DOI:10.22337/1524-5845-2017-13-3-103-111

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ МЕТОДОМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

В.В. Петров

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, РОССИЯ

Аннотация: Предложен алгоритм применения метода наискорейшего спуска к решению задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Для применения этого метода нелинейные операторы описываются последовательностью линейных операторов в инкрементальной форме, а сложный линейный неограниченный оператор в соответствии с идеей Л.В. Канторовича ограничивается более простым линейным неограниченным оператором.

Ключевые слова: нелинейная строительная механика, метод последовательных нагружений, метод наискорейшего спуска

SOLUTION OF NON-LINEAR PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS BY METHOD OF STEEPEST DESCENT

Vladilen V.Petrov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, RUSSIA

Abstract: The algorithm of application of the method of steepest descent to the solution of problems of structural mechanics and solid mechanics, described by nonlinear differential equations. For application of this method to nonlinear operators are described by a sequence of linear operators in incremental form, unlimited and complex linear operator, in line with the idea of L. V. Kantorovich is limited to a simple linear unbounded operator.

Keywords: nonlinear structural mechanics, the method of successive loadings, the method of steepest descent

В настоящее время, как в отечественной, так и в зарубежной практике широкое применение находят приближенные и численные методы решения задач строительной механики. Построение замкнутого аналитического решения для большинства задач не представляется возможным, проведение экспериментальных исследований требует много времени и средств.

Для более полного использования резервных возможностей материала конструкций усложняют расчетные схемы и математические модели, описывающие напряженно-деформированное состояние конструкций. Чаще всего такое усложнение приводит к моделям, описываемым нелинейными дифференциальными уравнениями. Выделяют геометрическую, физическую и конструктивную нелинейность. При решении ряда задач, например при исследовании устойчивости тонкостенных конструкций, принцип малости перемещений и углов поворота становится неприемлемым. Необходимо учитывать нелинейные члены в соотношениях между деформациями и перемещениями, при этом формируется *геометрически нелинейная задача*. Если не справедлив закон Гука, связывающий напряжения и деформации, то их приходится связывать нелинейными соотношениями и возникает *физически нели-*

нейная задача. В случае нелинейных граничных условий возникает *конструктивная нелинейность*. Нелинейные зависимости могут появляться при учете влияния рабочих (агрессивных в отношении материала конструкций) сред. Взаимодействие с агрессивной внешней средой вызывает коррозионное поражение материала и возникает задача определения срока работоспособности конструкции. Задачи подобного рода можно отнести к задачам с наведенной неоднородностью свойств.

Нелинейные задачи имеют принципиальные отличия от линейных задач. Так в нелинейных задачах энергия деформации уже не является квадратичной функцией, кроме того, не справедлив принцип суперпозиции и основанные на этом принципе классические теоремы механики.

Для приближенного решения граничных задач математического анализа применяются методы, основанные на различных идеях. Одним из таких методов решения является метод наискорейшего спуска. Метод наискорейшего спуска первоначально рассматривался как вариационный метод решения линейных функциональных уравнений. Схема метода следующая: строится последовательность приближений к минимуму функционала такого рода, что переход от одного приближения к следующему осуществляется по направлению наискорейшего убывания функционала. Отсюда происходит и название метода. Доказан ряд теорем [1] о сходимости метода для линейных функциональных уравнений со скоростью геометрической прогрессии.

Идея метода восходит к Коши. Первоначально он рассматривался как вариационный метод решения функциональных уравнений и нахождения собственных чисел линейных операторов. В общем случае метод наискорейшего спуска для квадратичных функционалов разработан Л.В. Канторовичем [2]. Принципиальное отличие метода наименьшего спуска от прямых вариационных методов заключается в том, что последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, а в форме определяемой самой задачей.

Рассмотрим возможность применения идеи метода наискорейшего спуска к решению задач строительной механики и механики деформируемого тела, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Для применения этого метода необходимо чтобы, во-первых, задача описывалась ограниченным линейным оператором и, во-вторых, этот оператор должен быть ограниченным.

При решении краевых задач с учетом нелинейной связи между напряжениями и деформациями в материале конструкции (физическая нелинейность) или допущением перемещений, сопоставимых с толщиной конструкции (геометрическая нелинейность), одним из методов является метод последовательных нагружений или его обобщение – метод последовательного возмущения параметров. Подробное изложение этих методов для решения разнообразных задач нелинейной механики пластинок и оболочек можно найти в работе [3].

Совокупность уравнений нелинейной механики твердого деформируемого тела вместе с соответствующими граничными условиями запишем в виде операторного уравнения:

$$A(u,\alpha_1,...\alpha_m)=0 \qquad (1)$$

где A – нелинейный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, u – искомый элемент этого функционального пространства. Оператор A задан на некотором множестве функций $D(A)$, обладающих следующими свойствами: функции и их первые производные абсолютно непрерывны в области Ω (Ω – конечная область пространства координат, занятая пластинкой или оболочкой), на границе области Γ функции удовлетворяют заданным граничным условиям. Оператор A будем называть оператором данной краевой задачи, $\alpha_1,...,\alpha_m$ –

параметры модели, учитывающие влияние и воздействия различной природы на решение задачи, в том числе и на физико-механические свойства материала конструкции в период эксплуатации. Параметры α_k могут иметь различную природу, среди этих параметров имеются геометрические, физические и, в том числе, параметры внешнего воздействия.

Если малое изменение параметра α_k вызывает малые изменения элемента *u*, то такой параметр будем называть ведущим. В возмущенном состоянии уравнение (1) запишем в следующем виде

$$A(u+\Delta u, \alpha_1, ..., \alpha_k + \Delta\alpha_k, .., \alpha_m) = 0 \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1) получим

$$A(u+\Delta u) - A(u) = A'(u)\Delta u + O(\|\Delta u\|) \qquad (3)$$

Первое слагаемое этого равенства есть линейная функция от Δu, аппроксимирующая функцию $A(u+\Delta u)-A(u)$ с точностью до величин порядка малости высшего, чем $\|\Delta u\|$. Произведение $A'(u)\Delta u$ называется дифференциалом Гато нелинейного оператора *A*, а $A'(u)$ называется производной Гато нелинейного оператора *A* в точке u. Линейная функция от Δu может быть получена по формуле

$$A'(u)\Delta u = \frac{d}{d\lambda} A(u+\lambda\Delta u)\Big|_{\lambda=0} \qquad (4)$$

Если за ведущий параметр принят параметр внешней нагрузки α_k, то инкрементальное уравнение на *j-ом* этапе изменения ведущего параметра будет иметь вид:

$$A'(u_{j-1}, \alpha_1, ..., \alpha_m)\Delta u_j = \Delta\alpha_{k,j} \qquad (5)$$

где $j=1,2,...,N$ – номер этапа возмущения, а левая часть уравнения представляет собой дифференциал Гато нелинейного оператора *A*. Элемент u_{j-1} известен из решений на предыдущих этапах решения и вычисляется по формуле

$$u_{j-1} = \sum_{k=1}^{k=j-1} \Delta u_k \,.$$

Рекуррентное уравнение (5) было названо в [4] уравнением метода последовательных нагружений. В процессе реализации процедуры последовательных возмущений параметров накапливаются погрешности порядка нормы приращения элемента *u*. Эту погрешность можно регулировать, изменяя величину приращения ведущего параметра.

Процесс деформирования с позиций инкрементального подхода описывается последовательностью состояний равновесия S_0, S_1,..., S_n. В исходном состоянии S_0 модель характеризуется начальными параметрами физико-механических свойств. S_n – конечное состояние, при котором требуется определить напряженно-деформированное состояние рассматриваемой модели конструктивного элемента, или решить другие задачи. S_k – произвольное промежуточное равновесное состояние. Считается, что в этом состоянии известны все параметры внешнего и внутреннего процесса: уровень приложенных нагрузок, уровень деградации физико-механических свойств материала конструкции, тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещения во всех точках конструкции. Полагаем, что параметры процесса известны не только в состоянии равновесия S_j, но и во всех пройденных за историю процесса деформирования состояниях S_1,..., S_{j-1}. Каждое из состояний называется шагом процесса деформирования.

При $j=1$ уравнение (3) вырождается в уравнение соответствующей линейной теории. Присваивая j последовательные значения $1,2,3,...,N$ мы будем перемещаться вдоль ведущего параметра, решая при этом поставленную нелинейную задачу.

В общем случае, возмущая одновременно или последовательно несколько параметров, получим рекуррентное инкрементальное уравнение

$$A'\left(u_{j-1};\alpha_1,\dots,\alpha_m\right)\Delta u_j+\sum_m \frac{\partial A}{\partial \alpha_m}\Delta\alpha_{m,j}=0, \quad (6)$$

которое было названо нами [5] уравнением метода последовательного возмущения параметров.

Так как уравнение (6) линейное, то при его решении можно применять принцип суперпозиции и менять ведущий параметр. В уравнении (6) содержится ряд методов решения нелинейных задач расчета балок, пластинок и оболочек: метод последовательного изменения жесткости, метод последовательного изменения кривизны, метод последовательного изменения области интегрирования, метод последовательного наращивания ребер, метод последовательного нагревания, метод последовательного изменения неоднородности и ряд других в зависимости от набора параметров α_k в (6). Некоторые из этих методов рассматривались рядом авторов как самостоятельные, но по своей сути это один инкрементальный метод.

В зависимости от поставленной задачи уравнение (2.5) позволяет применять различные стратегии. Например, сначала за ведущий параметр принимается внешняя нагрузка, и конструкция последовательно нагружается до заданной величины поперечной нагрузки. Затем ведущим параметром становится температура, и напряженная конструкция последовательно нагревается до заданной температуры. Затем изучается взаимодействие нагруженной и нагретой конструкции с агрессивной внешней средой (последовательное изменение неоднородности) и так далее. Возможен и другой набор стратегий. При изменении каждого из ведущих параметров решается нелинейная задача. Для повышения точности решения разработан [6] двухшаговый метод последовательного возмущения параметров позволяющий существенно повысить точность решения и сократить число этапов нагружения. Таким образом, представление нелинейного оператора A в инкрементальной форме позволяет устранить первое препятствие для использования метода наискорейшего спуска.

Л.В. Канторовичу принадлежит идея B – ограниченных операторов, которая состоит в том, что сложный линейный неограниченный оператор $L\triangleright$ можно ограничить простым линейным неограниченным оператором B. Л.В. Канторовичем доказана теорема: если оператор L положительно определен и B – ограничен

$$\begin{gathered} m\left(Bu,u\right)\le\left(Lu,u\right)\le M\left(Bu,u\right), \\ 0<m\le M<+\infty, \end{gathered} \quad (7)$$

то имеет место B-сходимость процесса наискорейшего спуска к решению исходного уравнения с быстротой геометрической прогрессии. Эта теорема доказана для случая когда рассматриваемая задача описывается линейными дифференциальными уравнениями. Здесь и далее используется принятое обозначение скалярного произведения функций в виде (..., ...).

В соответствии с теоремой необходимо построить симметричный, положительно полуограниченный оператор B родственный оператору L

$$\left(Bu,u\right)\ge\left(u,u\right) \quad (8)$$

Область определения оператора B должна совпадать с областью определения оператора L, кроме того должно выполняться неравенство (7). При решении задач строительной механики B-ограниченность оператора L обеспечивается, если упругая система, описываемая оператором B оказывается мажорантой, является более жесткой по сравнению с исходной, описываемой оператором L [8]. Поэтому оператор B для конкретной задачи можно построить исходя из инженерных соображений, а быстрота сходимости метода будет зависеть от его удачного выбора.

Последовательность решения уравнения (5) методом наискорейшего спуска состоит из следующих этапов.

Нулевое приближение (направление наискорейшего спуска) ищется как решение уравнения

$$Bu_0 = b \tag{9}$$

Первое приближение строится в виде

$$u_1 = u_0 - \varepsilon_1 z_1 \tag{10}$$

где z_1 является решением уравнения

$$Bz_1 = Lu_0 - b \tag{11}$$

правая часть этого уравнения представляет собой невязку решения исходного уравнения

$$Lu_0 = b\,.$$

Величина спуска ε_1 определяется по следующей формуле

$$\varepsilon_1 = \frac{(Bz_1, z_1)}{(Lz_1, z_1)} \tag{12}$$

Повторяя этот процесс, получим

$$u_n = u_{n-1} - \varepsilon_n z_n \tag{13}$$

где z_n представляет собой решение уравнения

$$Bz_n = Lu_{n-1} - b \tag{14}$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{(Bz_n, z_n)}{(Lz_n, z_n)} \tag{15}$$

Если на каждом j-ом этапе последовательного нагружения принять в этой схеме реализации метода наискорейшего спуска в качестве линейного B-ограниченного оператора L дифференциальный оператор $A'(u_{j-1})$, то в результате последовательного наращивания числа этапов нагружения получим решение нелинейной задачи.

В работе [6] идея метода наискорейшего спуска обсуждалась для решения геометрически нелинейных задач, здесь будем рассматривать физически нелинейные задачи. Методику решения продемонстрируем на самой простой задаче – изгиб балки из нелинейно-деформируемого материала. Логика рассуждений при решении более сложных задач физически нелинейной теории пластин и оболочек сохраняется.

Нелинейное дифференциальное уравнение изгиба балки из нелинейно-деформируемого материала имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(J_c(W)\frac{d^2W}{dx^2} \right) = q(x)\,. \tag{16}$$

где $W(x)$ – прогиб балки, $q(x)$ – заданная поперечная нагрузка, а переменная по длине балки жесткость вычисляется по формуле:

$$J_c(W) = \int_{-h/2}^{h/2} E_c(\varepsilon_i) z^2 b(z)\,dz\,. \tag{17}$$

Здесь E_c – секущий модуль, h – высота балки, $b(z)$ переменная ширина поперечного сечения балки. Соответствующие граничные условия формулируются через прогиб балки так, как это принято в сопротивлении материалов.

При справедливости гипотезы плоских сечений интенсивность деформаций зависит от величины прогиба

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x = -z\frac{d^2W}{dx^2}.$$

Так как секущий модуль является нелинейной функцией интенсивности деформаций, то переменная жесткость балки будет нелинейной функцией прогиба, вид которой зависит от способа аппроксимации диаграммы деформирования.

Инкрементальное дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид [3]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(J_k^{(j-1)}(x)\frac{d^2\Delta w_j}{dx^2}\right) = \Delta q_j(x). \quad (18)$$

где j – номер последовательного нагружения, переменная по длине балки жесткость $J_k^{(j-1)}(x)$ вычисляется по формуле:

$$J_k^{(j-1)}(x) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} E_k^{(j-1)}(x,z)z^2 b(z)dz \quad (19)$$

здесь $E_k^{(j-1)}$ – касательный модуль, вычисление которого не вызывает затруднений, так как он зависит от величины известного из предыдущих этапов нагружения, накопленного прогиба балки W_{j-1}. Граничные условия формулируются через приращения прогиба балки Δw_j.

На каждом этапе нагружения уравнение (18) будем решать методом наискорейшего спуска. В соответствии с этим методом построим нулевое приближение, как решение задачи изгиба балки постоянной фиктивной жесткости. Фиктивную жесткость определим, заменяя переменную жесткость $J_k^{(j-1)}(x)$ некоторой постоянной жесткостью $J_k^{*(j-1)}$, величина которой определяется из условия *B*-ограниченности дифференциального оператора уравнения (18). В этом случае балка, имеющая фиктивную жесткость, по сравнению с исходной балкой будет более жесткой. Учитывая, что в каждой точке балки $E_c > E_k$ и, следовательно $J_c > J_k$, в качестве одного из возможных вариантов фиктивную жесткость $J_c^{*(j-1)}$ определим как осредненную по длине балки l жесткость следующим образом

$$J_c^{*(j-1)} = \frac{1}{l}\int\limits_0^l J_c^{(j-1)}dx.$$

Можно использовать выражения

$$J_c^{*(j-1)} = J_{c,\max}^{(j-1)} \quad \text{или} \quad J^* = EJ_0.$$

Это отразится на скорости сходимости метода наискорейшего спуска.

Следовательно, в пределах этапа нагружения (далее индекс j опускаем) нулевое приближение есть решение дифференциального уравнения

$$J^*\frac{d^4\Delta w_0}{dx^4} = \Delta q(x), \quad (20)$$

решение которого не представляет труда.

Далее определяем невязку решения $F(x)$, подставляя найденное нулевое приближение в уравнение (18). Получим

$$F_0(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(J_k(x)\frac{d^2\Delta w_0}{dx^2}\right) - \Delta q(x) \quad (21)$$

Первое приближение строится в виде

$$\Delta w_1 = \Delta w_0 - \varepsilon_1 z_1 \quad (22)$$

где z_1 определяется из уравнения

$$J^*\frac{d^4 z_1}{dx^4} = F_0(x), \quad (23)$$

решение которого также не представляет труда.

Величина спуска ε_1 определяется следующим уравнением

$$\varepsilon_1 = \frac{(Bz_1, z_1)}{(Lz_1, z_1)}, \tag{24}$$

где соответствующие скалярные произведения определяются формулами

$$\begin{gathered}(Bz_1, z_1) = J^* \int_0^l z_1 \frac{d^4 z_1}{dx^4} dx, \\ (Lz_1, z_1) = \int_0^l z_1 \frac{d^2}{dx^2}\left(J_k(x) \frac{d^2 z_1}{dx^2} \right) dz.\end{gathered} \tag{25}$$

Далее итерационный процесс повторяется.

$$\Delta w_n = \Delta w_{n-1} - \varepsilon_n z_n \tag{26}$$

где z_n есть решение уравнения

$$J_* \frac{d^4 z_n}{dx^4} = F_{n-1}(x) \tag{27}$$

где правую часть уравнения вычисляется по формуле

$$F_{n-1}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(J_k(x) \frac{d^2 \Delta w_{n-1}}{dx^2} \right) - \Delta q(x), \tag{28}$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{(Bz_n, z_n)}{(Lz_n, z_n)}.$$

Следует обратить внимание на то, что здесь последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей.

Процесс решения следует начинать с аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования материала балки подходящим аналитическим выражением и определения аналитических выражений E_c и E_k.

Если в интересующем нас диапазоне деформаций экспериментальная диаграмма деформирования может быть представлена в виде

$$\sigma_i = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3, \tag{29}$$

В этом случае секущий и касательный модули принимают вид:

$$\begin{gathered}E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = E - m\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 z^2, \\ E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = E - 3m\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 z^2.\end{gathered} \tag{30}$$

Жесткостные параметры балки постоянной ширины $b = const$ имеют вид:

$$\begin{gathered}J_c(x) = EJ_0 - \frac{mbh^5}{80}\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2, \\ J_k(x) = EJ_0 - \frac{3mbh^5}{80}\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2,\end{gathered} \tag{31}$$

где J_0 – осевой момент инерции поперечного сечения балки. Подставляя (31) в (18), получим инкрементальное уравнение изгиба балки:

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dx^2}\left(\left[EJ_0 - \frac{3mbh^5}{80}\left(\frac{d^2 W_{j-1}}{dx^2} \right)^2 \right] \frac{d^2 \Delta w_j}{dx^2} \right) = \\ = \Delta q_j(x).\end{gathered} \tag{32}$$

В результате на каждом этапе нагружения имеем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Оператор L в схеме применения метода наискорейшего спуска в данном случае имеет вид

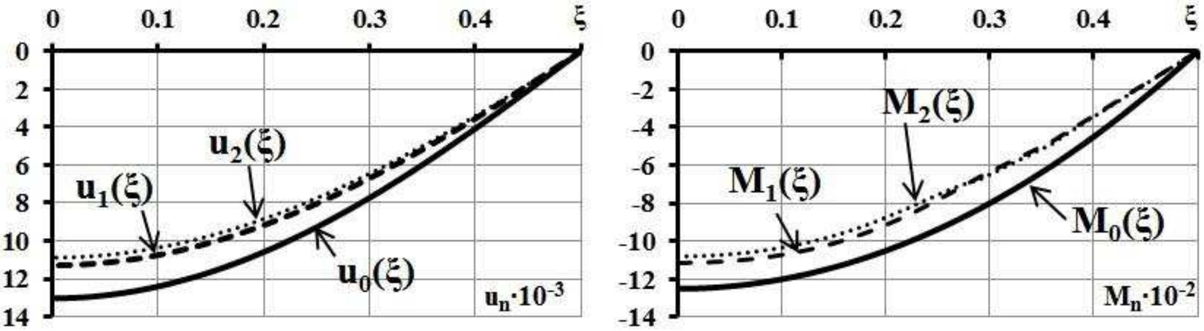

Рисунок 1. *Иллюстрация скорости сходимости метода наискорейшего спуска.*

$$L = A'\left(W_{j-1}\right) =$$

$$= EJ_0 \frac{d^4}{dx^4} - \frac{3mbh^5}{80} \frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{d^2W_{j-1}}{dx^2}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right], \quad (33)$$

а оператор B, ограничивающий оператор L, имеет вид

$$B = J_c^{*(j-1)} \frac{d^4}{dx^4},$$

где осредненная жесткость определяется по формуле

$$J_c^{*(j-1)} = EJ_0 - \frac{mbh^5}{80} \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{d^2W_{j-1}}{dx^2}\right)^2 dx \quad (34)$$

Для иллюстрации скорости сходимости метода наискорейшего спуска на рис. 1 в безразмерной форме приведены результаты расчета балки из нелинейно деформируемого материала, полученные после десяти последовательных нагружений равномерно распределенной нагрузкой. При действии этой суммарной нагрузки максимальная интенсивность деформаций составляла порядка 2,5%.

Таким образом, совместное применение метода последовательных нагружений и метода B-ограниченных операторов позволяет использовать для решения нелинейных задач строительной механики эффективный метод наискорейшего спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
2. **Канторович Л.В.** Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. // ДАН СССР 48, №7, 1945; Функциональный анализ и прикладная математика. УМН 3, №6, 1948.
3. **Петров В.В.** Нелинейная икрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
4. **Петров В.В.** К расчету пологих оболочек при конечных прогибах. // Научные доклады высшей школы. Строительство, 1959, №1, с. 27-35.
5. **Овчинников И.Г., Петров В.В.** Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. // Строительная механика и расчёт сооружений, 1982, №2, с. 13-18.
6. ***Петров В.В.*** Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики твердого деформируемого тела. //Сб. Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред, Саратов, 2001, с. 6-12.
7. **Петров В.В.** Метод последовательных нагружений в нелинейной теории

пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во СГУ, 1975. – 115 с.
8. **Деркачев А.А.** Общая теория метода мажорантной упругой системы. – Душанбе, 1963.

REFERENCES

1. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Funkcional'nyj Analiz [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977.
2. **Kantorovich L.V.** Ob Odnom Jeffektivnom Metode Reshenija Jekstremal'nyh Zadach Dlja Kvadratichnogo Funkcionala [About Effective Method for Solving Extremal Problems for a Quadratic Functional]. // DAN SSSR 48, No. 7, 1945; Funkcional'nyj analiz i prikladnaja matematika. UMN 3, No.6, 1948.
3. **Petrov V.V.** Nelinejnaja Inkremental'naja Stroitel'naja Mehanika [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Infra-Inzhenerija, 2014, 480 pages.
4. **Petrov V.V.** K raschetu pologih obolochek pri konechnyh progibah [To the Analysis of Shallow Shells at Finite Deflections]. // Nauchnye doklady vysshej shkoly. Stroitel'stvo, 1959, No. 1, pp. 27-35.
5. **Ovchinnikov I.G., Petrov V.V.** Opredelenie Dolgovechnosti Jelementov Konstrukcij, Vzaimodejstvujushhih s Agressivnoj Sredoj [Determination of the Durability of Structural Elements Interacting with an Aggressive Medium]. // Stroitel'naja mehanika i raschjot sooruzhenij, 1982, No. 2, pp. 13-18.
6. **Petrov V.V.** Dvuhshagovyj Metod Posledovatel'nogo Vozmushhenija Parametrov i ego Primenenie k Resheniju nelinejnyh zadach mehaniki Tverdogo Deformiruemogo Tela [Two-Step Method of Sequential Perturbation of Parameters and its Application to Solving Nonlinear Problems of Mechanics of a Solid Deformable Body]. // Proceedings, Problemy prochnosti jelementov konstrukcij pod dejstviem nagruzok i rabochih sred, Saratov, 2001, pp. 6-12.
7. **Petrov V.V.** Metod Posledovatel'nyh Nagruzhenij v Nelinejnoj Teorii Plastinok i Obolochek [The Method of Successive Loading in the Nonlinear Theory of Plates and Shells]. Saratov, Saratov State University, 1975, 115 pages.
8. **Derkachev A.A.** Obshhaja Teorija Metoda Mazhorantnoj Uprugoj Sistemy [The General Theory of the Method of the Majorant Elastic System]. Dushanbe, 1963.

Петров Владилен Васильевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой Теории сооружений и строительных конструкций, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, 77;
тел. +7(8452)99-86-03; факс +7(8452)99-88-10;
e-mail: vvp@sstu.ru

Vladilen V. Petrov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr.Sc., Head of Department of Theory of Structures, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 77 Politechnicheskaya street, Saratov, Russia, 410054; tel. +7(8452)99-86-03; fax +7(8452)99-88-10;
e-mail: vvp@sstu.ru.