ТРЁХИНВАРИАНТНЫЙ КРИТЕРИЙ ТЕКУЧЕСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОБИВАНИЯ ПЛАСТИНЫ ИЗ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА Д16(А)Т ЖЁСТКИМ ТЕЛОМ

В.В. Вершинин[1,2], В.Л. Мондрус[1]
[1] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, РОССИЯ
[2] Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук. г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51) различной толщины жёстким сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности. Осуществляется численное моделирование рассматриваемой задачи с помощью метода конечных элементов, используя для описания законов деформирования и разрушения материала мишени феноменологические трёхинвариантные критерии текучести и прочности, соответственно, совместно с ассоциированным законом пластического течения и линейным законом накопления материалом повреждений. Проводится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, а также с численными результатами, полученными с использованием более простых феноменологических моделей материала. Оценивается необходимость одновременного учёта в рамках критерия текучести всех трёх инвариантов напряжённого состояния для обеспечения точности результатов численного моделирования.

Ключевые слова: феноменологический трёхинвариантный критерий текучести, пробивание пластины, алюминиевый сплав, численное моделирование

PRESSURE- AND LODE-DEPENDENT YIELD CRITERION WITHIN THE PROBLEM OF 2024-T3(51) ALUMINUM ALLOY PLATE PERFORATION BY A RIGID PROJECTILE

Vladislav V. Vershinin[1,2], Vladimir L. Mondrus[1]
[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA
[2] Shirshov Institute of Oceanology, Russian Acudemy of Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: The problem of perforation of free circular plates made of 2024-T3(51) aluminum alloy or its Russian analogue D16(A)T with various thicknesses normally impacted at their centers by a rigid spherical projectile is considered. The considered problem is numerically simulated through the finite element method utilizing phenomenological pressure- and Lode-dependent yield and fracture criteria along with an associated flow rule and a linear damage accumulation law to describe the target material deformation and fracture. Comparison of the obtained results with the experimental data as well as with the numerical results calculated using less sophisticated phenomenological material models is made. Necessity of a yield criterion pressure and Lode dependence to provide accuracy of numerical simulation is assessed.

Keywords: phenomenological pressure- and Lode-dependent yield criterion, plate perforation, aluminum alloy, numerical simulation

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования законов деформирования и разрушения алюминиевого сплава Д16(А)Т и его зарубежного аналога AA2024-T3(51), представленные в [1-9], показали, что деформационные и прочностные характеристики данных сплавов зависят от трёх инвариантов напряжённого состояния – I_1, J_2 и J_3, – так что для их описания необходимо использовать трёхинвариантные критерии текучести и прочности. В то же время при численном моделировании задач пробивания деформируемой твёрдой преграды жёстким или деформируемым твёрдым телом большое число исследователей пользуются упрощёнными критериями текучести и прочности, зависящими только от J_2 или, что реже, от I_1 и J_2. Современное состояние вопроса соударения деформируемых и жёстких твёрдых тел, в том числе и из рассматриваемого в настоящей работе сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51), подробно излагается в недавно вышедшей монографии Розенберга и Декеля [10], где также имеется обширный библиографический список по данной теме.

В работах [11-12] исследовался вопрос численного моделирования с помощью метода конечных элементов задачи пробивания свободных круглых пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51) различной толщины жёстким сферическим телом. В частности, было определено, что трёхинвариантный критерий разрушения, предложенный в [13], даёт лучшее совпадение качественных и количественных результатов численного моделирования с экспериментом, чем критерий разрушения Джонсона-Кука [14], зависящий только от I_1 и J_2. Однако для описания неупругого деформирования материала мишеней в работах [11-12] использовался лишь классический критерий текучести Мизеса [15], расширенный Джонсоном и Куком [16] на случай зависимости предела текучести от скорости деформирования и температуры.

В настоящей работе исследуется влияние учёта в рамках критерия текучести всех трёх инвариантов напряжённого состояния на точность численного моделирования пробивания пластины из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51) жёстким телом. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными и альтернативным численным решением, подробно описанными в [11-12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51) различной толщины жёстким сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности. Сферический ударник выполнен из высокопрочной стали и имеет номинальный диаметр $D = 10.0$ мм. Алюминиевые пластины имеют номинальный диаметр $d = 81.4$ мм и толщины $H = 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 12,\ 20$ мм, так что безразмерная толщина мишеней изменяется в диапазоне $H/D = 0.1 - 2$. Экспериментальные исследования в рамках сформулированной задачи в указанном диапазоне безразмерных толщин мишеней были впервые проведены Зенфом и Вайманном [17], а затем независимо Бивиным [18-19]. В работе [11] эти экспериментальные данные были существенно дополнены и систематизированы. Были получены качественные картины разрушения мишеней с различными отношениями H/D (подробно описаны в [11]), а также определены эмпирические соотношения между безразмерной толщиной мишени H/D и баллистическим пределом V_{bl} в м/с:

$$V_{bl} = 622\left(\frac{H}{D}\right)^{0.673} - 33 \text{ при } \frac{H}{D} \geq 0.19, \qquad (1)$$

$$V_{bl} = 454\frac{H}{D} + 92 \text{ при } 0.08 \leq \frac{H}{D} < 0.19. \qquad (2)$$

Баллистическим пределом V_{bl} называется некоторое предельное значение скорости ударника, ниже которого не происходит пробивание мишени. Качественные и количественные результаты экспериментов выступают в качестве «эталонного» решения поставленной задачи.

2. КРИТЕРИИ ТЕКУЧЕСТИ И РАЗРУШЕНИЯ, ЗАКОН ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И ЗАКОН НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Для формулировки критериев текучести и разрушения, используемых при численном моделировании, необходимо сначала дать определение некоторым величинам, характеризующим напряжённое состояние деформируемого твёрдого тела в точке. Так,

$$I_1 = \sigma_{ii}, \tag{3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \tag{4}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \tag{5}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mean}\delta_{ij}$$

– компоненты девиатора напряжений $\mathbf{S}$,

$$\sigma_{mean} = I_1/3$$

– среднее нормальное напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера. Также здесь и далее по тексту имеет место суммирование по повторяющимся индексам. Стоит отметить, что вместо величин (3)-(5) чаще используют такие параметры напряжённого состояния, как эквивалентное напряжение по Мизесу q [15], угол Лоде θ и параметр Лоде-Надаи L [20-22]:

$$q = \sqrt{3J_2}, \tag{6}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right), \tag{7}$$

$$L = \frac{3\tan(\theta) - \sqrt{3}}{\tan(\theta) + \sqrt{3}}. \tag{8}$$

Критерий текучести Джонсона-Кука [16] имеет следующий вид:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = q - \left[A + B\bar{\varepsilon}_{pl}^{n}\right]\left[1 + C\ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}/\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)\right]\times \\ \times\left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0}\right)^{s}\right] = 0 \tag{9}$$

где A, B, C, n, s – параметры критерия, T_0 – температура тела, при которой определялись параметры A, B и n, задающие деформационную кривую материала, T_m – температура плавления материала, скорость эквивалентных пластических деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ равна

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\dot{e}_{pl}\right)_{ij}\left(\dot{e}_{pl}\right)_{ij}}, \tag{10}$$

$\left(\dot{e}_{pl}\right)_{ij}$ – компоненты девиатора скорости пластических деформаций $\dot{\mathbf{e}}_{pl}$, накопленная эквивалентная пластическая деформация $\bar{\varepsilon}_{pl}$ равна

$$\bar{\varepsilon}_{pl} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\left(\dot{e}_{pl}\right)_{ij}\left(\dot{e}_{pl}\right)_{ij}}\,dt, \tag{11}$$

T – текущая температура материала, а $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ – скорость эквивалентных деформаций, при которой определялись значения параметров A, B и n.

В работе [23] Вершининым был сформулирован новый трёхинвариантный критерий текучести следующего вида:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = q - \left[\sigma_{yt} - a\left(I_1 - \sigma_{yt}\right)\right]\times \\ \times\left[c_s + \left(c_{ax} - c_s\right)\left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1}\right)\frac{m+1}{m}\right] = 0 \tag{12}$$

где $\sigma_{yt} \equiv \sigma_{yt}\left(\bar{\varepsilon}_{pl}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}, T\right)$

– закон деформирования материала при одноосном растяжении и разной скорости деформирования и температуре, параметр c_{ax} определяется как

$$c_{ax} = \begin{cases} c_t \text{ при } \bar{\theta} \geq 0 \\ c_c \text{ при } \bar{\theta} < 0 \end{cases}, \quad (13)$$

где $\bar{\theta} = 1 - 6\theta/\pi$, а переменная γ – как

$$\gamma = \frac{\cos(\pi/6)}{1-\cos(\pi/6)}\left[\frac{1}{\cos(\theta-\pi/6)} - 1\right]. \quad (14)$$

Закон деформирования рассматриваемого алюминиевого сплава задаётся как линейная комбинация законов Свифта [24] и Воце [25], дополненная множителями, учитывающими влияние скорости деформирования и температуры на предел текучести материала, в форме Джонсона-Кука (9):

$$\sigma_{yt} = \left[A\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_{pl}\right)^n + K + Q\left(1 - \exp\left(-B\bar{\varepsilon}_{pl}\right)\right)\right] \times \left[1 + C\ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}/\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)\right]\left[1 - \left(\frac{T-T_0}{T_m - T_0}\right)^s\right] \quad (15)$$

Таким образом, критерий текучести (12) с законом деформирования в форме (15) имеет 16 параметров – A, ε_0, n, K, Q, B, C, $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$, T_m, T_0, s, a, c_t, c_c, c_s, m.

Критерии текучести (9) и (12) дополняются ассоциированным законом пластического течения [26-27]:

$$\left(\dot{\varepsilon}_{pl}\right)_{ij} = \dot{\Lambda}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (16)$$

где $\left(\dot{\varepsilon}_{pl}\right)_{ij}$ – компоненты тензора скорости пластических деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}$, F – пластический потенциал (совпадает с критерием текучести), $\dot{\Lambda}$ – множитель, в случае критерия текучести (9) равный $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$, а в случае критерия текучести (12) имеющий гораздо более сложную форму (см. [23]).

Лу, Юн и Ха в работе [13] предложили трёхинвариантный критерий разрушения:

$$\bar{\varepsilon}_{pl,f} = C_3\left(\frac{2}{\sqrt{L^2+3}}\right)^{-C_1} \times \left(\frac{1}{1+C_f}\left[\eta + \frac{3-L}{3\sqrt{L^2+3}} + C_f\right]\right)^{-C_2}, \quad (17)$$

где $\eta = \sigma_{mean}/q$ – трёхосность напряжённого состояния, $\bar{\varepsilon}_{pl,f}$ – эквивалентные пластические деформации при разрушении материала, а C_1, C_2, C_3, C_f – параметры материала. Необходимо подчеркнуть, что, так как в процессе нагружения напряжённое состояние материала в общем случае изменяется, параметры критерия разрушения (17) должны определяться для осреднённых по пути деформирования значений трёхосности напряжённого состояния η_{avg} и параметра Лоде-Надаи L_{avg}:

$$\eta_{avg} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}}\int_0^{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} \eta\left(\bar{\varepsilon}_{pl}\right) d\bar{\varepsilon}_{pl}, \quad (18)$$

$$L_{avg} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}}\int_0^{\bar{\varepsilon}_{pl,f}} L\left(\bar{\varepsilon}_{pl}\right) d\bar{\varepsilon}_{pl}. \quad (19)$$

Так как в общем случае напряжённое состояние материала в точке изменяется в процессе нагружения, критерий разрушения (17) должен быть реализован в инкрементальной форме:

$$D = \sum \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{pl}}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, L)}, \quad (20)$$

где D представляет собой параметр поврежденности материала. Считается, что материал в точке разрушается, когда $D \geq 1$. В выражении (20) величина $\bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, L)$ вычисляется для текущих значений η и L. Соотношение (20) представляет собой линейный закон накопления материалом повреждений.

3. МЕТОДИКА РАСЧЁТА И РАСЧЁТНАЯ МОДЕЛЬ

Численное моделирование поставленной задачи осуществлялось с применением метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе SIMULIA Abaqus. В рамках модуля Abaqus/Explicit использовалась явная схема интегрирования по времени уравнений движения с автоматическим определением шага по времени исходя из условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [28]. Для пространственной дискретизации ударника и мишени использовались объёмные восьмиузловые конечные элементы C3D8R с линейной функцией формы и редуцированной схемой интегрирования. Для адекватного сравнения результатов численного моделирования не только с экспериментальными данными, но и с численным решением, полученным Вершининым в [11], разбиение ударника и мишени на конечные элементы было аналогичным описанному в работе [11]. Так, мишени с отношением $H/D \leq 0.3$ разбивались по толщине на 30 конечных элементов, при $H/D = 0.6$ – на 40 конечных элементов, при $H/D = 1.2$ – на 80 конечных элементов и, наконец, при $H/D = 2.0$ – на 125 конечных элементов.

При неупругом деформировании твёрдого тела часть неупругой энергии выделяется в виде теплоты. Так как процесс пробивания ударником тонкой мишени является быстропротекающим, его можно с достаточной точностью рассматривать как адиабатический. В этом случае для материальной точки в некоторый момент времени справедливо следующее соотношение:

$$\dot{T} = \frac{\chi}{\rho C_V} \sigma_{ij} \left(\dot{\varepsilon}_{pl} \right)_{ij}, \tag{21}$$

где ρ – плотность материала, C_V – удельная теплоёмкость материала при постоянном объёме, а χ – доля неупругой энергии, превращающаяся в тепло.

Для моделирования контакта между соударяющимися телами применялся реализованный в Abaqus/Explicit метод штрафов. Коэффициент трения между контактирующими поверхностями задавался равным $\mu = 0.2$.

Ударник из высокопрочной стали моделировался как изотропное линейно упругое твёрдое тело с модулем упругости $E = 210$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и плотностью $\rho = 7830$ кг/м^3.

Алюминиевая мишень моделировалась как изотропное упругопластическое твёрдое тело. Разрушение материала мишени в рамках численного расчёта учитывалось путём исключения из расчётной модели тех конечных элементов, для которых выполнялось условие $D \geq 1$ (см. соотношение (20)). Законы деформирования и разрушения алюминиевых сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) в виде трёхинвариантного критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15), ассоциированного закона пластического течения (16), трёхинвариантного критерия разрушения (17) и линейного закона накопления материалом повреждений (20) были реализованы в Abaqus/Explicit посредством пользовательской подпрограммы VUMAT на языке программирования Fortran. Определяющие рекуррентные соотношения и другие особенности реализации описанной выше модели материала подробно изложены в работе [23].

Для сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) параметры критерия текучести (12) были определены в работах [23, 29] и приведены в Табл. 1. Параметры критерия разрушения (17) были определены для сплавов Д16(А)Т и АА2024-Т3(51) в статье [11] и приведены в Табл. 2. Физические и упругие характеристики этих же сплавов даны в Табл. 3.

Таблица 1. Параметры критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15) для сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

A, МПа	320
ε_0	0.0052
n	0.195
K, МПа	235
Q, МПа	135
B	7.8
a	0.025
c_t	1.0
c_c	1.02
c_s	0.92
m	6
C	0.0083
$\dot{\varepsilon}_0$	1.0
T_m, $^\circ$C	502
T_0, $^\circ$C	20
s	1.7

Таблица 2. Параметры критерия разрушения (17) для сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

C_1	2.694
C_2	0.5842
C_3	0.3089
C_f	0.5

Таблица 3. Физические и упругие характеристики сплавов АА2024-Т3(51) и Д16(А)Т

ρ, кг/м^3	2770
C_V, $\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$	875
χ	0.9
E, ГПа	71.15
ν	0.3

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

В результате численного моделирования поставленной задачи были определены баллистические пределы V_{bl} и картины разрушения для свободных круглых пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) с безразмерной толщиной $H/D = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.6,\ 1.2,\ 2.0$ при нормальном ударе по их центру жёсткого сферического тела. Полученные результаты сравнивались как с экспериментальными данными [11], так и с результатами численного моделирования [11] в программном комплексе SIMULIA Abaqus с применением для описания деформирования и разрушения материала мишеней критерия текучести (9), ассоциированного закона пластического течения (16), критерия разрушения (17) и линейного закона накопления материалом повреждений (20). Единственное отличие в исходных данных двух сравниваемых серий расчётов заключалось в использовании разных критериев текучести, что позволило определить влияние I_1 и J_3 в рамках критерия текучести на точность численного моделирования рассматриваемой задачи.

Сравнение значений баллистических пределов V_{bl} для мишеней различной толщины, определенных экспериментально и численно, дано в Табл. 4. Расхождение численных результатов с экспериментальными значениями, определёнными с использованием соотношений (1) и (2), показано на Рис. 1.

Таблица 4. Значения баллистических пределов V_{bl} (в м/с), полученные экспериментально и численно

$\dfrac{H}{D}$	Эксперимент [11]	Численное решение [11]	Новые данные
0.1	138.3	96.5	97.5
0.2	177.6	169.0	168.0
0.3	243.6	223.0	229.0
0.6	408.0	369.5	355.0
1.2	670.2	639.0	631.0
2.0	958.7	977.0	993.0

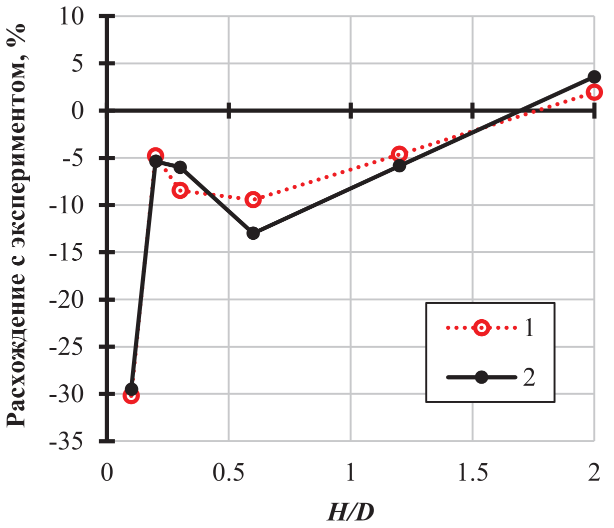

Рисунок 1. Расхождение с экспериментом численных результатов: 1) полученных в [11] с использованием критерия текучести (9); 2) полученных с использованием критерия текучести (12) с законом деформирования в форме (15).

Как видно из представленных в Табл. 4 и на Рис. 1 данных, расхождение между двумя сериями численных результатов составляет не более 5%. При этом обе серии близки к экспериментальным данным при $H/D \geq 0.2$, т.е. практически во всём рассматриваемом диапазоне безразмерных толщин мишеней. Сравнение полученных численно качественных картин разрушения между собой и с результатами эксперимента также не выявило существенных различий для всего рассматриваемого диапазона безразмерных толщин мишеней. В качестве характерного примера на Рис. 2 показаны алюминиевые пластины с $H/D = 1.2$ после их пробивания жёстким сферическим ударником со скоростью V_0, которая была немного больше V_{bl}.

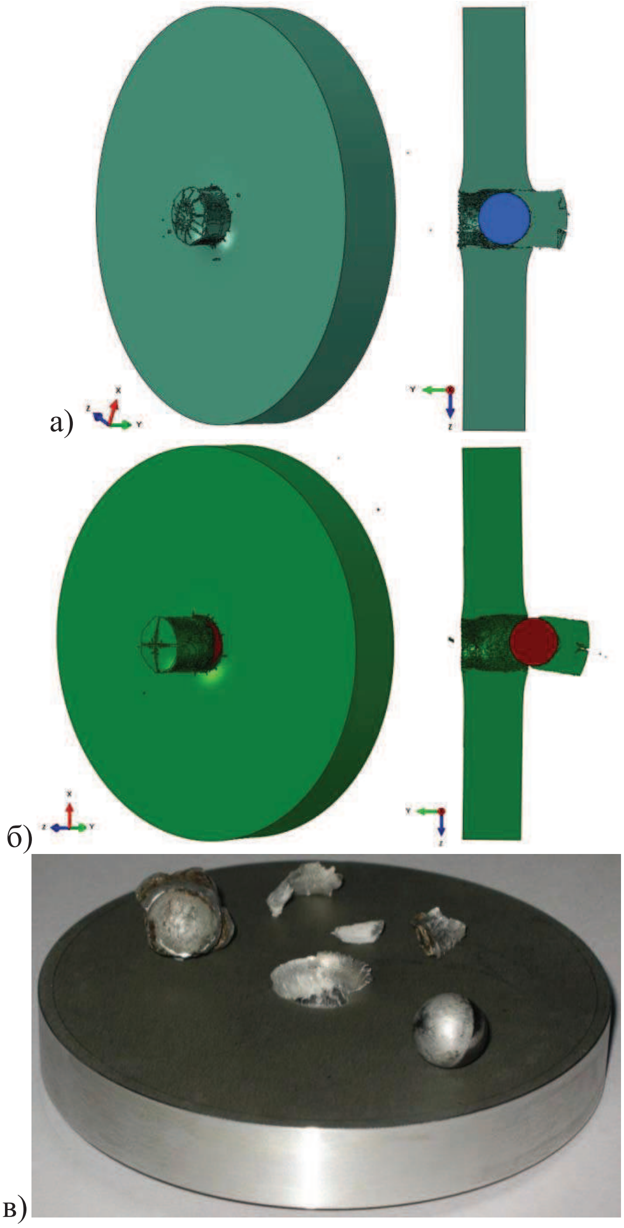

Рисунок 2. Картина разрушения круглой алюминиевой пластины после пробивания жёстким сферическим ударником: а) новое численное решение, $H/D = 1.2$, $V_0 = 632.0$ м/с; б) численное решение, полученное в [11], $H/D = 1.2$, $V_0 = 640.0$ м/с; в) эксперимент [11], $H/D = 1.22$, $V_0 = 681.2$ м/с

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование пробивания свободных круглых пластин из алюминиевого сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога AA2024-T3(51) различной толщины жёстким сферическим телом, ударяющим по центру мишени нормально к её поверхности, с использованием феноменологических трёхинвариантных критериев текучести и разрушения и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными и результатами численного моделирования с применением трёхинвариантного критерия разрушения и зависящего только от J_2 критерия текучести показали, что учёт влияния I_1 и J_3 на предел текучести материала не даёт сколько-либо значимого увеличения точности численного решения при её оценке как по количественным, так и по качественным показателям. В то же время трёхинвариантные критерии текучести содержат дополнительные (по сравнению с критериями, зависящими только от J_2) параметры, связанные с учётом влияния I_1 и J_3, для определения значений которых необходимо проведение нескольких дополнительных экспериментов на растяжение и сжатие образцов из моделируемого материала.

Таким образом, учёт всех трёх инвариантов напряжённого состояния при численном моделировании задачи пробивания пластин из сплава Д16(А)Т или его зарубежного аналога АА2024-Т3(51) жёстким телом необходим только в рамках критерия прочности (см. [11]), а для описания деформирования материала мишени достаточно использовать критерий текучести, зависящий только от J_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bai Y.** Effect of loading history on necking and fracture. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2008, 262 p.
2. **Bai Y., Wierzbicki T.** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *Int. J. Plast*, 2008, Vol. 24, Iss. 6, pp. 1071-1096.
3. **Bao Y.** Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2003, 253 p.
4. **Bao Y., Wierzbicki T.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, Vol. 46, Iss. 1, pp. 81-98.
5. **Khan A.S., Liu H.** A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *Int. J. Plast.*, 2012, Vol. 35, pp. 1-12.
6. **Papasidero J., Doquet V., Mohr D.** Ductile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multi-axial loading: Bao-Wierzbicki results revisited. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 69-70, pp. 459-474.
7. **Seidt J.D.** Plastic deformation and ductile fracture of 2024-T351 aluminum under various loading conditions. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2010, 196 p.
8. **Seidt J.D., Gilat A.** Plastic deformation of 2024-T351 aluminum plate under a wide range of loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, Vol. 50, Iss. 10, pp. 1781-1790.
9. **Wilson C.D.** A critical reexamination of classical metal plasticity. *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 2002, Vol. 69, Iss. 1., pp. 63-68.
10. **Rosenberg Z., Dekel E.** Terminal Ballistics. The 2nd edition. Singapore, Springer Singapore, 2016, 359 p.
11. **Vershinin V.V.** Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 67-68, pp. 127-138.
12. **Vershinin V.V.** High velocity perforation as a benchmark problem for material model validation. Proceedings of the SIMULIA Community Conference, Berlin, Germany, Dassault Systèmes, 2015, pp. 160-175.
13. **Lou Y., Yoon J.W., Huh H.** Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *Int. J. Plast.*, 2014, Vol. 54, pp. 56-80.
14. **Johnson G.R., Cook W.H.** Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pres-

sures. *Eng Fract Mech*., 1985, Vol. 21, Iss. 1, pp. 31-48.
15. **Von Mises R.** Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys., 1913, Vol. 1, pp. 582-592.
16. **Johnson G.R., Cook W.H.** A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high stain rates and temperatures. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, American Defense Preparedness Association, Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1983, pp. 541-547.
17. **Senf H., Weimann K.** Die wirkung von stahlkugeln auf dural-einfach-und mehrplattenziele. EMI report no. V6-73, 1973.
18. **Бивин Ю.К.** Деформация и разрушение круглых пластин при статическом и динамическом нагружении сферическим телом. // Изв. РАН. МТТ, 2008, Т. 43, В. 5, с. 130-140.
19. **Бивин Ю.К.** Разрушение круглых пластин при ударе по нормали жестким сферическим телом. // Изв. РАН. МТТ, 2011, Т. 46, В. 4, с. 126-140.
20. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1925, Vol. 5, Iss. 2, pp. 142-144.
21. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Ztg. Phys., 1926, Vol. 36, Iss. 11, pp. 913-939.
22. **Nadai A.** Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen. Berichte der Fachausschüsse des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Werkstoffausschuß. Bericht 56, 1925.
23. **Vershinin V.V.** A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence. *Int. J. Solids Struct*., 2017 (Submitted).
24. **Swift H.W.** Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1952, Vol. 1, Iss. 1, pp. 1-18.
25. **Voce E.** The relationship between stress and strain for homogeneous deformations. *J. Inst. Metals*, 1948, Vol. 74, pp. 537-562.
26. **Von Mises R.** Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1928, Vol. 8, Iss. 3, pp. 161-185.
27. **Drucker D.C.** A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, USA, 1951, New York, NY, USA, American Society of Mechanical Engineers, 1952, pp. 487-491.
28. **Courant R., Friedrichs K., Lewy H.** Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen, 1928, Vol. 100, Iss. 1, pp. 32-74.
29. **Lesuer D.R.** Experimental investigations of material model for Ti-6Al-4V titanium and 2024-T3 aluminum. Technical report DOT/FAA/AR-00/25, Livermore, CA, USA, Lawrence Livermore National Laboratory, 2000, 41 p.

REFERENCES

1. **Bai Y.** Effect of loading history on necking and fracture. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2008, 262 p.
2. **Bai Y., Wierzbicki T.** A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *Int. J. Plast*, 2008, Vol. 24, Iss. 6, pp. 1071-1096.
3. **Bao Y.** Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2003, 253 p.
4. **Bao Y., Wierzbicki T.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, Vol. 46, Iss. 1, pp. 81-98.
5. **Khan A.S., Liu H.** A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *Int. J. Plast.*, 2012, Vol. 35, pp. 1-12.
6. **Papasidero J., Doquet V., Mohr D.** Duc-

tile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multiaxial loading: Bao-Wierzbicki results revisited. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 69-70, pp. 459-474.

7. **Seidt J.D.** Plastic deformation and ductile fracture of 2024-T351 aluminum under various loading conditions. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2010, 196 p.
8. **Seidt J.D., Gilat A.** Plastic deformation of 2024-T351 aluminum plate under a wide range of loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, Vol. 50, Iss. 10, pp. 1781-1790.
9. **Wilson C.D.** A critical reexamination of classical metal plasticity. *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 2002, Vol. 69, Iss. 1., pp. 63-68.
10. **Rosenberg Z., Dekel E.** Terminal Ballistics. The 2nd edition. Singapore, Springer Singapore, 2016, 359 p.
11. **Vershinin V.V.** Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, Vol. 67-68, pp. 127-138.
12. **Vershinin V.V.** High velocity perforation as a benchmark problem for material model validation. Proceedings of the SIMULIA Community Conference, Berlin, Germany, Dassault Systèmes, 2015, pp. 160-175.
13. **Lou Y., Yoon J.W., Huh H.** Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *Int. J. Plast.*, 2014, Vol. 54, pp. 56-80.
14. **Johnson G.R., Cook W.H.** Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Eng Fract Mech.*, 1985, Vol. 21, Iss. 1, pp. 31-48.
15. **Von Mises R.** Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys., 1913, Vol. 1, pp. 582-592.
16. **Johnson G.R., Cook W.H.** A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high stain rates and temperatures. Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, American Defense Preparedness Association, Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1983, pp. 541-547.
17. **Senf H., Weimann K.** Die wirkung von stahlkugeln auf dural-einfach-und mehrplattenziele. EMI report no. V6-73, 1973.
18. **Bivin Ju.K.** Deformacija i razrushenie kruglyh plastin pri staticheskom i dinamicheskom nagruzhenii sfericheskim telom [Deformation and Destruction of Circular Plates Under Static and Dynamic Loading by a Spherical Body]. Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela, 2008, Tom 43, Vypusk 5, pp. 130-140.
19. **Bivin Ju.K.** Razrushenie kruglyh plastin pri udare po normali zhestkim sfericheskim telom [The Destruction of Circular Plates on Impact on the Normal by a Rigid Spherical Body]. Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela, 2011, Tom 46, Vypusk 4, c. 126-140.
20. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1925, Vol. 5, Iss. 2, pp. 142-144.
21. **Lode W.** Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Ztg. Phys., 1926, Vol. 36, Iss. 11, pp. 913-939.
22. **Nadai A.** Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen. Berichte der Fachausschüsse des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Werkstoffausschuß. Bericht 56, 1925.
23. **Vershinin V.V.** A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence. *Int. J. Solids Struct.*, 2017 (Submitted).
24. **Swift H.W.** Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1952, Vol. 1, Iss. 1, pp. 1-18.
25. **Voce E.** The relationship between stress

and strain for homogeneous deformations. *J. Inst. Metals*, 1948, Vol. 74, pp. 537-562.
26. **Von Mises R.** Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen. Ztchr. Angew. Math. Mech., 1928, Vol. 8, Iss. 3, pp. 161-185.
27. **Drucker D.C.** A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, USA, 1951, New York, NY, USA, American Society of Mechanical Engineers, 1952, pp. 487-491.
28. **Courant R., Friedrichs K., Lewy H.** Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen, 1928, Vol. 100, Iss. 1, pp. 32-74.
29. **Lesuer D.R.** Experimental investigations of material model for Ti-6Al-4V titanium and 2024-T3 aluminum. Technical report DOT/FAA/AR-00/25, Livermore, CA, USA, Lawrence Livermore National Laboratory, 2000, 41 p.

Вершинин Владислав Владимирович, младший научный сотрудник научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов, ассистент кафедры металлических и деревянных конструкций, аспирант кафедры строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», инженер лаборатории нелинейных волновых процессов физического сектора ФГБУН Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел: +7 (495) 781-80-07, факс: +7 (499) 183-44-38;
e-mail: vlodya_91@mail.ru.

Мондрус Владимир Львович, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; заведующий кафедрой строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»; Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел: +7 (495) 781-80-07, факс: +7 (499) 183-44-38; e-mail: mondrus@mail.ru.

Vladislav V. Vershinin, Junior Research Assistant of Research and Education Center of Computational Simulation, Assistant of Structural Steel and Timberwork Department, Ph.D. Student of Structural and Theoretical Mechanics Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone: +7 (495) 781-80-07, fax: +7 (499) 183-44-38; e-mail: vlodya_91@mail.ru.

Vladimir L. Mondrus, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, D.Sc.; Head of Structural and Theoretical Mechanics Department of National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russia; phone: +7 (495) 781-80-07, fax: +7 (499) 183-44-38; e-mail: mondrus@mail.ru.