DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77

МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Е.Б. Коренева

Московское высшее общевойсковое командное орденов Жукова, Ленина и Октябрьской Революции Краснознаменное училище, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: К решению задач статики и колебаний плит, обладающих цилиндрической анизотропией, применяется метод компенсирующих нагрузок (МКН) [1]. Для получения решений поставленных задач и построения основного и компенсирующего решений используется приём Нильсена, так как при рассмотрении анизотропных тел разрешающее дифференциальное уравнение четвёртого порядка с переменными коэффициентами не удаётся расчленить на два взаимно сопряжённых дифференциальных уравнения второго порядка. Вследствие этого удаётся получить решения в функциях Бесселя и функциях, им родственных. Такой приём может быть использован при рассмотрении задач об осесимметричном, антисимметричном и несимметричном изгибе круглых ортотропных пластин, лежащих на упругом винклеровском основании, а также об осесимметричных колебаниях круглых ортотропных пластин и о колебаниях с одним или несколькими узловыми диаметрами. Решения получаются в замкнутом виде в цилиндрических функциях.

Ключевые слова: ортотропия, круглые пластины, метод компенсирующих нагрузок, функции Бесселя

METHOD OF COMPENSATING LOADS FOR SOLVING OF ANISOTROPIC MEDIUM PROBLEMS

Elena B. Koreneva

Moscow Higher Combined-Arms Command Academy, Moscow, RUSSIA

Abstract: The work applies the method of compensating loads (MCL) for solution of statics and vibrations problems of plates with cylindrical anisotropy. For receiving of basic and compensating solutions Nielsen's equation is used. The solution expressed in terms of Bessel functions is obtained. Such way can be used in consideration of symmetric, antisymmetric and unsymmetric flexure of orthotropic circular plates resting on an elastic Winkler's subgrade. The similar method can be also utilized for examination of the symmetric vibrations of the orthotropic circular plates as well as for the cases of vibrations with one or a few nodal diameters. The solutions are obtained in closed form in terms of the cylindrical functions.

Keywords: orthotropic circular plate, method of compensating loads, Bessel functions

1. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины постоянного сечения, лежащей на упругом винклеровском основании [2]:

$$r^4 \frac{d^4 w}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 w}{dr^3} - n^2 r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + n^2 r \frac{dw}{dr} - \\ - \frac{kw}{Dn_2} r^4 = \frac{qr^4}{Dn_2}. \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жёсткость, k – коэффициент постели основания, σ - Пуассоново отношение.

Используя зависимости

$$E_r = \frac{E}{n_1},\; E_\theta = En_2,\; \sigma_r = \frac{\sigma}{n^2},\; \sigma_\theta = \sigma, \quad (2)$$

определяется параметр

$$n^2 = n_1 n_2 .$$

В литературе, например в [1], рассматривались вопросы изгиба круглых пластин постоянной толщины, лежащих на упругом основании, свойства которого описываются моделью Винклера. Там исходное разрешающее уравнение четвёртого порядка с переменными коэффициентами можно заменить системой двух сопряжённых дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых является уравнением Бесселя.

При рассмотрении случаев изгиба пластин из анизотропного материала анализ разрешающего дифференциального уравнения четвёртого порядка показал, что никогда, ни при каких значениях параметров оно не распадается на два взаимно сопряжённых. Таким образом, существовавшая ранее методика, предложенная для изотропных пластин и связанная с применением МКН [3], [4], при рассмотрении вопросов об анизотропных средах и получении решений в замкнутом виде в функциях Бесселя в подобных задачах не годится.

Введём в рассмотрение уравнение Нильсена, имеющее следующий вид [4]:

$$r^4\frac{d^4w}{dr^4}+A_3r^3\frac{d^3w}{dr^3}+A_2r^2\frac{d^2w}{dr^2}+A_1r\frac{dw}{dr}+A_0w=0, \tag{3}$$

где соответственно

$$A_3=6-4a-4c;$$
$$A_2=2(a^2-\mu^2c^2)+4(a+c-1)^2+4(a-1)(c-1)-1;$$
$$A_1=\left[2(\mu^2c^2-a^2)-(2a-1)(2c-1)\right](2a+2c-1);$$
$$A_0=(a^2-\mu^2c^2)(a^2+4ac+4c^2-\mu^2c^2)-b^4c^4r^{4c}.$$

Решение уравнения (3) выражается в функциях Бесселя и может быть представлено в следующей форме:

$$w=r^a\left[C_1J_\mu(u)+C_2Y_\mu(u)+C_3I_\mu(u)+C_4K_\mu(u)\right],\ u=br^c, \tag{4}$$

здесь J_μ, Y_μ, I_μ, K_μ - функции Бесселя.

Далее сопоставим уравнения (3) и (4). Они подобны, если мы положим, что

$$a^2-\mu^2c^2=0 \tag{5}$$

или

$$a^2+4ac+4c^2-\mu^2c^2=0. \tag{6}$$

В результате получим

$$c=1,\ a=0,\ b=\sqrt[4]{\frac{k}{n_2D}}i^{1/2}.$$

Из условия (5) получим $\mu=0$, а из условия (6) имеем $\mu=\pm2$.

Общее решение дифференциального уравнения для случая $\mu=0$:

$$w=C_1J_0\left(bri^{1/2}\right)+C_2Y_0\left(bri^{1/2}\right)+C_3I_0\left(bri^{1/2}\right)+C_4K_0\left(bri^{1/2}\right). \tag{7}$$

При $\mu=\pm2$ общее решение того же уравнения имеет следующий вид:

$$w=B_1u_\mu(br)+B_2\upsilon_\mu(br)+B_3f_\mu(br)+B_4g_\mu(br). \tag{8}$$

Выражения для u_μ, υ_μ, f_μ, g_μ приводятся в [2].

Таким образом, с помощью указанного выше приёма удалось получить решение исследуемой задачи в функциях Бесселя.

2. МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК

Применим метод компенсирующих нагрузок к рассмотрению задачи о круглой ортотропной пластине, лежащей на упругом винклеровском основании. Ищем решение задачи в виде суммы основного w_0 и компенсирующего w_k решений [1], [3], [4]. Основным назовём такое решение, которое, удовлетворяя дифференциальному уравнению, описывающему задачу, содержит особенности, отражающие тот или иной тип нагрузки. В большинстве случаев основное решение рассматривается как решение задачи о загружении неограниченной пластины. Для того чтобы искомое решение удовлетворяло граничным условиям, вводится компенсирующее решение.

3. ОСНОВНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим задачу о бесконечной ортотропной пластине, загруженной сосредоточенной силой. Примем начало координат в точке приложения силы. В качестве примера рассмотрим случай $\mu = \pm 2$. Тогда уравнение упругой поверхности имеет вид (8). Введём безразмерную координату $x = br$.

Определим постоянные интегрирования B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . Для бесконечной пластины, когда аргумент $x \to \infty$, как следует из теории специальных функций, $u_\mu(x)$ и $\upsilon_\mu(x)$ обращаются в бесконечность. Поскольку для изучаемой задачи перемещения и усилия при $x \to 0$ должны обращаться в нуль, примем

$$B_1 = B_2 = 0 .$$

Рассмотрим условия в начале координат; при $x = 0$ прогиб должен оставаться конечным. Поскольку при $x \to 0$ функция g_μ стремится к бесконечности, а функция f_μ остаётся конечной, положим $B_4 = 0$. Таким образом, имеем:

$$w = B_3 f_\mu(x). \tag{9}$$

Для определения постоянной B_3 запишем выражение для поперечной силы Q_1 . Для этого, исходя из условий равновесия, следует приравнять предел, к которому стремится эта сила при $x \to 0$, величине

$$-\frac{Pb}{2\pi x}.$$

С другой стороны, исходя из уравнения упругой поверхности (8) и формул, приведённых в [2], запишем

$$Q = -Db^3 B_3 g_0(x).$$

Исходя из теории,

$$\text{при } x \to 0 \;\; g_\mu{}'(x) = \frac{2}{\pi x},$$

получим выражение для

$$B_3 = \frac{P}{4Db^2}.$$

В результате уравнение упругой поверхности изучаемой пластины имеет вид:

$$w = \frac{P}{4Db^2} f_0(x). \tag{10}$$

Положим $P = 1$; в этом случае указанное выше выражение является основной функцией влияния. Определив указанную основную функцию влияния, можно получить решения ряда задач о бесконечных пластинах при различных загружениях. Упомянутые решения назовём основными. Для этого воспользуемся принципом сложения воздействий, дающим возможность при интегрировании основной функции влияния (10) получить искомое решение.

Перейдём к решению задачи о бесконечной ортотропной пластине, загруженной нагрузкой q , равномерно распределённой по окружности с приведённым радиусом α .

Для составления уравнения упругой поверхности следует сначала найти элементарный прогиб в точке A с приведёнными коэффициентами (x, φ) от действия элементарной нагрузки, приходящейся на участок дуги длиной

$$\frac{\alpha}{b} d\theta$$

и приложенной в точке B с приведёнными коэффициентами (α, θ) [1].

Запишем выражение для приведённого расстояния между точками A и B:

$$z = \sqrt{x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \cos(\theta - \varphi)}.$$

Элементарный прогиб в точке A, вызванный элементарной нагрузкой, равен

$$dw = \frac{q\alpha d\theta}{4Db^3} f_\mu(z). \qquad (11)$$

Интегрируя приведённое выше выражение (11), получим:

$$w = \frac{q\alpha}{4Db^3} \int_0^{2\pi} f_\mu\left(\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x \cos(\theta - \varphi)}\right) d\theta. \qquad (12)$$

Используя формулу сложения цилиндрических функций, выполняя интегрирование и отделяя действительную часть, получим выражения для прогибов:

при $x \le \alpha$

$$w = \frac{\pi q \alpha}{2Db^3} \left[f_\mu(\alpha) u_\mu(x) - g_\mu(\alpha) \upsilon_\mu(x)\right], \qquad (13)$$

при $x \ge \alpha$

$$w = \frac{\pi q \alpha}{2Db^3} \left[u_\mu(\alpha) f_\mu(x) - \upsilon_\mu(\alpha) g_\mu(x)\right]. \qquad (14)$$

Далее можно получить формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. В качестве примера приведём формулы для изгибающего момента G_1:

при $x \le \alpha$

$$G_1 = -\frac{\pi q \alpha}{2b} \left\{ f_\mu(\alpha) \left[\upsilon_\mu(x) - (1-\sigma) \frac{u_\mu'(x)}{x} \right] + g_\mu(\alpha) \left[u_\mu(x) + (1-\sigma) \frac{\upsilon_\mu'(x)}{x} \right] \right\}, \qquad (15)$$

при $x \ge \alpha$

$$G_1 = -\frac{\pi q \alpha}{2b} \left\{ u_\mu(\alpha) \left[g_\mu(x) - (1-\sigma) \frac{f_\mu'(x)}{x} \right] + \upsilon_\mu(\alpha) \left[f_\mu(x) + (1-\sigma) \frac{g_\mu'(x)}{x} \right] \right\}. \qquad (16)$$

Рассмотрим решение задачи о пластинах бесконечного радиуса, загруженных осесимметричными нагрузками, распределёнными по круговым областям. Для этого следует интегрировать приведённые выше решения.

В качестве примера решим задачу о бесконечной ортотропной пластине, находящейся под действием нагрузки q_0, равномерно распределённой по площади кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с приведёнными радиусами α_1 и α_2. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Для построения решения следует проинтегрировать выражения (13) и (14), заменив в них нагрузку q элементарной нагрузкой

$$\frac{q_0 d\alpha}{b}.$$

В результате получим:

при $x \le \alpha_1$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k} \left\{ \left[\alpha_2 g_0'(\alpha_2) - \alpha_1 g_0'(\alpha_1)\right] u_0(x) + \left[\alpha_2 f_0'(\alpha_2) - \alpha_1 f_0'(\alpha_1)\right] \upsilon_0(x) \right\}; \qquad (17)$$

при $\alpha_1 \le x \le \alpha_2$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k}\{\alpha_2 g_0'(\alpha_2)u_0(x) + \alpha_2 f_0'(\alpha_1)\upsilon_0(x) - \\ -\alpha_1 u_0'(\alpha_1)g_0(x) - \alpha_1\upsilon_0'(\alpha_1)f_0(x) - \frac{2}{\pi}\}, \tag{18}$$

при $x \ge \alpha_2$

$$w = -\frac{\pi q_0}{2k}\{[\alpha_2\upsilon_0'(\alpha_2) - \alpha_1\upsilon_0'(\alpha_1)]f_0(x) + \\ +[\alpha_2 u_0'(\alpha_2) - \alpha_1 u_0'(\alpha_1)]g_0(x)\}. \tag{19}$$

Для того чтобы получить решение о неограниченной пластине, загруженной силами q_0, равномерно распределёнными по площади круга, ограниченного окружностью с приведённым радиусом α, следует в решениях (17)-(19) положить

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha .$$

Используя полученные результаты, можно получить основные решения для случаев загружения угловыми деформациями и моментами, распределёнными по окружностям, и другие задачи.

4. КОМПЕНСИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ

Решение представим в виде:

$$w = w_0 + w_k. \tag{20}$$

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглой ортотропной пластины, лежащей на упругом винклеровском основании. Пластина не имеет отверстия и её приведённый радиус равен β. Искомую компенсирующую нагрузку w_k можно рассматривать как результат влияния некоторой специально подобранной нагрузки, действующей по окружности с радиусом, равным или большим β. При $x = 0$ функции $f_\mu(x)$ и $g_\mu(x)$ имеют особенности, поэтому не войдут в компенсирующее решение. Представим его в следующем виде:

$$w = Au_\mu(x) + B\upsilon_\mu(x). \tag{21}$$

Для сокращения записи будем пользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} u_\mu^{(M)}(\beta) &= -u_\mu(\beta) - (1-\sigma)\frac{\upsilon_0'(\beta)}{\beta}, \\ \upsilon_\mu^{(M)}(\beta) &= \upsilon_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{u_0'(\beta)}{\beta}, \\ f_0^{(M)}(\beta) &= -f_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{g_0'(\beta)}{\beta}, \\ g_0^{(M)}(\beta) &= g_0(\beta) - (1-\sigma)\frac{f_0'(\beta)}{\beta}. \end{aligned} \tag{22}$$

Обозначим через w_0, φ_0, M_0, Q_0 соответственно прогиб, угол поворота, радиальный изгибающий момент и перерезывающую силу для основного решения при $x = \beta$. Рассмотрим несколько частных примеров.

а) Пластина со свободным контуром. В этом случае на контуре при $x = \beta$ радиальный изгибающий момент и поперечная сила равны нулю:

$$M_1(\beta) = 0,\ Q_1(\beta) = 0. \tag{23}$$

Внесём в граничные условия (23) зависимости (20) и (21) и получим следующие выражения:

$$Q_0 - Db^3\left[A\upsilon_0'(\beta) - Bu_0'(\beta)\right] = 0, \tag{24}$$

$$M_0 - Db^3\left[A\upsilon_0^{(M)}(\beta) + Bu_0^{(M)}(\beta)\right] = 0. \tag{25}$$

Отсюда определим коэффициенты A и B; имеем:

$$A = \frac{1}{Db^2}\frac{M_0 u_0'(\beta) + Q_0\ell u_0^{(M)}(\beta)}{u_0'(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta) + \upsilon_0'(\beta)u_0'^{(M)}(\beta)}, \tag{26}$$

$$B=\frac{1}{Db^2}\frac{M_0\upsilon_0'(\beta)-Q_0\ell\upsilon_0^{(M)}(\beta)}{u_0'(\beta)\upsilon_0'^{(M)}(\beta)+\upsilon_0'(\beta)u_0^{(M)}(\beta)}. \quad (27)$$

Далее внесём (26) и (27) в выражения (20) и (21) и получим искомое решение. Затем можно приступить к нахождению усилий.

б) Пластина с зажатым наружным контуром. В этом случае

$$\text{при } x=\beta \quad w=0,\ \frac{dw}{dx}=0.$$

Коэффициенты A и B определяются из следующих выражений:

$$\overline{w}_0+Au_0(\beta)+B\upsilon_0(\beta)=0, \quad (28)$$

$$\frac{\varphi_0}{b}+Au_0'(\beta)+B\upsilon_0'(\beta)=0, \quad (29)$$

и, следовательно,

$$A=\frac{\overline{w}_0\upsilon_0'(\beta)-\varphi_0\ell\upsilon_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)u_0'(\beta)-u_0(\beta)\upsilon_0'(\beta)}, \quad (30)$$

$$B=\frac{\overline{w}_0u_0'(\beta)-\varphi_0\ell u_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)u_0'(\beta)-u_0(\beta)\upsilon_0'(\beta)}. \quad (31)$$

в) Пластина с шарнирным опиранием по контуру. В этом случае граничные условия имеют вид:

при $x=\beta$ $w=0$, $G_1=0$,

$$\overline{w}_0+Au_0(\beta)+B\upsilon_0(\beta)=0, \quad (32)$$

$$M_0-Db^2\left[A\upsilon_0^{(M)}(\beta)+Bu_0^{(M)}(\beta)\right]=0, \quad (33)$$

откуда имеем:

$$A=\frac{\overline{w}_0u_0^{(M)}(\beta)-\frac{M_0}{Db^2}u_0(\beta)}{\upsilon_0(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta)-u_0(\beta)u_0^{(M)}(\beta)},$$

$$B=\frac{\frac{M_0}{Db^2}u_0(\beta)-\overline{w}_0\upsilon^{(M)}(\beta)}{\upsilon_0(\beta)\upsilon_0^{(M)}(\beta)-u_0(\beta)u_0^{(M)}(\beta)}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые удалось получить решение задачи об осесимметричном изгибе круглой пластины, лежащей на упругом винклеровском основании, сделанной из материала, обладающего цилиндрической анизотропией. Результат даётся в цилиндрических функциях. К полученному решению применён метод компенсирующих нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коренев Б.Г.** Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 458 с.
2. **Коренева Е.Б.** Аналитические методы расчёта пластин переменной толщины и их практические приложения. – М.: АСВ, 2009. – 240 с.
3. **Koreneva E.B.** Method of Compensating Loads for Solving of a Problems of Unsymmetric Bending of Infinite Ice Slab with Circular Opening. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13(2), 2017, pp. 50-55.
4. **Коренева Е.Б.** Моделирование работы ледовой плиты с отверстием. Решение в функциях Бесселя. // Строительная механика и расчёт сооружений, №3, 2017, с. 20-24.

REFERENCES

1. **Korenev B.G.** Nekotoryye Zadachi Teorii Uprugosti i Teploprovodnosti, Reshayemyye v Besselevykh Funktsiyakh [Some Problems in the Theory of Elasticity and Heat Conduction, Solved in Bessel Functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 458 pages.
2. **Koreneva E.B.** Analiticheskiye Metody Rascheta Plastin Peremennoy Tolshchiny i ikh Prakticheskiye Prilozheniya [Analytical Methods for Calculating Variable Thickness

Plates and Their Practical Applications]. Moscow, ASV, 2009, 240 pages.

3. **Koreneva E.B.** Method of Compensating Loads for Solving of a Problems of Unsymmetric Bending of In-finite Ice Slab with Circular Opening. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 13(2), 2017, pp. 50-55.
4. **Koreneva E.B.** Modelirovaniye Raboty Ledovoy Plity s Otverstiyem. Resheniye v Funktsiyakh Besselya [Modeling the Operation of an ice Plate with a Hole. Solution in Bessel Functions]. // Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy, №3, 2017, s. 20-24.

Коренева Елена Борисовна, доктор технических наук, Московское высшее общевойсковое командное орденов Жукова, Ленина и Октябрьской Революции Краснознамённое училище; 109380, Россия, г.Москва, ул. Головачёва, д.2, тел.: +7(499)175-82-45;
E-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.

Elena B. Koreneva, Dr.Sc., Moscow Higher Combined-Arms Command Academy, ul. Golovacheva, 2, 109380, Moscow, Russia, tel. +7(499)175-82-45;
E-mail: elena.koreneva2010@yandex.ru.