ – угол внутреннего трения грунта, 1 – участок нагружения со всесторонним обжатием, 2 – участок нагружения с ростом вертикального напряжения.

Грунтовые плотины часто имеют значительную высоту (до 300 м), поэтому в процессе возведения и восприятия нагрузок деформируемость грунтов тела плотины может сильно изменяться. Соответственно, процесс формирования напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин – процесс очень сложный.

Поэтому для расчёта НДС высоких грунтовых плотин недопустимо считать грунт линейно-упругим материалом. Необходимо рассматривать как минимум несколько этапов (моментов времени), на каждом из которых деформативные свойства грунтов должны изменяться в соответствии с текущим напряжённым состоянием.

При этом очень важно учитывать влияние на формирование НДС последовательности возведения и загрузки сооружения, т.к. при этом часть нагрузок воспринимается неполным профилем плотины. «История» формирования НДС очень сильно сказывается на распределении напряжений в теле плотины, а, следовательно, на деформируемости тела плотины. Однако до сих пор многими исследователями при расчётах НДС грунтовых плотин последовательность возведения и загрузки сооружения либо не учитывается вовсе, либо учитывается грубо.

Чтобы иметь возможность описать поведение грунта в процессе его нагружения и разгрузки, учёными всего мира создано множество так называемых моделей грунтов. Наибольшую известность получили модели Кулона-Мора, Друкера-Прагера, Cam Clay, гиперболическая модель и другие [1-3]. Некоторые из этих моделей реализуют теорию пластического течения (модель Друкера-Прагера, Cam Clay), другие – деформационные теории пластичности. Каждая из них обладает своими преимуществами и недостатками. Но до сих пор не создана модель, которая бы была одновременно и простой и исчерпывающей. Все модели являются феноменологическими, т.е. описывают (аппроксимируют) наблюдаемые явления, не раскрывая их суть.

В деформационной теории пластичности принимается, что зависимость напряжений и деформаций может быть записана в форме закона Гука, однако константы материалов, используемые в этом законе (модуль деформации, коэффициент Пуассона), должны изменяться в зависимости от текущего напряжённого состояния грунта, не являясь константами. Этот подход удобен для его численной реализации, но он не может применяться при сложных траекториях нагружения. Кроме того, он требует сложного итерационного процесса, который не всегда сходится.

В теории пластического течения напротив, учитывается, что напряжённое состояние зависит от пути нагружения в пространстве деформаций, а сами деформации разделяются на упругие и пластические. Для разграничения области упругих и пластических деформаций вводят так называемые поверхности нагружения (пластичности). Поверхности нагружения представляют обычно в пространстве инвариантов тензора напряжений. В соответствии с постулатом Друкера предполагается, что вектор пластических деформаций направлен перпендикулярно поверхности нагружения. Опытные данные не подтверждают этот постулат, аналитическое его рассмотрение также выявляет в нём недостатки [4, 5]. Создано множество моделей, различающихся по форме поверхностей пластичности. Однако как было показано в [4], положение поверхностей нагружения не может быть определено экспериментально, поэтому невозможно строить модели грунта, основываясь на постулате Друкера.

В связи с этим профессор Рассказов Л.Н. [6] предложил считать, что векторы приращений напряжений и приращений деформаций сонаправлены (коллинеарны). В этом случае закон деформирования может быть записан в виде закона Гука, но с тремя важными отличиями:

1) он должен связывать между собой не полные напряжения и деформации (которые ча-

ще всего не сонаправлены), а их приращения,

2) он должен учесть явление дилатансии при формировании зависимости объёмных напряжений и объёмных деформаций,

3) константы материала должны изменяться в зависимости от напряжённого состояния,

4) для учёта ползучести деформативные характеристики должны изменяться во времени.

Кроме того, проф. Рассказов Л.Н. предложил энергетическое условие прочности и построил зависимости деформативных характеристик грунтов от состояния грунта по отношению к предельному. Модель грунта Рассказова Л.Н. может применяться не только для грунтов, но и для асфальтобетона [7]. Такой подход обладает внутренней логикой и удобен для реализации на ЭВМ

К настоящему времени крупными компаниями разработано множество современных вычислительных программных комплексов (ANSYS, Plaxis, Cosmos-M, Diana, Z-Soil, SolidWorks, Лира, ABAQUS), которые позволяют решать задачи о НДС грунтовых массивов и сооружений в упругопластической постановке [8]. Все перечисленные выше программные комплексы базируются на методе конечных элементов.

Однако эти программные комплексы не позволяют расчётчику видоизменять и совершенствовать заложенные в них модели материалов. Заложенные в программу алгоритмы остаются закрытыми, что создаёт проблему верификации не только результатов, но и самих программ. Именно поэтому помимо фирменных программных продуктов исследователям приходится создавать свои вычислительные программные комплексы. В России получили известность программные комплексы «СТАДИО» (создан под руководством А.М.Белостоцкого) [9] и «Земля» (создан в ОАО «Институт Гидропроект») [10], а также «FEM Models» (А.Г.Шашкин, «Геореконструкция») [11].

По пути создания собственных вычислительных программ пошла и кафедра гидро-

технических сооружений МГСУ, членом которой является автор. Это позволило использовать модель проф. Рассказова Л.Н. для выполнения расчётов грунтовых плотин. Начал эту работу сам проф. Рассказов Л.Н. Его ученики П.В.Солдатов, А.А.Беляков [12], Хуньба Ки Тхуат, А.С.Бестужева и Дао Туан Ань создали целый программный комплекс «Dam», который позволял решать не только плоские, но и пространственные задачи. С помощью него был решён большой ряд задач о НДС грунтовых плотин [13,14].

У этих программ были отличительные особенности как по функциональным возможностям, так и по применяемым методикам и алгоритмам. Все программы позволяли вести расчёты НДС плотины с учётом последовательности её возведения, а также наполнения водохранилища. В процессе строительства плотины выделялись ряд моментов времени – этапов, каждый из которых различался по геометрии возведённого профиля плотины и по уровню воды в верхнем бьефе. Этапы возведения плотины и этапы наполнения водохранилища всегда разделялись, т.к. при наполнении возможен переход грунта во взвешенное состояние по ветви разгрузки.

Для дискретизации расчётной области использовались наиболее простые конечные элементы, т.е. элементы с линейной аппроксимацией перемещений внутри элемента, чтобы ускорить решения задач. При решении плоских задач использовались треугольные трёхузловые конечные элементы, а при решении пространственных задач – пятигранные треугольные призмы.

Для учёта наследственной ползучести грунтов в период эксплуатации использовался следующий алгоритм. После каждой итерации по известным приращениям напряжений вычислялись приращения деформаций ползучести за счёт изменения во времени деформативных свойств грунтов. С каждой итерацией происходило накопление деформаций ползучести для последующих расчётных этапов. Далее, на этапах эксплуатации, на которых не происходит изменение дейст-

вующих нагрузок, по накопленным деформациям вычислялись приращения перемещений за счёт ползучести. Сложность алгоритма заключается в том, что в плоском треугольном конечном элементе – 3 компоненты деформаций, но 6 компонент перемещений трёх узлов. Получается, что нельзя из трёх уравнений определить 6 неизвестных. Поэтому вычисление приращений перемещений необходимо вести последовательно, начиная с тех элементов, в которых четыре компоненты перемещений уже известны. В первую очередь рассчитываются перемещения в нижних конечных элементах расчётной области, в которых два узла закреплены от перемещений. Однако даже при таком подходе выявляется неопределённость решения – по трём компонентам деформаций нужно определить перемещение одного узла в двух направлениях. Для получения приемлемого решения необходимо было верно задавать последовательность вычисления в элементах перемещений от наследственной ползучести. Важной особенностью программ комплекса «Dam» являлось то, что для минимизации энергетического функционала использовался не прямой метод (с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений), а итерационный метод локальных вариаций (МЛВ). В МЛВ минимизация энергии всей системы производится постепенно, за ряд итераций, отдельно для каждой степени свободы в отдельности [15,16]. Обычно на одной итерации задаются некоторым шагом перемещения и, варьируя возможные направления перемещения степени свободы с этим шагом, проверяют, возможна ли минимизация энергетического функционала.

Преимуществом МЛВ является экономия памяти ЭВМ, т.к. он не требует построения, хранения, преобразования и решения системы уравнений. Кроме того, использование МЛВ позволяло удобно и подробно учитывать нелинейность деформирования грунтов. После каждого удачного варьирования перемещений степеней свободы деформативные свойства грунта уточнялись в соответствии с

моделью грунта. Удобно было учитывать и различие между активным нагружением и разгрузкой. На этапе наполнения, когда проявляются взвешивающие силы, принималось, что при перемещении узла вверх происходит разгрузка, а при перемещении вниз – активное нагружение. Для того, чтобы учесть, что грунт не работает на растяжение, при варьировании перемещения узла, в энергию системы не включалась энергия деформирования тех конечных элементов, в которых возможно растяжение. Такие искусственные приёмы не являются строгим решением нелинейной задачи и могли быть реализованы только в МЛВ.

Недостатками МЛВ являются значительные временные затраты (т.к. метод итерационный) и его приближённость. Известно [17], что МЛВ не гарантирует нахождение верного решения. Последовательность варьирования неизвестных может влиять на результаты решения, может существовать двойственность решения, особенно это проявляется при решении нелинейных задач. Тем не менее, использование МЛВ давало приемлемые решения, позволяло решать сложные задачи при острой проблеме ограниченности ресурсов ЭВМ, существовавших в то время.

Но в самом конце XX в. потребовалось решать более сложные задачи – задачи о НДС грунтовых плотин с тонкими негрунтовыми противофильтрационными элементами (диафрагмами и экранами из асфальтобетона и бетона). Эти задачи имеют ряд особенностей по сравнению с задачами о НДС плотин, выполненных только из грунта. Одними из самых важных особенностей являются следующие:

- 1) Негрунтовые материалы (бетон, асфальтобетон, глиноцементобетон) в десятки-сотни, а то и в тысячи раз менее деформируемы, чем грунт. В частности, модули деформаций каменной насыпи и железобетона отличаются примерно на три порядка.
- 2) Толщина конструкций из негрунтовых материалов может быть очень мала по сравнению с размерами грунтового массива, она

может составлять дециметры, сантиметры и даже миллиметры.

Каждая из перечисленных особенностей усложняет процесс решения этих задач. Первая особенность – значительная разница в деформируемости материалов расчётной области – ухудшает точность получаемых решений, а в случае использования итерационных процессов – удлиняет сам процесс решения. Вторая особенность – малая толщина элементов конструкции – также ухудшает точность получаемых решений. Нами было показано, что для расчёта жёстких и тонких негрунтовых конструкций, работающих совместно с грунтовым массивом, необходимо использовать конечные элементы с нелинейной функцией перемещений [18]. Как минимум требуются элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений, но и они не всегда могут отразить сложный характер деформирования тонкого негрунтового элемента, т.к. функция деформаций (и напряжений) в таком элементе – квазилинейная. Лучше использовать элементы с кубической аппроксимацией перемещений.

Необходимость расширения конечно-элементной базы программы потребовало модернизации программного комплекса «Dam». Эта работа поручена автору в рамках выполнения кандидатской диссертации.

Такая программа была создана (1997 г.), и она была использована для расчётов НДС «стены в грунте» грунтовой плотины Курейской ГЭС [19]. При этом программа позволяла вводить нагрузки от объёмно распределённых фильтрационных сил.

Однако выяснилось, что требуется более серьёзная модернизация программы. Дело в том, что наличие тонкого и жёсткого элемента в грунтовом массиве создаёт значительные вычислительные трудности. Это вызвано тем, что степени свободы конечных элементов, моделирующих тонкие жёсткие негрунтовые конструкции, обладают очень высокой жёсткостью. И это связано не столько с малой деформируемостью материала, сколько с малой толщиной конструкции. При

уменьшении толщины элемента в 10 раз, жёсткость его степени свободы возрастает в 100 раз. Получается, что жёсткость степени свободы в расчётной области может отличаться в миллионы раз.

При решении системы линейных алгебраических уравнений, описывающих поведение подобной расчётной области, возникают некоторые вычислительные сложности, но они разрешимы. Но в МЛВ решение подобных задач резко усложняется. Дело в том, что степени свободы, расположенные в тонкой жёсткой конструкции, «реагируют» только на перемещения очень малой величины, поэтому итерационный процесс поиска решения резко замедляется.

Однако более опасным является другое явление – неравномерность хода решения. Она заключается в том, что две степени свободы, одна из которых расположена в жёсткой конструкции, а другая – внутри грунтового массива, двигаются к решению с разной скоростью, первая – очень медленно, вторая – «набирает» перемещения гораздо быстрее. В конечных элементах грунтового массива, непосредственно примыкающих к жёсткой конструкции, вследствие такой неравномерности перемещений в процессе расчёта, возникают значительные сдвиговые деформации и грунт стремится к предельному состоянию. После длительного набора жёсткой конструкцией перемещений, разница перемещений между ней и грунтовым массивом выравнивается, однако деформативные свойства грунта уже не соответствуют истинным. Таким образом, последовательность решения может повлиять на его результат.

Чтобы избежать подобных ошибок, можно пойти двумя путями. Первый путь – не изменять деформативные свойства грунта в процессе решения, но тогда задача становится упругой, что противоречит смыслу использования МЛВ. Второй путь – это заранее вести решение на мелких шагах, на которые могут «реагировать» все степени свободы. Однако это очень резко замедляет процесс решения, кроме того, необходимо заранее

знать этот самый мелкий шаг. При работе с программой мы пошли по второму пути, это позволило нам хоть долго, но всё же решать нужные задачи.

Кроме того, в программе этапы наполнения были разделены на два этапа. На одном расчёт вёлся по ветви разгрузки, на взвешивающие силы, на другом – по ветви активного нагружения, на силы гидростатического давления.

В программе была также учтена ещё одна важная особенность рассматриваемого класса задач – наличие особого контактного взаимодействия грунтовых и негрунтовых элементов конструкции. На контактах этих элементов могут проявляться различные нелинейные эффекты, такие как проскальзывание, отлипание и т.д. Для возможности получения эффекта проскальзывания в программе использовались связанные узлы, т.е. узлы, которые в одном направлении работают совместно, как один, а в другом – как два разных узла.

Итак, на первом этапе была разработана вычислительная программа «Nds-x», которая позволяла вести расчёты НДС грунтовых плотин с тонкими негрунтовыми элементами в плоской постановке методом локальных вариаций. Большим её недостатком являлась большая длительность счёта.

Чтобы ускорить расчёты, пришлось отказаться от МЛВ и создать новую вычислительную программу «Stat2t» (2002 г.), в которой неизвестные перемещения определяются путём решения системы линейных алгебраических уравнений (был использован обычный метод Гаусса), т.е. напрямую.

По сравнению с МЛВ этот способ имеет тот недостаток, что в нём сложнее учесть нелинейность деформирования грунта. Как известно, существует два подхода к решению нелинейных задач – итерационный способ и способ ступенчатого нагружения. При итерационном способе после каждой итерации по известном НДС конструкции уточняются деформативные характеристики материалов и расчёт переходит на новую итерацию до

тех пор, пока НДС конструкции в двух смежных итерациях не совпадёт. Итерационный способ часто применяется при использовании деформационных моделей грунтов. Опасность этого способа заключается в том, что сходимость итерационного процесса не всегда гарантирована, если деформативные характеристики резко или сложным образом изменяются в процессе нагружения. При нагружении грунтов одновременно изменяются две характеристики – модуль деформации и коэффициент относительной поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Поэтому именно при решении задач о НДС грунтовых сооружений возможно отсутствие сходимости итерационного процесса

Поэтому нами было принято решение не изменять деформативные свойства грунтов в процессе расчёта, а для учёта нелинейности воспользоваться способом ступенчатого нагружения конструкции. Каждый расчётный этап подразделяется на ряд подэтапов, на каждом из которых на конструкцию прикладывается дополнительная доля нагрузки. После каждого из подэтапов деформативные характеристики уточняются в соответствии с принятой моделью грунта. Чем больше количество подэтапов, тем точнее будет учтена нелинейность грунта. Обычно на каждом этапе мы выделяем по 4-8 подэтапов. В результате процесс решения задачи о НДС грунтовой плотины фактически представляет собой последовательное решение 150-250 задач.

В рамках одного этапа задача о НДС сооружения является нелинейной, т.к. изменяются деформативные характеристики грунтов. Если на каждом из подэтапов после уточнения деформативных характеристик, формировать новую матрицу жёсткости, такой способ решения задачи будет относиться к методу переменной матрицы жёсткости. Учитывая, что операция треугольного разложения матрицы жёсткости очень трудоёмка, метод переменной матрицы жёсткости очень затратен по времени.

Поэтому было принято решение формировать и трансформировать матрицу жёсткости системы на этапе только один раз – для первого подэтапа, а последующее изменение свойств материалов учитывать с помощью метода переменного вектора сил (который он основан на методе начальных напряжений).

Опыт показал, что при использовании метода переменного вектора сил могут возникнуть проблемы со сходимостью. Они возникают из-за того, что модули деформации (реальный и расчётный) не совпадают. Это происходит в том случае, если деформируемость материалов, по которой сформирована матрица жёсткости (в начале этапа), меньше, чем деформируемость на текущем подэтапе. Это можно проиллюстрировать на простом наглядном примере, для линейного деформирования одной расчётной точки. До нагружения эта точка сжата напряжениями σ_0 и деформация в ней равна ε_0 . Затем точка нагружается до напряжения σ_k . Задача – в соответствии с заданным графиком зависимости $\sigma=f(\varepsilon)$ определить деформацию ε_k , соответствующую σ_k .

На рис. 2 показана схема ведения итерационного процесса для случая, если при росте напряжений модуль деформации убывает. Видим, что он сходится и при большом расчётном модуле (рис.2а), и при низком (рис.2б) и при низком даже быстрее. Итерационный процесс может не сойтись только в случае, если $E \approx 0$.

На рис. 3 показана схема ведения итерационного процесса для случая, если при росте напряжений модуль деформации возрастает. При высоком расчётном модуле итерационный процесс сходится всегда (рис.2а), при низком – нет. На схеме рис.2б итерационный процесс сходится, но в процессе итераций напряжения могут превысить σ_k . Это опасно, если в соответствии с моделью материала при таких напряжениях может произойти его разрушение. На рис.2в видно, что при низком расчётном модуле итерационный процесс расходится.

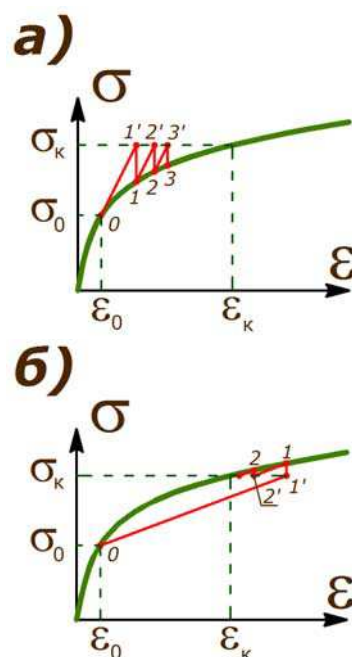


Рисунок 2. Ход итерационного процесса при убывающем характере изменения модуля деформации

а - итерационный процесс с высоким модулем деформации ($E > E_{гр}$), б - итерационный процесс с низким модулем ($E < E_{гр}$).

Невозможно также решать задачи, в которых грунт упрочняется, т.е. переходит из предельного состояния (коэффициент Пуассона $\nu=0,5$) в допредельное ($\nu < 0,5$). В этих случаях итерационный процесс расходится.

Чтобы не допускать расходимости итерационного процесса, необходимо как бы замедлять итерационного процесса, т.е. двигаться к решению постепенно. *Надо исходить из принципа, что итерационный процесс должен приближаться к решению с одной стороны.*

Это означает, что при каждой итерации необходимо занижать получаемые приращения перемещений.

$$U_j^{i+1} = U_j^i + \Delta U_j^{i+1} / a$$

U_j^i , U_j^{i+1} – перемещение степени свободы j соответственно на итерации i и $i-1$,

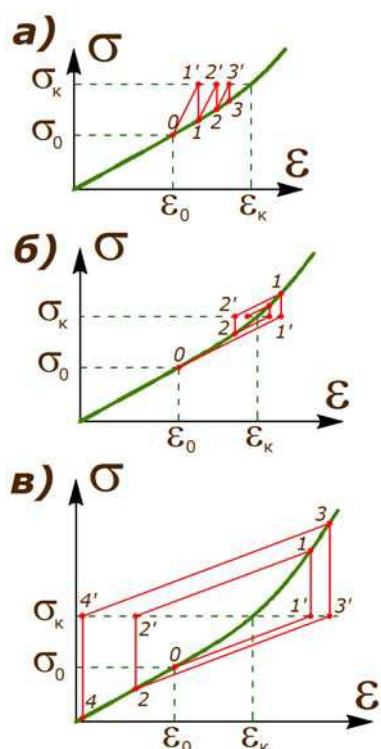


Рисунок 3. Ход итерационного процесса при нарастающем характере изменения модуля деформации.

а - итерационный процесс с высоким модулем деформации ($E > E_{тр}$), б, в - итерационный процесс с низким модулем ($E < E_{тр}$)

ΔU_j^{i+1} – приращение перемещения степени свободы j на итерации i ,

a – понижающий коэффициент.

Обычно параметр a необходимо принимать равным 1,3÷2.

Естественно такой подход приводит к увеличению времени счёта. Иногда решение может быть получено быстрее методом переменного вектора сил.

Как видно, введение подэтапов заметно удлиняет процесс решения задач, но по сравнению с использованием МЛВ решение задачи по программе «Stat2t» ускорилось в десятки раз.

Ускорение процесса расчёта позволило решать более сложные задачи, в методику решения задач о НДС грунтовых плотин с негрунтовыми конструкциями были внесены два существенных уточнения.

Первое уточнение (2004 г.) – в программе «Stat2t» была введена возможность использования контактных элементов для описания нелинейных эффектов контактного взаимодействия негрунтовых конструкций с грунтовым массивом и между собой. Использование контактных элементов дало возможность моделировать процессы отлипания или раскрытия швов, которые не могут быть смоделированы с помощью элементов сплошной среды [20,21].

Схема нелинейной работы шва (трещины) или контакта показана на рис.2. На нём показана диаграмма поведения шва в направлении, нормальном (рис.2а) и касательном (рис.2б) к плоскости шва.

Принимается, что в контакте напряжения пропорциональны перемещениям, и коэффициент пропорциональности выступает жёсткостью K [Н/м³]. Но эта пропорциональность наблюдается только при условии сохранения прочности шва (на растяжение или сдвиг). При превышении прочности на растяжение R_p шов раскрывается, это раскрытие может неограниченно увеличиваться (рис.2а). При повторном появлении растягивающих усилий в ранее уже раскрывавшемся шве, он будет раскрываться даже при самых маленьких напряжениях.

Оценка прочности при сдвиге в контактных элементах осуществляется на основе условия прочности Кулона-Мора. При превышении касательными прочностями контакта (шва) на сдвиг, его целостность может быть нарушена (рис.2б). При нарушении целостности шва (хрупкое разрушение) сцепление в нём исчезает. Трение в шве сохраняется. Раскрытый шов не имеет прочности на сдвиг.

Во-вторых, более верно был учтён тот факт, что грунты практически не работают растяжение. При появлении в верховой упорной призме плотины растягивающих напряжений σ_x , они занулялись и с помощью итерационного процесса нагрузка передавалась на соседние элементы.

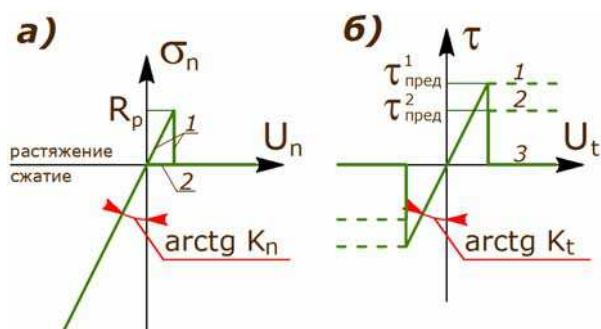


Рисунок 2. Модель поведения контакта негрунтовых конструкций с грунтом и между собой

а – по напряжениям и перемещениям в направлении, нормальном к плоскости шва, U_n – относительные перемещения «берегов» шва в направлении поперёк шва (в нормальном направлении), σ_n – напряжения в направлении, нормальном к плоскости шва, R_p – прочность контакта (шва) на растяжение. 1 – поведение шва (трещины) при наличии прочности на растяжение, 2 – поведение шва (трещины) после потери прочности на растяжение.

б – по напряжениям и перемещениям в направлении, касательном к плоскости шва.

U_t – относительные перемещения «берегов» шва в направлении вдоль шва, τ – касательные напряжения в шве, $\tau_{пред}$ – прочность контакта (шва) на сдвиг.

1 – идеально-пластическое разрушение при сдвиге в условиях сжатия, 2 – хрупкое разрушение при сдвиге в условиях сжатия, 3 – поведение раскрывшегося шва.

В-третьих, был разработан более точный алгоритм учёта наследственной ползучести грунтов. Для этого был использован метод начальных напряжений. На каждом из этапов, в каждом конечном элементе накопленные деформации ползучести преобразовывались во внутренние усилия (напряжения), которые как бы «исчезли» из элемента. Через эти усилия вычислялись внешние силы, отнесённые к степеням свободы. Эти силы вызывают дополнительные перемещения степеней свободы от ползучести.

Описанные выше алгоритмы программы «Stat2t» были распространены на решение пространственных задач, для чего была создана программа «Stat3t». С помощью этой программы были решены задачи о НДС грунтовых плотин Юмагузинской, Богучанской, Сангудинской и Ирганайской ГЭС [22], а также ряд других научных исследований.

Однако программа «Stat3t» не позволяла решать пространственные задачи с учётом нелинейных эффектов взаимодействия негрунтовых конструкций с грунтовым массивом и между собой. Её конечно-элементная база была ограничена 8-узловыми элементами (сплошной среды) в виде шестигранных призм произвольной формы. Аппроксимация перемещений внутри такого элемента – квазилинейная, что резко снижает точность получаемых решений. Необходимо было разработать алгоритмы работы пространственных контактных элементов и модернизировать программу.

В результате в 2009 г. была начата работа по созданию новой вычислительной программы «NDS-N», которая не только объединила в себе программы «Stat2t» и «Stat3t», но и расширила их возможности.

Потребность в модернизации программы возникла в связи с необходимостью учитывать нелинейность деформирования скальных грунтов (и бетона). Это в свою очередь потребовалось для того, чтобы вести расчёты НДС комбинированных плотин, т.е. плотин в которых большая часть выполнена из бетона, хотя основной объём представляет собой грунтовую насыпь [23].

Перечислим основные отличия программы «NDS-N» по функциональным возможностям:

1. Введены пространственные контактные элементы типа «поверхность-поверхность». Они могут иметь линейную, квадратичную и кубическую аппроксимацию перемещений внутри элемента.
2. Введена возможность расчёта упруго-пластического поведения скальных грунтов в

соответствии с моделью Кулона-Мора (в результате потери прочности на сдвиг).

3. Введена возможность учёта упруго-пластического поведения материалов в результате нарушения их прочности растяжение. Работа скального грунта в области растяжения ограничивается условием прочности в виде $\sigma_m \leq R_\delta$, где σ_m – главное напряжение, R_δ – прочность материала на растяжение.

Упруго-пластическое поведение материала в результате нарушения его прочности (на сдвиг или растяжение) реализуется с помощью итерационного процесса.

4. Конечно-элементная база программы расширена за счёт введения объёмных конечных элементов (в виде шестигранников произвольной формы) с нелинейной (квадратичной или кубической) аппроксимацией перемещений внутри элемента. С 2011 года программа позволяет использовать конечные элементы с промежуточной степенью аппроксимации перемещений, которые позволяют сопрягать между собой области сетки МКЭ с разными по степени аппроксимации элементами.

5. Введена возможность ввода внутренних усилий от температурных воздействий, что позволяет решать задачи о термонапряжённом состоянии.

Введение в расчёт возможности потери прочности на растяжение потребовало модификации алгоритмов программы. До этих пор мы имели дело с гладкой, монотонной нелинейностью деформирования, когда по мере изменения напряжённо-деформированного состояния грунта, изменяется его деформируемость.

Потеря же прочности грунтом на растяжение может происходить в виде хрупкого разрушения. При таком характере разрушения грунт не может нести не только дополнительную нагрузку, а полностью теряет свою несущую способность. Если какая-либо область грунта потеряла свою прочность, то воспринимаемая ею нагрузка будет полностью передана на соседние области. Это

опасно для сходимости итерационного процесса, т.к. он становится не плавным и монотонным, а скачкообразным. В ходе итерации может оказаться, что на одной итерации прочность материала превышена, а на следующей – уже нет, а затем – снова превышена. Итерационный процесс может не сойтись, а ход решения станет влиять на его результаты.

Для повышения стабильности итерационного процесса можно применять два способа:

- проводить снижение растягивающих напряжений в разрушенных элементах постепенно,
- устанавливать некий «порог чувствительности» по нарушениям прочности, чтобы итерационный процесс затрагивал только элементы, в которых заведомо прочность будет нарушена.

Опыт показал, что особенно опасно совмещать в итерационном процессе нелинейность обоих видов, когда возможно и изменением параметров деформируемости, и нарушение прочности.

В дальнейшем программа также совершенствовалась. В 2012 год были внесены следующие изменения:

1. Для моделирования особо тонких противифльтрационных элементов (типа геомембран) предусмотрено использование стержневых (для плоской задачи) и мембранных (для пространственных задач) конечных элементов.
2. Был реализован новый подход к разграничению областей упругих и упруго-пластических деформаций (т.е. разгрузки и активного нагружения).

Обычно оценку типа нагружения (активное, нейтральное нагружение или разгрузка) ведут по средним напряжениям σ и интенсивности касательных напряжений σ_i . Величина σ характеризует объёмное сжатие, а σ_i – нагружение за счёт изменения формы. Считается, что если в точке происходит увеличение σ и/или σ_i , то происходит активное нагружение, если наблюдается их уменьшение – то разгрузка.

Нами было предложено типа нагружения определять на основе анализа эллипсов (эллипсоидов) напряжений Ляме, характеризующие напряжённое состояние в точке. На рис. 4 показана схема, иллюстрирующая анализ напряжённого состояния на основе эллипсов нормальных напряжений (задача плоской деформации). Предположим, что нагружение грунта происходит в 2 стадии. Напряжённое состояние в точке после первой стадии нагружения будет характеризоваться эллипсом напряжений 1, а после второй - эллипсом 2 или 3.

Если сжимающие напряжения после второй стадии нагружения (эллипс 3) не превысят напряжения на первой стадии (эллипс 1), то деформирование будет протекать по ветви разгрузки (упруго) (рис. 4а). Если же на второй стадии текущие сжимающие напряжения на какой либо площадке выйдут за границу 1, то при нагружении будут наблюдаться пластические деформации (рис. 4б,в,г). Таким образом, эллипс 1 служит границей между областью упругого и пластического деформирования, или «границей упругой зоны». Сложнее дело обстоит в случае многоступенчатого нагружения. В этом случае граница 1 формируется эллипсами напряжений всех предыдущих ступеней нагружения, она является их огибающей, поэтому её форма может отличаться от эллипса.

Рассмотрим случай простого статического нагружения, когда оси главных напряжений до и после нагружения совпадают, а их величина с каждой ступенью нагрузки лишь увеличивается (рис. 4б). В этом случае граница упругой зоны после первого нагружения соответствовать эллипсу 1, а после второго - эллипсу 2. Возможен также случай сложного нагружения, при котором оси главных напряжений тоже не изменяются, но их величина то увеличивается, то уменьшается. В этом случае граница упругой также останется эллипсом. При росте напряжений до границы деформирование будет происходить упруго, а за её пределом - пластически.

В случае действительно сложного нагружения, с поворотом осей главных напряжений, (рис.4в,г) после второй ступени нагружения граница упругой зоны будет являться огибающей эллипсов 1 и 2. Её форма будет сложной. В случае на рис.4г) границу с определённой точностью ещё можно представить как эллипс, но для случая на рис.4в - это никак не возможно.

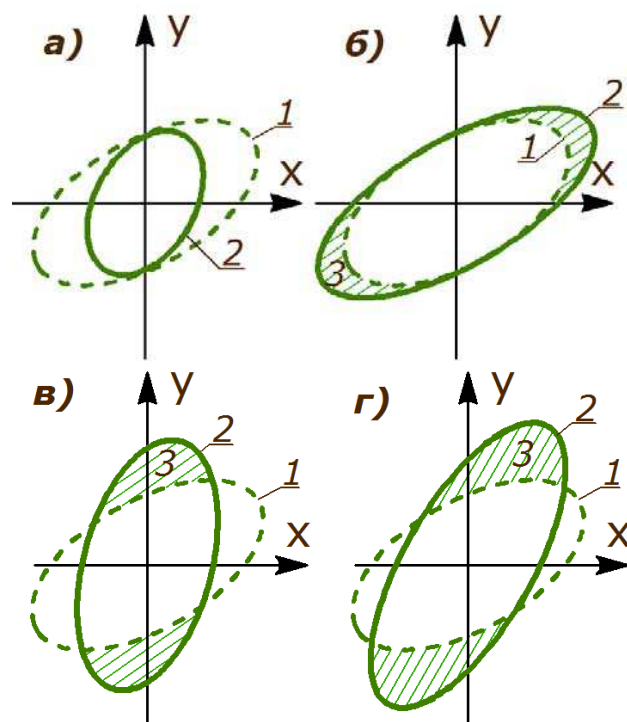


Рисунок 4. Эллипсы нормальных напряжений, используемые для оценки типа нагружения.

а – случай разгрузки, б – случай простого нагружения, в – случай сложного нагружения с без роста интенсивности касательных напряжений и средних напряжений, г – случай сложного нагружения, сопровождающийся ростом интенсивности касательных напряжений

1 – эллипс напряжений до данной ступени нагружения, 2 – эллипс напряжений, соответствующий данной ступени нагружения, 3 – область напряжений, при нагружении которыми будут проявляться пластические деформации

Случай, представленный на рис. 4в – это случай, когда на второй ступени нагружения происходит не увеличение нагрузки на образец грунта, а лишь её перераспределение. В

этом случае средние напряжения σ и интенсивность касательных напряжений σ_i не изменятся, но на самом деле грунт будет испытывать пластические деформации.

Это можно объяснить, рассматривая изменение касательных напряжений (рис. 5). Как известно, прочность и деформируемость грунта в наибольшей мере связана с сопротивлением сдвигу. Сдвиг ведёт к перекомпоновке и сколам частиц грунта, поэтому он чаще всего сопровождается пластическими деформациями. На рис. 5 в виде круговой диаграммы показано изменение касательных напряжений в точке при распределении нормальных напряжений, соответствующих рис. 4. При повороте осей главных напряжений (рис. 5в) на площадках, на которых ранее касательные напряжения были близки к нулю, они могут достигнуть значительных величин или поменять направление, поэтому деформации грунта могут протекать пластически.

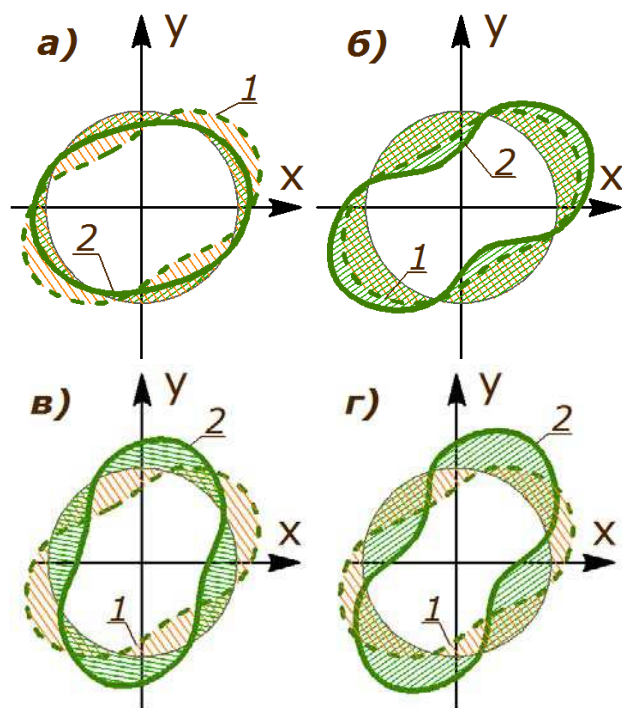


Рисунок 5. Диаграммы касательных напряжений в точке для оценки типа нагружения

Обозначения – см. на рис.4

Вследствие этого нельзя определять тип нагружения только через σ и σ_i , не учитывая вид напряжённого состояния.

В данном способе граница упругих напряжений, играет роль своего рода поверхности нагружения, т.к. тоже разделяет область активного нагружения и разгрузки. Однако в отличие от поверхности нагружения, она не является чистой абстракцией и её роль в физике процесса деформирования понятна. По нашему мнению, предложенный подход позволяет учитывать пути нагружения на формирование напряженно-деформированного состояния.

В заключении, хочется подчеркнуть, что создаваемые нами программы не являются продуктом для широкого использования, с развитым дружественным интерфейсом и с высокоэффективными быстрыми алгоритмами. Над ними работают один-два человека, не являющихся профессиональными программистами. Цель эти программ – дать инструмент для проведения научных исследований, при чём такой, который можно было изменять, модифицировать, апробировать на нём новые модели, методики и алгоритмы. Программы находятся в постоянной модернизации, нет возможности создавать дружественный интерфейс, оптимизировать код и работу программы. Используемые нами компиляторы не дают возможности максимально эффективно задействовать в работе ресурсы ЭВМ (быстродействие процессора, объём оперативной памяти). В частности, наиболее остро стоит вопрос об использовании памяти ЭВМ. Для решения больших пространственных задач требуется большой объём памяти. Объём памяти, используемой программой «NDS-N» в настоящее время ограничен примерно 1,8 Гб.

Для того, чтобы решать задачи с большим количеством степеней свободы (>30000) нам пришлось разработать методику расчётов нелинейных задач с использованием метода подконструкций (2010 г.) [24]. В этом методе конструкция разбивается на подконструкции, для каждой из которых формируется

своя система уравнений МКЭ. Затем матрицы жёсткости и вектора сил подконструкций (блоков) объединяются соответственно в матрицу жёсткости и вектор сил общих степеней свободы. Решение системы уравнений по общим степеням свободы даёт возможность определить перемещения на границах блоков и решить систему уравнений МКЭ для блока. При решении нелинейных задач необходим итерационный процесс по отысканию верных перемещений общих степеней свободы.

Опыт показал, что решение нелинейных задач методом подконструкций возможно, но к его применению следует подходить очень осторожно. Использование граничных условий в перемещениях может неблагоприятно сказываться на точность результатов вследствие эффекта влияния последовательности решения, аналогичного по характеру описанному ранее при рассмотрении недостатков МЛВ. Прежде всего, необходимо правильно выбирать границы между подконструкциями, так, чтобы ход решения не влиял на прочностное состояние приграничных областей. Итерационный процесс по граничным перемещениям блоков необходимо вести последовательно, постепенно.

Модернизированная программа «NDS-N» позволила кафедре гидротехнических сооружений выполнить исследования НДС бетонной плотины Саяно-Шушенской ГЭС с учётом нелинейности взаимодействия со скальным основанием и поведения последнего [25], а также с учётом разрезки плотины на секции и раскрытия строительных швов.

По данной программе были решены задачи о пространственном НДС каменных плотин с железобетонным и грунтоцементобетонным экраном [26,27,28].

ВЫВОДЫ

1. В XXI веке, несмотря на обилие качественных расчётных программных комплексов с широкими функциональными возможно-

стями для решения самых сложных инженерных задач, в научно-исследовательских организациях, лабораториях и т.п. сохраняется в необходимость в разработках собственных вычислительных программ. Цель их создания – апробация и верификация новых методов, методик и моделей, а также выполнение научных исследований.

2. Расчёты напряжённо-деформированного состояния грунтовых плотин с тонкими негрунтовыми конструкциями – довольно сложная область инженерных расчётов. Это вызвано несколькими причинами:

- Грунт – нелинейно деформируемый материал, прочностное и деформируемое состояние которого зависят от пути нагружения, поэтому расчёты НДС грунтовых сооружений необходимо вести в упругопластической постановке (учитывая явления пластичности, дилатансии, ползучести) с учётом последовательности их возведения и нагружения;
- Напряжённое состояние негрунтовых конструкций в грунтовых плотинах в значительной мере определяется их взаимодействием между собой и с грунтовым массивом, поэтому при расчётах НДС обязательно необходимо учитывать проявление различных нелинейных эффектов контактного взаимодействия твёрдых тел;
- На прочностное состояние негрунтовых конструкций сказывается их начальное напряжённое состояние, поэтому расчёты НДС должны вестись с учётом технологии их создания;
- Значительное различие жёсткости и размеров конструкций из негрунтовых материалов по сравнению с вмещающим грунтовым массивом создаёт некоторые вычислительные сложности.

Эти важные особенности рассматриваемого класса задач формируют набор требований, предъявляемых к расчётам методом конечных элементов. Применяемые для решения этого типа задач вычислительные программы должны позволять:

- применять нелинейные модели грунтов и контактного взаимодействия твёрдых тел,
- учитывать взаимодействия конструкций с фильтрационным потоком,
- использовать для дискретизации расчётной области конечные элементы высокого порядка,
- использовать контактные элементы,
- учитывать последовательность возведения и нагружения сооружения (конструкции).

3. При решении задач о напряжённо-деформированном состоянии конструкции мы сталкиваемся с двумя видами нелинейного поведения материалов (конструкций). Первый вид нелинейности – это плавное, монотонное изменение деформируемости материала по мере изменения его НДС. Второй вид нелинейности – это резкое, скачкообразное изменение деформативных свойств в результате нарушения прочности материала или контакта, например в результате хрупкого разрушения элемента конструкции или раскрытия шва. Наибольшую угрозу для сходимости решения представляет нелинейность второго вида. Опасность заключается в том, что нарушение прочности одного элемента необратимо изменяет НДС всей конструкции. Взаимовлияние нарушения прочности в нескольких элементах конструкции может вести к раздвоению (бифуркации) решения.

4. Использование итерационных процессов для решения задач о НДС с учётом нелинейности ставит проблему точности получаемых результатов, создаёт проблему сходимости получаемых результатов к точному решению. В качестве точного решения можно использовать решение, полученное при решении ряда упругих задач со ступенчатым нагружением конструкции.

5. Нелинейность деформирования первого вида с определённой точностью всегда может быть учтена заменой непрерывной функции $\sigma=f(\epsilon)$ на кусочно-линейную, разбивая задачу о нелинейном деформировании на ряд упругих задач. Нелинейность второго

вида всегда требует использования итерационного процесса. Необходимо избегать алгоритмов, в которых с помощью итерационного процесса одновременно ведётся учёт нелинейности первого и второго видов, т.к. может возникнуть проблема сходимости решения.

6. При использовании итерационных процессов для учёта нелинейности деформирования возможен эффект зависимости результата от хода решения, от хода итерационного процесса. Такой эффект может, в частности, проявляться при использовании метода локальных вариаций (МЛВ) как способа минимизации энергии системы, а также при использовании граничных условий в перемещениях. Этот эффект наиболее ярко проявляется в задачах, в которых сооружение (конструкция) обладает значительной неоднородностью по своим свойствам (в решении задач НДС – по жёсткости). К таким задачам как раз относится задача о НДС грунтовых плотин негрунтовых противофильтрационных элементами и или о НДС комбинированных плотин. Необходимо избегать использования алгоритмов, в которых текущее напряжённое состояние, полученное на итерации, может привести к резкому, а самое главное – необратимому, изменению деформативных свойств материалов.

7. Сходимость итерационного процесса может быть достигнута всегда лишь в том случае, если приближение к решению происходит монотонно и выражается в постепенном накоплении перемещений и деформаций конструкции до соответствующих данной нагрузке. Приращение перемещений конструкции за одну итерацию не должно превышать истинные перемещения системы, а текущие напряжения на итерации не должны превышать истинных. Другими словами, итерационный процесс должен приближаться к решению с одной стороны, от меньших деформаций к большим. Такой ход итерационного процесса достигается если, модуль деформации, принятый в расчёте, будет выше, чем секущий модуль деформации на

данном нагружении. Можно также ограничивать приращения перемещений на итерации.

8. Предложенная схема разграничения областей активного нагружения и разгрузки через анализ эллипсов напряжений более полно отражает механику процесса деформирования грунта, чем при использовании поверхностей пластичности, но должна быть уточнена.

9. Нелинейные задачи – очень сложные, в которых возникают проблемы точности решения и сходимости итерационных процессов. Вследствие этого вычислительные программы, имеющиеся на современном рынке программного обеспечения, представляют собой «чёрный ящик», с закрытыми, недоступными для проверки алгоритмами. Сертифицировать вычислительные программы по точности решения нелинейных задач невозможно, т.к. каждый алгоритм нелинейной задачи содержит определённые допущения и имеет определённую степень приближения.

10. Вычислительная программа NDS-N, созданная автором, успешно реализует описанные выше модели, методики и алгоритмы и успешно применяется на кафедре ГС МГСУ для решения задач НДС грунтовых сооружений. Процесс создания программы имеет длительную историю, множество этапов переработки модернизации, и он не завершён. Всегда существует потребность в совершенствовании алгоритмов и моделей, поэтому работа требует продолжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боткин А.И.** Исследование напряжённого состояния в сыпучих и связных грунтах. Известия ВНИИГ, том 26, 1940, с. 205-236.
2. **Konder R.L.** Hyperbolic stress-strain response cohesive soils. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 1963, vol. 89, pp. 115-143.
3. **Duncan J.M., Chang C.Y.** Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE 1970, vol. 96, pp. 1629-1653.
4. **Иосилевич В.А., Рассказов Л.И., Сысов Ю.М.** Об особенностях развития поверхностей нагружения при пластическом упрочнении грунта. // В.А.Иосилевич. Избранные труды. Изд. Московского Университета, 2005.
5. **Шашкин А.Г.** Вязко-упруго пластическая модель глинистого грунта. // Развитие городов и геотехническое строительство, 2011, №2, с. 1-32.
6. **Рассказов Л.Н., Джха Дж.** Деформируемость и прочность грунта при расчете высоких грунтовых плотин // Гидротехническое строительство, 1987, № 7, с. 31-36.
7. **Рассказов Л.Н., Шеримбетов Х.С.** Свойства асфальтобетонных диафрагм и экранов каменных плотин // Гидротехническое строительство, 1989, №5, с.26-30.
8. **Schanz, T., Vermeer, P.A., Bonnier, P.G.** 1999. The Hardening Soil Modell – Formulation and Verification. Proceedings Plaxis Symposium “Beyond 2000 in Computational Geotechnics”, Amsterdam, pp.55-58. Rotterdam: Balkema.
9. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование комплексного напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений энергетических объектов // Гидротехническое строительство. 1999. № 8/9. С. 88 -93.
10. **Орехов В.В.** Комплекс вычислительных программ «Земля-89» // Исследования и разработки по компьютерному проектированию фундаментов и оснований : межвузовский сб. Новочеркасск, 1990. С. 14 -20.
11. **Шашкин А.Г., Шашкин К.Г.** Упруго-вязко-пластическая модель структурно неустойчивого глинистого грунта. // Развитие городов и геотехническое строительство, 2005, №9, с.221-228.
12. **Рассказов Л.Н., Беляков А.А.** Расчёт пространственного напряжённо-деформированного состояния каменно-

- земляной плотины // Гидротехническое строительство, 1982, №2, с.16-22.
13. **Беляков А.А.** Пространственная работа грунтовой плотины в широком створе // Гидротехническое строительство, 1988, №12, с.52-58.
 14. **Хуньба Ки Тхуат.** Совместная пространственная работа высокой каменно-земляной плотины и её верховой перемычки с учётом фактора времени // Гидротехническое строительство, 1993, №10, с.41-44.
 15. **Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.** Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // "Вычислительная математика и математическая физика", 1966, т. 6, № 2, с. 203-217.
 16. **Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.** Вариационные задачи механики и управления. «Наука», 1973. - 236 стр.
 17. **Федоренко Р.П.** Приближённое решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978, 483 с.
 18. **Саинов М.П.** Особенности численного моделирования напряжённо-деформированного состояния грунтовых плотин с тонкими жёсткими противофильтрационными элементами. // Вестник МГСУ, 2012, №2, с.102-108.
 19. **Рассказов Л.Н., Бестужева А.С., Саинов М.П.** Бетонная диафрагма как элемент реконструкции грунтовой плотины // Гидротехническое строительство, 1999, №4, с.10-16.
 20. **Goodman R.E., Taylor R.L., Brekke T.L.** A model for mechanics of jointed rock // Journal of the soil mechanics and foundation division. Procceding of the ASCE, 1968, №5, p.637-659.
 21. **Толстиков В.В., Нгуен Дык Нгиа.** Численное моделирование разрушения системы "бетонная гравитационная плотина - блочное скальное основание". // Гидротехническое строительство, 2010, №11, с.6-11.
 22. **Рассказов Л.Н., Анискин Н.А., Бестужева А.С., Саинов М.П., Толстиков В.В.** Сангтудинский гидроузел: напряжённо-деформированное состояние и фильтрация в основании и в обход гидроузла // Гидротехническое строительство, 2008, №5, с.45-58.
 23. **Саинов М.П., Котов Ф.В.** Сравнение вариантов конструкции высокой каменной плотины высокой каменной плотины в условиях Якутии // Вестник МГСУ, 2011, выпуск 5, с.30-35.
 24. **Саинов М.П.** Возможность применения метода подконструкций к решению нелинейных задач о напряжённо-деформированном состоянии плотин // Вестник МГСУ, 2010, выпуск 4, том 2, с.339-345.
 25. **Саинов М.П.** Расчётное обоснование несущей способности арочно-гравитационной плотины Саяно-Шушенской ГЭС // Гидротехническое строительство, 2011, №10, с.2-6.
 26. **Рассказов Л.Н., Саинов М.П.** Численные исследования надёжности высокой каменной плотины с железобетонным экраном и подэкрановой зоной из грунтоцементобетона // Гидротехническое строительство, 2012, №2, с.30-34.
 27. **Саинов М.П., Хохлов С.В.** Анализ работы полимерного экрана высокой грунтовой перемычки на основе расчетов напряженно-деформированного состояния // Вестник МГСУ, 2013, №8, с.78-88.
 28. **Саинов М.П.** Исследование влияния формы створа на работу периметрального шва каменной плотины с железобетонным экраном. // Вестник МГСУ, 2013, №8, с.101-117.
-
- Саинов Михаил Петрович, Московский государственный строительный университет. кафедры гидротехнических сооружений. 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26,
e-mail: mp_sainov@mail.ru
- Michail P. Sainov, Department of hydraulic structures, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Shosse, 129337, Moscow, RUSSIA,
e-mail: mp_sainov@mail.ru

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ФУНДАМЕНТОВ МАШИН ПО КРИТЕРИЯМ ПРОЧНОСТИ ГРУНТА ОСНОВАНИЯ И АМПЛИТУДАМ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.С. Уткин

Вологодский государственный университет, г. Вологда, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: Разработаны новые методы расчетов надежности фундаментов машин. Используются критерии прочности грунта основания фундамента и амплитуды его колебаний. Рассматривается определение надежности при динамических нагрузках на стадии эксплуатации. Определяется надежность при ограниченной статистической информации о контролируемых параметрах. В этом случае классические вероятностно-статистические методы не применимы.

Ключевые слова: фундамент машин, надежность, прочность грунта, амплитуда колебаний, ограниченная информация, теория возможностей, Чебышев, функции распределения, риск, эксплуатация

THE CALCULATION OF THE RELIABILITY OF MACHINE FOUNDATIONS BY THE CRITERIA OF STRENGTH OF THE FOUNDATION SOIL AND THE AMPLITUDES OF WITH LIMITED STATISTICAL INFORMATION

Vladimir S. Utkin

Vologda state university, Vologda, RUSSIA

ABSTRACT: New methods for calculation of reliability machine foundations are developed. Criteria of strength of the foundation soil and amplitude of vibrations are used. We consider the definition of reliability under dynamic loads during the operation phase. The reliability with limited statistical information about controlled parameters is determined. In this case, the classical probabilistic and statistical methods can not be applied.

Key words: machine foundation, reliability, strength of the soil, vibration amplitude, limited information, theory of possibility, Chebyshev, distribution function, risk, exploitation

Фундаменты машин являются ответственными несущими элементами любой механической системы, обеспечивающие ее безопасность эксплуатации.

В процессе эксплуатации промышленных зданий и их оборудования происходят изменения свойств грунта естественных оснований фундаментов машин; изменение динамического воздействия машин и надфундаментных конструкций на фундаменты, как

правило, в сторону увеличения меры воздействия из-за износов узлов машин; изменения технологических процессов и т.д. и возникает со временем вопрос о механической безопасности и вредном влиянии колебаний фундаментов на людей, конструкции, технологический процесс, окружающую среду, здания и сооружения

Для предупреждения и недопущения нарушения нормальной работы фундаментов машин

различного назначения на стадии эксплуатации проводится проверка технического состояния фундаментов в соответствии с требованиями к ним по СП 26.13330.2012 «Фундаменты машин с динамическими нагрузками» по двум критериям:

1. Среднее статическое давление p на грунт естественного основания под подошвой фундамента для всех типов машин должно удовлетворять условию

$$p \leq \gamma_{co} \cdot \gamma_{cl} \cdot R, \quad (1)$$

где R – расчетное сопротивление грунта основания, которое регламентировано СП 22.13330.2011;

γ_{co} – коэффициент условия работы, учитывающий характер динамических нагрузок;

γ_{cl} – коэффициент условия работы основания фундамента.

Значения коэффициентов γ_{co} , γ_{cl} регламентированы СП 26.13330.2012, в зависимости от типов машин и вида грунта основания.

2. Наибольшая амплитуда a колебаний фундамента не должна превышать предельного значения $\dot{a}_e$, регламентированного СП 26.13330.2012, т.е.

$$\dot{a} \leq \dot{a}_e \quad (2)$$

Совокупность – основание, фундамент, надфундаментные конструкции и машина на фундаменте представляет собой сложную механическую систему, отказ или надежность (как вероятность безотказной работы) которой можно рассматривать как с учетом фактора времени (случайный процесс) эксплуатации системы, так и в виде оперативной надежности в данный момент времени. Расчет надежности с учетом фактора времени проводится различными методами (с помощью математических моделей, асимптотическими методами, с помощью иерархических моделей надежности и т.д.), каждый из которых применяется в зависимости от особенностей работы системы и от объема и

точности статических данных о контролируемых параметрах, сбор которых нередко сопряжен с большими трудностями, экономическими затратами, а иногда вообще не возможен.

В [1] предлагается в строительных весьма долговечных конструкциях, где отказ отдельных элементов может быть теоретически определен из сравнения нагрузки и сопротивления, расчет надежности проводить с оценкой вероятности отказа или вероятности безотказной работы без учета фактора времени, а в виде оперативной надежности в данный момент времени на стадии эксплуатации. Такой подход и принят при дальнейшем обсуждении вопроса.

Для расчетов надежности фундаментов машин по СП 26.13330.2012 допускается использование «вероятностных методов и теории надежности, учитывающих статистический разброс жесткости оснований и случайную природу динамических нагрузок».

Следует отметить, что для этих методов и теорий требуется полная статистическая информация о случайных величинах – контролируемых параметрах в расчетных моделях (1) и (2), которую на практике не всегда удается получить на стадии эксплуатации. Например, сопротивление грунта R в процессе эксплуатации изменяется от уплотнения грунта, от возможного увлажнения и других воздействий на грунт основания. Это требует определения значения R на стадии эксплуатации машин. Для этого требуются образцы грунта из-под фундамента (как правило малой площади). Число таких образцов мало для статистического анализа свойств грунта, а для расчетов надежности еще и выявления функции распределения $\tilde{R}$ и ее параметров. По результатам измерения угла внутреннего трения грунта, удельного веса грунта γ_n и удельного сцепления грунта $\tilde{n}_n$ выявляют информацию о R применительно к расчетам надежности фундамента машины по формуле (СП 22.13330.2011).

$$\tilde{R} = \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} (M_{\gamma} k_z b \tilde{\gamma}_{II} + M_c \tilde{c}_{II}) \quad (3)$$

Значения коэффициентов и случайных величин (параметров) в (3) и их описание приведены в СП 22.13330.2011. Случайные величины отмечены в (3) волнистыми линиями над буквенными обозначениями.

Давление p на грунт основания в (1) так же является случайной величиной. Соответственно (1) с учетом (3) запишется в виде:

$$\tilde{p} \leq \tilde{R} = \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} (M_{\gamma} k_z b \tilde{\gamma}_{II} + M_c \tilde{c}_{II}) \quad (4)$$

В настоящее время для измерения давления p на грунт основания используются различные измерители давления, например «извлекаемый измеритель давления грунта ИИДЛ» [2].

Однако число измерений p под подошвой фундамента с ограниченными размерами, как правило, мало, т.к. при каждом измерении p , например прибором ИИДЛ, нарушается структура грунта основания. Из-за малого числа измерений p описание случайной величины $\tilde{p}$ вероятностными методами также представляет проблему, часто неразрешимую. То же самое замечание было сделать о случайных величинах $\tilde{\gamma}_{II} \in \tilde{c}_{II}$ в (4), а так же угла внутреннего трения $\tilde{\varphi}_I$, (при определении значений $\dot{I}_{\gamma}, \dot{I}_N$ по СП 22.13330.2011).

Для описания (характеристики) случайных величин при малых количествах испытаний (при ограниченной статистической информации) в последнее время появился ряд теорий и методов с более осторожным подходом при принятии решения о виде распределения и соответственно более осторожной (интервальной) оценкой надежности несущих конструкций [3,4,5,6 и др.]. Предлагается рассмотреть несколько вариантов описания случайных величин и методов расчета надежности фундаментов машин в условиях ограниченной статистической информации о параметрах в (4) на стадии эксплуатации.

Вариант 1.

Рассмотрим описание случайных величин $p, \gamma_{II} \in \tilde{n}_{II}$ в (4) методами теории возможностей [3], по которой $p, \gamma_{II} \in \tilde{n}_{II}$ называются нечеткими переменными и которые характеризуются различными функциями распределения возможностей, например по [5,7] для $\tilde{p} = X$ функцией вида:

$$\pi_{\delta}(\tilde{o}) = \tilde{a} \tilde{o} \tilde{\delta} \left[- \left(\frac{x - a_{\tilde{o}}}{b_{\tilde{o}}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\tilde{o}} &= 0,5(X_{\max} + X_{\min}), \\ b_{\tilde{o}} &= 0,5(X_{\max} - X_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}, \alpha \in [0,1], \end{aligned}$$

$X_{\max}$ и $X_{\min}$ наибольшее и наименьшее значения величины X в множестве $\{X_i\}$ измеренных значений. α - уровень среза (риска), значением которого задаются в зависимости от числа измерений нечеткой переменной X , ответственности конструкции и от других факторов, приведенных в [8].

На рис. 1 показана в графическом виде функция (5) и две функции распределения возможностей $R(\tilde{o}) \in Q(\tilde{o})$, при этом, как видно из рис.1 $R(\tilde{o}) + Q(\tilde{o}) > 1$. Поэтому нечеткая переменная X характеризуется одновременно двумя функциями $R(\tilde{o})$ и $Q(\tilde{o})$. Различают [3] еще функцию $N(\tilde{o}) = 1 - Q(x)$, которая в [3] называется необходимостью реализации события $X = x$. Таким образом, возможность реализации события $X = x$ (см. рис.1) характеризуется значением интервала $[N; R = 1]$. При этом, чем больше α , тем больше значение $Q(\tilde{o})$ и меньше значение N , соответственно интервал $[N; R = 1]$ становится шире (менее информативным).

В (4) содержится три нечеткие переменные. Обозначим их соответственно $\tilde{\delta} = X$,

$$\tilde{\gamma}_{II} \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} M_{\gamma} k_z b = Y \text{ и } \tilde{c}_{II} \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} M_c = Z.$$

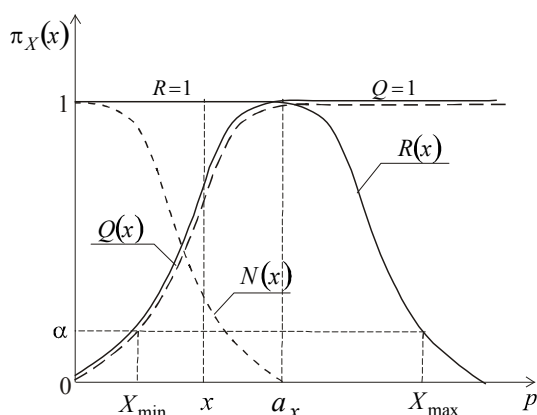


Рисунок 1. Функция распределения возможностей $\pi_{\delta}(\delta)$.

a_{δ} – «среднее» значение X

Параметры распределения в (5) для Y по аналогии с X будут соответственно

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\delta} &= 0,5 \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} M_{\gamma} k_z b(\dot{o}_{\max} + y_{\min}) / 2, \\ b_{\delta} &= 0,5 \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} M_{\gamma} k_z b(\dot{o}_{\max} - y_{\min}) / 2\sqrt{-\ln \alpha}, \\ \alpha &\in [0,1]. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения параметров находят для Z в виде a_z , $\dot{a}_z$ при том же значении α .

По правилам сложения нечетких переменных [3, 5] Y и Z получим новую нечеткую функцию $\pi_{\delta}(t)$ от нечетких аргументов. Функция распределения возможностей для $T = Y + Z$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \pi_{\delta}(t) &= \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{t - (a_y + a_z)}{b_y + b_z} \right)^2 \right] \quad \text{или} \\ \pi_{\delta}(t) &= \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{t - a_t}{b_t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

Расчет надежности по критерию прочности грунта (4) основания фундамента для наглядности представим в графическом виде, изобразив $\pi_x(\delta)$ (нагрузки $\delta = X$) и $\pi_T(t)$ (прочности $\tilde{R} = T$) при одном и том же значении α , как показано для наглядности на рис. 2.

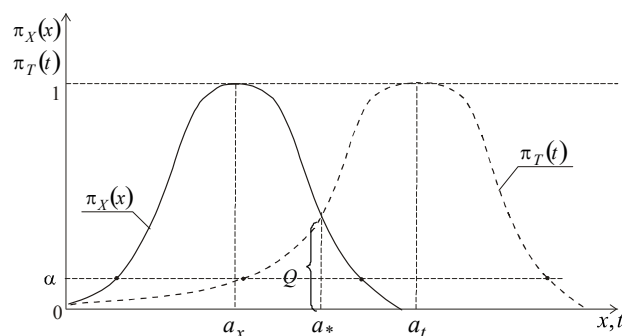


Рисунок 2. Функции распределения возможностей нагрузки $\pi_{\delta}(\delta)$ и прочности $\pi_{\delta}(t)$

Значение отказа Q представлено ординатой функций $\pi_x(\delta)$ и $\pi_{\delta}(t)$ при абсциссе a_* , которая находится из равенства правых частей функций (5) и (6). Выбирается тот корень уравнения $\pi_x(\delta) = \pi_{\delta}(t)$ при $t = x$, который находится в интервале $[a_x; a_t]$ (см. рис.2). Если по исходным данным имеем $a_x \leq a_t$ («средняя» нагрузка меньше или равна «средней» прочности), то возможность безотказной работы $R=1$. Слова «средняя» взяты в кавычках, т.к. вычисление среднего значения проводится только по двум результатам измерений – наибольшему и наименьшему. Как сказано ранее, в теории возможностей [3] вводится еще один показатель реализации события (4) – необходимость безотказной работы $N=1-Q$. Надежность (возможность реализации события (4)) будет характеризоваться интервалом $[N, R]$ или $[P_{\min}, P_{\max}]$, где $P_{\min} = N$ и $P_{\max} = R$ наименьшая и наибольшая «вероятность» события (4).

Пример 1.

Пусть известны значения $\dot{a}_{\delta} = 10$, $b_{\delta} = 1$, $\dot{a}_{\delta} = 8$, $b_{\delta} = 1$, $\dot{a}_z = 6$, $b_z = 1$ (единицы измерения условно не указываются).

$$\begin{aligned} \pi_x(x) &= \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{x - 10}{1} \right)^2 \right]; \quad \pi_y(y) = \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{y - 8}{1} \right)^2 \right]; \\ \pi_z(z) &= \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{z - 6}{1} \right)^2 \right]; \quad \pi_T(t) = \dot{a}\delta\delta \left[-\left(\frac{t - 14}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Из

$$\hat{a}\hat{\sigma}\hat{\sigma}\left[-\left(\frac{x-10}{1}\right)^2\right]=\hat{a}\hat{\sigma}\hat{\sigma}\left[-\left(\frac{t-14}{2}\right)^2\right]$$

найдем (при $t = x$) $x = 11.3$, $\hat{a}_* = 11.3$.

Условие $a_x \leq a_* \leq a_t$ выполнено.

Т.к. $a_x \leq a_y + a_z$, то $R = 1$.

$$Q = \pi_x(11.3) = \hat{a}\hat{\sigma}\hat{\sigma}\left[-\left(\frac{11.3-10}{1}\right)^2\right] = 0.1845, \quad N = 0.8155.$$

Надежность фундамента по критерию прочности грунта (4) характеризуется интервалом $[0.8155; 1]$.

Истинное, но неизвестное, значение надежности фундамента находится внутри этого интервала.

Вариант 2.

Рассмотрим вариант исходной статистической информации о значениях нагрузки $\tilde{\sigma} = X$, в котором число измерений $\tilde{\sigma} = X$ достаточно для определения с заданным уровнем значимости среднего значения $\bar{\sigma} = m_x$ и среднего квадратического отклонения S_{σ} . В этом случае для описания случайной величины $\tilde{\sigma}$ используется распределение, построенное на основе неравенства Чебышева [9, 10, 11], в виде граничных функций $\underline{F}_x(x)$ и $\bar{F}_x(x)$. На рис.3 показано множество возможных функций распределения (заштрихованная часть) для описания $\tilde{\sigma} = X$, но неизвестных распределений $F_x(x)$, ограниченное известными граничными функциями распределения $\underline{F}(x)$ и $\bar{F}(x)$.

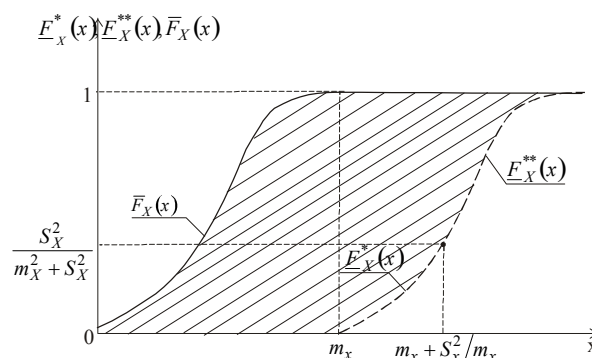


Рисунок 3. Функции распределения $\underline{F}_x(x)$, $\underline{F}_x^{**}(x)$; $\bar{F}_x(x)$

Аналитические выражения граничных функций распределения имеют вид:

$$\underline{F}_x(x) = \begin{cases} \underline{F}_x^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\sigma} < m_x \\ 1 - m_x/x, & \text{если } m_x \leq x \leq m_x + S_x^2/m_x \end{cases} \\ \underline{F}_x^{**}(x) = \frac{(x - m_x)^2}{(x - m_x)^2 + S_x^2}, \text{ если } \tilde{\sigma} > m_x + S_x^2/m_x \end{cases}$$

$$\bar{F}_x(x) = \begin{cases} \frac{S_x^2}{(m_x - x)^2 + S_x^2}, & \text{если } x < m_x \\ 1, & \text{если } \tilde{\sigma} \geq m_x \end{cases}$$

Условные функции плотностей распределений для определения случайной величины X находятся дифференцированием $\underline{F}_x(x)$ и $\bar{F}_x(x)$ по аргументу x имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \underline{f}_x(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x < m_x \\ m_x/x^2, & \text{если } m_x \leq x \leq m_x + S_x^2/m_x \\ 2 \frac{(x - m_x)S_x^2}{[(x - m_x)^2 + S_x^2]^2}, & \text{если } \tilde{\sigma} > m_x + S_x^2/m_x \end{cases} \\ \bar{f}_x(x) &= \begin{cases} 2 \frac{(m_x - x)S_x^2}{[(m_x - x)^2 + S_x^2]^2}, & \text{если } \tilde{\sigma} < m_x \\ 0, & \text{если } x \geq m_x \end{cases} \end{aligned} \right\} (7)$$

Характеристики грунта основания фундамента $\tilde{\gamma}_{II}$ и $\tilde{c}_{II}$ будем описывать функцией (6).

Известно [12], что если X и T независимые случайные величины, то в теории надежности вероятность безотказной работы определяется по формуле:

Расчет надежности фундаментов машин по критериям прочности грунта основания и амплитудам колебаний при ограниченной статистической информации

$$D = \iint_S f_x(x) \cdot f_T(t) dx dt$$

и вероятность отказа

$$Q = \iint_V f_x(x) \cdot f_T(t) dx dt,$$

где S – область безотказной работы,

V – область отказа (в осях x, t).

Для двух независимых случайных величин X и T в [11] приведены так же формулы вида

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \int_T f_x(x) dx dt$$

$$\text{или } Q = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) F_T(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) F_x(t) dt \quad (8)$$

В этих формулах переменная интегрирования по [12] обозначается одной буквой.

При расчете надежности фундамента машины по критерию (4) и описании X по (7) имеем две условные плотности $\underline{f}_x(x)$ и $\bar{f}_x(x)$ (границ множества $F_x(x)$). Соответственно будем иметь два значения вероятности отказа: $\underline{Q}$ – нижнее значение и $\bar{Q}$ – верхнее значение и два значения вероятности безотказной работы $\underline{P} = 1 - \bar{Q}$ и $\bar{P} = 1 - \underline{Q}$.

Если для расчета надежности использовать формулы (8), но с учетом существования $\underline{F}_T(x)$ и $\bar{F}_T(x)$, то для данной задачи будем иметь:

$$\underline{Q} = \int_0^{\infty} \bar{f}_x(x) \underline{F}_T(x) dx \quad \text{и} \quad \bar{Q} = \int_0^{\infty} \underline{f}_x(x) \bar{F}_T(x) dx \quad (9)$$

На рис. 4 условно представлены функции $\underline{F}_x(x)$, $\bar{F}_x(x)$, $\underline{F}_T(t)$; $\bar{F}_T(t)$, при $m_x + S_x^2/m_x \leq a_t$ (как часто бывает на практике), с учетом (6) имеем $\bar{F}_T(t) = \pi_0(t)$, $\underline{F}_T(t) = 1 - \pi_T(t)$.

Подставляя в (9) функции (7) и (6), с учетом (8) и информации о пределах интегрирования, как видно из рис. 4, получим формулы значений вероятностей отказа фундамента по критерию (4).

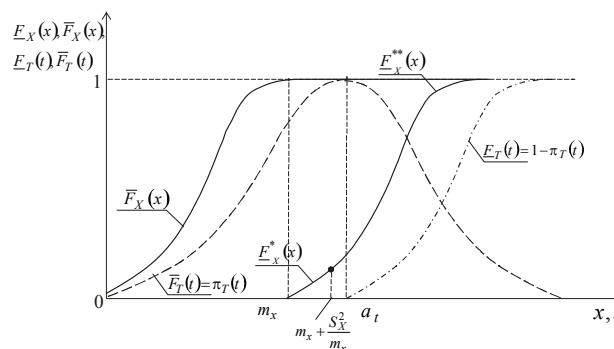


Рисунок 4. Функции распределения $\underline{F}_x(x)$, $\bar{F}_x(x)$, $\underline{F}_T(t=x)$; $\bar{F}_T(t=x)$

$$\begin{aligned} \underline{Q} = & \int_{m_x}^{m_x + S_x^2/m_x} \frac{m_x}{x^2} e^{-\left(\frac{x-a_t}{b_t}\right)} dx + \\ & \int_{m_x + S_x^2/m_x}^{a_t} \frac{2(x-m_x)S_x^2}{[(m_x-x)^2 + S_x^2]^2} e^{-\left(\frac{x-a_t}{b_t}\right)^2} dx + \\ & + \int_{a_t}^{\infty} \frac{2(x-m_x)S_x^2}{[(m_x-x)^2 + S_x^2]^2} \cdot 1 dx \\ \underline{Q} = & 1 - \int_{a_t}^{\infty} 2 \left(\frac{t-a_t}{b_t^2} \right) e^{-\left(\frac{t-a_t}{b_t}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (10)$$

Пример 2.

Пусть известны $m_x = 10, S_x = 1, a_t = 14, b_t = 2$. (условные единицы измерения не показаны). Используя компьютерные программы, например MatCad, найдем $\bar{Q} = 2,005 \cdot 10^{-4} + 0,17759 + 5,8824 \cdot 10^{-2} = 0,2366$, $\underline{Q} = 0$, соответственно $\bar{P} = 1, \underline{P} = 0,7634$. Надежность фундамента по критерию (4) характеризуется интервалом $[0,7634; 1]$.

Из примера видно, что влиянием $\underline{F}_T^*(t)$ при малом S_x по сравнению с m_x можно пренебречь в запас эксплуатационной надежности фундамента. И второе. Если повысить несущую

щую способность основания существующими методами до $a_t = 16$ при $b_t = 2$, то надежность основания повысится и составит $[0,981; 1]$ при $\bar{Q} = 0,019$.

Вставка 3.

Рассмотрим следующий вариант расчета надежности фундамента по критерию (4). Известны работы [12, 13], в которых характеристики грунта $\tilde{\gamma}_{II}$ и $\tilde{c}_{II}$ описываются нормальным (гауссовским) распределением с функцией плотности вероятностей вида

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}}.$$

Такой же функцией описывается $\tilde{c}_{II}$. Следовательно,

$$\tilde{\gamma}_{II} \frac{\gamma_{\bar{n}1} \gamma_{\bar{n}2}}{k} M_{\gamma} k_z b = Y \quad \text{и}$$

$\tilde{n}_{II} \frac{\gamma_{\bar{n}1} \gamma_{\bar{n}2}}{k} M_{\bar{n}} = Z$ будут характеризоваться нормальной функцией распределений. Известно [1, 12, 15], что композиция нормальных функций распределения является нормальным распределением с параметрами $m_t = m_y + m_z$ и $S_t = \sqrt{S_y^2 + S_z^2}$ при независимых Y и Z . В запас надежности примем независимыми $\tilde{\gamma}_{II}$ и $\tilde{c}_{II}$.

Для $T = Y + Z$ будем иметь функцию плотности вероятности

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_t} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S_t^2}} \quad (11)$$

Примем для описания нагрузки $\tilde{p} = X$ функцию принадлежности (5), а для описания прочности $T = Y + Z$ функцию нормального (гауссовского) распределения (11).

На рис. 5 условно изображены эти функции при $a_x \leq m_t$ («средняя» нагрузка меньше или равна средней прочности).

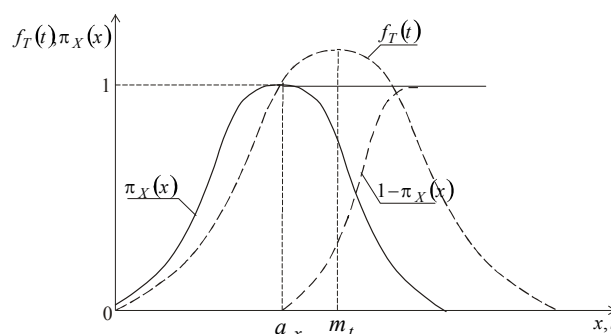


Рисунок 5. Функции плотности распределения $f_T(t)$ и принадлежности $\pi_X(x)$

Условные функции плотностей распределения для X найдем дифференцированием функции (5) по аргументу x .

$$\begin{aligned} \underline{f}_x(x) &= 2 \left(\frac{x - a_x}{b_x} \right) e^{-\left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2}; \quad \text{и} \quad x > a_x \\ \bar{f}_x &= 2 \left(\frac{a_x - x}{b_x} \right) e^{-\left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2} \quad \text{и} \quad x < a_x. \end{aligned}$$

Используя формулы (8) из [12], с учетом $X > 0$ и $T > 0$ для рассматриваемой задачи получим (при обозначении $t = x$)

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \int_0^\infty \underline{f}_x(x) \int_0^x f_T(t) dt dx \\ \underline{Q} &= \int_0^\infty \bar{f}_x(x) \int_0^x f_T(t) dt dx. \end{aligned}$$

Или с учетом пределов интегрирования по рис.5 получим расчетные формулы для значения отказа по критерию (4)

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \int_0^{a_x} 2 \left(\frac{a_x - x}{b_x} \right) e^{-\left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_t} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S_t^2}} dt dx \\ \bar{Q} &= \int_0^\infty 2 \left(\frac{x - a_x}{b_x} \right) e^{-\left(\frac{x - a_x}{b_x} \right)^2} \int_{a_x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_t} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S_t^2}} dt dx \end{aligned}$$

Пример 3.

Пусть известны значения $a_x = 10$, $b_x = 1$, $m_t = 14$, $S_t = 2$ (условные единицы измерения не показаны). Интегрированием с помощью компьютерных программ получим $\underline{Q} = 8,5479 \cdot 10^{-3}$, $\overline{Q} = 4,2225 \cdot 10^{-2}$. Соответственно $\overline{P} = 0,99145$, $\underline{P} = 0,95778$. Если повысить прочность до $m_t = 16$, то получим $\underline{Q} = 3,8228 \cdot 10^{-4}$, $\overline{Q} = 5,1502 \cdot 10^{-3}$.

Рассмотрим расчет надежности фундамента по критерию (2), с учетом изменчивости измеряемой амплитуды колебаний фундамента $\tilde{a}$, по расчетной модели

$$\tilde{a} \leq \dot{a}_e \quad (12)$$

В настоящее время имеются приборы для измерения амплитуды колебаний a , например Вибротест – МГ4, а так же ряд других приборов, приведенных в РД 34.21.306-96 «Методические указания по обследованию динамического состояния строительных конструкций, сооружений и фундаментов оборудования энергопредприятий». С помощью этих приборов можно получить полную статистическую информацию о значениях амплитуды колебаний $\tilde{a}$ и расчет надежности фундамента можно проводить вероятностно-статистическими методами, т.е. можно выявить функцию распределения случайной величины – амплитуды a методами математической статистики. Например, проверить гипотезу нормального (гауссовского), логнормального или другого распределения $\tilde{a}$ по критериям согласия. В (2) a_e - детерминированная величина, значение которой регламентировано в СП 26.13330.2012 (табл.5). Предположим, что $\tilde{a}$ изменяется по нормальному закону, тогда вероятность реализации события (2) по [1,12,15 и др.] можно определить по формуле:

$$D_{ai} = \hat{O} \left(\frac{\dot{a}_u - \tilde{a}}{S_a} \right) = \hat{O}(\lambda). \quad (13)$$

По таблицам Лапласа и значению λ находят значение вероятности D_{ai} .

$\bar{a}$ - среднее значение (статистическое математическое ожидание),

$S_{\dot{a}}$ - среднее квадратическое отклонение (мера изменчивости $\tilde{a}$).

Пример 4.

По результатам измерений $\tilde{a}$ найдены средняя вертикальная амплитуда $\bar{a} = 0,10$ мм и $S_{\dot{a}} = 0,02$ мм при $a_u = 0,15$ мм (по табл. СП 26.13330.2012).

$$P_{ai} = \Phi \left(\frac{0,15 - 0,10}{0,02} \right) = \Phi(2,5) = 0,9937.$$

При групповой установке двух однотипных машин на общем фундаменте амплитуда колебаний фундамента по СП 26.13330.2012 от каждой машины $\tilde{a} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$, то есть в (2) имеем две случайные величины $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$. По результатам измерений a_1 при работе первой машины и a_2 при работе второй машины выявляют закон их изменения методами математической статистики.

Объем статистической информации о контролируемых параметрах благодаря измерителям Вибротест – МГ4 или МГ4.01 позволяют использовать известные распределения в теории надежности. Допустим, что распределение $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ нормальное (гауссовское), тогда, используя теорему теории вероятностей [1,12] о композиции законов распределения двух независимых случайных величин $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, распределенных нормально, получим нормальное распределение с $\tilde{a} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$ и $S_a = \sqrt{S_{a_1}^2 + S_{a_2}^2}$ и дальнейший расчет не отличается от ранее рассмотренного случая расчета вероятности безотказной работы фундамента по критерию (12).

При групповой установке однотипных машин на одном фундаменте по СП 26.13330.2012 амплитуда колебаний фундамента определяется по формуле

$$a = k \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad (14)$$

где k - коэффициент (детерминированная величина) по Своду Правил принимается равным 1,5; 1; 0,7 в зависимости от вида динамической нагрузки. a_i - амплитуда колебания фундамента при работе i -й машины, n - число машин. Замечания по значению допустимой амплитуды колебания фундамента при групповом действии машин можно найти в СП 26.13330.2012.

Известно [16], что, если среднеквадратическое отклонение мало по сравнению со статистическим математическим ожиданием случайной величины ($\tilde{a}_i$), то метод линеаризации может быть распространен с практически приемлемой точностью на функцию $y = \tilde{a}_i^2$ с математическим ожиданием $m_{a_i} = \bar{a}_i \cdot \bar{a}_i$ и дисперсией $S_{a_i}^2 = S_{a_i}^2 + S_{a_i}^2$. Таким образом, если a_i распределено по нормальному закону, то и a_i^2 можно описывать нормальным распределением с $m_{a_i} = \bar{a}_i \cdot \bar{a}_i$ и $S_{a_i}^2 = S_{a_i}^2 + S_{a_i}^2$.

Представим (14) с учетом изменчивости $\tilde{a}_i$ в виде $\tilde{a}^2 = k^2 \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^2 \right)$.

Представим математическую модель предельного состояния по амплитуде колебаний в виде

$$\tilde{a}^2 \leq a_u^2 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n k^2 \tilde{a}_i^2 \leq a_u^2.$$

Введем обозначение $k^2 \tilde{a}_i^2 = X_i$, где X_i - случайная величина, распределения по нормальному закону с математическим ожида-

нием $M_i = k^2 m_i^2$ и среднеквадратическим отклонением $S_i = 2k^2 m_i S_i$. Учитывая, что X_i изменяется по нормальному закону и применяя для композиции $\sum_{i=1}^n X_i$ метод линеаризации [1,12], будем иметь случайную величину $\tilde{a}^2 = X$ с матожиданием $M = \sum_{i=1}^n M_i$ и среднеквадратическим отклонением

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}.$$

Используя формулу (14) и известные [1, 11] вероятностные методы, вероятность безотказной работы найдем по формуле

$$P_{an} = \Phi \left(\frac{a_e^2 - M}{S} \right) = \Phi(\lambda).$$

Пример 5.

Пусть известны $a_u = 0,15$ мм (по табл. 5 СП 26.13330.2012) $a_u^2 = 0,0225$ мм², $n = 3$, $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = 0,08$ мм (для сокращения вычислений), $S_1 = S_2 = S_3 = 0,005$ мм, $k = 1$, $m_i = a_i$, $M_i = 1^2 \cdot 0,08^2 = 0,0064$ мм², $M = 3M_i = 0,0192$ мм², $S = \sqrt{3(2k^2 m_i S_i)^2} = \sqrt{3(2 \cdot 1 \cdot 0,08 \cdot 0,01)^2} = 13,6 \cdot 10^{-4}$ мм². $P_{an} = \Phi \left(\frac{0,15^2 - 0,0192}{13,6 \cdot 10^{-4}} \right) = \Phi(2,43)$.

По таблицам Лапласа имеем $P_{an} = 0,9924$.

При групповой установке на фундамент разнотипных машин по СП 26.13330.2012 амплитуда колебаний фундамента определяется как сумма колебаний, вызываемых работой каждой из машин. При этом в условии (12) a_e принимается на 30% больше значений, приведенных в табл.5 СП для типа машины.

Фундамент машины может отказать либо по прочности грунта, либо по амплитуде колебаний. Если фундамент рассматривать как механическую систему с условными элемен-

Расчет надежности фундаментов машин по критериям прочности грунта основания и амплитудам колебаний при ограниченной статистической информации

тами «прочность» и «амплитуда», то надежность фундамента при вероятностно-статистическом методе расчета надежности последовательной системы определяется по формуле

$$P_S = P_{\text{нп}} \cdot P_{\text{ан}},$$

где $P_{\text{нп}}, P_{\text{ан}}$ - вероятности безотказной работы фундамента по критериям прочности и амплитуде колебания. При интервальных оценках надежности системы с независимыми элементами по [17] имеем

$$\underline{P} = \underline{P}_{\min}, \bar{P} = \bar{P}_{\min}, \text{ т.е. } [\underline{P}_{\min}, \bar{P}_{\min}].$$

Проявляя осторожность при выборе значения надежности фундамента из интервала надежности по критерию прочности (или амплитуды) часто выбирают значение

$$P_{\text{нп}} = P_{\min},$$

т.е. наименьшее значение надежности (вероятности) в «запас» теоретической надежности. Однако может оказаться значение вероятности надежности меньше предельно допустимого по безопасности значения вероятности $P_{\text{нп}}$. Возникает вопрос. Можно ли принять значение $P_{\text{нп}}$ больше значения $P_{\min}$?

Интервал надежности $[N, R]$ или $[P_{\min}, P_{\max}]$ можно рассматривать как множество значений случайной величины - вероятности $\tilde{P}$.

Для описания $\tilde{P}$, когда известны ее точные крайние значения и среднее значение, которое примем

$$P_{cp} = 0,5(P_{\min} + P_{\max}),$$

используется [18] усеченное интервальное распределение, представленное в графическом виде на рис. 6.

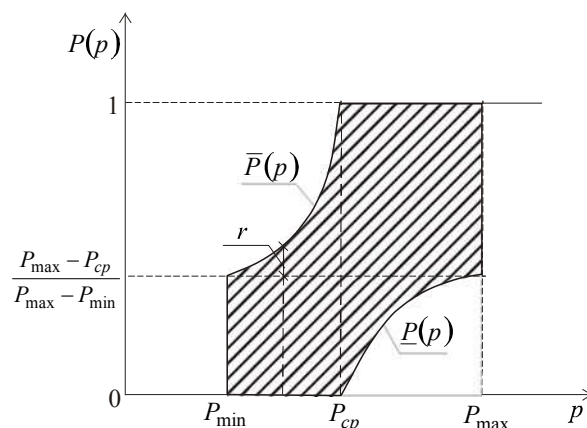


Рисунок 6. Граничные функции распределения $\bar{P}(p), \underline{P}(p)$

Истинная функция распределения случайной величины $\tilde{P}$ находится в заштрихованной части рис. 6, но она неизвестна.

Выражения граничных функций $\underline{P}(p)$ и $\bar{P}(p)$ имеют вид

$$\underline{P}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \leq P_{\min} \\ \frac{P - P_{cp}}{P_{\max} - P_{cp}}, & \text{если } P_{\min} < P < P_{cp} \\ 1, & \text{если } P > P_{cp} \end{cases}$$

$$\bar{P}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \leq P_{\min} \\ \frac{P_{\max} - P}{P_{\max} - P_{cp}}, & \text{если } P_{\min} < P < P_{cp} \\ 1, & \text{если } P > P_{cp} \end{cases}$$

Риск r принятия решения о значении надежности из расчетного интервала надежности $[P_{\min}, P_{\max}]$ равного P_{cp} равен 0,5. В данном случае понятие риска отличается от его понятия, принятого по ГОСТ 3 51901-2002 «Управление надежностью. Анализ риска технологических систем».

При $P \leq P_{\min}$ естественно риск $r = 0$. При $P_{\min} < P < P_{cp}$ значение риска r изменяется от 0 до 0,5 и определяется по формуле $r = \frac{P_{\max} - P}{P_{\max} - P_{cp}} - 0,5$.

Пример 6. Пусть по результатам примера 1 имеем $P_{\min} = 0,8$ и $P_{\max} = 1$, $P_{cp} = 0,9$. Допус-

тим предельное допустимое значение надежности фундамента машины $P_{np} = 0,85$.

Можно ли принять решение и считать, что надежность фундамента обеспечена? При $P = P_{\min} = 0,8 < P_{np} = 0,85$ надежность не обеспечена. А если принять $P = 0,85 = P_{np} = 0,85$, то надежность обеспечена. Найдем значение риска этого решения. $r = \frac{1-0,9}{1-0,85} - 0,5 = 0,17$.

В зависимости от ответственности агрегата и от внешних качественных показателей фундамента можно в некоторых случаях пойти на такой осознанный риск, если он достаточно мал, в противном случае требуется усиление грунта основания фундамента, но это связано с экономическими потерями.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотренные варианты методов расчетов надежности фундаментов машин на стадии эксплуатации при различной по объему и точности статической информации о контролируемых параметрах.
2. Предложены методики расчета надежности фундаментов машин по критериям прочности грунта основания фундамента и амплитуде колебаний, построенных на различных распределениях случайных величин.
3. Предложена методика оценки риска принятия решения о значении надежности фундамента из расчетного интервала надежности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций; пер. с нем. – М.: Стройиздат, 1994, 288 с.
2. Извлекаемые датчики давления грунта [Электронный ресурс]. <http://www.optunion.ru/item/999508581/>
3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике; пер. с фр.. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
4. Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. М. Радио и связь, 1991. – 352 с.
5. Уткин В.С., Уткин Л.В. Расчет надежности механических систем при ограниченной статистической информации: монография. – Вологда, ВоГТУ, 2008. – 188 с.
6. Utkin V.S. Calculating the Reliability of Machine Parts on the basis of the Chebyshev inequality // Russian Engineering Research. – 2012. – Vol. 32, № 1. – P. 5-8.
7. Utkin V.S. Reliability of a Belt-Drive Shaft Characterized by Fuzzy and Random Basic Parameters // Russian Engineering Research. – 2010. – Vol. 30, № 7. – P. 668-670.
8. Уткин В.С. Значение уровня риска в теории возможностей // Строительные материалы. – 2004. – № 8. – С.35.
9. Utkin V.S. Calculating of Shaft Reliability (Strength) on the Basis of Limited Information // Russian Engineering Research. – 2011. – Vol. 31, № 2. – P. 119-122.
10. Уткин Л.В., Уткин В.С., Редькин А.Н. Расчет надежности стальных рам по критерию устойчивости при многопараметрической нагрузке с использованием неравенства Чебышева // Надежность. – 2011. – № 3 – С. 60-67.
11. Уткин В.С., Ярыгина О.В. Расчет надежности индивидуальной железобетонной балки по критерию предельного развития трещин с использованием распределений на основе неравенства Чебышева // Бетон и железобетон, 2011, № 3. – С. 20-22.
12. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.

13. **Ермолаев Н.Н., Михеев В.В.** Надежность оснований сооружений. – Л.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
14. ГОСТ 20522-2012. Грунты. Методы статистической обработки результатов испытаний.
15. **Райзер В.Д.** Расчет и нормирование надежности строительных конструкций. М.: Стройиздат. 1995. – 352 с.
16. **Авиром Л.С.** Надежность конструкций сборных зданий и сооружений. – Л.: Стройиздат. 1971. – 213 с.
17. **Гуров С.В., Уткин Л.В.** Надежность систем при неполной информации. СПб, 1999. – 160с.
18. **Utkin V.S.** Calculating the Reliability of Machine Parts of Truncated Probability-Distribution Functions // Russian Engineering Research. – 2012. – Vol. 32, Jssue 9-10. – P. 627-630.

Владимир Сергеевич Уткин, профессор, доктор технических наук, ФГБОУ ВПО Вологодский государственный технический университет, кафедра Промышленное и гражданское строительство, Россия, 160012, Вологда, Советский проспект, 116, 62,
тел. раб. (8172) 51-83-96,
E-mail: pgs@mh.vstu.edu.ru; UtkinVoGTU@mail.ru

ПАРАМЕТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ БЕТОНОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ СПОСОБОМ НАГНЕТЕНИЯ РАСТВОРА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

С.Г. Есаян, В.В. Погосян, Д.Г. Клекчян

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, г. Ереван, АРМЕНИЯ

АННОТАЦИЯ: Упругопластическое деформирование характеризуется тем, что часть общей энергии, израсходованной при реализации деформации при загрузении упругопластической (УП) среды расходуется на преодоление внутреннего трения. Отношение количества диссипированной энергии к количеству общей энергии деформирования определяет величину коэффициента поглощения для данной упругопластической среды. Для туфобетонных образцов получены значения коэффициента поглощения для 8-ми последовательных циклов, которые показали, что от цикла к циклу коэффициент поглощения уменьшается.

Ключевые слова: упругопластическое деформирование, диссипация энергии, коэффициент поглощения, повторно-циклический процесс, функция напряжения.

PARAMETERS OF ABSORBING ENERGY OF CONCRETES, MADE BY THE METHOD OF SOLUTION INJECTION UNDER CYCLIC LOADING

Spartak G. Yesayan, Vazgen V. Poghosyan, David G. Klechyan

Yerevan State University Architecture and Constructions, Yerevan, ARMENIA

ABSTRACT: Elastic-plastic deformation is characterized by the phenomenon that a part of the total energy spent on implementation of deformation during charging of elastoplastic medium is used for overcoming the internal friction. The ratio of dissipated energy to the amount of the total energy deformation determines the value of the coefficient of absorption for the elastic-plastic medium. This means that for determining the values of coefficient of absorption for the elastic-plastic material need to have an analytical equation of deformation for charging and for discharging.

Keywords: elastic-plastic deformation, energy dissipation, the coefficient of absorption, re-iterative process, the function of stress.

Бетон рассматривается как упругопластический материал. При повторных испытаниях сжимающими напряжениями по программе загрузка до точки M – полная разгрузка до M_1 , загрузка до M – полная разгрузка до M_2 , загрузка до M – полная разгрузка до M_3 и т. д. характерные графики зависимости деформация-напряжение ($\varepsilon - \sigma$) для упругопластического (УП) материала показаны на

рис.1. При каждом цикле остаточная деформация постепенно уменьшается:

$$OM_1 > M_1M_2 > M_2M_3 > \dots$$

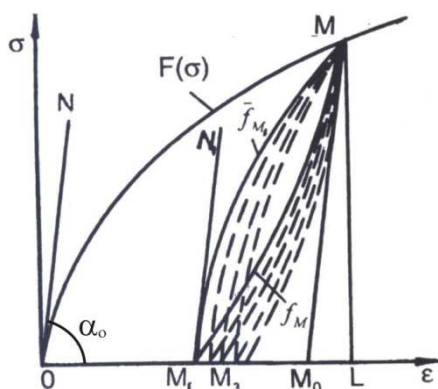


Рисунок 1. Зависимости $\varepsilon - \sigma$ при повторных нагружениях.

Если через k обозначить количество циклов: $k=1,2,3,\dots$, то при достаточно больших значениях k MM_k стремится к MM_0 (MM_0 параллельна касательной в точке O проведенной к базовой кривой $\varepsilon = F(\sigma)$: $MM_0 \parallel ON \parallel M_1N_1$ и материал становится псевдоупругим. Такую закономерность поведения упругопластических материалов при циклических нагружениях согласуется с многочисленными экспериментами [1].

Если нисходящую кривую MM_k обозначить через f_k , а восходящую - M_kM через $\bar{f}_k$, то петля гистерезиса, заключенная между этими кривыми и отражающая количество израсходованной безвозвратно диссипированной пластической энергии при каждом цикле, при увеличении k монотонно уменьшается и стремится к нулю, когда MM_k совпадает с MM_0 . Для вычисления количества диссипированной энергии Θ_H при каждом цикле k : Θ_{Hk} необходимо иметь аналитическую функцию кривых f_k и $\bar{f}_k$. Эта весьма важная проблема решена в [2]: реологическим моделированием упругопластических процессов и для первой разгрузочной кривой f_M выведено уравнение

$$f_M = F(\sigma_M) - 2F[0,5(\sigma_M - \sigma)]. \quad (1)$$

На основе (1) можно получить аналитическую функцию разгрузочных кривых f_k и загрузочных кривых $\bar{f}_k$:

$$f_k(\sigma) = \bar{f}_{k-1}(R) - 2\{\bar{f}_{k-1}[0,5(R - \sigma)] - \bar{f}_{k-1}(0)\}, \quad (2)$$

$$\bar{f}_k(\sigma) = \bar{f}_{k-1}(R) - 2[\bar{f}_{k-1}(0,5R) - \bar{f}_{k-1}(0,5\sigma)], \quad (3)$$

где $k = 1,2,3,\dots$, $\bar{f}_0 = F(\sigma)$, $R = \sigma_M$.

При сжатии элемента из упругопластического материала до состояния $M[\varepsilon_M, \sigma_M]$ по кривой функции $\varepsilon = F(\sigma)$ затрачивается работа, величина которой равняется площади, заключенной между кривой функции $F(\sigma)$ в промежутке OM и прямыми $\sigma = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_M = F(\sigma_M)$ (рис. 2).

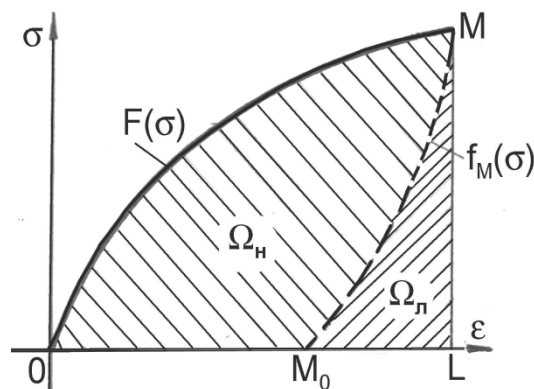


Рисунок 2. Потенциальные энергии УП деформирования: Ω_L - упругая энергия, Ω_H - диссипированная энергия.

$$\Theta_0 = OL \times ML - \int_0^{\sigma_M} F(\sigma) d\sigma = \sigma_M F(\sigma_M) - \int_0^{\sigma_M} F(\sigma) d\sigma. \quad (4)$$

Затраченная работа $\Theta_0 = \Omega_0$ (индекс при Θ означает процесс из исходной позиции O) состоит из двух составляющих: линейно-упругой - Θ_L и нелинейно-диссипированной - Θ_H : $\Theta_0 = \Theta_{L0} + \Theta_{H0}$ (рис. 2). При разгрузке упруголинейная составляющая израсходованной энергии $\Theta_L = \Omega_L$ возвращается пол-

ностью, а нелинейная часть безвозвратно затрачивается на преодоление внутренних неупругих сопротивлений, обусловленных пластической структурой УП материала.

Площадь $\Omega(M_0ML)$, заключенная между кривой f_M и прямыми $\sigma=0$ и $\varepsilon=\varepsilon_M$, равняется упруго-линейной энергии, которая возвращается при разгрузке:

$$\mathcal{E}_{\text{л0}} = \Omega(M_0ML) = OLxML - \int_0^R f_M(\sigma) d\sigma. \quad (5)$$

Количество нелинейно-диссипированной энергии равно

$$\mathcal{E}_{\text{н0}} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{л0}} = \int_0^R [f_M(\sigma) - F(\sigma)] d\sigma. \quad (6)$$

При разгрузки M с позиции до M_0 и вторым нагружением с M_0 до M петля гистерезиса будет ограничена кривыми $f_M - \bar{f}_{M_0}$ (рис.3). Имея аналитическую функцию уравнений деформационных кривых $F(\sigma)$, f_M и $\bar{f}_{M_0}$ получится количество безвозвратно израсходованной пластической энергии при первом цикле разгрузка-нагрузка по $M - M_0 - M$:

$$\Omega_{\text{н}} = \int_0^R [f_M(\sigma) - \bar{f}_{M_0}(\sigma)] d\sigma. \quad (7)$$

В этом случае приложенная упругопластическая энергия равняется площади фигуры, заключенной между кривой $\bar{f}_{M_0}$ и прямыми $\sigma=0$ и $\varepsilon=\varepsilon_M$:

$$\mathcal{E}_{M_0} = \Omega(M_0ML) = OLxML - \int_0^R \bar{f}_{M_0}(\sigma) d\sigma, \quad (8)$$

что значительно меньше, чем начально затраченная работа $\mathcal{E}_O$, израсходованная для того, чтобы достичь точки M , только с начала координат O :

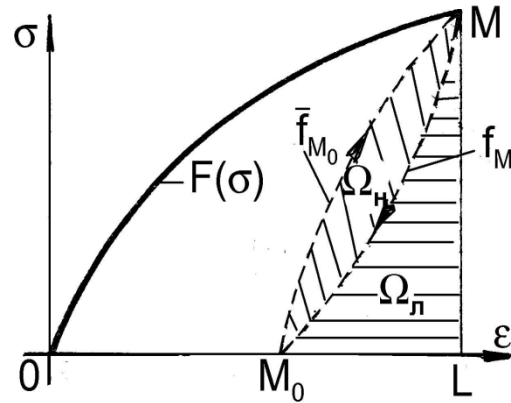


Рисунок 3. Величины упругой и пластической энергий.

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_O - \mathcal{E}_{M_0} = \int_0^{\sigma_M} [f_{M_0}(\sigma) - F(\sigma)] d\sigma. \quad (9)$$

Это объясняется тем, что упругая составляющая деформирования по $\bar{f}_{M_0}$ с точки M_0 до M в процентном отношении (по сравнению с пластической составляющей от общей израсходованной энергии) гораздо больше, чем от точки O до M по $F(\sigma)$.

Таким образом для любой петли гистерезиса под номером k :

$$\Omega_{ik} = \int_0^R [f_k(\sigma) - \bar{f}_k(\sigma)] d\sigma. \quad (10)$$

Имея уравнения загрузочных и разгрузочных кривых f_k и $\bar{f}_k$, можно определить величины коэффициентов поглощений ψ_k для каждого отдельного полного цикла нагружения-разгрузки. Для первого цикла, произведенного по OMM_1 по следам $F(\sigma) - f_1$ (рис.1), коэффициентом поглощения является отношение диссипированной энергии (площадь OMM_1O) к израсходованной общей энергии (площадь $OMLO$). Для второго цикла по $\bar{f}_1 - f_2$: ψ_2 определяется как отношение количества диссипированной энергии к израсходованной общей энергии. При этом ее величина равна отношению площади, заключенной между $\bar{f}_1$ и f_2 к затраченной энергии (пло-

щадь между $\bar{f}_1$, ML и M_1L). Коэффициент поглощения при реализации цикла под номером k (ψ_k) есть отношение площади между кривыми $\bar{f}_{k-1}$ и f_k к площади между кривой $\bar{f}_{k-1}$ и прямыми OL и M_kL :

$$\psi_1 = \frac{\int_0^R [f_1(\sigma) - \bar{f}_0(\sigma)] d\sigma}{\Omega - \int_0^R \bar{f}_0(\sigma) d\sigma}; \quad \psi_2 = \frac{\int_0^R [f_2(\sigma) - \bar{f}_1(\sigma)] d\sigma}{\Omega - \int_0^R \bar{f}_1(\sigma) d\sigma};$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^R [f_k(\sigma) - \bar{f}_{k-1}(\sigma)] d\sigma}{\Omega - \int_0^R \bar{f}_{k-1}(\sigma) d\sigma}, \quad (11)$$

где $\Omega = R \times OL$.

Для примера рассмотрим функцию напряжения:

$$F(\sigma) = [a\sigma + (b\sigma)^{n+1}] / E_0, \quad (12)$$

где n - степень нелинейности, a, b - опытные параметры, притом

$$a + b = 1, \quad E_0 = tg\alpha_0.$$

Уравнения разгрузочных и загрузочных кривых имеют вид

$$f_k(\sigma) = \{ (bR)^{n+1} + a\sigma - 2^{-kn} [b(R-\sigma)]^{n+1} \} / E_0, \quad (13)$$

$$\bar{f}_k(\sigma) = \{ (1 - 2^{-kn})(bR)^{n+1} + a\sigma - 2^{-kn} (b\sigma)^{n+1} \} / E_0 \quad (14)$$

Величина остаточных деформаций при каждом цикле равна

$$\varepsilon_k(0) = f_k(0) = \bar{f}_k(0) = (1 - 2^{-knj})(bR)^{n+1} / E_0. \quad (15)$$

Величины коэффициентов поглощения определяются рекуррентной формулой

$$\psi_k = \frac{n+1-2^{-n}}{n+1 + \frac{(n+2)a}{2b^{n+1}R^n} 2^{(k-1)n}}, \quad (16)$$

где значения R необходимо выражать в кг/см².

Для упругого материала: $n=0$ и $\psi=0$. Для идеально пластического материала $\psi=1$. Как видно из (16), ψ в явном виде не зависит от начального модуля упругости материала. Величины E_0 влияют на значения параметров a и b и через них на ψ . Важное значение имеет еще и то, что ψ зависит от количества циклов k (уменьшается с ростом k , поскольку с ростом процесс все больше и больше линеаризуется).

Для примера рассчитаем численные значения коэффициентов поглощения при следующих данных, полученных нами при испытании туфобетона (состав: щебень из туфа: 714 кг, песок из туфа: 595 кг, цемент М-400: 410 кг, вода: 281 л.), изготовленного по технологии нагнетания раствора под давлением:

$$a=0,85 \quad b=0,15, \quad R=180 \text{ кг/см}^2.$$

Значения ψ_k , рассчитанные для степени нелинейности $n=1-4$ и $k=1-8$, приведены в табл. 1

По данным таблицы можно сделать ряд важных выводов о поведении упругопластического деформирования под воздействием циклически меняющейся нагрузки. Так, например, с ростом n значения ψ_k растут до шестого цикла. Начиная с шестого цикла, с ростом n величины $\psi_{6,7,\dots}$ значительно уменьшаются, т.е.

$$\psi_{6,7,\dots}(n=1) > \psi_{6,7,\dots}(n=2) > \psi_{6,7,\dots}(n=3) > \psi_{6,7,\dots}(n=4).$$

Таблица 1. Зависимость ψ от количества циклов и степени нелинейности.

n	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
1	0,6 48	0,5 70	0,4 60	0,3 32	0,2 13	0,1 24	0,0 68	0,0 35
2	0,9 12	0,8 98	0,8 46	0,6 88	0,3 94	0,1 45	0,0 41	0,0 11
3	0,9 69	0,9 67	0,9 58	0,8 87	0,5 58	0,1 40	0,0 20	0,0 03
4	0,9 88	0,9 87	0,9 86	0,9 62	0,6 96	0,1 28	0,0 09	0,0 01

Это значит, что чем больше степень нелинейности, тем активнее процесс линеаризации кривых деформаций с увеличением циклов «загрузки-разгрузки». Это можно объяснить тем, что чем больше внутреннее трение, тем активнее диссипация нелинейной составляющей энергии и рост отношения упругой составляющей к пластической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Москвитин В.В.** Пластичность при переменных нагрузжениях. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 264 с.
2. **Есаян С.Г.** Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических сред. – Ереван, Чартарагет, 2009. – 368 с.

Есаян Спартак Гургенович, доктор технических наук, профессор кафедры технологии и организации строительного производства Ереванского государственного университета архитектуры и строительства (ЕГУАС), 0009 Ереван, Теряна 105, тел. +37498853993, e-mail: s.g.yesayan@mail.ru.

Погосян Вазген Володяевич, доктор технических наук, доцент кафедры технологии и организации строительного производства Ереванского государственного университета архитектуры и строительства (ЕГУАС), 0009 Ереван, Теряна 105, тел. +37493406900, e-mail: Vvpoghosyan@gmail.com.

Клекчян Давид Грачикович, кандидат технических наук, преподаватель кафедры технологии и организа-

ции строительного производства Ереванского государственного университета архитектуры и строительства (ЕГУАС), 0009 Ереван, Теряна 105, тел. +37491200984, e-mail: klekchyan@mail.ru.

Yesayan Spartak Grigor, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Construction Mechanics of Yerevan State University Architecture and Constructions (YSUAC), 0009 Yerevan, Teryan 105, tel. +37498853993, e-mail: s.g.yesayan@mail.ru.

Poghosyan Vazgen Volodya Doctor of Technical Sciences, docent Department of Construction Mechanics of Yerevan State University Architecture and Constructions (YSUAC), 0009 Yerevan, Teryan 105, tel. +37493406900, e-mail: Vvpoghosyan@gmail.com.

Klekchyan David Grachik, Candidate of Technical Sciences, teacher Department of Construction Mechanics of Yerevan State University Architecture and Constructions (YSUAC), 0009 Yerevan, Teryan 105, tel. +37491200894, e-mail: klekchyan@mail.ru.

**РЕЦЕНЗИИ НА СЕРИЮ КНИГ
А.Б. ЗОЛотова, П.А. АКИМОВА, В.Н. СИДОРОВА,
М.Л. МОЗГАЛЕВОЙ, А.Р. ТУСНИНА**

В.В. Петров

Саратовский государственный технический университет, г. Саратов, РОССИЯ

АННОТАЦИЯ: В настоящей публикации рассматриваются печатные издания последних лет авторского коллектива профессоров Московского государственного строительного университета Александра Борисовича Золотова, Павла Алексеевича Акимова, Владимира Николаевича Сидорова, Марины Леонидовны Мозгалевой и Александра Романовича Туснина.

Ключевые слова: монография, учебник, учебное пособие, рецензия, информатика, численные методы, строительная механика, строительные конструкции

**REVIEW OF BOOKS OF ALEXANDER B. ZOLOTOV,
PAVEL A. AKIMOV, VLADIMIR N. SIDOROV,
MARINA L. MOZGALEVA, ALEXANDER R. TUSNIN**

Vladilen V. Petrov

Saratov State Technical University, Saratov, RUSSIA

ABSTRACT: The distinctive paper is devoted to review of books of professors Alexander B. Zolotov, Pavel A. Akimov, Vladimir N. Sidorov, Marina L. Mozgaleva, Alexander R. Tusnin from Moscow State University of Civil Engineering which have been published in the recent years.

Keywords: monograph, textbook, tutorial, review, computer science, numerical methods, structural mechanics, structures

**1. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ
«ОЛИМПИЙСКАЯ АРХИТЕКТУРА.
BEIJING 2008»
(перевод на русский язык и научное
редактирование – В.Н. Сидоров,
П.А. Акимов; Москва, Издательство
АСВ, 2008. – 316 страниц)**

Олимпийские игры 2008 года в Пекине – были, как известно, не только грандиозным спортивным форумом, за которым следили миллиарды телезрителей во всем мире, но также стали и мощнейшим стимулом развития и реализации мирового и прежде всего китайского архитектурно-строительного по-

тенциала. Действительно сегодня Олимпийские игры не только предоставляют возможность спортсменам всего мира продемонстрировать свою силу и красоту, но также становятся ареной достижений мирового строительства и архитектуры, демонстрируя соответствующие инновации и передовые технологии.

Научное редактирование и перевод с английского языка на русский книги об олимпийских архитектурных и строительных объектах осуществляли профессора Московского государственного строительного университета (МГСУ) В.Н. Сидоров и П.А. Акимов. Оно содержит достаточно подробный обзор

всех спортивных объектов (как вновь построенных, так и реконструированных; основных и вспомогательных), на которых прошли Олимпийские игры 2008 года в Пекине. За каждым из этих объектов стоит группа признанных во всем мире архитекторов, творения которых позволяют получить наглядное представление о развитии современной архитектуры. Пекинская олимпиада предоставила строителям и архитекторам Китая и всего мира прекрасную возможность воплотить свой талант и мудрость в профессиональном творчестве.

Книга содержит специальную информацию о различных параметрах каждого объекта, ставшего неоценимым наследием олимпийской культуры и совместным архитектурным богатством для людей всего мира. Это издание включает эффектные фотографии, изображения планов и фасадов, схемы разрезов с ясными и обстоятельными профессиональными пояснениями по каждому проекту. В ней рассматриваются строительные конструкции спортивных объектов, созданные совместными усилиями китайских специалистов и их зарубежных коллег, определившие новые ориентиры для архитекторов и проектировщиков всего мира. И здесь следует отметить, в первую очередь, такие грандиозные сооружения как Национальный стадион «Птичье гнездо» и Национальный центр водных видов спорта «Водный куб».

Реализованные проекты воплощают провозглашенные организаторами спортивного форума идеалы «Зеленых Олимпийских игр, Высокотехнологичных Олимпийских игр и Народных Олимпийских игр» и в полной мере отражают уникальное сочетание современных архитектурных форм с богатейшими традициями китайской культуры.

Полагаю, что издание рецензируемой книги в России на русском языке – это без преувеличения важное событие для архитектурно-строительного сообщества нашей страны. Убежден, что публикация настоящего издания поможет российским специалистам получить лучшее представление об архитек-

турных замыслах, проектировании и особенностях возведения олимпийских спортивных объектов Китая, и будет способствовать распространению новых прогрессивных тенденций архитектурного проектирования, организации строительного производства и управления строительством, модернизации городского строительства в нашей стране.

2. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРИЛОЖЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ»
(авторы – А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева; Москва, Издательство АСВ, 2010. – 336 страниц)

Как известно, строительные конструкции, здания и сооружения, в которых имеется постоянство или регулярность физико-геометрических характеристик по одному из координатных направлений имеют массовое распространение. Это связано, в частности, с тем, что многие такие объекты являются типовыми и технологичными в производстве. Характерными примерами являются балки, балки-стенки, тонкостенные стрелы, полосы, ленточные фундаменты, плиты, пластины, оболочки, высотные и протяженные здания и комплексы, трубопроводы, плотины, рельсы, резервуары и т.д.

Современные мощные программные комплексы, реализующие известные численные методы, в частности метод конечных элементов, разумеется, позволяют проводить всестороннее численное моделирование вышеперечисленных объектов. Тем не менее, для оценки точности и сходимости численных методов, для контроля и верификации используемого программного обеспечения, а также для установления важных качественных особенностей работы строительных конструкций, зданий и сооружений очень важно уметь корректно строить точные аналитические решения соответствующих задач. В частности, весьма ценным представляется

аналитическое определение расчетных факторов (перемещений, деформаций, напряжений и т.д.) вдоль направления постоянства физико-геометрических характеристик объекта (так называемого «основного направления»). Разработанные А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым дискретно-континуальные методы успешно решили данную проблему.

Семейство разработанных дискретно-континуальных методов включает дискретно-континуальный метод конечных элементов, дискретно-континуальный метод граничных элементов и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод. Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по выделяемому направлению постоянства характеристик (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного рода с обоснованно контролируемой степенью точности. Под аналитическим решением здесь понимается наличие явной формулы вычисления напряженно-деформированного состояния объекта в произвольной точке сечения (так, например, решение в рядах с этих позиций не рассматривается как аналитическое).

Рецензируемая книга посвящена исключительно дискретно-континуальному методу конечных элементов, являющемуся, по оценкам авторов, наиболее эффективным из всего семейства дискретно-континуальных методов с точки зрения практических приложений.

Дискретно-континуальный метод конечных элементов относится к классу численно-аналитических или, следуя терминологии О. Зенкевича, полуаналитических методов. В последние десятилетия эти методы не получали того внимания, которого заслуживали, особенно в области строительства, где властвовал метод конечных элементов. С другой стороны, нельзя не отметить, что это направление в строительной механике имеет давнюю и богатую историю (метод Л.В. Канто-

ровича, метод В.З. Власова, метод прямых, метод Микеладзе-Ланцоша, метод конечных полос, метод конечных слоев, метод конечных призм и т.д.). Преимущества сочетания качественных свойств замкнутых решений и общности численных методов, безусловно, отмечались и раньше, но, несмотря на былую популярность подобных подходов и участие в исследованиях ряда крупных ученых, многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия необходимого математического аппарата или высокопроизводительной вычислительной техники, либо в той или иной мере не учитывалась специфика возникающих проблем и необходимость последующей компьютерной реализации. В начале XIX века появились объективные возможности для дальнейшей разработки, исследования и развития численно-аналитических методов на качественно ином уровне.

Подобно многим традиционным аналогам, дискретно-континуальный метод конечных элементов, предусматривающий понижение мерности задачи, сводится к решению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Данные системы допускают точное аналитическое решение, и в этом смысле всегда естественна была цель его получения. Однако вплоть до недавнего времени не было предложено универсальных методов построения аналитического решения в устойчивой форме, не зависящей от условий конкретной задачи (длина объекта, жесткостные характеристики, граничные условия, характер нагружения, большое количество дифференциальных уравнений и пр.). Причины такого отсутствия, связанные с определенными математическими сложностями, и сравнения разработанного метода с известными альтернативными подходами обсуждаются в рецензируемой монографии. В публикациях ее авторов впервые были предложены корректные методы получения точных аналитических решений, практически свободные от всех вычислительных недостатков.

Структура подачи материала монографии авторами кратко описана ниже.

В Главе 1 монографии рассматриваются и анализируются традиционные численно-аналитические методы расчета строительных конструкций и методы аналитического решения краевых задач строительной механики.

В Главе 2 монографии сформулированы основополагающие операторные и вариационные постановки краевых задач расчета строительных конструкций в рамках метода расширенной области, предложенного А.Б. Золотовым.

Глава 3 монографии посвящена описанию универсальных корректных методов точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики.

В Главе 4 монографии приведены операторные постановки задач статического расчета конструкций с выделением основного направления.

В Главе 5 монографии изложены некоторые важные вопросы определения собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов краевых задач статического расчета конструкций с выделенным основным направлением.

Глава 6 монографии призвана разъяснить идею и раскрыть математические особенности реализации дискретно-континуального метода конечных элементов.

В Главе 7 монографии рассматриваются вопросы численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета строительных конструкций, зданий и сооружений.

В Главе 8 монографии содержатся операторные постановки проблем определения собственных значений и собственных функций краевых задач расчета конструкций с выделением основного направления.

Наконец, в Главе 9 монографии, описано определение собственных частот и форм колебаний строительных конструкций, зданий и сооружений с использованием дискретно-континуального метода конечных элементов.

Кроме того, авторы включили в монографию пять приложений.

Приложение 1 посвящено методу базисных вариаций для численного решения краевых задач расчета конструкций. Этот метод широко используется на этапе численной реализации дискретно-континуального метода конечных элементов.

В Приложении 2 и Приложении 3 описаны универсальные методы построения матриц жесткости конечных элементов при решении одномерных задач строительной механики для скалярного и векторного случая соответственно. Эти методы применяются при переходах от континуальных к дискретно-континуальным постановкам ряда рассмотренных в книге задач.

В Приложении 4 изложен аналитический метод вычисления геометрических характеристик поперечных сечений элементов конструкций.

В Приложении 5 обсуждается проблема оценки числа вещественных собственных значений в задаче об установившихся колебаниях упругого полуцилиндра. Эта близкая к тематике настоящей книги проблема традиционно рассматривалась в работах многих известных ученых-математиков.

Заметим, что все перечисленные приложения носят вспомогательно-справочный характер – их результаты использовались при разработке, исследовании и развитии дискретно-континуального метода конечных элементов. Рецензируемая монография посвящена актуальной теме, изложенные в книге результаты авторов обладают несомненной научной новизной и практической значимостью. Авторские исследования, в целом, связаны с важнейшей и актуальной целью построения универсальных программных комплексов «промышленного типа» для получения достоверных аналитических решений, гарантирующих уточненный характер проводимых расчетов, необходимый для обеспечения технологической безопасности строительных объектов мегаполиса.

**3. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ
«ИНФОРМАТИКА
В СТРОИТЕЛЬСТВЕ
(С ОСНОВАМИ ЧИСЛЕННОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ)»**

**(авторы – А.Б. Золотов, П.А. Акимов,
В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева; Москва,
Издательство «Архитектура – С», 2010.
– 336 страниц)**

Рецензируемая книга имеет «гриф»: «Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство». Она написана на основе двух курсов лекций, читаемых в последние годы студентам Московского государственного строительного университета (МГСУ) преподавателями кафедры информатики и прикладной математики. Этим курсам условно соответствуют две части книги. В первой части приводится краткая характеристика современных языков и систем программирования (Глава 1), изучаются вопросы программирования на алгоритмическом языке Фортран (Глава 2), основы численных методов (Глава 3) и приложения этих методов к решению конкретных прикладных задач (Глава 4) – такой трехсеместровый курс «Информатика» слушают студенты всех технических факультетов МГСУ. Вторая часть книги (Глава 5), соответствующая семестровому курсу «Строительная информатика» на факультете «Промышленное и гражданское строительство» МГСУ, содержит описание системы MATLAB, теоретические основы и программные реализации численных, аналитических и численно-аналитических методов решения задач сопротивления материалов, строительной механики и математической физики. Привлечение системы MATLAB в дополнение к языку Фортран (его современным стандартам) представляется методически целесообразным решением. Следует отметить, что материал отдельных глав книги

рассматривается также в курсах «Алгоритмические языки и программирование» и «Программные и аппаратные средства ЭВМ», читаемых студентам ряда направлений подготовки и специальностей в МГСУ.

Следует отметить, что принятый авторами стиль изложения во многом определяется характером будущей работы студентов. Для них информатика и численное моделирование в первую очередь будут современным наукоемким инструментом решения прикладных технических проблем. Кроме того, рассматриваемый материал позволяет понять принципы построения и функционирования современных высокопроизводительных программных комплексов промышленного типа, распространенных в строительной отрасли, и основы реализуемых в них методов.

В современных методах вычислений можно выделить, прежде всего, те общие методы, которые имеют широкое применение и уже стали достоянием математики. Заслуживают не меньшего внимания методы, которые развиты в приложениях для решения специальных, но важных классов задач. Этому делению отчасти соответствуют две части книги. Так, если в Главах 3 и 4 первой части нашли отражение традиционные численные методы, то в Главе 5 рассмотрены, в том числе, и оригинальные современные подходы (универсальный метод построения матриц жесткости и векторов нагрузок в терминологии метода конечных элементов при решении одномерных задач расчета конструкций; дискретно-аналитический метод решения задачи теплопроводности; дискретно-аналитический метод решения задачи о колебаниях балки при ударном воздействии; численно-аналитический метод вычисления геометрических характеристик поперечных сечений элементов конструкций, использующий теорию обобщенных функций и т.д.). Материал второй части книги несет двойную нагрузку. Во-первых, описываемые там задачи достаточно востребованы в приложениях, а опыт их успешного решения представляет прямой интерес. Во-вторых,

разработка эффективного метода решения частной задачи обычно связана с использованием приемов, имеющих более широкое, выходящее за рамки данной задачи значение. Поэтому авторы стремятся познакомить читателя с такими приемами на примерах решения конкретных задач, в которых они были использованы с очевидным эффектом.

Представляется, что в ходе изложения авторы не всегда стремились к максимальной общности и безупречной строгости формулировок. Думается, что сделанные отступления от распространенного педантичного стиля современной литературы по численным методам будут способствовать большему пониманию и усваиванию излагаемого материала студентами технических высших учебных заведений.

Весь теоретический материал снабжен большим количеством примеров, которые носят как поясняющий, так и контрольный характер. Заметим, что задания на выполнение практических и лабораторных работ, представленные в Главе 4, носят модельный характер, удобный для отладки представленных программ, с легко предсказуемыми ответами.

Следует отметить, что авторы сознательно оставили за рамками данного учебного пособия изложение вопросов, связанных с классификацией и устройством современных компьютеров, описанием компьютерных сетей, основами работы с популярными операционными системами, антивирусными пакетами, средствами защиты информации и офисными приложениями. Это было сделано с тех позиций, что все вышеперечисленное традиционно изучается в школьных курсах дисциплины «Информатика».

В конце книги приведен библиографический список, пользуясь которым можно более полно изучить рассмотренные вопросы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических высших учебных заведений, обучающихся по дисциплинам «Информатика», «Строительная информатика», частично может использоваться при изучении дисцип-

лин «Алгоритмические языки и программирование», «Программные и аппаратные средства ЭВМ», рекомендуется студентам старших курсов при выполнении курсовых и дипломных проектов и работ, а также аспирантам, а также полезно для самостоятельного изучения.

4. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«АРХИТЕКТУРА НА «ЭКСПО-2010 В ШАНХАЕ»

(перевод на русский язык и научное редактирование – В.Н. Сидоров, П.А. Акимов; Москва, Издательство АСВ – Beijing: Издательство China Architecture & Building Press, 2010. – 342 страницы)

Уникальность настоящей книги в том, что она уже является, по сути, летописью. Здания павильонов всемирных выставок «ЭКСПО», как правило, уникальные и грандиозные по архитектурным замыслам и конструктивным решениям, они являются впечатляющим символом городов и стран и их жителей, которые представляют. Но при этом большинство из них являются временными, жизнь их коротка они сносятся, разбираются и безвозвратно уходят в историю. Но остаются в таких книгах, как эта в красочных снимках, чертежах, схемах, и профессиональных пояснениях. Вот уже более 150 лет выставки «ЭКСПО» являясь ярким историческим событием, демонстрируют при этом архитектурные инновации. Для «ЭКСПО» были построены Хрустальный дворец в Лондоне, Эйфелева башня и мост Александра III в Париже, ротонда Шухова в Нижнем Новгороде, «Космическая игла» в Сиэтле и др. Эти выставки всегда тематические, так шанхайская «ЭКСПО» стала символом развития глобальной урбанизации с девизом «Лучше город – лучше жизнь», однако при этом они традиционно являются лабораториями и масштабными экспериментальными площадками как маститых, так и молодых талантли-

вых архитекторов большого количества стран. Безусловно, форумом достижений мировой архитектуры стала и «ЭКСПО» - 2010 в Шанхае.

Научное редактирование и перевод на русский книги об архитектурных и строительных объектах «ЭКСПО - 2010» осуществляли профессора Московского государственного строительного университета (МГСУ) П.А. Акимов и В.Н. Сидоров. Несомненно, настоящая книга поможет российским специалистам получить исчерпывающее представление об архитектурных замыслах, проектировании павильонов шанхайской всемирной выставки, будет способствовать распространению новых инноваций мировой архитектуры в нашей стране.

5. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

(авторы – А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева; Москва, Издательство МИСИ – МГСУ, 2011. – 368 страниц)

Обеспечение прочности, надежности и экономичности строительных объектов в условиях появления новых материалов, совершенствования конструктивных решений, разнообразных требований к жизнеобеспечению людей и оборудования внутри зданий и сооружений приводит к необходимости постоянного развития методов расчетного обоснования. Многие сложные конструкции можно представить как совокупность элементов, расчетными схемами которых являются краевые задачи строительной механики. Поэтому решение и исследование краевых задач в условиях разнообразия форм конструкций и математических моделей, соответствующих различным теориям и материалам, остается актуальной задачей. Совершенствование расчетного обоснования

строительных объектов связано с появлением и непрерывным развитием вычислительной техники. В настоящее время решение некоторой части краевых задач не представляет проблемы, хотя вопросы повышения точности и упрощения алгоритмов остаются в силе. Вместе с тем, исследование целого ряда проблем (например, статические и динамические расчеты трехмерных объектов, оптимизация конструктивных форм) не всегда обеспечивается мощностью современных ЭВМ. В этом отношении требуется развитие специализированных численных и численно-аналитических методов. Важнейшим фактором, разумеется, является также корректность постановки и простота описания, что сопряжено, в частности, с повышением эффективности и упрощением реализующего программно-алгоритмического обеспечения. В предлагаемой книге описаны теоретические основы, алгоритмы и стратегия решений задач расчета строительных конструкций в рамках дискретных и дискретно-континуальных реализаций метода граничных интегральных уравнений (ГИУ). Традиционная техника метода граничных элементов (МГЭ) – это «вычислительная Золушка», которая выросла в тени метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ).

Несмотря на то, что МГЭ по своей природе относительно прост в применении и достаточно гибок в приложениях ко многим проблемам, он все еще не получил того внимания, которое заслуживает, особенно в различных областях инженерной практики, где властвовали указанные методы. Настоящая монография отчасти представляет попытку в некоторой мере исправить подобное положение. Книга состоит из предисловия, восьми глав, приложения и библиографического списка, включающего 485 наименований.

Глава 1 посвящена анализу современного состояния методов граничных интегральных уравнений, дискретных граничных интегральных уравнений и граничных элементов, рассматриваются актуальные вопросы при-

менения аппарата анализа Фурье, вейвлет-анализа и теории обобщенных функций на этапах постановки и решения краевых задач расчета конструкций, зданий и сооружений, обсуждается проблема точности расчета строительных объектов.

В Главе 2 представлены теоретические и алгоритмические основы метода стандартной (расширенной) области в приложениях к постановкам и аппроксимации краевых задач расчета строительных конструкций. Описано два варианта метода стандартной области – прямой и непрямой, причем наиболее проработан первый вариант, который в случае граничных уравнений эквивалентен прямому подходу. Авторами приводятся операторные формулировки основных краевых задач строительной механики, что очень важно для оценок точности решения, связанного с вычислением невязок. Эти постановки характеризуются согласованным «весом» граничных условий и условий (уравнений) внутри области, причем соответствующие «веса» представлены множителями в виде сингулярных обобщенных функций. Серьезным алгоритмическим преимуществом операторных постановок является то, что их можно рассматривать в любой расширенной области, в частности стандартной, что приводит к общим алгоритмам, не зависящим от конфигурации реальной конструкции. Подчеркнем, что построение алгоритмов для стандартной области обладает универсальностью и простотой, позволяет создавать быстродействующее программное обеспечение с развитыми возможностями распараллеливания на современных языках программирования высокого и низкого уровня. Математическая постановка задачи при этом участвует, по сути, в качестве формального параметра, и реализация новой модели или технической теории вместе с соответствующей подготовкой требует минимального времени. Это достигается на основе эффективного сочетания метода стандартной области и метода базисных (локальных) вариаций. В качестве формального параметра здесь используются

подынтегральные выражения в вариационной постановке. В свое время по этой методике были исследованы десятки различных линейных и нелинейных моделей для разнообразных материалов (железобетон, фибробетон, асбоцемент, кирпичная кладка и т.д.). Глава 3 посвящена изложению методов построения континуальных и дискретных фундаментальных функций дифференциальных операторов. Авторами предлагаются универсальные методы построения континуальных фундаментальных функций для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами и их систем. Следует отметить, что правильный выбор фундаментальной функции исключительно важен с позиций корректности последующей численной реализации. В справочных целях в книге приведена сводка окончательных формул для континуальных фундаментальных функций некоторых задач строительной механики и математической физики. Построена некоторая алгебра обратных операторов теории упругости, позволяющая создавать алгоритмы решения задач методом граничных уравнений. Большое внимание также уделено рассмотрению методов вычисления фундаментальных решений дискретных задач, что требуется, в частности, при реализации метода дискретных граничных уравнений. В частности, описываются методы построения дискретных фундаментальных функций с помощью интегральных выражений в комплексной плоскости, с помощью дискретного преобразования Фурье, на основе решения вспомогательных краевых задач в расширенной области, а также метод С.Л. Соболева для вычисления фундаментальной функции дискретного оператора Лапласа. Отдельно изложено вычисление фундаментальной функции разрешающей системы уравнений дискретно-аналитического метода расчета строительных объектов регулярной структуры. В заключении дается сравнительная характеристика методов вычисления дискретных фундаментальных функций.

В Главе 4 представлены операторные и вариационные постановки краевых задач строительной механики и математической физики, а также сформулированы граничные псевдодифференциальные уравнения. Предлагаемые операторные постановки являются континуальным обобщением соответствующего в методе конечных элементов понятия матрицы жесткости, но имеют более общий характер. Авторы предлагают называть эти операторы краевых задач операторами жесткости. Следует отметить, что почти все указанные операторы являются самосопряженными, в том числе и для задач со смешанными краевыми условиями. Большое внимание уделяется граничным псевдодифференциальным уравнениям прямого и непрямого подходов с выделением основного направления (направления, вдоль которого имеется постоянство физико-геометрических характеристик конструкции), являющимися основой для прямого и непрямого вариантов дискретно-континуального метода граничных элементов. Предлагаются математические постановки краевых задач строительной механики для расчета комбинированных систем типа «плита – плита» и «стенка – балка». Глава 5 отведена под изложение ряда актуальных вопросов исследования и регуляризации ядер псевдодифференциальных операторов. Прежде всего, здесь указываются некоторые практические приемы, связанные с использованием сингулярных обобщенных функций в расчетах. Речь идет о функциях со степенными особенностями, которые, как правило, являются ядрами интегральных операторов, не интегрируемыми в общем смысле. Такие функции понимаются в виде их некоторых регуляризаций, определяющих «правила интегрирования» по некоторым формулам регуляризации. Зачастую такие регуляризации предлагаются разными способами, которые не всегда взаимнооднозначны, что может привести к различным результатам вычислений. Авторами приводятся условия соответствия этих формул и делаются выводы о целесообразности их

обоснованного выбора. Кроме того, даются представления сингулярных обобщенных функций со степенными особенностями в виде последовательностей обычных функций, что, как правило, отсутствует в литературе, посвященной обобщенным функциям. Эти представления играют очень большую роль в понимании соответствующих важных функций, их структуры и построении приближенных аналогов. Весьма значимым является и предлагаемый общий подход к представлению сингулярных обобщенных функций в виде производных от непрерывных функций, а также с помощью соответствующих им интегральных операторов в интегро-дифференциальном виде. Подобная методика позволяет преодолеть все вычислительные трудности. Достаточно подробно рассматриваются псевдодифференциальные операторы в двумерных и трехмерных проблемах, их ядра, предельные свойства и регуляризации, что очень важно для реализации и развития дискретно-континуального метода граничных элементов. Следует отметить также представленный в монографии метод конечной регуляризации решения граничных интегральных уравнений (спектральный метод граничных элементов). Глава 6 содержит описание дискретно-континуального метода граничных элементов, в рамках которого задача сводится к интегральным уравнениям, размерность которых на два порядка меньше размерности исходной задачи. Рассматриваются различные варианты численной реализации метода с использованием аппарата анализа Фурье и вейвлет-анализа. Представляется, что самостоятельное значение имеют разработанные при этом авторами быстрые алгоритмы одномерных и двумерных вейвлет-преобразований по дискретному базису Хаара, а также эффективный подход к получению локальных решений краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. В Главе 7 излагается метод дискретных граничных уравнений для расчета строительных конструкций. Так же как и метод граничных

интегральных уравнений, он имеет полуаналитический характер, т.е. представляет решение в виде конечных формул, которым предшествует численное вычисление некоторых параметров или функций. Отличие дискретного подхода состоит в том, что исходная задача уже дискретная, то есть задана на сетке, имеющей постоянные характеристики. Это позволяет в аналитической форме исключить неизвестные во внутренних точках конструкции и перейти к разрешающим уравнениям относительно неизвестных в граничных точках. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что в отличие от метода граничных интегральных уравнений здесь отсутствуют проблемы, связанные с сингулярными интегралами и другими неинтегрируемыми в обычном смысле функциями. У предлагаемого подхода, хотя он и достаточно универсален, есть эффективная область применения. Прежде сего, это конструкции, состоящие из подконструкций прямоугольной формы, достаточно широко представленные в реальных сооружениях, в частности, в стыковых конструкциях зданий.

В Главе 8 описан метод решения задач расчета комбинированных систем с применением аналитического аппарата теории граничных интегральных уравнений. Стыки конструкций всегда являются зонами повышенной опасности, именно там чаще происходят разрушения. При этом важной исследовательской проблемой является задача расчета соединений конструкций разной размерности или разной ориентации в пространстве (например, стержень, расположенный перпендикулярно к плите, или плиты, расположенные под углом друг к другу). Так же важным является возможность корректного расчета фрагментов сооружений, математическая модель которых состоит из дифференциальных уравнений разного порядка (например, балка на упругом полупространстве или балка, опирающаяся продольно на конструкцию, напряженное состояние которой описывается уравнениями плоской задачи теории упру-

гости, и т.д.). В этих случаях при стандартных подходах с позиций метода конечных элементов имеет место так называемая «несовместность» элементов, примыкающих к линиям или поверхностям стыков. Это происходит из-за того, что функции формы стыкуемых конечных элементов представлены полиномами разного порядка. Поэтому на границах соответствующих конечных элементов в решениях будут разрывы, что приводит к не всегда контролируемым и предсказуемым погрешностям. Из этого следует актуальность аналитического решения таких задач, позволяющего либо непосредственно осуществить уточненный расчет конструкции, либо использовать его для сопоставления и корректировки результатов численных расчетов. В книге описаны корректные численные методы решения задач расчета комбинированных систем, образованных стыковкой двух плит, работающих в разных плоскостях, а также стыковкой балки-стенки (двумерная задача теории упругости) и балки.

В приложении рассмотрен вопрос о согласованности весовых характеристик смешанной краевой задачи на примере задачи о поперечном изгибе балки Бернулли.

6. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ВОЗВЕДЕНИЯ. ВЫСОТНЫЕ ЗДАНИЯ И ДРУГИЕ УНИКАЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ КИТАЯ»

(перевод на русский язык и научное редактирование – П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, А.Р. Туснин; Москва, Издательство АСВ, 2013. – 808 страниц)

Как известно, интенсивный экономический рост Китая и неуклонно растущие на протяжении двух последних десятилетий объемы производства дали мощный импульс развития национальной отрасли строительных металлоконструкций. В настоящее время все

более усиливается роль менеджмента качества, повышается наукоемкость производства, всемерно разворачивается техническое новаторство, совершенствуется система подготовки специалистов высшей квалификации, создаются и продвигаются на рынках национальные торговые марки. Представляется, что и для нашей страны в этих динамично меняющихся условиях особенно ценен и интересен опыт китайских коллег.

В рецензируемой книге рассматривается богатый опыт ЗАО «Цзянсуская корпорация по стальным конструкциям Хунин», которая за последние четверть века приняла самое непосредственное участие в возведении более двухсот объектов государственной важности, среди которых, в частности, Шанхайский стадион, рассчитанный на 80000 зрителей, Шанхайский Большой театр, Шанхайский мост Лупу через реку Хуанпу (крупнейший в мире арочный мост), первый и второй терминалы Шанхайского международного аэропорта «Пудун», высотное здание Международного центра водного транспорта в г. Шанхае, Шанхайский литературный центр, Шайхайская площадь Шимао, Шанхайский финансовый центр «Хуаньцю» («Цзиньмао плаза»), железнодорожная линия на магнитной подушке в городе Шанхае, Шанхайский центр источников света Китайской Академии наук, Государственный большой театр Китая, Пекинский финансовый центр Чжунгуаньцунь, комплекс зданий Центрального китайского телевидения, Национальный стадион («Птичье гнездо»), Южный Пекинский вокзал, транспортный центр терминала Столичного Международного аэропорта Пекина, здание нового гуанчжоуского аэропорта «Байюнь», гуанчжоуский финансовый центр «Хэцзин», стадион Линнань-Минчжу города Фошань провинции Гуандун, Телевизионная башня Гуанчжоу (самая высокая телебашня в мире), терминал международного аэропорта «Шуанлю» города Чэнду, стадион Олимпийского спортивного центра города Чунцин, стадион Олимпийского спортивного центра города Наньцзин, стадион Олимпийского

спортивного центра города Тяньцзинь, стадион Олимпийского спортивного центра города Шэнья и другие.

В рецензируемой книге собрана информация о некоторых известных на весь мир объектах последних лет, в строительстве которых принимала активное участие ЗАО «Цзянсуская корпорация по стальным конструкциям Хунин». Вниманию читателей представлены поистине уникальные технологии подготовки и изготовления конструкций, передовые новаторские принципы монтажа, многоступенчатые алгоритмы контроля качества, продиктованные тем высоким чувством ответственности корпорации перед обществом. Высочайшее качество продукции и безупречная репутация – это те фундаментальные цели, на которых построена вся деятельность компании.

Полагаю, что появление данного издания в России будет способствовать дальнейшему повышению организационно-технического уровня отечественных предприятий в области производства и монтажа металлоконструкций. Важнейшими целевыми группами, на которые справедливо рассчитывают авторы являлись специалисты инвестиционных компаний, проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций, профессорско-преподавательский состав профильных высших учебных заведений, студенты и аспиранты.

7. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

(автор – В.Н. Сидоров; Москва,

**Издательство «Архитектура – С», 2013.
– 304 страницы)**

Книга имеет «гриф»: «Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области архитектуры в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Архитектура». Рецензируемый учебник построен на курсе лекций и основан на опыте препода-

давания ее автором дисциплины «Сопротивление материалов» в Московском архитектурном институте (МАрхИ). Профессиональному архитектору, наделяющему создаваемое им сооружение функциональностью, эстетическими и социальными качествами, присуще и «чувство конструкции», позволяющее ему делать сооружение прочным, устойчивым и приемлемо жёстким. Формировать такие способности будущего архитектора призван курс сопротивления материалов. Исходя из этого, большое внимание в учебнике уделяется описанию основных понятий механики материалов, прежде всего, понятий внешних и внутренних усилий, напряжений, перемещений, деформаций. Вместе с тем, создание прочных, жёстких и устойчивых сооружений регламентируют Строительные Нормы и Правила. В учебнике изложены ключевые принципы расчёта и проектирования элементов строительных конструкций, лежащие в основе национальных государственных стандартов. В книгу включено много практических примеров. Это примеры определения величин внутренних усилий, напряжений, перемещений в статически определимых и статически неопределимых элементах конструкций под действием статических и динамических нагрузок, примеры оценки прочности, деформативности, устойчивости и несущей способности элементов конструкций, подбора их поперечных сечений. Вместе с традиционными формулами и приёмами определения геометрических характеристик поперечных сечений элементов конструкций, основанными на вычислении интегралов по площади этих сечений, в учебнике изложены подходы путём вычисления интегралов по контуру сечений, особенно эффективные, если поперечные сечения имеют сложные очертания. Учебник предназначен для подготовки бакалавров по направлению 270100 «Архитектура» и соответствует основной программе дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов высших учебных заведений,

обучающихся по программе бакалавриата этого направления.

8. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«ИНФОРМАТИКА»

(авторы – А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева; Москва, Издательство АСВ, 2013. – 400 страниц)

Книга имеет «гриф»: «Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство». Первое издание этой книги вышло в свет в издательстве АСВ под общей редакцией А.Б. Золотова в 2010 году. За это время стало ясно, что она нашла своего читателя. Книга достаточно активно используется студентами, аспирантами, преподавателями не только в МГСУ, но и в большом количестве других вузов страны. Во втором издании исправлены замеченные недостатки и добавлена новая глава, посвященная вопросам решения прикладных задач в системе MATLAB, произведена некоторая перестановка материала для облегчения чтения.

Прошло относительно немного времени с тех пор, как в школах и вузах страны начали изучать дисциплину «Информатика». В настоящее время эта дисциплина по праву является базовой в системе высшего образования и в комплексе с другими классическими дисциплинами призвана создавать фундамент профессионального образования в вузе. Эта область знаний обширна и сегодня ее границы, а также содержание самой дисциплины «Информатика», трактуются по-разному. Одни считают ее велением времени, данью моде, явлением преходящим, или рассматривают информатику как некую премудрость. Другие воспринимают информатику как сугубо практическую дисциплину, учащую не знаниям, а умению «правильно нажимать кнопки» персонального компью-

тера, работая в наиболее распространенных программных средах, и осваивая лишь их офисные приложения. Достижение профессиональных компетенций при столь упрощенном подходе к изучению этой дисциплины весьма сомнительно – будут приобретаться лишь навыки и немного умения, тогда как знания не появятся. Кроме того, учитывая высокую динамику смены одних программных продуктов и технических вычислительных средств другими, вряд ли вообще когда-либо удастся сформировать адекватные современным реалиям умения и навыки. Разные взгляды на область знаний, названную «Информатикой», и на ее границы определили и разные подходы к формированию содержания этого курса в вузах. В настоящее время существует несколько примерных программ по дисциплине «Информатика», и каждое учебное заведение, реализуя различные направления подготовки, проводит обучение в соответствии с потребностями соответствующих предметных областей.

Опыт ведущих отечественных и зарубежных образовательных центров позволяет сформулировать ряд принципов, которые должны быть основными при организации образовательного процесса по дисциплине «Информатика» в техническом вузе:

- активное использование математического аппарата, что предполагает изучение принципов математического моделирования и основ численных методов;
- реальное овладение навыками практической работы со средствами передачи и обработки информации, что требует выполнения многочисленных упражнений на программирование;
- изучение, прежде всего, универсальных теорий и методов, которые не зависят от используемой операционной системы и конкретной реализации и версии того или иного изучаемого языка программирования.

В таком понимании информатика формирует для будущих специалистов особую методику освоения информационных технологий и решения актуальных профессиональных ин-

женерных задач, основанную «на развитии в широком применении методов математического моделирования и вычислительного эксперимента и служащую ближайшим стратегическим резервом ускорения научно-технического прогресса».

За рамками данного учебника сознательно оставлено изложение вопросов, связанных с классификацией и устройством современных компьютеров, описанием компьютерных сетей, основами работы с популярными операционными системами, антивирусными пакетами, средствами защиты информации и офисными приложениями. Это было сделано, прежде всего, с тех позиций, что все вышeperечисленное является основой школьных курсов дисциплины «Информатика».

Учебник разбит на три главы, отражающие следующие аспекты информатики: обзор современных языков и систем программирования, основы программирования, основы численных методов решения задач линейной алгебры, численные методы решения инженерных задач и их реализации на языках и системах программирования.

Принятый авторами стиль изложения во многом определяется характером будущей работы студентов. Для них информатика, численное и компьютерное моделирование в первую очередь будут современным наукоемким инструментом решения прикладных технических проблем. Кроме того, рассматриваемый материал позволяет понять принципы построения и функционирования современных высокопроизводительных программных комплексов промышленного типа, распространенных в строительной отрасли, и основы реализуемых в них методов.

В ходе изложения авторы не всегда стремились к максимальной общности и безупречной строгости формулировок. Представляется, что сделанные отступления от распространенного педантичного стиля современной литературы по численным методам будут способствовать большему пониманию и усваиванию излагаемого материала студентами технических вузов.

Весь теоретический материал снабжен большим количеством примеров, которые носят как поясняющий, так и контрольный характер. Задания на выполнение практических и лабораторных работ, представленные в Главе 3, носят модельный характер, удобный для отладки представленных программ, с легко предсказуемыми ответами.

В конце книги приведен библиографический список, пользуясь которым желающие могут более полно изучить рассмотренные вопросы.

9. РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ

«МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА»

(авторы – А.Б. Золотов, П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева; Москва,

Издательство АСВ, 2013. – 400 страниц)

Разработка, исследование, развитие, верификация и апробация методов расчета строительных конструкций, зданий, сооружений и комплексов являются одними из важнейших научных направлений, обеспечивающих повышение надежности и долговечности строительных объектов, совершенствование конструктивных решений и оптимальный выбор строительных материалов, влияющих на здоровье людей, экономию финансовых средств, минимизацию затрат энергии в ходе эксплуатации. Современный этап развития строительной механики и механики деформируемого твердого тела характеризуется практически повсеместным использованием дискретных (численных) и дискретно-континуальных (численно-аналитических) методов. Благодаря прогрессу в области компьютерной техники и вычислительной математики, а также совершенствованию информационных технологий изменилось соотношение аналитических, экспериментальных, численных и численно-аналитических подходов к расчету строительных объектов. Как известно, современ-

ная практика выдвигает задачи моделирования сложнейших конструктивных систем, полное решение которых может быть получено в большинстве случаев только лишь численным путем. В самом деле, численно-аналитические методы имеют относительно узкую область применения, поиск замкнутого аналитического решения для адекватной математической модели сложной конструкции не представляется возможным, а экспериментальные исследования такого рода конструкций зачастую оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Тем не менее, следует отметить, что даже при использовании высокопроизводительной компьютерной техники расчет достаточно обширного круга инженерных конструкций различного назначения (строительных, авиационных, энергетических и т.д.) остается порой весьма нетривиальной задачей. Как показывает имеющийся многолетний опыт, эффективность внедрения численных и численно-аналитических подходов в практику моделирования состояния строительных объектов зависит не столько от мощности (производительности) используемой компьютерной техники, сколько от разработки корректных и рациональных моделей и алгоритмов. Таким образом, существующая тенденция к максимально полному учету специфики работы конструкции в нормальных и экстремальных условиях эксплуатации требует постоянного совершенствования и развития численных и численно-аналитических методов и алгоритмов расчета строительных объектов.

В настоящее время, как уже отмечалось выше, численные (преимущественно) и численно-аналитические (в меньшей степени) методы прочно вошли в практику проектных организаций, конструкторских бюро и профильных научно-исследовательских институтов. Очевидно, что широкое внедрение этих методов требует от них достаточной простоты (если, конечно, это возможно), корректности, надежности и эффективности, что необходимо, в частности, для проведе-

ния серийных расчетов на имеющейся в наличии вычислительной технике в реальные календарные сроки. Для разработки численного или численно-аналитического метода, обладающего указанными свойствами, необходимо учитывать специфические особенности класса задач, на решение которых направлен этот метод.

Определяющими условиями успеха метода расчета конструкции являются удачно выбранная механическая модель (расчетная схема) и дискретная или дискретно-континуальная модель, т.е. соответственно численный или численно-аналитический метод решения математической задачи и способы реализации алгоритма на ЭВМ. При численном решении больших сложных задач строительной механики предварительное аналитическое, численно-аналитическое и экспериментальное изучение различных локальных свойств проблемы может оказать большую помощь, а иногда и вовсе является решающим фактором для успешного построения и реализации численного алгоритма. Экспериментальная проверка и сравнения (верификация) с имеющимися аналитическими и численно-аналитическими решениями задачи в более простых и частных случаях позволяют дать оценку принятой расчетной схеме конструкции, алгоритма и полученного решения, в частности его точности. Здесь, впрочем, следует заметить, что оценка точности численного решения сформулированной математической задачи должна проводиться исключительно математически, без привлечения данных экспериментальных исследований. Качественные и количественные сравнения с экспериментом должны давать информацию о том, насколько принятая механическая модель близка к реальному объекту. Вообще, на всех этапах исследования напряженно-деформированного состояния здания или сооружения математическая теория, экспериментальные методы и численный расчет должны применяться совместно и согласо-

ванно, а всякое противопоставление здесь неуместно и бессмысленно.

Основным формулировкам краевых задач строительной механики посвящена Глава 2 настоящей монографии. Следует отметить, что почти все представленные операторы краевых задач являются самосопряженными, в том числе и для задач со смешанными краевыми условиями. Показывается, что определяющими факторами для формулировки краевых задач являются дифференциальный оператор и характеристическая функция области, занимаемой конструкцией. Вид и тип краевых условий вытекает непосредственно из действия оператора на произведение характеристической функции и искомой функции и, вообще говоря, не требуется отдельно основанная на физической постановке формулировка краевых условий, как естественных (силовых), так и главных (кинематических). Важным фактором является формулировка правых частей краевых задач с использованием обобщенных функций, что способствует получению общих решений из единых формул. Другое преимущество такой формулировки – очевидная возможность построения краевых условий в однородном виде для произвольного случая. Серьезным алгоритмическим преимуществом операторных постановок является тот факт, что их можно рассматривать в любой расширенной области, в частности стандартной, что приводит к общим алгоритмам, не зависящим от конфигурации реальной конструкции.

Все численные и численно-аналитические подходы к решению задач строительной механики используют дискретное и дискретно-континуальное представление конструкций с помощью конечноразностных схем, конечных элементов и граничных элементов. В настоящее время наиболее популярными методами дискретизации краевых задач строительной механики, как известно, являются метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и вариационно-разностный метод (ВРМ). Все три указанных метода достаточно подробно отражены в

многочисленных монографиях и учебниках, реализованы в программно-алгоритмических комплексах промышленного типа. Своеобразными корректными численно-аналитическими «аналогами» перечисленных подходов, предложенными в работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова, являются соответственно дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ). В рамках данной книги излагаются многоуровневые дискретные (Главы 3, 4) и дискретно-континуальные (Главы 4, 6) реализации ВРМ. Заметим, что, в целом, здесь не предлагается принципиально новых подходов к дискретизации задач расчета конструкций. За основу принимаются ВРМ и ДКВРМ, хотя многие предлагаемые «фундаментальные» методы и алгоритмы, в частности представленные в Главе 4, на которых базируются все авторские разработки, могут быть с успехом использованы совместно с другими численными и численно-аналитическими подходами. В этом смысле следует особо отметить универсальные корректные методы точного аналитического решения многоточечных краевых задач расчета строительных конструкций для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и их систем. Важно подчеркнуть, что построение аналитических решений для такого рода задач, как правило, наталкивается на трудности, связанные с наличием в общем виде решения гиперболических функций и экспоненциальных функций с положительными аргументами. При практической реализации это приводит к явлению, называемому в вычислительной математике «вычислительной катастрофой». Заметим, что подобное характерно для многих традиционных (известных базовых) подходов, в частности, например, для такого известного в строительной механике метода, как метод начальных параметров. Правильный выбор фундаментального

решения позволяет полностью исключить указанные выше нежелательные функции и обеспечивает корректную с вычислительной точки зрения реализацию решения. Сформулированы общие решения краевых задач строительной механики на основе использования фундаментальной функции, гарантирующие корректную реализацию вне зависимости от длины и жесткостных характеристик конструкции. Также приведены удобные в практическом отношении основные формулы дифференцирования решений дифференциальных уравнений с помощью некоторых матриц перехода. Все это избавляет расчетчика от непосредственного дифференцирования функций. В целом, по мнению авторов, наиболее рекомендуемым способом для решения рассматриваемого круга задач является представление соответствующих систем и, что самое главное, их решение на основе сведения к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Это облегчает учет произвольных краевых условий, а также позволяет вычислять искомые функции и их производные без выполнения операций дифференцирования, уменьшает объем вычислений, обеспечивает необходимую универсальность подхода. Вместе с тем необходимо отметить, что в ряде случаев при решении задач строительной механики альтернативой является их решение на основе сведения к системе дифференциальных уравнений второго порядка. Это характерно, например, при расчете плит. В этой связи также представлены универсальные корректные методы точного аналитического решения задач такого вида.

Глава 3 посвящена непосредственному описанию дискретных реализаций вариационно-разностного метода на основе метода расширенной (стандартной) области. Аппроксимация стандартной области состоит в задании сетки, топологически эквивалентной прямоугольной таким образом, чтобы она как можно лучше соответствовала очертаниям конструкции, т.е. исходной области. Понятие топологической эквивалентности в данном

случае означает, что она может быть получена из прямоугольной сетки в результате некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания». Выбор такого класса сеток, с одной стороны, дает возможность аппроксимировать большое количество разнообразных конструкций, а с другой – позволяет использовать простую регулярную нумерацию узлов, что приводит в дальнейшем к удобным математическим формулам, эффективным вычислительным схемам и алгоритмам, а также существенно упрощает сбор исходной информации и вывод результатов. Следует обратить внимание на то, что полученные дискретные формулы почти полностью повторяют исходные операторные уравнения краевых задач, что свидетельствует о целесообразности операторных формулировок. Имеются также и ленточные представления соответствующих операторов. Кроме того, в главе излагается и наиболее эффективный в настоящее время подход к решению произвольных многомерных задач на основе многоуровневых методов, частным случаем которых выступает полуитерационный метод, относящийся к классу многосеточных. Полуитерационный метод базируется на построении специального эквивалентного оператора к оператору исходной задачи, причем это построение ведется на специальной последовательности сеточных (в частности, вариационно-разностных) аппроксимаций.

В Главе 5 настоящей монографии излагается самый, пожалуй, популярный в настоящее время подход к решению произвольных многомерных задач на основе многоуровневых методов, частным случаем которых выступает полуитерационный метод, относящийся к классу многосеточных. Полуитерационный метод основан на построении специального эквивалентного оператора к оператору исходной задачи, причем это построение ведется на специальной последовательности сеточных аппроксимаций.

В Главе 6 рассматриваются дискретно-континуальные реализации вариационно-

разностного метода. Предложенный А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ) предназначен для расчета конструкций, физико-геометрические параметры которых постоянны или кусочно-постоянны (регулярны) по некоторому (основному) координатному направлению. Метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по данному основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический характер получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием стандартной техники вариационно-разностного метода. Выбор подобной схемы аппроксимации позволяет гармонично сочетать простоту и наглядность, свойственные конечно-разностным методам, с преимуществами вариационной постановки (меньший порядок производных и автоматическое удовлетворение решения основным (естественным) граничным условиям), с одной стороны, и очевидные достоинства аналитического решения – с другой. Использование ДКВРМ позволяет сравнительно просто получить дискретную операторную формулировку рассматриваемой задачи по направлениям сеточной аппроксимации, внешне повторяющую ее континуальную постановку, представленную соответствующими дифференциальными уравнениями. В случае, когда максимальный порядок производной по основному направлению равен единице, ДКВРМ и ДКМКЭ совпадают на уровне разрешающих систем и, следовательно, приводят к одинаковому решению. При наличии производных более высокого порядка ДКВРМ позволяет получить разрешающую систему с меньшим числом неизвестных. Следует отметить, что ДКВРМ используется как для получения непосредственного решения задач, так и для сопоставления с результатами, найденными при помощи ДКМКЭ.

Основной целью представляемых в настоящей монографии исследований являлась раз-

работка, совершенствование и развитие численных и численно-аналитических методов расчета сложных, в частности трехмерных, конструкций. Многие представленные в книге методы можно отнести к многоуровневым в том смысле, что решение задачи включает решение последовательности вспомогательных задач. Введение последовательности вспомогательных задач позволяет в ряде случаев использовать в алгоритмах априорную информацию о свойствах решения, вытекающих из механической природы задачи, и о геометрической структуре исходной конструкции. Построение соответствующих алгоритмов может быть осуществлено, например, за счет разумного сочетания прямых и итерационных подходов.

В Главе 6 излагаются многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода применительно к задачам локального расчета конструкций. Эти методы, очевидно, связаны с построением локальных решений, необходимых для исследования конструкций в наиболее ответственных местах. Такими алгоритмами являются подходы, основанные на сгущении сеток аппроксимации, и методы фрагментации (последовательного «вырезания»). В монографии эти методы рассматриваются, главным образом, с точки зрения «правильной» асимптотики «мельчения» сетки или фрагментации. Данные исследования основаны на использовании в оценках асимптотики поведения фундаментальной функции. Авторами получены конкретные результаты, позволяющие строить правильное «разбиение» сеток. В тексте главы также представлены элементы и основные понятия многоуровневого кратномасштабного вейвлет-анализа, являющегося, в частности, эффективным инструментарием при разработке авторами как дискретных, так и дискретно-континуальных реализаций вариационно-разностного метода локального расчета строительных конструкций. Отметим, что вейвлет-анализ является одним из самых прогрессирующих направлений в анализе и

решении различных задач, связанных с дифференциальными уравнениями, а также в целом ряде других проблем математической физики. Это направление в какой-то степени является альтернативой и обобщением известного аппарата преобразований Фурье. Главное свойство – возможность локализации прямого и обратного преобразований при решении задач расчета конструкций, что позволяет исследовать отдельно решение локальных и глобальных проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олимпийская архитектура. Beijing 2008. // Пер. и научн. ред. **Сидоров В.Н., Акимов П.А.** – М.: Издательство АСВ, 2008. – 318 с.
2. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
3. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Информатика в строительстве (с основами численного моделирования). Учебное пособие. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
4. Архитектура на «ЭКСПО-2010» в Шанхае. // Пер. и научн. ред. **Сидоров В.Н., Акимов П.А.** – М.: Издательство АСВ, – Beijing: Издательство China Architecture & Building Press, 2010. – 342 с.
5. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. Монография. – М.: Издательство МИСИ – МГСУ, 2011. – 368 с.
6. Особенности проектирования и возведения. Высотные здания и другие уникальные сооружения Китая. // Пер. и научн. ред. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Тус-**

нин А.Р. – М.: Издательство АСВ, 2013.
– 808 с.

7. **Сидоров В.Н.** Сопротивление материалов. Учебник. – М.: Издательство «Архитектура – С», 2013. – 304 с.
8. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Информатика. Учебник. Второе издание (переработанное и дополненное). – М.: Издательство АСВ, 2013. – 400 с.
9. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2013. – 416 с.

Петров Владилен Васильевич, действительный член РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Механика деформируемого твердого тела» Саратовского государственного технического университета, Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Почетный строитель Российской Федерации; 410054, Россия, Саратов, ул. Политехническая, 77; тел. +7 (8452) 99-86-03; факс +7 (8452) 99-88-10; e-mail: vvp@sstu.ru