

## АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЧИН И МЕХАНИЗМОВ РАЗРУШЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ

*Е.М. Зверяев<sup>1</sup>, Е.А. Ларионов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, РОССИЯ

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, РОССИЯ

**Аннотация:** С целью лучшего понимания волновых свойств уравнения Тимошенко произведен вывод уточненного уравнения из уравнений плоской задачи теории упругости для длинной полосы. Для вывода используется метод простых итераций включающий в себя в задачах теории упругости известные методы: полуобратный метод Сен-Венана и оператор Пикара. В соответствии с полуобратным методом задается часть неизвестных, которые трактуются как величины начального (нулевого) приближения. По ним производятся вычисления с помощью последовательности из четырех операторов Пикара таким образом, что выходные данные одного оператора являются входными для следующего. Вычислив таким образом все искомые неизвестные в нулевом приближении путем прямого интегрирования по поперечной координате, вычисляются величины начального приближения в первом приближении. Эти величины являются малыми второго порядка по безразмерной толщине. Выражения для неизвестных получаются как степенные функции от поперечной координаты и как функции производных по продольной координате. В силу теоремы Банаха о неподвижной точке процесс вычисления является асимптотически сходящимся. После этого выполняются граничные условия на длинных сторонах с помощью производных от производных интегрирования, зависящих только от продольной координаты. Отсюда получаются обыкновенные дифференциальные уравнения для определения этих производных функций. В свою очередь постоянные интегрирования последних уравнений могут быть найдены из условий на коротких сторонах полосы. Обыкновенные дифференциальные уравнения расщепляются на уравнения для медленно изменяющихся и быстро изменяющихся величин. Медленно изменяющиеся величины дают классическое решение колебаний балки. Быстро изменяющиеся дают возмущенные решения, описывающие высокочастотные колебания и сингулярно возмущенные волновые решения для сосредоточенных в пространстве и времени воздействий. Часть таких решений отсутствует в уравнении Тимошенко. Предполагается, что выделенные сдвиговые волны провоцируют в зданиях, подверженных быстрым воздействиям (тараны самолетом, взрывы, сейсмические подвижки основания) обрывы связей междуэтажных перекрытий с последующим прогрессирующим обрушением.

**Ключевые слова:** уравнение Тимошенко, плоская задача теории упругости, полуобратный метод, классическое решение, волна, быстрые воздействия, сингулярные решения, прогрессирующее обрушение

## ANALYSIS OF POSSIBLE CAUSES AND MECHANISMS OF DESTRUCTION OF BUILDING STRUCTURES

*Evgeniy M. Zveryayev<sup>1</sup>, Evgeniy A. Larionov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

<sup>2</sup> National Research Moscow State Building University, Moscow, RUSSIA

**Annotation:** In order to better understand the wave properties of the Timoshenko equation, the derivation of the refined equation from the equations of the plane elasticity problem for a long band is carried out. The simple iterations method is used for the derivation. It includes known methods: the semi-inverse method of Saint-Venant and Picard operator. In accordance with the semi-inverse method, a part of the unknowns is defined, which are interpreted as the values of the initial (zero) approximation. Proceeding from them, a sequential computation is carried out using a sequence of the four Picard operators in such a way that the outputs of the one operator are the inputs for the next. Calculating in this way all the unknowns in the zeroth approximation by the direct inte-

gration over the transverse coordinate, the values of the initial approximation are calculated in the first approximation. These quantities are small of the second order with respect to the dimensionless thickness. Expressions for the unknowns are obtained as power functions of the transverse coordinate and as a function of the derivatives along the longitudinal coordinate. By the Banach fixed point theorem, the computation process is asymptotically convergent one. After this, boundary conditions on the long sides are satisfied by means of the derivatives of the arbitrariness, depending only on the longitudinal coordinate. This gives us the ordinary differential equations for the determination of these arbitrary functions. In turn, the integration constants of the last equations can be found from the conditions on the short sides of the strip. The ordinary differential equations are split into equations for slowly varying and quickly varying quantities. The slowly changing values give the classical solution of the beam oscillations. The quickly varying solutions give the perturbed solutions describing high-frequency oscillations and singularly perturbed wave solutions for time-concentrated effects. Some of these solutions are absent in the Timoshenko equation. It is assumed that the selected shear waves provoke in the buildings subjected to the rapid impacts (shock by airplane, explosions, and seismic movements of the base) the interruptions of interlayers between the floors and subsequent progressive collapse.

**Keywords:** Timoshenko equation, plane elasticity problem, semi-inverse method, classic solution, wave, fast effects, singular solutions, progressive collapse

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование различных сооружений и конструкций проводится исходя из некоторой идеализированной схемы объекта. Реальные сооружения и конструкции имеют разнообразные физические свойства и несовершенства всякого рода, не в полной мере поддающиеся теоретическому описанию. Для математического анализа и расчета необходима ясность схемы и какое-то конечное число выделенных для учета исходных свойств, которое не охватывает все множество свойств реального объекта, но включает в себе главное. Только в силу этого возможно математическое описание объекта и понимание. Такая расчетная модель нужна как при проектировании объекта, так и при наличии существующего объекта, когда на основании его поведения при разрушении нужно выбрать уточненную расчетную схему, лучше отражающую механические свойства этого объекта. Особенно это важно в случае тонкостенных систем, обладающих повышенным уровнем деформативности.

Существующие силовые воздействия на тонкостенные сооружения можно как нагрузки по лицевым поверхностям разделить на три вида по признаку изменяемости:

- медленноменяющиеся распределенные;
- быстроменяющиеся распределенные;

– локальные (сосредоточенные).

Медленноменяющиеся состояния (решения) также называют Сен-Венановыми, поскольку они в большинстве случаев описываются полиномами или другими похожими простыми функциями. Нахождение таких решений не вызывает больших трудностей в силу заранее известного их поведения. Нахождение решений при быстроменяющихся и локальных нагрузках связывается с теориями типа Тимошенко. Считается, что эти теории позволяют соответствующим образом описать их воздействие на тонкостенную систему. Наибольший интерес представляют задачи связанные также с быстрыми во времени воздействиями: сейсмическими – на основание сооружения, поверхностными взрывными и сосредоточенными.

Уравнению Тимошенко посвящено большое количество исследований. Обзор работ, использующих это уравнение, содержится в статьях [1-3]. Вывод уравнения типа Тимошенко с учетом рассеяния энергии дан в работе [4]. Традиционно уравнения типа Тимошенко выводятся исходя из уравнений равновесия для балки в усилиях и моментах. Считается, что продольные напряжения распределены по высоте балки линейно, а касательные равномерно. Однако поскольку последнее положение не соответствует действительности, а из статической теории балок

известно, что касательные напряжения распределены по параболе, вводится поправочный коэффициент  $k' < 1$ . Существуют исследования посвященные определению этого коэффициента, например [6-8]. Изучаются вопросы существования поперечных волн, их фазовые скорости и дисперсионные соотношения, наличие «двух спектров» собственных частот [4, 8]. Аспекты волн и колебаний балки также рассматривались в ряде работ исходя из балочных представлений [9-13].

Мы здесь не претендуем на полное представление работ по динамике балки Тимошенко, а приводим только примеры работ, использующие балочное приближение в усилиях и моментах. Настоящее исследование ставит себе цель произвести анализ динамических свойств длинной полосы с помощью уравнений плоской задачи теории упругости в напряжениях и перемещениях без традиционных гипотез. Вывод уточненного уравнения Тимошенко из уравнений теории упругости произведен в работе [14] на основе принципа сжатых отображений методом простых итераций. Какие-либо гипотезы о распределении перемещений и напряжений по толщине полосы не используются.

В связи с развитием численных методов расчета конструкций имеется необходимость качественных исследований уравнений состояния тонкостенных элементов с тем, чтобы увеличить возможности осмысления физического смысла численных результатов.

## 1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Фридрихс называет явления, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания, асимптотическими [15]. Большинство дифференциальных уравнений механики и физики обладает такими решениями, и интересна задача изучения тех черт этих уравнений, которые делают такие быстрые перехо-

ды возможными. Понижение порядка дифференциального уравнения в сочетании с потерей граничного условия, является характерной чертой асимптотического явления. Цель асимптотического анализа задачи заключается в подробном описании решения граничной задачи внутри переходного слоя. Потребность в таких уточненных теориях связана с несколькими причинами. Во-первых, уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории. Существует мнение, что настоящее понимание теории возникает после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории тонкостенных систем позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классических теорий. Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классических моделей. Классическая теория учитывает "грубые" эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния, и для того чтобы разобраться в них зачастую достаточно физической интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий последовательных в смысле учёта всех малых одного порядка, крайне трудно сделать, руководствуясь только физической интуицией и не располагая регулярными методами [1].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого впечатления лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось в некоторой степени на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений без использования уравнений теории упругости. Однако, если все эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек, строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, являющимся методом построения решения,

удовлетворяющим принципу сжатых отображений, различие исчезает.

Истоки идеи метода простых итераций в теории упругости просматриваются в полуобратном методе Сен-Венана. «Сен-Венану принадлежит заслуга приведения проблемы кручения и изгиба балок в связь с общей теорией. Он учитывал трудность нахождения общих решений и настоятельную необходимость получения в практических целях какой-либо теории, которая могла бы служить для определения деформаций в сооружениях; ему было вполне ясно также, что только в очень редких случаях можно знать точное распределение нагрузки, приложенной к части какой-либо конструкции; это привело его к размышлениям о методах, применявшихся к решению частных задач до того, как были получены общие уравнения. Таким образом, он пришел к изобретению полуобратного метода, который носит его имя. Многие из обычных допущений и выводов, оказываются верными, по крайней мере, в большинстве случаев; следовательно, сохраняя некоторые из этих допущений и выводов, можно упростить уравнения и получить их решения; правда, пользуясь этими решениями, мы не можем удовлетворить любым наперед заданным граничным условиям; однако же граничные условия практически наиболее важного типа могут быть удовлетворены» [16].

Если метод Сен-Венана трактовать, придавая «обычным допущениям и выводам» роль величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по этим остальным вычислить поправку к величинам начального приближения и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости предположений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс конечно нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-

Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба стержня, нетрудно оценить сходимость вычислений к некоторому решению с помощью асимптотических рассуждений используя наличие малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом, приходим к принципу сжатых отображений, теореме Банаха о неподвижной точке и методу простых итераций.

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений.

Отображение  $y = Ay$  метрического пространства  $M$  в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число  $\varepsilon < 1$ , что для любых двух точек  $x, y \in M$  выполняется условие  $\rho(Ax, Ay) \leq \varepsilon \rho(x, y)$ .

Точка  $y$  называется неподвижной точкой отображения, если  $y = Ay$ . Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения  $y = Ay$ . Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения  $y_{(0)}$ . Если оператор  $A$  является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению  $y$  независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения  $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \dots$  находятся с помощью формулы  $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$ .

Используемый в настоящей работе метод простых итераций близок к методу, встречающемуся в литературе под названием метода последовательных приближений Пикара-Линделефа для решения дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , разрешенного относительно производной [17]. Это дифференциальное уравнение с условием

$y(t_0) = y_0$  равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y(t))] dt + y_0$$

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y_{(n)}(t))] dt + y_0$$

Метод позволяет построить последовательность функций  $y_{(n)}(t)$ , сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими. Очевидно, что метод Пикара-Линделефа является частным случаем метода простых итераций для дифференциального уравнения первого порядка.

В настоящей работе метод простых итераций применяется для построения уравнений деформирования тонкой полосы из общих уравнений теории упругости, содержащих в себе малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода простых итераций.

Заметим, что метод простых итераций не регламентирует процедуру выполнения начальных или граничных условий. Важно достаточно или нет произволов интегрирования для выполнения всех граничных условий.

## 2. ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННАЯ ПОЛОСА. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Длинную прямоугольную полосу отнесем к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$ . Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагру-

жены. Уравнения движения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в виде:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0$$

– соотношения упругости

$$\sigma_x^* = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma$$

$$\sigma_z^* = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x)$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}$$

Здесь использованы традиционные обозначения теории упругости. Звездочки указывают на то, что координаты и отмеченные ими искомые величины размерные. Введем безразмерные величины: безразмерные координаты  $x = x^*/l$ ,  $z = z^*/h$ , безразмерные перемещения  $u = u^*/h$ ,  $w = w^*/h$ , безразмерные напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^*/E$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ ,  $\tau = \tau^*/E$  и безразмерное время  $t = t^*/T$ , в котором  $T$  – некоторое характерное время, определенное ниже. Безразмерные уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = \eta^2 \ddot{u}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = \eta^2 \ddot{w}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma$$

$$\sigma_z = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}$$

где  $\varepsilon = h/l$  и

$$\eta^2 = \frac{\rho h^2}{ET^2} \quad (1)$$

– малые параметры, перепишем в таком порядке

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} + \eta^2 \ddot{w} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_x = \varepsilon_x + \nu \sigma_z \\ \varepsilon_z &= (1-\nu^2)\sigma_z - \nu \varepsilon_x \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \eta^2 \ddot{u} \end{aligned} \quad (2)$$

чтобы, задав две функции  $w_{(0)}$  и  $\tau_{(0)}$  в качестве начального приближения, вычислить остальные искомые неизвестные последовательно по следующей схеме:

$$\begin{aligned} (w = w_{(0)}, \tau = \tau_{(0)}) &\Rightarrow (u_{(0)}, \sigma_{z(0)}) \Rightarrow \\ (w_{(1)}, \tau_{(1)}) &\Rightarrow (\varepsilon_{x(0)}, \sigma_{x(0)}, \varepsilon_{z(0)}) \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [14] введено понятие о  $w$ ,  $\tau$  и 0-процессах, позволяющих построить решение системы (2) по схеме (3). Если выбрать в качестве начального приближения функции, задающие прогиб и касательное напряжение не зависящим от координаты  $z$ , т.е. принять

$$w = w_0(x), \quad \tau = \tau_0(x) \quad (4)$$

Процесс вычисления всех неизвестных производится по такой последовательности уравнений

$$\frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n)}, \quad \frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{(n)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{(n)}, \quad \frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x} \\ \varepsilon_{x(n)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x}, \quad \sigma_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} + \nu \sigma_{z(n)} \\ \varepsilon_{z(n+1)} &= (1-\nu^2)\sigma_{z(n)} - \nu \varepsilon_{x(n)}, \quad \frac{\partial w_{(n+1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n+1)} \\ \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x}, \quad \gamma_{(n+1)} = 2(1+\nu)\tau_{(n+1)} \end{aligned}$$

дающей все компоненты полного НДС в любом приближении. Уравнения для вычисления искомых величин в нулевом приближении выглядят так

$$\begin{aligned} w_{(0)} &= w_0(x), \quad \tau_{(0)} = \tau_0(x) \\ u_{(0)} &= -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x) \\ \sigma_{z(0)} &= \int \left( -\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + m^2 \ddot{w}_0 \right) dz + \sigma_{z0}(x) \\ \varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x}, \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)} \\ \varepsilon_{z(0)} &= (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)} \\ w_{(1)} &= w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz \\ \tau_{(1)} &= \int \left( -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x0}}{\partial x} + m^2 \ddot{u}_0 \right) dz \end{aligned} \quad (5)$$

Отмеченные нулем без скобок в индексе величины являются произволами интегрирования. Четыре произвола интегрирования  $w_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma_{z0}$ ,  $u_0$  должны быть определены из граничных условий на длинных сторонах полосы. Легко видеть, что интегральные выражения являются операторами Пикара. Таким образом, сложный оператор четвертого порядка по координате  $z$  расщеплен на последовательность простых интегральных операторов. Вычисления производятся таким образом, что выходные величины одного оператора являются входными для следующего. Все вычисленные величины являются непрерывными функциями.

В силу линейности задачи начальное приближение может быть разложено на два:

$$\begin{aligned} w &= w_0(x), \tau = \tau_0 = 0 \\ w &= w_0 = 0, \tau = \tau_0(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Величины начального приближения в первом случае совпадают с гипотезами Кирхгоффа

$$\varepsilon_z = 0, \gamma = \gamma_0 = \tau_0 = 0$$

Итерационный процесс вычисления неизвестных при таком начальном приближении назван  $w$ -процессом. Искомые величины нулевого приближения (и  $w$ ,  $\tau$  – нулевого и первого), вычисленные при таких значениях заданных начальных величин, записываются так:

$$\begin{aligned} w &= w_0(x), \tau_{(0)} = \tau_0 = 0, u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z \\ \sigma_{z(0)} &= \eta^2 \ddot{w}_{(0)} z, \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z \\ \sigma_{x(0)} &= (-\varepsilon^2 w_0'' + \nu \eta^2 \ddot{w}_0) z \\ \varepsilon_{z(0)} &= \left[ (1-\nu^2) \eta^2 \ddot{w}_0 + \nu \varepsilon^2 w_0'' \right] z \\ w_{(1)} &= \left[ (1-\nu^2) \eta^2 \ddot{w}_0 + \nu \varepsilon^2 w_0'' \right] \frac{z^2}{2} \\ \tau_{(1)} &= \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu) \varepsilon \eta^2 \ddot{w}_0' \right] \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

Найдем неизвестные во втором итерационном  $\tau$ -процессе

$$\begin{aligned} w_{(0)} &= w_0 = 0, \tau_{(0)} = \tau_0(x) \\ u_{(0)} &= 2(1+\nu) \tau_0 z, \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_0' z \\ \varepsilon_{x(0)} &= 2(1+\nu) \varepsilon \tau_0' z, \sigma_{x(0)} = (2+\nu) \varepsilon \tau_0' z \\ \varepsilon_{z(0)} &= -(1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' z, w_{(1)} = -(1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \frac{z^2}{2} \\ \tau_{(1)} &= \left[ -(2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu) \eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

Этот процесс можно сравнить с учетом сдви-

га в теории Тимошенко.

Вычисление произволов интегрирования  $w_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma_{z0}$ ,  $u_0$  и операции с ними выделим в 0-процесс

$$\begin{aligned} w_{(0)} &= w_0 = 0, \tau_{(0)} = \tau_0 = 0, u_0 = u_0(x) \\ \sigma_{z0} &= \sigma_{z0}(x), \varepsilon_{x0} = \varepsilon u_0', \sigma_{x0} = \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} \\ \varepsilon_{z(0)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z0} - \nu \varepsilon u_0' \\ w_{(1)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z0} - \nu \varepsilon u_0' \\ \tau_{(1)} &= (-\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0) z \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихом обозначена операция дифференцирования по  $x$ .

Вычисленные в трех процессах искомые перемещения и напряжения должны быть просуммированы. Имеем формулы

$$\begin{aligned} w &\approx \left[ (1-\nu^2) \eta^2 \ddot{w}_0 + \nu \varepsilon^2 w_0'' \right] \frac{z^2}{2} - \\ &-(1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \frac{z^2}{2} + \left[ (1-\nu^2) \sigma_{z0} - \nu \varepsilon u_0' \right] + w_0 \\ u &\approx -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu) \tau_0 z + u_0 \\ \sigma_x &\approx (-\varepsilon^2 w_0'' + \nu \eta^2 \ddot{w}_0) z + \\ &+(2+\nu) \varepsilon \tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} \\ \tau &\approx \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu) \varepsilon \eta^2 \ddot{w}_0' - \right. \\ &\left. -(2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu) \eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{z^2}{2} + \\ &+ \left( -\varepsilon^2 u_0'' - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0 \right) z + \tau_0 \\ \sigma_z &\approx - \left[ \varepsilon^4 w_0'''' - (1+\nu) \varepsilon^2 \eta^2 w_0'' - (2+\nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right. \\ &\left. + 2(1+\nu) \varepsilon \eta^2 \ddot{\tau}_0' \right] \frac{z^3}{6} + \\ &- \left( \varepsilon^3 u_0''' - \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + \varepsilon \eta^2 \ddot{u}_0' \right) \frac{z^2}{2} + \\ &+ \left( -\varepsilon \tau_0' + \eta^2 \ddot{w}_0 \right) z + \sigma_{z0} \end{aligned} \quad (7)$$

Неизвестные записаны в форме полиномов по степеням координаты  $z$  и малого параметра  $\varepsilon$  и определяются функциями  $w_0, \tau_0, \sigma_{z0}, u_0$ . Они в свою очередь зависят от граничных условий на длинных сторонах полосы при  $z = \pm 1$  и на концах  $x = 0; 1$ .

### 3. ВЫПОЛНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДЛИННЫХ СТОРОНАХ ПОЛОСЫ

На лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$  надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими

$$\begin{aligned} \sigma_z^* &= Z_+, \tau^* = X_+ \text{ при } z^* = h^* \\ \sigma_z^* &= Z_-, \tau^* = X_- \text{ при } z^* = -h^* \end{aligned}$$

В безразмерном виде эти условия записываются так

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Z_+, \tau = X_+ \text{ при } z = 1 \\ \sigma_z &= Z_-, \tau = X_- \text{ при } z = -1 \end{aligned}$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость  $E$ . Условия будем выполнять величинами первого приближения, считая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины, т.е.

$$\tau \approx \tau_{(0)} + \tau_{(1)}, \sigma_z \approx \sigma_{z(0)} + \sigma_{z(1)}.$$

На основании формул (7) запишем выражения для напряжений, на которые накладываются условия на длинных сторонах

$$\begin{aligned} &\left[ \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + \right. \\ &\left. + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{1}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left( -\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0 \right) + \tau_0 = X_+ \\ &\left[ \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + \right. \\ &\left. + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 \right] \frac{1}{2} - \\ &- \left( -\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0 \right) + \tau_0 = X_- \\ &- \left[ \varepsilon^4 w_0^{IV} - (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^2 w_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + \right. \\ &\left. + 2(1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{\tau}_0' \right] \frac{1}{6} - \\ &- \left( \varepsilon^3 u_0''' - \nu\varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + \varepsilon\eta^2 \ddot{u}_0' \right) \frac{1}{2} + \\ &+ \left( -\varepsilon\tau_0' + \eta^2 \ddot{w}_0 \right) + \sigma_{z0} = Z_+ \\ &\left[ \varepsilon^4 w_0^{IV} - (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^2 w_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + \right. \\ &\left. + 2(1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{\tau}_0' \right] \frac{1}{6} \\ &- \left( \varepsilon^3 u_0''' - \nu\varepsilon^2 \sigma_{z0}'' + \varepsilon\eta^2 \ddot{u}_0' \right) \frac{1}{2} - \\ &- \left( -\varepsilon\tau_0' + \eta^2 \ddot{w}_0 \right) + \sigma_{z0} = Z_- \end{aligned}$$

Складывая и вычитая попарно эти выражения, получаем уравнения

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \eta^2 \ddot{u}_0 &= \frac{1}{2}(X_+ - X_-) \\ -\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2 \sigma_{z0}'' - \varepsilon\eta^2 \ddot{u}_0' + 2\sigma_{z0} &= Z_+ + Z_- \end{aligned} \quad (8)$$

относительно неизвестных  $\sigma_{z0}, u_0$  и уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + \\ + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 &= X_+ + X_- \\ -\varepsilon^4 w_0^{IV} + (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^2 \ddot{w}_0'' + \\ + 6\eta^2 \ddot{w}_0 + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' - \\ - 2(1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' &= 3(Z_+ - Z_-) \end{aligned} \quad (9)$$

относительно неизвестных  $w_0, \tau_0$ . Уравне-

ния (8) описывают продольные и поперечные деформации растяжения-сжатия. Уравнения (9) описывают задачу изгиба с учетом инерции вращения элемента и сдвига. Если первое уравнение системы (9) умножить на  $\varepsilon$ , продифференцировать по  $x$

$$\varepsilon^4 w_0^{IV} - (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^2 \ddot{w}_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + 2(1+\nu)\varepsilon \eta^2 \ddot{\tau}_0' + 2\varepsilon \tau_0' = \varepsilon(X_+' + X_-'')$$

и сложить со вторым, получим соотношение

$$\varepsilon \tau_0' = \frac{3}{2} \eta^2 \ddot{w}_0 - \frac{3}{4} (Z_+ - Z_-) - \frac{1}{4} \varepsilon (X_+' + X_-'')$$

При отсутствии нагрузки, т.е. считая

$$Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0,$$

внесем величину

$$\varepsilon \tau_0' = \frac{3}{2} \eta^2 \ddot{w}_0 \quad (10)$$

во второе уравнение системы (9). Получим уравнение

$$\frac{2}{3} \left[ \varepsilon^4 w_0^{IV} - \left(4 + \frac{5}{2}\nu\right) \varepsilon^2 \eta^2 \ddot{w}_0'' + 3(1+\nu) \eta^4 \ddot{w}_0 \right] + 2\eta^2 \ddot{w}_0 = 0 \quad (11)$$

которое сравним с известным уравнением Тимошенко [5]

$$EI \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y^*}{\partial t^{*4}} + \rho F \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = 0$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

– модуль сдвига,  $k'$  – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $\rho$  – масса единицы длины балки,  $y^*$  – прогиб,  $I$  – момент инерции поперечного сечения. Имеются различные рекомендации по выбору величины коэффициента  $k'$ : для прямоугольного поперечного сечения используется значение 0.833, а также значение  $2/3$  и значение  $3/4$  для круглого сечения; указывалось  $\pi^2/12$ , но также допускались значения  $5/6$  и  $5/(6-\nu)$  [6]. Приведенное к безразмерному виду уравнение

$$\frac{2}{3} \left[ \varepsilon^4 y^{IV} - (4+3\nu) \varepsilon^2 \eta^2 \ddot{y}'' + 3(1+\nu) \eta^4 \ddot{y} \right] + 2\eta^2 \ddot{y} = 0$$

где  $y = y^*/h$ ,

в случае прямоугольного сечения балки

$$(I = 2bh^3/3, F = 2bh)$$

при  $k' = 2/3$ , как это рекомендовалось [5], по существу совпадает с уравнением (11). При наибольшем из рекомендуемых значений  $k' = 5/6$  различие будет больше. В то же время можно показать, что уравнение (11) получено для правильного параболического распределения касательных напряжений по высоте с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ .

**Замечание 1.** Подстановка формулы (10) во второе уравнение системы (9) является ошибочной операцией, поскольку система имеет пятый порядок относительно величины  $\tau_0$  и четвертый после дифференцирования первого уравнения относительно  $\tau_0'$ . Это означает, что, по крайней мере, не меньше четырех решений в подстановке (10) потеряно. Отсюда следует, что для получения уравнения Тимошенко из двумерных уравнений надо

совершать неправильные операции. На неэквивалентность перехода от системы уравнений в частных производных к одному уравнению указывал Р. Курант [18].

**Замечание 2.** Первое уравнение системы (9) содержит операторы

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0'; \\ &-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0. \end{aligned}$$

Соответствующие первому однородное уравнение

$$\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{w}_0' = 0$$

имеет медленноменяющееся решение, тогда как уравнение

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\eta^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = 0,$$

содержащее малые параметры  $\varepsilon$  и  $\eta$  при производных, имеет быстроменяющееся решение.

Второе уравнение также состоит из двух операторов, которым соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^4 w_0^{IV} + (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^2 \ddot{w}_0'' + 6\eta^2 \ddot{w}_0 = 0; \\ &(2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' - 2(1+\nu)\varepsilon\eta^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' = 0. \end{aligned}$$

Здесь также первое уравнение имеет медленноменяющиеся решения, второе – быстроменяющиеся. Из первого также следует оценка  $\eta^{s^2} \sim \varepsilon^4$ , из второго –  $\eta^{q^2} \sim \varepsilon^2$ . В формуле (1) эти величины будут определяться так:

$$\eta^{s^2} = \frac{\rho h^2}{ET^{s^2}}; \quad \eta^{q^2} = \frac{\rho h^2}{ET^{q^2}},$$

где  $T^s$  и  $T^q$  – периоды поперечных и продольных колебаний соответственно.

#### 4. РАСЩЕПЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (9)

Медленноменяющиеся решения обладают свойством малой изменяемости, означающим, что при дифференцировании по аргументам асимптотический порядок искомой величины не меняется, т.е. можно написать [19]

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon^0.$$

Быстроменяющиеся функции при дифференцировании увеличиваются в  $\varepsilon^{-1}$  раз. Соответственно можно написать асимптотическую оценку применения символов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon^{-1}.$$

В соответствии с этим запишем уравнения (9) для медленных величин

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 w_0^{s''' } - (1+\nu)\varepsilon\eta^{s^2} \ddot{w}_0^{s' } + 2\tau_0^s = X_+^s + X_-^s \\ &-\varepsilon^4 w_0^{s^{IV}} + (1+\nu)\varepsilon^2 \eta^{s^2} \ddot{w}_0^{s'' } + 6\eta^{s^2} \ddot{w}_0^s - 6\varepsilon\tau_0^{s' } = \\ &= 3(Z_+^s - Z_-^s) \end{aligned}$$

Вторые члены в этих уравнениях на основании оценок, полученных в Замечании 2, могут быть отброшены как  $O(\varepsilon^2)$  по сравнению с первыми. После этого, исключив  $\tau_0$  из второго уравнения с помощью первого, получим уравнение для медленной функции  $w_0^s$

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{s'''' } + 2\eta^{s^2} \ddot{w}_0^s = Z_+^s - Z_-^s + \varepsilon(X_+^{s' } + X_-^{s' }) \quad (12)$$

При отсутствии продольной нагрузки это уравнение совпадает с классическим уравнением поперечных колебаний балки.

Быстроменяющиеся величины удовлетворяют уравнениям

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2(1+\nu)\eta^{q^2}\ddot{\tau}_0^q + 2\tau_0^q = X_+^q + X_-^q \quad (13)$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 2(1+\nu)\varepsilon\eta^{q^2}\ddot{\tau}_0^{q'} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = 3(Z_-^q - Z_+^q) \quad (14)$$

При приложении сосредоточенных нагрузок первое уравнение описывает распространение волны разрыва, спровоцированное тангенциальной нагрузкой, а второе – нормальной.

Рассмотрим случай приложения сосредоточенной силы

$$3(Z_-^q - Z_+^q) = \delta(x-c)\varphi(t)$$

в точке  $0 < c < 1$ . Функция  $\varphi$  показывает изменение силы во времени,

$$X_+^q = X_-^q = 0.$$

Проинтегрируем уравнение (14)

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 2(1+\nu)\varepsilon\eta^{q^2}\ddot{\tau}_0^{q'} - 6\varepsilon\tau_0^{q'} = \delta(x-c)\varphi(t)$$

по  $x$  в пределах от 0 до  $x$ . Получим

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0 + 6\tau_0 = C$$

при  $0 \leq x < c$

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0 + 6\tau_0 = P\theta(c)\varphi(t) + C$$

при  $c < x \leq 1$ .

Здесь  $\theta$  – функция Хэвисайда. Поскольку  $\theta$  везде на отрезке  $[0, 1]$  кроме точки  $c$  постоянная величина, частное решение находится из уравнения

$$2(1+\nu)m^2\ddot{\tau}_0 + 6\tau_0 = P\theta(c)\varphi(t) \quad (15)$$

описывающего распространение скачка касательного напряжения в виде функции Хэвисайда со скоростью

$$a = \frac{T}{h} \left( \frac{1+\nu}{3} \frac{\rho}{E} \right)^{-1/2} \quad (16)$$

Физический смысл этого уравнения поясним на примере удара по балке с жестко заземленными краями (Рис. 1).

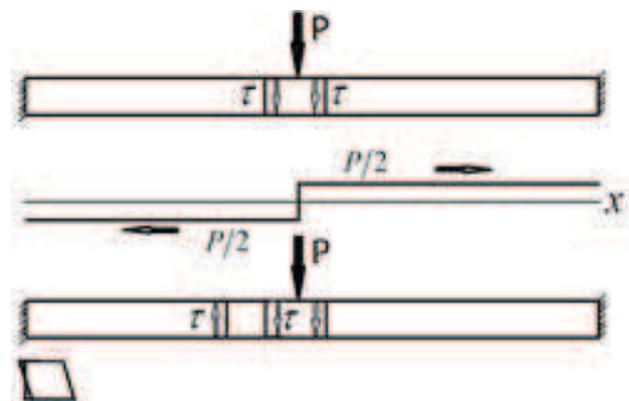


Рисунок 1. Пример удара по балки с жестко заземленными краями.

Выделим мысленно из балки элемент некоторой длины под силой  $P$ . Этот элемент, будучи нагруженным силой  $P$ , нагружает левую и правую части балки касательным напряжением  $\tau$ . Скачки напряжения движутся от места приложения силы к опорам. Поскольку движущиеся элементы балки искривлены сдвигом, так как это показано внизу рисунка, при вступлении элемента в контакт с опорой в ней возникает усилие, стремящее совершить поворот концевой элемента, провоцирующего прогиб балки вниз. Волна, пробежав по балке несколько, может быть 5–10 [20] раз, затухнет. Поскольку скорость волны велика и соответствующее время ее пробега  $T^q$  в  $\varepsilon^{-1}$  меньше периода порождаемых ею поперечных колебаний  $T^s$ , наблюдаемые поперечные колебания существенно запаздывают относительно момента удара.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим теперь полученные результаты исследования и применим их через выяснение механического смысла для построения модели прогрессирующего разрушения.

Показано, что известное уравнение Тимошенко, рекомендуемое для расчетов балок при высокоскоростных воздействиях, может быть получено путем сведения двух уравнений в одно с потерей быстроменяющейся компоненты. Такие явления известны [18]. Система уравнений (9) расщепляется на три уравнения: одно из них параболического типа совпадает с классическим уравнением низкочастотных колебаний балки под действием медленно меняющихся нагрузок, два других гиперболического типа описывают возникающие в полосе высокочастотные колебания и волны под действием быстроменяющихся распределенных или сосредоточенных нагрузок. В случае поперечного удара по высотному зданию волна сдвига волна (15) будет двигаться в обе стороны от места удара, вполне возможно разрушая, вообще говоря, некоторые узлы крепления перекрытий этажей к внешним несущим конструкциям здания. В силу высокой скорости распространения волны сдвига это может вызвать прогрессирующее разрушение без видимых поперечных колебаний здания.

Такой вывод подтверждает заключение Федерального Агентства Чрезвычайных Ситуаций (FEMA), которое изучило обстоятельства разрушения башен Всемирного торгового центра (ВТЦ) в Нью-Йорке в мае 2002 года. Агентство признало, что конструкция башен ВТЦ соответствовала требованиям, предъявляемым к прочности конструкции, а разрушение башен объясняется действием экстраординарных факторов, находящихся вне возможностей контроля проектировщиков и строителей. FEMA высказало мнение, что разрушение возможно было вызвано ослаблением конструкций, поддерживающих перекрытия этажей. В тот момент, когда поддерживающие фермы на этажах зоны удара

отделились от центральных опорных колонн, верхние этажи стали падать на нижние, и здание

«сложилось»

<https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1329423>.

Предложенная FEMA версия была впоследствии отвергнута в процессе завершившегося в сентябре 2005 года более детального исследования, произведенного Национальным институтом стандартов и технологии (NIST). Так же как и FEMA, NIST не имел претензий к конструкции башен ВТЦ, отмечая, что сами атаки, а так же величина нанесенных зданиям повреждений были далеко за пределами всего того, что когда-либо происходило в США. NIST объяснил разрушение башен тем, что оседающий пол (точнее, перекрытие) загнул внутрь внешние колонны здания, что вызвало обрушение верхних этажей.

Однако, можно предположить, что ослабление креплений конструкций, поддерживающих перекрытия этажей и оседающий пол явилось следствием волны сдвига. Таким образом, следует считать, что FEMA и NIST говорят одно и то же.

Поскольку выделенные в работе элементарные движения описываются простыми уравнениями, интегралы которых могут быть записаны в замкнутом виде, мы имеем возможность выполнять любые граничные условия на длинных сторонах и торцевых, в том числе условия сопряжения.

Подобные рассуждения можно применить и к случаю сейсмического воздействия на основание здания и сооружения. Быстрая подвижка основания приводит к искажению формы непосредственно к нему примыкающего элемента здания, рассматриваемого как балка. Далее происходит движение волны типа (15) вверх по зданию и при отражении от верхнего конца возможны повреждения в его верхней части. Кроме того, возможны искажения элемента стены здания, непосредственно примыкающего к основанию. Это будет второй возможной моделью для прочностного расчета, применимой и к невысоким зданиям.

Уравнения движения (8) здесь не рассмотрены. Они тоже имеют волновой характер, и им отвечает равномерно распределенная по толщине продольная волна или продольные колебания, в зависимости от вида заданной нагрузки, отсутствующие в уравнении Тимошенко.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. // Механика твердых деформируемых тел, Т.5, М. 1973, 272 с.
2. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона, №3 (2017); [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2017/4312).
3. Rossihin Yu.A., Shitikova M.V. Transient Response of Thin Bodies Subjected to Impact: Wave Approach. // The shock and vibration digest 2007, 39; No 4, pp. 273-309.
4. Маневич А.И. Поперечные волны в балке Тимошенко из вязко-упругого материала // Theoretical Foundations of Civil Engineering, Warsaw, 2009, XV, pp. 209-216.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Жилин П.А., Ильичева Т.П. Анализ применимости теории типа Тимошенко при сосредоточенном воздействии на пластину // ПМТФ, 1984, № 1, с. 150-156.
7. Hutchinson J.R. Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. // Journal of Applied Mechanics, 68, 2001, pp. 87-92.
8. Kaneko T. On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams. // Journal of Physics D: Applied Physics, 8, 1975, pp. 1927-1936.
9. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ, Т. 12, №3, 1948, с. 287-300.
10. Wang X.Q., So R.M.C. Timoshenko Beam

Theory: A Perspective Based on the Wave-Mechanics Approach. // Wave Motion, 57, 2015, pp. 64-87.

11. Илгамов М.А. Коротковолновая динамика тонких пластин. // Вычислительная механика сплошных сред, Т.5, №2, 2012, с. 134-143.
12. Nesterenko V.V. A Theory of Transverse Vibration of the Timoshenko Beam. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 57, 1993, pp. 669-677.
13. Manevich A.I. Dynamics of Timoshenko Beam on Linear and Nonlinear Foundation: Phase Relations, Significance of the Second Spectrum, Stability. // Journal of Sound and Vibration, 334, 2015, pp. 209-220.
14. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. // ПММ, 2008, Т. 72, Вып. 2, с. 308-321.
15. Friedrichs K.O. Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics. // Bull. Amer. Math. Soc., V. 61, No. 6, 1955, pp. 485-504.
16. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, Univ. Press, 2013, 662 pages.
17. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Akademie Verlag, 1959, 666 pages.
18. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
19. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
20. Батуев Г.С., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.

## REFERENCES

1. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Neklassicheskiye Teorii Kolebaniy Sterzhney, Platin i Obolochek [Non-classical Theories of the Oscillations of Rods, Plates and Shells]. // Itogi Nauki i Tekhniki. Mekhani-

- ka Tverdykh Deformiruyemykh Tel, T.5, M. 1973, 272 pages.
2. **Gusev B.V., Saurin V.V.** O Kolebaniyakh Neodnorodnykh Balok [About oscillations of non-uniform beams]. // *Inzhenernyy vestnik Dona*, No. 3, 2017; ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/431.
  3. **Rosshin Yu.A., Shitikova M.V.** Transient Response of Thin Bodies Subjected to Impact: Wave Approach. // *The shock and vibration digest* 2007, 39; No 4, pp. 273-309.
  4. **Manevich A.I.** Poperechnyye Volny v Balke Timoshenko iz Vyazko-Uprugogo Materiala [Transverse Waves in a Timoshenko Beam from a Viscoelastic Material]. // *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Warsaw, 2009, XV, C. 209–216.
  5. **Timoshenko S., Young D.H., Weaver W.** Kolebaniya v Inzhenernom Dele [Vibration Problems in Engineering]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1985, 472 pages.
  6. **Zhilin P.A., Il'icheva T.P.** Analiz Primenimosti Teorii Tipa Timoshenko pri Sosredotochenom Vozdeystvii na Plastinu [Analysis of the Applicability of Theory of Tymoshenko Type with Concentrated Action on Plate]. // *PMTF*, 1984, No. 1, pp. 150-156.
  7. **Hutchinson J.R.** Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. // *Journal of Applied Mechanics*, 68, 2001, pp. 87-92.
  8. **Kaneko T.** On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams. // *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8, 1975, pp. 1927-1936.
  9. **Uflyand Ya.S.** Rasprostraneniye Voln pri Poperechnykh Kolebaniyakh Sterzhney i Plastin [Wave Propagation Accompanying Transverse Oscillations of Rods and Plates]. // *Applied Mathematics and Mechanics*, Tom 12, No. 3, 1948, pp. 287-300.
  10. **Wang X.Q., So R.M.C.** Timoshenko Beam Theory: A Perspective Based on the Wave-Mechanics Approach. // *Wave Motion*, 57, 2015, pp. 64-87.
  11. **Ilgamov M.A.** Korotkovolnovaya Dinamika Tonkikh Plastin [Short-Wave Dynamics of Thin Plates]. // *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, T.5, No. 2, 2012, pp. 134-143.
  12. **Nesterenko V.V.** A Theory of Transverse Vibration of the Timoshenko Beam. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 57, 1993, pp. 669-677.
  13. **Manevich A.I.** Dynamics of Timoshenko Beam on Linear and Nonlinear Foundation: Phase Relations, Significance of the Second Spectrum, Stability. // *Journal of Sound and Vibration*, 334, 2015, pp. 209–220.
  14. **Zveryaev E.M., Makarov G.I.** Obshchiy Metod Postroyeniya Teoriy Tipa Timoshenko [The General Method for Constructing Timoshenko-Type Theories]. // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Tom 72, No. 2, 2008, pp. 308-321.
  15. **Friedrichs K.O.** Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics. // *Bull. Amer. Math. Soc.*, V. 61, No. 6, 1955, pp. 485-504.
  16. **Love A.E.H.** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge, Univ. Press, 2013, 662 pages.
  17. **Kamke E.** Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Akademie Verlag, 1959, 666 pages.
  18. **Courant R.** Partial differential equations. New York – London, Interscience, 1962.
  19. **Goldenweiser A.L.** Teoriya Tonkikh Uprugikh Obolochek [Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1975, 512 pages.
  20. **Batuev G.S., Golubkov Yu.V., Efremov A.K., Fedosov A.A.** Inzhenernyye Metody Issledovaniya Udarnykh Protsessov [Engineering Methods for Studying Shock Processes]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 240 pages.

---

Зверьяев Евгений Михайлович, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук; 125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4; тел.: +7(499) 978-13-14; факс: +7(499) 972-07-37; E-mail: zveriaev@mail.ru.

Ларионов Евгений Алексеевич, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел./факс: +7(499)183-59-94; +7(495)422-22-89; E-mail: KaferdraIPM@mgsu.ru.

Evheniy M. Zveryayev, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Dr.Sc.; Senior Researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences; Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia; phone: +7(499)978-13-14; fax: +7(499)972-07-37; E-mail: zveriaev@mail.ru.

Evheniy A. Larionov, Professor, Dr.Sc.; Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phones: : +7(499)183-59-94; +7(495)422-22-89; E-mail: KaferdraIPM@mgsu.ru.