

РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В.В. Петров, Р.В. Мищенко, Д.А. Пименов

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, РОССИЯ

Аннотация: Алгоритм градиентного метода Канторовича применительно к нелинейным задачам строительной механики и механики деформируемого твердого тела, предложенный в [1], применен к исследованию изгиба физически нелинейных пластин переменной толщины. Данную статью следует рассматривать как логическое развитие содержания работы [2].

Ключевые слова: нелинейная строительная механика, метод последовательных нагружений, метод наискорейшего спуска

THE SOLUTION OF PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF BENDING VALVE PLATES

Vladilen V. Petrov, Roman V. Mishchenko, Dmitry A. Pimenov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, RUSSIA

Abstract: The algorithm of Kantorovich gradient method applied to nonlinear problems of construction mechanics and mechanics of deformable solids, proposed in [1], is applied to the study of the bending of physically nonlinear plates of variable thickness. This article should be considered as a logical development of the content of the work [2].

Keywords: nonlinear structural mechanics, method of successive loadings, method of steepest descent

Многие проблемы математической физики сводятся к задаче поиска экстремумов квадратичных функционалов. Рассмотрим особенности применения градиентного метода Канторовича к решению задач изгиба физически нелинейных пластин переменной толщины, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. В теореме, доказанной Л.В. Канторовичем, оговаривалось, что для применения этого метода необходимо, чтобы задача описывалась ограниченным, симметричным линейным оператором. При решении нелинейных задач теории пластинок и оболочек методом последовательных нагружений (МПН) [3] на каждом этапе нагружения решается линейная задача. Следовательно, на каждом этапе решения имеем соответствующий квадратичный функционал. Л.В. Канторович [1] развил градиентный

метод наискорейшего спуска для решения линейных дифференциальных уравнений в операторной форме при существовании соответствующего квадратичного функционала. Поэтому если при решении нелинейных задач применить метод последовательных нагружений и на каждом этапе нагружения решать инкрементальные уравнения градиентным методом наискорейшего спуска, то получим алгоритм применения градиентного метода Канторовича для решения нелинейных задач механики.

Так как на каждом этапе нагружения имеем упругую консервативную линейную систему, то на основании теоремы Максвелла можно утверждать, что оператор будет симметричным. Следующим требованием применения градиентного метода наискорейшего спуска является ограниченность операторо-

ра задачи. Если рассматриваемая задача описывается дифференциальными уравнениями, то оператор будет неограниченным. Л.В. Канторовичу принадлежит идея, что неограниченный сложный оператор A можно ограничить другим более простым неограниченным оператором B . Им доказана теорема: если положительно определенный линейный оператор A является B -ограниченным, то есть справедливо выражение:

$$m\langle Bu, u \rangle \leq \langle Au, u \rangle \leq M\langle Bu, u \rangle, \quad (0 < m \leq M < +\infty)$$

то имеет место B -сходимость процесса наискорейшего спуска к обобщенному решению уравнения с быстротой геометрической прогрессии. Здесь и далее используется обозначение скалярного произведения двух функций F и f в виде $\langle F, f \rangle$.

В методе последовательных нагружений решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линейных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$A(u_{n-1})\Delta u_n = \Delta q_n, \quad (2)$$

где произведение $A(u_{n-1})\Delta u_n$ – дифференциал Гато исходного нелинейного оператора в точке u_{n-1} , n – номер этапа нагружения, u_{n-1} – суммарное решение, полученное за $n-1$ предыдущие этапы нагружения. Если $n=1$, то уравнение (2) вырождается в уравнение соответствующей линейной теории. Присваивая n последовательные значения 1, 2, 3, ..., N мы будем перемещаться вдоль ведущего параметра q , решая при этом поставленную нелинейную задачу.

Для реализации градиентного метода необходимо на некотором линейном множестве Ω плотном в гильбертовом пространстве H выбрать симметричный положительно полуограниченный оператор B :

$$\langle Bu, u \rangle \geq \langle Au, u \rangle,$$

область определения которого совпадает с областью определения оператора A , и при этом справедливо неравенство (1). При решении задач строительной механики B -ограниченность оператора A обеспечивается, если упругая система, описываемая оператором B является мажорантой, то есть более жесткой по сравнению с исходной, описываемой оператором A [4]. Поэтому оператор B при решении конкретной задачи можно построить исходя из инженерных соображений, при этом чем ближе оператор B к исходному оператору A , тем меньше будет разница $M - m$ в (1) и тем быстрее сходится процесс.

При выборе упрощенного оператора B для конкретных задач механики полезно обращать внимание на физическое содержание коэффициентов оператора A и, заменяя их теми или иными постоянными числами, сделать конструкцию более жесткой по сравнению с рассматриваемой.

В нелинейных уравнениях изгиба пластинки переменной толщины в полных функциях переменная жесткость является функцией искомого прогиба пластинки, а в инкрементальных уравнениях переменная жесткость является известной функцией пространственных координат x и y , поскольку суммарный прогиб пластинки w известен из предыдущих этапов нагружения.

При расчете физически нелинейных пластинок переменной толщины инкрементальное уравнение на каждом этапе нагружения имеет вид [3]:

$$\nabla^2 (D_k \nabla^2 \Delta w) - \frac{1}{2} L(D_k, \Delta w) = \Delta q(x, y), \quad (3)$$

где $\Delta q(x, y)$ – приращение нагрузки, ∇^2 – оператор Лапласа, L – дифференциальный оператор вида

$$L(D_k, \Delta w) = \frac{\partial^2 D_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y}. \quad D_{j-1}^* = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b D_{c,j-1} dx dy.$$

$$L(D_k, \Delta w) = \frac{\partial^2 D_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Можно использовать условие

$$D_{j-1}^* = D_{c,j-1}^{\max} \quad \text{или} \quad D_{j-1}^* = D_0,$$

Переменная вдоль пространственных координат x и y жесткость пластинки переменной толщины при изгибе определяется из выражения:

где D_0 – цилиндрическая жесткость упругой пластинки постоянной толщины.

Это отразится на скорости сходимости метода наискорейшего спуска.

Следовательно, в пределах этапа нагружения (далее индекс j опускаем) нулевое приближение есть решение дифференциального уравнения:

$$D_k(x, y) = \frac{4}{3} \int_{-h(x,y)}^0 E_k(\varepsilon_i) [z + 0,5h(x, y)]^2 dz, \\ D_k(x, y) = \frac{4}{3} \int_{-h(x,y)}^0 E_k(\varepsilon_i) [z + 0,5h(x, y)]^2 dz, \quad (5)$$

где $h(x, y)$ – переменная толщина пластинки. Переменная жесткость в инкрементальных уравнениях содержит касательный модуль E_k , в то время как в уравнениях, записанных через полные функции, она содержит секущий модуль E_c , ε_i – интенсивность деформаций.

На каждом этапе нагружения уравнение (3) будем решать методом наискорейшего спуска. В соответствии с этим методом за нулевое приближение берем решение задачи изгиба пластинки с выбранной нами постоянной жесткостью. Постоянную жесткость определяем, заменяя переменную жесткость $D_{k,j-1}$ некоторой постоянной жесткостью D_{j-1}^* , величина которой определяется из условия B -ограниченности дифференциального оператора уравнения (3). В этом случае пластинка, имеющая постоянную жесткость, по сравнению с исходной пластинкой должна быть более жесткой. Учитывая, что в каждой точке пластинки $E_c > E_k$ и, следовательно $D_c > D_k$, то в качестве одного из возможных вариантов постоянную жесткость D_{j-1}^* определим как осредненную жесткость следующим образом

$$D^* \nabla^4 \Delta w_0 = \Delta q(x). \quad (6)$$

Далее определяем невязку решения $F(x, y)$, подставляя Δw_0 в уравнение (3). В результате получим функцию невязки решения:

$$F_0(x, y) = \nabla^2 (D_k \nabla^2 \Delta w_0) - \frac{1}{2} L(D_k, \Delta w_0) - \Delta q(x, y). \\ F_0(x, y) = \nabla^2 (D_k \nabla^2 \Delta w_0) - \frac{1}{2} L(D_k, \Delta w_0) - \Delta q(x, y). \quad (7)$$

Первое приближение принимаем в следующем виде:

$$\Delta w_1 = \Delta w_0 - \varepsilon_1 Z_1, \quad (8)$$

где Z_1 решение уравнения:

$$D^* \nabla^4 Z_1 = F_0(x, y). \quad (9)$$

Величина спуска ε_1 определяется уравнением вида:

$$\varepsilon_1 = \frac{\langle BZ_1, Z_1 \rangle}{\langle AZ_1, Z_1 \rangle}, \quad (10)$$

где соответствующие скалярные произведения определяются формулами:

$$\langle BZ_1, Z_1 \rangle = D^* \int_0^a \int_0^b [\nabla^4 Z_1] Z_1 dx dy,$$

$$\langle AZ_1, Z_1 \rangle = \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 \left(D_k \nabla^2 Z_1 \right) - \frac{1}{2} L(D_k, Z_1) \right] Z_1 dx dy$$

$$\sigma_i = E \varepsilon_i - m \varepsilon_i^3. \quad (15)$$

$$AZ_1, Z_1 = \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 \left(D_k \nabla^2 Z_1 \right) - \frac{1}{2} L(D_k, Z_1) \right] Z_1 dx dy \quad (11)$$

щим аналитическим выражением и определения аналитических выражений E_c и E_k .

Если в интересующем нас диапазоне деформаций экспериментальная диаграмма деформирования может быть, например, представлена в виде

то секущий и касательный модули принимают вид:

$$E_k = E_0 - 4(z + 0.5h)^2 mR(W), \quad E_c = E_0 - \frac{4}{3}(z + 0.5h)^2 mR(W)$$

Далее итерационный процесс повторяется:

$$\Delta w_n = \Delta w_{n-1} - \varepsilon_n Z_n, \quad E_k = E_0 - 4(z + 0.5h)^2 mR(W), \quad E_c = E_0 - \frac{4}{3}(z + 0.5h)^2 mR(W). \quad (12)$$

где Z_n есть решение уравнения вида:

$$D^* \nabla^4 Z_n = F_{n-1}(x, y), \quad (13)$$

Жесткостные параметры пластинки переменной толщины имеют вид:

$$D_k(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{15} mR(W), \quad D_c(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{45} mR(W)$$

правая часть уравнения – невязка решения, вычисляется по формуле:

$$D_k(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{15} mR(W), \quad D_c(x, y) = E_0 \frac{h^3}{9} - \frac{h^5}{45} mR(W), \quad (17)$$

$$F_{n-1}(x, y) = \nabla^2 \left(D_k \nabla^2 \Delta w_{n-1} \right) - \frac{1}{2} L(D_k, \Delta w_{n-1}) - \Delta q(x, y), \quad (14)$$

где E_0 – модуль упругости, $R(W)$ – квадратичная функция прогиба пластинки, которая имеет следующий вид:

$$R(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

$$R(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (18)$$

а ε_n определяется выражением

$$\varepsilon_n = \frac{\langle BZ_n, Z_n \rangle}{\langle AZ_n, Z_n \rangle}.$$

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемом алгоритме последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей. Процесс решения следует начинать с аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования материала балки подходя-

Подставляя (17) в (3), получим инкрементальное уравнение изгиба пластинки.

Таким образом, совместное применение метода последовательных нагружений и метода B -ограниченных операторов позволяет использовать для решения нелинейных задач строительной механики эффективный метод наискорейшего спуска.

В качестве примера, для реализации метода наискорейшего спуска, рассмотрим задачу изгиба квадратной пластинки переменной толщины выполненной из нелинейно-деформируемого материала в безразмерном виде. Пластика находится под действием равномерно распределенной поперечной

нагрузки. Ниже на рис. 1 приведена расчетная схема рассматриваемой пластинки с соответствующими обозначениями: h_0 – толщина пластинки по контуру, h_c – толщина пластинки в центре, P – равномерно распределенная поперечная нагрузка.

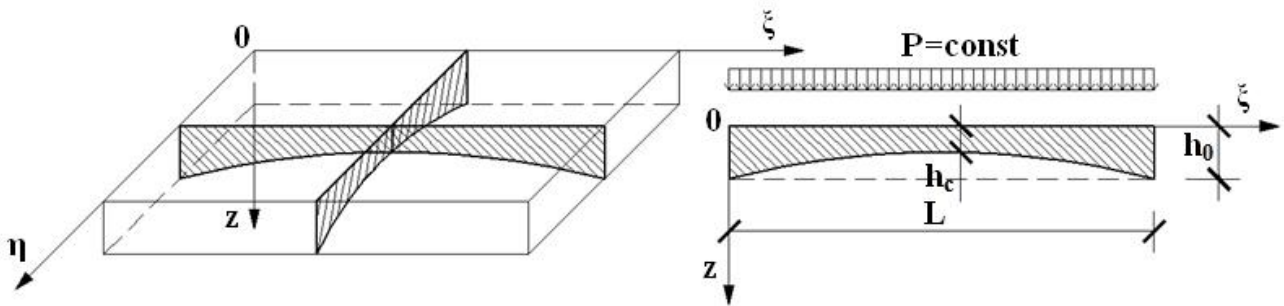


Рисунок 1. Расчетная схема пластинки с основными обозначениями.

Функцию переменной толщины $h(\xi, \eta)$ примем в виде синусоидального велариоида [5]:

$$h(\xi, \eta) = 1 - \lambda \sin(\pi\xi) \sin(\pi\eta), \quad (19)$$

где соответственно

$$\lambda = \frac{h_0 - h_c}{h_0}$$

– безразмерный параметр относительной толщины пластинки.

Для решения дифференциальных уравнений (6) и (9) применялся метод конечных разностей с сеткой 32×32 . Вычисление двойных определенных интегралов (11) выполнялось с использованием метода Симпсона. Для реализации алгоритма метода последовательных нагружений (МПН) нагрузка разбивалась на 10 частей и на каждом этапе метода МПН задача решалась методом наискорейшего спуска (МНС).

Ниже на рис. 2а приведены эпюры прогибов пластинки шарнирно опертой по контуру при различных значениях параметра относительной толщины λ .

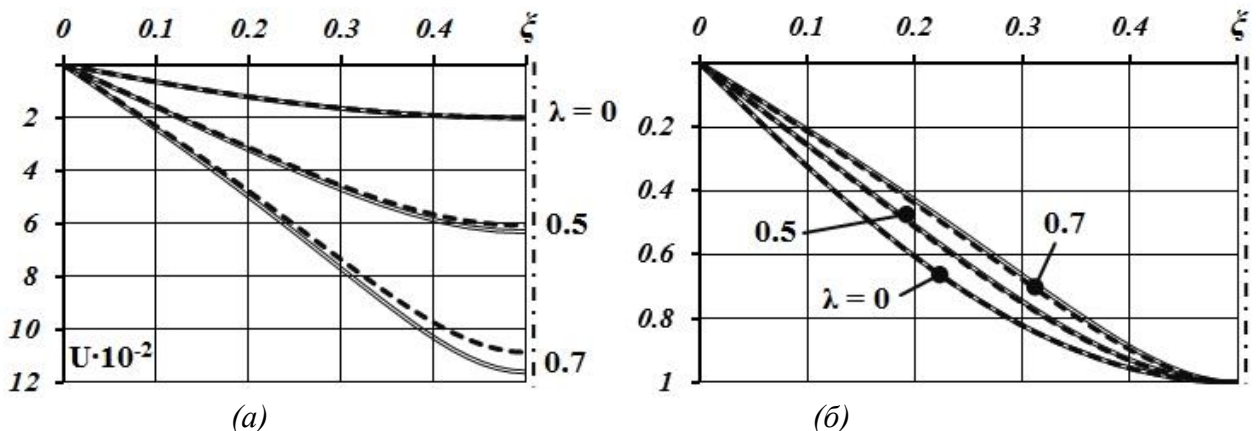


Рисунок 2. Эпюры прогибов при различных значениях параметра λ (а). Эпюры прогибов, нормированные к единице в центре (б).

Для оценки качественных изменений на рис. 2б приведены эти же эпюры прогибов, нормированные к единице в центре пластинки. Ниже на рис. 2-5 пунктирными линиями обозначены кривые соответствующие решению физически нелинейной задачи, а сплошными линиями решению физически линейной задачи.

Результаты, приведенные на рис. 2а, рис. 2б показывают, что с ростом параметра относительной толщины λ скорость роста прогибов пластинки в различных точках различна и достигает максимума в центре пластинки. Для более качественной оценки влияния переменной толщины пластинки на ее напряженно-деформированное состояние ниже рис. 3а приведены эпюры изгибающих моментов в

пластинке вдоль линии $\eta = 0,5$ при различных значениях параметра λ , а на рис. 3б приведены эпюры изгибающих моментов, нормированных к единице в центре пластинки. Видны качественные изменения в эпюрах, с ростом λ , происходит перемещение максимальных значений изгибающих моментов из центра пластинки в ее четверти.

Далее рассмотрим пластинку, жестко защемленную по всему контуру. На рис. 4а приведены эпюры прогибов пластинки вдоль линии $\eta = 0,5$ при различных значениях параметра λ , а на рис. 4б – аналогичные эпюры, нормированные к единице в центре пластинки.

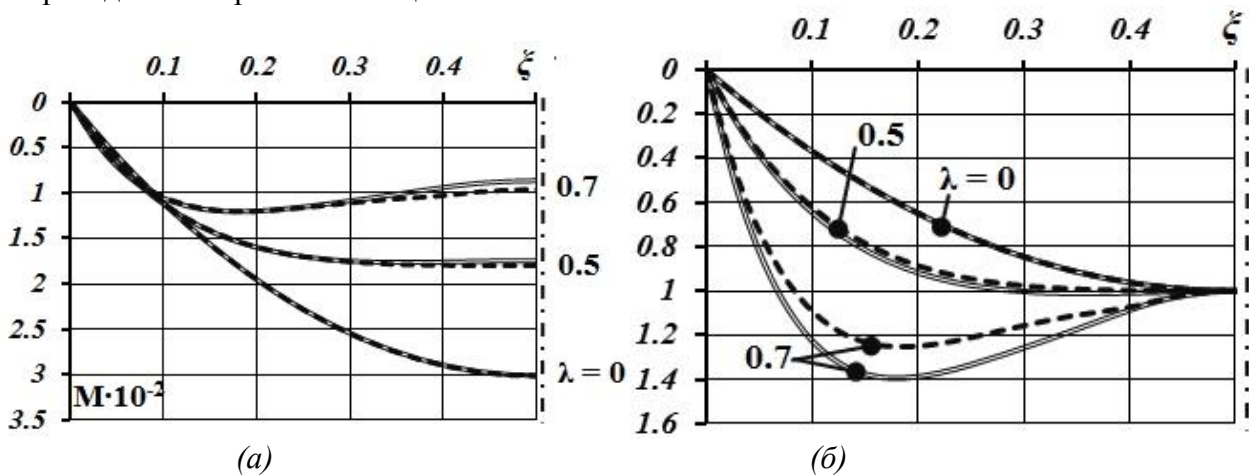


Рисунок 3. Эпюры изгибающих моментов при различных значениях λ (а).
Эпюры изгибающих моментов, нормированные к единице в центре (б)

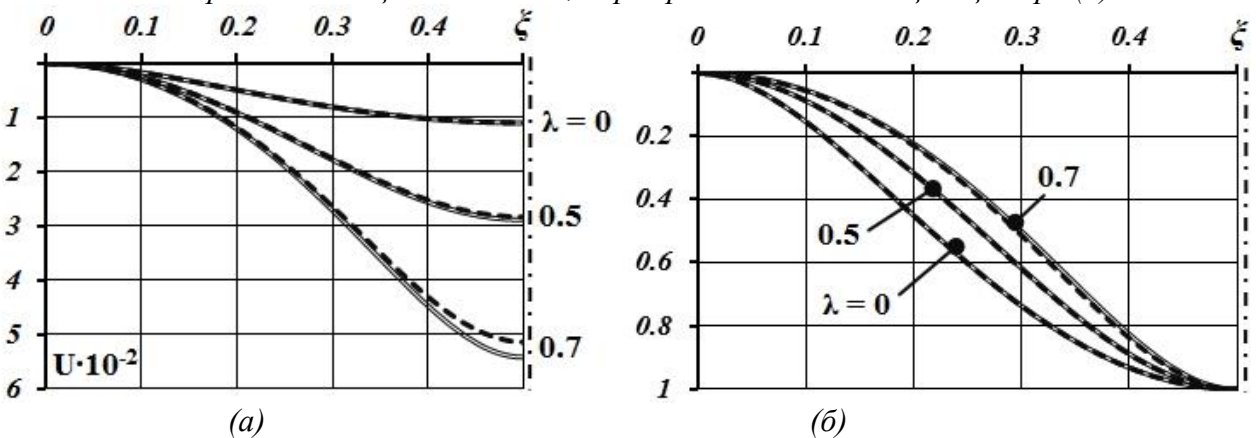


Рисунок 4. Эпюры прогибов при различных значениях параметра λ (а).
Эпюры прогибов, нормированные к единице в центре (б).

Результаты, приведенные на рис. 4,а показывают, что с ростом параметра λ значительно увеличиваются прогибы в центре. Из рис. 4,б видно, что качественные изменения в эпюрах прогибов происходят не только в центре пластинки, но и в ее четвертях, с ростом параметра λ прогиб пластинки в четверти уменьшается, однако по сравнению с изменениями, происходящими в центральной части пластинки эти изменения малы.

Для качественной оценки влияния переменной толщины пластинки на ее напряженно-деформированное состояние ниже на рис. 5,а приведены эпюры изгибающих моментов в пластинке жестко защемленной по контуру при различных значениях параметра λ . Для оценки качественных изменений в кривых изгибающих моментов на рис. 5,б приведены эпюры моментов, нормированные к единице в центре пластинки.

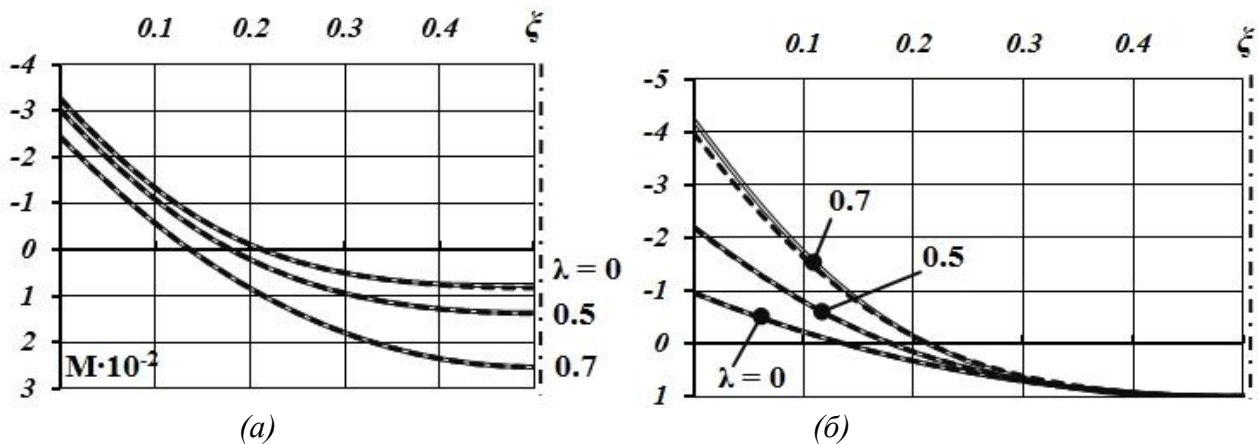


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов при различных значениях λ (а).
Эпюры изгибающих моментов, нормированные к единице в центре (б).

Результаты, приведенные на рис. 5,а, показывают, что с увеличением параметра λ изгибающие моменты в центре пластинки уменьшаются, а в опорной зоне изгибающие моменты наоборот растут.

В заключение следует отметить, что совместное использование метода последовательных нагружений и метода наискорейшего спуска позволяет сводить решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к решению уравнений с постоянными коэффициентами, также следует сказать, что использование МНС позволяет на каждом этапе решения задачи качественно улучшать получаемый результат, что обеспечивается построением последовательных приближений не в априорно выбранной форме, как в вариационных методах, а в форме определяемой самой задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л.В.** Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. // ДАН СССР, 1945, №7, с. 48.
2. **Петров В.В.** Решение нелинейных задач строительной механики методом наискорейшего спуска / В.В. Петров // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 3, с. 103-111.
3. **Петров В.В.** Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
4. **Деркачев А.А.** Общая теория метода мажорантной упругой системы. – Душанбе, 1963. – 350 с.
5. **Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.Н.** Аналитические поверхности. – М.: Наука, 2006. – 544 с.

REFERENCES

1. **Kantorovich L.V.** Ob Odnom Effektivnom Metode Resheniya Ekstremalnykh Zadach dlya Kvadrachnogo Funkcionala [An Effective Method for Solving Extremal Problems for a Quadratic Functional]. // DAN SSSR, 1945, No. 7. pp. 48.
2. **Petrov V.V.** Reshenie Nelinejnykh Zadach Stroitelnoj Mekhaniki Metodom Naikorejshego Spuska [Solving Nonlinear Problems of Structural Mechanics by the Method of Steepest Descent]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 3, pp. 103-111.
3. **Petrov V.V.** Nelinejnaya Inkrementalnaya Stroitel'naya Mekhanika [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2014, 480 pages.
4. **Derkachev A.A.** Obshhaya Teoriya Metoda Mazhorantnoj Uprugoj Sistemy [The General Theory of the Method of the Majorant Elastic System]. Dushanbe, 1963, 350 pages.
5. **Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.N.** Analiticheskie Poverxnosti [Analytical Surfaces]. Moscow, Nauka, 2006, 544 pages.

ситета им. Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, Саратовская область, г. Саратов, ул. 2-я Садовая, д. 97; тел. +7(937)632-19-12; e-mail: scorpions91@inbox.ru.

Vladilen V. Petrov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAACS), Professor, Dr. Sc., Head of the Department «Theory of Constructions and Building Structures», Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410054, Russian Federation, Saratov, 77 Polytechnicheskaya; phone +7 (8452) 99-86-03; fax +7 (8452) 99-88-10; E-mail: vvp@sstu.ru.

Roman V. Mischenko, Ph.D. Student of the Department «Theory of Constructions and Building Structures» Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410036, Saratov Region, Saratov, 38 Rostovskaya; phone +7(987) 338-40-22; E-mail: roman_radon4@mail.ru.

Dmitriy A. Pimenov, postgraduate student of the Department «Theory of Constructions and Building Structures» Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 410054, Saratov Region, Saratov, 97 2-nd Sadovaya; phone +7(937) 632-19-12; E-mail: scorpions91@inbox.ru.

Петров Владилен Васильевич, академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Теория сооружений и строительных конструкций», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; 410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; тел. +7(8452)99-86-03; факс +7(8452)99-88-10; E-mail: vvp@sstu.ru.

Мищенко Роман Викторович, аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.; 410036, Россия, Саратовская область, г. Саратов, ул. Ростовская, д. 38; тел. +7(987)338-40-22; e-mail: roman_radon4@mail.ru.

Пименов Дмитрий Алексеевич, аспирант кафедры «Теория сооружений и строительных конструкций» Саратовского государственного технического универ-