

О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 1: ПОСТАНОВКА И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ

П.А. Акимов^{1, 2, 3, 4}, О.А. Негрозов^{1, 5}

¹ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

⁴ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁵ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации много-точечной краевой задачи статического расчета трехмерной конструкции на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. В частности, описаны основные обозначения и соглашения, представлены расчетная модель и общая постановка задачи (на основе трехмерной теории упругости), общие принципы аппроксимации области, принятые правила нумерации подобластей, правила нумерации конечных элементов и дискретно-континуальных конечных элементов; описано построение дискретной (конечноэлементной) и дискретно-континуальной аппроксимирующих моделей на подобластях.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, трехмерные задачи, постановки задач, аппроксимация

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD PART 1: FORMULATION AND BASIC PRINCIPLES OF APPROXIMATION

Pavel A. Akimov^{1, 2, 3, 4}, Oleg A. Negrozov^{1, 5}

¹ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

² Scientific Research Center "StADyO", Moscow, RUSSIA

³ Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

⁴ The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁵ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to formulation and basic principles of approximation of multipoint boundary problem of static analysis of three-dimensional structure with the use of combined application of finite element method and discrete-continual finite element method. Basic notation system, design model, general for-

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач

mulation of the problem (based on three-dimensional theory of elasticity), basic principles of domain approximation, rule of numbering of subdomains, rule of numbering of finite elements, rule of numbering of discrete-continual finite elements are considered. Construction of discrete (finite element) and discrete-continual approximation models for subdomains is under consideration as well.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, three-dimensional problems, formulation of problems, approximation

В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета трехмерной конструкции на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова [1] и развитого в исследованиях П.А. Акимова [2-11], М.Л. Мозгалевой [12-22], Моджтаба Аслами [3-6,16-19,23], О.А. Козырева [24] и О.А. Негрозова [25-28]. Ранее в статьях [29-30] рассматривались аналогичные проблемы для двумерных задач расчета конструкций.

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть требуется решить многоточечную краевую задачу статического расчета (определить напряжения и перемещения) трехмерной конструкции. Расчетная модель – трехмерная (пространственная) задача теории упругости. Математическая постановка этой задачи приведена, например, в [31-45].

Пусть Ω – область, занимаемая рассматриваемой конструкцией,

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2, 0 < x_3 < l_3\}, \quad (1.1)$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \Omega_k, \quad (1.2)$$

где соответственно

$$\Omega_k = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_{1,k}, 0 < x_2 < l_{2,k}, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\}; \quad (1.3)$$

$x_{3,k}^b$, $k = 1, 2, \dots, n_b$ – координаты граничных точек (при $n_b > 2$ и имеем многоточечную краевую задачу); n_b – количество граничных точек; Ω_k , $k = 1, 2, \dots, n_b - 1$ – подобласти рассматриваемой области Ω .

Заметим, что типовым является случай

$$l_{1,k} = const; \quad l_{2,k} = const \quad \text{при} \quad x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b,$$

однако в общем случае, разумеется, имеем

$$l_1 = l_1(x_3) \neq const; \quad l_2 = l_2(x_3) \neq const,$$

т.е. допускается случай кусочного постоянства l_1 и l_2 .

Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [46], можем окаймить области Ω_k , $k = 1, 2, \dots, n_b - 1$ соответствующими расширенными ω_k , $k = 1, 2, \dots, n_b - 1$ и перейти к расширенной области ω ,

$$\omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \omega_k, \quad (1.4)$$

где

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < \tilde{l}_{1,k}, 0 < x_2 < \tilde{l}_{2,k}, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\} \supset \Omega_k, \quad (1.5)$$

причем, в частности, для указанного выше типового случая можно выбрать

$$\tilde{l}_{q,k} = \tilde{l}_q = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, n_b - 1, \quad q = 1, 2,$$

т.е.

$$\omega_k = \{(x_1, x_2, x_3): 0 < x_1 < \tilde{l}_1, \\ 0 < x_2 < \tilde{l}_2, \quad x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b\} \supset \Omega_k. \quad (1.6)$$

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ

Пусть в пределах одной группы областей ω_k из числа указанных в (1.4) физико-геометрические параметры конструкции не зависят от переменной x_2 , отвечающей так называемому основному направлению – для таких областей целесообразно использовать дискретизацию в рамках ДКМКЭ (имеем дискретно-континуальную модель). Пусть в пределах другой группы областей ω_k соответствующие физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно – для таких областей следует использовать дискретизацию в рамках МКЭ (имеем дискретную модель). Итак, целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ.

Для удобства изложения введем параметр ρ_k , называемый параметр дискретизации и принимающий следующие значения: $\rho_k = 1$ – используется дискретизация в рамках МКЭ [47-49]; $\rho_k = 2$ – используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

3. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ ПОДОБЛАСТЕЙ

Вообще, могут использоваться различные подходы к нумерации подобластей (или, что эквивалентно, областей), определяемых формулой (1.5).

Первый подход предусматривает отдельную нумерацию областей с различными типами дискретизации:

$$k_1 = k_1(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 2|; \\ k_2 = k_2(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 1|, \quad (3.1)$$

где k – исходный номер подобласти ω_k ; $k_1 = k_1(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках МКЭ или $k_2 = k_2(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках ДКМКЭ.

Разумеется, также можно построить обратные зависимости

$$k = k(k_1); \quad k = k(k_2), \quad (3.2)$$

выполнив табуляцию результатов вычислений по формулам (3.1).

Таким образом, можем переписать (1.4) в следующем виде:

$$\omega = \bigcup_{k_1=1}^{N_{fe}} \omega_{k_1}^{fe} + \bigcup_{k_2=1}^{N_{dc}} \omega_{k_2}^{dc}, \quad (3.3)$$

причем справедливы соотношения

$$N_{fe} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 2|; \quad N_{dc} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 1|; \quad (3.4)$$

$$N_{fe} + N_{dc} = n_b - 1, \quad (3.5)$$

где $\omega_{k_1}^{fe}$, $k_1 = 1, 2, \dots, N_{fe}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках МКЭ; $\omega_{k_2}^{dc}$, $k_2 = 1, 2, \dots, N_{dc}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

Второй подход, напротив, основан на единой нумерации областей с различными типами дискретизации, т.е. на использовании представления вида (1.4), в котором

$$\omega_k = \begin{cases} \omega_k^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ \omega_k^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (3.6)$$

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач

В таком случае, очевидно, соответствующие пересчеты по формулам (3.1)-(3.2) не требуются. В настоящей статье далее будет использоваться именно второй подход.

4. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ КОНЕЧНЫХ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} .

Введем обозначение

$$l_{3,k}^{fe} = x_{3,k+1}^b - x_{3,k}^b, \text{ если } \rho_k = 1. \quad (4.1)$$

Пусть

$$x_{1,i,j,r}^{fe,k}, x_{2,i,j,r}^{fe,k}, x_{3,i,j,r}^{fe,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{fe}, \\ j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{fe}, r = 1, 2, \dots, N_{3,k}^{fe}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1 , x_2 и x_3) узлов конечных элементов в области ω_k^{fe} ;

$$(N_{1,k}^{fe} - 1); (N_{2,k}^{fe} - 1); (N_{3,k}^{fe} - 1)$$

– количество конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{fe} по направлениям, соответствующим переменным x_1 , x_2 и x_3 (рассматривается аппроксимирующая сетка топологически эквивалентная прямоугольной). Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{fe} будем применять четырехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j, r) , где k – номер подобласти дискретизации в рамках МКЭ; i , j и r – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 , x_2 и x_3 ; $\omega_{k,i,j,r}^{fe}$ – обозначение соответствующего конечного элемента.

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Введем обозначение

$$l_{3,k}^{dc} = x_{3,k+1}^b - x_{3,k}^b, \text{ если } \rho_k = 2. \quad (4.2)$$

Пусть

$$x_{1,i,j}^{dc,k}, x_{2,i,j}^{dc,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{dc}, j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{dc}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_k^{dc} ;

$$(N_{1,k}^{dc} - 1); (N_{2,k}^{dc} - 1)$$

– количество дискретно-континуальных конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{dc} по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 (по сечению поперечному по отношению к основному направлению рассматривается аппроксимирующая сетка топологически эквивалентная прямоугольной). Для узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{dc} будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j) , где k – номер подобласти; i и j – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 и x_2 ; $\omega_{k,i,j}^{dc}$ – обозначение соответствующего дискретно-континуального конечного элемента.

Введем обозначения:

$$N_{1,k} = \begin{cases} N_{1,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ N_{1,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$N_{2,k} = \begin{cases} N_{2,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ N_{2,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad (4.4)$$

$$N_{3,k} = N_{3,k}^{fe}, \text{ если } \rho_k = 1; \quad (4.5)$$

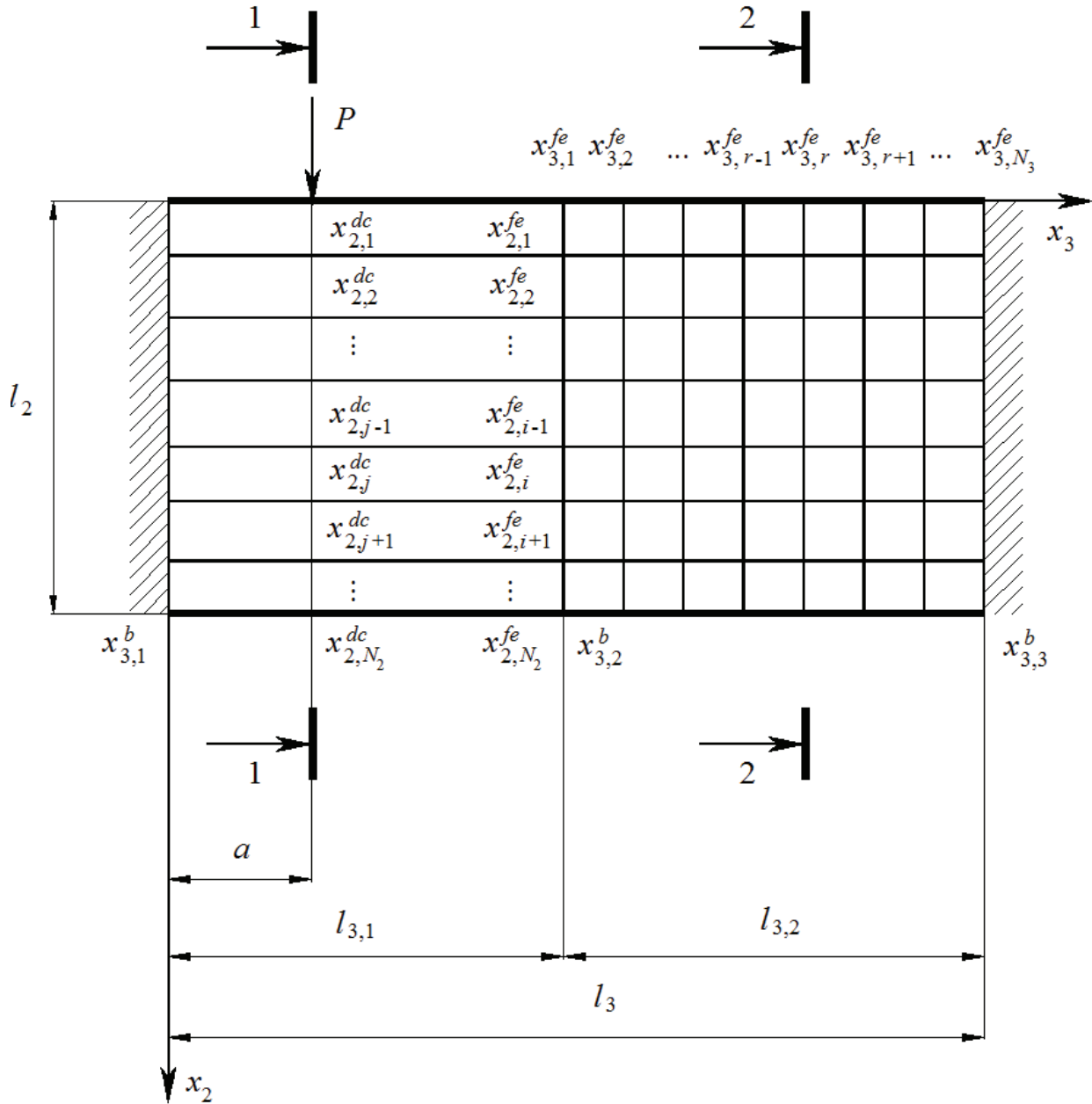


Рисунок 4.1. Пример к постановке трехточечной краевой задачи.

$$l_{3,k} = \begin{cases} l_{3,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ l_{3,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (4.6)$$

$$x_{q,i,j}^{dc,k} = x_{q,i,j}^{dc}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{dc}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{dc}, \quad q = 1, 2; \quad (4.8)$$

$$x_{q,i,j,r}^{fe,k} = x_{q,i,j}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{fe}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_{3,k}^{fe}, \quad q = 1, 2; \quad (4.9)$$

$$x_{q,i,j}^{dc} = x_{q,i,j}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad q = 1, 2; \quad (4.10)$$

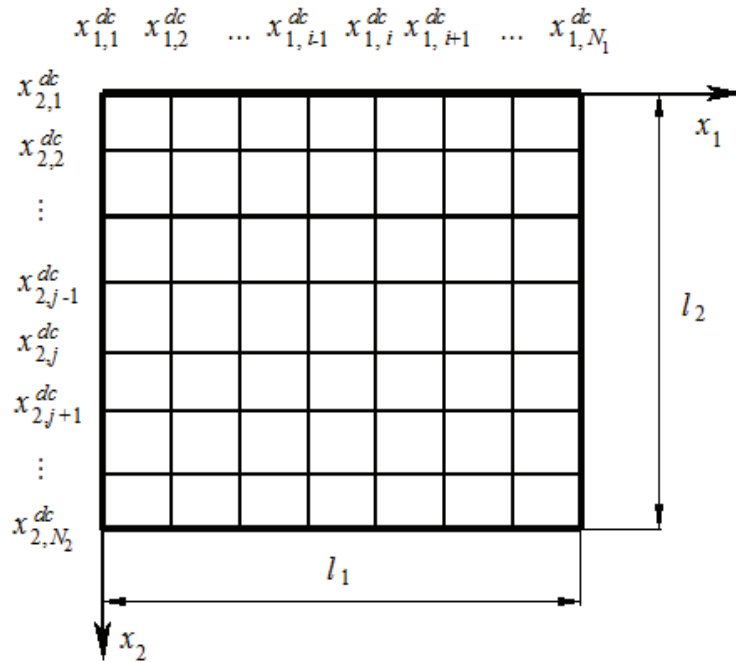
$$x_{q,i,j,r}^{fe,k} = x_{q,i,j}^{fe}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{fe}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{fe}, \quad r = 1, 2, \dots, N_{3,k}^{fe}, \quad q = 1, 2; \quad (4.11)$$

Заметим, что в простейших типовых случаях схема дискретизации конструкции по направлениям, отвечающим переменным x_1 и x_2 , неизменна по всей области, т.е. справедливы равенства

$$N_{q,k} = N_q = const, \quad q = 1, 2; \quad (4.7)$$

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.
 Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач

1 - 1



2 - 2

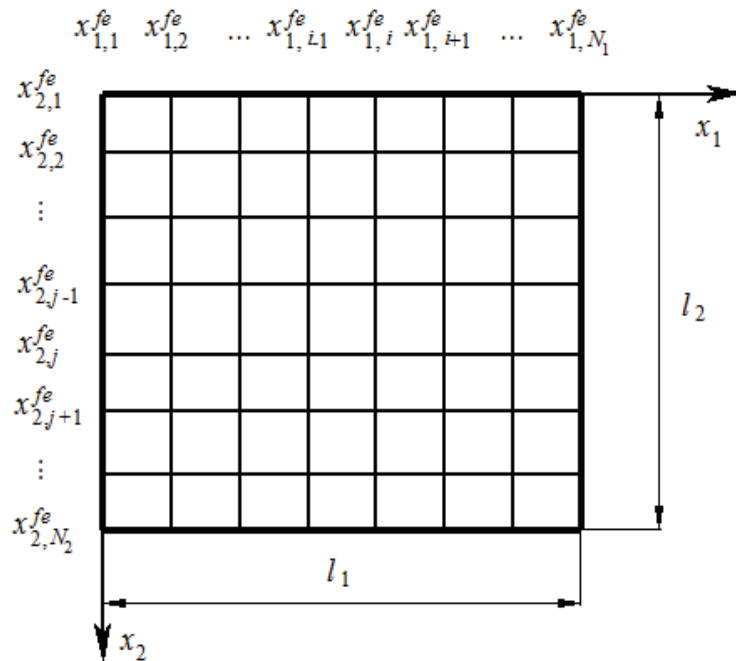


Рисунок 4.2. К постановке задачи: поперечные по отношению к основному направлению сечения трехмерного бруса с соответствующими сеточными аппроксимациями сечения в осях x_1 и x_2 .

Примеры соответствующих обозначений показаны на рис. 4.1 и 4.2. Заметим, что здесь для аппроксимации поперечного по отношению к x_3 сечения (т.е. переменным x_1 и x_2) используется прямоугольная сетка, т.е.

$$x_{1,i,j}^{dc} = x_{1,i}^{dc}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2^{dc}; \quad (4.11)$$

$$x_{2,i,j}^{dc} = x_{2,j}^{dc}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1^{dc}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2^{dc}; \quad (4.12)$$

$$x_{1,i}^{dc} = x_{1,i}^{fe} = x_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad (4.13)$$

$$x_{2,j}^{dc} = x_{2,j}^{fe} = x_{2,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2; \quad (4.14)$$

$$x_{3,i,j,r}^{fe,k} = x_{3,r}^{fe,k}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad r = 1, 2, \dots, N_{3,k}^{fe}. \quad (4.15)$$

5. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} . Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по всем координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_k^{fe} разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega_k^{fe} = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \bigcup_{r=1}^{N_{3,k}-1} \omega_{k,i,j,r}^{fe}, \quad (5.1)$$

причем, в частности, при условии справедливости формул (4.11)-(4.15) имеем:

$$\omega_{k,i,j,r}^{fe} = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, x_{2,k,j} < x_2 < x_{2,k,j+1}, x_{3,r}^{fe,k} < x_3 < x_{3,r+1}^{fe,k} \}. \quad (5.1)$$

Характеристическую функцию элемента $\omega_{k,i,j}^{fe}$ определяется по формуле

$$\theta_{k,i,j,r} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j,r}^{fe} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i,j,r}^{fe} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (5.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i,j,r} = \theta_{k,i,j,r} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j,r} = \theta_{k,i,j,r} \mu. \quad (5.4)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ (верхний индекс «(k)», следуя по аналогии с [29,30], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$), т.е. для (k, i, j, r) -го узла это $u_1^{(k,i,j,r)}, u_2^{(k,i,j,r)}, u_3^{(k,i,j,r)}$.

Поля $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ по всем координатным направлениям (вдоль осей $0x_1$, $0x_2$ и $0x_3$) в пределах каждого конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные восьмиузловые конечные элементы трехмерной задачи теории упругости (в перемещениях) [47-49]). Можно показать [47-49], что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{fe} , разрешающая система $3N_1N_2N_{3,k}$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_k \bar{U}_k = \bar{R}_k, \quad (5.5)$$

где $\{\bar{U}_k\}_{i_g} = u_q^{(k,i,j,r)}$; (5.6)

i_g – глобальный индекс глобального $3N_1N_2N_{3,k}$ -мерного вектора неизвестных \bar{U}_k ; k, i, j, r, q – соответствующие локальные индексы, определяемые по формулам:

$$k = 2; \quad (5.7)$$

$$r = \left\lfloor \frac{i_g}{3N_1N_2} \right\rfloor + 1; \quad (5.8)$$

О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов.

Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач

$$j = \left\lfloor \frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2}{3N_1} \right\rfloor + 1; \quad (5.9)$$

$$i = \left\lfloor \frac{i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1}{3} \right\rfloor + 1; \quad (5.10)$$

$$q = i_g - 3(r-1)N_1N_2 - 3(j-1)N_1 - 3i; \quad (5.11)$$

K_k – глобальная матрица жесткости $3N_1N_2N_{3,k}$ -го порядка; \bar{R}_k – $3N_1N_2N_{3,k}$ -мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок); запись типа $[a]$ обозначает целую часть числа a .

6. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси $0x_3$) решается континуальная задача, а остальным направлениям (вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$) производится конечноэлементная аппроксимация. Итак, область ω_k^{dc} разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\omega_k^{dc} = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_2-1} \omega_{k,i,j}^{dc}; \quad (6.1)$$

причем, в частности, при условии справедливости формул (4.11)-(4.15) имеем:

$$\omega_{k,i,j}^{dc} = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, x_{2,j} < x_2 < x_{2,j+1}, x_{3,k}^b < x_3 < x_{3,k+1}^b \}, \quad (6.2)$$

определяя характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента (ДККЭ) $\omega_{k,i,j}^{dc}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j}^{dc} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i,j}^{dc} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (6.3)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (6.4)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_3^{(k)}$ по переменной x_3 , т.е. для (k, i, j) -го узла это $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}, u_3^{(k,i,j)}$ и $v_1^{(k,i,j)}, v_2^{(k,i,j)}, v_3^{(k,i,j)}$.

Поля $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}, u_3^{(k,i,j)}$ и $v_1^{(k,i,j)}, v_2^{(k,i,j)}, v_3^{(k,i,j)}$ по неосновным направлениям (вдоль x_1 и x_2) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются полилинейно.

Можно показать, что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{dc} , разрешающая система $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\bar{U}'_k(x_3) = A_k \bar{U}_k(x_3) + \bar{R}_k(x_3), \quad (6.5)$$

$$\text{где } \bar{U}_k = \bar{U}_k(x_3) = [(\bar{u}_k)^T (\bar{v}_k)^T]^T \quad (6.6)$$

– $6N_1N_2$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс « (k) », следуя по аналогии [29,30], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$);

$$\begin{aligned} \bar{u}_k = \bar{u}_k(x_3) = & \\ = & [(\bar{u}_n^{(1,1,1)})^T (\bar{u}_n^{(1,2,1)})^T \dots (\bar{u}_n^{(1,N_1,1)})^T \dots \\ & \dots (\bar{u}_n^{(1,1,2)})^T (\bar{u}_n^{(1,2,2)})^T \dots (\bar{u}_n^{(1,N_1,2)})^T \dots \\ & \dots (\bar{u}_n^{(1,1,N_2)})^T (\bar{u}_n^{(1,2,N_2)})^T \dots (\bar{u}_n^{(1,N_1,N_2)})^T]^T; \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \bar{v}_k(x_3) = \\ &= [(\bar{v}_n^{(1,1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,1)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{v}_n^{(1,1,2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,2)})^T \quad \dots \\ &\dots \quad (\bar{v}_n^{(1,1,N_2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(1,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(1,N_1,N_2)})^T]^T; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\bar{u}_n^{(k,i,j)} = \bar{u}_n^{(k,i,j)}(x_3) = [u_1^{(k,i,j)} \quad u_2^{(k,i,j)} \quad u_3^{(k,i,j)}]^T; \quad (6.9)$$

$$\bar{v}_n^{(k,i,j)} = \bar{v}_n^{(k,i,j)}(x_3) = [v_1^{(k,i,j)} \quad v_2^{(k,i,j)} \quad v_3^{(k,i,j)}]^T; \quad (6.10)$$

A_k – матрица коэффициентов $6N_1N_2$ -го порядка; $\bar{R}_k(x_2)$ – $6N_1N_2$ -мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (6.5) может быть представлено в виде [2]:

$$\bar{U}_k(x_3) = E_k(x_3)\bar{C}_k + \bar{S}_k(x_3), \quad (6.11)$$

$$\text{где } E_k(x_3) = \varepsilon_k(x_3 - x_{3,k}^b) - \varepsilon_k(x_3 - x_{3,k+1}^b); \quad (6.12)$$

$$\bar{S}_k(x_3) = \varepsilon_k(x_3) * \bar{R}_k(x_3); \quad (6.10)$$

$\varepsilon_k(x_3)$ – фундаментальная матрица-функция системы (6.5), определяемая согласно [2]; символ «*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций [2]; \bar{C}_k – $6N_1N_2$ -мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // Proceedings of the International Symposium LSCE 2002 organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.
2. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
3. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
4. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
5. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 1040, pp. 664-669.
6. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 2-7.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 89-94.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 95-103.

9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, 2014, Vol. 91, pp.14-19.
10. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
11. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 926-932.
12. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite element method for global and local analysis of multilevel systems. // *Applied Mechanics and Materials; AIP Conference Proceedings*, 2014, 1623, 3, pp. 3-6;
13. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.
14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 405-408, pp. 3165-3168.
15. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 351-352, pp. 13-16.
16. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Aslami M., Negrozov O.A.** Local High-Accuracy Plate Analysis Using Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method. // *Key Engineering Materials*, 2016, Vol. 685, pp. 962-966.
17. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vols. 670-671, pp. 720-723.
18. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vols. 670-671, pp. 724-727.
19. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method of Local Structural Analysis for Two-Dimensional Problems. // *Procedia Engineering*, 2014, Vol. 91, pp. 8-13.
20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // *ACSR-Advances in Computer Science Research*, 2015, Volume 18, pp. 713-716.
21. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 1: Structures with Constant Physical and Geometrical of Structural Analysis Parameters Along Basic Direction. // *Applied Mechanics & Materials*, 2015, Vol. 709, pp. 105-108.
22. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 2: Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along

- Basic Direction of Structural Analysis. // Applied Mechanics & Materials, 2015, Vol. 709, pp. 109-112.
23. **Mojtaba Aslami, Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // Thin-Walled Structures, 2015-2016, Volume 98, Part B, pp. 392-402.
 24. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Kozirev O.A.** Opredelenie Sobstvennyh Znachenij i Sobstvennyh Funkcij Kraevykh Zadach Stroi-tel'noj Mehaniki na Osnove Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnykh Elementov [Computing of Eigenvalues and Eigenfunctions of Boundary Problems of Structural Mechanics on the Basis of a Discrete-Continual Finite Element Method]. // Vestnik MGSU, 2009, Issue 3, pp. 255-259.
 25. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Application of Unstructured Approximating Meshes in Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Materials Physics and Mechanics, 2016, 26, pp. 5-8.
 26. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 8-15.
 27. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 2: Three-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 16-23.
 28. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 3: Plate Analysis. // Procedia Engineering, Vol. 153 (2016) pp. 24-31.
 29. **Akimov P.A., Sidorov V.N., Negrozov O.A.** O Reshenii Mnogotochechnykh Kraevykh Zadach Rascheta Konstrukcij v Dvumernoj Postanovke na Osnove Sovmestnogo Primeneniya Metoda Konechnykh Elementov i Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnykh Elementov. CHast' 1: Postanovka i Obshchie Principy Approksimacii Zadach [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis With the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Formulation and Basic Principles of Approximation]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 1, 2017, pp. 23-33.
 30. **Akimov P.A., Belostotsky A.M., Kaytukov T.B., Negrozov O.A.** Reshenii Mnogotochechnykh Kraevykh Zadach Rascheta Konstrukcij v Dvumernoj Postanovke na Osnove Sovmestnogo Primeneniya Metoda Konechnykh Elementov i Diskretno-Kontinual'nogo Metoda Konechnykh Elementov. CHast' 2: Osobennosti Konechnoehlementnoj Approksimacii i Zadanie Granichnykh Uslovij [About Solution of Multipoint Boundary Problems of Two-Dimensional Structural Analysis With the Use of Combined Application of Finite Element Method and Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Special Aspects of Finite Element Approximation and Boundary Conditions]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 14-36.
 31. **Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D.** Method of Fundamental Solutions for Mixed and Crack Type Problems in the Classical Theory of Elasticity. // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, 2017, Volume 171, Issue 3, pp. 264-292.

32. **Chu P., Li X.-F., Wang Z.-G., Lee K.Y.** Double Cantilever Beam Model for Functionally Graded Materials Based on Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Volume 135, pp. 232-244.
33. **Daneshjoua K., Talebitooti R., Tar-kashvand A.** Analysis of Sound Transmission Loss Through Thick-Walled Cylindrical Shell Using Three-Dimensional Elasticity Theory. // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, Volume 106, pp. 286-296.
34. **Karttunen A.T., von Herten R., Reddy J.N., Romanoff J.** Exact Elasticity-Based Finite Element for Circular Plates. // *Computers & Structures*, 2017, Volume 182, pp. 219-226.
35. **Lee C.-Y., Wang H., Qin Q.-H.** Method of Fundamental Solutions for 3D Elasticity With Body Forces by Coupling Compactly Supported Radial Basis functions. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, Volume 60, pp. 123-136.
36. **Liu L.-W., Hong H.-K.** Clifford Algebra Valued Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasticity. // *Applied Mathematical Modelling*, 2018, Volume 54, pp. 246-267
37. **Pourasghar A., Chen Z.** Thermoelastic Response of CNT Reinforced Cylindrical Panel Resting on Elastic Foundation Using Theory of Elasticity. // *Composites Part B: Engineering*, 2016, Volume 99, pp. 436-444.
38. **Qu Y., Meng G.** Dynamic Analysis of Composite Laminated and Sandwich Hollow Bodies of Revolution Based on Three-Dimensional Elasticity Theory. // *Composite Structures*, 2014, Volume 112, pp. 378-396.
39. **Sakihara K., Matsubara H., Edo T.-A., Yagawa G.** Multi-Dimensional Moving Least Squares Method Applied to 3D Elasticity Problems. // *Engineering Structures*, 2013, Volume 47, pp. 45-53.
40. **Salehipour H., Nahvi H., Shahidi A.R.** Exact Closed-Form Free Vibration Analysis for Functionally Graded Micro / Nano Plates Based on Modified Couple Stress and Three-Dimensional Elasticity Theories. // *Composite Structures*, 2015, Volume 124, pp. 283-291.
41. **Shaban M., Alibeigloo A.** Three-Dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with Corrugated Cores by Using Energy Method. // *Thin-Walled Structures*, 2017, Volume 119, pp. 404-411.
42. **Shariyat M., Asemi K.** Uniaxial and Biaxial Post-Buckling Behaviors of Longitudinally Graded Rectangular Plates on Elastic Foundations According to the 3D Theory of Elasticity. // *Composite Structures*, 2016, Volume 142, pp. 57-70.
43. **Wang B., Xia K., Wei G.-W.** Second Order Method for Solving 3D Elasticity Equations With Complex Interfaces. // *Journal of Computational Physics*, 2015, Volume 294, pp. 405-438.
44. **Wang Q., Zheng J.J., Miao Y., Lv J.H.** The multi-domain hybrid boundary node method for 3D elasticity. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, Volume 35, Issue 6, pp. 803-810.
45. **Wang Y., Wang Q., Wang G., Huang Y., Wang S.** An Adaptive Dual-Information FMBEM for 3D Elasticity and its GPU Implementation. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, Volume 37, Issue 2, pp. 236-249.
46. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
47. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** *Finite Elements and Approximation*. Dover Publications, 2006, 352 pages.
48. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method for Solid and Struc-*

tural Mechanics. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.

49. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.

REFERENCES

1. **Zolotov A.B., Akimov P.A.** Semianalytical Finite Element Method for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // Proceedings of the International Symposium LSCE 2002 organized by Polish Chapter of IASS, Warsaw, Poland, 2002, pp. 431-440.
2. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 204-208, pp. 4502-4505.
3. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
4. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // MATEC Web Conferences, 2016, Vol. 86, 8 pages.
5. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research, 2014, Vol. 1040, pp. 664-669.
6. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp. 2-7.
7. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 89-94.
8. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // Advanced Materials Research, 2014, Vols. 1025-1026, pp. 95-103.
9. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // Procedia Engineering, 2014, Vol. 91, pp.14-19.
10. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
11. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // Procedia Engineering, 2016, Vol. 153, pp. 926-932.
12. **Akimov P.A., Belostosky A.M., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Application of discrete-continual finite el-

- ement method for global and local analysis of multilevel systems. // *Applied Mechanics and Materials*; AIP Conference Proceedings, 2014, 1623, 3, pp. 3-6;
13. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 353-356, pp. 3224-3227.
 14. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Deep Beam Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 405-408, pp. 3165-3168.
 15. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Local Plate Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vols. 351-352, pp. 13-16.
 16. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Aslami M., Negrozov O.A.** Local High-Accuracy Plate Analysis Using Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method. // *Key Engineering Materials*, 2016, Vol. 685, pp. 962-966.
 17. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 1: Continual and Discrete-Continual Formulations of the Problems Method for Local Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vols. 670-671, pp. 720-723.
 18. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Modified Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Finite Element. Part 2: Reduced Formulations of the Problems in Haar Basis Method for Local Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vols. 670-671, pp. 724-727.
 19. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method of Local Structural Analysis for Two-Dimensional Problems. // *Procedia Engineering*, 2014, Vol. 91, pp. 8-13.
 20. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** Advanced Wavelet-Based Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Local Structural Analysis. // *ACSR-Advances in Computer Science Research*, 2015, Volume 18, pp. 713-716.
 21. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 1: Structures with Constant Physical and Geometrical of Structural Analysis Parameters Along Basic Direction. // *Applied Mechanics & Materials*, 2015, Vol. 709, pp. 105-108.
 22. **Mozgaleva M.L., Akimov P.A.** About Verification of Wavelet-Based Discrete-Continual Finite Element Method for Three-Dimensional Problems. Part 2: Structures with Piecewise Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction of Structural Analysis. // *Applied Mechanics & Materials*, 2015, Vol. 709, pp. 109-112.
 23. **Mojtaba Aslami, Akimov P.A.** Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis. // *Thin-Walled Structures*, 2015-2016, Volume 98, Part B, pp. 392-402.
 24. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе дискретно-континуального метода конечных элементов. // *Вестник МГСУ*, №3, 2009, с. 255-259.
 25. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Application of Unstructured Approximating Meshes in Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Materials Physics and Mechanics*, 2016, 26, pp. 5-8.
 26. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Com-

- bined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 8-15.
27. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 2: Three-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 16-23.
 28. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 3: Plate Analysis. // *Procedia Engineering*, Vol. 153 (2016) pp. 24-31.
 29. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 13, Issue 1, 2017, pp. 23-33.
 30. **Акимов П.А., Белостоцкий А.М., Кайтуков Т.Б., Негрозов О.А.** О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Особенности конечноэлементной аппроксимации и задание граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Volume 13, Issue 4, 2017, pp. 14-36.
 31. **Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D.** Method of Fundamental Solutions for Mixed and Crack Type Problems in the Classical Theory of Elasticity. // *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 2017, Volume 171, Issue 3, pp. 264-292.
 32. **Chu P., Li X.-F., Wang Z.-G., Lee K.Y.** Double Cantilever Beam Model for Functionally Graded Materials Based on Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, Volume 135, pp. 232-244.
 33. **Daneshjoua K., Talebitooti R., Tar-kashvand A.** Analysis of Sound Transmission Loss Through Thick-Walled Cylindrical Shell Using Three-Dimensional Elasticity Theory. // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, Volume 106, pp. 286-296.
 34. **Karttunen A.T., von Herten R., Reddy J.N., Romanoff J.** Exact Elasticity-Based Finite Element for Circular Plates. // *Computers & Structures*, 2017, Volume 182, pp. 219-226.
 35. **Lee C.-Y., Wang H., Qin Q.-H.** Method of Fundamental Solutions for 3D Elasticity With Body Forces by Coupling Compactly Supported Radial Basis functions. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, Volume 60, pp. 123-136.
 36. **Liu L.-W., Hong H.-K.** Clifford Algebra Valued Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasticity. // *Applied Mathematical Modelling*, 2018, Volume 54, pp. 246-267
 37. **Pourasghar A., Chen Z.** Thermoelastic Response of CNT Reinforced Cylindrical Panel Resting on Elastic Foundation Using Theory of Elasticity. // *Composites Part B: Engineering*, 2016, Volume 99, pp. 436-444.
 38. **Qu Y., Meng G.** Dynamic Analysis of Composite Laminated and Sandwich Hollow Bodies of Revolution Based on Three-Dimensional Elasticity Theory. // *Composite Structures*, 2014, Volume 112, pp. 378-396.
 39. **Sakihara K., Matsubara H., Edo T.-A., Yagawa G.** Multi-Dimensional Moving

- Least Squares Method Applied to 3D Elasticity Problems. // *Engineering Structures*, 2013, Volume 47, pp. 45-53.
40. **Salehipour H., Nahvi H., Shahidi A.R.** Exact Closed-Form Free Vibration Analysis for Functionally Graded Micro / Nano Plates Based on Modified Couple Stress and Three-Dimensional Elasticity Theories. // *Composite Structures*, 2015, Volume 124, pp. 283-291.
41. **Shaban M., Alibeigloo A.** Three-Dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with Corrugated Cores by Using Energy Method. // *Thin-Walled Structures*, 2017, Volume 119, pp. 404-411.
42. **Shariyat M., Asemi K.** Uniaxial and Biaxial Post-Buckling Behaviors of Longitudinally Graded Rectangular Plates on Elastic Foundations According to the 3D Theory of Elasticity. // *Composite Structures*, 2016, Volume 142, pp. 57-70.
43. **Wang B., Xia K., Wei G.-W.** Second Order Method for Solving 3D Elasticity Equations With Complex Interfaces. // *Journal of Computational Physics*, 2015, Volume 294, pp. 405-438.
44. **Wang Q., Zheng J.J., Miao Y., Lv J.H.** The multi-domain hybrid boundary node method for 3D elasticity. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, Volume 35, Issue 6, pp. 803-810.
45. **Wang Y., Wang Q., Wang G., Huang Y., Wang S.** An Adaptive Dual-Information FMBEM for 3D Elasticity and its GPU Implementation. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, Volume 37, Issue 2, pp. 236-249.
46. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
47. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** Finite Elements and Approximation. Dover Publications, 2006, 352 pages.
48. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.
49. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.
-
- Акимов Павел Алексеевич, академик РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор Департамента архитектуры и строительства Российского университета дружбы народов; профессор кафедры строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета; 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; Email: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; советник информационно-издательского отдела, Российская академия архитектуры и строительных наук, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; Email: NegrozovOA@mgsu.ru.
- Pavel A. Akimov, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor; Executive Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Vice-Director for Science Activities, Scientific Research Center “StADyO”; Professor of Department of Architecture and Construction, Peoples’ Friendship University of Russia; Professor of Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; Advisor to Editorial and Publishing; 26, Yaroslavlshoshe, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: NegrozovOA@mgsu.ru.