

О СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДАХ РЕДУЦИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ В РАМКАХ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.М. Белостоцкий^{1,2,3,4,5}, П.А. Акимов^{1,5,6}, Д.С. Дмитриев¹

¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

² Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ

³ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁴ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, РОССИЯ

⁵ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящее время, как известно, имеется немало методов редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов (МКЭ), в том числе в части снижения порядков матрицы масс и матрицы жесткости конечноэлементной модели, для приведения, например, ее в соответствии с «мониторинговой» (или «тестовой») моделью объекта, степени свободы которой определяются местами установки акселерометров. В этом отношении в данной статье будут рассмотрены (с анализом преимуществ и недостатков каждого) следующие подходы: метод редуцирования по Гайяну, IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования и метод динамического редуцирования. Кроме того, описывается основанный на теории метода подконструкций так называемый статический метод конечных элементов для сейсмического расчета подземных сооружений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод суперэлементов, метод подконструкций, методы редуцирования, вычислительная размерность

ABOUT CONTEMPORARY APPROACHES TO REDUCTION OF COMPUTATIONAL DIMENSION OF PROBLEMS OF STRUCTURAL ANALYSIS WITHIN FINITE ELEMENT METHOD

Alexander M. Belostotsky^{1,2,3,4,5}, Pavel A. Akimov^{1,5,6}, Dmitry S. Dmitriev¹

¹ Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

² Russian University of Transport» (RUT – MIIT), Moscow, RUSSIA

³ Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁴ Perm National Research Polytechnic University, Perm, RUSSIA

⁵ Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁶ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: At present, as is known, there are many methods of reduction of computational dimension of problems of structural analysis within finite element method (FEM), including the reduction of the dimensions of the mass matrix and the stiffness matrix of the finite element model (to bring them, for example, in accordance with the “structural health monitoring” (or “test”) model of the object, which degrees of freedom are determined by the places of installation of accelerometers. In this respect, the following approaches are considered in this paper (with the corresponding analysis of the advantages and disadvantages): the Gaian reduction method, the IRS (Improved Reduced System) reduction method and the dynamic reduction method. In addition, the so-called static finite element method for seismic analysis of underground structures, based on the substructuring technique, is considered.

Keywords: finite element method, superelement method, substructuring method, reduction, computational dimension

1. ОБ АКТУАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РЕДУЦИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ЭТАПЕ МОНИТОРИНГА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Основной целью исследования колебаний строительных объектов в рамках мониторинга является верификация конечноэлементной модели объекта, оценка корректности прогнозного математического моделирования его поведения. Таким образом, на основе инструментальных измерений определяются собственные частоты и формы колебаний объекта. Вместе с тем, очевидно, что конечноэлементная модель объекта характеризуется существенно большим числом степеней свободы по сравнению с тем объемом данных, который может обеспечить сеть акселерометров. Для непосредственного сопоставления результатов соответствующих натуральных измерений и конечноэлементного расчета создается редуцированная тестовая модель, степени свободы которой полностью соответствуют местам установки акселерометров и измеряемым ими параметрам.

Создание такой тестовой модели позволяет решить сразу несколько задач. Прежде всего, соответствующие исследования, сами по себе, способствуют созданию качественной системы мониторинга объекта в части выбора мест расположения тестово-измерительных приборов и определения перечня величин, подлежащих измерению. Кроме того, после построения редуцированной матрицы масс непосредственно на объекте появляется возможность проверки выполнения условия ортогональности соответствующих форм колебаний. Наконец, именно наличие тестовой модели позволяет выполнять оценку точности используемой конечноэлементной модели в рамках действующей системы мониторинга. Для корректно-

го решения этих задач, разумеется, требуется корректная редукция матрицы масс и матрицы жесткости в соответствии с имеющимися степенями свободы тестовой модели.

В настоящее время используется немало различных подходов к редуцированию. В настоящей статье рассматриваются, в частности, метод редуцирования по Гайяну [11], IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования [15] и метод динамического редуцирования [16]. Следует отметить, что подходы к редуцированию различаются по точности, простоте применения и объему потребных вычислительных ресурсов. В последующих разделах достаточно кратко рассматриваются теоретические основы вышеуказанных методов и актуальные вопросы их практического использования.

2. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РЕДУЦИРОВАНИЯ МАТРИЦ

В основе всех методов редуцирования матриц (т.е. приведения их в соответствие с тестовой моделью) лежит следующая формула:

$$B = T^T A T, \quad (2.1)$$

где A – исходная матрица; B – соответствующая редуцированная матрица; T – матрица преобразования (редуцирования).

Основной сложностью процесса редуцирования является существенная разница между числом степеней свободы в исходной конечноэлементной модели и тестовой модели. Так, число степеней свободы в исходной конечноэлементной модели может достигать до нескольких миллионов неизвестных, тогда как сеть акселерометров (или иных измерительных приборов) на объекте составляет, как правило, несколько десятков или сотен единиц. Методы редуцирования должны позволять делать корректные оценки (на ос-

нове интерполяции) о движении всей конечноэлементной модели на основании ограниченного числа известных величин в местах установки акселерометров. В силу того, что соотношение между количеством интерполируемых и известных величин весьма значительно, для обеспечения адекватного редуцирования требуется высокоточная процедура интерполяции. По существу, именно характер и точность интерполяции значений для тех степеней свободы, которые не относятся к значениям, измеряемым инструментальным способом (т.е. являются вспомогательными степенями свободы и не относятся к степеням свободы тестовой модели (главным степеням свободы)), является важнейшими факторами, определяющими точность методов редуцирования, рассматриваемых ниже.

3. МЕТОД РЕДУЦИРОВАНИЯ ПО ГАЙЯНУ

Простейшим подходом к редуцированию является метод редуцирования по Гайяну (R.J. Guyan), предложенный в 1965 году [11]. Рассмотрим разрешающую систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов для задачи статического расчета объекта:

$$K\bar{U} = \bar{P}, \quad (3.1)$$

где \bar{U} – вектор неизвестных; K – матрица жесткости; \bar{P} – вектор нагрузок.

В методе редуцирования по Гайяну полагается, что параметры интерполяции могут быть определены на основании следующего представления системы (3.1):

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_o \\ \bar{P}_a \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где составляющие, относящиеся к значениям, измеряемым сетью акселерометров, установленных на объекте, имеют нижний

индекс a , прочие, т.е. редуцируемые составляющие имеют индекс o .

Следует пояснить, что для наглядности через \tilde{K}_{aa} обозначается именно составляющая исходной матрицы жесткости, а никак не редуцированная матрица жесткости.

Полагая, нагрузки, соответствующие редуцируемым степеням свободы, нулевыми (т.е. $\bar{P}_o = 0$), можем переписать (3.2) следующим образом:

$$\begin{cases} K_{oo}\bar{U}_o + K_{oa}\bar{U}_a = 0 \\ K_{ao}\bar{U}_o + \tilde{K}_{aa}\bar{U}_a = \bar{P}_a, \end{cases} \quad (3.3)$$

Следовательно, на основании первого уравнения из (3.3) будем иметь:

$$\bar{U}_o = -K_{oo}^{-1}K_{oa}\bar{U}_a. \quad (3.4)$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{oa} \\ E \end{bmatrix} \bar{U}_a, \quad (3.5)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

Равенство (2.5) также можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_o \\ \bar{U}_a \end{bmatrix} = T_{Guyan} \bar{U}_a, \quad (3.6)$$

$$\text{где } T_{Guyan} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{oa} \\ E \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

– матрица редуцирования по Гайяну.

На основании матрицы (3.7) и исходных матрицы жесткости K и матрицы масс M могут быть построены соответственно редуцированная матрица жесткости K_{aa} и редуцированная матрица масс M_{aa} :

$$K_{aa} = T_{Guyan}^T K T_{Guyan}; \quad M_{aa} = T_{Guyan}^T M T_{Guyan}. \quad (3.8)$$

Заметим, что так как инерционные характеристики второстепенных степеней свободы полностью игнорируются, то метод редуцирования по Гайяну часто называют статической конденсацией.

4. IRS МЕТОД РЕДУЦИРОВАНИЯ

IRS метод редуцирования, разработанный Каллахан (J. O'Callahan) [15], представляет собой дальнейшее развитие методов редуцирования по сравнению с методом редуцирования по Гайяну. Здесь в частности, при построении матрицы редуцирования учитываются оценки первого порядка точности для массовых эффектов. Первый шаг в IRS методе совпадает с редуцированием по Гайяну (т.е. на первом шаге пренебрегают динамическими свойствами объекта). На втором шаге используется полученная выше статическая матрица редуцирования для оценки массовых эффектов редуцированных степеней свободы (т.е. для учета динамических свойств объекта).

Рассмотрим стандартную задачу определения собственных частот и форм колебаний объекта в рамках метода конечных элементов. Имеем обобщенную проблему собственных значений:

$$K\bar{\phi} = \lambda M\bar{\phi} \quad (4.1)$$

или тоже самое в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o \\ \bar{\phi}_a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & \tilde{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o \\ \bar{\phi}_a \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Следует пояснить, что через \tilde{K}_{aa} и \tilde{M}_{aa} аналогично предыдущему для наглядности обозначаются соответственно именно составляющая исходной матрицы жесткости и составляющая исходной матрицы масс, а никак не редуцированная матрица жесткости и не редуцированная матрица масс соответственно.

Следуя методу редуцирования Гайяна и используя соответственно соотношения (3.7), (3.8) и (4.1), получим:

$$K_{aa}\bar{\phi}_a = \lambda M_{aa}\bar{\phi}_a, \quad (4.3)$$

Необходимо отметить, что в силу использования формул метода редуцирования по Гайяну, частоты и формы собственных колебаний, соответствующие проблемам (4.1) и (4.3) не будут одинаковыми. Степень различия двух соответствующих решений зависит от степеней свободы тестовой модели. Восстановление собственных форм колебаний исходной конечноэлементной системы в первом приближении может быть выполнено по формуле (см. соотношения (4.3), (3.6) и (3.7)):

$$\bar{\phi} = T_{Guyan}\bar{\phi}_a. \quad (4.4)$$

Основной особенностью IRS метода редуцирования является введение корректирующего члена при решении обобщенной проблемы собственных значений, аналогичного тому, что используется в методе редуцирования по Гайяну для статического расчета объекта. Соответствующий член, характеризующий влияние «инерционных сил», может быть построен на основе использования соотношений (3.2), (4.3) и (4.4):

$$K\bar{\phi} = \bar{P} = \tilde{\lambda}M\bar{\phi}, \quad (4.5)$$

Используя выкладки, аналогичные приведенным ранее при описании метода редуцирования по Гайяну, имеем следующее соотношение для динамического корректирующего члена:

$$\bar{\phi}^* = \tilde{\lambda}K^{-1}MT_{Guyan}\bar{\phi}_a, \quad (4.6)$$

Таким образом, уточненные собственные формы колебаний определяются следующим образом:

О современных методах редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов

$$\bar{\phi} = T_{Guyan} \tilde{\phi}_a + \tilde{\lambda} K^{-1} M T_{Guyan} \tilde{\phi}_a. \quad (4.7)$$

Очевидно, что уравнение (4.3) может быть переписано в виде:

$$M_{aa}^{-1} K_{aa} \tilde{\phi}_a = \lambda \tilde{\phi}_a. \quad (4.8)$$

С учетом (4.8) можем переписать (4.7):

$$\bar{\phi} = T_{Guyan} \tilde{\phi}_a + K^{-1} M T_{Guyan} M_{aa}^{-1} K_{aa} \tilde{\phi}_a. \quad (4.9)$$

После переобозначений и несложных преобразований будем иметь следующую формулу для построения матрицы редуцирования в IRS методе:

$$T_{IRS} = \begin{bmatrix} G_{Guyan} + G_{IRS} \\ E \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка;

$$G_{Guyan} = -K_{oo}^{-1} K_{oa};$$

$$G_{IRS} = K_{oo}^{-1} (M_{oa} + M_{oo} G_{Guyan}) M_{aa}^{-1} K_{aa} \tilde{\phi}_a. \quad (4.11)$$

Матрица жесткости и матрица масс редуцируются в соответствии с тестовой моделью с использованием матрицы редуцирования (4.10) по следующим формулам:

$$K_{aa} = T_{IRS}^T K T_{IRS}; \quad M_{aa} = T_{IRS}^T M T_{IRS}. \quad (4.12)$$

5. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РЕДУЦИРОВАНИЯ

Еще одним усовершенствованием метода редуцирования по Гайяну является так называемый метод динамического редуцирования. Исходной постановкой в данном случае является обобщенная проблема собственных значений вида

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & \tilde{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o^{(i)} \\ \bar{\phi}_a^{(i)} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & \tilde{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_o^{(i)} \\ \bar{\phi}_a^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) может быть решено на основании подхода, аналогичного методу редуцирования по Гайяну, при этом строится матрица редуцирования, устанавливающая соответствие между редуцируемыми и нередуцируемыми степенями свободы. Вместе с тем, следует отметить, что такая матрица является индивидуальной для каждой собственной формы колебаний.

Альтернативный подход, предложенный М. Раз [16], заключается в использовании в (5.1) некоторой заданной (исследователем) величины Λ вместо соответствующего собственного значения. Матрица редуцирования в таком случае может быть сформирована посредством решения первого (из двух) матричных уравнений системы (5.1), т.е.

$$T_{DynRed} = \begin{bmatrix} -(K_{oo} - \Lambda M_{oo})^{-1} (K_{oa} - \Lambda M_{oa})^{-1} \\ E \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ

Разумеется, рассмотренные метод редуцирования по Гайяну, IRS (Improved Reduced System) метод редуцирования и метод динамического редуцирования имеют как сильные, так и слабые стороны. Достаточно подробный анализ данного вопроса представлен, в частности, в [7,8]. Ниже дана соответствующая краткая характеристика каждого из рассмотренных методов.

Метод редуцирования по Гайяну. Основным преимуществом метода является вычислительная эффективность (с точки зрения объема вычислительной работы) и простота алгоритмической реализации. Данный метод входит в инструментарий стандартных средств многих универсальных и специализированных конечноэлементных программ-

ных комплексов промышленного типа. Метод используется весьма продолжительное время, и получил заслуженное признание профессионального сообщества. В целом, метод является достаточно точным для большого количества объектов, однако, разумеется, при условии корректной установки сети акселерометров.

Основным недостатком метода является тот факт, что он не учитывает явные массовые эффекты редуцируемых степеней свободы. Это может повлечь за собой снижение точности в ситуациях когда число редуцируемых степеней свободы значительно, либо когда сеть акселерометров неудачно расположена, либо вообще непредставительна. Метод непригоден для использования при рассмотрении систем со значительным коэффициентом отношения массы к жесткости. В целом, метод является точным только в случае статических задач. Обобщение его на динамические задачи приводит к возникновению больших погрешностей вследствие полного пренебрежения инерционными силами во второстепенных степенях свободы. Метод используется в основном для исследования небольшого числа нижних тонов колебаний конструкций, так как только для них аппроксимация характера связи между главными и второстепенными степенями свободы, выраженная с помощью уравнений статики, близка к истинной [1].

IRS метод редуцирования. Метод несложен с точки зрения алгоритмической реализации, в том числе в составе универсальных и специализированных конечноэлементных программных комплексов промышленного типа [4,5]. В целом, метод точнее, чем метод редуцирования по Гайяну за счет введения поправки первого порядка, учитывающей массовые эффекты редуцируемых степеней свободы.

Тем не менее, метод может приводить к неточным результатам в случаях, когда формы колебаний редуцируемых степеней свободы (закрепленные при рассмотрении набора нередуцируемых степеней свободы) сближа-

ются с частотным диапазоном набора нередуцируемых степеней свободы [9]. Кроме того, очевидно, что для реализации метода требуются дополнительные вычислительные ресурсы. Метод все еще не столь широко используется как метод редуцирования по Гайяну, а если и используется, то с определенной настороженностью. Вместе с тем, разумеется имеется и положительный опыт апробации метода [21].

Метод динамического редуцирования. Основным преимуществом метода является явный учет массовых эффектов. Даже несмотря на то, что на исследователя возлагается задание значения для так называемого «эффективного собственного значения», следует подчеркнуть, что, по сути, любое такое сколь-либо обоснованное значение вероятно приводит к более эффективному процессу нежели использование метода редуцирования по Гайяну (в рамках которого полагается, что соответствующая величина собственного значения нулевая, вследствие чего массовые эффекты не учитываются при построении матрицы редуцирования).

Недостатки метода аналогичны недостаткам IRS метода редуцирования. Использование метода сопряжено со значительным объемом вычислительной работы и требует немалых усилий при внедрении в универсальные и специализированные конечноэлементные комплексы программ. Как уже отмечалось, исследователь должен задать величину «эффективного собственного значения», причем наилучшее решение этой задачи в общем случае весьма неочевидно. Ограничения по точности метода близки к соответствующим ограничениям для IRS метода редуцирования. Метод также все еще недостаточно широко используется в практических приложениях и требует особого внимания при применении.

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ

Матрица редуцирования (далее обобщенно обозначаемая T), построенная в каждом из рассмотренных выше методов, может использоваться для интерполяции («распространения») тестовых форм колебаний от мест установки акселерометров по всем степеням свободы конечноэлементной модели:

$$\bar{\phi} = T\bar{\phi}_a. \quad (7.1)$$

При проведении измерений очень часто возникает вопрос, что лучше: редуцировать матрицу масс и матрицу жесткости в соответствии со степенями свободы тестовой модели или же интерполировать формы колебаний по всем степеням свободы конечноэлементной модели. Если матрица редуцирования раз за разом используется для редуцирования и интерполяции, соответствующие численные результаты будут идентичными. В практических приложениях обычно более удобно проводить редукцию матрицы масс и матрицы жесткости до проведения измерений. С одной стороны это позволяет оценить адекватность сети акселерометров (в части соответствующих степеней свободы), а с другой стороны дает возможность значительно сократить объем хранимой на компьютере исследователя информации.

Следует отметить, что один из вариантов метода динамического редуцирования в ряде случаев оказывается исключительно эффективным для интерполирования форм. Верхняя половина формул (5.1) может быть переписана следующим образом:

$$\bar{\phi}_o^{(i)} = -(K_{oo} - \lambda_i M_{oo})^{-1} (K_{oa} - \lambda_i M_{oa}) \bar{\phi}_a^{(i)}. \quad (7.2)$$

Преимуществом такого подхода является непосредственное (явное) использование данных имеющихся измерений (частот и форм колебаний), а также матрицы масс и матрицы жесткости для конечноэлементной модели, что обеспечивает наилучшую оценку при ин-

терполировании тестовых форм колебаний по степеням свободы конечноэлементной модели. Данный метод может быть сопряжен со значительным объемом вычислений ввиду того, что выражение (6.2) должно быть вычислено для каждой формы колебаний. Вместе с тем, для многих практических приложений при наличии высокопроизводительной компьютерной техники такая проблема уже не является критичной. Метод динамического редуцирования для целого ряда задач позволил получить весьма качественную картину взаимно ортогональных результатов [3,6].

8. О СЕЙСМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОСНОВАННЫХ НА ТЕОРИИ МЕТОДА ПОДКОНСТРУКЦИЙ

8.1. Введение.

Как известно, подземные сооружения отличаются целый ряд характерных особенностей, среди которых, в частности, сложность возведения, высокая стоимость, продолжительный жизненный цикл и т.д. В случае разрушения таких объектов возникающие прямые и косвенные затраты будут существенно превышать аналогичные показатели для наземных сооружений [2,12,13,22]. Очевидно, что с учетом вышеизложенного сейсмический расчет подземных сооружений является исключительно важным этапом расчетного обоснования и проектирования безопасных и экономичных объектов.

По существу, в настоящее время существует два основных подхода к расчетному обоснованию подземных сооружений. Первый подход предусматривает динамический расчет связанной системы «сооружение – грунтовый массив», выполняемый, как правило, на основе метода конечных элементов (МКЭ) или метода конечных разностей (МКР). Важными этапами здесь является задание искусственных границ, динамические свой-

ства грунтов и ряд других вопросов, ограничивающих в силу сложности широкое применение подобного подхода в расчетной практике. Второй подход – это использование так называемых псевдостатических (квазистатических) методов [17-20], отличающихся относительной простотой и представляющих собой, по сути, статический анализ состояния подземного сооружения в условиях сейсмического воздействия (такой подход широко используется в инженерной практике и в нормативных документах ряда стран). Рассмотрим далее предложенный в [12] и применяемый для сейсмического расчета подземных сооружений так называемый статический метод конечных элементов, основанный на теории метода подконструкций, реализующий на определенном этапе значительное снижение вычислительной размерности исходной задачи.

8.2. Теоретические основы метода.

Динамическая связанная система «сооружение – грунтовый массив» может быть разделена на три подконструкции: подземное сооружение, ближняя зона грунтового массива и дальняя зона грунтового массива (рис. 8.1) [12].

С учетом характера декомпозиции системы «сооружение – грунтовый массив», представленной на рис. 1.1, можем записать следующие основные уравнения соответствующего контактного взаимодействия:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sn} \\ S_{ns} & S_{nn} & S_{nb} \\ & S_{bn} & S_{bb}^g + S_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_n \\ \bar{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^g \bar{u}_b^g \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

где S и \bar{u} означают соответственно матрицу жесткости и вектор перемещений; нижние индексы s, n, b обозначают соответственно подземное сооружение, ближнюю зону грунтового массива и дальнюю зону грунтового массива; верхний индекс g обозначает извлеченный грунт.

Полагая, что извлеченный грунт – это конструкция, будем иметь следующее уравнение:

$$(S_{bb}^e + S_{bb}^g) \bar{u}_b^f = S_{bb}^g \bar{u}_b^g, \quad (8.2)$$

где верхние индексы e, f обозначают извлеченный грунт и свободное поле соответственно

С учетом (8.2) можем переписать (8.1) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sn} \\ S_{ns} & S_{nn} & S_{nb} \\ & S_{bn} & S_{bb}^g + S_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{u}_n \\ \bar{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{bb}^e \bar{u}_b^f + S_{bb}^g \bar{u}_b^f \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

Динамическая матрица жесткости может быть определена следующим образом:

$$S = K + i\omega C - \omega^2 M, \quad (8.4)$$

где K, M, C обозначают соответственно матрицу жесткости, матрицу масс и матрицу демпфирования; ω – основная угловая (круговая) частота.

В целях упрощения можем переписать динамическую матрицу жесткости грунтового массива в (8.4) следующим образом [18,19]:

$$S_{bb}^g = K_{bb}^g + i\omega C_{bb}^g. \quad (8.5)$$

Для использования результатов определения сейсмического отклика свободного поля или результатов определения сейсмического отклика слоев грунта в целях определения сейсмического отклика подземного сооружения вводятся формулируемые ниже допущения.

Первое допущение: ускорения конструкции и ближней зоны грунтового массива такие же, как и у свободного поля в том же месте.

Второе допущение: скорости конструкции и ближней зоны грунтового массива такие же, как и у свободного поля в том же месте.

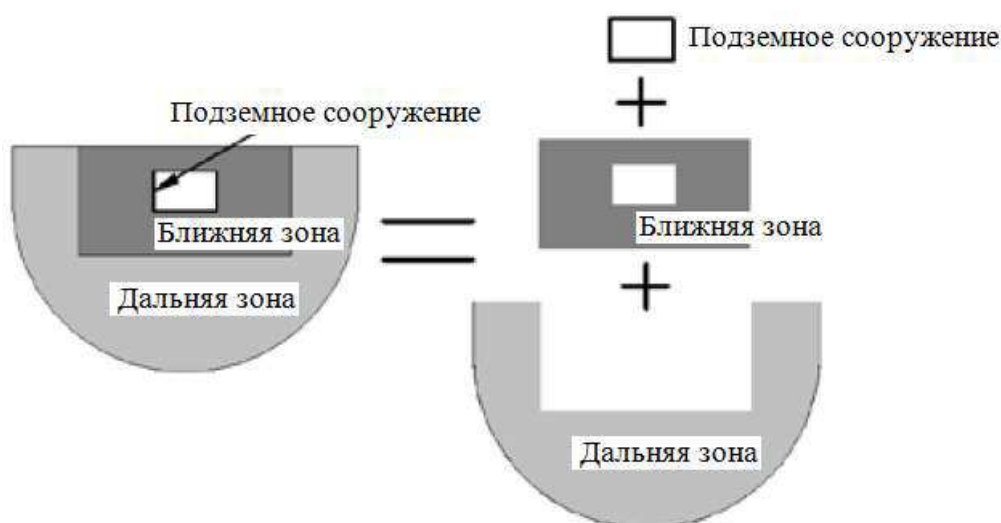


Рисунок 8.1. Выделение подконструкций в системе «сооружение – грунтовой массив».

Основной особенностью статического метода конечных элементов является то, что напряженное состояние с наибольшими внутренними усилиями в определенный момент времени в рамках динамического расчета подземного сооружения заменяется статическим расчетом, причем параметры этого расчета определяются с использованием метода деформаций свободного поля. Таким образом, оба введенных предположения призваны упростить использование результатов анализа сейсмического отклика свободного поля для приближенного нахождения сейсмического отклика подземного сооружения. Иными словами, сейсмический отклик подземного сооружения может быть найден на основе сейсмического отклика свободного поля.

Подставляя (8.4) и (8.5) в (8.3), с учетом допущений, получим (поясним, что левая часть уравнения (8.6) отражает реакцию связанной системы «сооружение – грунтовое основание», первое и второе слагаемое правой части, имеющие одинаковые знаки отражают внутренние усилия в подземном сооружении и ближней зоне грунтового массива (силы инерции, демпфирующие силы), третий член в правой части соответствует граничным условиям):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sn} & & \\ K_{ns} & K_{nn} & K_{nb} & \\ & K_{bn} & K_{bb}^g + K_{bb} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_s^f \\ \bar{u}_n^f \\ \bar{u}_b^f \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sn} & & \\ M_{ns} & M_{nn} & M_{nb} & \\ & M_{bn} & M_{bb}^g + M_{bb} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\ddot{u}}_s^f \\ \bar{\ddot{u}}_n^f \\ \bar{\ddot{u}}_b^f \end{bmatrix} - \\
 & \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sn} & & \\ C_{ns} & C_{nn} & C_{nb} & \\ & C_{bn} & C_{bb}^g + C_{bb} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\dot{u}}_s^f \\ \bar{\dot{u}}_n^f \\ \bar{\dot{u}}_b^f \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{bb}^e \bar{\ddot{u}}_f^f + C_{bb}^e \bar{\dot{u}}_b^f + K_{bb}^e \bar{u}_b^f \end{bmatrix}. \tag{8.6}
 \end{aligned}$$

8.3. Реализация метода.

На основании формулы (8.6) можем построить расчетную модель обобщенного статического метода конечных элементов, схематично показанную на рис. 8.2.

Здесь следует обратить внимание, что указанная модель включает две составляющие: внутренние усилия в сооружении и грунтовом массиве и граничные условия (граничные связи и граничные нагрузки).

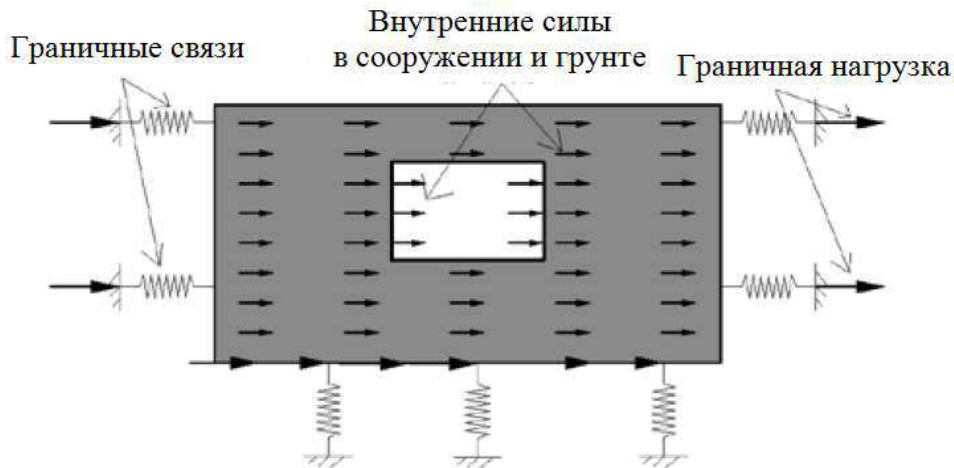


Рисунок 8.2. Обобщенная расчетная модель статического метода конечных элементов.

В соответствии с уравнением (8.6) внутренние усилия в сооружении и грунтовой массе включают, прежде всего, силы инерции и демпфирующие силы. Для решения задачи на данном этапе может быть использован метод ускорений отклика [14,17], однако боковые границы в виде закрепленных вертикальных роликовых опор и нижняя неподвижная закрепленная граница, используемые в рамках метода ускорений отклика, не могут отразить граничные условия, приведенные в (8.6). Таким образом, в [12] была предложена описанная ниже модификация граничных условий.

1. Граничные связи (K_{bb}^e).

Боковые и нижняя границы ограничены вязкоупругими границами. Используемые в рамках статического расчета граничные связи, наложенные пружинами, показаны на рис. 8.2. Значения коэффициентов отпора пружин согласуются с их жесткостью в рамках вязкоупругой границы [10] и определяются по формулам:

$$K_N = \frac{G}{2R}; \quad K_T = \frac{G}{R}, \quad (8.7)$$

где K_N и K_T – нормальный и тангенсальный коэффициенты отпора пружины; G – мо-

дуль сдвига; R – расстояние от подземного сооружения до точек границы.

2. Граничные нагрузки.

В соответствии с формулой (8.6) граничные нагрузки включают в себя следующие четыре составляющие: перемещения свободного поля \bar{u}_b^f , сила инерции на границе ближней зоны грунтового массива $M_{bb}^e \bar{u}_b^f$, демпфирующая сила ближней зоны грунтового массива $C_{bb}^e \dot{\bar{u}}_b^f$ и эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля $K_{bb}^e \bar{u}_b^f$. Методы определения указанных нагрузок описаны ниже.

Перемещения свободного поля \bar{u}_b^f : перемещения свободного поля могут быть вычислены с помощью специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев (ProShake, EERA и др. [12]).

Сила инерции на границе ближней зоны грунтового массива $M_{bb}^e \bar{u}_b^f$: ускорения свободного поля могут быть вычислены с помощью специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев, масса ближней зоны грунтового массива также может быть относительно легко найдена.

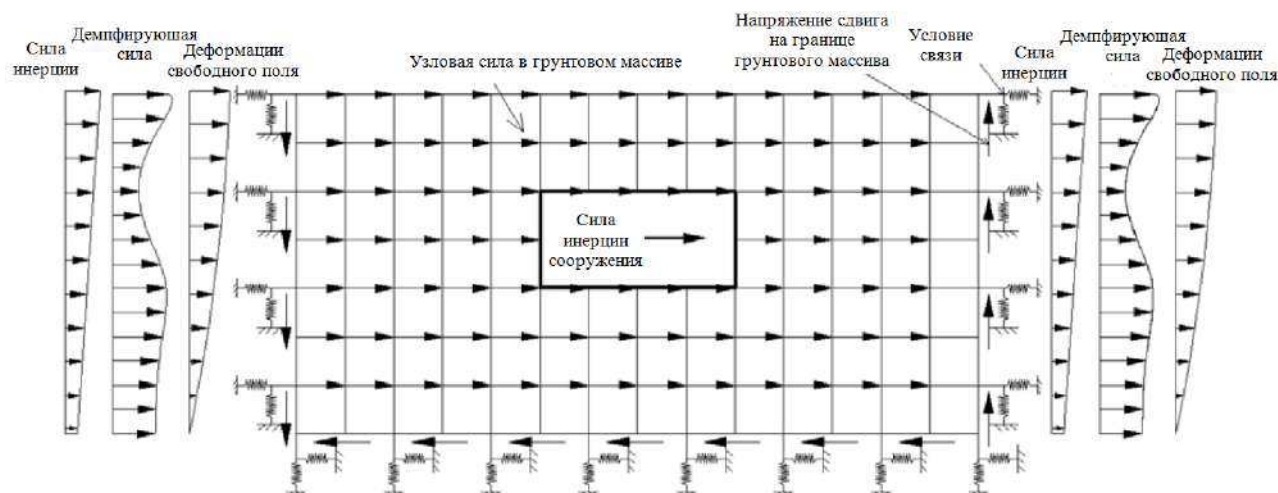


Рисунок 8.3. Расчетная модель статического метода конечных элементов.

Демпфирующая сила ближней зоны грунтового массива $C_{bb}^e \bar{u}_b^f$: на основе соотношения между демпфированием по Релею и коэффициентом демпфирования, граничная демпфирующая сила может быть получена по следующим формулам:

$$f_{ci} = c_i \dot{u}_i; \quad c_i = 2m_i w_i \xi_i; \quad \xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{w_i} + \alpha_1 w_i \right), \quad (8.8)$$

где f_{ci} – демпфирующая сила; c_i – коэффициент демпфирования; \dot{u}_i – узловая скорость; m_i – назначенная узловая масса; w_i – частота; ξ_i – относительное демпфирование; α_0 и α_1 – два коэффициента демпфирования по Релею.

Эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля $K_{bb}^e \bar{u}_b^f$: нагрузка может соответствовать напряжениям в грунтовом массиве свободного поля в тех же самых местах (эти напряжения могут быть вычислены с привлечением специализированного программного обеспечения, используемого для определения сейсмического отклика грунтовых слоев).

Таким образом, расчетная модель статического метода конечных элементов представлена на рис. 8.3.

На основании предыдущих рассуждений можно сформулировать следующие основные этапы статического метода конечных элементов.

1. Определение сдвиговых деформаций, ускорений, скоростей и перемещений для свободного поля в момент времени, когда относительное перемещение грунтового массива в зоне расположения подземного сооружения достигает максимального значения.
2. Определение силы инерции и параметров граничных условий (параметры пружин, сила инерции, демпфирующая сила, эквивалентная нагрузка перемещений свободного поля).
3. Построение статической конечноэлементной модели, приложение нагрузок и связей, определенных на втором этапе в соответствии со схемой, показанной на рис. 8.3, последующее проведение статического расчета.

8.4. О верификации статического метода конечных элементов для решения задач сейсмического расчета подземных сооружений.

Результаты верификационных исследований статического метода конечных элементов для решения задач сейсмического расчета подземных сооружений, представленные в [12], показали хорошую согласованность с

результатами, найденными после проведения динамических конечноэлементных расчетов связанных систем «сооружение – грунтовый массив». Кроме того, было установлено, что статический метод конечных элементов в меньшей степени, чем традиционные псевдостатические методы, критически зависит от размера рассматриваемой области. Вместе с тем, боковая граница рассматриваемой области должна быть удалена от подземного сооружения на величину, составляющую более одной ширины подземного сооружения.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2017 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов», тема 7.1.2 «Разработка, верификация и апробация адаптивной методики численного моделирования трехмерных динамических задач аэрогидроупругости в строительстве».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Игнатъев В.А., Ромашкин В.Н.** Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций (Обзор). // Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2015. Вып. 2(38). www.vestnik.vgasu.ru.
2. **Akinola J.O.** Response Study of Underground Pipes Due to Varying Impact of Surface Accidental Explosions. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2012(17/A), pp. 113-124.
3. **Botos C.D., Flanigan C.** Improvement of the Centaur Modal Survey Test Correlation using Dynamic Expansion. // 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, February 3-6, 1997.
4. **Flanigan C.** Development of the IRS Component Dynamic Reduction Method for Substructure Analysis. // AIAA-91-1056, AIAA 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1991.
5. **Flanigan C.** Implementation of the IRS Dynamic Reduction Method in MSC/NASTRAN. // MSC/NASTRAN World Users Conference, Los Angeles, CA, 1990.
6. **Flanigan C., Freymiller J.** Using Dynamic Expansion to Improve Test Analysis Correlation. // 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, Hawaii, Jan. 31 -Feb. 3, 1994.
7. **Freed A.M., Flanigan C.C.** A Comparison of Test-Analysis Model Reduction Methods. // 8th International Modal Analysis Conference, January, 1990.
8. **Friswell M.I., Mottershead J.E.** Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995.
9. **Gordis J.H.** An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. // 10th International Modal Analysis Conference, 1992.
10. **Gu Y., Liu J.B., Du Y.X.** 3D Consistent Viscous-Spring Artificial Boundary and Viscous-Spring Boundary Element. // *Engineering Mechanics*, 2007, 24(12), pp. 31-37 (in Chinese).
11. **Guyan R.J.** Reduction of Stiffness and Mass Matrices. // *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, 1965, p. 380.

12. **Jia B., Li-ping J., Yong-qiang L.** Seismic Analysis of Underground Structures Based on the Static Finite Element Method. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, Vol. 21, Bund. 06, pp. 2307-2315.
13. **Kazuhiko K.** Seismic Design of Underground Structures. Japan, Kashima Publishing Company, 1994 (in Japanese).
14. **Liu J.B., Wang W.H., Zhang X.B.** et al. Research on Response Deformation Method in Seismic Analysis of Underground Structure. // *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, 32(1), pp. 161-167 (in Chinese).
15. **O'Callahan J.** A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model. // 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
16. **Paz M.** Dynamic Condensation. // *AIAA Journal*, 1984, pp. 724-727.
17. **Pezhman F, Soheil G.** A Numerical Study of Bearing Capacity Coefficients of Soil Beneath Foundation under Earthquake Load. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 17/A, pp. 13-22.
18. **Tateishi A.** A Study on Loading Method of Seismic Deformation Method. // *Journal of JSCE*, 1992, No. 441/I-18, pp. 157-166 (in Japanese).
19. **Tateishi A.** A Study on Seismic Analysis Methods in the Cross Section of Underground Structures Using Static Finite Element Method. // *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE*, 2005, 22(1), pp. 41-53.
20. The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. GB 50909-2014 code for seismic design of urban rail transit structures. Beijing: China Architecture and Building Press, 2014 (in Chinese).
21. **Tran M.K.** Evaluation of Reduced Model Concepts for the Ten Bay CSI Truss Modal Test. // 11th International Modal Analysis Conference, 1993.
22. **Wang J.N.** Seismic Design of Tunnels: A Simple State-of-the-art Design Approach. New York, Parsons Brinckerhoff Quade and Douglas Inc., 1993.
23. **Wolf J.P.** Dynamic Soil-structure Interaction. London, Prentice-Hall Inc., 1985.

REFERENCES

1. **Ignatiev V.A., Romashkin V.N.** Algebraicheskaia Problema Sobstvennykh Vektorov i Sobstvennykh Znachenij Vysokogo Porjadka v Zadachah Dinamiki i Ustojchivosti Konstrukcij (Obzor) [Algebraic Problem of Eigenvectors and Eigenvalues of High Order in Problems of Dynamics and Stability of Structures (Review)]. // *Internet-vestnik VolgGASU*. 2015. Vyp. 2(38). www.vestnik.vgasu.ru.
2. **Akinola J.O.** Response Study of Underground Pipes Due to Varying Impact of Surface Accidental Explosions. // *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2012(17/A), pp. 113-124.
3. **Botos C.D., Flanigan C.** Improvement of the Centaur Modal Survey Test Correlation using Dynamic Expansion. // 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, February 3-6, 1997.
4. **Flanigan C.** Development of the IRS Component Dynamic Reduction Method for Substructure Analysis. // AIAA-91-1056, AIAA 32nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1991.
5. **Flanigan C.** Implementation of the IRS Dynamic Reduction Method in MSC/NASTRAN. // MSC/NASTRAN World Users Conference, Los Angeles, CA, 1990.
6. **Flanigan C., Freymiller J.** Using Dynamic Expansion to Improve Test Analysis Correlation. // 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, Hawaii, Jan. 31 - Feb. 3, 1994.
7. **Freed A.M., Flanigan C.C.** A Comparison of Test-Analysis Model Reduction Meth-

- ods. // 8th International Modal Analysis Conference, January, 1990.
8. **Friswell M.I., Mottershead J.E.** Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995.
 9. **Gordis J.H.** An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure. // 10th International Modal Analysis Conference, 1992.
 10. **Gu Y., Liu J.B., Du Y.X.** 3D Consistent Viscous-Spring Artificial Boundary and Viscous-Spring Boundary Element. // Engineering Mechanics, 2007, 24(12), pp. 31-37 (in Chinese).
 11. **Guyan R.J.** Reduction of Stiffness and Mass Matrices. // AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, p. 380.
 12. **Jia B., Li-ping J., Yong-qiang L.** Seismic Analysis of Underground Structures Based on the Static Finite Element Method. // The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2016, Vol. 21, Bund. 06, pp. 2307-2315.
 13. **Kazuhiko K.** Seismic Design of Underground Structures. Japan, Kashima Publishing Company, 1994 (in Japanese).
 14. **Liu J.B., Wang W.H., Zhang X.B.** et al. Research on Response Deformation Method in Seismic Analysis of Underground Structure. // Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(1), pp. 161-167 (in Chinese).
 15. **O'Callahan J.** A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model. // 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
 16. **Paz M.** Dynamic Condensation. // AIAA Journal, 1984, pp. 724-727.
 17. **Pezhman F., Soheil G.** A Numerical Study of Bearing Capacity Coefficients of Soil Beneath Foundation under Earthquake Load. // The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 17/A, pp. 13-22.
 18. **Tateishi A.** A Study on Loading Method of Seismic Deformation Method. // Journal of JSCE, 1992, No. 441/I-18, pp. 157-166 (in Japanese).
 19. **Tateishi A.** A Study on Seismic Analysis Methods in the Cross Section of Underground Structures Using Static Finite Element Method. // Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE, 2005, 22(1), pp. 41-53.
 20. The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. GB 50909-2014 code for seismic design of urban rail transit structures. Beijing: China Architecture and Building Press, 2014 (in Chinese).
 21. **Tran M.K.** Evaluation of Reduced Model Concepts for the Ten Bay CSI Truss Modal Test. // 11th International Modal Analysis Conference, 1993.
 22. **Wang J.N.** Seismic Design of Tunnels: A Simple State-of-the-art Design Approach. New York, Parsons Brinckerhoff Quade and Douglas Inc., 1993.
 23. **Wolf J.P.** Dynamic Soil-structure Interaction. London, Prentice-Hall Inc., 1985.
-
- Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), доктор технических наук, профессор, генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения», Российский университет транспорта (МИИТ); профессор кафедры «Строительные конструкции и вычислительная механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.
- Акимов Павел Алексеевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

О современных методах редуцирования вычислительной размерности задач расчета конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов

Дмитриев Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер-расчетчик Отдела расчетных исследований, ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; 125040, Россия, г. Москва ул. 3-я Ямского Поля, д.18, 8 этаж, офис 810, тел. +7 (495) 706-88-10, e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Alexander M. Belostotsky, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Director of StaDyO Research & Engineering Center; Professor of Department of Structures, Buildings and Facilities, Russian University of Transport» (RUT – МИИТ); Professor of Department of Building Structures and Computational Mechanics, Perm National Research Polytechnic University; office 810, 18, 3-ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Dmitry S. Dmitriev, Engineer, StaDyO Research & Engineering Center; office 810, 18, 3-ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (495) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru.