

DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-96-108

## КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ ПОЛКИ СТЕРЖНЯ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ЕЁ ТОЛЩИНЫ И ОЧЕРТАНИЯ ШИРИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ИЛИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДВУХ ГЛАВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

*Л.С. Ляхович<sup>1</sup>, П.А. Акимов<sup>1, 2, 3, 4</sup>, Б.А. Тухфатуллин<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

<sup>2</sup> Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>3</sup> Научно-исследовательский центр СтаДиО, г. Москва, РОССИЯ

<sup>4</sup> Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** Ранее был сформулирован критерий минимальной материалоемкости при проектировании очертания ширины полок стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты в одной главной плоскости инерции сечения. В данной работе формулируется критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании её толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения.

**Ключевые слова:** оптимизация, функция цели, ограничения по устойчивости, частоте собственных колебаний, критерии минимальной материалоемкости, формы потери устойчивости, формы собственных колебаний, напряжения, двутавр

## CRITERION OF MINIMUM MATERIAL CONSUMPTION OF FLANGE OF I-SHAPED BAR WITH A VARIATION IN ITS THICKNESS AND OUTLINE OF THE WIDTH, WITH RESTRICTION TO THE VALUE OF THE CRITICAL FORCE OR RESTRICTION TO THE VALUE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY IN TWO PRINCIPAL PLANES OF INERTIA OF THE SECTION

*Leonid S. Lyakhovich<sup>1</sup>, Pavel A. Akimov<sup>1, 2, 3, 4</sup>, Boris A. Tukhfatullin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

<sup>2</sup> Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>3</sup> Scientific Research Center "StadyO", Moscow, RUSSIA

<sup>4</sup> Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

**Abstract:** We have already presented original criterion of minimum material consumption within the design of the outline of the width of the I-shaped bar and the stability constraints or restriction to the value of the first natural frequency in one principal plane of inertia of the cross-section. This paper is devoted in its turn to a criterion for the minimum material capacity of the I-shaped bar with a variation in its thickness and outline of the width, with restrictions to the value of the critical force or restriction to the value of the first natural frequency in two principal planes of inertia of the section.

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

**Keywords:** optimization, target function, stability constraints, natural frequency, criteria of minimum material consumption, mode of buckling, natural modes, stresses, I-shaped bar

В настоящей статье рассматриваются стержни двутаврового поперечного сечения. Соответствующая принятая система координат показана на рисунке 1.

Критерий минимальной материалоемкости при проектировании очертания ширины полок стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты в одной главной плоскости инерции сечения  $x-0-y$  был сформулирован в [1]. В некоторых случаях появляется необходимость введения ограничений на величину первой критической силы или частоты собственных колебаний и во второй главной плоскости инерции  $x-0-z$ . При наличии такого рода условий появляется возможность варьировать при оптимизации не только очертанием ширины полки, но и величиной её толщины. Итак, варьируется функция ширины полки ( $b_2(x)$ ) и величина толщины полки ( $\delta_p$ ); не варьируются высота стенки ( $b_1$ ), толщина стенки ( $\delta_{st}$ ); ограничиваются величины первой критической силы или частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции. Отметим, что учитывается влияние продольной силы на величину собственной частоты и влияние возможности вибрационных воздействий заданной частоты на величину критической силы. Запишем функционал цели в виде

$$V_0 = 2 \int_0^l b_2(x) \delta_p dx, \quad (1)$$

где  $V_0$  – объем материала полок;  $2b_2(x)\delta_p$  – площадь сечения полок.

Выведем при поставленных условиях критерий минимальной материалоемкости полки при ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний, но с учетом влияния продольной силы. Сформулированный

таким образом критерий может использоваться и при ограничениях по устойчивости, если в нем будет принято нулевое значение собственной частоты.

Ограничения на величину низшей частоты собственных колебаний записываются в виде

$$\omega_0 \leq \omega 1[1]; \quad (2)$$

$$\omega_0 \leq \omega 2[1], \quad (3)$$

где  $\omega_0$  – число, ограничивающее величину низшей частоты собственных колебаний;  $\omega 1[1]$  – низшая частота собственных колебаний в плоскости  $x-0-y$ ;  $\omega 2[1]$  соответственно в плоскости  $x-0-z$ .

Если принять ограничения в виде

$$\omega_0 = \omega 1[1] = \omega 2[1], \quad (4)$$

то, как известно [1, 2], должны иметь место следующие условия

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega 1} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI_1(x)(v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - \\ - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho F(x)v_{\omega}^2]\} dx = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega 2} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI_2(x)(w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - \\ - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho F(x)w_{\omega}^2]\} dx = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathcal{E}_{\omega 1}$  и  $\mathcal{E}_{\omega 2}$  – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции;  $I_1(x)$  и  $I_2(x)$  – соответствующие моменты инерции сечения;  $E$ ,  $\rho$  – соответственно модуль упругости и удельная масса материала стержня;  $P(x)$  – продольная сила;  $m(x)$  – интенсивность внешней массы;  $F(x)$  – площадь сечения стержня;  $v_{\omega}$  и  $w_{\omega}$  – ординаты форм собственных колебаний соответственно в главных плоскостях

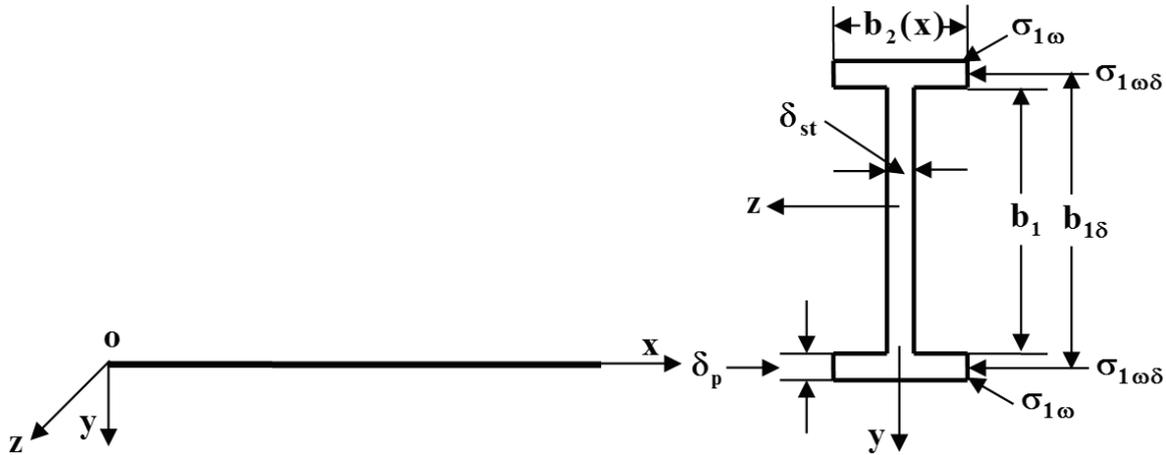


Рисунок 1. Принятая система координат и некоторые обозначения.

колебаний соответственно в главных плоскостях инерции  $x-0-y$  и  $x-0-z$ .

Таким образом, требуется отыскать такую функцию изменения ширины полки  $b_2(x)$  и такое значение толщины полки  $\delta_p$ , при которых будут выполняться условия (5)-(6) и функционал объема полки (1) будет минимальным.

Функционал, экстремум которого обеспечит минимум функционалу (1) и выполнение условий (5) и (6), запишется в виде

$$V_{0\omega} = \int_0^l \{ [2b_2(x)\delta_p] - \lambda_1 [EI_1(x)(v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho F(x)v_\omega^2]] - \lambda_2 [EI_2(x)(w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho F(x)w_\omega^2]] \} dx, \quad (7)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – неопределенные множители.

С учетом соотношений (5) и (6) рассматриваемая задача является изопериметрической, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  постоянными величинами.

Очевидно, что вариации функционала  $V_{0\omega}$  по  $v$  и  $w$  приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации  $V_{0\omega}$  по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – к выполнению условий (5) и (6).

Моменты инерции сечения запишем в виде

$$I_1(x) = \frac{b_2(x)}{12} (b_1 + 2\delta_p)^3 - \frac{b_2(x) - \delta_{st}}{12} (b_1)^3 = \frac{1}{12} [(b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^3 - (b_2(x) - \delta_{st})b_1^3)]; \quad (8)$$

$$I_2(x) = \frac{2[b_2(x)]^3 \delta_p + [b_{st}]^3 b_1}{12}. \quad (9)$$

Следовательно, функционал (7) принимает следующий вид:

$$V_{0\omega} = \int_0^l \{ [2b_2(x)\delta_p] - \lambda_1 [\frac{E}{12} [(b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^3 - (b_2(x) - \delta_{st})b_1^3)] (v''_\omega)^2 - P(x)(v'_\omega)^2 - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho(2b_2(x)\delta_p + b_1\delta_{st})] v_\omega^2] - \lambda_2 [E \frac{2[b_2(x)]^3 \delta_p + [b_{st}]^3 b_1}{12} (w''_\omega)^2 - P(x)(w'_\omega)^2 - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho(2b_2(x)\delta_p + b_1\delta_{st})] w_\omega^2] \} dx. \quad (10)$$

Экстремум функционала (19) определяется решением системы уравнений [2]

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = 0, \quad \delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0 \quad (11)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = & \int_0^l \{2b_2(x) - \lambda_1 \left[ \frac{E}{2} (b_2(x)(b_1 + 2\delta_p)^2) \right] \times \\ & \times (v''_{\omega})^2 - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x) v_{\omega}^2 \} - \\ & - \lambda_2 \left[ \frac{E}{6} b_2(x)^3 (w''_{\omega})^2 - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x) w_{\omega}^2 \right] dx = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = & 2\delta_p - \lambda_1 \left\{ \frac{E}{12} [b_1 + 2\delta_p]^3 - b_1^3 \right\} \times \\ & \times (v''_{\omega})^2 - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p v_{\omega}^2 \} - \\ & - \lambda_2 \left[ E \frac{b_2^2(x) \delta_p}{2} (w''_{\omega})^2 - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p w_{\omega}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем некоторые выражения из уравнений (12) и (13). Рассмотрим из уравнения (13) выражение

$$\begin{aligned} \frac{E}{12} [b_1 + 2\delta_p]^3 - b_1^3 (v''_{\omega})^2 = \\ = \frac{E^2 (b_1^3 + 6b_1^2 \delta_p + 12b_1 \delta_p^2 + 8\delta_p^3 - b_1^3)}{12E} (v''_{\omega})^2 = \\ = \frac{2E^2 \delta_p (3b_1^2 + 6b_1 \delta_p + 4\delta_p^2)}{12E} (v''_{\omega})^2 = \\ = \frac{E^2 \delta_p [(b_1^2 + 4b_1 \delta_p + 4\delta_p^2) + 2b_1^2 + 2b_1 \delta_p]}{6E} (v''_{\omega})^2 = \\ = \frac{E^2 \delta_p [(b_1 + 2\delta_p)^2 + 2b_1(b_1 + \delta_p)]}{6E} (v''_{\omega})^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножим числитель и знаменатель (14) на  $[I_1(x)]^2$ . Как известно,

$$EI_1(x) v''_{\omega} = M_1(x) \quad (15)$$

– изгибающий момент в плоскости  $x - 0 - y$ .

Очевидно, что

$$\frac{M_1(x)(b_1 + 2\delta_p)}{2I_1(x)} = \sigma_{1\omega} \quad (16)$$

– нормальное напряжение в крайних волокнах поперечного сечения стержня.

Обозначим

$$b_{1\delta} = \sqrt{b_1(b_1 + \delta_p)}. \quad (17)$$

Тогда имеем (рис. 1):

$$\frac{M_1(x)b_{1\delta}}{2I_1(x)} = \sigma_{1\omega\delta} \quad (18)$$

– нормальное напряжение в волокнах поперечного сечения стержня, отстоящих от нейтральной оси на расстояние

$$\frac{1}{2} b_{1\delta} = \frac{1}{2} \sqrt{b_1(b_1 + \delta_p)}. \quad (19)$$

Теперь выражение (14) запишется в виде

$$\frac{2\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{4\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega\delta}^2(x) \quad (20)$$

Аналогично имеем:

$$E \frac{b_2^2(x) \delta_p}{2} (w''_{\omega})^2 = \frac{\delta_p E^2 b_2^2(x) [I_2(x)]^2}{2E [I_2(x)]^2} (w''_{\omega})^2, \quad (21)$$

где соответственно

$$EI_2(x) w''_{\omega} = M_2(x) \quad (22)$$

– изгибающий момент в плоскости  $x - 0 - z$ ;

$$\frac{M_2(x)b_2(x)}{2I_2(x)} = \sigma_{2\omega}(x) \quad (23)$$

– нормальное напряжение в крайних волокнах поперечного сечения стержня от момента  $M_2(x)$ .

Далее с учетом проведенных преобразований уравнения (12) и (13) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = & \int_0^1 \{2b_2(x) - \\ & - \lambda_1 [\frac{2}{E} (b_2(x)\sigma_{1\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x)v_\omega^2)] - \\ & - \lambda_2 [\frac{2}{3E} b_2(x)\sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2 \rho b_2(x)w_\omega^2]\} dx = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = & 2\delta_p - \lambda_1 [\frac{2\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega}^2(x) + \\ & + \frac{4\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega\delta}^2(x) - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p v_\omega^2] - \\ & - \lambda_2 [\frac{2\delta_p}{E} \sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p w_\omega^2] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Умножим все слагаемые уравнений (24) и (25) на  $E$ , слагаемые первого уравнения еще и на  $\delta_p$ , а второго – на  $b_2(x)$ .

Обозначим площадь сечения полки

$$b_2(x)\delta_p = F_p(x), \quad (26)$$

а затем проинтегрируем второе уравнение в пределах от 0 до 1. В результате соответствующие уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial \delta_p} = & \int_0^1 \{2EF_p(x) - \lambda_1 [2\sigma_{1\omega}^2(x)F_p(x) - \\ & - 2(\omega_0)^2 \rho F_p(x)Ev_\omega^2] - \lambda_2 [\frac{2}{3} \sigma_{2\omega}^2(x)F_p(x) - \\ & - 2(\omega_0)^2 \rho F_p(x)Ew_\omega^2]\} dx = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = & \int_0^1 \{2EF_p(x) - \\ & - \lambda_1 [\frac{2}{3} \sigma_{1\omega}^2(x)F_p(x) + \frac{4}{3} \sigma_{1\omega\delta}^2(x)F_p(x) - \\ & - 2(\omega_0)^2 \rho F_p(x)Ev_\omega^2] - \\ & - \lambda_2 [2\sigma_{2\omega}^2(x)F_p(x) - 2(\omega_0)^2 \rho F_p(x)Ew_\omega^2]\} dx \\ & = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Разность уравнениями (27) и (28), очевидно, определяется выражением

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{ \lambda_1 [\frac{4}{3} (\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x))F_p(x) - \\ - \lambda_2 [\frac{4}{3} \sigma_{2\omega}^2(x)]F_p(x) \} dx = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

На основании (29) можем записать:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_0^1 [\frac{4}{3} F_p(x)(\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x))] dx = \\ = \lambda_2 \int_0^1 [\frac{4}{3} F_p(x)\sigma_{2\omega}^2(x)] dx; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\int_0^1 \frac{4}{3} F_p(x)(\sigma_{1\omega}^2(x) - \sigma_{1\omega\delta}^2(x))] dx}{\int_0^1 [\frac{4}{3} F_p(x)\sigma_{2\omega}^2(x)] dx} = \mu\lambda_1; \quad (31)$$

Уравнение (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\delta_p - \lambda_1 [\frac{2\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{4\delta_p}{3E} \sigma_{1\omega\delta}^2(x) - \\ - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p v_\omega^2] - \\ - \mu\lambda_1 [\frac{2\delta_p}{E} \sigma_{2\omega}^2(x) - 2(\omega_0)^2 \rho \delta_p w_\omega^2] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Умножив слагаемые этого уравнения на  $E$  и поделив на  $2\delta_p$ , получим:

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

$$\left[ \frac{1}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{2}{3} \sigma_{1\omega\delta}^2(x) - (\omega_0)^2 \rho E v_{\omega}^2 \right] + \mu \left[ \sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0)^2 \rho E w_{\omega}^2 \right] = \frac{E}{\lambda_{1\omega}} = const \quad (33)$$

или

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\left[ \frac{1}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) + \frac{2}{3} \sigma_{1\omega\delta}^2(x) - (\omega_0)^2 \rho E v_{\omega}^2 \right] + \mu \left[ \sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0)^2 \rho E w_{\omega}^2 \right]} = const. \quad (34)$$

Таким образом, показано, что критерием минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения, когда варьируется очертание и толщина полки, и не варьируются высота и толщина стенки при ограничениях по устойчивости или величины первой собственной частоты будет постоянство по длине стержня приведенных напряжений  $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ , возникающих по соответствующей собственной форме при собственных колебаниях или потери устойчивости.

При ограничении величины первой частоты собственных колебаний и действию продольной силы её влияние критерий (33) учитывает. При действии только ограничений по устойчивости в (33) подставляется  $\omega_0 = 0$ .

Приведенные напряжения нормируются так, чтобы наибольшее значение каждого из  $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$  по длине стержня было бы равно единице. Тогда близость полученного решения к минимально материалоемкому оценивается близостью величины  $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$  к единице по всей длине стержня.

Для иллюстрации использования критерия (33) рассмотрим пример.

Стержень двутаврового поперечного сечения, у которого задана высота стенки  $b_1 = 0.28 \text{ м}$ , толщина стенки  $b_{st} = 0.006 \text{ м}$ .

Граничные условия в плоскости  $x-0-y$  приведены на верхней части рис. 2, а в плоскости  $x-0-z$  – на нижней части рис. 2. На стержень действует продольная сила  $P = 300 \text{ кН}$ . Внешние массы отсутствуют. Собственные колебания обусловлены массой стержня. Удельная масса матери-

ала стержня  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ . Модуль упругости  $E = 206000 \text{ МПа}$ . Стержень может быть подвержен вибрационным воздействиям с частотой  $\omega_0 = 15 \text{ сек}^{-1}$ .

Решение реализуется на основе дискретной модели [1, 2] из 30 участков. Варьируются размеры ширины полки ( $b_2[i]$ ) и величина толщины полки ( $\delta_p$ ). Не варьируются высота стенки ( $b_1$ ), толщина стенки ( $\delta_{st}$ ). Ограничиваются величины первой критической силы и частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции. Учитывается влияние продольной силы на величину собственной частоты и влияние возможности вибрационных воздействий заданной частоты на величину критической силы.

Для дискретной модели функция цели запишется в виде

$$V_0 = 2 \sum_{i=1}^n b_2[i] \delta_p, \quad (35)$$

где  $n$  – количество участков дискретной модели.

Ограничения по устойчивости запишутся в виде

$$P \leq P1[1]; \quad P \leq P2[1], \quad (36)$$

где  $P1[1]$ ,  $P2[1]$  – первые критические силы соответственно в плоскостях  $x-0-y$  и  $x-0-z$ . Ограничения на величину первой собственной частоты (4).

Критерий (34) для дискретной модели принимает вид

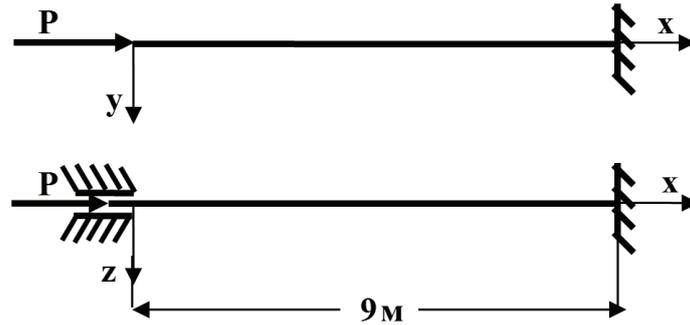


Рисунок 2. Рассматриваемые граничные условия.

$$\bar{\sigma}_{1\omega}[i] = \sqrt{\left[ \frac{1}{3} \sigma_{1\omega}^2[i] + \frac{2}{3} \sigma_{1\omega\delta}^2[i] - (\omega_0)^2 \rho E v_\omega^2 \right] + \mu [\sigma_{2\omega}^2[i] - (\omega_0)^2 \rho E w_\omega^2]} = const \quad (37)$$

Для отыскания величины предельно минимальной материалоемкости рассмотрим задачу, не используя конструктивные ограничения. Решение реализуется методом случайного поиска. Результаты приведены в таблице 1.

Над вторым и третьим столбцами приводится величина оптимального при выбранных условиях значения толщины полки  $\delta_{po} = 0.000764$  м, а в третьем столбце значения ширины  $b_2[i]$ . Во втором столбце показаны величины приведенного напряжения  $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ . Во всех сечениях кроме второго и третьего величина  $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$  близка к единице, что подтверждает минимальную материалоемкость объема полки двутавра. В сечениях 2 и 3 ширина полки практически равна толщине стенки, то есть практически слилась с ней. В предпоследней строке под столбцами 2 и 3 приводится значение объема материала полки  $ft = 0.01597$  м<sup>3</sup>. Очевидно, что полученное решение неприемлемо, так как размеры полки близки к вырождению. Однако, полученное решение дает значение величины минимально материалоемкого объема полки при ограничениях величины критической силы с учетом влияния возможных вибрационных воздействий. Этот результат позволит оценить близость конструктивно приемлемых решений к минимально материалоемкому.

Рассмотрим примеры оптимизации значений  $\delta_p$  и  $b_2[i]$  при функции цели (35), ограничениях (4), (36) и дополнительно при конструктивных ограничениях величин варьируемых параметров. Введение при оптимизации конструктивных ограничений приближает оптимальное решение к практически приемлемому [1,2].

Рассматриваются семь вариантов выбора ограничений. В трех из них вводятся ограничения величины толщины полки, в трех других ширины полки и в одном ограничивается и толщина и ширина полки. Результаты решений приведены в таблице 1.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки  $\delta_{po} \geq 0.006$  м приведен в столбце 4. Объем полки  $ft = 0.01773$  м<sup>3</sup>, что на 10.88% больше, чем минимально материалоемкий объем.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки  $\delta_{po} \geq 0.008$  м приведен в столбце 5. Объем полки  $ft = 0.01919$  м<sup>3</sup>, что на 20.01% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины толщины полки  $\delta_{po} \geq 0.01$  м приведен в столбце 6. Объем полки  $ft = 0.02107$  м<sup>3</sup>, что на 31.93% больше, чем минимально материалоемкий.

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

Таблица 1. Результаты расчета (без конструктивных ограничений; с ограничениями на величину  $\delta_{po}$ ).

№ п/п	Без конструктивных ограничений		С ограничениями на величину $\delta_{po}$		
	$\delta_{po} = 0.000764$		$\delta_{po} \geq 0.006$	$\delta_{po} \geq 0.008$	$\delta_{po} \geq 0.01$
			$\delta_{po} = 0.006$	$\delta_{po} = 0.008$	$\delta_{po} = 0.01$
	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$
1	0,999	0.092	0.097	0.116	0.125
2	0,710	0.061	0.093	0.114	0.123
3	0,617	0.075	0.080	0.107	0.117
4	0,934	0.089	0.050	0.095	0.105
5	0,987	0.145	0.065	0.075	0.093
6	0,994	0.240	0.096	0.044	0.072
7	1	0.350	0.117	0.070	0.039
8	0,996	0.467	0.128	0.097	0.072
9	0,994	0.583	0.136	0.111	0.093
10	0,997	0.692	0.142	0.123	0.108
11	0,996	0.804	0.143	0.130	0.117
12	0,995	0.914	0.147	0.133	0.125
13	0,991	1.023	0.143	0.135	0.128
14	0,994	1.122	0.140	0.134	0.131
15	0,998	1.215	0.139	0.129	0.130
16	0,992	1.317	0.139	0.124	0.130
17	0,993	1.404	0.141	0.117	0.120
18	0,997	1.484	0.157	0.108	0.113
19	0,996	1.566	0.172	0.108	0.102
20	0,996	1.642	0.186	0.119	0.091
21	0,997	1.712	0.196	0.136	0.082
22	0,996	1.781	0.211	0.149	0.095
23	0,994	1.845	0.220	0.164	0.114
24	0,997	1.895	0.230	0.171	0.130
25	0,997	1.949	0.241	0.183	0.141
26	0,995	2.002	0.252	0.192	0.153
27	0,998	2.036	0.261	0.195	0.156
28	0,996	2.083	0.265	0.201	0.162
29	0,998	2.111	0.269	0.208	0.169
30	0,997	2.144	0.269	0.213	0.174
<i>ft</i>	0.01597		0.01773	0.01919	0.02107
<i>eft</i> %	0%		10.88%	20.01%	31.93%

Таблица 2. Результаты расчета (с ограничениями на величину  $b_2[i]$ ).

№ п/п	С ограничениями на величину $b_2[i]$			$b_2[i] \leq 0.14$
	$b_2[i] \leq 0.18$	$b_2[i] \leq 0.16$	$b_2[i] \leq 0.14$	$\delta_{po} \geq 0.01$
	$\delta_{po} = 0.0071$	$\delta_{po} = 0.0079$	$\delta_{po} = 0.0091$	$\delta_{po} = 0.01$
	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$	$b_2[i]$
1	0.106	0.108	0.118	0.126
2	0.098	0.102	0.113	0.124
3	0.091	0.097	0.114	0.118
4	0.076	0.084	0.099	0.106
5	0.075	0.076	0.089	0.094
6	0.078	0.079	0.093	0.072
7	0.105	0.092	0.102	0.046
8	0.117	0.113	0.097	0.073
9	0.134	0.122	0.127	0.098
10	0.147	0.140	0.129	0.109
11	0.151	0.145	0.140	0.126
12	0.151	0.151	0.140	0.129
13	0.159	0.158	0.140	0.136
14	0.157	0.160	0.140	0.138
15	0.171	0.160	0.140	0.139
16	0.171	0.160	0.140	0.138
17	0.175	0.160	0.140	0.138
18	0.177	0.160	0.140	0.132
19	0.180	0.160	0.140	0.125
20	0.180	0.160	0.140	0.117
21	0.180	0.160	0.140	0.106
22	0.180	0.160	0.140	0.112
23	0.180	0.160	0.140	0.105
24	0.180	0.160	0.140	0.119
25	0.180	0.160	0.140	0.134
26	0.180	0.160	0.140	0.140
27	0.180	0.160	0.140	0.140
28	0.180	0.160	0.140	0.140
29	0.180	0.160	0.140	0.140
30	0.180	0.160	0.140	0.140
<i>ft</i>	0.01910	0.01982	0.02124	0.02137
<i>eft</i> %	19.61%	24.11%	32.99%	33.81%

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки  $b_2[i] \leq 0.18 \text{ м}$  приведен в столбце 7. Объем полки  $f_t = 0.01910 \text{ м}^3$ , что на 19.61% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки  $b_2[i] \leq 0.16 \text{ м}$  приведен в столбце 8. Объем полки  $f_t = 0.01982 \text{ м}^3$ , что на 24.11% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничении величины ширины полки  $b_2[i] \leq 0.14 \text{ м}$  приведен в столбце 9. Объем полки  $f_t = 0.02124 \text{ м}^3$ , что на 32.99% больше, чем минимально материалоемкий.

Результат оптимизации при ограничениях величин толщины полки  $\delta_{po} \geq 0.01 \text{ м}$  и ширины полки  $b_2[i] \leq 0.14 \text{ м}$  приведен в столбце 10. Объем полки  $f_t = 0.02137 \text{ м}^3$ , что на 33.81% больше, чем минимально материалоемкий.

Рассмотрим ещё один вариант оптимизации полки при функции цели (35), ограничениях (4), (36) и конструктивных ограничениях величины толщины полки, её ширины, но при условии постоянства ширины по длине стержня. Примем ограничения в виде  $\delta_{po} \geq 0.01 \text{ м}$  и  $b_2[i] = b_2 \leq 0.14 \text{ м}$ .

В результате оптимизации получим  $\delta_{po} = 0.0104 \text{ м}$  и  $b_2[i] = b_2 = 0.126 \text{ м}$ . Объём полки  $f_t = 0.02360 \text{ м}^3$ , что отличается от минимально материалоемкого на 47.78%. От приведенных выше оптимизационных решений, в которых ширина полки меняется по длине стержня, разница в материалоемкости существенно меньше. Так разница с решением при переменной по длине стержня ширине полки и при ограничениях  $\delta_{po} \geq 0.01 \text{ м}$  и  $b_2[i] \leq 0.14 \text{ м}$  составит 10.44%.

Во всех оптимизационных решениях, как с конструктивными ограничениями, так и без них достигается равноустойчивость в обеих главных плоскостях инерции.

Таким образом, набор оптимизационных решений может служить ориентиром при выборе системы ограничений, отвечающих конкретным условиям проектирования. При этом появляется возможность сравнения оптимизированных вариантов по материалоемкости как между собой, так и на основе критерия (15) с минимально материалоемким [1,2]. Полученный в данной работе критерий, также как и полученные ранее (например [3-6]), могут использоваться также в задачах оптимизации конструкций, в частности оптимального усиления конструкций [7-16].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. – 372 с.
2. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 10, Issue 2, с. 14-23.
3. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П.** Критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. // Вестник ТГАСУ, 2015, №5, с. 41-50.
4. **Ляхович Л.С., Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Григорьев А.И.** Использование методов оптимизации в задачах усиления конструкций. // Вестник ТГАСУ, 2015, №6, с. 57-70.
5. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П., Тухфатуллин Б.А.** Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // Interna-

- tional Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, с. 118-125.
6. **Чудновский В.Г.** Метода расчёта колебаний и устойчивости стержневых систем. – Киев: Издательство АН УССР, Киев, 1952. – 414 с.
  7. **Белостоцкий А.М., Акимов П.А.** Научно-исследовательский центр СтаДиО. 25 лет на фронте численного моделирования. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 1, с. 8-45.
  8. **Lyakhovich L.S.** Dual Approach to Solving the Problems of Structural Optimization. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 510-515.
  9. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** О задачах поиска минимума и максимума в строительной механике. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 2, с. 103-124.
  10. **Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.** Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 1, с. 9-22.
  11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
  12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
  13. **Дмитриева Т.Л.** Адаптивные многоуровневые математические модели в численной оптимизации пластинчато-стержневых конструкций. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». – М.: МГСУ, 2012. – 38 с.
  14. **Agrama F.A.** Multi-objective Genetic Optimization for Scheduling a Multi-storey Building. // Automation in Construction, 2014, Volume 44, pp. 119-128.
  15. **Martini K.** Harmony Search Method for Multimodal Size, Shape, and Topology Optimization of Structural Frameworks. // Journal of Structural Engineering, 2011, Volume 137, Number 11, pp. 1332-1339.
  16. **Scherer M., Steinmann P., Denzer R.** A Fictitious Energy Approach for Shape Optimization. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, Volume 82, Number 3, pp. 269-302.

## REFERENCES

1. **Lyakhovich L.S.** Osobyje Svoystva Optimal'nyh Sistem i Osnovnye Napravleniya ih Realizacii v Metodah Rascheta Sooruzhenij [Special properties of optimal systems and the main directions of their implementation in methods of calculating structures], Tomsk, Publishing House of Tomsk State University of Architecture and Building, 2009, 372 pages.
2. **Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V.** Nekotorye Voprosy Optimal'nogo Proektirovaniya Stroitel'nyh Konstrucij [Some Problems of Building Constructions Optimal Projecting]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Volume 10, Issue 2, pp. 14-23.

Критерий минимальной материалоемкости полки стержня двутаврового сечения при варьировании ее толщины и очертания ширины при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний в двух главных плоскостях инерции сечения

3. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P.** Kriterij Minimal'noj Materialoemkosti pri Usilenii Sterzhnej Dvutavrovogo Poperechnogo Secheniya i Ogranicheniyah na Velichinu Kriticheskoy Sily ili Pervoj Sobstvennoj Chastoty [The Criterion of the Minimum Material Consumption in Cases of Reinforcing the I-Bars and the Restrictions on the Value of the Critical Force or the First Natural Frequency]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture, 2015, No. 5, pp. 41-50.
4. **Lyakhovich L.S., Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Grigoryev A.I.** Ispol'zovanie Metodov Optimizacii v Zadachah Usileniya Konstrukcij [The Application of Optimization Methods in Problems of Strengthening Structures]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture, 2015, No. 6, pp. 57-70.
5. **Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.** Kriterii Optimal'nogo Usileniya Stenki Sterzhnej Dvutavrovogo Poperechnogo Secheniya pri Ogranicheniyah po Ustojchivosti ili na Velichinu Pervoj Sobstvennoj Chastoty [Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-Type Cross-Section with Stability Constraints or With Constraints on the Value of the First Natural Frequency]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 2, pp. 118-125.
6. **Chudnovsky V.G.** Metoda Raschyota Kolebanij i Ustojchivosti Sterzhnevyyh Sistem [Method for Calculating the Oscillations and Stability of Rod Systems]. Kiev, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1952, 414 pages.
7. **Belostosky A.M., Akimov P.A.** Nauchno-Issledovatel'skij Centr StaDyO. 25 Let na Fronte Chislennogo Modelirovaniya [25th Anniversary of Scientific Research Centre StaDyO]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Volume 12, Issue 1, c. 8-45.
8. **Lyakhovich L.S.** Dual Approach to Solving the Problems of Structural Optimization. // Procedia Engineering, 2015, Volume 111, pp. 510-515.
9. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** O Zadachah Poiska Minima i Maksimuma v Stroitel'noj Mekhanike [About Hill-Climbing Problems in Structural Mechanics]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 2, pp. 103-124.
10. **Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.** Kriterii Minimal'noj Materialoemkosti Sterzhnej Pryamougol'nogo Poperechnogo Secheniya pri Ogranicheniyah po Ustojchivosti ili na Velichinu Pervoj Sobstvennoj Chastoty [Criteria of Minimum Materials Consumption for Bars with Rectangular Cross-Section and Restrictions on Stability or Limitations on the Value of the First Natural Frequency]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Volume 13, Issue 1, pp. 9-22.
11. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation of the Problem and General Principles of Approximation. // MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00109.
12. **Lyakhovich L., Negrozov O.** About Solution of Multipoint Boundary Problem of Static Analysis of Deep Beam with the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Boundary Conditions. MATEC Web of Conferences, Vol. 117, 2017, 00110.
13. **Dmitriyeva T.L.** Adaptivnyye Mnogourovnevyye Matematicheskiye Modeli v

- Chislennoy Optimizatsii Plastinchato-Sterzhnevnykh Konstruktsiy [Adaptive Multilevel Mathematical Models in Numerical Optimization of Lamellar and Rod Designs]. Doctorial Thesis. Abstract. 05.13.18. Moscow, 2012, 38 pages.
14. **Agrama F.A.** Multi-objective Genetic Optimization for Scheduling a Multi-storey Building. // Automation in Construction, 2014, Volume 44, pp. 119-128.
  15. **Martini K.** Harmony Search Method for Multimodal Size, Shape, and Topology Optimization of Structural Frameworks. // Journal of Structural Engineering, 2011, Volume 137, Number 11, pp. 1332-1339.
  16. **Scherer M., Steinmann P., Denzer R.** A Fictitious Energy Approach for Shape Optimization. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, Volume 82, Number 3, pp. 269-302.
- 
- Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; E-mail: lls@tsuab.ru
- Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center "StADyO"; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia; Professor of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru.

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; E-mail: lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; Email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru.

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics,