

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-117-132

МЕТОДИКА СУПЕРЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ «ОСНОВАНИЕ – КОНСТРУКЦИИ ФУНДАМЕНТОВ И ТРИБУН – КОНСТРУКЦИИ ПОКРЫТИЯ» СТАДИОНОВ ЧЕМПИОНАТА МИРА ПО ФУТБОЛУ 2018 ГОДА В РОССИИ. ОПИСАНИЕ И ВЕРИФИКАЦИЯ

А.И. Нагибович

ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье представлены: описание и верификация разработанной методики численного (суперэлементного) моделирования динамики трехмерных систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года в России при основных и особых сочетаниях нагрузок.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, суперэлемент, метод динамического синтеза подконструкций, напряженно-деформированное состояние, динамические характеристики, собственные частоты и формы колебаний, механическая безопасность, футбольный стадион

TECHNIQUE OF SUPERELEMENT SIMULATION OF DYNAMICS FOR SYSTEM “BASIS – FOUNDATIONS STRUCTURES AND STANDS – STRUCTURES OF THE ROOF” FOR STADIUMS FOR THE 2018 FIFA WORLD CUP IN RUSSIA. DESCRIPTION AND VERIFICATION

Alexander I. Nagibovich

Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The article presents descriptions and verification of the developed technique of numerical (superelement) simulation of dynamics of the three-dimensional systems "ground base - reinforced concrete foundation structures and stands - metal structures of the roof" of stadiums for the 2018 World Cup in Russia with basic and special combinations of loads.

Keywords: math modeling, numerical methods, finite element method, superelement, component mode synthesis, stress-strain state, strain-stress state, dynamic characteristics, natural frequencies and modes, mechanical safety, football stadium

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование напряженно-деформированного состояния таких уникальных большепролетных сооружений как футбольные стадионы имеет ряд особенностей,

подробно они были описаны в предыдущей статье.

Одна из ключевых особенностей, с которой приходится столкнуться при расчетном обосновании сооружений такого типа заключается в том, что проектированием и

расчетами различных подсистем несущих конструкций, таких как «основание», «железобетонные конструкции фундаментов и трибун» и «металлические конструкции покрытия и фасадов» занимаются независимые проектные организации. Такой подход характерен как для отечественной практики, так и для зарубежной. Следовательно, необходимо обосновать возможность перехода от исследования полной системы «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия и фасадов» футбольных стадионов к отдельным моделям подсистем. Альтернативным подходом является использование метода динамического синтеза подконструкций. Для преодоления указанной проблемы/особенности разработана и верифицирована приведенная ниже методика.

1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Методика численного моделирования динамики систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» футбольных стадионов предназначена для определения параметров НДС, прочности, динамики указанных комбинированных систем при действии основных и особых сочетаний нагрузок и воздействий. Разработанная методика предусматривает различные подходы решения поставленной задачи в зависимости от влияния жесткостных характеристик подсистем друг на друга, имеющегося в распоряжении программного обеспечения, а также совместимости форматов различных расчетных моделей.

Одним из основных этапов разработанной методики является сравнительный анализ динамических характеристик (собственных частот и форм колебаний значимого спектра) полной модели конструкций стадиона и составляющих её моделей подсистем «металлические конструкции покрытия» и «основание – железобетонные конструкции

фундаментов и трибун». При расчетах моделей подсистем недостающая часть учитывается с использованием сосредоточенных масс (для учета покрытия) или заданных жесткостей (для учета железобетонного каркаса).

Сопоставив собственные частоты и формы колебаний полной модели сооружения и подмодели конструкций покрытия можно оценить насколько велико влияние податливости опорной подсистемы «основание – железобетонные конструкции чаши» на статическое состояние, динамику и устойчивость упомянутой подсистемы «металлоконструкции покрытия».

При отсутствии связанных форм и незначительном расхождении значений частот колебаний для родственных форм, можно сделать вывод о возможности исследования НДС в рамках сепаратных моделей.

Альтернативным подходом, который может быть применен даже в том случае, когда сравнительный анализ собственных частот и форм колебаний полной модели и моделей подсистем конструкций стадиона не дает удовлетворительного ответа (о возможности декомпозиции), является метод динамического синтеза подконструкций или метод суперэлементов (МСЭ). Этот подход позволяет при расчете отдельной модели подсистемы подключать матрицы жесткости и масс остальных подсистем, тем самым учитывая влияние последних на НДС всей системы.

Методика реализована на основе программного комплекса ANSYS Mechanical и собственных программных разработок автора. Общая структурная схема методики представлена на рисунке 1.

2. МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПОДКОНСТРУКЦИЙ

Суперэлементный расчет систем включает следующие основные этапы:

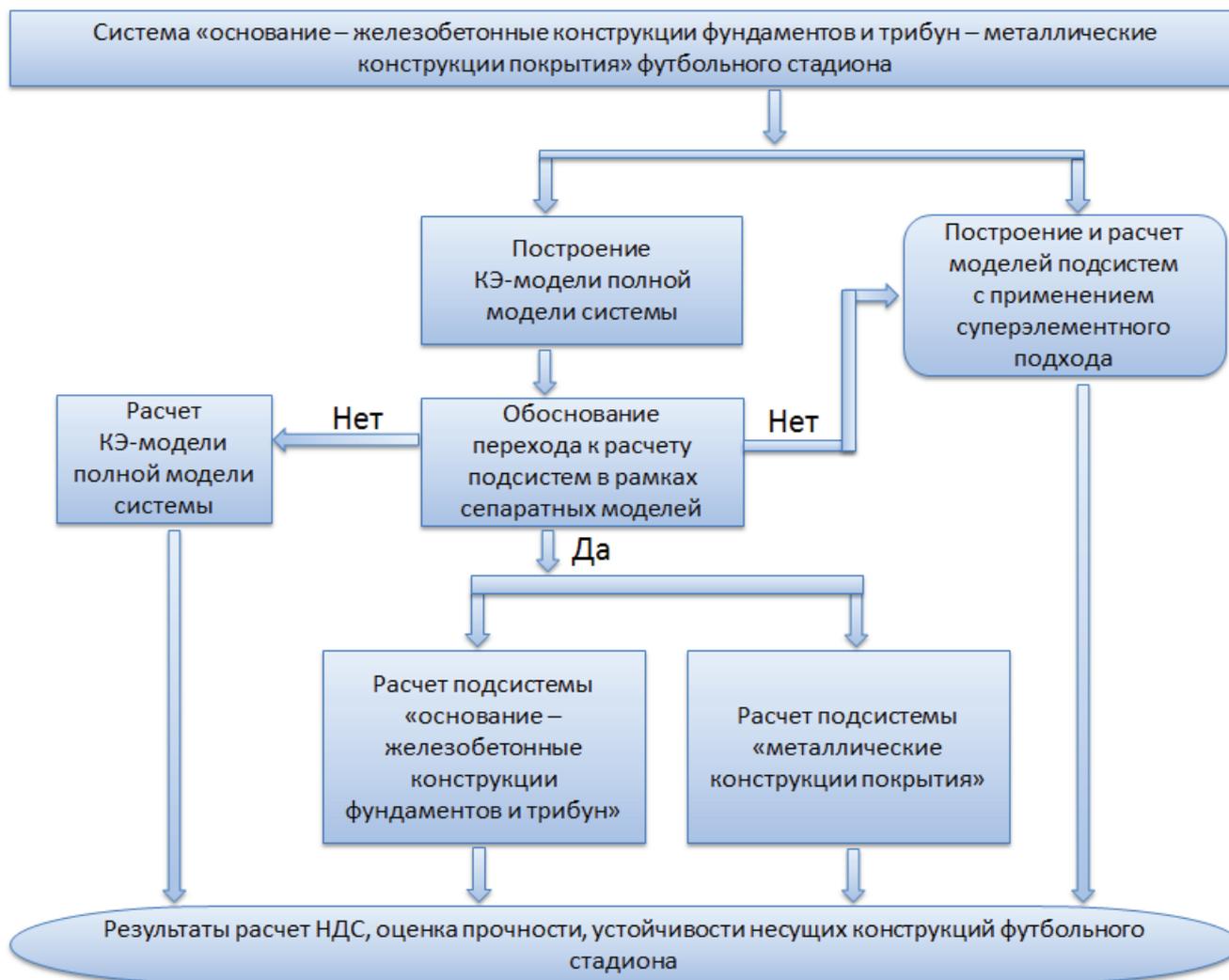


Рисунок 1. Общая структурная схема разработанной методики суперэлементного моделирования систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» футбольных стадионов.

1. Декомпозиция. Исходное сооружение разбивается на независимые подконструкции, для каждой из которых решение задачи проще, чем расчет всей системы в целом. Узловые неизвестные для каждой подконструкции разделяются на две группы – «внутренние» и «граничные».

2. Конденсация. Неизвестные, соответствующие внутренним узлам для каждой подконструкции, выражаются через граничные неизвестные и исключаются из системы разрешающих уравнений. После этого подконструкцию можно рассматривать как конечный элемент, узлами которого являются граничные узлы – «суперэлемент».

3. Сборка. Суперэлементы объединяются для образования модели исходного сооружения. При этом у стыкуемых суперэлементов отождествляются их соответствующие степени свободы, и системы уравнений для всех суперэлементов объединяются в глобальную систему уравнений относительно граничных неизвестных.

4. Вычисление решения. Производится решение полученной глобальной системы уравнений. В результате этого находятся значения граничных неизвестных для всех подконструкций. Значения внутренних неизвестных для всех подконструкций вычисляются с помощью зависимостей, использованных для их исключения.

Современные «тяжелые» универсальные конечноэлементные программные комплексы, такие как ANSYS, NASTRAN, ABAQUS имеют в своем функционале возможность построения и импорта-экспорта редуцированных матриц влияния (жесткости, масс, демпфирования) для обеспечения, в частности, совместных разработок и точного анализа сложных многосвязных статически и динамически нагруженных конструкций и сооружений.

Так же модальный синтез часто используется как эффективный метод уменьшения вычислительной размерности решаемой задачи. В этом методе расчетная область разделяется на компоненты (подконструкции). Для каждой подконструкции, определяемой перемещением $\{u\}$, матрицей жесткости, $[K]$, матрицей масса $[M]$ и силами $\{f\}$, система уравнений движения записывается в виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

Разделим эти уравнения в соответствии со стыковочными (граничными) $\{u_b\}$ и внутренними $\{u_i\}$ степенями свободы.

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Суть методов динамического синтеза подконструкций состоит в переходе от полного набора физических степеней свободы к редуцированному набору обобщенных координат, т.е. для представления перемещения подконструкции используется процедура Релея-Ритца, в которой перемещение представляется в виде суперпозиции базисных векторов (форм)

$$\{u\} = [\Psi]\{q\}$$

где $[\Psi]$ – набор базисных векторов для подконструкции, а соответствующие им обобщенные модальные координаты.

Таким образом, уравнение (2) может быть записано как

$$[\Psi]^T [M][\Psi]\{\ddot{q}\} + [\Psi]^T [K][\Psi]\{q\} = [\Psi]^T \{f\} \quad (3)$$

или

$$[\hat{M}]\{\ddot{q}\} + [\hat{K}]\{q\} = \{\hat{f}\},$$

где

$$\begin{aligned} [\hat{M}] &= [\Psi]^T [M][\Psi] \\ [\hat{K}] &= [\Psi]^T [K][\Psi] \\ \{\hat{f}\} &= [\Psi]^T \{f\} \end{aligned} \quad (4)$$

В итоге, после стыковки подконструкций, описываемых редуцированными матрицами жесткости и масс, получится общая модель существенно меньшей размерности.

Методы динамического синтеза подконструкций классифицируются по способу выбора базисных векторов метода Релея-Ритца для подконструкций, а также по способу их стыковки. Как правило, в качестве базиса для подконструкций используются ее формы колебаний при определенных граничных условиях:

- для закрепленной границы R.R.Craig, M.C.C.Vampton и W.C.Hurty;
- для свободной границы. W.A.Benfield, R.F.Hruda;
- для частично закрепленной границы подконструкции. R.H.MacNeal;

Из трех рассмотренных вариантов метода наиболее предпочтительным, с вычислительной и реализационной точек зрения, является первый, использующий формы колебаний основной системы метода перемещений.

Все три отмеченных выше способа ограничения стыковочных степеней свободы реализованы в программном комплексе ANSYS Mechanical.

Общий набор физических степеней свободы обозначим как \bar{P} . Набор внутренних степеней свободы обозначим как \bar{I} , полный набор стыковочных координат обозначим как \bar{T} . Эти наборы координат содержат p , i , и t степеней свободы, соответственно. Для использования смешанной границы, пусть набор \bar{T} составлен из объединения наборов \bar{B} и \bar{C} . При вычислении собственных частот и форм степени свободы из набора \bar{B} фиксированы, степени свободы из набора \bar{C} свободны.

3. МЕТОД ОСТАТОЧНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ СМЕШАННОЙ ГРАНИЦЫ (ОПСГ)

Метод смешанной границы использует три набора форм:

- ограничительные формы $[\Psi_b^C]$, определённые на наборе \bar{B} ;

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 \\ 0 & I_c & 0 \\ \psi_{ib}^C - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \psi_{cb}^C & g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Метод фиксированной границы: точная редукция к методу Харти / Крейга – Бемптона. Преобразования координат метода ОПСГ точно приводят к методу Харти/Крейга – Бемптона в случае всей зафиксированной границы, то есть, отсутствуют степени свободы набора \bar{C} .

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ \psi_{ib}^C & \varphi_{ik}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Этот метод является наиболее популярным в универсальных «коммерческих» программных комплексах. Он сводится к построению редуцированных матриц жесткости и масс

- формы остаточной податливости $[g_c^R]$, определённые на наборе \bar{C} ;

- усеченный набор нормальных форм $[\phi_k^N]$.

Как имеет место в методе Харти / Крейга – Бемптона, набор \bar{B} как минимум достаточен, чтобы исключить компоненты соответствующие движению твердого тела. Для случая свободной границы, то есть, все граничные координаты содержатся в наборе \bar{C} , вычисление остаточной податливости требует процедуры инерционной компенсации как в методе Рубина.

Координационное преобразование представленного метода из физических координат в координаты смешанной границы может быть записано в следующем виде

$$\{x\} = [T_1][T_2]\{q_2\} \quad (5)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} [\hat{K}] &= [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{CC} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{NN} \end{bmatrix} \\ [\hat{M}] &= [\hat{\Phi}]^T \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ib} \\ M_{bi} & M_{bb} \end{bmatrix} [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \hat{M}_{CC} & \hat{M}_{NC} \\ \hat{M}_{CN} & \hat{M}_{NN} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

где $[\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{ic} & \Phi_{in} \end{bmatrix}$

Φ_{ic} – перемещения внутренних степеней свободы СЭ для заданных единичных перемещений граничных (стыковочных) узлов, Φ_{in} – перемещения внутренних степеней свободы, соответствующие удерживаемым собственным формам колебаний при ограни-

чении степеней свободы (заделке) граничных узлов, $[\hat{K}_{NN}]$ и $[\hat{M}_{NN}]$ – диагональные модальные матрицы жесткости и масс,

$$[\hat{K}_{CC}] \equiv [\bar{K}]; \quad [\hat{M}_{CC}] \equiv [\bar{M}]; \\ [\hat{M}_{NC}] = [\hat{M}_{CN}]^T$$

– заполненные матрицы.

Метод свободной границы: точная редукция к методу Рубина.

Преобразования координат метода ОПСГ приводят к методу Рубина в случае всей свободной границы, то есть, отсутствуют степеней свободы набора \bar{B} .

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} & \varphi_{ik}^N - g_{ic}^R (g_{cc}^R)^{-1} \varphi_{ck}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Таким образом, преобразование ОПСГ (6) является обобщением надёжных и широко используемых методов Харти / Крейга-Бемптона и Рубина.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ

В качестве верификационной задачи выбран реальный и показательный объект – блок «Е» гипермаркета в г. Волжский (рис. 2). Конструкции рассматриваемого блока имеют схожий тип с большепролетными комбинированными конструкциями стадионов: железобетонный каркас и купол металлоконструкций покрытия. На этом тестовом примере исследуются возможности и особенности применения метода динамического синтеза подконструкций к расчетам комбинированных систем. Также исследуется влияние выбора метода учета внутренних форм колебаний конструкции, записываемой в суперэлемент (метод фиксированной границы и метод свободной границы). При сопоставлении результатов динамических расчетов сравниваются частоты и формы собственных коле-

баний модели полной системы «ж.б. конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» и моделей составляющих её подсистем с использованием суперэлементов. На базе этого делается вывод о возможности перехода к исследованию НДС системы в рамках отдельных моделей.

Расчетные многовариантные верификационные численные исследования модели несущих конструкций блока «Е» гипермаркета проводились для полной модели, а также для моделей подсистем «ж.б. конструкции» и «металлические конструкции покрытия» с применением метода динамического синтеза подконструкций.

Несущие конструкции блока «Е» гипермаркета в г. Волжский состоят из опорного железобетонного каркаса и металлического купола покрытия.

Железобетонный каркас представлен колоннами сечением 600×600 мм, 2-ми перекрытиями и «козырьком» с балками. Фундамент – монолитные железобетонные ростверки на свайном основании.

Купол образуется 18-ю радиальными решетчатыми «треугольными» фермами арочного очертания, расположенными под углом 20° друг к другу. Фермы состоят из трех поясов кольцевого сечения, соединенных трубчатыеми связями-раскосами. По внешнему радиусу фермы жестко оперты на колонны, по внутреннему – соединены верхним и нижним кольцевыми поясами.

В программном комплексе ANSYS Mechanical построены и верифицированы следующие пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели (таблица 1) несущих конструкций блока «Е» гипермаркета в г. Волжский (здесь и далее «ж.б.» – сокращенно «железобетонный»):

1. модель полной системы “ж.б. конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия”;
2. модель подсистемы “ж.б. конструкции каркаса”;
3. модель подсистемы “металлические конструкции покрытия”;

Методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» стадионов Чемпионата мира по футболу 2018 года в России.
Описание и верификация

Вид с фасада



Вид сверху с указанием положения блока «Е» гипермаркета (выделен красной рамкой).



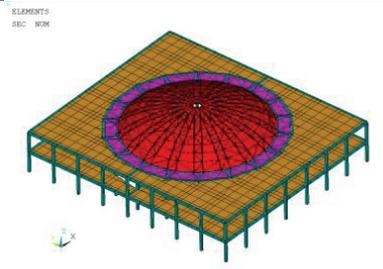
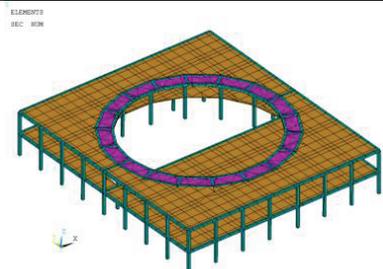
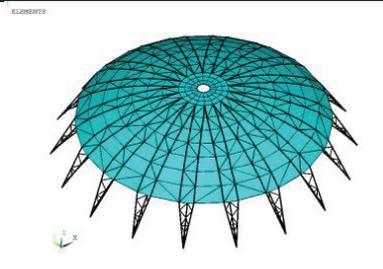
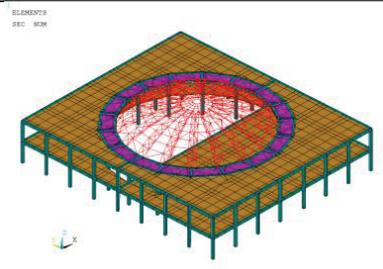
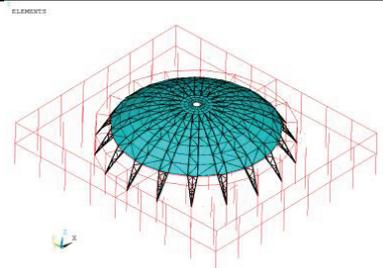
Вид на несущие конструкции купола изнутри



Рисунок 2. Фотографии гипермаркета г. Волжский (ТЦ ВолгаМолл).

4. модель подсистемы “ж.б. конструкции каркаса” с учетом металлических конструкций покрытия как суперэлемента;
 5. модель подсистемы “металлические конструкции покрытия” с учетом железобетонных конструкций каркаса как суперэлемента.
- Разработанные расчетные модели системы и подсистем адекватно отражают геометрико-жесткостные и инерционные свойства и наг-

Таблица 1. Разработанные расчетные конечноэлементные модели несущих конструкций блока «Е» гипермаркета в г. Волжский.

№ п/п	КЭ-модели системы/подсистемы	Изображение	Количество узлов	Количество элементов	Типы КЭ
1	«железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия»		6 145	8 289	SHELL181 BEAM188
2	«железобетонные конструкции каркаса»		1 536	1 947	SHELL181 BEAM188
3	«металлические конструкции покрытия»		4 632	6 342	SHELL181 BEAM188
4	«железобетонные конструкции каркаса» + суперэлемент «покрытие»		1 554	1 948	SHELL181 BEAM188 MATRIX50
5	«металлические конструкции покрытия» + суперэлемент «железобетонные конструкции каркаса»		4 632	6 343	SHELL181 BEAM188 MATRIX50

рузочные характеристики строительных конструкций. Об этом, в частности, свидетельствует и вычислительная размерность построенных ANSYS-моделей – до 6 145 узлов (36 870 степеней свободы) и 8 289 конечных элементов.

При создании модели длина грани конечного элемента принята в среднем 1.2 – 2.8м. При этом сетка КЭ на плитах и перекрытиях обладает необходимой подробностью для воспроизведения перемещений, сил и моментов. Общий вид, размерность и типы используемых элементов, построенных КЭ-моделей блока «Е» гипермаркета в г. Волжский приведены в таблице 1.

Для моделирования плит перекрытий использовались четырёхугольные и треугольные в плане КЭ оболочки типа SHELL181 – 4-х узловой оболочечный элемент, реализующий теорию Миндлина-Рейсснера. Балки и колонны выполнены стержневыми КЭ типа BEAM188 – 2-х узловой пространственный балочный элемент. 2 узла расположены на концах элемента, третий узел необходим для позиционирования сечения в пространстве. Узел ориентации может быть задан общим для нескольких элементов. Элемент MATRIX50 (суперэлемент) – является группой предварительно собранных конечных элементов, которая рассматривается в качестве отдельного элемента и представлена редуцированными матрицами (жесткости, масс, нагрузок). После того, как суперэлемент сформирован, он может быть включен в любую модель программного комплекса (ПК) ANSYS Mechanical и использоваться в любом типе расчета, для которого допускается его применение.

Граничные условия – жесткое защемление (заделка) узлов по низу колонн.

Расчет методом динамического синтеза подконструкций проводился с применением двух подходов учета внутренних форм колебаний суперэлемента: метода фиксированной границы и метода свободной границы. Далее проводилось сопоставление результатов полученных для всех моделей систем и

подсистем несущих конструкций блока Е гипермаркета в г. Волжский.

5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При сопоставлении результатов динамических расчетов сравнивались частоты и формы собственных колебаний модели полной системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» блока «Е» гипермаркета в г. Волжский и моделей составляющих её подсистем.

При расчетах с применением суперэлементного подхода использовались два альтернативных метода учета внутренних форм колебаний конструкций, учтенных как суперэлементы: метод фиксированной и свободной границы.

В таблице 2 приведены частоты собственных колебаний исследуемых моделей. Сравнивались собственные частоты и формы колебаний полной модели и моделей подсистем с использованием суперэлементов. Результаты такого сопоставления приведены в таблицах 1 и 2. Δ_1 и Δ_2 в указанных таблицах – максимальная разница частот собственных колебаний полной модели и моделей подсистем с применением суперэлементного подхода с учетом внутренних форм колебаний методом фиксированной и свободной границы соответственно.

В таблицах данные расположены таким образом, что в одной строке приведены частоты, близкие по величине, а также имеют сходные или совпадающие форм собственных колебаний

Сопоставление и анализ собственных частот и форм колебаний полных моделей систем «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» и моделей подсистем учетом суперэлементов показывает, что расчеты динамических характеристик с применением указанного подхода дают результаты, практически идентичные полученным при расчете полной системы.

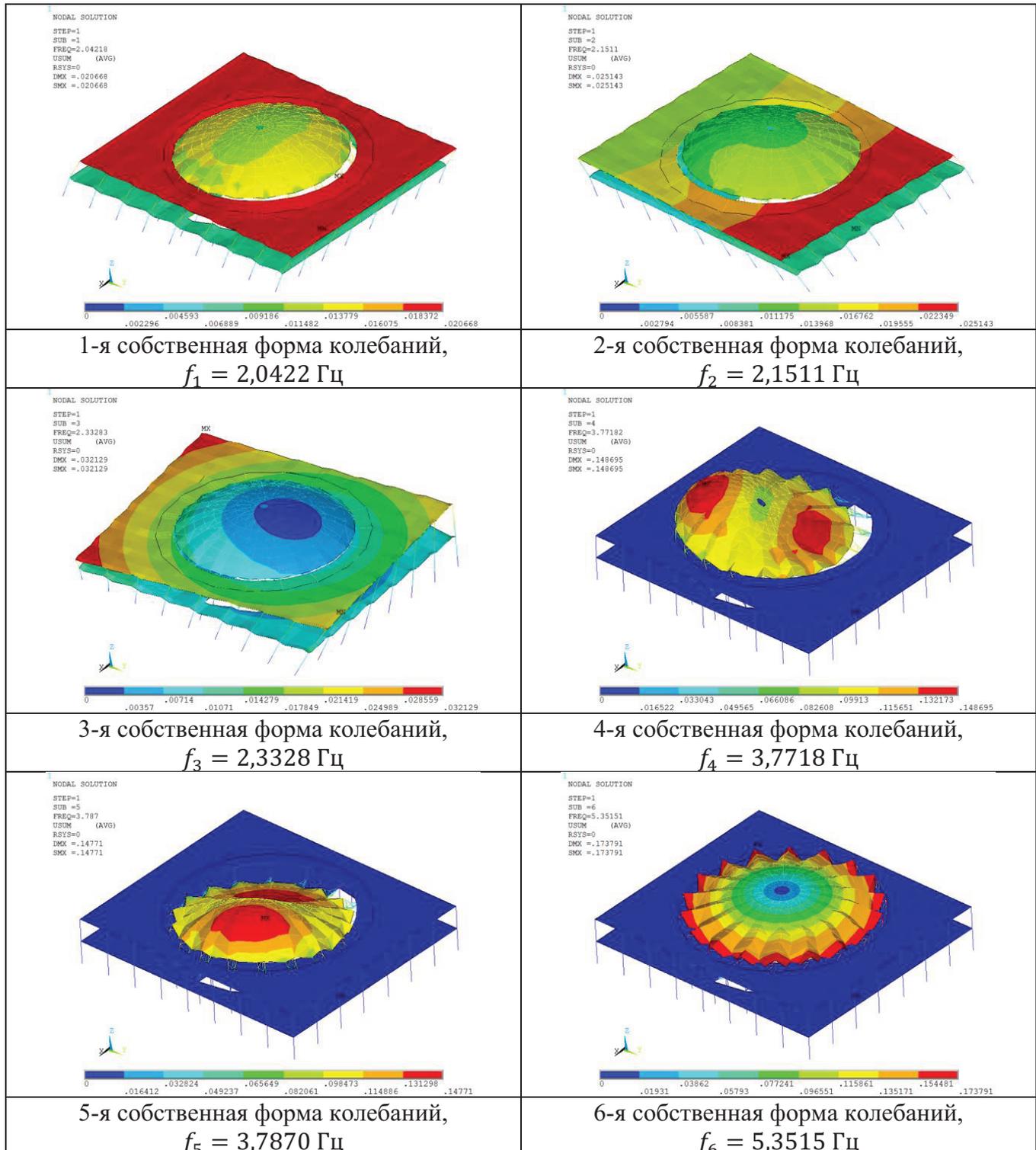


Рисунок 3. Низшие формы собственных колебаний полной модели системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия» блока «Е» гипермаркета в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

Следует отметить, что при применении суперэлементного подхода для систем несущих

конструкций исследуемого типа более точным показал себя метод свободной границы.

Описание и верификация

Таблица 2. Сопоставление собственных частот колебания моделей полной системы и составляющих её подсистем блока «Е» симулятора в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

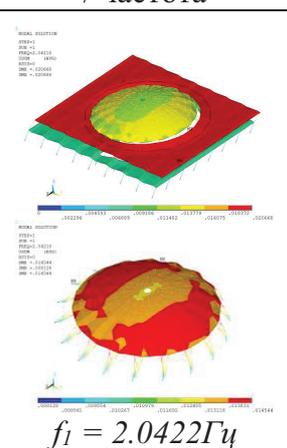
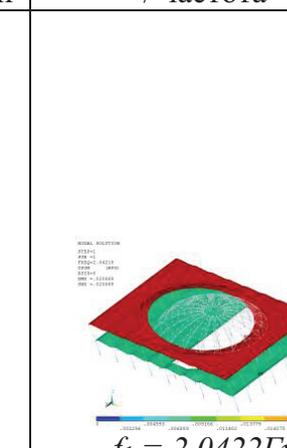
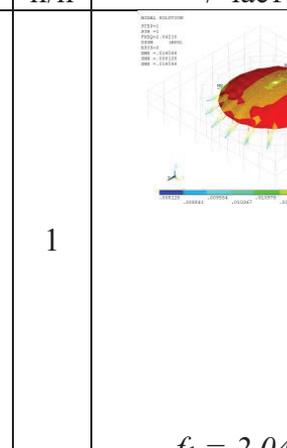
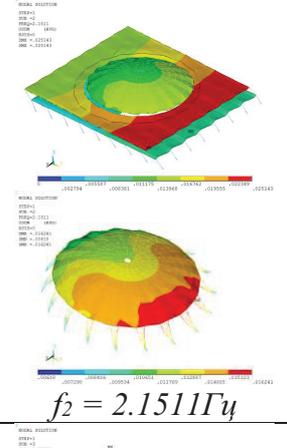
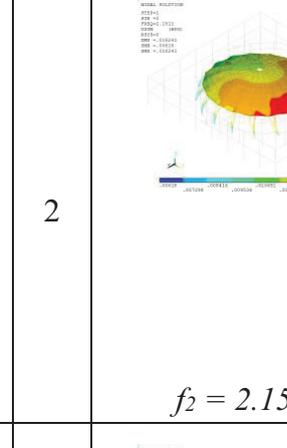
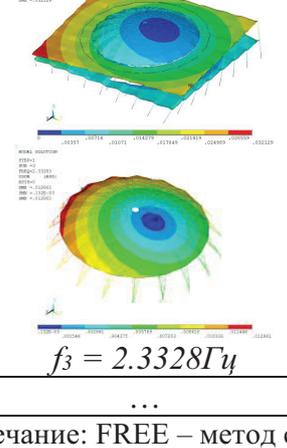
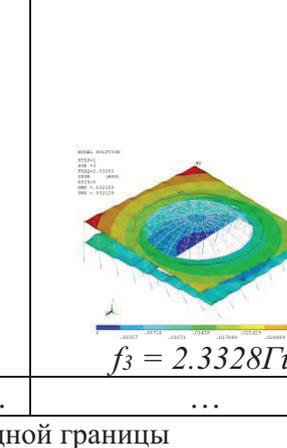
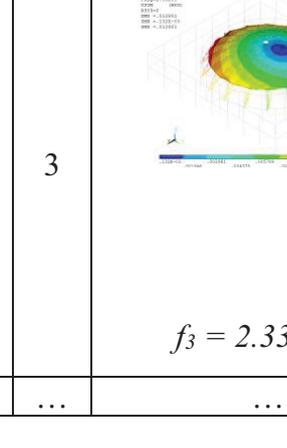
№ п/п	Полная модель системы «ж.б. конструкции каркаса – металл. конструкции покрытия»		Модель подсистемы «ж.б. конструкции каркаса с учетом металл. конструкции покрытия как суперэлемента F1X		Δ ₁ , %	Модель подсистемы «ж.б. конструкции каркаса с учетом металл. конструкции покрытия как суперэлемента FFREE		Модель подсистемы «металл. конструкций покрытия» с учетом ж.б. конструкций каркаса как суперэлемента FFREE		Δ ₂ , %
	Частота, Гц	№ п/п	Частота, Гц	№ п/п		Частота, Гц	№ п/п	Частота, Гц	№ п/п	
1	2.0422	1	2.0422	1	0.024	2.0422	1	2.0422	0.000	
2	2.1511	2	2.1511	2	0.028	2.1511	2	2.1511	0.000	
3	2.3328	3	2.3328	3	0.047	2.3328	3	2.3328	0.000	
4	3.7718	4	3.7718	4	0.000	3.7720	4	3.7718	0.005	
5	3.7870	5	3.7870	5	0.000	3.7871	5	3.7870	0.003	
6	5.3515	6	5.3515	6	0.000	5.3516	6	5.3515	0.002	
7	6.2311	7	6.2311	7	0.027	6.2311	7	6.2311	0.000	
8	6.3335	8	6.3336	8	0.169	6.3335	8	6.3335	0.000	
9	6.5406	9	6.5407	9	0.160	6.5406	9	6.5406	0.000	
10	7.1281	10	7.1282	10	0.155	7.1281	10	7.1281	0.000	
11	7.2008	11	7.2008	11	0.022	7.2008	11	7.2008	0.000	
12	7.4110	12	7.4112	12	0.355	7.4110	12	7.4110	0.000	
13	7.8657	13	7.8660	13	0.337	7.8658	13	7.8657	0.001	
14	8.5772	14	8.5772	14	0.030	8.5772	14	8.5772	0.000	
15	8.7472	15	8.7476	15	0.616	8.7472	15	8.7472	0.000	
16	8.9045	16	8.9045	16	0.122	8.9045	16	8.9045	0.000	
17	9.0157	17	9.0160	17	0.199	9.0158	17	9.0157	0.001	
18	9.0454	18	9.0459	18	0.643	9.0455	18	9.0454	0.001	
19	9.0574	19	9.0577	19	0.939	9.0575	19	9.0574	0.001	
20	9.1367	20	9.1368	20	0.206	9.1368	20	9.1367	0.001	
21	9.1532	21	9.1533	21	0.111	9.1532	21	9.1532	0.000	

22	9.1625	22	9.1625	9.2111	0.528	22	9.1625	9.1625	0.000
23	9.2486	23	9.2487	9.2748	0.282	23	9.2486	9.2486	0.000
24	9.3700	24	9.3701	9.3978	0.296	24	9.3701	9.3700	0.001
25	9.4190	25	9.4191	9.4417	0.240	25	9.4191	9.4190	0.001
26	9.4919	26	9.4924	9.6393	1.529	26	9.4922	9.4919	0.003
27	9.8804	27	9.8805	9.8844	0.040	27	9.9877	9.8828	1.074
28	10.259	28	10.259	10.266	0.068	28	10.259	10.259	0.000
29	10.345	29	10.345	10.356	0.106	29	10.345	10.345	0.000
30	10.364	30	10.365	10.436	0.690	30	10.365	10.364	0.010
...

* Примечание: ПЛХ – метод фиксированной границы; ГРБЕ – метод свободной границы.

Методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» стадионов Чемпионата мира по футболу 2018 года в России.
Описание и верификация

Таблица 3. Сопоставление собственных частот и форм колебания полной модели и моделей подсистем с применением суперэлементного подхода блока «E» гипермаркета в г. Волжский. ПК ANSYS Mechanical.

Полная модель системы «железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия»		Модель подсистемы «железобетонные конструкции каркаса» с учетом металлических конструкций покрытия как суперэлемента FREE		Модель подсистемы «металлические конструкции покрытия» с учетом железобетонных конструкций каркаса как суперэлемента FREE		Δ_2 %
№ п/п	Форма колебания / частота	№ п/п	Форма колебания / частота	№ п/п	Форма колебания / частота	
1	 $f_1 = 2.0422 \text{ Гц}$	1	 $f_1 = 2.0422 \text{ Гц}$	1	 $f_1 = 2.0422 \text{ Гц}$	0.000
2	 $f_2 = 2.1511 \text{ Гц}$	2	 $f_2 = 2.1511 \text{ Гц}$	2	 $f_2 = 2.1511 \text{ Гц}$	0.000
3	 $f_3 = 2.3328 \text{ Гц}$	3	 $f_3 = 2.3328 \text{ Гц}$	3	 $f_3 = 2.3328 \text{ Гц}$	0.000
...	:

* Примечание: FREE – метод свободной границы

Погрешность вычисленных собственных частот и форм колебаний при использовании метода фиксированной границы составила, в основном, не более 0,40%, а для отдельных форм 1,53%. При применении метода свободной границы – в целом не более 0,01%, а для отдельных форм колебаний – до 1,07%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты, изложенные в настоящей статье, можно сделать следующие выводы:

- 1) Предложена и теоретически обоснована методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» футбольных стадионов.
- 2) Разработанная методика реализует современные подходы математического моделирования, в том числе – суперэлементные – и основана на подробных большеразмерных пространственных динамических конечноэлементных моделях упомянутых систем.
- 3) Методика реализована в универсальном («тяжелом») программном комплексе численного моделирования ANSYS Mechanical с использованием собственных программных разработок автора.
- 4) Разработаны и верифицированы пространственные оболочечно-стержневые конечноэлементные модели системы “железобетонные конструкции каркаса – металлические конструкции покрытия” и основных составляющих подсистем (блока «Е» гипермаркета в г. Волжский), адекватно отражающие их геометрико-жесткостные, инерционные и нагрузочные характеристики и результирующее напряженно-деформированное состояние, параметры динамики.
- 5) По разработанным КЭ-моделям в верифицированном универсальном программном комплексе ANSYS Mechanical

вычислены динамические характеристики несущих конструкций (собственные частоты и формы колебаний). Сопоставление и анализ собственных частот и форм колебаний полных моделей систем «ж.б. конструкции каркаса – метал. конструкции покрытия» и моделей подсистем учетом суперэлементов показывает, что расчеты динамических характеристик с применением указанного подхода дают результаты, практически идентичные полученным при расчете полной системы.

- 6) Результаты проведенной верификации разработанной методики подтвердили, что применяемый подход при использовании метода динамического синтеза подконструкций, реализованного в ней, обеспечивает желаемую возможность проведения независимых расчетов проектируемых подсистем в рамках сепаратных моделей.
- 7) В ходе дальнейших исследований планируется провести апробацию разработанной методики численного (суперэлементного) моделирования динамики систем «основание – железобетонные конструкции фундаментов и трибун – металлические конструкции покрытия» на реальных футбольных стадионах чемпионата мира 2018 года.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белостоцкий А.М.** Модернизация и применение численных методов к расчету плитно-оболочечных систем на статические и динамические воздействия. // В кн. “Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования”. – М.: Наука, 1980, с. 11-58.
2. **Белостоцкий А.М.** Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем «сооружение–основание». //

- Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, 1990, с. 175-180.
3. **Белостоцкий А.М., Белый М.В.** Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. Труды XVIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2000, – СПб., с. 65-69.
4. **Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л.** Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2011, Volume 7, Issue 1, с. 76-83.
5. **Гайан Р.** Приведение матриц жесткости и массы. // Ракетная техника и космонавтика, 1965, том 3, №2, с. 277-278.
6. **Belyi M.V.** Superelement Method for Transient Dynamic Analysis of Structural Systems. // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1993, Volume 36, pp. 2263-2286.
7. **Benfield W.A., Hruda R.F.** Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. // AIAA Journal J., 1976, Volume 9, pp. 1255-1261.
8. **Craig R.R., Jr., Bampton M.C.C.** Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. // AIAA Journal, 1968, Volume 6, Number 7, pp. 1313-1319.
9. **Hale A.L., Meirovitch L.** A General Procedure for Improving Substructures Representation in Dynamic Synthesis. // Journal of Sound and Vibration, 1982, Volume 84, Number 2, pp. 269-287.
10. **Hurty W.C.** Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. // AIAA Journal., 1984, Volume 4, pp. 733-738.
11. **Leung Y.T.** Dynamic Substructure Response. // Journal of Sound and Vibration, 1991, Volume 149, Number 1, pp. 83-90.
12. **MacNeal R.H.** A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. // Computers and Structures, 1971, Volume 4, pp. 591-601.
13. **Wang J.H., Chen H.R.** Substructure Modal Synthesis Method With High Computation Efficiency. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, Volume 79, Number 2, pp. 203-217.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Belostotsky A.M.** Modernizaciya i Primenenie Chislennyh Metodov k Raschetu Plitno-Obolochecnyh Sistem na Statische i Dinamicheskie Vozdeystviya [Modernization and Application of Numerical Methods to Static and Dynamic Analysis of Plate-Shell Systems]. // In the book “Dinamicheskie Kharakteristiki i Kolebaniya Elementov Enzhenerge-Tekhnicheskogo Oborudovaniya”. Moscow, Nauka, 1980, pp. 11-58.
2. **Belostotsky A.M.** Postroenie Effektivnyh Prostranstvennyh Modelej Dlya Staticeskogo i Dinamicheskogo Rascheta Sistem “Sooruzhenie – Osnovanie” [Construction of Effective Spatial Models for Static and Dynamic Analysis of “Building – Foundation” Systems]. // Proceedings of TSNIISK im. Kucherenko, 1990, pp. 175-180.
3. **Belostotsky A.M., Belyi M.V.** Superelementnye Algoritmy Resheniya Prostranstvennyh Nelinejnyh Stati-cheskikh i Dinamicheskikh Zadach Bol'shoj Razmernosti. Realizaciya v Programmnom Komplekse STADYO I Opyt Raschetnyh Issledovaniy [Superelement Algorithms for Solving Spatial Nonlinear Static and Dynamic Problems of Large Dimension. Implementation in the STADYO Software Package and Experience in Computational Research]. // Proceedings of BEM&FEM'2000 18-th Inter-

- national Conference Mathematical Modeling in Mechanics of Solids and Constructions Methods of Boundary and Finite Elements September, Saint-Petersburg, pp. 65-69.
4. **Belostotsky A.M., Potapenko A.L.** Realizaciya i Verifikaciya Metodov Submodelirovaniya i Dinamicheskogo sinteza Podkonstrukcij v Universal'nyh i Specializirovannyh Programmnyh Kompleksah [Realization and Verification of Methods of Submodeling and Dynamic Synthesis of Substructures in Universal and Specialized Software Complexes]. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2011, Volume 7, Issue 1, pp. 76-83.
 5. **Gayan R.** Privedenie Matric Zhestkosti i Massy [The Reduction of the Stiffness and Mass Matrices]. // *Raketnaya Tekhnika i Kosmonavtika*, 1965, Volume 3, Number 2, pp. 277-278.
 6. **Belyi M.V.** Superelement Method for Transient Dynamic Analysis of Structural Systems. // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1993, Volume 36, pp. 2263-2286.
 7. **Benfield W.A., Hruda R.F.** Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. // *AIAA Journal J.*, 1976, Volume 9, pp. 1255-1261.
 8. **Craig R.R., Jr., Bampton M.C.C.** Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. // *AIAA Journal*, 1968, Volume 6, Number 7, pp. 1313-1319.
 9. **Hale A.L., Meirovitch L.** A General Procedure for Improving Substructures Representation in Dynamic Synthesis. // *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Volume 84, Number 2, pp. 269-287.
 10. **Hurty W.C.** Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. // *AIAA Journal.*, 1984, Volume 4, pp. 733-738.
 11. **Leung Y.T.** Dynamic Substructure Response. // *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Volume 149, Number 1, pp. 83-90.
 12. **MacNeal R.H.** A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. // *Computers and Structures*, 1971, Volume 4, pp. 591-601.
 13. **Wang J.H., Chen H.R.** Substructure Modal Synthesis Method with High Computation Efficiency. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, Volume 79, Number 2, pp. 203-217.

Нагибович Александр Игоревич, ведущий инженер-расчетчик ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18, офис 810; тел. +7 (499) 706-88-10; E-mail: nagibovich@yandex.ru

Alexander I. Nagibovich, Senior Engineer of Scientific Research Center “StaDyO”; PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; office 810, 18, 3ya Ulitsa Yamskogo Polya, Moscow, 125040, Russia; phone +7 (499) 706-88-10; E-mail: nagibovich@yandex.ru.